



Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Ingeniería Eléctrica

Análisis de Circuitos

Material Completo - 2024

Versión	Realizó	Revisó	Aprobó
2019	Calabruso F./ Perrone D.	Perrone D.	Krapf L.
2021	Calabruso	Nocetti	Perrone
2024	Calabruso	Robles	Perrone



ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN Y MODELADO	8
1.1.	Introducción general	8
1.2.	Conceptos básicos	9
1.2.1.	Tensión	9
1.2.2.	Corriente.....	9
1.2.3.	Potencia	9
1.2.4.	Energía	11
1.2.5.	Ejemplo	11
1.3.	Modelos y sistemas	13
1.3.1.	Generalidades.....	13
1.3.2.	Estados de régimen	15
1.3.3.	Modelos de elementos eléctricos	17
1.3.4.	Leyes que rigen los circuitos (sistemas) eléctricos	20
1.4.	Ejercicios.....	24
1.4.1.	Ejercicios Introdutorios.....	24
1.4.2.	Ejercicios Resueltos	26
1.4.3.	Ejercicios Propuestos.....	29
1.5.	Anexo: información complementaria.....	36
1.5.1.	Unidades de variables y parámetros eléctricos comúnmente utilizados.....	36
1.5.2.	Prefijos, múltiplos y submúltiplos	36
1.5.3.	Ejemplos de dimensiones	36
2.	DIPOLOS.....	37
2.1.	Introducción	37
2.2.	Dipolos.....	37
2.2.1.	Definiciones y clasificación	37
2.2.2.	Fuentes ideales	39
2.2.3.	Dipolos lineales.....	40
2.2.4.	Dipolos equivalentes	43
2.2.5.	Dipolos alinéales.....	45
2.2.6.	Fuentes dependientes	48
2.3.	Ejercicios resueltos	48
2.4.	Ejercicios propuestos.....	64

3.	CORRIENTE ALTERNA.....	71
3.1.	Introducción	71
3.2.	Corriente alterna	71
3.2.1.	Producción de F.E.M. alternas sinusoidales	71
3.2.2.	Valores y parámetros característicos	73
3.2.3.	Corriente alterna en elementos de circuito	76
3.2.4.	Notación fasorial – Impedancia y Admitancia	78
3.2.5.	Método simbólico.....	81
3.3.	Ejercicios	90
3.4.	Caso de aplicación – Dimensionamiento de cable	96
3.4.1.	Situación problemática	96
3.4.2.	Solución	97
4.	POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA.....	102
4.1.	Introducción	102
4.2.	Potencia.....	102
4.2.1.	Potencia instantánea	102
4.2.2.	Potencia media o activa.....	103
4.2.3.	Potencia en régimen senoidal	103
4.2.4.	Potencia aparente y factor de potencia	104
4.2.5.	Potencia aparente compleja.....	105
4.2.6.	Ejercicio conceptual – Corrección de factor de potencia	107
4.2.7.	Potencia de distorsión (no senoidal)	109
4.3.	Ejercicios	111
4.4.	Caso de aplicación – Compensación de factor de potencia	118
4.4.1.	Características de la red	118
4.4.2.	Cálculo de la compensación CCM 380V.....	119
4.4.3.	CCM 2,3 kV.....	121
5.	MÉTODOS DE RESOLUCION DE REDES	123
5.1.	Introducción	123
5.1.1.	Definiciones	123
5.1.2.	Planteamiento del problema	126
5.2.	Método de los potenciales de nudos	128
5.2.1.	Caso particular – Fuente de corriente ideal	132

5.2.2.	Caso particular – Fuente de tensión ideal	133
5.2.3.	Caso particular – Fuente dependiente	136
5.3.	Método de las corrientes de mallas	137
5.3.1.	Caso particular – Fuente de corriente ideal	140
5.3.2.	Caso particular – Fuente dependiente	143
5.4.	Ejercicios	144
5.5.	Casos de aplicación.....	158
5.5.1.	Enfoque matemático para el método de nudos.....	158
5.5.2.	Síntesis	160
6.	TEOREMAS DE REDES	164
6.1.	Introducción	164
6.2.	Conceptos básicos	164
6.2.1.	Red Lineal	164
6.2.2.	Red bilateral.....	165
6.2.3.	Red activa	165
6.2.4.	Red pasiva.....	165
6.2.5.	Pasivar fuentes	165
6.3.	Teoremas de redes	166
6.3.1.	Teorema de Millman	166
6.3.2.	Red Escalera.....	167
6.3.3.	Teorema de Superposición	169
6.3.4.	Teorema de Sustitución.....	170
6.3.5.	Transformación estrella triángulo	171
6.3.6.	Teorema de Thevenin.....	174
6.3.7.	Teorema de Norton	180
6.4.	Ejercicios	184
6.5.	Caso de aplicación – Equivalentes de red	191
6.5.1.	Plantas de generación renovable	192
6.5.2.	Equivalentes de plantas renovables	193
6.6.	Temas complementarios	196
6.6.1.	Teorema de Alteración	196
6.6.2.	Teorema de Reciprocidad.....	203
6.6.3.	Teorema de Simetría	206
6.6.4.	Traslación de Fuentes	215

7.	SISTEMAS ELÉCTRICOS TRIFÁSICOS	216
7.1.	Introducción	216
7.2.	Generación de un sistema trifásico de tensiones.....	216
7.3.	Conexionado de fuentes y cargas.....	219
7.4.	Magnitudes de fase y de línea	221
7.5.	Relación entre magnitudes de línea y fase.....	222
7.5.1.	Conexión en triángulo	222
7.5.2.	Conexión en estrella	223
7.5.3.	Conversión estrella-triángulo	224
7.6.	Teorema de fase fundamental	225
7.7.	Potencia en sistemas trifásicos.....	227
7.7.1.	Corrección de factor de potencia	228
7.8.	Ejercicios.....	229
7.9.	Caso de aplicación – Sistemas de potencia interconectados	234
8.	RESONANCIA	241
8.1.	Introducción	241
8.2.	Resonancia serie.....	241
8.2.1.	Análisis de la impedancia.....	242
8.2.2.	Análisis de factor de mérito.....	246
8.2.3.	Energía en resonancia	247
8.2.4.	Tensión en la inductancia	248
8.2.5.	Puntos de potencia mitad.....	250
8.3.	Resonancia en paralelo.....	251
8.4.	Curva universal de resonancia.....	252
8.5.	Resonancia en circuitos no disipativos.....	255
8.6.	Ejercicios.....	256
8.7.	Caso de aplicación – Resonancia en la red de transmisión	264
9.	FILTROS.....	266
9.1.	Introducción	266
9.2.	Función Transferencia	266
9.3.	Conceptos Generales de Filtros.....	269
9.3.1.	Frecuencia de Corte.....	271
9.3.2.	Tipos de Filtros.....	273

9.3.3.	Respuesta en Frecuencia de Bobinas y Capacitores.....	275
9.4.	Implementación de Filtros.....	276
9.4.1.	Filtros Pasa Bajo.....	277
9.4.2.	Filtros Pasa Altos.....	281
9.4.3.	Filtros Pasa Banda.....	282
9.4.4.	Filtros Elimina Banda	286
9.5.	Resumen	288
9.6.	Ejercicios.....	289
9.7.	Caso de aplicación – Sistemas de Onda Portadora	293
10.	ACOMPLEMENTO MAGNÉTICO	296
10.1.	Introducción	296
10.2.	Conceptos generales	296
10.2.1.	Autounductancia	296
10.2.2.	Inductancia mutua.....	297
10.2.3.	Coeficiente de acoplamiento.....	298
10.2.4.	Relación entre k y M	298
10.3.	Análisis de circuitos acoplados	299
10.3.1.	Corriente Natural.....	300
10.4.	Bornes homólogos	301
10.4.1.	Determinación de bornes homólogos	301
10.4.2.	Conexión de bobinas en serie	302
10.4.3.	Conexión de bobinas en paralelo	303
10.5.	Sustitución equivalente	304
10.5.1.	Acoplamiento inductivo concordante	304
10.5.2.	Acoplamiento inductivo discordante	305
10.5.3.	Circuitos ramificados con inductancias mutuas	306
10.6.	Ejercicios.....	307
11.	CIRCUITOS MAGNÉTICOS	315
11.1.	Introducción teórica	315
11.1.1.	Generalidades.....	315
11.1.2.	Ley de Hopkinson	316
11.1.3.	Materiales magnéticos	318
11.1.4.	Energía almacenada en el campo magnético.....	320
11.1.5.	Fuerzas - Principios de los trabajos virtuales.....	321

11.1.6.	Pérdidas magnéticas.....	322
11.2.	Circuitos excitados con una fuente de corriente continua	325
11.2.1.	Ejemplo 1 – Circuito magnético homogéneo	325
11.2.2.	Ejemplo 2 – Circuito magnético con entrehierro (no homogéneo)	326
11.2.3.	Ejemplo 3 – Circuito magnético ramificado y con entrehierro (no homogéneo)	329
11.3.	Circuito excitado con una fuente de corriente alterna	331
11.3.1.	Pérdidas en el hierro.....	332
11.4.	Ejercicios	333
11.5.	Caso de aplicación - IMANES PERMANENTES.....	336
11.5.1.	Punto de operación	336
11.5.2.	Aspectos relevantes para el diseño	340
12.	TRANSITORIOS	343
12.1.	Introducción	343
12.2.	Enfoque matemático	344
12.3.	Ecuaciones básicas de circuitos eléctricos.....	346
12.4.	Circuitos con un almacenador de energía	347
12.4.1.	Circuito RL.....	347
12.4.2.	Circuito RC	349
12.5.	Circuitos con dos almacenadores de energía.....	351
12.6.	Circuitos alimentados por fuentes de corriente alterna	354
12.6.1.	Circuito RL.....	354
12.6.2.	Circuito RC	356
12.7.	Ejercicios resueltos	357
12.8.	Ejercicios propuestos.....	368

1. INTRODUCCIÓN Y MODELADO

1.1. Introducción general

Esta asignatura, marca el comienzo del ciclo profesional y da al alumno los conceptos necesarios para encarar cualquier otra materia de la especialidad. Los conocimientos que brinda son básicos, pero de gran importancia, ya que cualquier método de resolución por avanzado que sea, estará basado en las leyes y procedimientos elementales que serán presentados a lo largo de esta materia.

De forma general, se pueden identificar los siguientes temas o unidades que serán desarrollados a lo largo del cursado, los cuales desde ya se encuentran completamente interrelacionados:

- Introducción y modelado
- Componentes de las redes - Dipolos
- Análisis en régimen permanente senoidal
- Potencia en condiciones de régimen permanente senoidal
- Métodos de Análisis de Circuitos
- Teoremas de redes
- Régimen transitorio
- Resonancia
- Circuitos de frecuencia selectivos – Filtros
- Circuitos acoplados magnéticamente
- Circuitos magnéticos
- Sistemas trifásicos simétricos

El presente documento corresponde al primer tema mencionado, el cual hace un repaso de los aspectos elementales de las materias precedentes y sienta las bases para nomenclatura y metodología que se utilizará en el marco de la presente materia y sus correlativas.

1.2. Conceptos básicos

El presente capítulo pretende repasar conocimientos de la física básica y formar una base consistente de los conceptos que serán utilizados para el desarrollo de temas posteriores en esta materia, en el resto de la carrera y en la vida profesional del ingeniero eléctrico.

A continuación, se presentan los conceptos básicos acompañados de explicaciones simples con el objetivo afianzar la interpretación de estos.

1.2.1. Tensión

Desde la física básica el concepto de tensión (v) se puede asociarse al cambio de energía potencial (w) que sufre una carga unitaria (q) al desplazarse de un punto a otro en presencia de un campo eléctrico. Como toda definición que parte de un concepto de campo conservativo, la energía siempre es relativa a un estado de referencia, de allí que se hable de diferencia de potencial (ddp) y nunca de tensión en términos absolutos.

$$v = \frac{dw}{dq} \left[Volt = \frac{Joule}{Coulomb} \right] \quad (1)$$

Cuando decimos que una batería tiene 12V decimos que la diferencia de potencial entre sus bornes es de 12V, es decir que, si consideramos como referencia cero el borne negativo, el positivo será de 12V aunque sin cometer errores podríamos tomar como referencia el borne positivo, definirlo como punto de referencia y decir que el otro tiene -12V.

1.2.2. Corriente

Por otra parte, se define la corriente eléctrica (i) como la cantidad de carga (q) que circula por una superficie por unidad de tiempo (t). Si bien la corriente es una medida de flujo y por lo tanto no necesita de un “punto de referencia” para ser definida, resulta necesario establecer una dirección que se considerará positiva.

$$i = \frac{dq}{dt} \left[Ampere = \frac{Coulomb}{Segundos} \right] \quad (2)$$

Cuando decimos que por una lámpara circula 1A, estamos diciendo que en el término de 1 segundo pasaron por ella 1 Coulomb.

1.2.3. Potencia

De forma general la potencia (p) es la cantidad de trabajo (w) efectuado por unidad de tiempo (t) o equivalentemente es la velocidad a la cual se transforma, disipa o absorbe la energía.

$$p = \frac{dw}{dt} \left[Watt = \frac{Joules}{Segundos} \right] \quad (3)$$

Al decir que una estufa es de 1200W, se dice que ésta es capaz de transformar en el término de 1 segundo 1200 Joules de energía del dominio eléctrico al dominio térmico (o como comúnmente se dice, disipar).

Considerando 3 conceptos básicos resumidos (Tensión, Corriente y Potencia) en las tres ecuaciones (1), (2) y (3) se puede expresar la potencia en términos de variables “eléctricas” como son la corriente y la tensión.

$$p = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq}\right) \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right) = v \cdot i \quad \left[Watt = \frac{Joule}{Coulomb} \frac{Coulomb}{Segundos} = Volt \cdot Ampere \right] \quad (4)$$

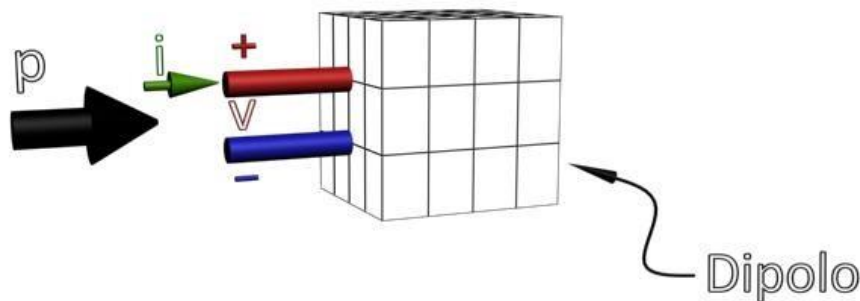
Por lo tanto, se puede expresar la potencia eléctrica instantánea asociada a un dipolo simplemente como el producto de la tensión entre sus bornes por la corriente que ingresa o egresa de él.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad [Watt = Volt \cdot Ampere] \quad (5)$$

La fórmula (5) que resume el cálculo de la potencia instantánea a partir de los valores de tensión y corriente es completamente general y expresa el valor de la potencia en cualquier instante de tiempo, esto es, la velocidad de transferencia de energía de afuera hacia adentro o viceversa del dipolo.

