Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Calculo diferencial e Integral

5º Año

Cód. 1503-19

Juan Carlos Bue
Betina Cattaneo

Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

INTEGRAL INDEFINIDA.

FUNCIÓN PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN.

Definición:

Se llama *función primitiva o antiderivada* de una función f (x) a otra función P (x), tal que para todo x perteneciente al dominio de f (x) se cumpla: P´(x) = f(x).
Es decir:

$$\boxed{P(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Leftrightarrow P'(x) = f(x) \quad \forall \quad x \in \text{Dom}(f)}$$

Así:

- ☑ $P_1(x) = \operatorname{sen} x$ es una primitiva de $f_1(x) = \cos x$, pues $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
- ☑ $P_2(x) = \operatorname{arcsen} x$ es una primitiva de $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pues $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- ☑ $P_3(x) = \dfrac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f_3(x) = x^2$ pues $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Determina una primitiva de cada una de las siguientes funciones y verifica tu respuesta por derivación:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x + x^2$

e) $h(x) = x^3 - x + \sqrt{x}$

f) $h(x) = (x^3 - 5)^2$

g) $t(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 6}{x^2}$

h) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ (**Sugerencia:** Escribir $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ como $g(x) = \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}$)

2) Indica si cada una de las siguientes afirmaciones es V (verdadera) o F (falsa). Justifica tus respuestas.

a) Una primitiva de $f(x)=\sqrt{x}+e^{x}$, es $P(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+e^{x}+\pi$.

b) Las funciones $F(x)=\frac{x^{2}+1}{x^{2}}$ y $G(x)=\frac{1}{x^{2}}+\log 3$ son primitivas de una misma función.

c) Las funciones $F(x)=e^{x}\cdot(1-e^{-x})+\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)$ y $G(x)=e^{x}+\ln\left(\frac{2x-6}{x}\right)$ son primitivas de una misma función.

Observando las respuestas del problema anterior, notamos que existen dos primitivas distintas para la misma función. ¿Siempre existirán dos? ¿O habrá más de dos posibilidades? Si hay más, ¿existirá alguna relación entre ellas?
El siguiente teorema nos resuelve estos interrogantes.

<u>TEOREMA</u>.

Dos funciones P(x) y H(x) son primitivas de una misma función f(x), en el intervalo (a; b), si y sólo si dichas funciones difieren en una constante real.

En símbolos:

$$\text{P(x) y H(x) son primitivas de f (x) en (a; b)} \Leftrightarrow P(x) - H(x) = C;\ \ \forall x \in (a\,;\,b) \wedge\ C \in \Re$$

<u>Observación</u>:

En el teorema hay un sí y sólo si, por lo tanto tendremos que demostrar la ida y la vuelta del mismo.

$$\left.\begin{array}{l} P(x)\ \text{es primitiva de}\ f(x)\ \text{en}\ (a;b)\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ P'(x)=f(x) \\ H(x)\ \text{es primitiva de}\ f(x)\ \text{en}\ (a;b)\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ H'(x)=f(x) \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} P'(x)-H'(x)=0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \big(P(x)-H(x)\big)'=0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} P(x)-H(x)=C\ \ con\,C \in \Re$$

(1) Por definición de primitiva de una función.
(2) Restando miembro a miembro.
(3) La derivada de la resta es la resta de las derivadas.
(4) La derivada de una función constante es cero.

Nota: El teorema anterior nos permite afirmar que si f (x) tiene una primitiva P (x), en realidad tiene infinitas primitivas, pero tales que dos cualesquiera de ellas, difieren en una constante real C.-

Problema resuelto

Encuentra tres primitivas de la función f (x) = $\cos x$.

Resolución:
Tres primitivas de la función f (x) = $\cos x$ podrían ser:

$$P_1(x) = \operatorname{sen} x + 3 \quad ; \quad P_2(x) = \operatorname{sen} x - e^2 \quad \text{y} \quad P_3(x) = \operatorname{sen} x - 1$$

Ya que: $(\operatorname{sen} x + 3)' = \left(\operatorname{sen} x - e^2\right)' = (\operatorname{sen} x - 1)' = \cos x$

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN.

Definición:

Al conjunto de todas las primitivas P(x) + C de f(x), se lo llama "***integral indefinida de f***" y se lo simboliza $\int f(x)\,dx$ (esta expresión se lee «integral de efe de equis diferencial de equis»).

Es decir:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = P(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad [P(x) + C]' = f(x)}$$

En dicha expresión, convenimos en llamar:

Símbolo	Nombre
$\int$	Símbolo integral.
f (x)	Función integrando.
C	Constante de integración.
dx	Indica la variable en la cual se está integrando.

Observación:
Resolver una integral indefinida, consistirá en calcular el conjunto de todas las primitivas de f (x).

Problemas resueltos

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

- $\int e^x \, dx$

  Resolución:

  Puesto que una primitiva de f (x) = e^x es P(x) = e^x, entonces: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

- $\int x^2 dx$

  Resolución:

  Una primitiva de $f(x) = x^2$ es $P(x) = \dfrac{x^3}{3}$, entonces: $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$

- $\int \dfrac{t}{1+x^2} \, dx =$

  Resolución:

  Una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es $P(x) = \operatorname{arctg} x$, y como t es una constante (pues la variable es x), entonces: $\int \dfrac{t}{1+x^2} \, dx = t \cdot arctgx + C$.

Para pensar:

Justifica la siguiente afirmación:

> *"La integral indefinida representa un conjunto de funciones cuyas gráficas constituyen una familia de curvas paralelas entre sí, a lo largo del eje y"*

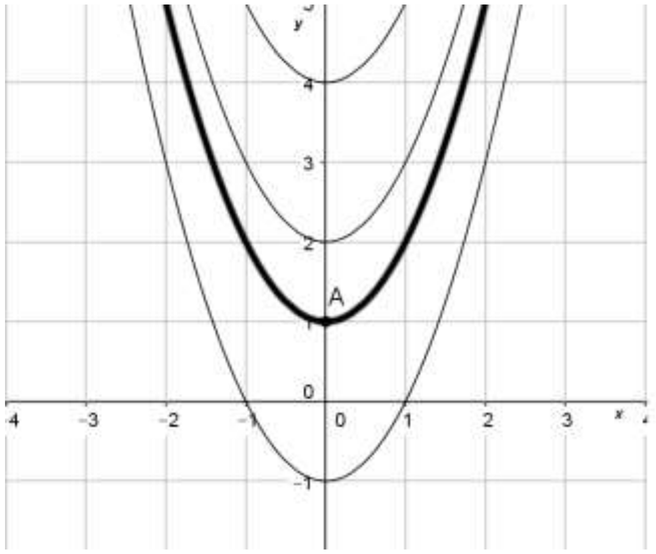
Problema resuelto.

Calcula la primitiva de f (x) = 2x cuya gráfica pase por el punto A (0; 1).

Resolución:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C \overset{(1)}{\Rightarrow} 0^2 + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 \quad \therefore \quad P(x) = x^2 + 1$$

(1) pues A (0; 1) pertenece a la gráfica de una de las infinitas funciones de la forma $x^2 + C$.



INTEGRALES INMEDIATAS.

> Se denomina "***integrales inmediatas***" a todos los resultados obtenidos en forma directa, teniendo en cuenta la definición de integral indefinida y utilizando la derivación de funciones elementales.

La siguiente tabla, llamada **tabla de integrales inmediatas**, muestra dichos resultados, que serán necesarios aprender si se pretende ser ágil en el cálculo de otras integrales menos sencillas.

$\int dx = x + C$	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \; , \; \forall \, n \neq -1$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C$
$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cosec} x + C$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \forall a > 0 \text{ y } a \neq 1$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\ tg} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$

Problemas resueltos.

1. Calcula las siguientes integrales:

- $\int x^4 \ dx$

  Resolución:

  $$\int x^4 \ dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

- $\int \frac{1}{x^5} \ dx$

  Resolución:

  $$\int \frac{1}{x^5} \ dx = \int x^{-5} \ dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

- $\int x^2 \sqrt{x^3} \ dx$

  Resolución:

  $$\int x^2 \sqrt{x^3} \ dx = \int x^2 \ x^{\frac{3}{2}} \ dx = \int x^{\frac{7}{2}} \ dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{x^9} + C$$

- $\int 3^x \ dx$

  Resolución:

  $$\int 3^x \ dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

2. Demuestra que:

$$\int \frac{1}{x} \ dx = \ln|x| + C$$

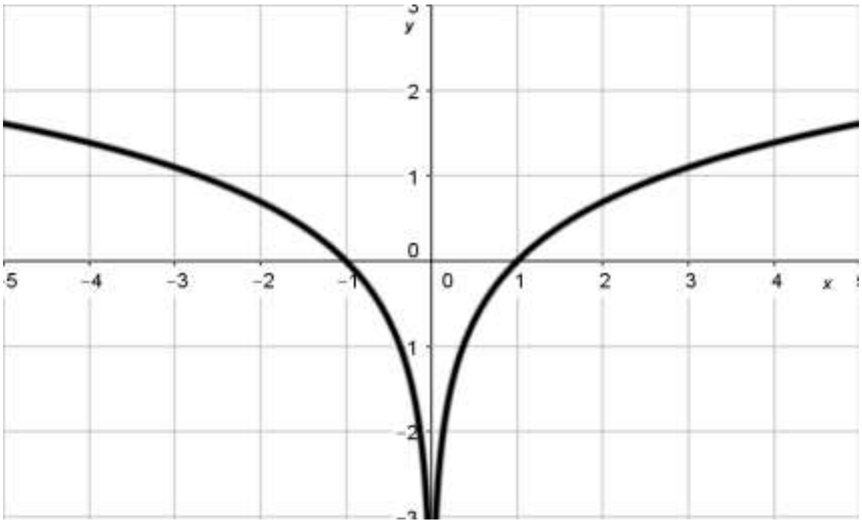
Resolución:

Para demostrar dicha igualdad basta con verificar que $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Sugerencia: utilizar para derivar $|x| = \sqrt{x^2}$.

$$(\ln|x|)' = \left(\ln\sqrt{x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{x^2} \cdot x = \frac{1}{x}$$

Observación: si en lugar de tener $\ln|x|$, tuviéramos ln x, la fórmula sólo da la primitiva $\forall x > 0$. Al operar con $\ln|x|$, función par con derivada $\frac{1}{x}$ en todos los reales excepto en 0, se tiene mayor dominio de validez.



