MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPO LEVI

AÑO CUARTO - FASC. 1



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1944

AUTORIDADES DE LA FACULTAD

Delegado Interventor
Arquitecto ERMETE DE LORENZI

Secretario
Ingeniero LUIS AYMI

INDICE

	PÁG.
Deducción elemental de las series sen x y cos x (J. V. Uspenky)	1
Propiedades de las curvas convexas esféricas (Luis A. Santaló)	11
Sobre la cuestión nº 9 (R. Frucht. — B. Levi)	41
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	47
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	60
Bibliografía (B. Levi)	62

DONADO
EN MEMORIA DEL PROFESOR
INCO. JORGE A. LOUREIRO

DEDUCCION ELEMENTAL DE LAS SERIES
sen x Y cos x

1. En el curso sobre las matemáticas elementales, que dicto regularmente en la Universidad de Stanfort a los estudiantes, que en su mayoría tiene la intención de dedicarse a la enseñanza secundaria, tengo la costumbre, entre otras cosas, de tratar bajo un punto de vista histórico los distintos procedimientos de aproximación que pueden emplearse y que han sido efectivamente empleados para la construcción de tablas matemáticas fundamentales como aquellas de logaritmos y de funciones trigonométricas.

Hablando por ejemplo de estas últimas he intentado representar el conjunto de los métodos inventados en diversas épocas para el cálculo aproximado de funciones trigonométricas, de acuerdo a las notaciones modernas y con el rigor necesario, pero no empleando más que procedimientos de demostración que pudieran adaptarse al nivel de los conocimientos de la época en que esos métodos han sido descubiertos.

Conducido así a hablar de las series célebres que representan sen x y cos x, que fueron descubiertas por Newton hacia 1669 por una vía muy indirecta y poco rigurosa, experimenté la dificultad de no hallarme en condiciones de dar la deducción de esas series y sobre todo de ciertas desigualdades de las que dichas series se derivan, con medios que no sobrepasaran el nivel de los conocimientos de esa época y completamente rigurosos. No podía hacer uso de numerosas deducciones «elementales» conocidas, ya que ellas emplean todas la noción de límite, la que ha sido aclarada completamente solamente al comienzo del siglo XIX. No podía recurrir a los métodos simples del cálculo infinitesimal por la misma razón. En fin, el año pasado he llegado a encontrar una demostración verdaderamente elemental, que creo «nueva», no empleando más que el álgebra y el principio que una cantidad más pequeña que un número positivo arbitrario es necesariamente o nula o negativa.

Esta demostración será el objeto de esta nota. Ella puede parecer un poco larga, pero es perfectamente elemental en el sentido que, aparte del álgebra, no exige ninguna cosa que no haya sido conocida desde los tiempos de Euclides o de Arquímedes.

2. Un lema muy simple y que podrá ser útil en otras ocasiones y servirá de base a la demostración que se va a leer es el siguiente:

LEMA. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ números positivos no nulos. Consideremos el polinomio en ξ de grado s

$$T = a_0 - a_1 \xi + a_2 \xi^2 - \ldots + (-1)^s a_s \xi^s.$$

Sea igualmente

$$T^n = A_0 - A_1 \xi + A_2 \xi^2 - \ldots + (-1)^m A_m \xi^m + \ldots$$

el desarrollo de la n-ma potencia del polinomio T siendo n un número entero positivo cualquiera; los coeficientes A_r serán todos positivos (1). Atribuimos a ξ un valor positivo menor que el mínimo de los cocientes $a_{i-1} : a_i$, para $i = 1, 2, \ldots, s$; será luego

$$a_0 > a_1 \xi > a_2 \xi^2 > \ldots > a_s \xi^s.$$

Decimos que *se tendrá, para* $m < ns$,

$$T^n > A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m \qquad \textit{si } m \textit{ es impar};$$

$$T^n < A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m \qquad \textit{si } m \textit{ es par}.$$

Demostración. En virtud de las desigualdades

$$a_0 > a_1 \xi > a_2 \xi^2 > \ldots > a_s \xi^s$$

el lema es realizado para $n = 1$. Supongamos que sea cierto

---

(1) En efecto efectuando el producto

$$(a_0 - a_1 \xi + a_2 \xi^2 - \ldots)(b_0 - b_1 \xi + b_2 \xi^2 - \ldots)$$

se obtiene

$$a_0 b_0 - (a_1 b_0 + a_0 b_1) \xi + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \xi^2 - \ldots$$

y claramente cada uno de los coeficientes en paréntesis es una suma de términos positivos, si se suponen positivas las a_i y las b_i; se infiere luego la afirmación del texto por inducción.

para un valor de n cualquiera, demostraremos que es cierto para el valor $n+1$ y quedará así generalizado por inducción.

Sea

$$T^{n+1} = B_0 - B_1 \xi + \ldots + (-1)^m B_m \xi^m + \ldots,$$

donde m es un número determinado $< (n+1)\, s$. El desarrollo del producto

$$(A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m)(a_0 - a_1 \xi + \ldots + (-1)^s a_s \xi^s)$$

según las potencias crecientes de ξ tendrá los mismos $m+1$ primeros términos que el desarrollo de T^{n+1}; desde luego hay que suponer $A_r = 0$ para $r > ns$. Para uniformidad de escritura admitiremos a continuación coeficientes a_r con $r > s$, con la convención que ellos representen el valor 0.

Se tendrá

$$(A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m)(a_0 - a_1 \xi + \ldots + (-1)^s a_s \xi^s)$$
$$= B_0 - B_1 \xi + \ldots + (-1)^m B_m \xi^m + R_m$$

donde

$$R_m = (-1)^{m+1} \xi^{m+1} [A_m (a_1 - a_2 \xi + \ldots) +$$
$$A_{m-1} (a_2 - a_3 \xi + \ldots) + \ldots + A_0 (a_{m+1} - a_{m+2} \xi + \ldots)].$$

Por lo dicho los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{ns}$ son positivos y aquellos de índices mayores que ns son nulos. Luego la cantidad entre corchetes es positiva o nula. Digo que es positiva, pues cada término

$$A_i (a_{m+1-i} - a_{m+2-i} \xi + \ldots)$$

es positivo o nulo y es ciertamente positivo para $m+1-s \leqq i \leqq ns$; desigualdad ésta que manifiestamente está satisfecha por algún i, ya que $m+1 \leqq (n+1)\, s$. Luego $R_m > 0$ si m es impar y $R_m < 0$ si m es par.

Sentado esto, sea m un número impar; se tiene por la hipótesis

$$T^n \geqq A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m,$$

siendo valedero el signo de igualdad si $m \geqq ns$. Por tanto

$$T^{n+1} \geqq$$

$$(A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m)(a_0 - a_1 \xi + \ldots + (-1)^s a_s \xi^s)$$

y así

$$T^{n+1} > B_0 - B_1 \xi + \ldots + (-1)^m B_m \xi^m$$

ya que $R_m > 0$; lo que se quería demostrar.

Sea ahora m un número par. En ese caso se tiene, por la hipótesis,

$$T^n \leqq A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m.$$

Por consiguiente

$$T^{n+1} \leqq$$

$$(A_0 - A_1 \xi + \ldots + (-1)^m A_m \xi^m)(a_0 - a_1 \xi + \ldots + (-1)^s a_s \xi^s)$$

y así

$$T^{n+1} < B_0 - B_1 \xi + \ldots + (-1)^m B_m \xi^m$$

ya que $R_m < 0$; es lo que era necesario demostrar.

Nota. — El lema que hemos demostrado es una generalización de una proposición frecuentemente usada: si $x > -1$ se tiene $(1+x)^n > 1 + nx$ para n entero > 1.

3. PROBLEMA. — Poniendo

$$\left(1 - \frac{\xi}{3!} + \frac{\xi^2}{5!} - \ldots + (-1)^s \frac{\xi^s}{(2s+1)!}\right)^2 = K_0 + K_1 \xi + K_2 \xi^2 + \ldots$$

$$\left(1 - \frac{\xi}{3!} + \frac{\xi^2}{5!} - \ldots + (-1)^s \frac{\xi^s}{(2s+1)!}\right)^3 = L_0 + L_1 \xi + L_2 \xi^2 + \ldots$$

determinar K_α y L_α para $\alpha \leqq s$.

Solución. — Suponiendo que $\alpha \leqq s$ se encuentra

$$K_\alpha = (-1)^\alpha \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{1}{(2i+1)!\,(2\alpha+1-2i)!} = \frac{(-1)^\alpha}{(2\alpha+2)!} \sum_{i=0}^{\alpha} C_{2\alpha+2}^{2i+1}\ ;\ (1)$$

como

$$\sum_{i=0}^{\alpha} C_{2\alpha+2}^{2i+1} = 2^{2\alpha+1},$$

se tendrá finalmente

$$K_\alpha = \frac{(-1)^\alpha\ 2^{2\alpha+1}}{(2\alpha+2)!}.$$

Para $\alpha \leqq s$ se tendrá también

$$L_\alpha = (-1)^\alpha \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i \frac{K_i}{(2\alpha-2i+1)!},$$

o bien, substituyendo la expresión precedente de K_α,

$$L_\alpha = \frac{(-1)^\alpha}{2(2\alpha+3)!} \sum_{i=0}^{\alpha} C_{2\alpha+3}^{2i+2}\ 2^{2i+2};$$

pero del desarrollo

$$\frac{(1+x)^{2\alpha+3}+(1-x)^{2\alpha+3}}{2} = 1 + C^2_{2\alpha+3}\,x^2 + C^4_{2\alpha+3}\,x^4 + \ldots,$$

poniendo $x=2$, se deduce

$$\sum_{i=0}^{\alpha} C_{2\alpha+3}^{2i+2}\ 2^{2i+2} = \frac{3^{2\alpha+3}-3}{2};$$

luego, por fin,

$$L_\alpha = (-1)^\alpha \frac{3^{2\alpha+3}-3}{4(2\alpha+3)!}.$$

---

(1) $C_s^r = \binom{s}{r}$ representa el número de las combinaciones de clase r de s objetos

$$C_s^r = \frac{s!}{r!\,(s-r)!}$$

Si atribuimos a ξ un valor positivo <6 las desigualdades

$$1>\frac{\xi}{3!}>\frac{\xi^2}{5!}>\ldots>\frac{\xi^s}{(2s+1)!}$$

serán satisfechas.

Podremos luego aplicar nuestro lema con $m=s$, y, teniendo en cuenta las expresiones encontradas para K_α y L_α, se tendrá

$$\left(1-\frac{\xi}{3!}+\frac{\xi^2}{5!}-\ldots+(-1)^s\frac{\xi^s}{(2s+1)!}\right)^2\gtrless\sum_{\alpha=0}^{s}(-1)^\alpha\frac{2^{2\alpha+1}}{(2\alpha+2)!}\xi^\alpha \tag{1}$$

según sea s impar o par.

Lo mismo

$$4\left(1-\frac{\xi}{3!}+\frac{\xi^2}{5!}-\ldots+(-1)^s\frac{\xi^s}{(2s+1)!}\right)^3\gtrless\sum_{\alpha=0}^{s}(-1)^\alpha\frac{3^{2\alpha+3}-3}{(2\alpha+3)!}\xi^\alpha \tag{2}$$

según que s sea impar o par.

4. Se sabe como se deduce, partiendo de la desigualdad $\operatorname{sen} x<x$ para un valor positivo de x, esta otra desigualdad:

$$\operatorname{sen} x>x-\frac{x^3}{6}.$$

Ver por ejemplo el excelente Tratado de Trigonometría de J. A. Serret; del mismo modo nosotros haremos ver que

$$\operatorname{sen} x<x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{4r-3}}{(4r-3)!} \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} x>x-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^{4r-1}}{(4r-1)!} \tag{4}$$

siempre que se suponga $x^2<54$, lo cual es más que bastante para todas las aplicaciones numéricas.

Partiendo de la fórmula de la triplicación del argumento

$$\operatorname{sen} 3y=3\operatorname{sen} y-4\operatorname{sen}^3 y$$

y poniendo en ella sucesivamente

$$y=\frac{x}{3},\ \frac{x}{3^2},\ \ldots,\ \frac{x}{3^n},$$

de las igualdades obtenidas se deduce fácilmente

$$\operatorname{sen} x=3^n \operatorname{sen}\frac{x}{3^n}-4\left(\operatorname{sen}^3\frac{x}{3}+3\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^n}\right),$$

es decir, bajo una forma condensada,

$$\operatorname{sen} x=3^n \operatorname{sen}\frac{x}{3^n}-4\sum_{m=1}^{n}3^{m-1}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^m};$$

para establecer (3) y (4) vamos a proceder por inducción.

Supongamos que la desigualdad (3) sea verdadera para un cierto valor de r.

Vamos a probar que para el mismo valor de r se verifica la desigualdad (4) si $x^2<54$. En efecto, tomando en (2) $s=2r-2$ y

$$\xi=\left(\frac{x}{3^m}\right)^2<\frac{54}{3^{2m}}=\frac{6}{3^{2(m-1)}},$$

se encuentra

$$4.3^{m-1}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^m}<\sum_{\alpha=0}^{2r-2}(-1)^\alpha\frac{3^{2\alpha+2}-1}{(2\alpha+3)!}\cdot\frac{x^{2\alpha+3}}{3^{(2\alpha+2)m}};$$

y, como

$$\sum_{m=1}^{n}3^{-(2\alpha+2)m}=\frac{1}{3^{2\alpha+2}-1}-\frac{1}{3^{(2\alpha+2)n}(3^{2\alpha+2}-1)},$$

$$4\sum_{m=1}^{n}3^{m-1}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^m}=$$

$$\sum_{\alpha=0}^{2r-2}(-1)^\alpha\frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)!}-\sum_{\alpha=0}^{2r-2}(-1)^\alpha\frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)!}\frac{1}{3^{(2\alpha+2)n}}.$$

Pero la suma alternada a términos decrecientes

$$\sum_{\alpha=0}^{2r-2}(-1)^{\alpha}\frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)!}\frac{1}{3^{(2\alpha+2)n}}$$

es positiva, luego

$$\operatorname{sen} x > 3^n \operatorname{sen}\frac{x}{3^n} - \frac{x^3}{3!} - \ldots - \frac{x^{4r-1}}{(4r-1)!};$$

y, teniendo en cuenta la desigualdad elemental (1)

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{4},$$

resultará

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{4r-1}}{(4r-1)!} - \frac{x^3}{4.9^n}.$$

Esta desigualdad, debiendo tener lugar para todo valor de n y la cantidad $\frac{x^3}{4.9^n}$ pudiendo hacerse pequeña como se quiera al crecer n, sigue necesariamente

$$\operatorname{sen} x \geqq x - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{4r-1}}{(4r-1)!}$$

y se ve fácilmente que el signo de igualdad es imposible acá.