Para lograr resultados coherentes con la realidad es necesario establecer de manera correcta la diferencia de potencial, es decir la “medición” de v y la dirección de la corriente i .

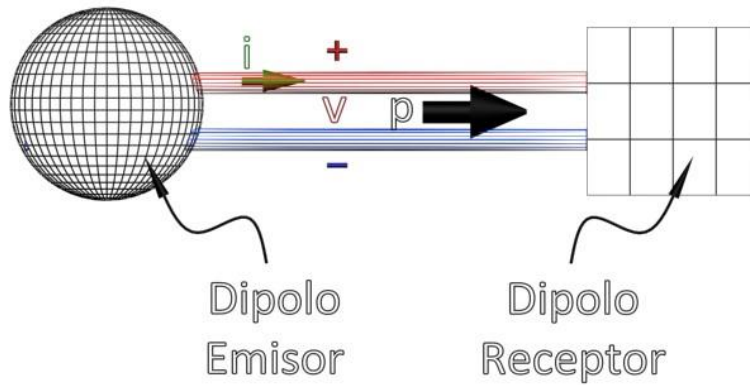
En La siguiente figura se representa la convención de tensión y corriente que definen una potencia entrante al Dipolo.



Como se observa la corriente ingresa al dipolo por el borne de mayor potencial, dentro del dipolo esta corriente circula y sale por el polo de menor potencial. En su “recorrido” se ha transferido energía desde el exterior (energía potencial eléctrica) al interior del dipolo.

A continuación, se muestra una correcta convención para medir potencia positiva absorbida por el dipolo receptor y también potencia positiva generada en un dipolo emisor.

El signo algebraico de la potencia se basa en el movimiento de carga a través de las caídas o elevaciones de potencial. Cuando las cargas se mueven a través de una caída de voltaje, pierden energía y cuando se mueven a través de una elevación de voltaje, ganan energía.



1.2.4. Energía

Con todo lo dicho hasta aquí, si se desea saber la cantidad de energía que se transfirió desde un dipolo emisor, como ser un generador a un dipolo receptor, tal como una lámpara, solo será necesario calcular la integral con respecto al tiempo de la función potencia en el intervalo deseado o lo que es lo mismo, calcular la integral del producto de la tensión y corriente correspondientes.

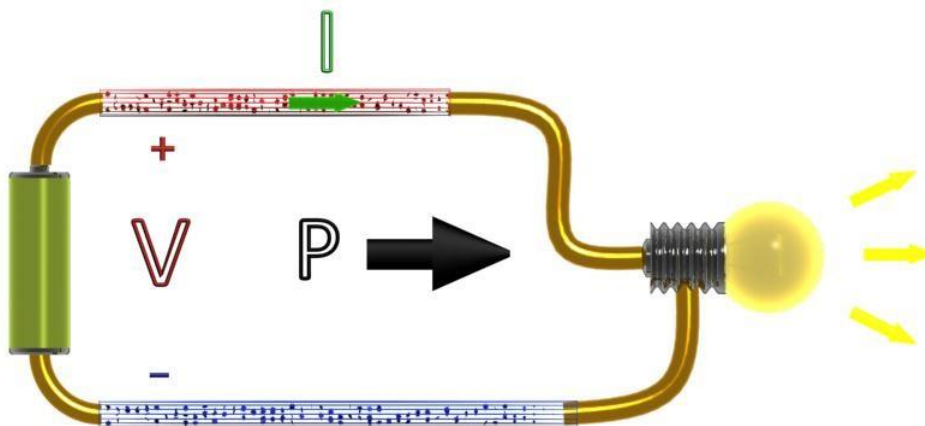
$$W_{t_1-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t)dt \quad [\text{Joule} = \text{Watt} \cdot \text{Segundos}] \quad (6)$$

En la expresión anterior se observa que la energía que se transfirió de un dipolo emisor a uno receptor durante el tiempo t que va desde t_1 a t_2 ($t=t_2-t_1$) puede obtenerse integrando el producto de $v(t)$ e $i(t)$ en el intervalo correspondiente.

Para explicitar en un caso práctico los conceptos introducidos se propone el siguiente ejemplo.

1.2.5. Ejemplo

Considerando el siguiente circuito conformado por una pila y una lámpara vinculados por conductores ideales, se desea conocer la potencia, es decir la velocidad de transferencia de energía, en cada instante de tiempo desde la pila de 1,5V a una lámpara cuya resistencia eléctrica es 5Ω . Además, se desea calcular la energía que se habrá transferido luego de 50 segundos de “prendida” la lámpara.



En la figura se encuentran representadas las referencias de medición de tensión y corriente (V e I) de modo que la potencia medida (P) corresponde con el sentido mostrado.

Considerando (modelado) una condición ideal donde la pila mantiene su tensión indefinidamente e independientemente del consumo de la lámpara (fuente de tensión ideal), se tiene un caso de corriente continua. En este, la tensión y corriente permanecen constantes en todo momento de modo que se tiene que:

$$v(t) = V \quad \forall t$$

$$i(t) = I \quad \forall t$$

Por lo tanto la potencia, considerando la referencia correspondiente, resulta:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V \cdot I = P \quad \forall t$$

$$P = 1,5V \cdot \left(\frac{1,5V}{5\Omega}\right) = 0,45W$$

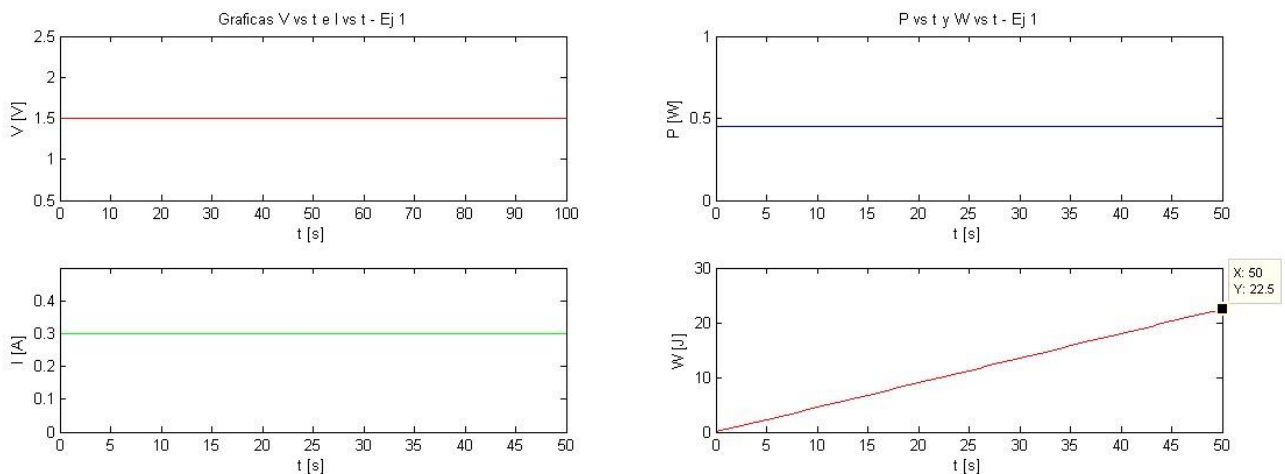
Resulta entonces la potencia constante e igual a **$P = 0,45 W$**

Si esta pila alimenta a la lámpara durante 50 segundos con la potencia calculada, la energía transferida será:

$$W_{0-50seg} = \int_0^{50} P dt = 0,45W \cdot 50seg = 22,5 J$$

Esta energía **$W = 22,5 J$** es transferida desde la pila (dipolo emisor) a la lámpara (dipolo receptor) y a la vez ésta transforma la energía eléctrica en luz y calor.

Las siguientes gráficas muestran la tensión, corriente, potencia y energía para este ejemplo.



Claramente, al encontrarnos en condiciones de corriente continua, la potencia permanece constante.

La energía transferida parte de cero y alcanza luego de 50 segundos el valor calculado 22,5J. Si la lámpara permanece conectada la energía crecerá indefinidamente en un caso ideal (modelo), en un caso real, será hasta que se acabe la energía química almacenada en la pila.

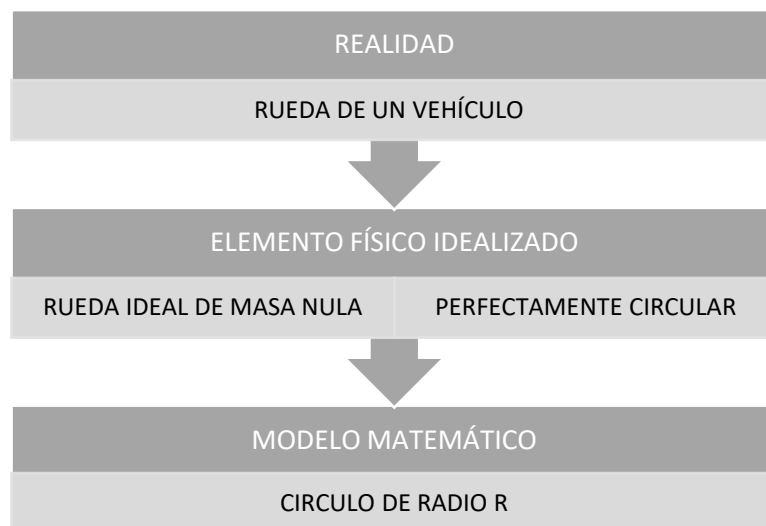
1.3. Modelos y sistemas

1.3.1. Generalidades

1.3.1.1. Modelo

Cualquier rama de la ciencia tiene su colección propia de modelos, estos representan un recorte de la realidad a nivel espacial y a nivel de los fenómenos intervinientes, ambos directamente relacionados con el estudio que para el cual se desarrolla un modelo. La “exactitud” del modelo dependerá entre la relación del mismo y la realidad física, específicamente en el marco que se ha de estudiar.

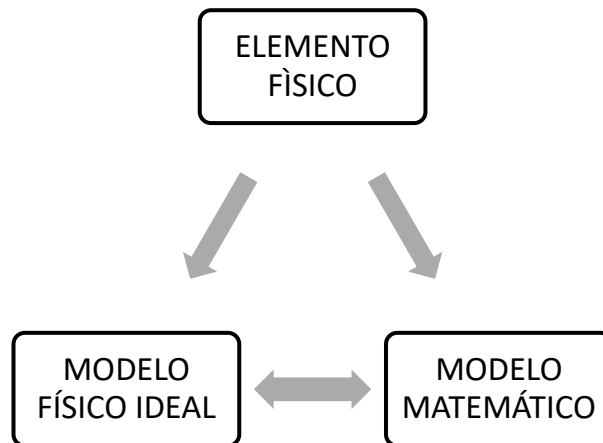
De forma general, en el pasaje de la realidad al modelo se puede identificar un primer paso al *elemento físico idealizado* y una posterior instancia de aproximación matemática o *modelo matemático*. Por ejemplo, un modelo de una rueda para calcular cuánto espacio recorre un auto cuando sus ruedas giran una vuelta, podría obtenerse de la siguiente forma:



Lo que recorra en una vuelta se podrá obtener fácilmente calculando el perímetro de la rueda ($2\pi R$).

Ese mismo modelo, puede ser también una buena aproximación para calcular el área de la rueda, pero será imposible utilizarlo para, por ejemplo, calcular la presión máxima del aire que puede soportar el neumático, o cual es la superficie de contacto con el suelo. Es decir, el modelo sólo sirve para lo que fue creado, por lo que siempre debe tenerse en cuenta el recorte de la realidad que se está haciendo para obtener resultados y conclusiones coherentes y representativas de la realidad.

El motivo principal de la existencia de modelos es facilitar el estudio del comportamiento de elementos reales mediante la utilización de expresiones matemáticas. Debe existir una correspondencia biunívoca entre las representaciones matemáticas y las leyes físicas que representan el modelo ideal.



En Ingeniería Eléctrica se tiene como objetivo la construcción de modelos idealizados que permitan establecer formulaciones matemáticas y así posibilitar la predicción del funcionamiento de los sistemas reales.

1.3.1.2. Sistema

Un sistema puede definirse como un conjunto de elementos cuyas propiedades e interacción se desean estudiar. Esto implica, una delimitación espacial y conceptual de lo que está adentro y fuera del sistema; interacciones entre los elementos, que podrán ser del tipo energéticas o de materia y una estructura u ordenamiento en la cual los elementos constituyentes interactúan.

Estudiar, por ejemplo, el Sistema Argentino De Interconexión (SADI) que comprende prácticamente toda la red eléctrica del país, líneas, transformadores, generadores y demandas; puede implicar realizar un análisis electromecánico, económico o puramente eléctrico. En los tres casos se tienen casi los mismos elementos (al menos en nombre), pero los fenómenos que representará en cada uno será muy diferente, dependiendo el sistema que se esté estudiado. En este caso un generador podrá ser:

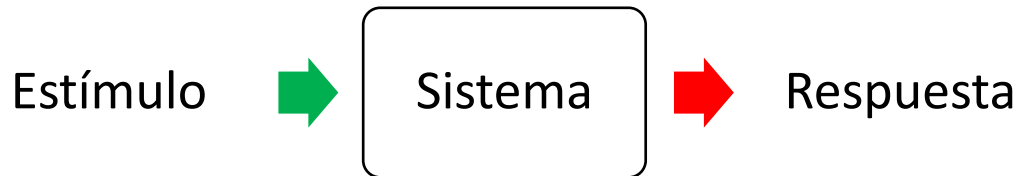
- Una masa rotante con interacciones electromagnéticas-mecánicas, en un sistema para estudio de transitorios.
- Un oferente de MW a X costo, en un sistema para estudio económico
- Una fuente AC de 50Hz y X tensión, en un sistema para estudio puramente eléctrico.