3. Demuestra que:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Resolución:

Para demostrar dicha igualdad basta con verificar que $\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2}$.

Sugerencia: utilizar para derivar $\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}$.

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}\cdot 2\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Por lo tanto, podemos concluir que: $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Nota: En las propiedades que se enuncian a continuación (que aceptaremos sin demostrar) el símbolo D significa derivada.

Propiedad 1

$$\text{Si existe } \int f(x)\,dx \;\Rightarrow\; D\int f(x)\,dx = f(x)$$

Ejemplo: $D\int tg\ 5x\ dx = tg\ 5x$.

Propiedad 2

$$\text{Si f es derivable} \;\Rightarrow\; \int Df(x)\,dx = f(x) + C$$

Ejemplo: $\int D(\ tg\ 5x\ )\ dx = tg\ 5x + C$

Propiedad 3

Si existen
$$\int f(x)\,dx \ \text{ y } \int g(x)\,dx \Rightarrow \int (\underbrace{\alpha f(x) \ \pm \beta g(x)}_{h})\ dx = \alpha\int f(x)\,dx \pm \beta\int g(x)\ dx \ \ con\ \ \alpha, \beta \in \Re$$

Esta propiedad es tan importante que recibe el nombre de "**Propiedad Lineal de la Integral Indefinida**".

Ejemplo: $\int (5\,x^3 \text{ - } 6\ sen\ x)\ dx = 5\int x^3 dx - 6\int sen\ x\ dx$

Casos particulares para esta propiedad:

Si $\beta = 0$ resulta $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha\int f(x)$.

Si $\alpha = \beta = 1$ resulta $\int (\underbrace{f(x) \ \pm g(x)}_{h})\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\ dx$.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN.

La integración por descomposición es un **método** (más adelante estudiaremos otros) que nos permite, por aplicación de la Propiedad 3 de la integral indefinida anteriormente estudiada, transformar una integral compleja en varias integrales más sencillas.
Veamos cómo aplicamos este método en los siguientes:

Problemas resueltos.

Calcula las siguientes integrales:

- $\int (2\,\text{sen}\,x - 4x^2 + 5\sqrt{x})\,dx$

  Resolución:

  $$\int (2\,\text{sen}\,x - 4x^2 + 5\sqrt{x})\,dx = 2\int \text{sen}\,x\,dx - 4\int x^2\,dx + 5\int x^{1/2}\,dx =$$

  $$= -2\cos x + 2C_1 - \frac{4}{3}x^3 + (-4)C_2 + \frac{10}{3}x^{3/2} + 5C_3 =$$

  $$= -2\cos x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + \underbrace{2C_1 - 4C_2 + 5C_3}_{C}$$

Observación:
De acuerdo a lo visto en el ejemplo anterior, las integrales serán concluidas con una única constante C al final, sin considerar las operaciones algebraicas de constantes previas.

- $\int \left(3x^{-1/2} + \frac{2}{1+x^2} - e^2 + 4\cdot 2^x + x^{1/3} \right) dx =$

  Resolución:

  $$\int \left(3x^{-1/2} + \frac{2}{1+x^2} - e^2 + 4\cdot 2^x + x^{1/3} \right) dx = 6x^{1/2} + 2\,\text{arc tg}\,x - e^2 x + \frac{4}{\ln 2}2^x + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

- $\int \left(x^2 - 2\right)^2 dx =$

  Resolución:

  $$\int \left(x^2 - 2\right)^2 dx = \int \left(x^4 - 4x^2 + 4\right) dx = \int x^4\,dx - 4\int x^2\,dx + \int 4\,dx =$$

  $$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x + C$$

- $\int \sqrt{x}\ \left(1-x^2\right)^2\ dx =$

  Resolución:

  $\int \sqrt{x}\ \left(1-x^2\right)^2\ dx = \int x^{1/2}\ \left(1-2x^2+x^4\right)\ dx = \int \left(x^{1/2} - 2\,x^{5/2} + x^{9/2}\right)\ dx =$

  $= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{7}x^{7/2} + \frac{2}{11}x^{11/2} + C$

- $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 2}{x^3}\ dx =$

  Resolución:

  $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 2}{x^3}\ dx = \int \left(x - 5x^{-1} + 2x^{-3}\right)\ dx = \frac{1}{2}x^2 - 5\ln|x| - \frac{1}{x^2} + C$

<u>PROBLEMAS DE APLICACIÓN</u>

3) Analiza la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones colocando V o F según corresponda. Justifica cada una de tus respuestas:

a) $\int x \cdot x^4 dx = \int x dx \cdot \int x^4 dx$

b) $\int \frac{x^3}{x} dx = \frac{\int x^3 dx}{\int x dx}$

c) Si $g(x) = x^4$, las primitivas de g(x) son $G(x) = \frac{x^5}{5} + C$

d) Si $f(x) = (x^2-1)^3$, las primitivas de f(x) son $F(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)^4 + C$

e) Si $h(x) = \cos x$, las primitivas de h(x) son $H(x) = -\mathrm{sen}x + C$

f) Si $f(x) = x^4 + \cos x - 3$, las primitivas de f(x) son $F(x) = \frac{x^5}{5} + \mathrm{sen}x + C$

g) Si $g(x) = x^4 \cos x$, las primitivas de g(x) son $G(x) = \frac{x^5}{5}\mathrm{sen}x + C$

h) $\int (\mathrm{sen}t - 3t^2)dt = -\cos t - t^3 + C$

i) $\int \left(\frac{5}{x} - \sqrt[3]{x}\right) dx = -\ln|x| - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

j) $\int \left(4x^2-5\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(4x^2-5\right)^3 + C$

k) $\int \cos(x^3)dx = \mathrm{sen}(x^3) + C$

l) $\int f(x)\,f'(x)dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + C$

4) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (x^2+4)dx$

b) $\int \frac{2x^2+x^3}{\sqrt{x}}dx$

c) $\int (4\cos x+e^x)dx$

d) $\int (8^x-x^8+8)dx$

e) $\int \left(5x^3-3x+\frac{1}{x}\right)dx$

f) $\int (2x^2-1)^2dx$

g) $\int (x^2-2)^3dx$

h) $\int x^2(x^3+2x)dx$

i) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

j) $\int \left(y+\frac{1}{\sqrt{y^5}}+1\right)\cdot\sqrt{y}\,dy$

k) $\int \frac{x^2-3x}{x}dx$

5) Determina:

a) $g(x)$ si $g'(x)=8x^3+2x$ y $g(1)=0$.

b) $f(x)$ si $f'(x)=e^x-2$ y $f(0)=5$.

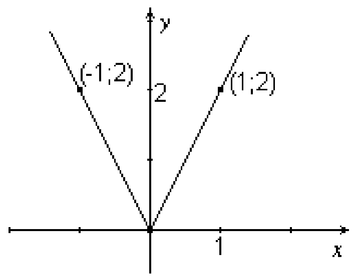
c) $h(x)$ si $h''(x)=24x^2+12x-8$, $h(0)=8$ y $h(1)=2$.

6) Grafica todas las funciones $f(x)$ tales que $f'(x)=3x^2$ y $|f(2)|=8$.

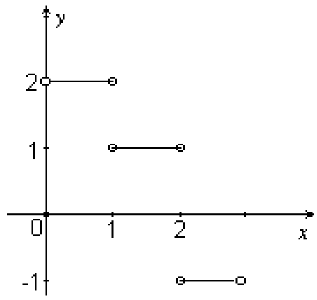
7) Una partícula se mueve en línea recta con velocidad $v(t)=3\sqrt{t}$ y su posición inicial es $s(1)=5\text{ m}$. Determina su posición en función del tiempo $s(t)$.

8) Determina, en cada caso, f(x) sabiendo que:

a) f (x) es continua en su dominio; $f(0) = 1$ y la siguiente gráfica es la de $f'(x)$.



b) f (x) es continua en [0; 3]; $f(0) = -1$ y la siguiente gráfica es la de $f'(x)$.