Supongamos que la desigualdad (4) tiene lugar para un valor determinado de r; haremos ver que

$$\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{4r+1}}{(4r+1)!},$$

es decir la desigualdad (3) en la que se ha cambiado r en $r+1$. Esta vez se tomará

$$\xi = \left(\frac{x}{3^n}\right)^2 \quad \text{y} \quad s = 2r-1$$

en (2); resultará

$$4.3^{m-1}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^m} > \sum_{\alpha=0}^{2r-1}(-1)^{\alpha}\frac{3^{2\alpha+2}-1}{(2\alpha+3)!}\frac{x^{2\alpha+3}}{3^{(2\alpha+2)m}};$$

(1) Ver por ej. *Traité de Trigonométrie* de J. A. SERRET. París. Gauthier-Villars, 10me edit., 1916, pág. 56.

y, como

$$\sum_{m=1}^{n} 3^{-(2\alpha+2)n} = \frac{1}{3^{2\alpha+2}-1} - \frac{1}{3^{(2\alpha+2)n}(3^{2\alpha+2}-1)},$$

se tendrá también

$$4\sum_{m=1}^{n} 3^{m-1} \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^m} >$$

$$\sum_{\alpha=0}^{2r-1} (-1)^{\alpha} \frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)!} - \sum_{\alpha=0}^{2r-1} (-1)^{\alpha} \frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)!} \cdot \frac{1}{3^{(3\alpha+2)n}}.$$

Pero la segunda Σ, siendo de términos decrecientes y con signos alternados es más pequeña que su primer término que es $\frac{x^3}{6.9^n}$. Por consiguiente

$$4\sum_{m=1}^{n} 3^{m-1} \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^m} > \sum_{\alpha=0}^{2r-1} (-1)^{\alpha} \frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)!} - \frac{x^3}{6.9^n}$$

y al mismo tiempo, visto que,

$$3^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} < x,$$

se tendrá

$$\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{4r+1}}{(4r+1)!} + \frac{x^3}{6.9^n}.$$

La cantidad $\frac{x^3}{6.9^n}$ puede ser pequeña como se quiera, de manera que

$$\operatorname{sen} x \leqq x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{4r-1}}{(4r+1)!},$$

y es fácil ver que el signo de la igualdad es imposible. Luego

$$\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{4r+1}}{(4r+1)!}.$$

Ahora, como $\operatorname{sen} x < x$ para cualquier valor de x, (lo que

es un caso particular de la desigualdad (3) correspondiente a $r=1$), se tendrá, en virtud de lo que se ha demostrado,

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!}.$$

Luego

$$\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

y

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

y así sucesivamente.

Por consiguiente las desigualdades (3) y (4) se hallan completamente demostradas suponiendo $x^2 < 54$.

Ellas son verdaderas, como se sabe, para todo valor positivo de x, pero esto importa poco para las aplicaciones numéricas.

5. De la desigualdad (1) y poniendo $\xi = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ resulta, para $x^2 < 24$ y teniendo en cuenta las desigualdades (3) y (4),

$$2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} > \sum_{\alpha=0}^{2r-1} \frac{(-1)^\alpha}{(2\alpha+2)!} x^{2\alpha+2}$$

y

$$2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} < \sum_{\alpha=0}^{2r-2} \frac{(-1)^\alpha}{(2\alpha+2)!} x^{2\alpha+2};$$

de donde, en razón de ser $\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{4r}}{(4r)!}$$

y

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4r-2}}{(4r-2)!}$$

para un entero positivo cualquiera r, suponiendo $x^2 < 24$.

J. V. Uspensky

STANFORD UNIVERSITY (CALIFORNIA, U. S. A.)

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS CONVEXAS SOBRE LA ESFERA

Introducción.

Supongamos la superficie esférica de radio unidad. Una curva cerrada situada sobre esta superficie se dice que es una *curva convexa*, cuando no puede ser cortada por un círculo máximo en más de dos puntos.

Toda curva convexa puede estar contenida en una semiesfera. Para verlo basta, en efecto, considerar un círculo máximo tangente en un punto en que no atraviese a la curva; este círculo máximo, no pudiendo tener con la curva más de dos puntos comunes, no puede penetrar de nuevo en el interior de la misma y por lo tanto la deja toda ella en una semiesfera.

Por consiguiente, de las dos regiones en que una curva convexa divide a la superficie esférica, hay siempre una de área igual o menor que una semiesfera. Esta región, junto con la curva que la limita, se dice que constituye una *figura convexa*.

Se llama *círculo máximo de apoyo* de una figura convexa K a todo círculo máximo que tiene algún punto común con K sin atravesarla, es decir, dejándola toda de un mismo lado. Los círculos máximos tangentes al contorno de K son círculos máximos de apoyo, pero la definición de estos últimos es más general, pues comprende, por ejemplo, a los círculos máximos que pasan por los puntos angulosos del contorno de K sin atravesar a la figura. Por todo punto del contorno de K pasa, por lo menos, un círculo máximo de apoyo.

Interesan las siguientes definiciones, análogas a las comúnmente empleadas para las figuras convexas planas (1):

(1) Para lo referente a figuras convexas planas se puede ver Bonnesen-Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlín, 1934. A este libro nos referiremos en lo sucesivo con solo el nombre de los autores Bonnesen-Fenchel.

Longitud o perímetro L de una figura convexa es la longitud de la curva que constituye su contorno. Suponiendo la esfera de radio unidad, la longitud de cualquier figura convexa sobre la misma es siempre igual o menor que un círculo máximo, o sea, $L \leqq 2\pi$.

Area F de una figura convexa es el área de la región limitada por una curva convexa. Se entiende siempre la región que es menor que una semiesfera y por tanto $F \leqq 2\pi$.

Diámetro D es la distancia máxima entre dos puntos de la figura convexa, medida por la longitud del arco de círculo máximo que los une. Esta distancia es siempre igual o menor que medio círculo máximo, o sea, $D \leqq \pi$.

Espesor E, es el elemento «dual» del diámetro. Consideremos el ángulo que forman dos círculos máximos que no cortan a la figura convexa y que formán un huso que contiene a la misma. El mínimo de todos estos ángulos, o sea, el ángulo correspondiente al huso esférico de abertura mínima que contiene a la figura convexa, se llama espesor de la misma. Es $E \leqq \pi$.

También utilizaremos en lo sucesivo el radio ρ del *círculo inscrito*, entendiendo por tal el círculo de mayor radio contenido totalmente en el interior de la figura convexa, y el radio R del *círculo circunscrito* o círculo de menor radio que puede contener a la misma. Ambos radios ρ, R se entienden radios esféricos, es decir, medidos como arcos de círculo máximo. Por tanto $\rho \leqq \frac{\pi}{2}$, $R \leqq \frac{\pi}{2}$.

Nuestro objeto va a consistir en estudiar ciertas relaciones entre los elementos anteriores de las figuras convexas esféricas. Todas ellas son generalización de relaciones conocidas entre los elementos análogos de las figuras convexas planas. Lo interesante en estudiarlas sobre la esfera es que ellas aparecen a pares, es decir, como veremos, a cada relación o propiedad corresponde una relación o propiedad «dual», de manera que con una sola demostración se obtienen dos proposiciones que en el plano aparecen a veces como diferentes y precisan una demostración para cada una.

Recordemos desde ahora que la longitud L_0 y el área F_0 de un círculo menor de radio esférico r valen

$$L_0 = 2\pi \operatorname{sen} r \qquad F_0 = 2\pi (1 - \cos r). \tag{1}$$

Observaciones sobre «dualidad» en la esfera. Recordemos brevemente lo que se entiende por «dualidad» sobre la esfera.

Consideremos la transformación que a cada círculo máximo le hace corresponder su polo, o sea, uno de los extremos del diámetro perpendicular al mismo. En esta transformación a un «arco», conjunto de puntos contenidos en un círculo máximo, corresponderá un «ángulo», conjunto de círculos máximos que pasan por un punto. Al conjunto de círculos máximos que cortan a una figura convexa K, corresponde un conjunto de puntos que forman la figura «dual» K'. A los círculos máximos de apoyo de K corresponden los puntos del contorno de K' y recíprocamente. Siendo K convexa, también lo es K'. Para verlo basta observar que por todo punto P exterior a K pasan sólo dos círculos máximos de apoyo de la misma K, que se obtienen tomando por P un círculo máximo que corta a K y haciéndolo girar hacia un lado y hacia el otro. Por tanto el círculo máximo cuyo polo es P sólo puede cortar al contorno de K' en dos puntos, y como P es cualquier punto, resulta que K' es convexa.

Las relaciones entre los elementos de la figura convexa K y los de su dual K' son fáciles de establecer.

Al diámetro D de K, es decir, al mayor «arco» contenido en K, corresponderá el menor «ángulo» que contiene a K', o sea, el espesor de K'. Como ambos son suplementarios, resulta $E' = \pi - D$.

Al diámetro 2ρ del círculo inscrito a K, que es el mayor contenido en K, corresponderá el diámetro $2R'$ del círculo circunscrito a K', que es el menor que contiene a K'. Ambos son suplementarios, por tanto $2\rho = \pi - 2R'$.

Para ver las relaciones entre las áreas y longitudes de dos figuras convexas duales K y K', consideremos el caso de ser K un polígono esférico convexo de n lados. Sean a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ sus lados y A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ sus ángulos. Suponiendo la esfera de radio unidad, la longitud L y el área F valen

$$L = \sum_1^n a_i, \qquad F = \sum_1^n A_i - (n-2)\pi.$$

Por dualidad, a cada lado de K corresponde un vértice (el polo) de K', y el arco que une dos vértices consecutivos de

K' es igual al suplemento del ángulo que forman los lados correspondientes de K. Por tanto K' será otro polígono convexo del mismo número n de lados, cuyos lados valen $a'_i = \pi - A_i$ y los ángulos $A'_i = \pi - a_i$. Por tanto la longitud L' y el área F' de K' valen, respectivamente,

$$L' = \sum_1^n (\pi - A_i) = 2\pi - F, \quad F' = \sum_1^n (\pi - a_i) - (n-2)\pi = 2\pi - L.$$

(Nótese que las dos fórmulas son substancialmente equivalentes, puesto que la figura dual de K' es nuevamente K).

Estas fórmulas, como no dependen del número de lados, subsisten para todos los polígonos de una sucesión que tienda a una figura convexa cualquiera K y por tanto valen también, en el límite, para ésta. Luego, entre las longitudes y las áreas de dos figuras convexas esféricas duales valen las relaciones simétricas

$$L' = 2\pi - F, \qquad F' = 2\pi - L.$$

§ 1. Figuras convexas de anchura constante sobre la esfera.

Antes de seguir adelante conviene recordar la definición y primeras propiedades de una clase muy importante de figuras convexas esféricas llamadas de anchura constante.

Recordemos primero brevemente la definición y propiedades inmediatas de las figuras convexas de anchura constante en el plano, llamadas también orbiformes (2).

Sea K una figura convexa plana. Se llama *recta de apoyo* de la misma a toda recta que tiene algún punto común con el contorno y no atraviesa a la figura, es decir, la deja toda de un mismo lado. En los puntos del contorno de K en que existe tangente, ésta es la recta de apoyo.

Se llama *anchura* de K según una determinada dirección a la distancia entre las dos rectas de apoyo paralelas a esta

(2) Bibliografía sobre estas curvas se puede ver, por ejemplo, en Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 130.

dirección. Cuando la anchura es la misma según todas las direcciones, se dice que K es de *anchura constante*, o también que es un orbiforme.

El ejemplo más simple, después del círculo, de figura convexa plana de anchura constante es el llamado *triángulo de* Reuleaux. Se forma tomando los vértices de un triángulo equilátero como centros y trazando con radio igual a los lados, arcos de circunferencia que unan los dos vértices opuestos. (Fig. 1). El triángulo curvilíneo resultante tiene anchura igual al lado del triángulo de partida según cualquier dirección. Si en lugar del triángulo equilátero se parte de otro polígono regular cualquiera de un número impar de lados y con centro en los vértices se trazan también arcos de circunferencia que unan los dos vértices opuestos, se tienen otras figuras también de anchura constante que se suelen llamar *polígonos de* Reuleaux (3). La condición de que el polígono de partida sea regular no es necesaria (Fig. 2).

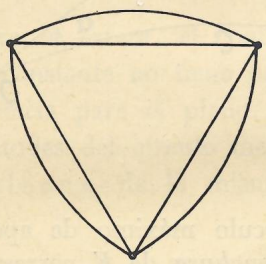


Fig. 1

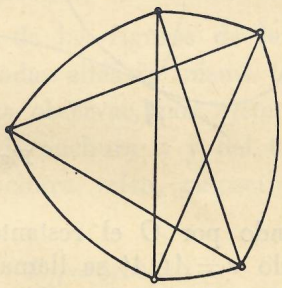


Fig. 2

La propiedad fundamental de las figuras planas convexas de anchura constante α es que la longitud de su contorno vale

$$L = \pi\alpha \qquad (2)$$

es decir, es la misma para todas las figuras de la misma anchura.

---

(3) Las figuras planas de anchura constante fueron ya estudiadas por Euler (*De curvis triangularibus*, Acta Acad. Sc. Petropolitanae, 1778) quien les dió el nombre de orbiformes. Euler considera ya el triángulo de la fig. 1 que luego se ha llamado triángulo de Reuleaux. Este último es quien por primera vez extiende la idea a los polígonos (F. Reuleaux, *Lehrbuch der Kinematik*, Braunschweig 1875).

Obsérvese que en toda figura convexa plana la mínima anchura es lo que se llama el *espesor* y la máxima anchura es el *diámetro*. Por tanto en las figuras convexas planas de anchura constante el espesor es igual al diámetro, lo cual es característico de estas figuras.

Veamos ahora el equivalente sobre la esfera de las figuras planas de anchura constante. Sea K una figura convexa de la superficie esférica. Sea C un círculo máximo de apoyo de K y A el punto de apoyo del mismo (Fig. 3). Tomando $AO = \frac{\pi}{2}$

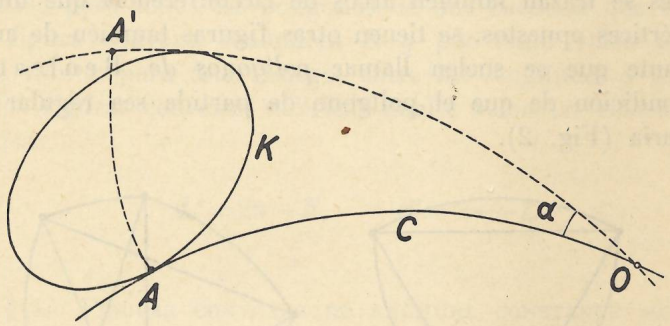


Fig. 3

y trazando por O el restante círculo máximo de apoyo OA', el ángulo $\alpha = AOA'$ se llama la *anchura* de K correspondiente al círculo máximo de apoyo C. Naturalmente que el ángulo α está también medido por el arco AA' perpendicular a la vez a OA y a OA'.

Cuando la anchura es la misma para todo C, se dice que K es de anchura constante. Evidentemente los círculos menores son figuras convexas de constante anchura.

Otra figura esférica convexa de constante anchura es la análoga al triángulo de Reuleaux del plano, que llamaremos triángulo de Reuleaux esférico (Fig. 4). Se construye, como en el plano, a partir de un triángulo esférico equilátero y uniendo cada dos vértices por arcos de círculos menores con centro en el tercer vértice. Estos triángulos de Reuleaux exigen que el lado a del triángulo equilátero de partida cumpla $a \leqq \frac{\pi}{2}$.