Naturalmente, debe existir coherencia entre los modelos de todos los elementos intervinientes de un sistema y a la vez todo esto deben contar con una adecuada representación para los fenómenos que se estudiará el sistema.

Para estudiar un sistema resulta clave comprender el concepto de estímulo (causa) y respuesta (efecto). La idea de estímulo y respuesta es básica en nuestra concepción de la física. El estímulo de entrada se representa por la energía cedida al sistema físico por las fuentes externas, mientras que la respuesta por la utilización de la

energía disponible a la salida del sistema, como ejemplo al frotar una lapicera con un paño, se carga eléctricamente.

En general, la respuesta depende de la red y del estímulo, pudiendo clasificarse de acuerdo a las condiciones que cumple la ecuación que la representa, dando origen a lo que se designa como estados de régimen.

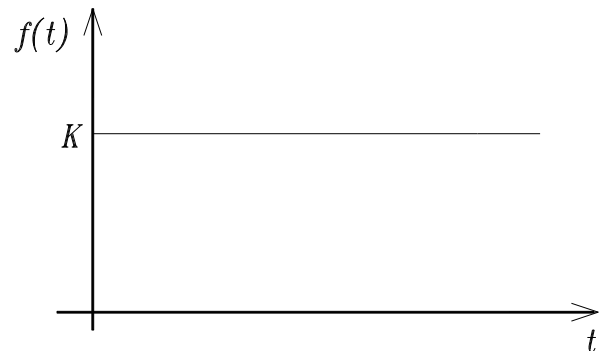


1.3.2. Estados de régimen

Ciertas magnitudes eléctricas como ser: una corriente, una diferencia de potencial, una fuerza electromotriz, un flujo magnético, etc., quedan definidas cuando se elige un sentido positivo convencional y se conoce su evolución temporal. A continuación, nos referiremos a una magnitud genérica " y ", que representa cualquiera de los ejemplos mencionados. Por lo tanto, consideremos fijado un sentido positivo convencional para dicha magnitud, y que sea la función que define su evolución temporal. $y = y(t)$

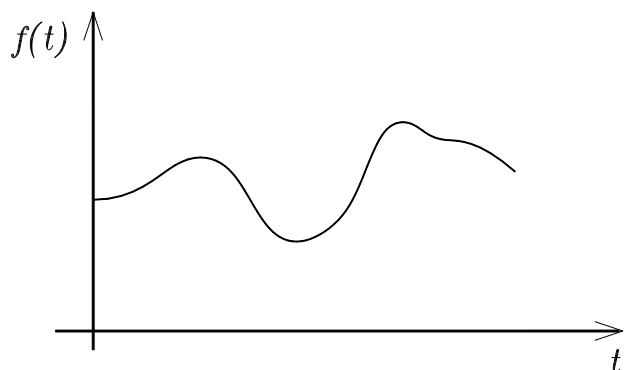
De acuerdo a las características de la mencionada función, efectuaremos la clasificación de los regímenes correspondientes:

- **Régimen estacionario o corriente continua**, en esta condición las variables de los circuitos resultan constantes en el tiempo, es decir $y = y(t) = K \forall t$

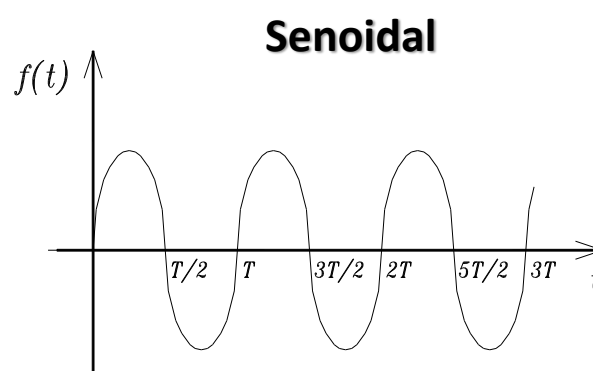
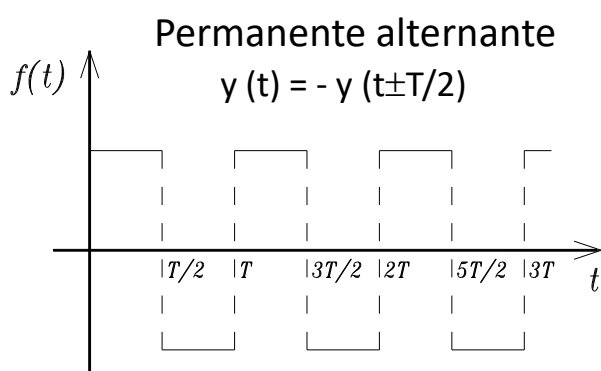
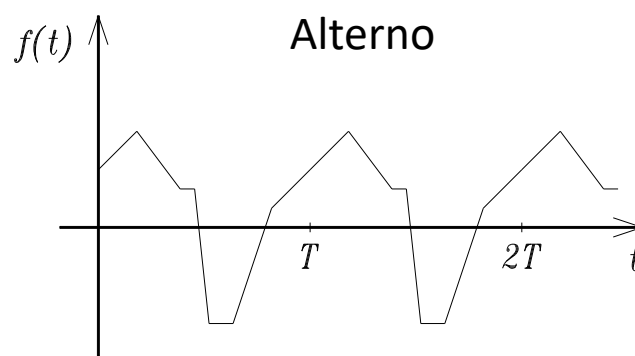
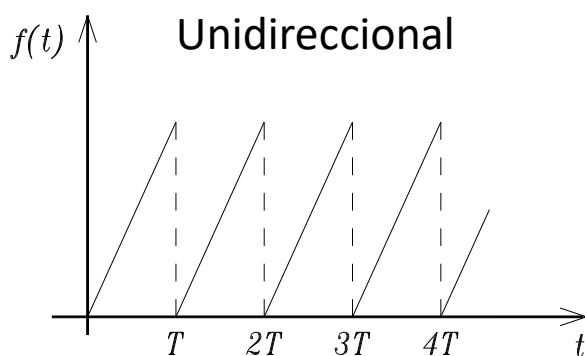


- **Régimen variable**, para este caso las magnitudes del circuito resultan variables en el tiempo. En particular se destacan dos sub-casos:

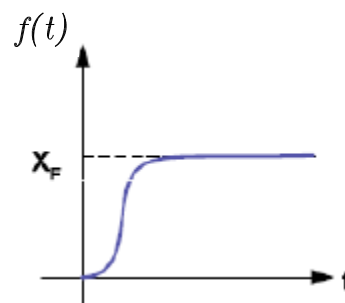
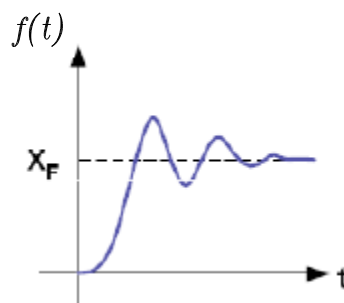
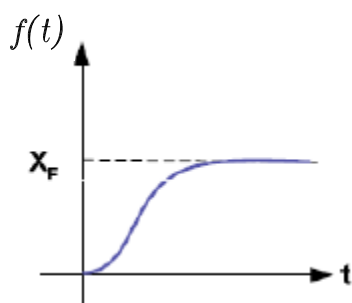
- **Régimen aperiódico**, es decir que las tensiones, corrientes y demás variables del sistema no presentan periodicidad, este es el caso más genérico de $y = y(t)$



- **Régimen permanente (periódico)**, en esta condición las variables del circuito presentan un comportamiento que se repite permanentemente en el tiempo, es decir que las variables se pueden escribir de la forma $y = y(t) = y(t + nT)$ siendo n entero y T el período. A continuación se muestran distintos regímenes permanentes, destacándose el de corriente alterna sinusoidal, por ser el de mayor aplicación en la ingeniería eléctrica.



- **Régimen transitorio**, corresponde al intervalo donde, luego de una conmutación en el circuito, se presentan alteraciones en las variables desde las condiciones iniciales hasta alcanzar un nuevo estado estacionario o permanente. A continuación, se muestran algunos casos de respuestas transitorias convergentes a una condición final de régimen estacionario X_F .



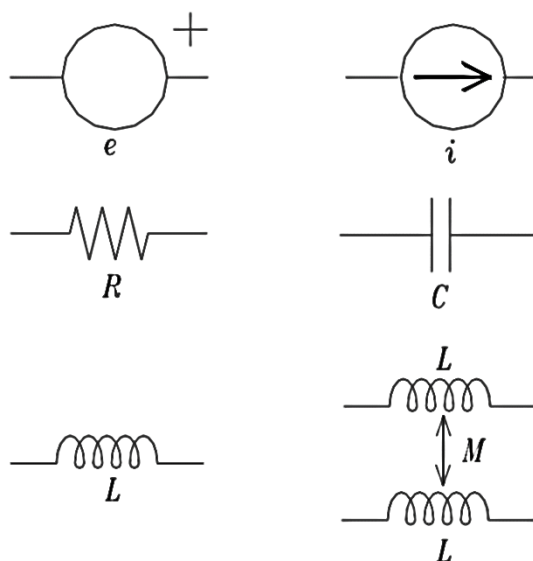
1.3.3. Modelos de elementos eléctricos

Los fenómenos que tienen lugar en un circuito eléctrico podemos clasificarlos en:

- Transformación de energía electromagnética en otras formas de energía (mecánica, química) o viceversa.
- Disipación de energía bajo forma de calor, con carácter irreversible
- Radiación de energía electromagnética
- Creación de campos magnéticos
- Creación de campos eléctricos

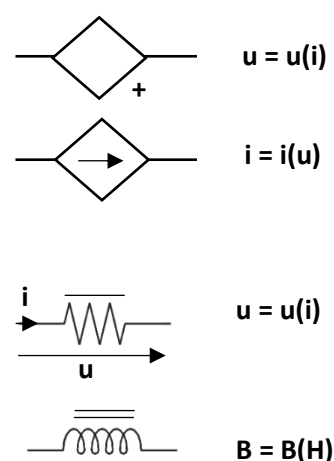
Los modelos (entes ideales) que utilizaremos para representar como modelos de dichos fenómenos son:

- Las **fuentes** que caracterizan la transformación de otras formas de energía en energía electromagnética y, en algunos casos la conversión recíproca. De forma general utilizaremos fuentes de tensión (e), de corriente (i) o fuentes dependientes según se explican a posteriori.
- Las **resistencias** que caracterizan la transformación de energía electromagnética en otras formas de energía (radiante, calor, mecánica, química). De forma general se utiliza la letra R para referirnos a estos elementos.
- Las **inductancias** (propias o mutuas), que caracterizan los campos magnéticos. Para las inductancias propias se utiliza la letra L mientras que para los acoplamientos mutuos se utiliza la M
- Las **capacidades** que caracterizan los campos eléctricos. Para estos elementos aplicaremos la letra C



Otros elementos que también serán utilizados a lo largo de la materia y que permiten representar elementos y/o comportamientos particulares son:

- Las **fuentes dependientes**, es decir elementos de la red que imponen una tensión o una corriente, dependiendo de otra tensión u otra corriente. Estos modelos suelen ser utilizados para representar acoplamientos magnéticos, comportamientos de transistores y amplificadores operacionales, transformadores de medida, entre otros.
- Los **elementos anómalos**, en los cuales no rige la linealidad y su relación tensión-corriente obedece a una curva o expresión matemática no lineal. Los elementos más comunes que se estudiarán en esta materia corresponden a resistencias alineales, diodos y materiales ferromagnéticos.



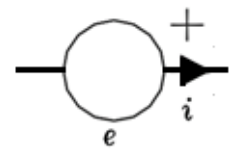
Los circuitos se efectuarán enlazando galvánicamente dichos modelos por medio de conductores a los que consideramos ideales (es decir: carentes de propiedades resistivas, inductivas o capacitivas). Otra alternativa

que es de fundamental importancia, por su empleo en transformadores, es la vinculación inalámbrica entre elementos, los cuales se vinculan mediante un campo magnético común.

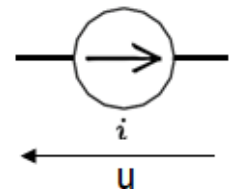
Cuando es posible representar satisfactoriamente un sistema con un número finito de elementos se dice que el modelo resultante es un circuito a parámetros concentrados. De no serlo, diremos que el circuito es a parámetros distribuidos, esta situación es imprescindible para el estudio de sistemas de conducción de energía a muy larga distancia o a muy alta frecuencia. En esta Asignatura nos dedicaremos al estudio de los circuitos a parámetros concentrados, la cual resulta elemental para la posterior interpretación y aplicación de los modelos a parámetros distribuidos.

1.3.3.1. Fuentes independientes

Una fuente de tensión “e” es capaz de entregar cualquier nivel de corriente “i” para mantener la diferencia de potencial o tensión “e” entre sus bornes. Considerando los sentidos de la figura si ambos valores “e” & “i” son positivos la fuente estará entregando energía al circuito eléctrico (proveniente de otro dominio).



Una fuente de corriente “i” es capaz de poner cualquier diferencia de potencial “u” entre sus bornes para mantener la corriente “i” fluyendo entre sus terminales. Considerando los sentidos de la figura si ambos valores “i” & “u” son positivos la fuente estará entregando energía al circuito eléctrico (proveniente de otro dominio).

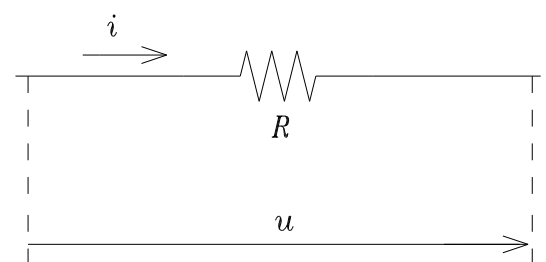


En ambos casos si uno de los valores resulta negativo para tal referencia implicará que las fuentes en realidad se comportan como sumideros, es decir absorben potencia del circuito y la transforman a otro dominio. Un ejemplo de esto sería para representar una batería que está siendo cargada. En cualquier caso la potencia intercambiada será el producto de la corriente que fluye por la tensión entre sus bornes.