9) Determina la función f(x) cuya gráfica pasa por el punto A (1, 6) y la pendiente de su recta tangente en cada punto $(x\,;\,f(x))$ está dada por la función $g(x) = 2x + 1$.

10) Resolviendo las integrales, demuestra las siguientes igualdades.

a) $\int \left[\sec^2 x + 5\cdot(1+x^2)^{-1}\right] dx = \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{arctg} x + C$

b) $\int (e^t + e^{-t})^2 dt = \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t + C$

c) $\int (\sqrt[3]{z} - \sqrt{z}) z\,dz = \frac{3z^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

d) $\int \sqrt{y\sqrt{y}}\;dy = \frac{4}{7}\, y^{\frac{7}{4}} + C$

e) $\int \frac{w^2+1}{w\sqrt{w}}\,dw = \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} - 2w^{-\frac{1}{2}} + C$

f) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = x + \operatorname{arctg} x + C$

g) $\int \frac{y^2}{y^2+1}dy = y - \text{arctg} y + C$

h) $\int \frac{1-x^4}{1-x}dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$

i) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{1+x^2} \right) dx = 2\ tg\ x - 3\ arctg\ x + C$

j) $\int \left(\sqrt{x} + 2 \right) \cdot \left(x^{\frac{4}{3}} - \sqrt{x} \right) dx = \frac{6}{17} x^{\frac{17}{6}} + \frac{6}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + C$

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Definición:

> Sea $y = f(x)$ derivable en el intervalo $(a\ ;\ b)$. Si x y $x + \Delta x$ son dos puntos arbitrarios de $(a\ ;\ b)$, llamaremos diferencial de la función $f(x)$ y lo notaremos $df(x)$, al producto de la derivada de $f(x)$ por un incremento de la variable Δx.

Simbólicamente:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x} \qquad (1)$$

Ejemplos:

- $f(x) = \text{sen}\, x$, entonces $df(x) = d(\text{sen}\, x) = \cos x\ \Delta x$
- $g(x) = x^3$, entonces $dg(x) = d\left(x^3\right) = 3x^2 \Delta x$
- $h(x) = x$, entonces $dh(x) = dx = \Delta x$ (2)

Si reemplazamos (2) en (1), resulta:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx} \qquad (3)$$

> Es decir, el diferencial de una función $f(x)$ es igual al producto de la derivada de la función por el diferencial de la variable independiente.

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN.

La idea que aparece detrás de este método es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que es función de x. El reto principal en la aplicación del método de sustitución es pensar justamente, en una sustitución apropiada. Intenta elegir u como alguna función en el integrando cuyo diferencial también esté presente en dicho integrando.

Si no es posible esto escoge u como alguna parte complicada del integrando. Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la primera conjetura sea errónea, si la suposición no funciona se debe intentar con otra. En general este método se usa siempre que tenemos una integral de la forma $\int f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)dx$.

Estrategia de integración por cambio de variable o sustitución.

Por inspección del integrando elegimos una $g(x)$ que llamaremos u, es decir $g(x)=u$ (sustitución). En muchos casos será la parte interior de una potencia, de una raíz, de un logaritmo, etc.

- Rescribimos la integral original planteada, en términos de u. Recordando que:

$$\boxed{\text{Si } u = g(x) \Rightarrow du = d\left[g(x)\right] = g'(x)dx}$$

- Calculamos la integral en u resultante.
- Expresamos el resultado obtenido en la variable inicial, sustituyendo u por $g(x)$.

Observaciones:
El procedimiento de selección de u depende de cada caso. Siempre se tratará de simplificar la forma de la función integrando para que la integral original pueda ser transformada en una integral inmediata de fácil resolución.

Problemas resueltos:

- $\int (3+x^5)^7.x^4dx$

$$\int (3+x^5)^7.x^4dx = \int u^7.\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int u^7.du =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{u^8}{8} + C = \frac{1}{40}u^8 + C = \frac{1}{40}\left(3+x^5\right)^8 + C$$

Sustitución

$$3+x^5 = u$$
$$d\left(3+x^5\right) = du$$
$$5x^4dx = du$$
$$x^4dx = \frac{du}{5}$$

- $$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Sustitución
$x = t^2$
$dx = d\left(t^2\right)$
$dx = 2tdt$

$$\therefore I = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2t - 2\ln\left|t+1\right| + C == 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$$

- $$I = \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{4}}}$$

Sustitución
$u = w^4$
$du = d\left(w^4\right)$
$du = 4w^3dt$

$$\therefore I = \int \frac{4w^3\ dw}{w^2+w} = 4\int \frac{w^2\,dw}{w+1} = 4\int\left(w-1+\frac{1}{w+1}\right)dw =$$
$$= 2w^2 - 4w + 4\ln\left|w+1\right| + C = 2\sqrt{u} - 4\sqrt[4]{u} + 4\ln\left|\sqrt[4]{u}+1\right| + C$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

11) Calcula las siguiente integrales:

a) $\int 2\left(x+1\right)\left(x+1\right)^2 dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x}\ dx$

c) $\int \frac{\log x}{x}\ dx$

d) $\int \frac{8x}{x^2-1}\ dx$

e) $\int \frac{x^2}{\left(x-1\right)^3}\ dx$

f) $\int \frac{1}{2\left(x-2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt{x-2}dx$

g) $\int e^{8x+2}\ dx$

h) $\int e^x \cos\left(e^x\right)dx$

i) $\int e^{senx}\cdot\cos x\ dx$

j) $\int sen^4 x\cdot\cos x\ dx$

k) $\int sen\ x\cdot\sqrt{\cos x}\ dx$

l) $\int x \cdot 4^{x^2} dx$

m) $\int \frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}\, dx$

n) $\int e^{tg\ x} \cdot \sec^2 x dx$

o) $\int 4x^2 \cdot \sqrt{4x^3+5}\, dx$

p) $\int x^3 \cdot \left(1+x^4\right)^{100} dx$

q) $\int tg\ x\ dx$ (<u>Sugerencia</u>: $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$)

r) $\int tg^2 x\ dx$

s) $\int sen\ x \cdot \cos x\ dx$

t) $\int \cos^2 x \cdot sen\ x\ dx$

u) $\int \cos^2 x \cdot sen^5 x\ dx$

v) $\int sen\ x \cdot sen\left(\cos x\right) dx$

w) $\int \frac{x^2}{5+x^3}\, dx$

x) $\int x \cdot \sqrt{x-3}\, dx$

y) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\, dx$

z) $\int \frac{1}{5+x^2}\, dx$

aa) $\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}\, dx$

bb) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$

cc) $\int \frac{6\ln x}{x \cdot \left(3+\ln^2 x\right)}\, dx$

dd) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}\, dx$

ee) $\int x^5 \cdot \sqrt{1+x^2}\, dx$

ff) $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}\, dx$

gg) $\int \frac{arcsen^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

hh) $\int \frac{1+x}{x^2+2x}\,dx$

ii) $\int \frac{x^2-6x+5}{x-2}\,dx$ (Sugerencia: realiza la división de polinomios.)

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Este método se utiliza cuando la función integrando viene dada por el producto (o el cociente al cual lo podemos transformar en producto) de dos funciones.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, entonces:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Integrando a ambos miembros observamos que:

$$\int \left[f(x)\cdot g(x)\right]'dx = \int \left[f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right]dx$$
$$\int \left[f(x)\cdot g(x)\right]'dx = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$$
$$\int \left[f(x)\cdot g(x)\right]'dx = \int g(x)\cdot d\left[f(x)\right] + \int f(x)\cdot d\left[g(x)\right]$$

Resultando la siguiente expresión, si despejamos una de las integrales de la derecha:

$$\boxed{\int f(x)\cdot d\left[g(x)\right] = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot d\left[f(x)\right]} \qquad (*)$$

En la aplicación de este método es de vital importancia la adecuada selección de $f(x)$ y $d\left[g(x)\right]$, puesto que su aplicación conduce a una nueva integral, la cual deberá ser más sencilla que la inicial.

Otra forma de expresar la ecuación (*) sería:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx}$$

En muchas ocasiones se presentan dos caminos, uno de los cuales puede conducir a una integral más complicada que la original, o a un problema de otra dificultad.