Si $a > \frac{\pi}{2}$ los arcos de círculo menor que unen cada dos vértices son interiores al triángulo equilátero y la figura deja de ser convexa. Por tanto: existen únicamente triángulos de Reuleaux esféricos del tipo mencionado, análogos a los del caso del plano, para anchuras menores que $\frac{\pi}{2}$.

Otras figuras de anchura constante $a < \frac{\pi}{2}$ se obtienen, análogamente como para el plano, partiendo de un polígono esférico regular de un número impar de lados y uniendo cada dos vértices consecutivos por arcos de círculos menores con centro en el vértice opuesto. Aún sin ser el polígono regular, mientras las diagonales convenientes tengan igual longitud (Fig. 2), se obtienen también polígonos curvilíneos de anchura constante. Los llamaremos, como en el plano, polígonos de Reuleaux.

Sobre la esfera, el contorno de las figuras de la misma anchura constante no tiene para todas ellas la misma longitud, como ocurría para el plano. Basta observar, por ejemplo, que las longitudes del círculo menor de anchura α y del triángulo de Reuleaux de la misma anchura valen, respectivamente,

$$L_C = 2\pi \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}, \qquad L_R = 3A \operatorname{sen} \alpha \tag{3}$$

siendo A el ángulo del triángulo equilátero esférico de lado α y cumpliéndose por tanto $\operatorname{sen} \alpha : 1 = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{sen} \frac{A}{2}$, de donde

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}. \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce

$$\frac{L_R}{L_C} = \frac{3A}{2\pi \operatorname{sen} \frac{A}{2}}. \tag{5}$$

Como en todo triángulo esférico equilátero es $A \geqq \frac{\pi}{3}$, el cociente anterior es mayor que uno, y por consiguiente $L_R \geqq L_C$ (4).

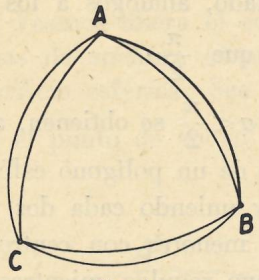


Fig. 4

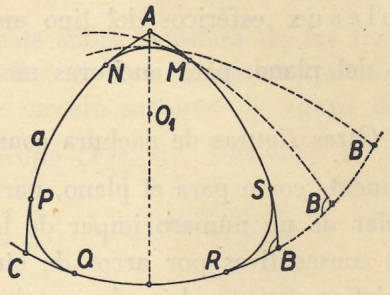


Fig. 5

El área F_R del triángulo esférico de Reuleaux se calcula inmediatamente como suma de 3 sectores circulares de abertura A (cada uno, por tanto, de área igual a $A(1-\cos\alpha)$), menos dos veces el área del triángulo equilátero de ángulo A. Por tanto

$$F_R = 2\pi - 3A(1+\cos\alpha).$$

Comparando L_R con las longitudes de otros polígonos de Reuleaux de la misma anchura, se observa que L_R es también mayor que ellas. Aplicando entonces un teorema que Blaschke ha demostrado para el plano, y que vale con la misma demostración también para la esfera, de que toda figura

(4) Es de observar que supuesto definido, análogamente a como para el plano y la esfera, el triángulo de Reuleaux sobre las superficies de curvatura constante negativa igual a —1, su longitud L_R y la longitud L_c del círculo geodésico de la misma anchura valen

$$L_R = 3A \operatorname{sh}\alpha \quad , \quad L_c = 2\pi \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} .$$

Como $\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sen}\frac{A}{2}$, de estas expresiones se deduce la misma igualdad (5) del texto, pero sobre las superficies de curvatura constante negativa es $A \leqq \frac{\pi}{3}$ y por tanto $L_R \leqq L_c$.

Se tiene por tanto: *La longitud del triángulo de* Reuleaux *de anchura* α *es igual a la del círculo de la misma anchura sobre el plano (geometria euclidea), mayor que ésta sobre la esfera (geometria elíptica) y menor sobre la pseudoesfera (geometria hiperbólica).*

convexa de anchura constante $\alpha < \frac{\pi}{2}$ se puede aproximar en tanto como se quiera por polígonos de Reuleaux (5), se tiene:

a) *Entre las figuras convexas esféricas de constante anchura* $\alpha < \frac{\pi}{2}$ *el triángulo de* Reuleaux *tiene longitud máxima.*

Comparando las áreas en lugar de las longitudes, el mismo teorema de Blaschke aplicado a la esfera nos dice:

b) *Entre las figuras convexas esféricas de constante anchura* $\alpha < \frac{\pi}{2}$ *el triángulo de* Reuleaux *es el que tiene mínima área.*

Para anchuras $\alpha > \frac{\pi}{2}$ existen también sobre la esfera figuras convexas de anchura constante, pero ya no se pueden dar como ejemplo los polígonos de Reuleaux. Hay que proceder dualmente.

Sea ABC un triángulo equilátero de lado $a > \frac{\pi}{2}$ y por tanto también $A > \frac{\pi}{2}$ (Fig. 5). La anchura de este triángulo correspondiente al lado BC, no es, como antes la altura AH (siendo H el pie de la altura correspondiente al vértice A), sino el ángulo B, es decir, $\alpha = B$. Fijo BC, la envolvente de los círculos máximos que forman con este lado un ángulo $\alpha = B$ es un círculo menor de centro O_1 tal que $O_1H = \frac{\pi}{2}$. Tomando de este círculo menor el arco MN que redondea el vértice A y trazando los arcos análogos para los otros vértices, se tiene una figura convexa, contenida en el triángulo equilátero de partida, y que tiene también la anchura constante $\alpha = B$. Esta figura es el *triángulo dual de* Reuleaux.

En lugar de un triángulo equilátero se puede partir de un polígono de un número impar de lados, cuyos lados opuestos se corten todos bajo un mismo ángulo $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Redondeando

(5) W. Blaschke, *Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts*, Mathematische Annalen, vol. 76, pp. 504-513, 1915.

entonces interiormente los vértices como en el caso del triángulo se tienen *polígonos duales de* Reuleaux, que son tambien figuras convexas de anchura constante $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

El área del triángulo dual de Reuleaux de anchura $\alpha > \frac{\pi}{2}$, se calcula sin dificultad y resulta que vale

$$F'_R = 2\pi - 3(\pi - a) \operatorname{sen} A \qquad (6)$$

siendo a el lado y A el ángulo del triángulo equilátero de partida, que es también igual a la anchura α.

Este valor F_R' se puede calcular directamente, o bien aplicando la fórmula $F' = 2\pi - L$ que, según vimos en la Introducción relaciona la longitud de una figura convexa con el área de su dual. En este caso, L está dada por la segunda igualdad (3); teniendo en cuenta que al pasar al triángulo dual el lado a se convierte en el suplemento del ángulo A y recíprocamente, en la segunda ecuación (3) deberemos sustituir α por $\pi - A$ y A por $\pi - a$. Con estas sustituciones y aplicando $F_R' = 2\pi - L_R$ se obtiene (6).

Comparando con el área del círculo de igual anchura ($F_C = 2\pi(1 - \cos\frac{\alpha}{2})$), o con el área de otros polígonos duales de Reuleaux también de la misma anchura, se observa que el triángulo tiene mayor área que todos ellos. Por el mismo teorema de Blaschke recordado antes, se tiene pues ahora la propiedad dual de la b):

b') *Entre las figuras convexas esféricas de anchura constante* $\alpha > \frac{\pi}{2}$, *el triángulo dual de* Reuleaux *es el que tiene menor área.*

En cuanto a la longitud del triángulo dual de Reuleaux, vale

$$L'_R = 3(\pi - a)(1 - \cos A) \qquad (7)$$

y la propiedad dual de la a) se enuncia:

a') *Entre las figuras esféricas convexas de anchura constante* $\alpha > \frac{\pi}{2}$, *el triángulo dual de* Reuleaux *es la que tiene máxima longitud.*

El valor (7) de L_R' se puede calcular directamente o bien, como para el área F_R', podemos aplicar la fórmula $L_R' = 2\pi - F_R$ que da la longitud de una figura convexa en función del área de su dual. Como hemos visto que $F_R = 2\pi - 3A(1+\cos\alpha)$, haciendo la substitución de A por $\pi - a$ y de α por $\pi - A$, se obtiene la fórmula (7).

Si en los segundos miembros de (6) y (7) se quiere hacer intervenir únicamente la anchura α, basta sustituir $A = \alpha$ y deducir a de la relación

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{A}{2}}.$$

§ 2. Relaciones inmediatas entre ρ, R, L, F, D, E.

Observemos, sin necesidad de demostración, las proposiciones inmediatas siguientes entre los diversos elementos de las figuras esféricas convexas.

(1.1) *Dado el radio* ρ *del círculo inscrito, la figura convexa de máxima longitud es el huso esférico de abertura* 2ρ. *La de longitud mínima es el círculo de radio* ρ.

Por tanto, según (1) para toda figura convexa esférica vale

$$2\pi\,\mathrm{sen}\,\rho \leqq L \leqq 2\pi. \tag{8}$$

(1.2) *Dado* ρ, *el máximo de* F *corresponde al huso esférico de abertura* 2ρ *y el mínimo de* F *al círculo de radio* ρ. Es decir

$$2\pi(1-\cos\rho) \leqq F \leqq 4\rho. \tag{9}$$

(1.3) *Dado* ρ, *el máximo del diámetro* D *corresponde al huso esférico de abertura* 2ρ *y el mínimo al círculo de radio* ρ. Por tanto, para cualquier figura esférica convexa vale

$$2\rho \leqq D \leqq \pi. \tag{10}$$

Como relaciones duales de las anteriores tienen lugar:

(1.4) *Dado el radio* $R < \pi$ *del círculo circunscrito, la má-*

xima área corresponde al círculo de radio R y la mínima a un arco de longitud 2R considerado como una figura convexa aplastada. Por tanto

$$0 \leqq F \leqq 2\pi\,(1-\cos R). \tag{11}$$

(1.5) *Dado R, el máximo de la longitud L corresponde al círculo de radio R y el mínimo al segmento de longitud 2R considerado como una figura convexa aplastada de longitud 4R.* Por tanto

$$4R \leqq L \leqq 2\pi \operatorname{sen} R. \tag{12}$$

(1.6) *Dado R, el máximo espesor E corresponde al círculo de radio R y el mínimo al segmento de longitud 2R considerado como una figura convexa aplastada.* Es decir

$$0 \leqq E \leqq 2R. \tag{13}$$

Después de estas relaciones triviales quedan por estudiar otras más complicadas que exigen un estudio más detenido. De algunas de ellas nos vamos a ocupar en los números sucesivos.

§ 3. Relación entre el radio del círculo inscripto ρ y el espesor *E*.

Dado ρ, el valor mínimo del espesor *E* es evidentemente 2ρ, valor que es alcanzado por ejemplo por el círculo de radio ρ y además por cualquier otra figura convexa comprendida entre el círculo de radio ρ y un huso circunscrito al mismo de abertura 2ρ. Por consiguiente

$$2\rho \leqq E. \tag{14}$$

Queda ahora el problema, más complicado, siguiente: dado ρ hallar el máximo de *E*. Es decir, *entre todas las figuras convexas esféricas que tienen un mismo radio ρ del círculo inscrito, hallar las que tienen un máximo espesor.*

Empezaremos por demostrar dos lemas:

LEMA I: *Para un triángulo esférico, el espesor es igual, o bien a la altura mínima, o bien al ángulo mínimo.*

Al hablar de triángulos esféricos entendemos siempre triángulos convexos, es decir, con los lados y ángulos menores o iguales que π.

Obsérvese que puede ocurrir que la altura mínima sea menor que el ángulo mínimo y sin embargo que el espesor sea este último. Basta considerar un triángulo formado por un huso del cual se ha separado un pedazo en un extremo: la altura mínima puede ser tan pequeña como se quiera, pero el espesor es igual a la abertura del huso primitivo.

Demostración. Notemos que dado un huso de abertura E (Fig. 6), si se hace girar uno de los lados alrededor de su punto medio un ángulo suficientemente pequeño, tanto si se gira en un sentido como en otro, la abertura E aumenta si $E<\frac{\pi}{2}$, permanece invariable si $E=\frac{\pi}{2}$ y disminuye si $E>\frac{\pi}{2}$.

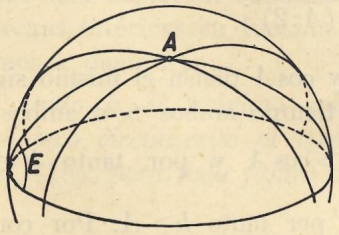


Fig. 6

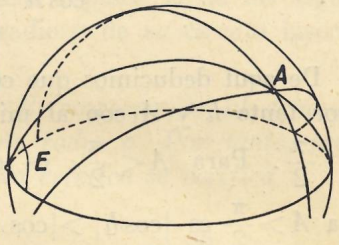


Fig. 7

En cambio si el giro se hace alrededor de un punto A que no sea el punto medio del lado (Fig. 7), la abertura E aumenta o disminuye según se gire en un sentido o en otro.

Sentado esto, sea un triángulo $T\equiv ABC$. Sea H un huso de abertura mínima, igual al espesor E, que lo contiene. Sobre cada lado de H debe haber por lo menos un vértice. Si sobre un lado de H hay sólo un vértice A, debe estar en el punto medio, pues si no, girando el lado alrededor de A como centro, según lo dicho, habría un sentido según el cual E disminuiría. Lo mismo sobre el otro lado: si solamente contiene un vértice B del triángulo, éste debe estar en el punto medio del lado del huso. En este caso E sería igual al lado AB, lo cual no es posible, pues cualquier altura del triángulo, desde A o desde B,

es menor que AB. Por tanto, si el vértice A está sólo sobre un lado del huso H, sobre el otro lado debe estar todo el lado BC del triángulo y E será igual a la altura correspondiente a este lado.

Si ningún lado del huso contiene un único vértice, quiere decir que dos lados del triángulo coinciden con los lados del huso y, por tanto, que el espesor E es igual a un ángulo del triángulo. Naturalmente que en tal caso el ángulo del triángulo que es igual a E debe ser el menor, pues cualquier otro ángulo también es vértice de un huso que contiene al triángulo. Queda con esto demostrado el lema I.

Apliquemos este lema a estudiar el espesor de los triángulos equiláteros. Para formar un triángulo equilátero basta suponer sobre la esfera un círculo menor y trazar los tres círculos máximos tangentes en puntos distantes 120°. Llamando A al ángulo y h a la altura, se verifica

$$\cos h = \frac{\cos A}{\operatorname{sen}(A:2)}.$$

De aquí deducimos que $\cos h$ y $\cos A$ tienen el mismo signo y por tanto h y A son al mismo tiempo ambos $>$ o ambos $<$ que $\frac{\pi}{2}$. Para $A < \frac{\pi}{2}$, es $\cos h > \cos A$ y por tanto $h < A$. Para $A > \frac{\pi}{2}$ es $|\cos h| > |\cos A|$ y por tanto $h > A$. Por consiguiente: *Para los triángulos equiláteros, si* $A < \frac{\pi}{2}$, *el espesor es igual a la altura; si* $A > \frac{\pi}{2}$, *el espesor es igual al ángulo* A.