1.3.3.2. Resistencia

En una resistencia “R” se cumple, en todo instante la ley de Ohm, es decir, se tiene que, si la diferencia de potencial entre sus bornes es “u” y la corriente que la atraviesa es “i”, se verifica: $u(t) = R \cdot i(t)$

Es un componente que permite representar la transformación de energía eléctrica a otro dominio. Típicamente de forma irreversible, como el térmico.

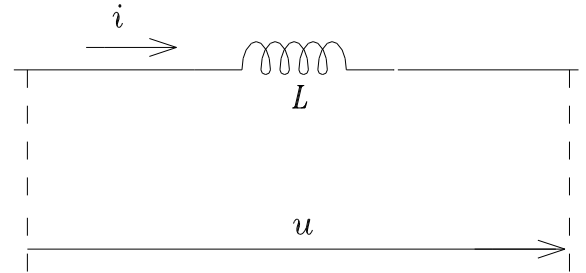


No posee capacidad de almacenamiento de energía, resultando la potencia disipada (transformada a otro dominio):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t)$$

1.3.3.3. Inductancia

En una inductancia "L", la diferencia de potencial aplicada en sus bornes debe vencer la fuerza contraelectromotriz originada en ella por la variación de la corriente circulante i . Por ley general de la inducción, para los sentidos de "u" e "i" en la figura, se tiene:



$$e_L(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow u(t) = -e_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Este elemento representa el almacenamiento de energía en los campos magnéticos, producto de la circulación de corriente eléctrica por un conductor ideal. La energía almacenada en t, considerando un valor nulo en tiempo $t=0$ puede obtenerse de la siguiente forma:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \underbrace{L \cdot i(t)}_{\phi(t)} \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow E(t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t)$$

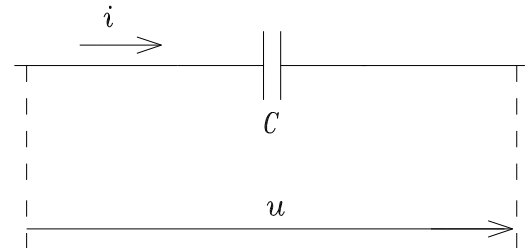
Es decir que la energía almacenada depende directamente de la corriente o flujo de campo magnético asociada al inductor (considerando invarianza de L en el tiempo).

1.3.3.4. Capacidad

En una capacidad "C" se cumple: $u(t) = \frac{1}{C} \cdot q(t)$ obteniéndose que:

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad \text{ó} \quad i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Este elemento representa el almacenamiento de energía en los campos electroestáticos, producto de la diferencia de potencial existente entre dos conductores separados por un aislante. La energía almacenada en t, considerando un valor nulo en tiempo $t=0$ puede obtenerse de la siguiente forma:



$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \underbrace{C \cdot u(t)}_{q(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt} \rightarrow E(t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t C \cdot u(t) \cdot \frac{du(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t)$$

Es decir que la energía almacenada depende directamente de la tensión o carga asociada al capacitor (considerando invarianza de C en el tiempo).

1.3.4. Leyes que rigen los circuitos (sistemas) eléctricos

1.3.4.1. Leyes de Kirchhoff

De acuerdo a la convención de representación de modelos en los circuitos ideales, resulta que las dos leyes más importantes para la resolución de circuitos eléctricos, conjuntamente con la ley de Ohm, son las leyes de Kirchhoff, cuya interpretación y sus enunciados se explicitan a continuación:

- La acumulación de cargas eléctricas tiene lugar, exclusivamente, en las capacidades; esto nos permite enunciar la Primera Ley de Kirchhoff o Ley de Corriente de Kirchhoff (LCK) que dice:

"La suma algebraica de los valores instantáneos de todas las corrientes que concurren a una superficie cerrada o nudo es nula"

$$\sum_{p=1}^n i_p(t) = 0$$

- Los efectos inductivos se hallan concentrados en las inductancias, luego la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito ideal es independiente del trayecto a lo largo del cual se efectúa la medición. Entonces puede enunciarse la segunda Ley de Kirchhoff o Ley de Tensiones de Kirchhoff (LTK) como:

"La suma algebraica de los valores instantáneos de todas las fuerzas-electromotrices (f.e.m.) de las fuentes de tensión contenidas en un bucle es igual a la suma algebraica de los valores instantáneos de todas las caídas de potencial correspondientes a los restantes elementos contenidos en el bucle"

$$\sum_{k=1}^m e_k = \sum_{h=1}^n v_h$$

1.3.4.2. Leyes de conmutación

Conocidas las ecuaciones que rigen el comportamiento de los elementos de un circuito y las leyes de Kirchhoff, resta conocer la evolución de las magnitudes al producirse una alteración en el sistema, las que son conocidas como las leyes de conmutación o condiciones iniciales que nos permitirán plantear las ecuaciones diferenciales que permitirán conocer la evolución temporal de la corriente y/o la tensión en un circuito.

Estas leyes se determinan a partir de consideraciones energéticas. El concepto básico corresponde a identificar que variables (tensión, corriente, carga, flujo, etc.) resultan directamente asociadas a la cantidad de energía almacenada en el elemento bajo evaluación. Como la energía no puede variar "a saltos", i.e. es continua, tampoco lo hará la variable representativa de la energía almacenada.

Una interpretación alternativa, de índole matemática, corresponde a identificar si la variable en cuestión se obtiene integrando otra variable. En ese caso, siendo que la integral de una función es continua aun cuando la función que está siendo integrada varíe "a saltos", podremos conocer su comportamiento ante alteraciones en el sistema.

A continuación, se presenta el comportamiento ante conmutaciones en capacidades e inductancias. Vale destacar que en una resistencia la corriente que la circula y la tensión aplicada pueden variar sin continuidad, pues ambas variables están ligadas mediante un producto escalar.

Comportamiento de capacitores

Si sometemos un condensador de capacidad "C" a una diferencia de potencial "v", éste almacenará energía en forma de campo eléctrico, siendo la carga en sus placas: $q(t) = C \cdot v(t)$.

La corriente que circulará por él será: $i(t) = \frac{dq}{dt}$

En tanto que la carga total almacenada por el capacitor puede ser calculada como la integral de la corriente que lo circuló desde su origen, ya que no se puede obviar su historia previa, por lo que el extremo inferior de la integración será menos infinito y el superior el tiempo que estamos considerando: $q(t) = \int_{-\infty}^t i(t) dt$

Considerando dos intervalos de integración: $q(t) = \int_{-\infty}^0 i(t) dt + \int_0^t i(t) dt$

La primera integral será la carga que poseía el capacitor en el instante considerado como cero en el estudio del circuito eléctrico (generalmente se toma como tiempo cero al instante en que se comienza a estudiar la evolución de las magnitudes eléctricas):

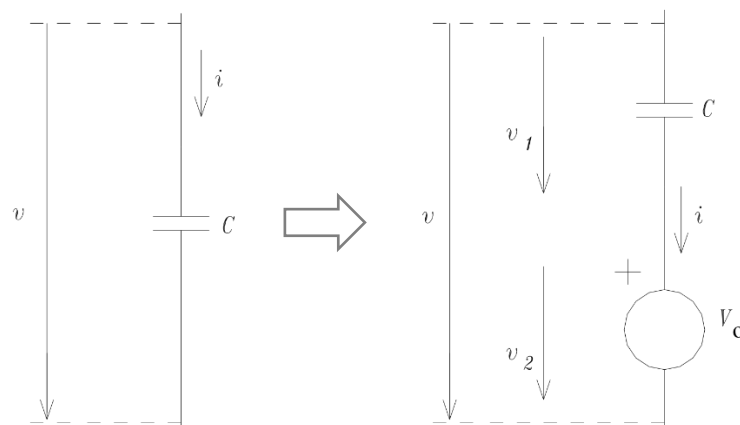
$$q(t) = q_0 + \int_0^t i(t) dt \xrightarrow{\text{dividiendo por } C} v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

En la ecuación precedente v_0 es la tensión del condensador en el instante considerado como inicial. De esta ecuación puede observarse que la tensión varía con continuidad, cualquiera sea la forma de la corriente. Siempre contemplando un comportamiento de la corriente acorde a la realidad (i.e. no se contempla que la función corriente se comporte como una función delta de Dirac). De esta forma, se puede escribir la ley de conmutación

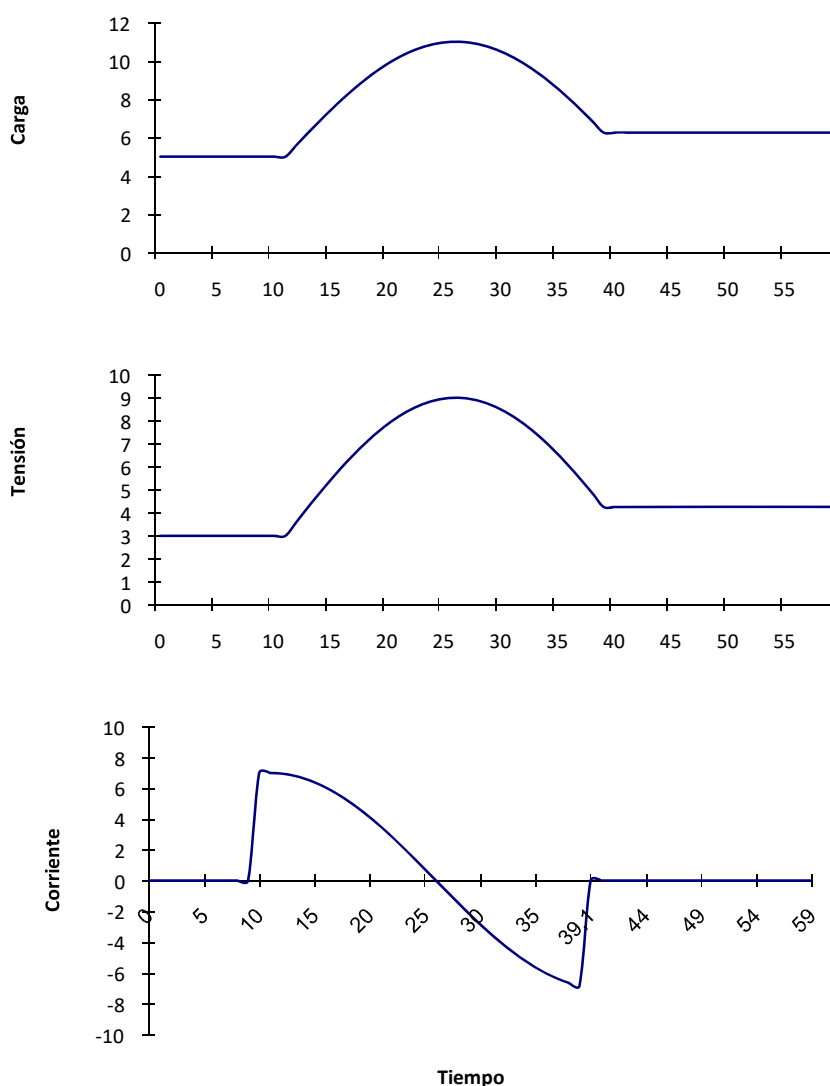
$$v(t = 0^-) = v(t = 0^+)$$

$$v(t) \propto q(t) \rightarrow \text{ENERGÍA}$$

De igual forma, la ecuación previamente presentada permite representar al condensador por medio del modelo circuital indicado en la siguiente figura:



Finalmente se presenta un ejemplo de las evoluciones de carga, tensión y corriente en un capacitor.



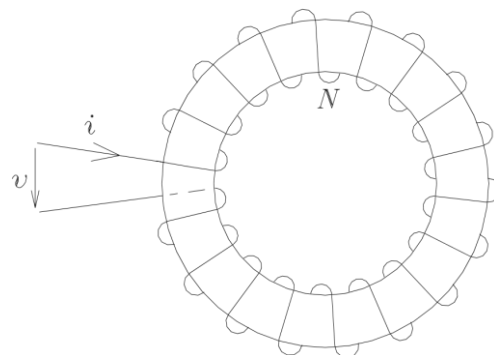
Comportamiento de inductancias

La inductancia ideal es una bobina realizada con alambre sin resistencia. Cuando es recorrida por una corriente, se almacena energía en forma de campo magnético en el espacio que rodea el devanado. Prácticamente se realiza arrollando alambre en forma de hélice alrededor de un tubo de aire, éste puede ser reemplazado por un material magnético para aumentar la energía del campo almacenada debido a la mayor permeabilidad del medio.

Supongamos un anillo de aire o material magnético y sobre él un arrollamiento (bobina), por el cual circula una corriente $i(t)$

La ley de Ampere- Maxwell nos permite escribir:

$$\oint \vec{h}(t) \times d\vec{l} = N \cdot i(t)$$



De acuerdo a la configuración geométrica h resulta constante y la longitud media magnética del toroide resulta "L", obteniendo así: $\mathbf{h}(t) \cdot \mathbf{L} = N \cdot \mathbf{i}(t)$

Debido al campo magnético $\mathbf{h}$ se desarrolla una inducción magnética: $\mathbf{b}(t) = \mu\mu_0\mathbf{h}(t)$

Contemplando una sección transversal de área S , se tiene un flujo $\phi(t) = \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{S}$

A partir de estas ecuaciones se puede escribir: $N \cdot \mathbf{i}(t) = \frac{\mathbf{b}(t)}{\mu\mu_0} L = \phi(t) \frac{L}{\mu\mu_0 S} \rightarrow N \cdot \mathbf{i}(t) = \phi(t) \cdot \mathbf{R}_m$
Siendo $\mathbf{R}_m$, la reluctancia magnética del circuito.