Problemas resueltos

Cálculos auxiliares

$f(x) = x \Leftrightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Leftrightarrow g(x) = e^x$

- $I = \int x\, e^x dx$

$$I = \int \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{g}\, \underbrace{1}_{f'} dx = x\, e^x - e^x + C$$

- $I = \int \ln x . x^4 dx$

$$I = \int \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{x^4 \cdot dx}_{dg} = \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{5} x^5}_{g} - \frac{1}{5} \int x^5 \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot dx}_{df} =$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{5} \int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5}\frac{x^5}{5} + C = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{25} x^5 + C$$

- $I = \int \underbrace{\text{arc tg } x}_{f}\, \underbrace{dx}_{dg}$

$$I = \int \underbrace{\text{arc tg } x}_{f}\, \underbrace{dx}_{dg} = x \text{ arc tg } x - \int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{df} = x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + x^2 \right| + C$$

- $I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx$

$$I = \int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^x \cdot dx}_{dg} = \int \underbrace{x^2}_{f}\, d(\underbrace{e^x}_{g}) = x^2\, e^x - 2 \underbrace{\int x \cdot e^x \cdot dx}_{I_1} \qquad (1)$$

$$I_1 = \int \underbrace{x}_{f_1} \cdot \underbrace{e^x \cdot dx}_{dg_1} = x\, e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx = (x-1)\, e^x + C_1 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), resulta:

$$I = x^2\, e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)\, e^x + C$$

- $I = \int \text{sen } x \cdot e^x \cdot dx$

$$I = \int \underbrace{\text{sen } x}_{f} \cdot \underbrace{e^x \cdot dx}_{dg} = \int \underbrace{\text{sen} x}_{f} \,.\, d(\underbrace{e^x}_{g}) = e^x\ \text{sen } x - \underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{I_1} \qquad (1)$$

$$I_1 = \int \underbrace{\cos x}_{f_1} \cdot \underbrace{e^x \cdot dx}_{dg_1} = \int \underbrace{\cos x}_{f_1} \,.\, d(\underbrace{e^x}_{g_1}) = \cos x \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\text{sen } x) \cdot dx =$$

$$= e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx}_{I} = e^x \cos x + I \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), resulta:

$$I = \text{sen } x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - I \quad \Leftrightarrow \quad 2I = e^x\,(\text{sen } x - \cos x) + C \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{e^x}{2}(\text{sen } x - \cos x) + C$$

Concluyendo:

Estos cinco ejemplos muestran el "*universo*" de lo que puede suceder con la integración por partes.

a. Ejemplos 1; 2 y 3: aplicamos la fórmula una única vez y obtenemos el resultado.
b. Ejemplo 4: se debe aplicar la fórmula varias veces consecutivamente.
c. Ejemplo 5: se presenta la integral que debemos calcular dentro del resultado y queda planteada una ecuación.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

12) Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int x \cdot sen\ x\ dx$

b) $\int 7x \cdot \cos x\ dx$

c) $\int x \cdot \ln x\ dx$

d) $\int \ln x\ dx$

e) $\int (\ln x)^2\ dx$

f) $\int x \cdot e^{4x}\ dx$

g) $\int x^2 \cdot \ln\ x\ dx$

h) $\int sen^2\ x\ dx$

i) $\int \cos^2\ x\ dx$

j) $\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\ dx$

k) $\int \left(x^2+1\right) \cdot e^x\ dx$

13) Demuestra las siguientes igualdades, resolviendo la integral:

a) $\int \text{arcsen}\ x\ dx = x\ \text{arcsen}\ x + \sqrt{1-x^2} + C$

b) $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

Observación:
Para demostrar las igualdades del Problema 13 pueden aplicarse cualquiera de los métodos de integración estudiados hasta el momento o combinaciones de ambos.

c) $\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

d) $\int x \cdot \sqrt{1-x} \, dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + C$

e) $\int x^3 \sqrt{4-4x^2} dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C$

f) $\int \frac{1}{3x^2+2} dx = \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C$

g) $\int 2^x \operatorname{sen} x dx = \frac{2^x \cdot (\ln 2 \cdot \operatorname{sen} x - \cos x)}{\ln^2 2 + 1} + C$

h) $\int \frac{2^x}{1+2^x} dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln(1+2^x) + C$

i) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x \cdot \left[sen \ln|x| - \cos \ln|x| \right] + c$

j) $\int \frac{2x-1}{x \cdot (x-1)} dx = \ln\left|x^2 - x\right| + C$

k) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 \sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{3}\cos^3(\sqrt{x}) + \frac{2}{5}\cos^5(\sqrt{x}) + C$

l) $\int \frac{x^2}{1-4x^3} dx = -\frac{1}{12}\ln\left|1-4x^3\right| + C$

m) $\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx = \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$

n) $\int \arctan \sqrt{x} \, dx = x \arctan \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

o) $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right) + C$

p) $\int \cos^3(3x) \cdot \operatorname{sen}^2(3x) \, dx = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3(3x) - \frac{1}{15}\operatorname{sen}^5(3x) + C$

LA INTEGRAL DEFINIDA.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE ÁREA.

En la historia del desarrollo y del estudio del cálculo infinitesimal existen dos problemas geométricos tan importantes que dieron origen a numerosos ensayos teóricos y prácticos. Uno de ellos fue encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva, problema que desencadeno en la definición de derivada.

Pero en este capítulo nos dedicaremos a encontrar la solución al segundo problema, el cual consiste en calcular el área de figuras no convencionales.

Definición:

Llamamos ***PARTICION*** de un intervalo $[a\ ;\ b]$, al conjunto de puntos P tal que $P = \{\ a = x_0\ ;\ x_1\ ;\ x_2\ ; ......\ ;\ x_n = b\ \}$ que verifique la relación $a = x_0 < x_1 < x_2 < ...... < x_n = b$.

Observación:

Una *partición del intervalo* $[a\ ;\ b]$ determina una colección de subintervalos contenidos en $[a\ ;\ b]$.

Ejemplo:

Una partición del intervalo $[-1\ ;\ 5]$ podría ser $P = \left\{-1\ ;\ 0\ ;\ 2\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 4\ ;\ 5\right\}$ y la colección de subintervalos determinada por P sería $[-1\ ;\ 0], [0\ ;\ 2], \left[2\ ;\ \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}\ ;\ 4\right]\ y\ [4\ ;\ 5]$.

En general, indicaremos $[x_{k-1}\ ;\ x_k]$ un intervalo genérico de la colección de subintervalos determinados por la participación P.

Definición:

Llamamos ***amplitud del intervalo*** $[x_{k-1}\ ;\ x_k]$ a $\Delta x_k = x_k - x_{k\text{-}1}$.

Definición:

Llamamos **NORMA** de la partición P y la simbolizaremos δ a la mayor de todas las amplitudes de todos los intervalos determinados por dicha partición.

Es decir:

$$\delta = \max\ \Delta x_k \quad \text{con } k = 1, 2, 3, ..., n$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

14) Calcula la norma de cada una de las siguientes particiones del intervalo $[0\ ;\ 5]$:

a) $P_1 = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 5\}$

b) $P_2 = \{0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 4{,}5\ ;\ 4{,}8\ ;\ 5\}$

c) $P_3 = \{0\ ;\ 1{,}5\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.

15) Escribe una partición del intervalo $[0\,;1]$ que tenga al menos 8 elementos, y cuya norma sea igual a 0,5.

SUMA DE RIEMANN.

Consideremos la función $f:[a\ ;\ b]\to R$. Efectuemos una partición P del intervalo $[a\ ;\ b]$ en n subintervalos y en cada $[x_{k-1}\ ;\ x_k]$ ubiquemos un punto $h_k \in [x_{k-1}\ ;\ x_k]$.

Definición:

> Llamamos ***Suma de Riemann*** para la función $f(x)$ correspondiente a la partición P a la suma
> $$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(h_k\right)\cdot \Delta x_k\ .$$

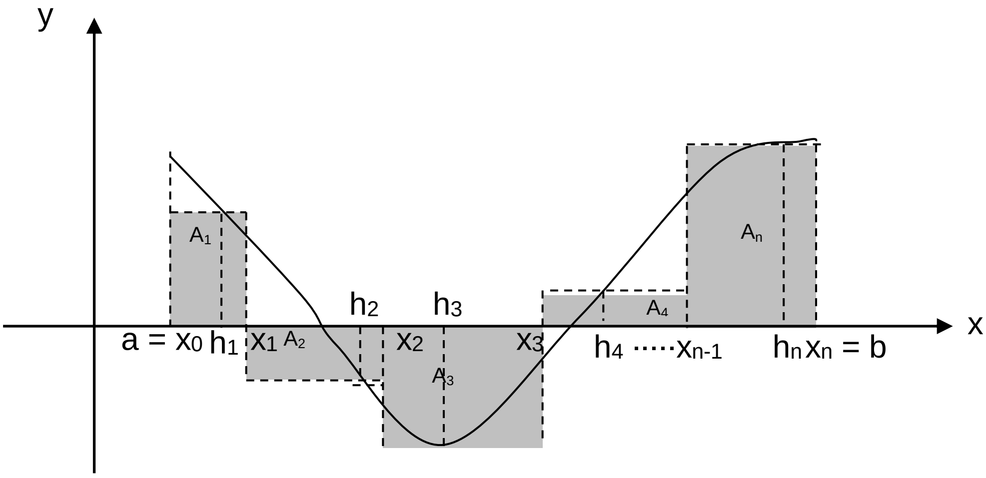
Observando el gráfico de la página siguiente, en el cual interpretaremos la Suma de Riemann, resulta:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(h_k)\cdot \Delta x_k = A_1 + \left(-A_2\right) + \left(-A_3\right) + A_4 + ... + A_n$$

Observaciones:

☑ $A_1\ ;\ A_2\ ;\ A_3 + ... + A_n$ representan las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura.