Si se quiere expresar el espesor E del triángulo equilátero en función del radio ρ del círculo inscrito, según lo anterior, será

$$E = \rho + \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen}\rho}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\rho}} \qquad \text{para } \rho \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (15)$$

$$E = 2 \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\rho\right) \qquad \text{para } \rho \geqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad (16)$$

siendo $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ el radio del círculo inscrito en el triángulo trirrectángulo.

LEMA II. *El círculo inscrito c de una figura convexa K, o bien tiene dos puntos diametralmente opuestos comunes con el contorno de K, o bien tiene por lo menos 3 puntos comunes con el mismo contorno, los cuales no son todos puntos interiores de una misma semicircunferencia de c.*

Demostración. En efecto, de no cumplirse el lema, habría toda una semicircunferencia de c de puntos interiores a K, o sea, a cierta distancia finita del contorno de K. Se podría trazar una semicircunferencia concéntrica y exterior a ella a distancia suficientemente pequeña para que tampoco tuviera puntos exteriores a K. Entonces existiría un círculo totalmente contenido en el interior del recinto formado por c más la franja contenida entre las dos semicircunferencias concéntricas y el diámetro común y de radio mayor que c. Este círculo estaría también contenido en K, lo cual no es posible por haber supuesto que c era el círculo inscrito, o sea, el de mayor radio contenido en K.

Sentados estos dos lemas, vamos a resolver el problema de hallar una acotación superior para el espesor E de las figuras convexas esféricas en función del radio ρ de su círculo inscrito. Vamos a demostrar:

Dado ρ, el máximo espesor E corresponde al triángulo equilátero circunscrito al círculo de radio ρ. Por tanto, según (15), (16), *para toda figura convexa esférica se verifica*

$$E \leqq \rho + \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen}\rho}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\rho}} \qquad \textit{para } \rho \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{17}$$

$$E \leqq 2 \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\rho\right) \qquad \textit{para } \rho \geqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{18}$$

El signo de igualdad en (17) *vale únicamente para el triángulo equilátero; en* (18) *vale además para ciertas figuras de espesor constante que estudiaremos.*

Demostración. Sea una figura convexa K y sea c el círculo inscrito de la misma, de radio ρ.

Puede ocurrir que c tenga únicamente dos puntos comunes con el contorno de K; en este caso, según el lema II, estos puntos son diametralmente opuestos. El espesor de K valdrá 2ρ y evidentemente se satisfacen (17) y (18).

Si c tiene tres o más puntos comunes con el contorno de K, según el mismo lema II, se pueden elegir tres de estos puntos que no estén en una misma semicircunferencia de c. Tracemos los círculos máximos tangentes a c en estos puntos. Resultará un triángulo T circunscrito a K y por lo tanto el espesor de K es menor o igual que el de T. Tracemos también el triángulo equilátero T_e circunscrito a c. Vamos a demostrar que el espesor de T_e es mayor que el de T. Sea E el espesor de T y E_e el de T_e. El espesor de T_e, según el lema I, o bien es una altura, o bien es un ángulo. En el caso en que E_e sea igual al valor de los ángulos de T_e, observemos que en el triángulo T siempre habrá por lo menos un ángulo menor que E_e (en efecto, siempre habrá dos lados de T cuyos puntos de tangencia con c disten entre sí un arco de c mayor de 120°, y estos lados formarán un ángulo menor que los arcos tangentes a distancia de 120°) y por tanto T podrá colocarse completamente en el interior de un huso de abertura E_e; su espesor será, por tanto, menor que E_e.

Consideremos ahora el caso de ser E_e igual a las alturas de T_e. Sea $T_e \equiv ABC$, $T \equiv A'B'C'$ (Fig. 8). De los tres pun-

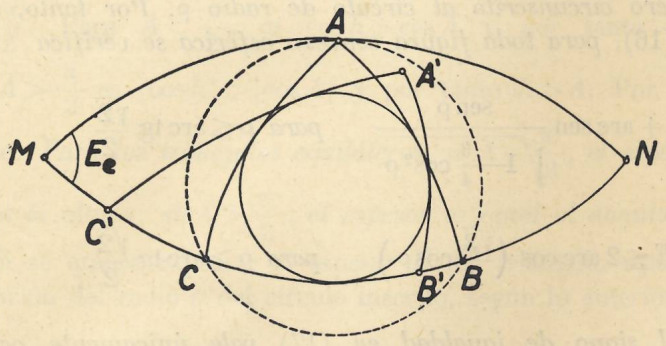


Fig. 8

tos de contacto de los lados de T con c, habrá dos distantes entre sí un arco menor que 120°. Supongamos que los lados correspondientes sean los concurrentes en A'. El ángulo A' será mayor que el A de T_e. Por un giro alrededor del centro de c, podemos colocar T de manera que su lado $B'C'$ esté sobre el lado BC de T_e. En esta posición por ser el ángulo A' mayor

que el A, el vértice A' cae dentro de la corona circular comprendida entre c y el círculo circunscrito a T_e; por tanto A' cae también interiormente al huso de abertura E_e, cuyo arco que une los puntos medios de los lados es la altura de T_e correspondiente al vértice A. Por consiguiente T queda interior a este huso y por tanto el espesor de T, y en consecuencia el de K, será menor que el E_e de T_e.

Queda así demostrada la primera parte del teorema. Falta ahora establecer si el triángulo equilátero es la *única* figura para la cual, dado ρ, el espesor alcanza su máximo valor.

Ya hemos observado que trazando los círculos máximos tangentes al círculo inscrito c en tres puntos no interiores a una misma semicircunferencia del mismo, el triángulo circunscrito que resulta contiene a K. Por tanto, como ya hemos visto últimamente que entre los triángulos que tienen el mismo ρ, el equilátero es el de máxima anchura, para que el espesor de K sea igual al del triángulo equilátero cuyo círculo inscrito tiene el mismo radio ρ, es necesario que la figura K pueda estar totalmente contenida en T_e y tener igual espesor.

Mientras el espesor de T_e es igual a la altura (desigualdad (15)), esto no es posible. En efecto, toda figura K convexa que contenga los vértices de T_e contiene todo el triángulo; por tanto debe haber por lo menos un vértice de T_e exterior a K, y por consiguiente el huso de abertura mínima E_e cuyo arco central es la altura correspondiente a este vértice se podría cerrar más, es decir, el espesor de K resulta menor que el de T_e.

Cuando el espesor de T_e es igual a sus ángulos (desigualdad (16)), la cuestión cambia. Entonces hay otras figuras contenidas en T_e y que sin embargo tienen igual espesor. En efecto, sea el triángulo equilátero ABC (Fig. 5), con sus ángulos mayores que $\frac{\pi}{2}$. Los círculos máximos, como AB, que forman con CB un ángulo constante B envuelven un círculo menor tangente a los lados AB y AC en los puntos M y N respectivamente. De la misma manera se pueden redondear los demás vértices y resulta así la figura convexa $MNPQRS$, ya estudiada en § 1, y que allí llamamos *triángulo dual de* Reuleaux. Esta figura convexa tiene el mismo círculo inscrito c de radio ρ que $T_e = ABC$ y también el mismo espesor E_e. Naturalmente que no hay sólo esta figura de anchura constante que con el mismo ρ

tenga el mismo espesor E_e que el triángulo equilátero: cualquier otra figura convexa contenida entre *MNPQRS* y el triángulo $T_e = ABC$ goza de la misma propiedad.

Por tanto:

Para $\rho \leqq \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$, *el triángulo equilátero es la única figura a la cual, para un* ρ *dado, corresponde un máximo espesor.*

Para $\rho > \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ *hay toda una infinidad de figuras con la propiedad de tener el mismo* ρ *y el mismo espesor* E_e *que el triángulo equilátero. Estas figuras están comprendidas entre el triángulo equilátero y el triángulo dual de* Reuleaux *que de él se deduce.*

Paso al caso del plano. Hemos desarrollado lo anterior suponiendo figuras sobre la esfera de radio unidad. Si se trata de una esfera de radio a, las conclusiones subsisten, puesto que se puede considerar esta esfera como la transformada por homotecia de una esfera de radio unidad concéntrica a ella.

El caso del plano se puede obtener como caso límite de una esfera cuyo radio tiende a infinito. En este caso, para obtener figuras de área finita, debemos considerar figuras que vistas desde el centro de la esfera tengan magnitudes que tiendan a cero al crecer el radio de la esfera, es decir, debemos considerar únicamente el caso en que ρ tiende a cero, o sea, aplicar (17).

La desigualdad (17), para una esfera de radio a, se escribe

$$\frac{E}{a} \leqq \frac{\rho}{a} + \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen} \frac{\rho}{a}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\rho}{a}}}.$$

Multiplicando ambos miembros por a y haciendo $a \to \infty$, resulta

$$E \leqq 3\rho.$$

Esta es la desigualdad entre el espesor y el radio del círculo inscrito para las figuras convexas planas. La igualdad vale únicamente, como en (17), para el triángulo equilátero (6).

(6) Ver Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 79.

§ 4. Un teorema de R. M. Robinson.

Sea, sobre la esfera de radio unidad, una figura convexa cualquiera K; sea E su espesor y ρ el radio de su círculo inscrito. La figura K puede estar contenida en un huso esférico de abertura E y por tanto habrá el huso suplementario de abertura $\pi - E$ que no contiene ningún punto de K ni de la figura simétrica de K respecto del centro de la esfera. En este huso se puede inscribir un círculo de radio $\rho_1 = \frac{1}{2}(\pi - E)$.

Según el teorema del apartado anterior, enunciado en sentido inverso, dado E, el mínimo de ρ corresponde al valor que convierte en igualdad alguna de las expresiones (17) o (18). Este valor mínimo de ρ aumenta con E, al mismo tiempo que ρ_1 disminuye. Un valor máximo para el que se pueda estar seguro de que, cualquiera que sea K, siempre estará comprendido entre los valores ρ y ρ_1 correspondientes, se obtendrá resolviendo la ecuación $\rho = \rho_1$. Observemos que siendo $E = \pi - 2\rho_1$ si $E < \frac{\pi}{2}$ es $\rho < \frac{\pi}{4}$ y $\rho_1 > \frac{\pi}{4}$, luego para que sea $\rho = \rho_1$ debe ser $E \geqq \frac{\pi}{2}$ y por tanto aplicaremos (18). Resulta así, tomando el valor máximo de E dado por (18), sustituyendo $E = \pi - 2\rho_1$ y haciendo $\rho_1 = \rho$,

$$\pi - 2\rho = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\rho\right).$$

Dividiendo por 2 y tomando el coseno de ambos miembros resulta $\operatorname{sen}\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\rho$, de donde

$$\rho = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (19)$$

Se tiene así, indirectamente, demostrado un teorema de R. M. Robinson (7):

Siendo K una figura convexa esférica cualquiera, siempre

(7) R. M. Robinson, *Note on convex regions on the sphere*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 44, pp. 115-116, 1938.

existe una circunferencia de radio esférico $\rho = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($40^\circ 53' < \rho < 40^\circ 54'$) *la cual se puede colocar enteramente en el interior de K o bien exteriormente a K de manera que no tenga punto común ni con K ni con la figura simétrica de K respecto el centro de la esfera. El valor de* ρ *que cumple esta propiedad no puede aumentarse.*

§ 5. Relación entre el radio del círculo circunscrito R y el diámetro D.

Se trata de la cuestión dual de la tratada en § 3. En efecto, recordando la definición de «dualidad» dada en la introducción, al círculo inscrito de K corresponde el círculo circunscrito de K' y la relación entre los radios es

$$\rho = \frac{\pi}{2} - R'.$$

Al espesor E de K corresponde el diámetro D' de K' y la relación entre ambos es

$$E = \pi - D'.$$

Según esto, y escribiendo R, D en lugar de R', D' las relaciones (17) y (18) se escriben

$$D \geqq \frac{\pi}{2} + R - \operatorname{arc\,sen}\frac{\cos R}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 R}} \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} \geqq R \geqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{20}$$

$$D \geqq \pi - 2\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} R\right) \quad \text{para} \quad R \leqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{21}$$

De aquí, enunciando por dualidad el teorema de § 3, se tiene:

Dado el radio R del círculo circunscrito a una figura convexa K situada sobre la superficie de la esfera de radio unidad, el valor mínimo del diámetro D es el correspondiente al triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio R. De aquí se deducen las desigualdades (20) *y* (21). *El signo de igualdad vale en* (20) *únicamente para el triángulo equilátero. En cam-*

bio, en (21) *el signo de igualdad vale también para cualquier otra figura de diámetro D que pueda contener en su interior al triángulo equilátero de lado D.*

El triángulo de Reuleaux, Fig. 4, es un ejemplo de figura que cumple las últimas condiciones y para la cual vale, por tanto, el signo de igualdad en (21). Además, cualquier otra figura comprendida entre el triángulo equilátero *ABC* y el triángulo de Reuleaux de él derivado, tiene los mismos *R* y D que el triángulo equilátero y verifica, por tanto, la igualdad en (21).

Paso al caso del plano. Análogamente a como se procedió en § 3, para pasar al plano como caso límite de una esfera cuyo radio tiende a infinito, debemos tomar el caso en que *R* tiende a cero, o sea, el caso de la desigualdad (21). Escribiendo esta desigualdad para una esfera de radio *a* se tiene

$$\frac{D}{a} \geqq \pi - 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{R}{a}\right)$$

o bien

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{R}{a}\right) \geqq \frac{\pi}{2} - \frac{D}{2a};$$

y tomando el coseno de ambos miembros, con lo cual se invierte la desigualdad, queda

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{R}{a} \leqq \operatorname{sen} \frac{D}{2a}.$$

Multiplicando por *a* y haciendo $a \to \infty$ resulta finalmente

$$D \geqq \sqrt{3} R$$

que es la relación que liga el diámetro con el radio del círculo circunscrito de las figuras convexas planas. La igualdad tiene lugar no sólo para el triángulo equilátero, si no también, como hemos dicho hablando de la esfera, para todas las figuras convexas comprendidas entre el triángulo equilátero de lado *D* y el triángulo plano de Reuleaux correspondiente (8).

(8) Ver Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 78.

§ 6. Teorema dual del de R. M. Robinson.

Obsérvese que dada una figura convexa K de diámetro D, siempre hay un círculo de radio $R_1 = \frac{1}{2}(\pi - D)$ que tiene punto común al mismo tiempo con K y con su figura simétrica respecto el centro de la esfera. Cuando D crece, el mínimo de R aumenta y en cambio R_1 disminuye; cuando ambos valores de R y R_1 coincidan tendremos el mínimo valor permisible de R para asegurar que, cualquiera que sea K, un círculo de radio R siempre puede o bien comprender en su interior a K o bien tener punto común al mismo tiempo con K y su simétrica respecto el centro de la esfera.