Teniendo en cuenta que en una inductancia la tensión en sus bornes es proporcional a la velocidad de variación del flujo, puede escribirse: $\mathbf{e}(t) = -N \frac{d\phi}{dt} = -\mathbf{v}(t)$

De modo que: $\mathbf{v}(t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^t \mathbf{v}(t) dt = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^0 \mathbf{v}(t) dt + \frac{1}{N} \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \phi_0 + \frac{1}{N} \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$

Multiplicando miembro a miembro por $\mathbf{R}_m/N$, se logra escribir las ecuaciones en términos del coeficiente de autoinducción $\mathbf{L} = \mathbf{R}_m/N^2$ como se presenta a continuación:

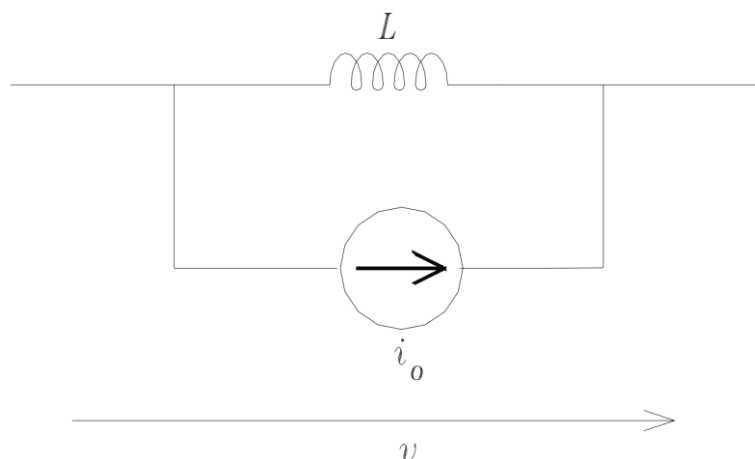
$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}_0 + \frac{\mathbf{R}_m}{N^2} \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{i}_0 + \frac{1}{L} \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$$

Por tratarse de una función integral se deduce que la corriente en una inductancia posee una evolución continua, es decir que se verifica que:

$$\mathbf{i}(t = 0^-) = \mathbf{i}(t = 0^+)$$

$$\mathbf{i}(t) \propto \phi_m(t) \rightarrow \text{ENERGÍA}$$

De igual forma, la ecuación previamente presentada permite representar al inductor por medio del modelo circuital indicado en la siguiente figura:



1.4. Ejercicios

1.4.1. Ejercicios Introductorios

Problema 1

Dibujar el circuito eléctrico que sea modelo de una linterna de dos elementos y plantear las ecuaciones matemáticas que lo representan.

Problema 2

Dibujar el circuito eléctrico que sea modelo de un artefacto luminoso constituido por un tubo fluorescente.

Problema 3

Un conductor conduce una corriente de 20mA. ¿Cuántos Coulombs pasan por una sección normal al conductor durante 15 segundos?

Problema 4

La carga que entra a una inductancia de 2 Hy es $q=e^{-t/2}$ con t en segundos y q en Coulombs. Determinar la tensión en sus bornes en V.

Problema 5

Si la misma carga del problema anterior ($q=e^{-t/2}$) corresponde ahora a la evolución de la carga en bornes de un capacitor, determinar:

- La corriente que circula por el capacitor
- La tensión al cabo de 10seg
- La evolución temporal de la tensión

Problema 6

La carga total acumulada en la placa positiva de un capacitor varía según se muestra en la figura P6 La evolución de la carga durante los primeros 4 segundos es cuadrática, calcular:

- La evolución temporal de la corriente en los primeros 20 seg.
- El valor medio de la corriente en dicho intervalo de 20 segundos.
- La carga total acumulada por el capacitor durante los 20 segundos.
- Si ahora se desea calcular la corriente media en el intervalo de 0 a 12 seg. explicar los motivos por los que este resultado es distinto al del apartado b)

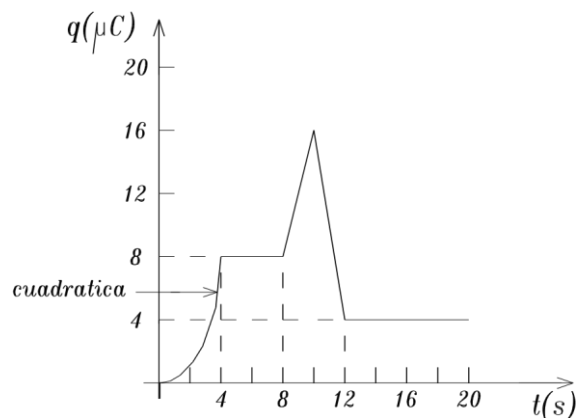


Figura P6 b)

Problema 7

Cuando se ha descargado la batería de un automóvil se procede a puentear la misma con la de otro vehículo que dispone de ella en buenas condiciones, para ello se deben cortocircuitar los terminales de igual polaridad como se indica en la figura P7. Si se determina que en la conexión fluye una corriente de 25A con el sentido indicado:

- ¿Cuál es el vehículo que posee la batería defectuosa?
- Si la conexión se mantiene durante 45seg, ¿cuál es la carga total transferida?

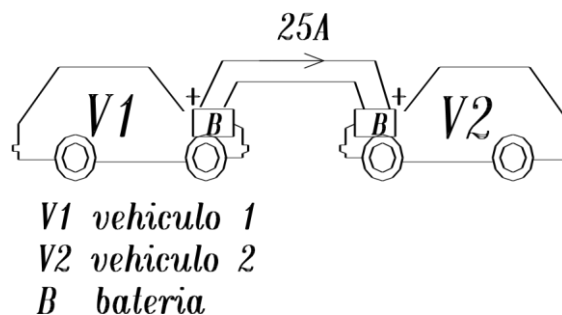


Figura P7

Problema 8

La figura P8 muestra la curva típica de carga de una batería, se desea calcular:

- La carga total que se transfiere a la batería en Ah (Ampere-hora) y en Coulomb
- La energía total suministrada a la batería

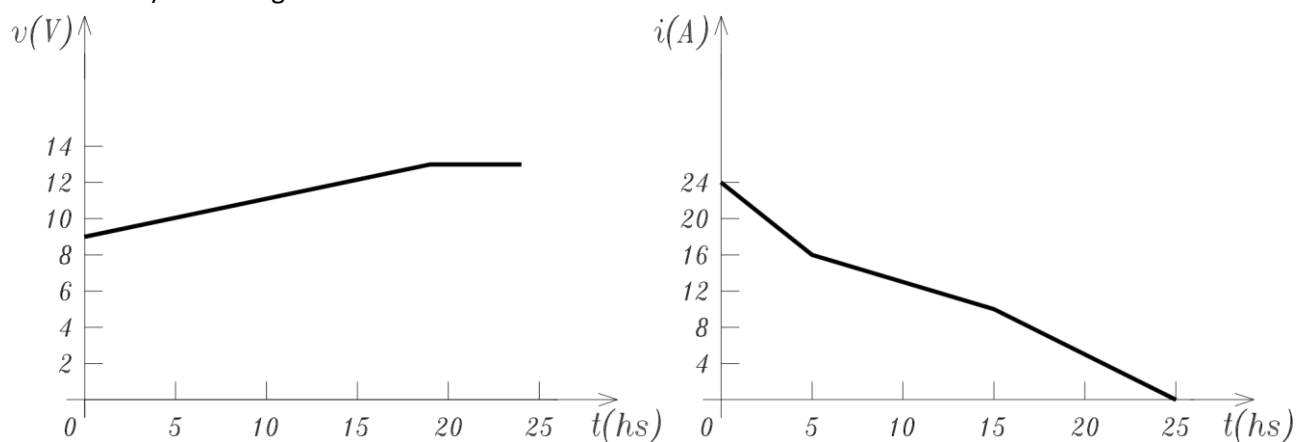


Figura P8

1.4.2.Ejercicios Resueltos

Problema 9

La evolución de la corriente en los terminales del elemento de la figura es:

$$i(t) = \begin{cases} i = 0 & \text{si } t < 0 \\ i = 10e^{-1000t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad [i] = A$$

- Calcular la carga total que entra al elemento en Coulomb y μC .
- Calcular la carga ingresada al elemento para $t = 1 \text{ ms}$ y para $t = 5 \text{ ms}$.

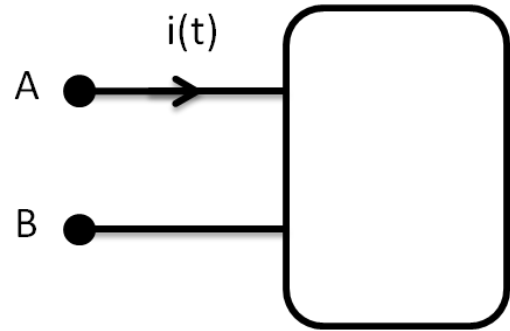


Figura 1 - Dipolo

Resolución

De la definición de corriente tenemos que: $i = \frac{dq}{dt} \quad \left[\text{Ampere} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Segundos}} \right]$

De esta manera tenemos que la carga (q) que ingresa al elemento entre el tiempo t_1 y t_2 vale:

$$q_{t_1-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad [\text{Ampere} \cdot \text{Segundos} = \text{Coulomb}]$$

- La carga total será la que ingresa desde $t_1 = -\infty$ hasta $t_2 = +\infty$. Siendo $i(t < 0) = 0$ la integral sólo debe calcularse entre $t_1 = 0$ y $t_2 = +\infty$

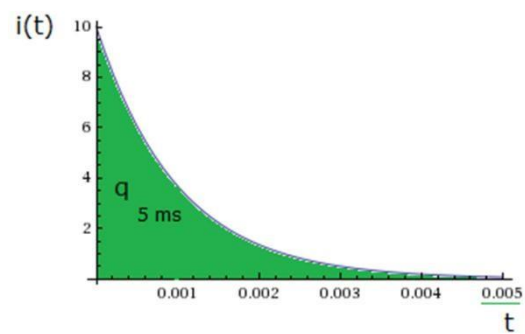
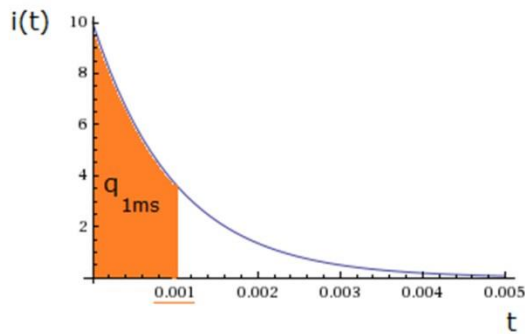
$$q_{\text{total}} = \int_0^{+\infty} i(t) dt = \int_0^{+\infty} 10e^{-1000t} dt = -\frac{10}{1000} e^{-1000t} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{10}{1000}\right)$$

$$q_{\text{total}} = 0.01 \text{ C} \equiv 10000 \mu\text{C}$$

- La carga ingresada para $t_1 = 1 \text{ ms}$ y $t_2 = 5 \text{ ms}$ es:

$$q_{1\text{ms}} = \int_0^{1\text{ms}} 10e^{-1000t} dt = -\frac{10}{1000} e^{-1000t} \Big|_0^{1/1000} = -\frac{10}{1000} e^{-1} - \left(-\frac{10}{1000}\right)$$

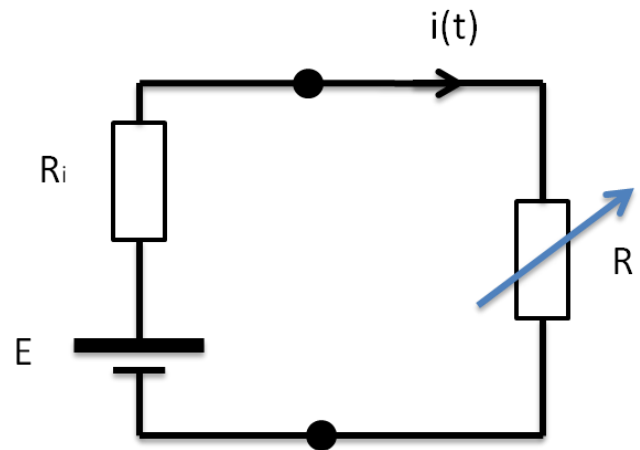
$$q_{1\text{ms}} = 0.00632 \text{ C} = 6320 \mu\text{C}, \text{ y análogamente: } q_{5\text{ms}} = 0.00993 \text{ C} = 9930 \mu\text{C}$$



Problema 10

La siguiente figura muestra un circuito conformado por una fuente de tensión con resistencia interna R_i y un consumo representado por una resistencia R . Se pide:

- Calcular el valor que debe adoptar la resistencia variable R para que la potencia disipada en esta sea máxima.
- Calcular el rendimiento η de la transferencia energética fuente $\rightarrow$ resistencia para tal valor de resistencia.
- Graficar la potencia transferida en función de la resistencia R ($P=P(R)$)
- Graficar el rendimiento de la transmisión en función de la resistencia R ($\eta = \eta(R)$)



Resolución

Siendo E una fuente de tensión continua, la corriente total por el circuito es continua ($i(t) = I \forall t$), de forma que puede escribirse:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R_i + R}$$

La Potencia disipada por la resistencia R , también continua, será:

$$P(R) = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R_i + R)^2}$$

- La condición de máximo puede obtenerse igualando la derivada de la función $P(R)$, esto es considerando constante los parámetros Tensión de la fuente (E) y resistencia interna (R_i).

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(R)}{\partial R} = 0 &\Rightarrow \frac{E^2(R_i + R)^2 - 2E^2 R(R_i + R)}{(R_i + R)^4} = 0 \Rightarrow E^2(R_i + R)^2 = 2E^2 R(R_i + R) \Rightarrow \\ E^2(R_i + R)^2 &= 2E^2 R(R_i + R) \Rightarrow R_i + R = 2R \end{aligned}$$

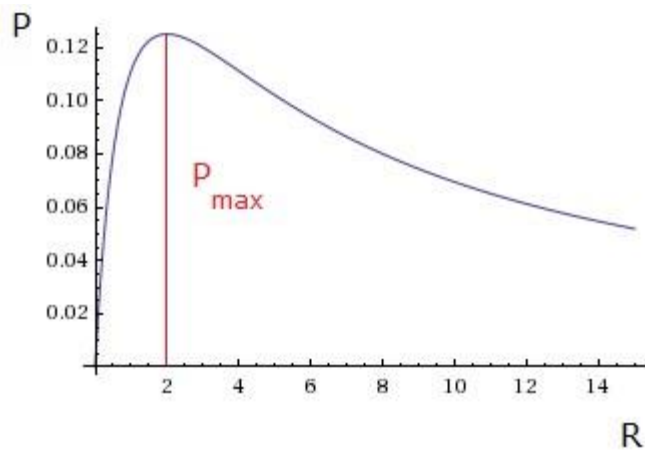
$$\frac{\partial P(R)}{\partial R} = 0 \Rightarrow R = R_i$$

Es decir que la potencia disipada máxima se da, cuando la resistencia del consumo R iguala a la resistencia interna de la fuente R_i . Más aún puede afirmarse que la transferencia de una fuente a un consumo es máxima cuando el valor de la resistencia del consumo es igual a la de la resistencia interna de la fuente, independientemente de los valores de resistencia y tensión de la fuente.