☑ σ no es función de δ , ya que dependerá de la partición hecha y de la elección de h_k.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

16) **Grafica** la función $f\left(x\right)$ en el intervalo $\left[0\,;4\right]$, **interpreta** gráficamente el valor de $\sigma \;=\; \sum_{k=1}^{n} f\,(h_k)\cdot\Delta x_k$ y **calcúlalo** en cada caso, considerando h_k como el punto medio del intervalo $\left[x_{k-1}\;;\;x_k\right]$.

a) $f\,(x)=\sqrt{x}\quad;\quad P=\{0\;;\;1\;;\;2\;;4\}$

b) $f\,(x)=-x\cdot(x-4)\quad;\quad P=\{0\;;1\;;2\;;3\;;4\}$

17) Resuelve el apartado (b) del ejercicio anterior pero considerando h_k al extremo derecho del intervalo $\left[x_{k\text{-}1}\;;\;x_k\right]$

<u>FUNCIÓN INTEGRABLE</u>. <u>INTEGRAL DEFINIDA</u>.

<u>Definición</u>:

Sea $f(x)$ una función definida en $[a\ ;\ b]$, si $\lim\limits_{\delta \to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(h_k) \cdot \Delta x_k}_{\sigma}$ existe, decimos que $f(x)$ es ***integrable*** en $[a\ ;\ b]$ y llamaremos a dicho límite ***integral definida*** (o integral de Riemann) de $f(x)$ desde a hasta b.

En símbolos:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(h_k) \cdot \Delta x_k}_{\sigma}$$

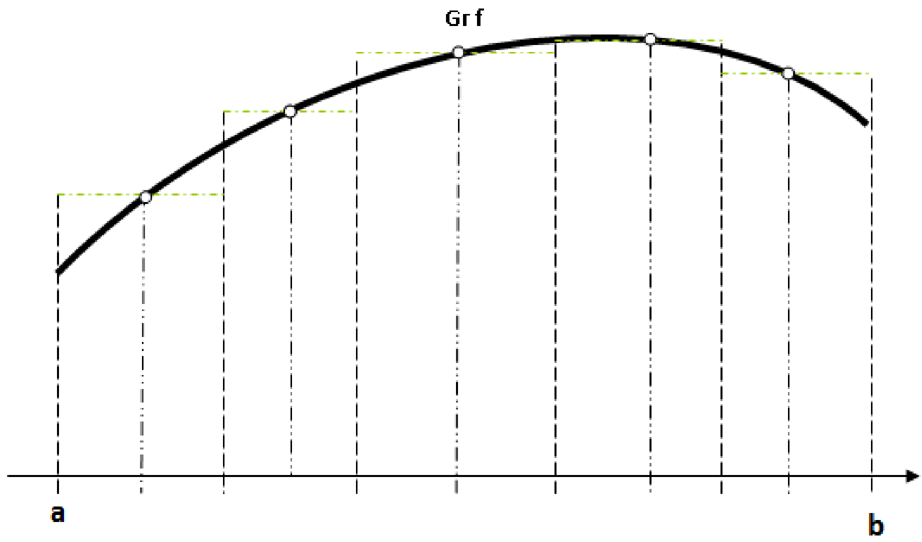
Llamaremos a:

- a: extremo inferior de integración.
- b: extremo superior de integración.
- x: variable de la integral.
- f: función integrando.
- $[a\ ;\ b]$: intervalo de integración.

<u>Observaciones</u>:

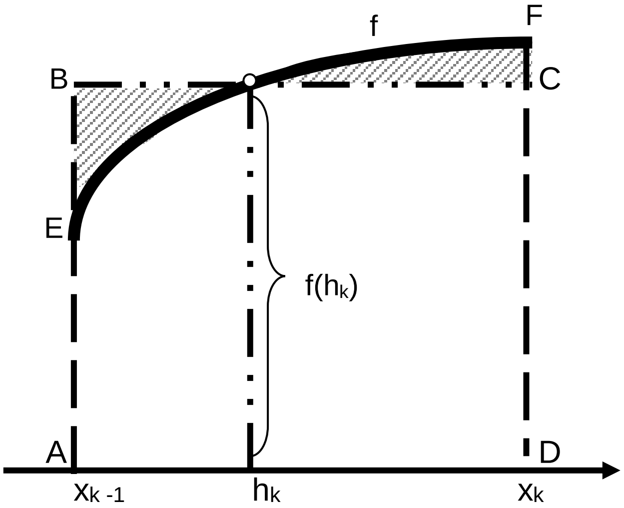
a. Se puede probar que si $f(x)$ es continua en $[a\ ;\ b]$, es integrable en dicho intervalo (Teorema de Cauchy).

b. Si $f(x)$ es continua y no negativa en $[a\ ;\ b]$, podemos encontrar una interpretación geométrica de la integral definida. Para ello, reiteramos paso a paso la definición:



Podemos visualizar mejor la interpretación gráfica, ampliando un intervalo genérico k. Veremos que el área del rectángulo ABCD es aproximadamente igual a la del sector debajo de la gráfica AEFD.

Observemos que cuando δ tiende a cero, x_k se aproxima a x_{k-1} y la base del rectángulo es cada vez más pequeña y la aproximación nombrada en el párrafo anterior es mayor.



CONCEPTO DE RECTANGULOIDE.

Definición:

Llamamos ***RECTANGULOIDE*** R al conjunto de puntos del plano limitados por las verticales $x=a$, $x=b$, el eje x y la gráfica de $f(x)$, es decir:

$$R=\{(x;y)/a\le x\le b\wedge 0\le y\le f(x)\}$$

Luego:

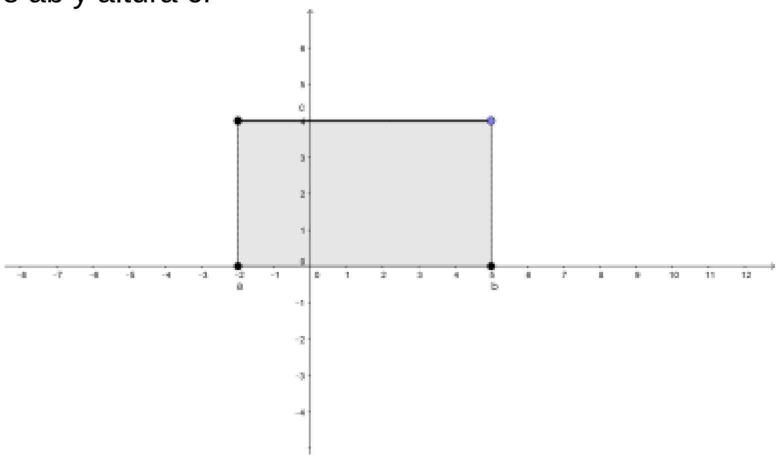
$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot dx \;=\; \text{área de } R} \quad \text{Si } f(x) > 0 \ \forall x \in [a \; ; \; b].$$

Problema resuelto

Resuelve, aplicando la definición, la integral de $f(x) = c$ (constante real) e interpreta geométricamente su resultado para $c > 0$:

$$\int_a^b c \ dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} c \cdot \Delta x_k \;=\; c \ \lim_{\delta \to 0} \ \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \;=\; c \ \lim_{\delta \to 0} \ (b - a) = c \cdot (b - a)$$

Si $c > 0$, la interpretación gráfica de la integral nos dice que la misma es el área del rectángulo de base ab y altura c:



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

18) Evalúa cada integral teniendo en cuenta su interpretación en términos de área:

a) $\int_1^2 2x \ dx$

b) $\int_{-1}^1 (x+1) \ dx$

c) $\int_{-1}^1 \left(|x|+1\right) dx$

19) Teniendo en cuenta la interpretación de la integral en términos de área, calcula un número que sea mayor que la integral.

a) $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

b) $\int_2^5 x^2\, dx$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

No realizaremos las demostraciones en el presente curso.

- **Linealidad**

Sean f y g integrables en el intervalo $[a\ ;\ b]$, $\alpha \in \Re \wedge \beta \in \Re$.

$$\boxed{\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx}$$

Como casos particulares, se tienen:

a) Si $\beta = 0 \Rightarrow \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

b) Si $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

- **Aditividad**

Si existe $\int f(x)dx$ en I con $\{a\ ;\ b\ ;\ c\} \subset I$; entonces resulta:

$$\boxed{\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

Válida cualquiera sea la posición relativa de a , b y c.

- **Comparación**

Si existe $\int f(x)dx$ y $\int g(x)dx$ en el intervalo $[a\ ;\ b]$ y $f(x) \le g(x)$ en $[a\ ;\ b]$, entonces resulta que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}$$

- Si existe $\int f(x)dx$ en $[a\ ;\ b]$ y $a = b$, entonces resulta:

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

- Si existe $\int f(x)dx$ en $[a\ ;\ b]$, entonces resulta:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

20) Sabiendo que $\int_1^5 f(x)\ dx = 7$ y que $\int_1^5 g(x)\ dx = -2$ calcula:

a) $\int_1^5 [3f(x) - 2g(x)]\ dx$

b) $\int_1^5 \left[\sqrt{3}f(x) + 5g(x)\right]dx - \int_1^1 f(x)dx$

21) Escribe cada expresión como una única integral de la forma $\int_a^b f(x)\ dx$.

a) $\int_1^2 f(x)\ dx + \int_2^3 f(x)\ dx$

b) $\int_5^8 f(x)\ dx + \int_0^5 f(x)\ dx$

c) $\int_{-3}^5 f(x)\ dx - \int_{-3}^0 f(x)\ dx + \int_5^6 f(x)\ dx$

d) $\int_1^{-2} f(x)\ dx - \int_{-3}^{-2} f(x)\ dx$

22) Sabiendo que $\int_{-1}^0 f(x)\ dx = 10$; $\int_{-1}^1 f(x)\ dx = 7$ y $\int_1^4 f(x)\ dx = -4$, calcula:

a) $\int_{-1}^4 f(x)\ dx$

b) $\int_0^4 f(x)\ dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{3}\ f(x)\ dx$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL.