Para que el mínimo de R, dado por la igualdad en (20) o en (21), sea igual a $R_1 = \frac{1}{2}(\pi - D)$ debemos tomar el caso en que $R \leqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ y por tanto siendo $D = \pi - 2R_1$, si $R = R_1$, de (21) se deduce la ecuación

$$\pi - 2R = \pi - 2 \operatorname{arc\,cos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} R \right)$$

de donde

$$R = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}}. \qquad (22)$$

De aquí deducimos, por tanto, el siguiente teorema, dual del de R. M. Robinson de § 4:

Siendo K una figura convexa esférica cualquiera, siempre se puede colocar un círculo de radio esférico $R = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}}$ $(49^\circ\, 6' < R < 49^\circ\, 7')$ *de manera que, o bien contenga en su interior a la figura K, o bien tenga puntos comunes al mismo tiempo con K y con la figura simétrica de K respecto el centro de la esfera. El valor de R que cumple esta propiedad no se puede disminuir.*

§ 7. Relación entre el diámetro y la longitud.

En el plano, entre la longitud L de una figura convexa K y el diámetro D de la misma existe la siguiente acotación, fácil de establecer,

$$L \leqq \pi D, \tag{23}$$

valiendo el signo igual para todas las figuras convexas planas de anchura constante (9).

Vamos a estudiar el problema análogo sobre la esfera, es decir, se trata de *buscar las figuras esféricas convexas que para un diámetro dado tienen máxima longitud.*

Observemos el siguiente lema:

LEMA. *Si una figura esférica K tiene diámetro $D < \frac{\pi}{2}$, ningún extremo de un diámetro de K puede ser punto interior de algún arco de círculo máximo que pertenezca al contorno.*

La demostración es inmediata. Si AB fuera un diámetro de K y B perteneciera a un arco de círculo máximo PQ del contorno de K, siendo $AB < \frac{\pi}{2}$, al moverse B sobre el arco PQ habría un sentido en que AB aumentaría y por tanto AB no sería un diámetro.

Es interesante notar que la condición de ser $D < \frac{\pi}{2}$ es imprescindible. Para diámetros $D \geqq \frac{\pi}{2}$ el lema deja de ser cierto. Por ejemplo, para un triángulo equilátero de lado mayor que $\frac{\pi}{2}$, cualquier altura es un diámetro y sin embargo el extremo de la misma que no es un vértice es el punto medio de un lado, que es un arco de círculo máximo.

Sentado este lema, sea una figura convexa esférica K de diámetro $D < \frac{\pi}{2}$. Vamos a demostrar que *si K no es de anchura constante, se puede aumentar su longitud sin modificar el diámetro.*

(9) Ver por ejemplo Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 77.

Sea A un punto de K y B el punto de K más distante de A. Si AB es un diámetro cualquiera que sea A, quiere decir que los círculos máximos perpendiculares a AB en los extremos A y B son círculos máximos de apoyo y por tanto que K tiene anchura constante e igual al diámetro D.

Si K no es de anchura constante, hay por lo menos un punto A de su contorno tal que, siendo B el punto de K más distante de A, es $AB<D$ (Fig. 9). Prolonguemos el arco BA de una longitud AA' tal que $BA'=D$. Tracemos por A' los círculos máximos de apoyo de K. Resulta así una nueva figura que tiene longitud *mayor* que K, pues arco $CAE <$ arco $CA'E$. Además el diámetro de la nueva figura no es mayor que D, puesto que los puntos de los arcos $A'C$, $A'E$ según el lema anterior no pueden ser extremos de diámetros y en cuanto a A' su distancia a cualquier punto M de K cumple $A'M \leqq A'A + AM \leqq A'A + AB = D$.

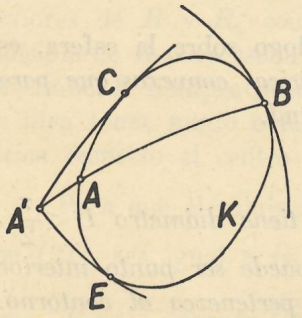


Fig. 9

Luego, al añadir los arcos $CA'E$ no se ha aumentado el diámetro y sí la longitud. En consecuencia:

Si para un diámetro dado, $D<\frac{\pi}{2}$, *existen figuras convexas esféricas de longitud máxima, ellas deben encontrarse entre las figuras de anchura constante.* Naturalmente que la anchura constante de estas figuras es igual a D.

Falta demostrar la *existencia* de tales figuras convexas de diámetro dado y longitud máxima. La demostración, simple pero un poco larga, podría ser exactamente la misma a la dada por A. Rosenthal y O. Szász para el caso análogo del plano ([10]). Por esta razón prescindiremos de ella, suponiendo admitida esta propiedad de existencia.

La figura convexa esférica que con un diámetro dado tiene máxima longitud hay que buscarla, por tanto, entre las fi-

([10]) A. Rosenthal y O. Szász, *Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol. 25, págs. 278-282, 1916.

guras de anchura constante. Pero entre éstas ya vimos, § 1, que el triángulo de Reuleaux es el de máxima longitud. Luego:

Dado el diámetro $D<\frac{\pi}{2}$, *la figura convexa esférica de longitud máxima es el triángulo de* Reuleaux.

Calculando la longitud del triángulo de Reuleaux en función del diámetro D, que es igual a la anchura, resulta que para toda figura convexa esférica con $D<\frac{\pi}{2}$ es

$$L \leqq 6 \operatorname{sen} D \,.\, \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2\cos(D:2)}. \qquad (24)$$

Observemos que es esencial la limitación $D<\frac{\pi}{2}$. Para valores mayores de D, veremos más adelante, § 9, que la figura de mayor longitud no es ya el triángulo de Reuleaux, sino el triángulo equilátero. Esperemos, sin embargo, demostrar este caso como dual del problema que vamos a tratar en el apartado siguiente.

Paso al caso del plano. Procediendo como al final de § 3, para una esfera de radio a, la desigualdad (24) se escribe

$$\frac{L}{a} \leqq 6 \operatorname{sen} \frac{D}{a} \,.\, \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2\cos(D:2a)}.$$

Multiplicando ambos miembros por a y haciendo $a \to \infty$, queda

$$L \leqq \pi D$$

que es la relación (23) que ya dijimos liga la longitud con el diámetro para las figuras convexas planas.

La diferencia es que la igualdad en (24) tiene lugar únicamente para el triángulo de Reuleaux, mientras que en (23) vale, como ya dijimos, para toda figura convexa plana de anchura constante, igual a D.

§ 8. Relación entre el área y el espesor.

Para establecer la relación entre el área F y el espesor E y hallar la figura que para un espesor dado E tiene mínima

área, seguiremos un camino análogo al seguido para el caso del plano por Pàl (11).

Sea K una figura convexa cualquiera sobre la esfera de radio unidad. Consideremos el círculo inscrito a la misma, o sea, según la definición, el círculo de mayor radio contenido en K. Distinguiremos dos casos:

1º. Supongamos que el círculo inscrito c de radio ρ tenga comunes con el contorno de K únicamente dos puntos. En este caso, como ya observamos en el lema II, § 3, estos dos puntos son diametralmente opuestos. Entonces el espesor E de K es igual a 2ρ y el área F de K será igual o mayor que el área de c, o sea

$$F \geqq 2\pi(1-\cos\rho) = 2\pi\left(1-\cos\frac{E}{2}\right). \qquad (25)$$

La igualdad vale únicamente cuando K coincida con su círculo inscrito c.

2º. Si el círculo inscrito c tiene con el contorno de K más de dos puntos comunes, según el lema II, § 3, hay tres de ellos que no son interiores a una misma semicircunferencia, es decir, que son vértices de un triángulo esférico que contiene el centro de c; sean M, N, P estos puntos (Fig. 10). El con-

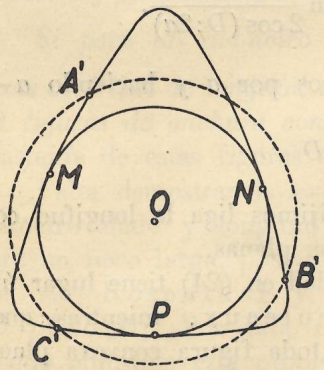


Fig. 10

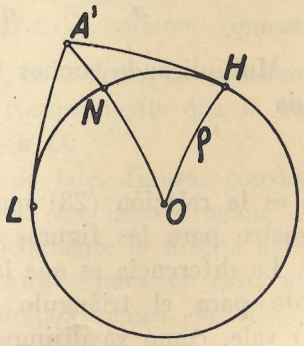


Fig. 11

torno de K queda dividido en tres arcos MN, NP, PM. Tracemos un círculo c' concéntrico con c de radio $E-\rho$. Por ser

(11) J. PÀL, *Ein minimumproblem für Ovale*, Mathematische Annalen, vol. 83, págs. 311-319, 1921. También BONNESEN-FENCHEL, loc. cit., pág. 76.

$E \geqq 2\rho$, es $E-\rho \geqq \rho$, es decir, este círculo es exterior a c. Este círculo c' debe cortar a cada uno de los arcos MN, NP, PM del contorno de K; en efecto, si no cortase por ejemplo al arco MN, el círculo máximo tangente a c en P y el círculo máximo tangente a c' en el punto de intersección con la prolongación de PO, que forma con él un ángulo $\rho+(E-\rho)=E$, formarían un huso que contendría a K totalmente en su interior y por tanto podría disminuirse su abertura, contra lo supuesto de ser E el espesor.

Sean A', B', C' tres puntos en que c' corta respectivamente a los arcos MN, NP, PM. Desde A', B', C' tracemos los arcos tangentes a c. Estos arcos, junto con c, determinan una figura convexa formada por c más tres triángulos curvilíneos, la cual está totalmente contenida en K. Queremos calcular el área de esta figura. Se compone del área de c más tres triángulos curvilíneos iguales, como el $A'LH$ de la Fig. 11.

En el triángulo esférico rectángulo $A'HO$, se tiene $OA'=E-\rho$, $OH=\rho$. Por tanto

$$\cos HOA'=\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)},\quad \operatorname{sen} OA'H=\frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen}(E-\rho)}. \tag{26}$$

De aquí se deduce que el área del triángulo esférico OHA' vale

$$\arccos\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)}+\arcsen\frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen}(E-\rho)}-\frac{\pi}{2}$$

y restando de esta área la del sector ONH que vale

$$(1-\cos\rho)\arccos\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)},$$

tendremos el área del triángulo curvilíneo NHA'. Sumando al área de c el área de 6 triángulos iguales al NHA' tendremos el área buscada:

$$f(\rho,E-\rho)=6\arcsen\frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen}(E-\rho)}+6\cos\rho\,.\arccos\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)}-\pi-2\pi\cos\rho. \tag{27}$$

Vamos a ver que este valor $f(\rho, E-\rho)$ es una función *creciente* de ρ. En efecto, siendo $0 \leqq \rho \leqq \frac{\pi}{2}$, $\rho \leqq E-\rho \leqq \frac{\pi}{2}$ (esta última desigualdad se deduce inmediatamente de (17), (18)), la derivada $\frac{df}{d\rho}$ consta de dos sumandos positivos, más la diferencia $\operatorname{sen}\rho\,(2\pi - 6 \text{ áng. } A'OB)$ (téngase en cuenta (26)), la cual también es positiva, pues los triángulos curvilíneos de vértices A', B', C' no se cubren unos a otros. De aquí $\frac{df}{d\rho} > 0$, y por tanto, supuesto E fijo, el mínimo valor de $f(\rho, E-\rho)$ se obtendrá para el valor mínimo posible de ρ. Es decir, si F es el área de K, es

$$F \geqq f(\rho, E-\rho) \geqq f(\rho_{\min}, E-\rho_{\min}). \qquad (28)$$

Según § 3, fijo el espesor E, el valor mínimo de ρ es el correspondiente al triángulo equilátero de espesor E. Poniendo en (28) en lugar de $\rho_{\min}$ su valor en función de E deducido de (15) o (16) tendríamos la acotación inferior de F en función de E.

Veamos las conclusiones a que se llega a partir de estos dos casos 1º. y 2º. estudiados.

Observemos primeramente que, siempre sobre la esfera, el área del círculo menor de diámetro E es mayor que el área del triángulo equilátero de altura E. Esto se puede demostrar simplemente comparando las fórmulas que dan una y otra. Luego, en el caso 1º., F es mayor que el área del triángulo equilátero de altura E.

Por otra parte, para $E \leqq \frac{\pi}{2}$, el espesor del triángulo equilátero es igual a la altura (§ 3) y en tal caso el área del triángulo es la misma $f(\rho, E-\rho)$ de (27), pues los puntos A', B', C' coinciden con los vértices del triángulo. Además, para $E \leqq \frac{\pi}{2}$, es $\rho \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ y según vimos en § 3, en este caso el triángulo equilátero es la *única* figura que para un E dado, el radio ρ tiene el valor mínimo. Por tanto:

Dado el espesor E de una figura convexa esférica, si

$E \leqq \frac{\pi}{2}$, *el valor mínimo del área corresponde al triángulo equilátero de altura E. Este triángulo es, además, la única figura para la cual este mínimo es alcanzado.*

Hallando el área del triángulo equilátero de altura E la anterior acotación se puede escribir

$$E \leqq \operatorname{arc\,cos} \frac{\cos \frac{1}{3}(\pi + F)}{\operatorname{sen} \frac{1}{6}(\pi + F)} \quad \left(\text{para } E \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{29}$$

La demostración precedente no sirve para $E > \frac{\pi}{2}$. En efecto, en tal caso, el triángulo equilátero de espesor E, igual a uno de sus ángulos, no tiene el área igual a $f(\rho, E-\rho)$; este valor es menor que el área del triángulo y por tanto no podemos valernos de la limitación (28). Este caso $E > \frac{\pi}{2}$ quedará dilucidado en el apartado siguiente § 9.

Paso al caso del plano. Para una esfera de radio a la relación (29) se escribe

$$\frac{E}{a} \leqq \operatorname{arc\,cos} \frac{\cos \frac{1}{3}\left(\pi + \frac{F}{a^2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{6}\left(\pi + \frac{F}{a^2}\right)}.$$

Tomando el coseno de ambos miembros, con lo cual se invierte la desigualdad, queda

$$\cos \frac{E}{a} \geqq \frac{\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{F}{3a^2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{F}{3a^2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{F}{6a^2} + \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{F}{6a^2}}.$$

Desarrollando en serie y sustituyendo $\cos \frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta

$$1-\frac{E^2}{2a^2}+\ldots\geqq\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{3a^2}+\cdots}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{6a^2}+\cdots}.$$

De aquí se deduce inmediatamente, para $a\to\infty$,

$$E^2\leqq\sqrt{3}F.$$

Esta es la acotación entre E y F para las figuras planas ([12]). En ella la igualdad vale únicamente para el triángulo equilátero.

§ 9. Duales de los problemas estudiados en § 7 y § 8. casos $D\geqslant\frac{\pi}{2}$, $E>\frac{\pi}{2}$.

El dual del problema estudiado en § 7 es el tratado en § 8. Como ya observamos en la introducción, al pasar de una figura K a su dual, el diámetro D pasa a $\pi-E$ y en cuanto a la relación entre la longitud y el área, se verifica que si L es la longitud de K, el área F de su dual es $2\pi-L$.