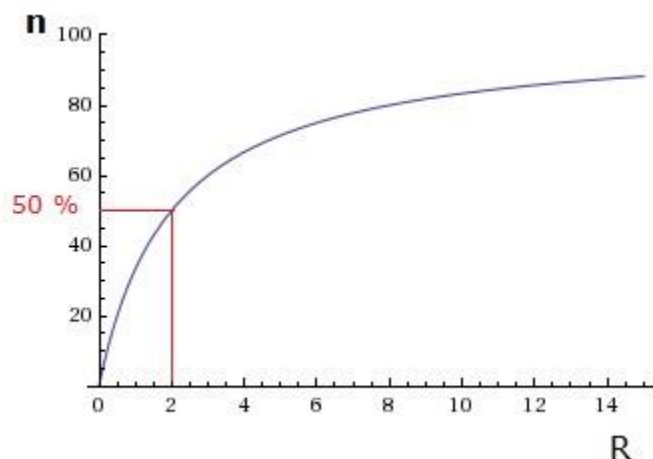
- b) Considerando que la potencia disipada por R es potencia útil y la de R_i es pérdida, el rendimiento del sistema fuente $\rightarrow$ resistencia para esta condición de máxima transferencia vale:

$$\eta = \frac{\text{Potencia Consumida (Util)}}{\text{Potencia Entregada (Total)}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R_i + R)} = \frac{1}{2} = 0.5 \equiv 50\%$$

- c) A continuación se grafica la función potencia vs resistencia considerando una fuente $E = 1V$ y una resistencia interna $R_i = 2\Omega$



- d) La gráfica del rendimiento para el mismo caso que el apartado c, es:



Problema 11

La bobina de cierto amperímetro tiene una resistencia de $120\ \Omega$. Se desea proveerlo de una resistencia en paralelo de tal manera que sólo un milésimo de la corriente a ser medida circule por el instrumento. Calcular el valor de la resistencia R .

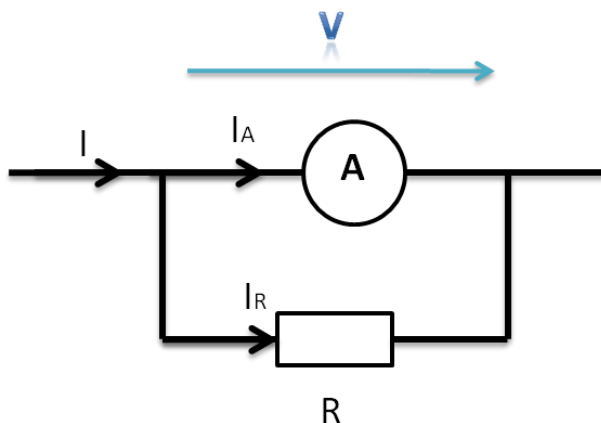


Figura 3 – Amperímetro

Resolución

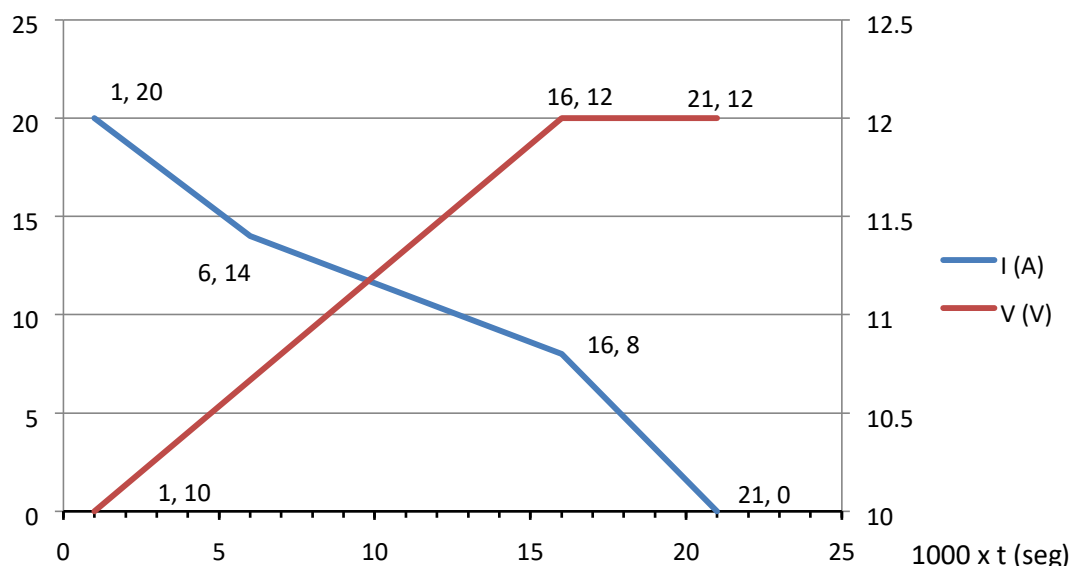
Siendo la relación buscada entre las corrientes entre las corrientes $\frac{I}{I_A} = 1000$ y considerando que tanto el amperímetro A como la resistencia R están sometidos a la misma diferencia de potencial, se tiene:

$$\begin{cases} I_R = \frac{V}{R} \\ I_A = \frac{V}{R_A} \end{cases} \rightarrow \frac{I_R}{I_A} = \frac{R_A}{R} \rightarrow \frac{I_R + I_A}{I_A} = \frac{R_A + R}{R} = 1000$$

$$R = \frac{R_A}{999} = 0.1201\ \Omega$$

1.4.3. Ejercicios Propuestos**Problema 12**

La tensión y la corriente en los terminales de la batería de un automóvil durante el ciclo de carga se muestran en la siguiente figura. El tiempo (eje x) corresponde a miles de segundos ($1000 \times t$).



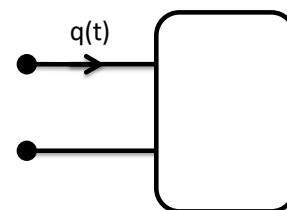
Calcular la carga total transferida y la energía total entregada a la batería.

Problema 13

La expresión de la carga q en Coulomb que entra a un dipolo es:

$$q(t) = \frac{1}{a^2} - \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right] e^{-at} \quad \text{siendo} \quad a = 0,03679 \frac{1}{\text{seg}}$$

Calcular el valor máximo de la corriente.

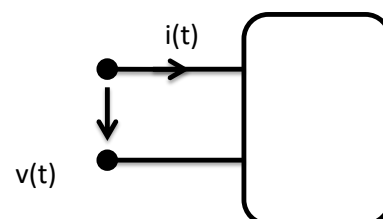


Problema 14

La tensión y corrientes medidas en bornes de un dipolo siguen las siguientes expresiones:

$$v(t) = \begin{cases} V = 0 & \text{si } t < 0 \\ V = 50e^{-1000t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

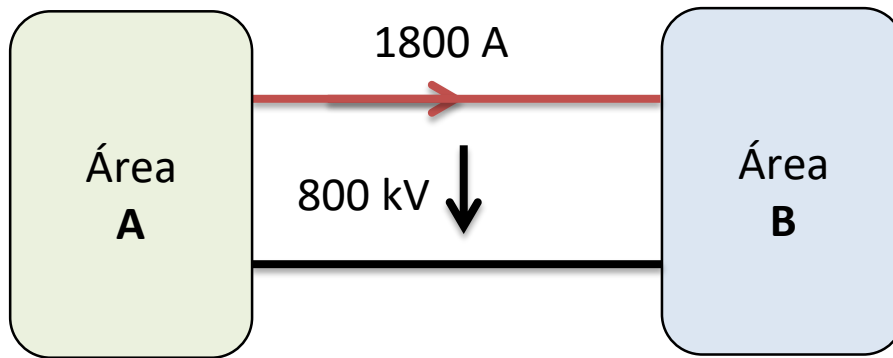
$$i(t) = \begin{cases} I = 10e^{-1000t} & \text{si } t \geq 0 \\ I = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Calcular la energía total transferida en mili-Joules

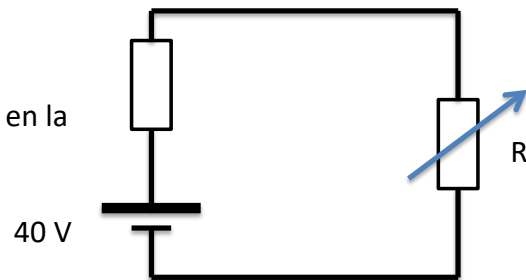
Problema 15

Una línea de transmisión de alta tensión (HVDC) interconecta dos áreas remotas (A y B). Ésta se encuentra operando a 800 kV y transportando una corriente de 1800 A. Calcular la potencia transmitida en MW y determinar la dirección del Flujo de Potencia.

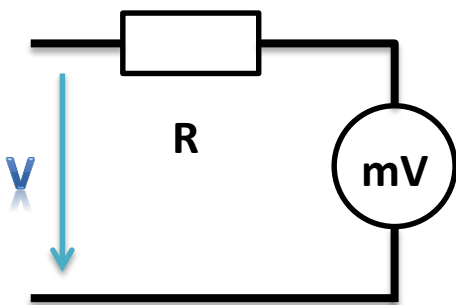


Problema 16

Determinar el valor que debe adoptar la resistencia variable R para que la potencia disipada en la resistencia de $5\ \Omega$ sea 20 W .



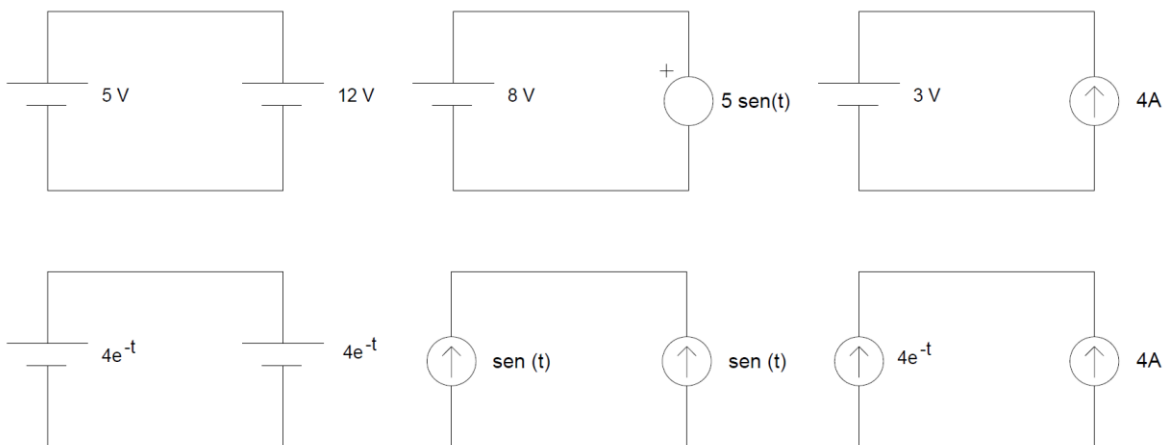
Problema 17



Calcular la R de tal manera que la tensión en el milivoltímetro sea un milésimo que la tensión a medir (V). La resistencia interna del milivoltímetro es de $1\text{ k}\Omega$.

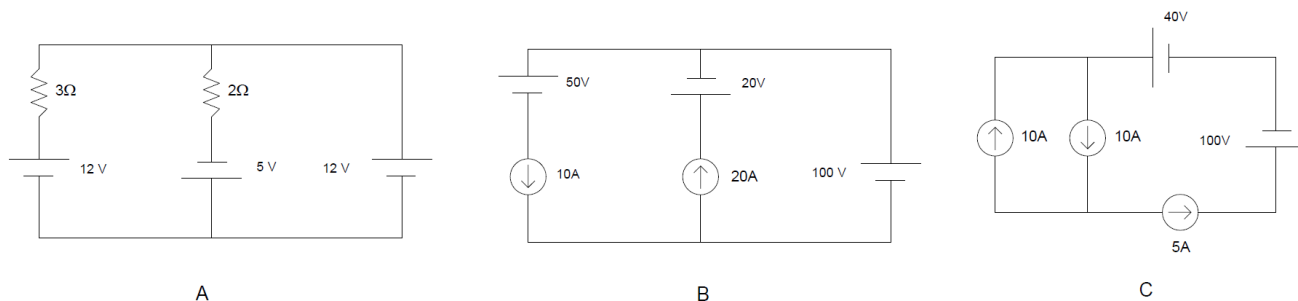
Problema 18

Analizando la definición de fuentes independientes ideales de tensión y corriente, determinar cuáles de las conexiones son válidas y cuales violan los principios impuestos para la definición de las fuentes ideales.



Problema 19

En cada uno de los siguientes circuitos, si la interconexión es válida, analizar el balance energético. Si la interconexión no es válida, explicar por qué.

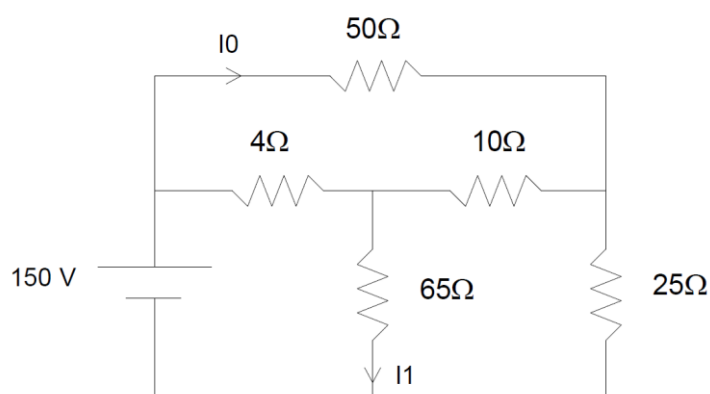


Problema 20

La corriente I_0 en el circuito de la figura es 1 A .