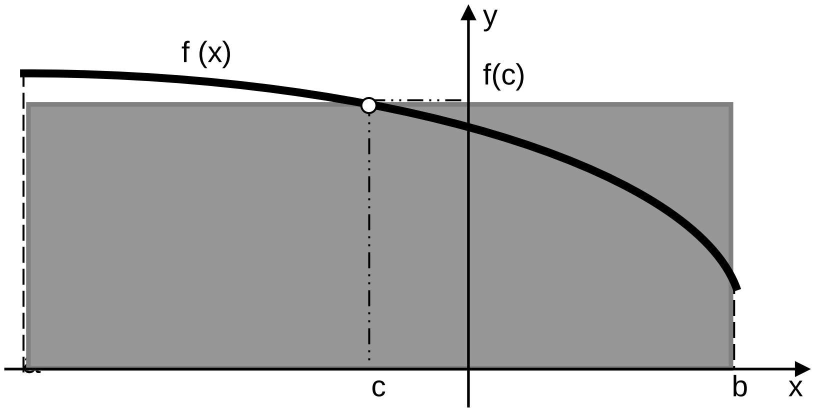
No realizaremos su demostración en el presente curso.

H) $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a\ ;\ b]$.

T) $\exists\ c \in (a\ ;\ b) / \int_a^b f(x) = f(c) \cdot (b-a)$

Interpretación geométrica:

Si $f(x) > 0\ \forall x \in [a\ ;\ b]$ se tiene:



El área del rectanguloide de *f(x)* es igual a la del rectángulo sombreado de la misma base

PROBLEMA DE APLICACIÓN

23) Si $f(x)$ es continua en $[1\ ;\ 3]$ y $\int_1^3 f(x)\, dx = 8$, demuestra que $f(x)$ toma el valor 4 por lo menos una vez en dicho intervalo.

FUNCION INTEGRAL.

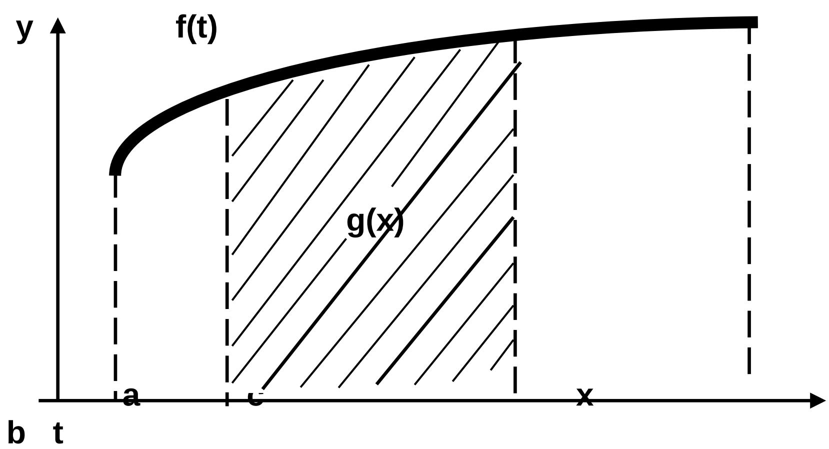
Definición:

Sea $f(x)$ integrable en $[a\ ;\ b]$ y $c \in [a\ ;\ b]$, llamamos ***FUNCIÓN INTEGRAL*** de $f(x)$, a una función tal que para cada $x \in [a\ ;\ b]$ le hace corresponder el número $\int_c^x f(t)\ dt$. Si llamamos con $g(x)$ a dicha función resulta:

$$g:[a\ ;\ b] \to \Re\ /\ g(x) = \int_c^x f(t)\ dt$$

Observación:

La función $g(x)$ depende de la variable x, que es el ***extremo superior de la integral***, por tal motivo a la función integral también se la llama "función de extremo superior de integración".
Si $f(x)$ es continua no negativa, se puede hallar una interpretación geométrica de $g(x)$, como el área del rectanguloide de $f(x)$ limitado por sendas verticales en c y en x con $c < x$:



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Enunciemos el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral. No realizaremos su demostración en el presente curso.

H) $f(x)$ continua en $[a\ ;\ b]$.

T) $g:[a\ ;\ b]\to\Re\,/\,g(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ es derivable en $(a\ ;\ b)$ y $g'(x)=f(x)$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

24) Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo para derivar las siguientes funciones:

a) $g(x)=\int_1^x (t^3-5)^{20}\,dt$

b) $g(x)=\int_5^x \cos(z^3)\,dz$

c) $g(x)=\int_x^3 (\cos(u^3)+u^7)\,du$

25) Si $F(x)=\int_1^x \cos(t^5)\,dt$, calcula F(1), F'(x) y F"(0) .

26) Si $F(x)=\int_1^x g(t)\,dt$ y $g(t)=\int_1^t \sqrt{m^2+5}\,dm$ calcula F''(x).

REGLA DE BARROW O SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

En cálculo integral, la **Regla de Barrow** o **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral** es una propiedad de las funciones continuas que permite calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitivas de la función.

Recibe su nombre en honor al matemático inglés Isaac Barrow.

Enunciemos y demostremos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

H) $f(x)$ continua en $[a\ ;\ b]$ y $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ primitiva de $f(x)$.

T) $\int_a^b f(t)\,dt = P(b)-P(a)$, siendo P una primitiva cualquiera de $f(x)$.

Demostración:

Teniendo en cuenta por hipótesis que $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$, puede expresarse de la siguiente manera:

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt = P(x)+C_1$, con $P(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$.

Si $x=a \Rightarrow g(a)=\int_a^a f(t)\,dt = P(a)+C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -P(a)$ (1)

Si $x=b \Rightarrow g(b)=\int_a^b f(t)\,dt = P(b)+C_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \int_a^b f(t)\,dt = P(b)-P(a) = P(x)\Big|_a^b$

Es decir:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = P(b)-P(a) = P(x)\Big|_a^b}$$

Problema resuelto.

Resuelve las siguientes integrales definidas:

- $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$
- $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

27) Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^3 t^3(\sqrt{t}-1)^2\,dt$

b) $\int_{-2}^0 x\,y\,dy$

c) $\int_a^b \frac{1}{ab}\,dx$

d) $\int_4^5 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

e) $\int_0^\pi \frac{2x}{\pi + x^4}\,dx$

f) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

g) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}\, dx$

h) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$

28) Si $f'(x)$ es continua en $[a\,;\,b]$, demuestra que $2\cdot\int_a^b f(x)\cdot f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$.

29) Determina una función $f(x)$ y un valor de la constante a de tal manera que:

$$2\cdot\int_a^x f(t)\,dt = 2\cdot sen\,x - 1$$

30) Determina la expresión de P(x) si: $P(x) = 2\,f(0) + 3\,f'(0)\,x + 4\,f''(0)\,x^2$ y $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+2t^2}$.

31) Suponiendo que $\int_0^1 f(x)\,dx = 6$; $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$ y $\int_2^5 f(x)\,dx = 3$, halla:

a) $\int_5^0 f(x)dx =$

b) $\int_1^5 f(x)\,dx =$

c) $\int_1^2 f(x)\,dx =$

32) Si una función f (x) es tal que $f(x) \le x^3$ para todo x > 0, calcula un número C tal que $\int_1^2 f(x)\,dx \le C$.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

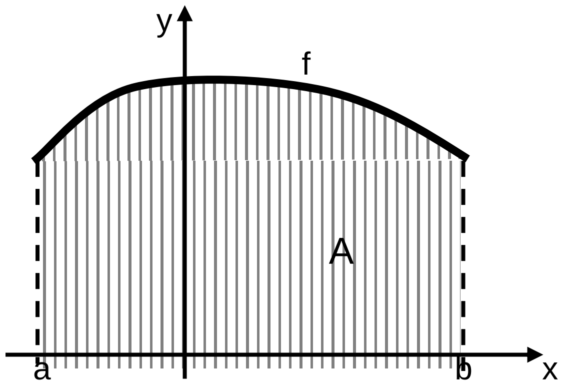
AREAS PLANAS.

Áreas de rectanguloides.

En el siguiente capítulo estudiaremos los diferentes casos para calcular áreas de rectanguloides.