Por tanto al caso $D<\frac{\pi}{2}$ de § 7 corresponde el $E>\frac{\pi}{2}$ de § 8, el cual precisamente es el que nos faltaba. Enunciando por dualidad el teorema final de § 8, se tiene pues:

Dado el espesor $E>\frac{\pi}{2}$ de una figura convexa esférica, el valor mínimo del área corresponde al triángulo dual de Reuleaux.

Análogamente, el dual del teorema final del § 8, que dice que el triángulo equilátero es la única figura que con un espesor dado tiene mínima área, será:

Dado el diámetro $D\geqq\frac{\pi}{2}$, la figura convexa esférica de longitud máxima es el triángulo equilátero de altura D.

Estos enunciados completan para los casos $E>\frac{\pi}{2}$, $D\geqq\frac{\pi}{2}$ los teoremas de § 7 y § 8.

Luis A. Santaló

Instituto de Matemática, Rosario.

([12]) Ver Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 77.

SOBRE LA CUESTION No. 9

El enunciado de la cuestión era el siguiente:

En el tomo XV del *Journal de Liouville* (1850), F. Faa di Bruno hace la siguiente observación interesante:

"*La ecuación*

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx^2 + Sx + T = 0$$

admite raíces imaginarias si

$$P^2 - 2Q > m\sqrt[m]{T^2}\,''.$$

La deducción depende del conocido teorema según el cual la media aritmética de m números es igual o mayor que su media geométrica. Los m números que se toman son los cuadrados de las m raíces de la ecuación.

Se propone extender el razonamiento para obtener otros criterios de existencia de raíces imaginarias de una ecuación.

Escribimos la ecuación mejor con signos alternados

$$x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - c_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^n c_n = 0 \qquad (1)$$

y si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son las n raíces de la ecuación será

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= x_1\,x_2\,x_3 \ldots x_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Es sabido que cualquier función simétrica de las n raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se puede escribir también como función de los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$; esto rige, en particular, para las sumas de potencias de las raíces

$$s_\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

para las cuales valen las fórmulas

$$s_0 = n$$

$$s_1 = c_1$$

$$s_2 = c_1^2 - 2c_2 \tag{4}$$

$$s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3$$

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4$$

o de un modo general

$$s_\alpha = \alpha \sum (-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\ldots} \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{5}$$

donde hay que sumar sobre todas las combinaciones de números positivos o nulos que cumplen la condición

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = \alpha. \tag{6}$$

Para llegar ahora a criterios de existencia de raíces imaginarias procedemos de la manera siguiente. Para $2n$ cantidades *positivas* $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ vale la desigualdad

$$\frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i} \cdot \frac{\sum_1^n \frac{m_i}{z_i}}{\sum_1^n m_i} \geqq 1 \tag{7}$$

(Véase por ej. *Mathematicae Notae*, Año III, pág. 42). Por consiguiente, si una ecuación (1) tiene sólo raíces reales (y distintas de cero), las cantidades

$$z_i = x_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

$$m_i = x_i^{2k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

serán positivas y su sustitución en la (7) nos da la desigualdad

$$\frac{s_{2k+2}\, s_{2k-2}}{(s_{2k})^2} \geqq 1 \tag{10}$$

para una ecuación con todas sus raíces reales y distintas de cero. Escrita en la forma

$$s_{2k+2}\, s_{2k-2} \geqq (s_{2k})^2 \qquad (11)$$

esta desigualdad rige para todas las ecuaciones con todas sus raíces reales (admitiendo también raíces cero).

De esta manera se obtiene el siguiente criterio:

Para que la ecuación (1) *no tenga todas sus raíces reales, es suficiente que para un valor entero positivo de k valga la desigualdad*

$$s_{2k+2}\, s_{2k-2} < (s_{2k})^2 \qquad (12)$$

donde las sumas s_α *se calculan por medio de* (5).

Ejemplo. Para $k=1$ resulta como criterio suficiente

$$s_4 \cdot s_0 < {s_2}^2 \qquad (13)$$

o sea

$$n\,(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) < (c_1^2 - 2c_2)^2. \qquad (14)$$

Roberto Frucht

Universidad Técnica Federico Santa María.
Valparaiso (Chile).

* * *

La fórmula general (11) del Sr. Frucht, al variar k ofrece infinitas fórmulas particulares que, salvo la complejidad de los cálculos, resuelven la cuestión propuesta.

Puede encararse el problema también desde otros puntos de vista, obteniendo otros resultados.

Notemos primero por comparar las fórmulas de Frucht con la de Faá di Bruno (1), que esta última presenta, al parecer, la particularidad de vincular coeficientes alejados entre sí en la ecuación considerada, mientras son consecutivos en las fórmulas de

(1) Francisco Faá di Bruno (1825-1888) fué profesor de análisis algebraico en la Universidad de Turín.

Frucht. Pero puede notarse que en estas últimas podemos también atribuir a la k valores 0 o negativos. Esto significa pasar de la ecuación dada a la recíproca, por lo que los símbolos s_k, con k negativo se obtendrán de las (4) simplemente sustituyendo a cada coeficiente c_i el $\frac{c_{n-i}}{c_n}$. Para $k=0$ la (12) nos da la condición

$$(c_1^2 - 2c_2)\,(c_{n-1}^2 - 2c_{n-2}\,c_n) < n^2\,c_n^2.$$

De cualquier manera puede también atribuirse a la fórmula de Faá di Bruno la ventaja de la sencillez y en particular de incluir la consideración de tres coeficientes solamente en lugar de 4 en la (14) y de 5 en esta última.

Notamos que pueden obtenerse criterios más simples todavía.

Ya se sabe que, como consecuencia de la conocida regla de los signos de Descartes, las raíces reales de una ecuación a coeficientes reales no pueden ser nunca más que dos veces el número de sus términos (²).

Pero podemos aprovechar útilmente el artificio de Faá di Bruno, que consiste en pasar de la ecuación propuesta a su transformada en los cuadrados de las raíces; a las raíces reales de la primera corresponden en la segunda raíces positivas, de manera que sobre la nueva ecuación la regla de Descartes habrá que aplicarla de manera más estrecha, permitiendo afirmar (cualquiera que sea el número de términos) que el número de las raíces complejas de la ecuación propuesta es siempre mayor o igual al número de las permanencias de signos en la ecuación de los cuadrados de las raíces. Esta transformada se forma por una regla muy simple; si la ecuación primitiva está representada en la forma (1), tendremos por ésta

$$x^n - (c_1^2 - 2c_2)\,x^{n-1} + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4)\,x^{n-2} -$$
$$- (c_3^2 - 2c_2c_4 + 2c_1c_5 - 2c_6)\,x^{n-3} + \ldots + (-1)^n\,c_n^2 = 0. \quad (15)$$

Resulta claro que si uno cualquiera de los paréntesis que

(²) Cfr. p. ej. B. Levi — *Analisi algebrica e infinitesimale.* Cap. X — 5. donde la observación tiene todavía una puntualización mayor.

forman los coeficientes de (15) se supone negativo o nulo (3), deberá presentarse por lo menos una permanencia y por tanto la ecuación (1) tendrá al menos dos raíces complejas conjugadas.

La primera condición que así se obtiene es

$$c_1^2 - 2c_2 \leqq 0; \tag{16}$$

comparándola con la de Faá di Bruno, que es

$$c_1^2 - 2c_2 \leqq n\sqrt[n]{c_n^2} \tag{17}$$

vemos que (16) es más simple; sin embargo (17) puede considerarse como un perfeccionamiento de (16), porque (17) se realiza ciertamente si se realiza (16), pero no viceversa.

Si (15) tiene raíces complejas, las tiene también (1); podemos luego obtener un criterio para (1) aplicando a (15) otro criterio conocido. Aplicando a (15) el criterio (16) se obtiene uno muy parecido y apenas un poco más débil que el (14) del Sr. Frucht.

En efecto, una pequeña transformación nos permite escribir la fórmula (14) así:

$$(c_1^2 - 2c_2)^2 < \frac{2n}{n-1}(c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4) \tag{18}$$

mientras que el criterio (16), aplicado a la ecuación (15), nos da

$$(c_1^2 - 2c_2)^2 \leqq 2(c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4).$$

Nótese además que, simplemente la anterior observación sobre la aplicación de la regla de Descartes a (15), nos da como segundo criterio para la existencia de raíces complejas de (1)

$$c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4 \leqq 0, \tag{19}$$

limitación ésta que tiene sentido opuesto a la (18), de donde re-

(3) Recuérdese que en la aplicación de la regla de Descartes se debe siempre atribuir a los términos nulos el signo que hace mínimo el número de las variaciones.

sulta como condición necesaria (no ciertamente suficiente) para que (1) tenga todas sus raíces reales que

$$0 < c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4 \leqq \frac{n-1}{2n}(c_1^2 - 2c_2)^2. \qquad (20)$$

La propiedad de las medias aritmética y geométrica aplicada por Faá di Bruno puede aplicarse también a comparar con el último término, uno cualquiera de los coeficientes de (15); si de esta manera nos dirigimos al coeficientes del tercer término, obtenemos el criterio más fuerte que (19):

$$c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4 < \frac{n(n-1)}{2}\sqrt[n]{c_n^4} \qquad (21)$$

y luego, en lugar de (19), podemos escribir también:

$$\frac{n(n-1)}{2}\sqrt[n]{c_n^4} \leqq c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4 \leqq \frac{n-1}{2n}(c_1^2 - 2c_2)^2. \qquad (22)$$

Al tipo (21) pertenece en particular la fórmula

$$c_{n-1}^2 - 2c_n c_{n-2} < n\sqrt[n]{c_n^{2(n-1)}} \qquad (23)$$

que se obtiene al comparar los últimos dos términos de (15) y que se encuentra también en la Nota de Faá di Bruno, obtenida aplicando la fórmula

$$c_1^2 - 2c_2 < n\sqrt[n]{c_n^2} \qquad (24)$$

a la ecuación recíproca de la dada (1). Evidentemente cualquiera de las fórmulas anteriores engendra otra, que puede decírsele conjugada cuando se la aplica a la ecuación recíproca.

En otro orden de ideas debe notarse todavía que el teorema de Sturm proporciona una condición necesaria y suficiente para la realidad de todas las raíces en el hecho de ser del mismo signo los términos de grado máximo de las funciones de la sucesión. Inversamente se encuentra por tanto la condición necesaria y suficiente para la existencia de raíces complejas con afirmar que algunos de estos coeficientes presentan variación

de signo; resulta que será también condición necesaria y suficiente para la existencia de raíces complejas, que uno por lo menos de ellos sea negativo.

Aplicando este criterio con la primera función de Sturm después de la derivada se obtiene que *condición suficiente para la existencia de raíces complejas es que*

$$c_1^2 - 2c_2 \leqq \frac{1}{n} c_1^2, \qquad (25)$$

condición de aplicación más amplia que (16) y a veces más a veces menos que (17) según sea $(\frac{c_1}{n})^n >$ o $< c_n$.

El coeficiente del término de grado máximo de la segunda función de Sturm depende de los coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4, como las (18), (19), pero con expresión incomparablemente más complicada.

B. Levi

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 49 — Es sabido como se puede llenar el área de un triángulo equilátero por medio de bolillas en contacto; igualmente se puede llenar un cuadrado. Se pide hallar la expresión general de los números que representan grupos de bolillas que pueden colocarse de ambos modos.

Solución. — Designemos por x el número de bolillas en cada uno de los lados del triángulo equilátero formado por ellas. El número total de bolillas será igual a

$$1+2+3+\ldots+(x-1)+x=\frac{1}{2}x(x+1).$$

Por otra parte, las mismas bolillas pueden formar un cuadrado. Si y es el número de bolillas en un lado del cuadrado, el número total de ellas será igual a y^2. Las dos expresiones para el número total de bolillas deben ser iguales, lo que nos conduce a la ecuación indeterminada

$$\frac{1}{2}x(x+1)=y^2.$$

Los números x y $x+1$ son primos entre sí. Uno de ellos es par, otro impar. Haciendo x igual a $2x'$, si x es par, y reemplazando x por $2x'-1$, cuando x es impar, llegamos a la ecuación

$$x'(2x' \pm 1) = y^2.$$

Como los factores del primer miembro son primos entre sí, entonces

$$x' = \eta^2, \qquad 2x' \pm 1 = \xi^2, \qquad y = \xi\eta,$$

siendo ξ y η enteros positivos.

Sustituyendo en la 2ª de estas relaciones x' por su expresión que da la 1ª, se obtiene la ecuación generalizada de Fermat

$$\xi^2 - 2\eta^2 = \pm 1. \tag{1}$$

Se sabe que todas las soluciones enteras de la ecuación

$$\xi^2 - D\eta^2 = (-1)^n \tag{2}$$

se encuentran por las fórmulas (1)

$$\xi = \frac{1}{2}[(\xi_0 + \eta_0\sqrt{D})^n + (\xi_0 - \eta_0\sqrt{D})^n],$$

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{D}}[(\xi_0 + \eta_0\sqrt{D})^n - (\xi_0 - \eta_0\sqrt{D})^n],$$

en donde ξ_0 y η_0 son las menores soluciones.

En el caso presente

$$D = 2; \quad \xi_0 = 1, \quad \eta_0 = 1,$$

y por lo tanto

$$\xi = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n], \quad \eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n].$$

Si x es par, en la ecuación (1) se tiene en cuenta el signo superior, lo que corresponde a un valor par del exponente n en la ecuación (2). En tal ocasión

$$x = 2x' = 2\eta^2.$$

---

(1) Ver cualquier tratado de teoría de números; citamos por ej. CAHEN. *Théorie des nombres*, T. II (1924) p. 238. LANDAU. *Vorlesungen über Zahlentheorie* Vol. I p. 61. DICKSON. *Modern elementary theory of Numbers* p. 85.

Cuando x es impar, en la ecuación (1) se tiene en cuenta el signo inferior, y por consiguiente n debe ser impar. Para x resulta

$$x = 2x' - 1 = \xi^2.$$

Reemplazando ξ y η por sus expresiones y efectuando los cálculos en ambos casos se obtiene

$$x = \frac{1}{4}[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n - 2].$$

Para $y = \xi\eta$ encontramos

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n].$$

Finalmente

$$\frac{1}{2}x(x+1) = y^2 = \frac{1}{32}[(17+12\sqrt{2})^n + (17-12\sqrt{2})^n - 2].$$

Haciendo sucesivamente $n = 1, 2, 3, \ldots$ tendremos

$x=1, \quad y=1; \quad y^2=1$
$x=8, \quad y=6; \quad y^2=36$
$x=49, \quad y=35; \quad y^2=1225$
.....

Enunciado y solución de este problema pertenecen al Dr. SERGIO SISPÁNOV, Profesor de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay).