Calcular:

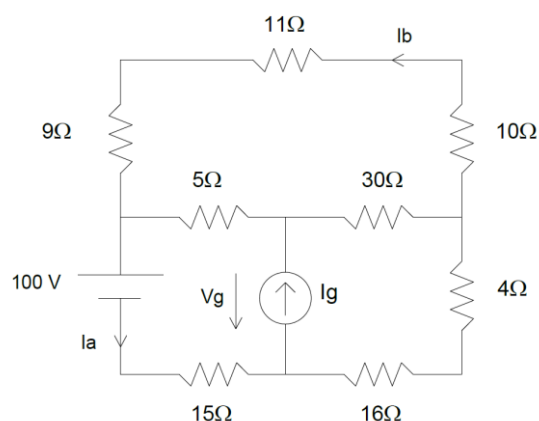
- La corriente I_1
- La potencia disipada en cada resistencia
- Verificar que la potencia total disipada en las resistencias es igual a la suministrada por la fuente de 150 V



Problema 21

Las corrientes I_a e I_b en el circuito de la figura valen 4 A y -2 A respectivamente. Calcular:

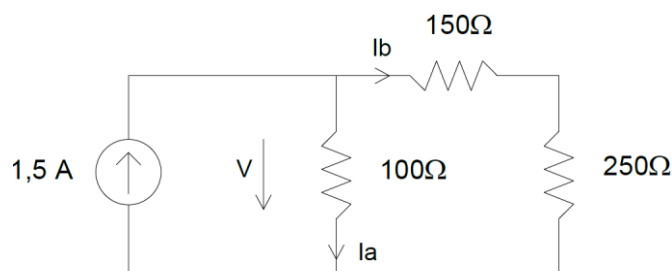
- La corriente I_g
- La potencia disipada en cada resistencia
- La tensión V_g
- Realizar el balance energético



Problema 22

Dado el circuito de la figura, calcular:

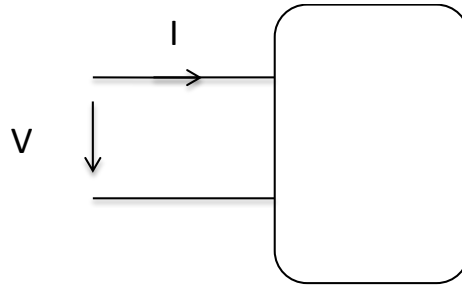
- Las corrientes I_a e I_b
- La tensión V
- Verificar que la potencia entregada es igual a la consumida.



Problema 23

La tensión y la corriente medidas en los terminales del dispositivo de la figura se resumen en la siguiente tabla:

V [V]	I [A]
50	0
66	2
82	4
98	6
114	8
130	10

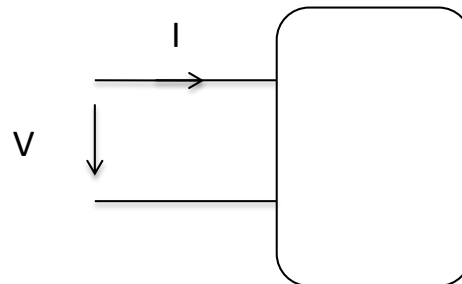


Construir un modelo de circuito de este dispositivo usando una fuente ideal y una resistencia. Utilizar el modelo para estimar el valor de I cuando la tensión $V = 0$ V.

Problema 24

De la misma forma que en el problema anterior, se pide construir un modelo usando una fuente ideal y una resistencia. Luego, utilizar el modelo para hallar la potencia que el dispositivo le entregaría a una resistencia de 20Ω .

V [V]	I [A]
100	0
120	4
140	8
160	12
180	16

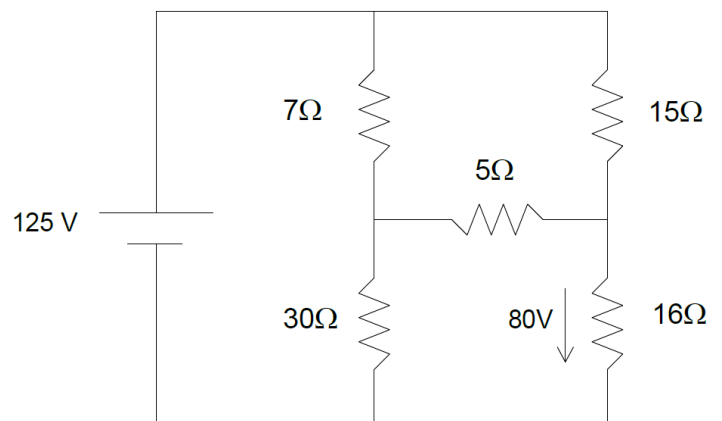


Problema 25

Sabiendo que en el circuito de la figura la tensión en la resistencia de 16Ω es igual a 80 V.

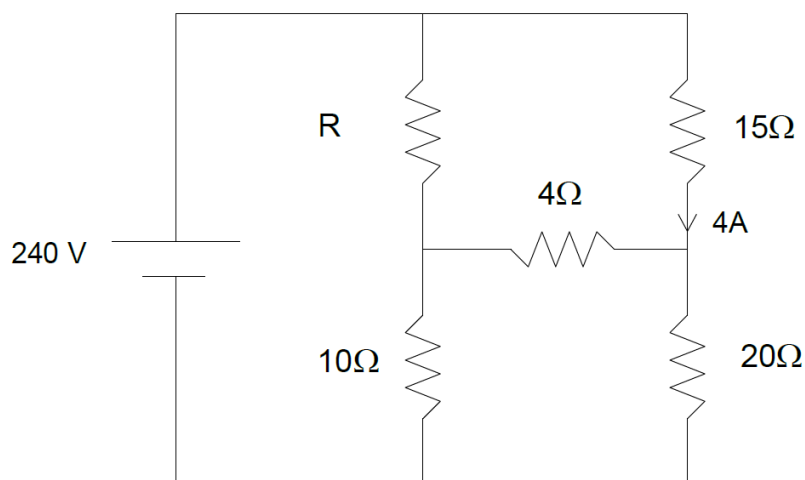
Calcular:

- La potencia disipada en cada resistencia
- La potencia desarrollada en la fuente ideal de 125 V
- Realizar el balance de potencia generada y consumida.



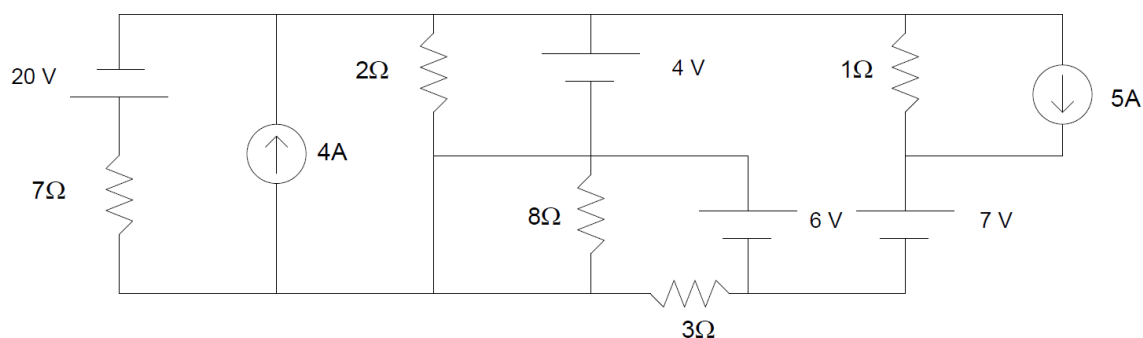
Problema 26

En el circuito de la figura, hallar R y la potencia suministrada por la fuente



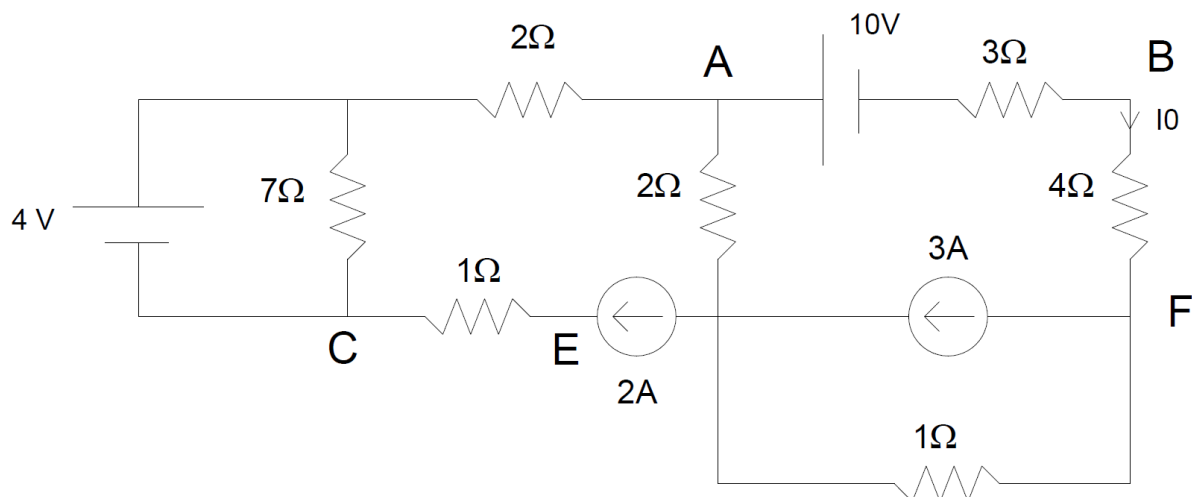
Problema 27

En el circuito de la figura, determinar todas las corrientes de ramas (incluso las de resistencia nula) y todas las tensiones de nudos.



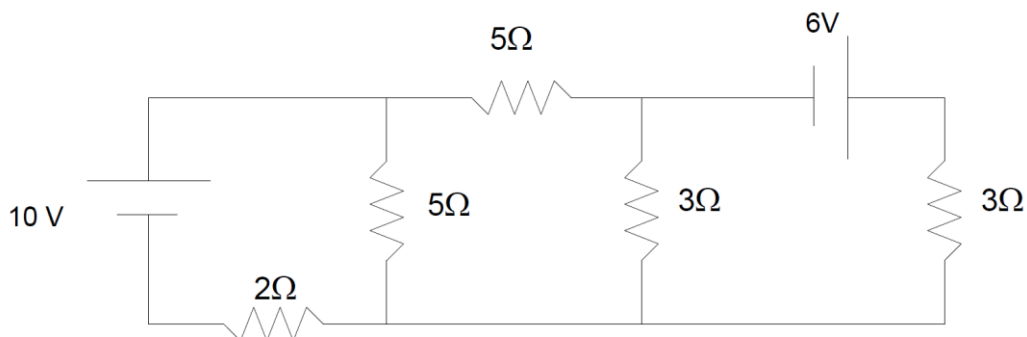
Problema 28

En el circuito de la figura determinar I_0 , U_{AB} , U_{AC} y U_{EF} .



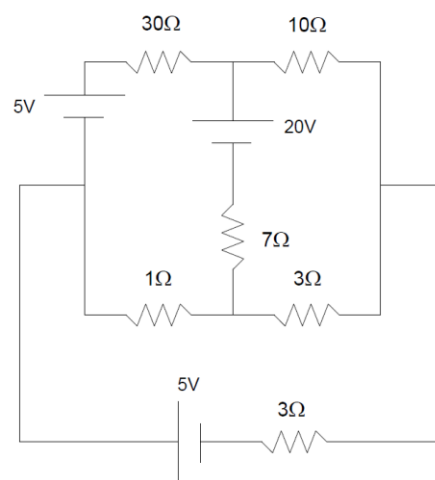
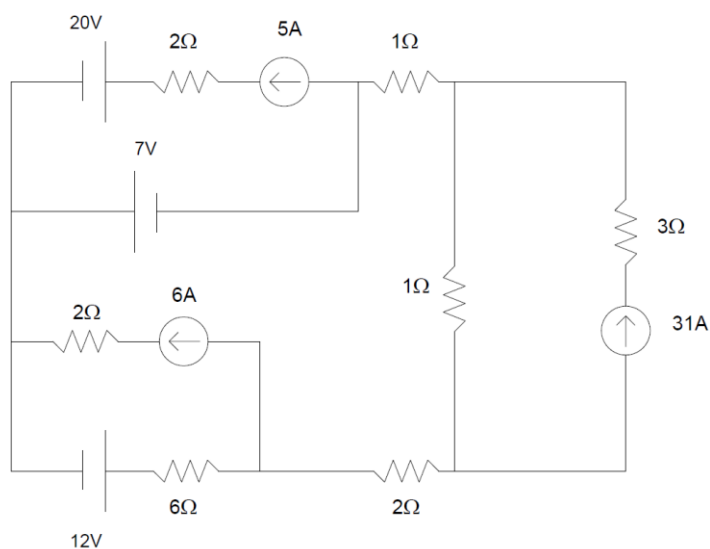
Problema 29

Dado el circuito de la figura, escribir las ecuaciones de las leyes de Kirchhoff que permitan determinar su estado de régimen.



Problema 30

Para cada uno de los circuitos que se representan en las figuras, escribir las ecuaciones de las leyes de Kirchhoff que permitan determinar su estado de régimen.



1.5. Anexo: información complementaria

1.5.1. Unidades de variables y parámetros eléctricos comúnmente utilizados

Magnitud	Unidad	Símbolo
Tensión	Voltio	V
Corriente	Ampere	A
Frecuencia	Hertz	Hz
Potencia	Vatio/Watt	W
Resistencia	Ohm	Ω
Conductancia	Siemens	S
Inductancia	Henrio	H
Capacidad	Faradio	F
Inducción Magnética	Tesla	T
Flujo Magnético	Weber	Wb
Carga Eléctrica	Culombio	C
Energía	Joule	J

1.5.2. Prefijos, múltiplos y submúltiplos

Escala	Prefijo	Símbolo
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

1.5.3. Ejemplos de dimensiones

- Tensiones en Argentina: **380 V** (baja), **13,2kV-33kV** (media), **132kV-220kV** (alta) y **500kV** (extra alta).
- El 04/07/2019 fue superado el máximo histórico de POTENCIA de INVIERNO del SADI para día Hábil, correspondiendo **23859 MW** a las 20:42. El 29/01/2019 fue superado el máximo histórico de ENERGÍA del SADI para día Hábil, correspondiendo **544,4 GWh (1Wh=3600J)**. El consumo promedio de una casa pequeña es de **350kWh** bimestrales. La central nuclear Atucha II genera aproximadamente **750MW**.
- La corriente de actuación de una protección diferencial hogareña es de **30mA**. Una llave termomagnética hogareña tiene una corriente nominal de **20A** y puede abrir hasta una corriente de falla de **3kA**. La corriente de falla en la Estación Rosario Oeste **132kV** es mayor a **20kA**.
- El capacitor de una fuente de **12V** puede ser de **2200uF**. El capacitor para un motor monofásico de **1/4Hp (186W)** es de **120uF**.
- Muchos transformadores se diseñan para operar con un nivel de inducción o densidad de flujo de **1,5T**.