Primer caso:

Si f (x) es una función continua y no negativa en [a ; b], resulta:



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

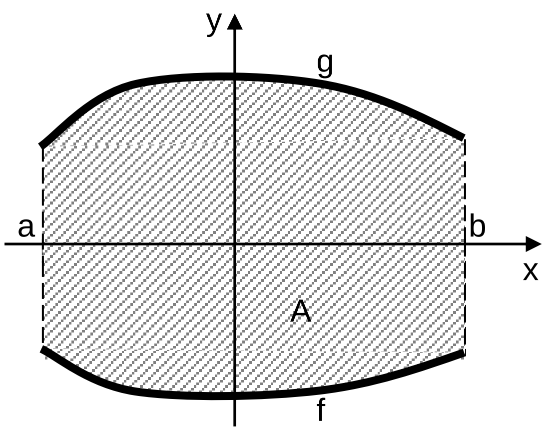
Segundo caso:

Si f (x) es una función continua y no positiva en [a ; b]. Definimos allí g(x) = - f(x), sabiendo que las gráficas de g y de f serán simétricas respecto del eje x y determinarán rectanguloides de igual área A.

Entonces:

$$A = \int_a^b g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$

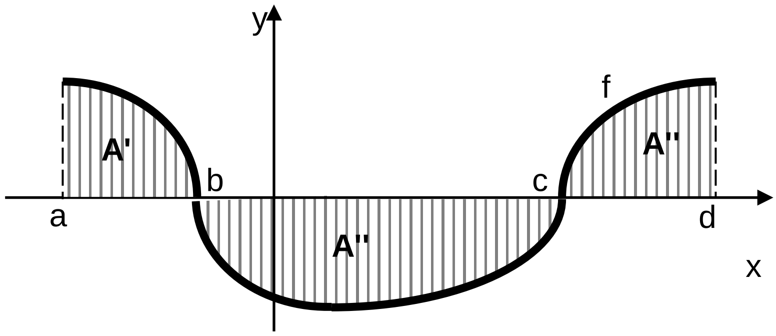
Es decir:



$$A = \int_b^a f(x)\,dx$$

Tercer caso:

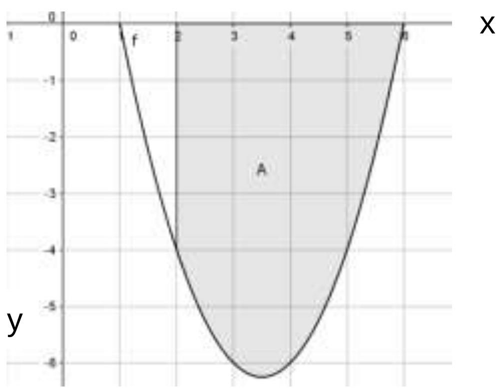
Este caso es el más general, es cuando f (x) es continua en [a;b], anulándose un número finito de veces y siendo en algunos intervalos positiva y en otros negativa. Para calcular el área A de todos los rectanguloides, utilizaremos los casos anteriores en forma conjunta:



$$\mathbf{A = A' + A'' + A''' =} \int_a^b f + \int_c^b f + \int_c^d f$$

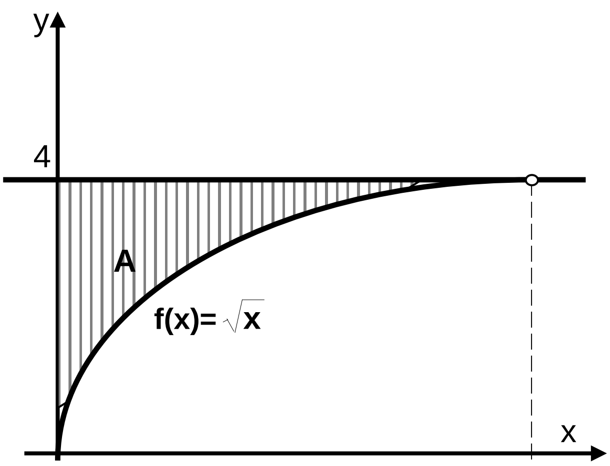
Problemas resueltos.

- Calcula el área rayada en cada caso: $f(x) = x^2 - 7x + 6$



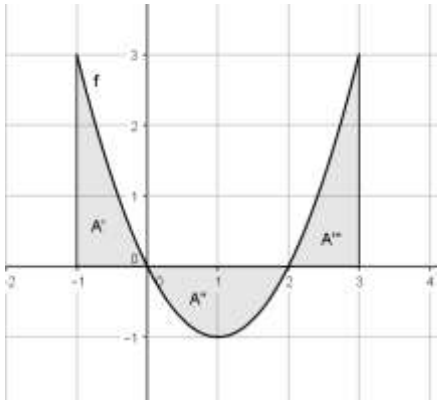
$$A = \int_6^2 \left(x^2 - 7x + 6\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_6^2 = \frac{56}{3}$$

- En el siguiente caso conviene pensar a **x** en función de **y**.



$$A = \int_0^4 y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3}$$

- Un ejemplo más general. Sea $f(x)=x^2-2x$ en el intervalo $[-1\ ;\ 3]$.



$$A'\ +\ A''\ +\ A'''=\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x\right)\,dx+\int_{2}^{0}\left(x^2-2x\right)\,dx+\int_{2}^{3}\left(x^2-2x\right)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{2}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{2}^{3}=4$$

<u>ÁREA DE DOMINIOS NORMALES</u>.

<u>Definición</u>:

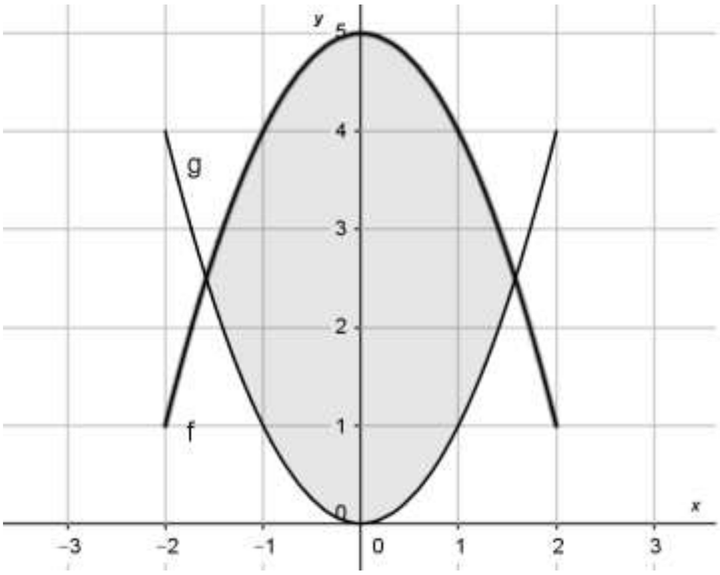
Dadas f (x) y g(x), continuas en [a ; b] tal que f(x) $\leq$ g(x) $\forall$ x $\in$ [a;b], se llama ***DOMINIO NORMAL DEL PLANO*** relativo a f (x), g (x), de base [a ; b], al conjunto de puntos del plano limitado por las rectas x = a; x = b y las gráficas de f (x) y g (x). En símbolos: D = $\{(x;y)\ /\ a\leq x\leq b\ \wedge\ f(x)\leq y\leq g(x)\}$

Llamaremos a:

f (x): función minorante
g (x): función mayorante

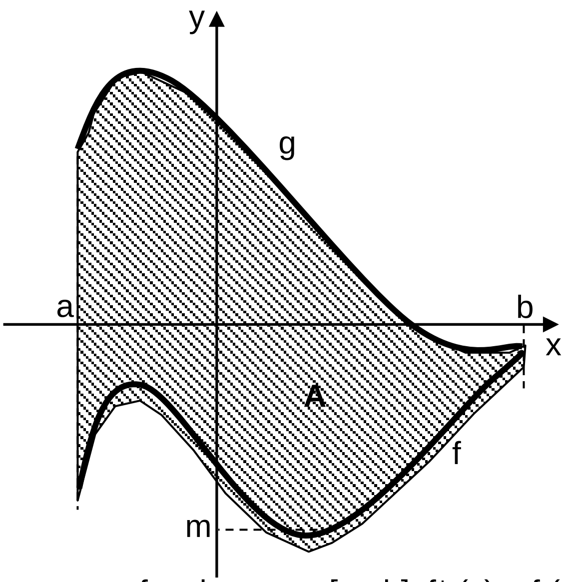
Ahora nos interesa calcular el área A de D. Para ello tendremos en cuenta los siguientes casos.

Primer caso: Para $0 \leq g(x) \leq f(x)$, es decir ambas funciones no negativas.



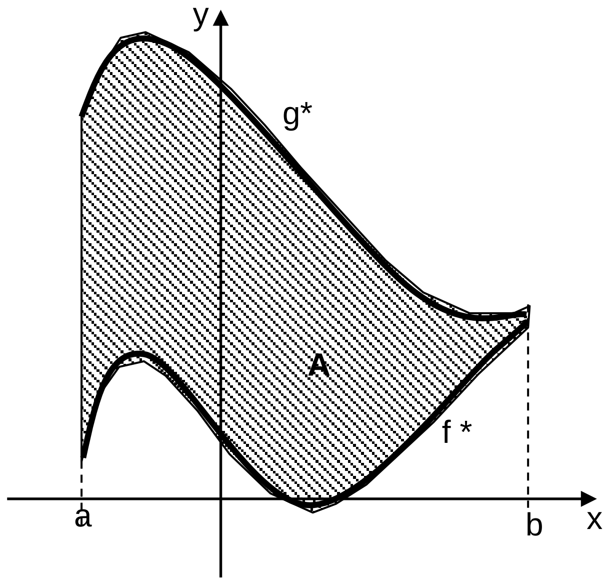
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f-g)(x)\,dx$$

Segundo caso: Las funciones pueden encontrarse en cualquier lugar del plano. Por el Teorema de Weierstrass, al ser f (x) continua en [a ; b], debe tener mínimo absoluto m:



Definiendo dos nuevas funciones en [a ; b]: $f^*(x) = f(x) + |m|$ y $g^*(x) = g + |m|$. Las mismas resultan tener sus gráficas idénticas a las originales trasladadas verticalmente hacia arriba $|m|$ unidades.