N.º 54 — Resolver la ecuación

$$x^6 + b\,a\,x^4 + 4\,b\,x^3 + 9\,c\,x^2 + 12\,d\,x = 4\,\frac{b^2c - 2abd + d^2}{a^2 - c}.$$

SOLUCIÓN. — En primer lugar nos ocuparemos del primer miembro. Vemos que el primer término es cuadrado de x^3 y el segundo es igual al doble producto de x^3 por $3ax$. Falta, pues, el término $9a^2x^2$ para formar un cuadrado perfecto. Añadiendo y restando el término que falta tendremos

$$(x^3+3ax)^2+4bx^3+9(c-a^2)x^2+12dx.$$

Agregando y quitando ahora la expresión $12abx$ resulta

$$\underline{(x^3+3ax)^2+4b(x^3+3ax)}+9(c-a^2)x^2+12(d-ab)x.$$

Vemos que falta solamente el término $4b^2$ para que el conjunto de términos subrayados forme un cuadrado perfecto. Si se añade y se resta dicho término, se llega a la expresión

$$(x^3+3ax+2b)^2+9(c-a^2)x^2+12(d-ab)x-4b^2.$$

Introduciendo en la ecuación dada el resultado obtenido, podemos representarla en la forma

$$(x^3+3ax+2b)^2=$$
$$9(a^2-c)x^2+12(ab-d)x+4\left(\frac{b^2c-2abd+d^2}{a^2-c}+b^2\right).$$

Ahora ocupémonos del segundo miembro que, después de reducir a mismo denominador el conjunto de términos conocidos y simplificar, se convierte en

$$9(a^2-c)x^2+12(ab-d)x+4\frac{(ab-d)^2}{a^2-c}.$$

Factoreando (a^2-c) tendremos

$$(a^2-c)\left[9x^2+12\frac{ab-d}{a^2-c}x+4\left(\frac{ab-d}{a^2-c}\right)^2\right]=(a^2-c)\left(3x+2\frac{ab-d}{a^2-c}\right)^2;$$

y la ecuación propuesta recibe la forma

$$(x^3+3ax+2b)^2=\left[\sqrt{a^2-c}\ \left(3x+2\frac{ab-d}{a^2-c}\right)\right]^2$$

o, extrayendo la raíz cuadrada,

$$x^3+3ax+2b=\mp\sqrt{\Delta}\left(3x+2\frac{ab-d}{\Delta}\right),$$

en donde

$$\Delta=a^2-c.$$

Finalmente se llega a la siguiente ecuación cúbica

$$x^3+3(a\pm\sqrt{\Delta})x+2\left(b\pm\frac{ab-d}{\sqrt{\Delta}}\right)=0,$$

cuyas soluciones por las fórmulas de Cardano son

$$\begin{cases} x_{1,2}=\sqrt[3]{R_1}+\sqrt[3]{R_2} \\ x_{3,4}=\omega\sqrt[3]{R_1}+\omega^2\sqrt[3]{R_2} \\ x_{5,6}=\omega^2\sqrt[3]{R_1}+\omega\sqrt[3]{R_2}, \end{cases}$$

siendo

$$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\quad \omega^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

y

$$\begin{cases} R_1=-\left(b\pm\frac{ab-d}{\sqrt{\Delta}}\right)+\sqrt{\left(b\pm\frac{ab-d}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+(a\pm\sqrt{\Delta})^3}, \\ R_2=-\left(b\pm\frac{ab-d}{\sqrt{\Delta}}\right)-\sqrt{\left(b\pm\frac{ab-d}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+(a\pm\sqrt{\Delta})^3}, \end{cases}$$

en donde se tienen en cuenta simultáneamente todos los signos superiores o los inferiores.

Enunciado y solución de este problema pertenecen al Dr. Sergio Sispánov, Profesor de la Fac. de Ciencias de Asunción (Paraguay).

N.º 55 — ¿De cuántas maneras diferentes se puede colocar n torres en el tablero de ajedrez de n^2 casillas de tal manera que ninguna coma a otra y además una de las diagonales del tablero esté libre de figuras?

Aplicación al caso particular $n=8$.

1ª Solución. — Designemos por el símbolo f_n el número de colocaciones de n torres que verifican las condiciones del problema en el tablero de n columnas y de n filas. El símbolo f_{n-1} representará el número análogo de colocaciones de $n-1$ torres en un tablero de $n-1$ columnas y de $n-1$ filas, y así sucesivamente.

Como hay n torres y dos de ellas no pueden hallarse en

la misma columna, entonces en cada columna se hallará una torre.

La primera torre puede ocupar todas las casillas de la primera columna, menos la casilla que está en la primera fila, porque por esta casilla pasa la diagonal. De suerte que existen $n-1$ lugares para la primera torre.

Supongamos que ella fué colocada en la fila k. Acerca de la torre de la columna k pueden hacerse dos hipótesis:

Hipótesis 1ª. La torre de la columna k no está en la 1ª. fila. En este caso si vamos a suprimir la primera columna y la fila k, y transportar la primera fila en el lugar de esta suprimida obtenemos un tablero de $(n-1)^2$ casillas en las mismas condiciones del problema. Por tanto el caso se reduce al del tablero de $n-1$ columnas y de $n-1$ filas y admite f_{n-1} soluciones.

Hipótesis 2ª. La torre de la columna k está en la 1ª. fila. En tal ocasión las torres de las columnas 2, 3, ..., $k-1$, $k+1$, ..., n se hallan concentradas en las filas 2, 3, ..., $k-1$, $k+1$, ..., n y el problema admite f_{n-2} soluciones.

Vemos que a cada posición de la primera torre, le corresponde $f_{n-1}+f_{n-2}$ diferentes posiciones de las demás torres. Recordando que el número de lugares para la primera torre es igual a $n-1$, llegamos a la relación

$$f_n=(n-1)\,(f_{n-1}+f_{n-2}).$$

Esta ecuación en diferencias finitas puede representarse bajo la forma

$$f_n-n\,f_{n-1}=-\,[f_{n-1}-(n-1)\,f_{n-2}].$$

Cambiando sucesivamente n en $n-1$, $n-2$, ... llegamos a las relaciones

$$f_{n-1}-(n-1)\,f_{n-2}=-\,[f_{n-2}-(n-2)\,f_{n-3}]$$

.....

$$f_3-3f_2=-\,[f_2-2f_1].$$

Multiplicando ordenadamente las $n-2$ relaciones y simplificando por los factores iguales que figuran en ambos miembros, se obtiene

$$f_n-nf_{n-1}=(-1)^{n-2}\,.\,(f_2-2f_1).$$

Como $f_1=0$, $f_2=1$, y los números n y $n-2$ son de igual paridad, entonces

$$f_n-nf_{n-1}=(-1)^n$$

o dividiendo por $n!$

$$\frac{f_n}{n!}-\frac{f_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Haciendo ahora

$$\varphi_n=\frac{f_n}{n!}, \qquad (*)$$

se tendrá

$$\varphi_n-\varphi_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

En esta igualdad podemos cambiar sucesivamente n en $n-1$, $n-2$, ..., llegando de tal manera a la serie de igualdades

$$\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

.....

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{1}{2!}.$$

Sumando ordenadamente las $n-1$ igualdades halladas y teniendo en cuenta que en el primer miembro todos los términos se neutralizan exceptuando a φ_n y φ_1,

$$\varphi_n-\varphi_1=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Pero

$$\varphi_1=\frac{f_1}{1!}=0$$

y por lo tanto

$$\varphi_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Recordando la relación (*) tendremos finalmente

$$f_n=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

En el caso de un tablero de 64 casillas, $n=8$ y el número de diferentes soluciones será

$$f_8=8!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^8}{8!}\right]=14833.$$

El enunciado y esta 1ª solución del problema pertenecen al Dr. SERGIO SISPÁNOV, Profesor de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay).

2ª SOLUCIÓN. — Sea $F(n)$ el número de maneras diferentes de poder colocar n torres sin que ninguna de ellas pueda comer a otra, y dejando libre por ej. la diagonal principal (que va desde la izquierda arriba a la derecha abajo). Demostraremos que para $F(n)$ rige la fórmula explícita

$$F(n)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(n-\nu)!$$

$$=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\ldots+(-1)^n; \quad (1)$$

pero, para el cálculo rápido de $F(8)$ conviene más usar la fórmula recursiva

$$F(n)=(n-1)\{F(n-1)+F(n-2)\} \quad (2)$$

la cual, basándose en $F(1)=0$ y $F(2)=1$, da sucesivamente

$$F(3)=2,\ F(4)=9,\ F(5)=44,\ F(6)=265,\ F(7)=1854$$

y por fin $F(8)=14833$.

Demostración de la fórmula (1). — Observemos en primer lugar que en vez de un tablero de ajedréz conviene más hablar de una matríz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de n filas y n columnas. A cada una de las $F(n)$ soluciones de nuestro problema corresponderá entonces un producto de la forma

$a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ a_{3\alpha_3}\ \ldots a_{n\alpha_n}$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ es una permutación de los números 1, 2, 3, ..., n, donde $\alpha_1 \neq 1$, $\alpha_2 \neq 2$, $\alpha_3 \neq 3$, ..., $\alpha_n \neq n$. Se trata, pues, del número $F(n)$ de permutaciones de n números 1, 2, 3, ..., n, las que no dejan inalterado ningún número. Considerando estas $F(n)$ permutaciones como «casos favorables» y todas las $n!$ permutaciones de 1, 2, 3, ..., n como «casos posibles», podemos interpretar el cociente $\frac{F(n)}{n!}$ también como la probabilidad de que sacando sucesivamente todas las fichas de una urna que contiene n fichas numeradas (con 1, 2, 3, ..., n), *ninguna* salga en el lugar correspondiente al número expresado en la misma. Del cálculo de probabilidades se sabe que esta probabilidad es igual a

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

(Véase por ej. O. Knopf, *Cálculo de Probabilidades*, 2ª. Ed., 1936, § 16), de donde resulta

$$\begin{aligned} F(n) &= n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!} \\ &= n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\ldots+ \\ &\qquad (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!, \end{aligned}$$

lo cual es la fórmula (1).

Si no queremos usar en la demostración la fórmula proporcionada por el cálculo de probabilidades, podemos proceder de la manera siguiente. Ya sabemos que $F(n)$ es el número de aquellas permutaciones de 1, 2, 3, ..., n que sustituyen cada número por otro. Se ve fácilmente que $\binom{n}{\nu}F(n-\nu)$ es análogamente, el número de aquellas permutaciones de 1, 2, 3, ..., n que alteran sólo $n-\nu$ de los n números (para $\nu=1, 2, 3, \ldots, n$); en efecto, hay $\binom{n}{\nu}$ posibilidades de elegir ν números que no han de permutarse, y en cada uno de estos casos $F(n-\nu)$ posibilidades de permutar los demás $(n-\nu)$ números (sin que ninguno de ellos quede fijo). Poniendo $F(0)=1$ (para comprender el caso de la permutación «idéntica» que no varía ningún

número) resulta que la suma de todas las posibilidades de permutar 0, 1, 2, ..., n números respectivamente, debe ser igual a $n!$ (= número de todas las permutaciones), o sea, que rige la fórmula

$$n! = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} F(n-\nu) = F(n) + \binom{n}{1} F(n-1) + \\ + \binom{n}{2} F(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1} F(1) + F(0). \qquad (3)$$

Agregando a esta fórmula las n ulteriores que se obtienen reemplazando n sucesivamente por $n-1$, $n-2$, $n-3$, ..., 2, 1, 0 resulta un sistema de $n+1$ ecuaciones de primer grado para las $n+1$ incógnitas $F(n)$, $F(n-1)$, $F(n-2)$, ..., $F(1)$, $F(0)$:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0! \\ F(1) + F(0) &= 1! \\ F(2) + 2F(1) + F(0) &= 2! \\ F(3) + 3F(2) + 3F(1) + F(0) &= 3! \qquad (4) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(n) + \binom{n}{1} F(n-1) + \ldots + & \\ + \binom{n}{n-2} F(2) + \binom{n}{n-1} F(1) + F(0) &= n! \end{aligned}$$

El determinante del sistema (4) es distinto de cero, de manera que las ecuaciones (4) son suficientes para calcular las «incógnitas» $F(0)$, $F(1)$, ..., $F(n)$, por ejemplo, por medio de la regla de Cramer. Sin embargo, no es fácil demostrar por cálculo directo que la solución que se obtiene de esta manera para $F(n)$ es la misma dada por la (1).

Más conveniente es el procedimiento siguiente:

Multiplicando la última de las ecuaciones (4) por $\binom{n}{0}$, la penúltima por $(-1)\binom{n}{1}$, la antepenúltima por $(-1)^2\binom{n}{2}$, etc. y sumando, resulta

$$F(n) + \left\{\binom{n}{0}\binom{n}{1} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{0}\right\} F(n-1) \\ + \left\{\binom{n}{0}\binom{n}{2} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{0}\right\} F(n-2)$$

$$+\ldots+\left\{\binom{n}{0}\binom{n}{n}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{n-2}-\ldots\right\}F(0)=$$

$$=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}0!,$$

o sea

$$F(n)+\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^\rho\binom{n}{\rho}\binom{n-\rho}{\nu-\rho}\right\}F(n-\nu)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}(n-\nu)!.$$

La fórmula (1) quedará demostrada si podemos hacer ver que la suma en el paréntesis llave es igual a cero, para cualquier valor de $\nu=1, 2, 3, \ldots, n$. Ahora bien, se tiene

$$\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^\rho\binom{n}{\rho}\binom{n-\rho}{\nu-\rho}=\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^\rho\frac{n!}{\rho!(n-\rho)!}\,\frac{(n-\rho)!}{(\nu-\rho)!(n-\nu)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-\nu)!}\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^\rho\frac{1}{\rho!(\nu-\rho)!}=\binom{n}{\nu}\sum_{\rho=0}^{\nu}(-1)^\rho\binom{\nu}{\rho}$$

y esta última suma es igual a cero, por representar el desarrollo del binomio $(1-1)^\nu$ según la fórmula de Newton.

Pero también sin efectuar cálculo alguno se puede demostrar que la única solución del sistema (4) es la fórmula (1). Para eso basta considerar el esquema siguiente

$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$
$F(0)+F(1)$	$F(1)+F(2)$	$F(2)+F(3)$	.....
$F(0)+2F(1)+F(2)$	$F(1)+2F(2)+F(3)$	.....	.....
$F(0)+3F(1)+3F(2)+F(3)$	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

En este esquema cada término es la suma de los dos que tiene encima (directamente y a su derecha). Las ecuaciones (4) dicen que la primera columna está formada por 0!, 1!, 2!, 3!, ... Invirtiendo ahora esta consideración podemos observar que la segunda columna está formada por las diferencias de la primera, la tercera columna por las segundas diferencias de la primera, etc. En particular tendremos que

$$F(0)=0!$$
$$F(1)=1!-0!$$
$$F(2)=(2!-1!)-(1!-0!)=2!-\binom{1}{2}1!+0!$$

y de un modo general

$$F(n)=\Delta^n(0!)=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\ldots+(-1)^n.$$

Esta interpretación (*) da, por consiguiente, la posibilidad de calcular $F(n)$ como la n-ésima diferencia de factoriales

$n!$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
1	0	1	2	9	44
1	1	3	11	53	
2	4	14	64		
6	18	78			
24	96				
120					

(La primera fila da $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$ ...).