En consecuencia ambas funciones así definidas, estarán sobre el eje x o tocándolo como mínimo:



Ahora podemos aplicar las conclusiones del primer caso:

$$A = \int_a^b \left[g^* (x) - f^* (x)\right] dx = \int_a^b \left[g + |m| - (f + |m|)\right] dx = \int_a^b \left[g (x) - f (x)\right] dx$$

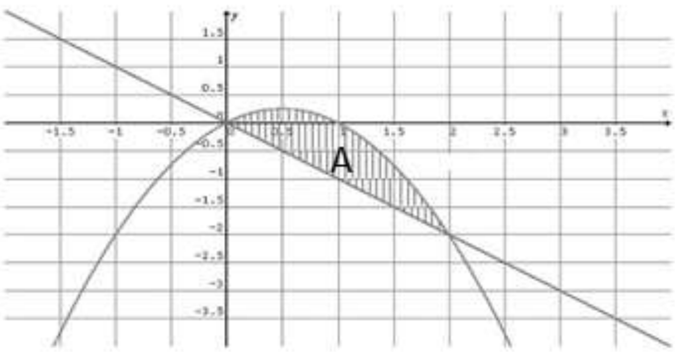
Es decir, independientemente de la ubicación de las gráficas en el plano, resulta:

$$\boxed{A = \int_a^b \left[g (x) - f (x)\right] dx}$$

<u>Problemas resueltos</u>.

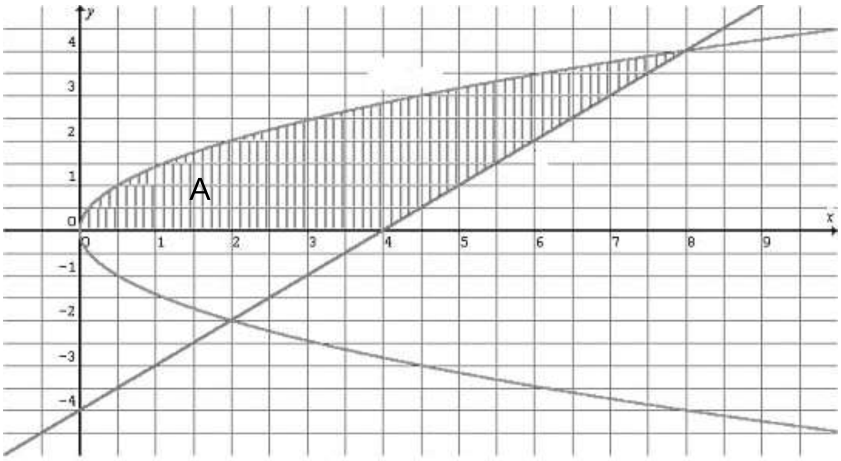
Calcula el área rayada en cada caso:

- A = $\int_0^2 \left(x - x^2 + x\right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$



- Aquí conviene considerar a **x** como función de **y**:

$$A = \int_{0}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{dy} = \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right) \Bigg|_0^4 = \frac{40}{3}$$



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

33) Calcula, utilizando integración, el área del triángulo en cada caso:

a) Sus vértices son los puntos (-1 ; 4) ; (2 ; -2) y (5 ; 1).

b) Limitado por la recta y = x + 2; el eje de las x y la recta vertical x = 3.

34) Calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$; la tangente a ella en (1 ; 1) y el eje x.

35) Traza la región limitada por las curvas dadas y calcula su área:

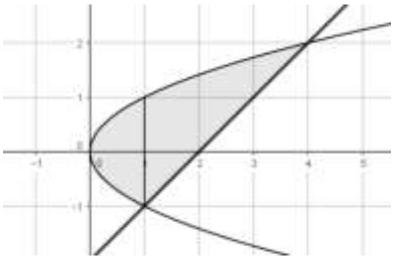
a) $y = |x| - 1$; $y = x^2 - 3$ con $x \geq 0$.

b) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = -2$; $x = 1$.

36) Determina el área encerrada por la parábola $y = -(x-1)^2 + 2$ y por la cuerda que une los puntos (-1 ; -2) y (2 ; 1)

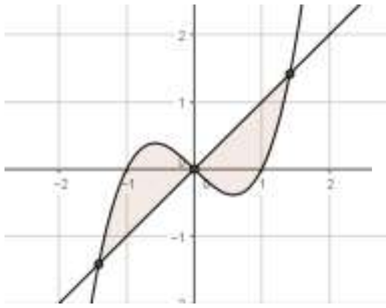
37) Determina el área limitada por las siguientes curvas:

a)



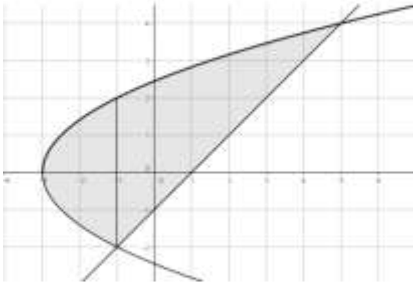
$x = y^2$
$x - y = 2$

b)



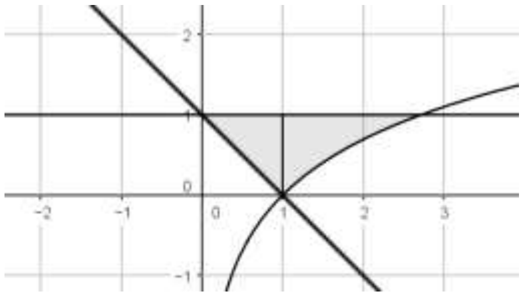
$y = x^3 - x$
$y = x$

c)



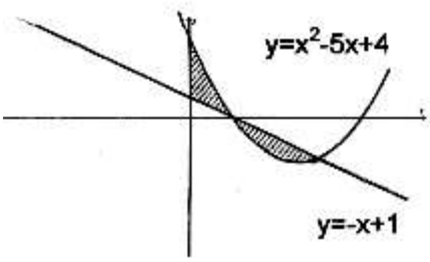
$y^2 = 2x + 6$
$y = x - 1$

d)

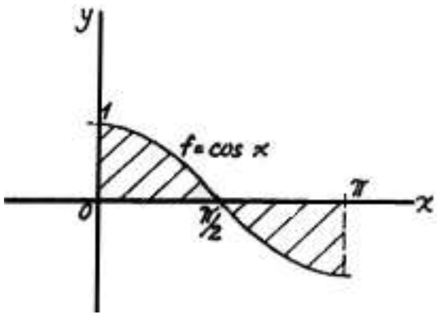


$y = \ln x$
$y = - x + 1$
$y = 1$

e)



f)



38) Calcula los valores de **"c"** para que el área de la región acotada por las parábolas $y = x^2 - \mathbf{c}^2$; $y = \mathbf{c}^2 - x^2$ sea 576.

Actividad de autoevaluación por parte del alumno.

Te proponemos realices las siguientes actividades para autoevaluar tu aprendizaje del tema.

1) Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int 2\ln x\, dx =$

b) $\int \frac{x-1}{x^2-2x-6}dx =$

c) $\int x^2 \cos 3x\, dx =$

d) $\int \frac{sen\ x + tg\ x}{\cos x}dx =$

e) $\int \frac{dx}{x^2+8x+20} =$

2) La función $f(x) = 2x+5$ tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para $x = 2$? Rta: $F(x) = x^2 + 5x + 4$.

3) Halla una función cuya derivada sea $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ y que se anule para $x = 1$.
Rta: $F(x) = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x - \frac{1}{6}$.

4) Halla la función $G(x)$ tal que $G''(x) = 6x+1$; $G(0) = 1$ y $G(1) = 0$. Rta: $G(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$.

5) Dada la función $f(x) = 6x$ halla la primitiva que pasa por el punto $A(1\,;\,2)$. Rta: $F(x) = 3x^2 - 1$.

6) Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$ Rta: $4-\pi$.

b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ Rta: $\frac{\pi}{4}$ *<u>Sugerencia</u>: Considera* $x = sen\ t$ *.*

7) Dada $F(x)=\int_0^x sen^3 t\ dt$, calcula:

a) $F(\pi)$.

b) $F'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

c) $F''(0)$.

8) Calcula el área de la región del plano limitada por las curvas $f(x)=x+2$ y $g(x)=x^2-4$.

Departamento de Matemática

Tabla de derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
k, con $k \in \Re$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabla de integrales

$\int dx = x + C$
$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, con $n \neq -1$
$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$\int \operatorname{tg} x \cdot \sec x\, dx = \sec x + C$
$\int \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{bx}{a}\right) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{bx}{a}\right) + C$

Tabla de identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$	$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$