Demostración de la fórmula (2). Para demostrar la

$$F(n)=(n-1)\left\{F(n-1)+F(n-2)\right\} \qquad (2)$$

interpretamos $F(n)$ como el número de términos en el desarrollo de un determinante

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

(*) Se debe esta interpretación de un sistema de ecuaciones del tipo (4) en el caso más general de segundos miembros cualesquiera, a S. BREUER, que ha tratado este sistema por una aplicación en matemática actuarial; véase su nota *Die Versicherung verbundener Leben* en Das Versicherungsarchiv (Viena, 1933), pág. 138.

en que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a cero. Desarrollando D obtenemos

$$D = -a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - a_{14}D_{14} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n} \qquad (6)$$

donde, por ejemplo,

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{43} & 0 & \ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{43} & 0 & \ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & a_{43} & 0 & \ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

o sea,

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{43} & 0 & \ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 0 \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ a_{43} & 0 & \ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Puesto que los dos determinantes en el 2º miembro tienen todos los elementos de su diagonal principal iguales a cero (y sólo éstos), resulta que el primero contendrá, desarrollando, $F(n-1)$ términos y el segundo $F(n-2)$. El determinante D_{12} contiene por lo tanto $F(n-1)+F(n-2)$ términos. Lo mismo rige, de manera análoga, para D_{13}, D_{14}, ..., D_{1n}; el desarrollo (6) de D da, por consiguiente, $(n-1)\{F(n-1)+F(n-2)\}$ términos. Pero este número de términos es, en virtud de la (5), igual a $F(n)$.

Esta segunda solución es debida al Dr. ROBERTO FRUCHT, de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso (Chile).

N.º 52 — Demostrar que cualquiera que sea el número entero n se verifica

$$n^2-(n-1)^2+(n-2)^2-(n-3)^2+\ldots\ldots\pm 2^2\mp 1=\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN. — Procederemos por inducción. Para $n=2$ el resultado es cierto, puesto que $2^2-1=\frac{2.3}{2}$. Supongámoslo cierto para n y vamos a demostrar que también lo es para $n+1$. En efecto, para $n+1$ es

$$(n+1)^2-n^2+(n-1)^2-(n-2)^2+\ldots\mp 2^2\pm 1=$$
$$(n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2},$$

puesto que suponemos el resultado cierto para n. Pero

$$(n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

lo cual prueba que el teorema es cierto también para $n+1$.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ENRIQUE L. HOWARD, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

71. Se conoce el perímetro de un triángulo y las longitudes de los segmentos que unen los vértices con los lados opuestos bajo un ángulo constante pero desconocido. Se pide construir el triángulo y determinar ese ángulo.

72. De un triángulo se conoce el perímetro $2p$, la suma de las alturas h y el área S. Se pide determinar la ecuación de tercer grado cuyas raíces son los tres lados del triángulo.

73. Sea una elipse de semiejes a, b. Por cada punto P de la elipse se traza la normal y se considera el segmento h de la misma que es interior a la elipse. Siendo ds el elemento de arco correspondiente al punto P, demostrar que

$$\int h\,ds = 2F\left(1+\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right)$$

donde la integración está extendida a toda la elipse y F es el área de la misma.

Problema propuesto por S. SISPÁNOV, de la Facultad de Ciencias de Asunción, Paraguay.

74. Dada la parábola $y^2=2px$, sea $2h$ la longitud de la cuerda MM' perpendicular al eje x a distancia k del origen. Se pide:

1º. Determinar el centro y el radio r del círculo inscrito en el segmento parabólico MOM' y encontrar las coordenadas de los puntos P, P' de contacto con la parábola.

2º. Determinar el radio ρ y el centro del círculo circunscrito al sector parabólico.

3º. Demostrar que r y ρ están ligados por la relación

$$r+\rho=\frac{2h+k}{2},$$

4º. Determinar el área del sector parabólico comprendido entre las cuerdas PP' y MM'.

75. Una losa plana homogénea de forma dada tiene trazada una línea cerrada (que podría ser el borde). Se quiere sostenerla por tres columnas en puntos de dicha línea: uno de estos puntos está asignado. Se pide determinar la posición de los otros dos de manera que las tres columnas resulten cargadas igualmente.

Desde luego la resolución del problema sólo puede ser gráfica en sentido amplio si no se especifica la forma geométrica de la losa y de la línea.

Se pide considerar y resolver geométricamente el caso en que la losa es circular y la línea un paralelogramo con un vértice en el punto asignado.

Discusión.

BIBLIOGRAFIA

BEPPO LEVI. *Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciales y en derivadas parciales.* Monografías publicadas por la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-químicas y Naturales aplicadas a la Industria, nº 1, Rosario, 1944.

PRESENTACION POR EL AUTOR

Los problemas relacionados a ecuaciones y sistemas diferenciales, principalmente los que se refieren a ecuaciones en derivadas parciales, son tan amplios y variados que abarcan, puede decirse, una parte preponderante del análisis matemático. El tema que nos hemos propuesto al componer este pequeño libro es de considerar estos problemas en el campo restringido de las funciones de variable compleja o funciones analíticas. Frente a muchas de las posibles aplicaciones prácticas de la teoría, la limitación no puede considerarse excesiva, pues es conocido que los polinomios y las series de potencias ofrecen un medio más que bastante para la representación aproximada de cualquier función que dichas aplicaciones puedan presentar; frente a los modernos desarrollos de la teoría de las funciones de variable real, ella simplifica profundamente muchas cuestiones, eliminando difíciles problemas de detalle, y permitiendo, en compensación, de poner en evidencia hechos y teoremas notables y de carácter general. La observación se ajusta principalmente, hemos dicho, al caso de ecuaciones en derivadas parciales; sin embargo, para escribir un libro que fuese lo bastante completo como para poder ser leído sin una excesiva preparación previa, era necesario informar al lector acerca de ciertos fundamentos de las funciones sobre las cuales teníamos que razonar, y esto principalmente porque ellas eran necesariamente en varias variables (posiblemente muchas, en número indeterminado), y la mayor parte de los tratados y de los cursos que se ofrecen por costumbre a los jóvenes, dan una preferencia absoluta al caso de una única variable. Por otra parte era necesario empezar con un corto examen del caso de los sistemas de ecuaciones en derivadas ordinarias, ya por las aplicaciones sucesivas y ya porque, en forma muy reducida, pueden ellos servir para esbozar algunos de los problemas y de los métodos que se desarrollarán luego en el caso de las ecuaciones en derivadas parciales.

De aquí la estructuración de los dos primeros capítulos.

Después de recordar en forma breve las nociones de número complejo y de las operaciones elementales sobre ellos, tratamos de las series de Taylor (o, como quiera decirse, de Maclaurin o de potencias) de una y de varias variables, de las operaciones sobre ellas y del teorema de Cauchy-Hadamard para los dos casos; finalmente de la prolongación analítica y del principio de conservación de las relaciones analíticas. Para las aplicaciones sucesivas la teoría de Cauchy (geométrica o topológica) de las funciones de variables complejas podría casi ser completamente olvidada; pareció sin embargo conveniente presentar brevemente sus líneas fundamentales, no solamente por su esencial importancia, sino para la sucesiva aplicación de la noción de residuo a la demostración clásica del teorema preparatorio (*Vorbereitungssatz*) de Weierstrass

que es la clave de la teoría de las ecuaciones analíticas desarrolladas en el cap. II. A la verdad esta demostración, que es la misma de Weierstrass, es más que todo existencial. Por razones de método y también para que la exposición fuera completa en el sentido de no faltar en nada respecto a la efectiva ejecutabilidad de los cálculos que deben conducir a la resolución de las ecuaciones, nos hemos entretenido en un párrafo sucesivo sobre un procedimiento efectivo para la separación del factor algebroide de una serie de varias variables, que proporciona además la base para una demostración puramente algebraica del teorema de Weierstrass. Unicamente para el caso de dos variables el problema había sido encarado anteriormente bajo este punto de vista por Brill.

Se debe notar que todas las teorías corrientes sobre ecuaciones diferenciales suponen que éstas estén previamente resueltas bajo una determinada forma, ordinariamente la explicitación de determinadas derivadas, la que se llama comunmente la forma normal. Era necesario mostrar cómo y cuándo esa resolución se puede cumplir; y es este el argumento de la primera parte del cap. II que trata de la resolución de los sistemas de ecuaciones analíticas. Necesariamente las dificultades relativas al presentarse de puntos singulares están señaladas, pero no desarrolladas por cuanto importarían entrar en otro orden de consideraciones. Termina este capítulo con el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias; siempre ellos pueden reducirse formalmente al primer orden y a contener igual número de ecuaciones como de funciones incognitas, pero no necesariamente reducibles algebraicamente a la forma normal (explicitación de las derivadas de las funciones incognitas). El problema, que, desde el punto de vista de las funciones de variable real (no ilimitadamente derivables) merecería, por lo que sabemos, de ser todavía estudiado, se demuestra resoluble en el caso actual por medio de un número finito de operaciones de derivación y de eliminación.

Los capítulos siguientes (III a V) tratan especialmente de los sistemas en derivadas parciales. El cap. III está destinado a dos lemas algebraicos que forman el fundamento conocido de la teoría del completamiento de los sistemas diferenciales, a los cuales creímos necesario agregar algunas consideraciones nuevas en vista de la forma más general que de costumbre en la cual nosotros encaramos el problema de la explicitación de determinadas variables.

El capítulo IV está dirigido a la resolución formal: compatibilidad y completamiento de los sistemas, definición de las condiciones iniciales, construcción de soluciones formales (es decir, desarrollos de Taylor que realizan formalmente las ecuaciones propuestas). Empezamos, por razones de simplicidad, y también por razones históricas, con los sistemas de ecuaciones del primer orden con una sola función incognita, en los cuales el completamiento se efectúa en modo casi evidente y sin salir del primer orden. Se presenta aquí la primera oportunidad de definir las condiciones iniciales del tipo de Cauchy que se caracterizan por la unicidad de la variedad sostén de esas condiciones y que tendrán en lo sucesivo importancia fundamental.

Es conocido que los fundamentos de la teoría para los sistemas de orden superior al primero son la obra maestra de Méray y de Riquier. Mientras en el caso anterior de sistemas de primer orden con una sola función incógnita las

ecuaciones complementarias que derivan de la permutabilidad de las derivaciones respecto a varias variables se demuestra ser en número finito a consecuencia de una simple observación algebraica, en este otro caso esa finitud depende esencialmente de un oportuno artificio de ordenación de las derivadas. A ello se vincula también la determinación de las condiciones iniciales que hay que añadir al sistema para que la solución quede definida. Sin haber introducido en esta parte novedades esenciales, creemos que la forma que ha recibido esa teoría en nuestra exposición, ha adquirido en claridad, esbeltez y sencillez en modo manifiesto, por la sola comparación de volúmenes.

En el capítulo V se enfrenta el problema de la convergencia de las soluciones formales (desarrollos de Taylor) construídas según los procedimientos del capítulo anterior. Para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se ha mostrado que esta convergencia se realiza siempre dentro de un dominio apropiado por el hecho solamente de tener un dominio común de convergencia las ecuaciones propuestas, más aquí la cuestión se hace mucho más seria. Se sabe que fué primera Sofía Kowalewsky a extender un razonamiento de Cauchy para demostrar la convergencia de la solución en condiciones que no se alejan mucho de las condiciones que ocurren en los sistemas diferenciales ordinarios, mientras la misma Kowalwsky pudo hacer notar, sobre la simple ecuación del calor, que, al no realizarse esas condiciones, podía la solución formal tener radio de convergencia 0, para condiciones iniciales de radio de convergencia finito. La observación fué extendida por Riquier a tipos de ecuaciones que pueden considerarse como generalización de la del calor. En sentido muy diferente Meray trató el ejemplo de un sistema de dos ecuaciones para el cual la solución formal, para condiciones iniciales convergentes, tenía o no tenía radio de convergencia > 0 según el valor de cierto coeficiente numérico en el sistema. Por otra parte Riquier, por medio de una clasificación algo complicada, pudo caracterizar algún caso bastante general de convergencia. Los distintos fenómenos se vinculan estrictamente al modo de ordenamiento adoptado según lo expuesto en el cap. IV. En el estudio que aquí presentamos, encontramos conveniente distinguir esos ordenamientos en normales, casi normales y no normales y correspondientemente las ecuaciones y sistemas en ilimitadamente y limitadamente integrables según la solución formal tenga radios de convergencia > 0, siempre que esto ocurre para las condiciones iniciales, y con coeficientes de las ecuaciones vinculados solamente por las condiciones dadas por el teorema de Cauchy-Hadamard —o bien la convergencia se realiza para condiciones iniciales generales, solo cuando ciertos coeficientes en las ecuaciones realizan determinadas desigualdades—, o bien finalmente cuando las condiciones iniciales deben realizar condiciones que interesan infinitos coeficientes de sus desarrollos de Taylor. Damos al respecto varios teoremas, unos conocidos, otros que creemos nuevos y algunos interesantes ejemplos para aclarar las singularidades señaladas. El problema, para ser completamente esclarecido, admite todavía investigaciones ulteriores.

El libro termina con un breve apéndice sobre la noción de característica en la teoría general de las ecuaciones en derivadas parciales y una nota bibliográfica.

B. Levi

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del ertranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

—El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 $ (m/n) anuales.

—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 $ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.

—Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).

—Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.

—Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

Imprenta de la Universidad del Litoral - Santa Fe - República Argentina

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

Vol. I. m$n.

1 - B. Levi — *Sobre el sistema* $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(xy)dx=p(y);\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(xy)dy=q(x)$ 1.00

2 - L. A. Santaló — *Geometría integral de figuras ilimitadas* 1.80

3 - F. Amodeo — *Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva.* Trad. de Nicolás y José Babini 8.00

4 - B. Levi — *Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable* 1.00

Vol. II.

1 - P. Montel — *Funciones armónicas y subarmónicas* 1.00

2 - G. Fubini — *La ley de la media para funciones no derivables.*

B. Levi — *Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini* 1.00

3 - L. A. Santaló — *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo* 1.20

4 - L. A. Santaló — *Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas* 1.50

5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto.

II. Acto de inauguración oficial del Instituto.

C. Plá — *Origen y propósitos del Instituto.*

J. Rey Pastor — *La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella.*

B. Levi — *Evolución del pensamiento matemático* 1.50

6 - E. Gaspar — *Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables* 1.50

7 - A. Rosenblatt — *Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad* 1.00

8 - M. Cotlar — *Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue* - Prólogo por B. Levi 1.50

9 - B. Levi — *La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas* 1.50

Vol. III.

1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson.

C. Plá — *Semblanza de Sir Joseph J. Thomson.*

B. Levi — *La personalidad de Vito Volterra* 1.00

2 - G. Fubini — *Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos* 2.50

3 - B. Levi — *Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida* 3.00

4 - B. Levi — *Sobre la inversión de una integral definida* 1.20

5 - L. A. Santaló — *Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.* 2.00

6 - A. Terracini — *Orígenes de algunos conceptos geométricos* 2.00

7 - L. A. Santaló — *Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"* 1.00

Vol. IV.

1. - L. A. Santaló — *Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones* 3.00

2 - M. Cotlar — *Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo* 2.00

3 - José L. Massera. — *Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden* 3.50

4 - A. Komischke. — *Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación* 2.50

5 - R. Laguardia y B. Levi. — *Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales* 2.00