2. DIPOLOS

2.1. Introducción

Los circuitos eléctricos consisten en elementos interconectados, los que analizaremos, en este capítulo, en forma independiente y además, en forma previa, efectuaremos una clasificación de acuerdo a su comportamiento a través de parámetros observables.

2.2. Dipolos

Se denomina dipolo a todo elemento o conjunto de elementos que tienen dos bornes (polos) para su conexión

2.2.1. Definiciones y clasificación

En todo dipolo es de gran interés conocer la tensión en sus bornes y la corriente que ingresa en él y su relación para conocer su comportamiento, esta última puede darse de dos maneras:

- mediante una gráfica en el plano cartesiano, tomando la tensión como ordenada y la corriente como abscisa, obteniéndose una gráfica conocida como “gráfica VoltAmpere”.
- mediante una ecuación matemática, conocida como “ecuación Volt-Ampere(V-A)”.

La clasificación de los dipolos se puede efectuar en función de su ecuación V-A (o su gráfica V-A) en:

Lineales: su ecuación es una función lineal, es decir del tipo $y = ax + b$. Este tipo de elementos admite las propiedades de superposición.

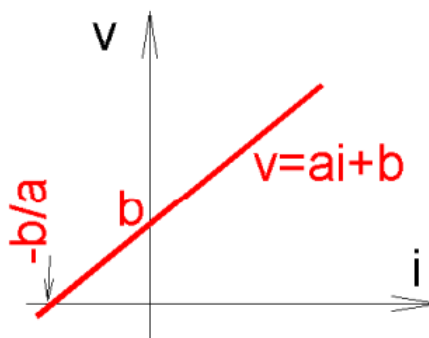


Figura 2-1

Alineales: la ecuación que rige su comportamiento posee potencias de x . También se denomina a este tipo de dipolos anómalos.

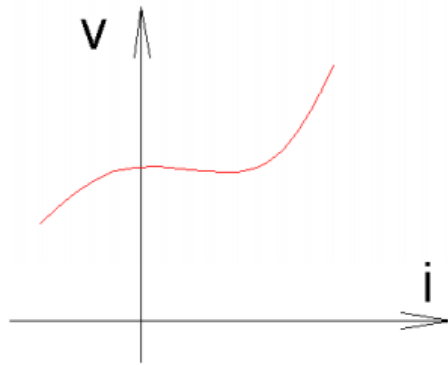


Figura 2-2

Una segunda clasificación tomando como base consideraciones de simetría, es:

Simétricos: Cuando la función que lo define es de la forma $y(x) = y(-x)$, es decir tenemos simetría par, o si $y(x) = -y(-x)$ se dice que la simetría es impar, como se muestra en la siguiente figura.

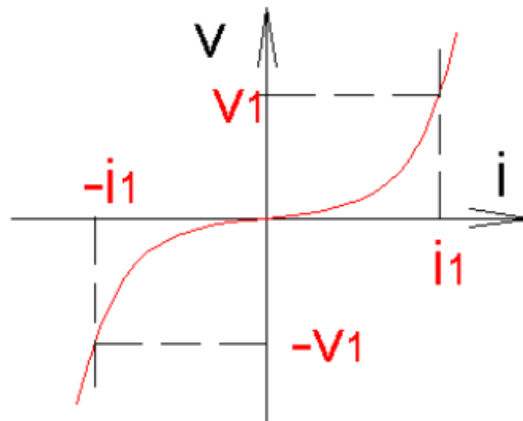


Figura 2-3

Asimétricos: No verifica el dipolo las condiciones de simetría.

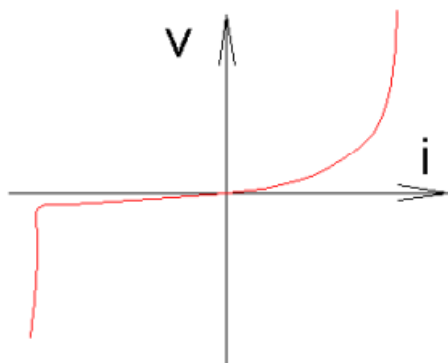


Figura 2-4

Otra clasificación se realiza sobre la base de la potencia absorbida, es decir que $v(t)$ e $i(t)$ se toman de tal manera que sus sentidos defina potencia absorbida por un dipolo.

Activo: Es capaz de suministrar energía

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \int_{-\infty}^t v(t) * i(t) dt \leq 0$$

Pasivo: La energía consumida verifica

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \int_{-\infty}^t v(t) * i(t) dt \geq 0$$

Nota: si se toma un intervalo de tiempo, este mismo elemento pueda suministrar energía en él, como ocurre en aquellos dipolos que pueden almacenarla en forma de campo eléctrico o magnético.

Una definición más sencilla, pero no tan rigurosa permite decir que un dipolo es pasivo si para $v=0$ es $i=0$, como en un resistencia.

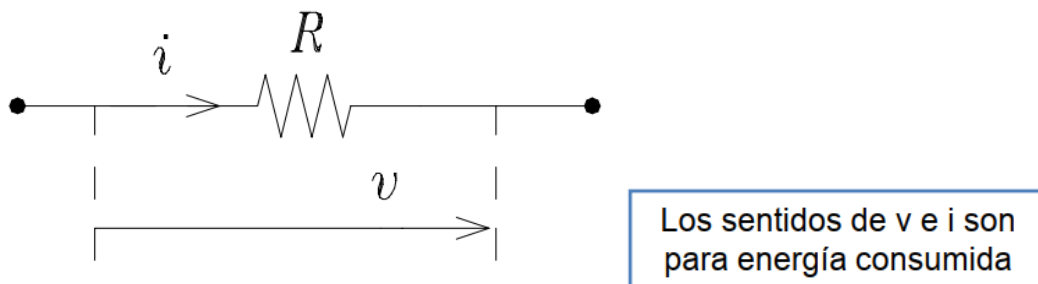
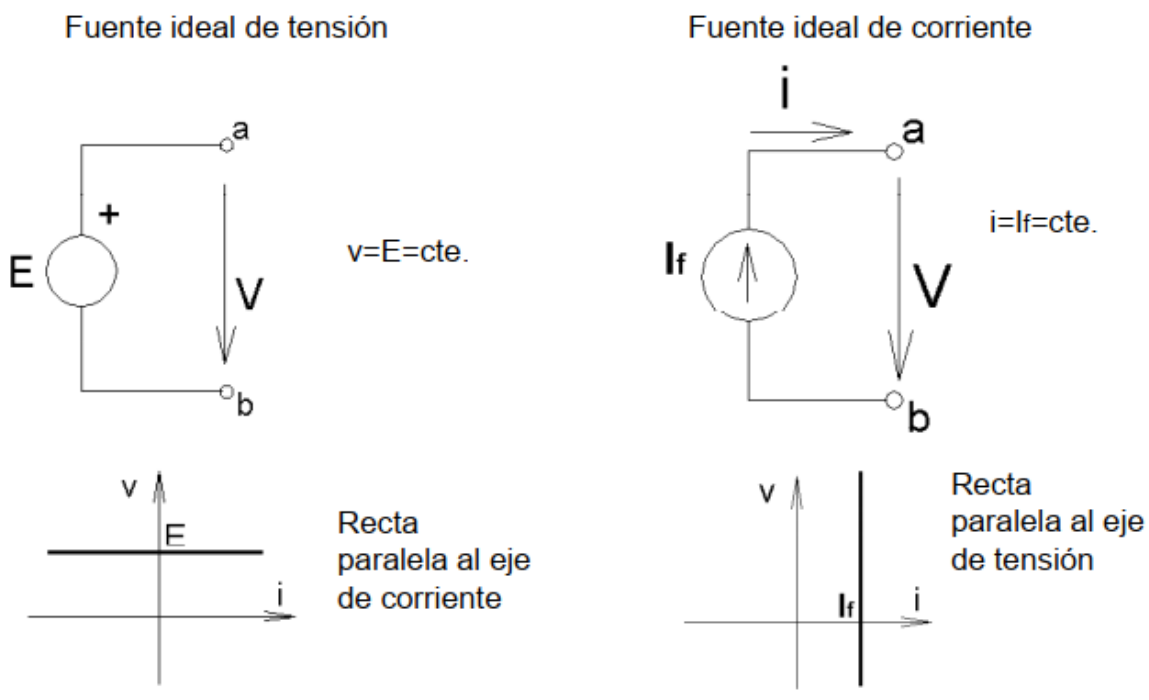


Figura 2-5

2.2.2. Fuentes ideales

Las fuentes ideales de tensión o corriente que han sido presentadas en el primer apunte de la materia, pueden ser consideradas como dipolos lineales, simétricos y activos.



2.2.3. Dipolos lineales

Consideremos un dipolo constituido por una resistencia de valor R . La ecuación matemática que rige su comportamiento es la Ley de Ohm (publicada en 1827), que relaciona la tensión aplicada y la corriente que circula por ella, como se indica en la Figura 2-5.

$$v = R \cdot i$$

Del análisis de esta ecuación y fijando como premisa que el valor que su resistencia es constante, podemos concluir que se trata de un dipolo lineal, simétrico y pasivo. Su gráfica volt-ampere es la que se indica en la siguiente figura.

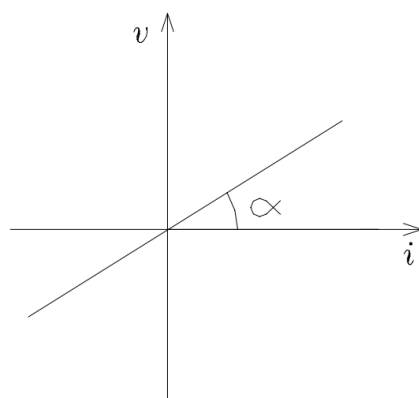


Figura 2-6

La tangente de α será el valor de la resistencia R en una escala dada por el cociente de las escalas de tensión y de corriente.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{i} = R \left[\frac{\text{Escala de } v}{\text{Escala de } i} \right]$$

Si ahora efectuamos una modificación en el dipolo de Figura 2-6 y le agregamos una fuente de tensión de valor E (Figura 2-7) tenemos:

La tensión total aplicada al dipolo es:

$$v = v_R + v_E = E + R * i$$

Se puede observar que la ecuación responde a las condiciones de linealidad (es una recta) y se trata de un dipolo activo, ya que para $i = 0$ es $v \neq 0$.

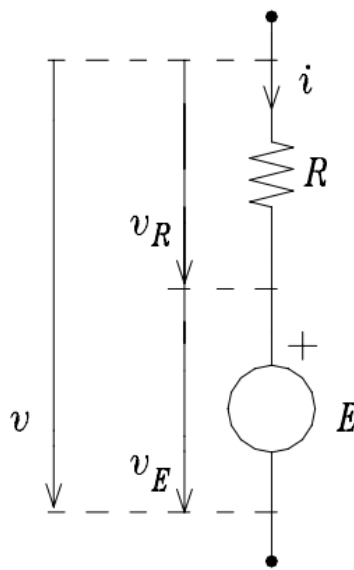


Figura 2-7

En general se puede afirmar que todo dipolo que posee fuentes es un dipolo activo y se puede demostrar fácilmente que la conexión de dipolos lineales da por resultado un nuevo circuito lineal.

En la Figura 2-8 se representa la gráfica **V-A** del dipolo considerado. Los puntos A y B son puntos característicos y se denominan:

A - tensión a circuito abierto, pues se verifica que $v = E$ con $i = 0$, es decir es la tensión en bornes del dipolo cuando el circuito está abierto. A este valor de tensión se lo suele representar como V_0

B - corriente de cortocircuito, pues se tiene con $v = 0$ resultando $i_{cc} = v/R$, siendo esta la corriente que circularía al puenteear los extremos del dipolo de la Figura 2-7.

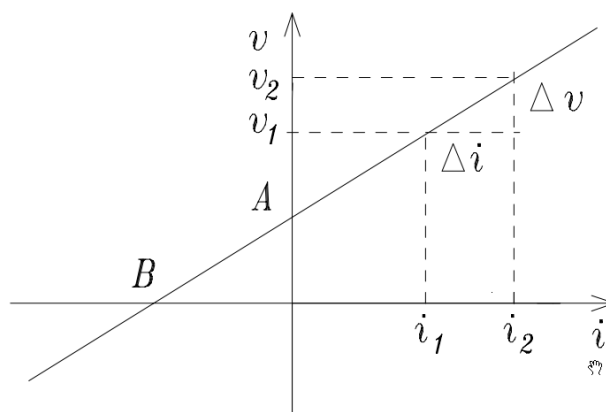


Figura 2-8

Dado que el dipolo de Figura 2-7 está conformado por la serie de dos dipolos, una fuente ideal de tensión y una resistencia, su ecuación y su gráfica **V-A** podrían ser halladas como la suma de ellas, como se plantea en la ecuación de partida.

La pendiente de la gráfica de Figura 2-8 da el valor de la resistencia total en el dipolo, que puede ser demostrado mediante las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} v_2 = E + R \cdot i_2 \\ v_1 = E + R \cdot i_1 \end{bmatrix} \text{ restando m. a. m. } \Rightarrow \Delta v = R \Delta i \Rightarrow R = \frac{\Delta v}{\Delta i}$$

Ejemplo 1

Calcular gráficamente la corriente del circuito serie de la siguiente figura.

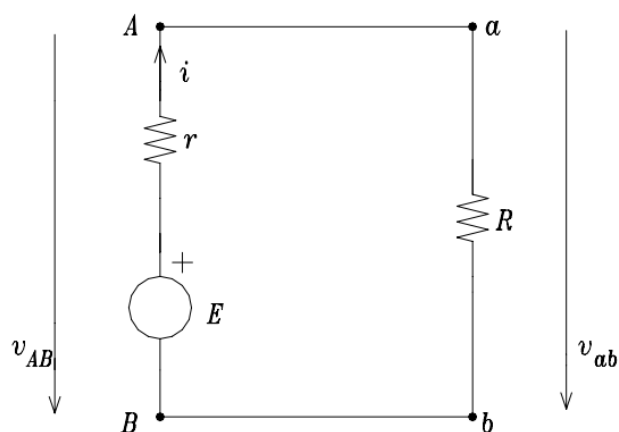


Figura 2-9

Se trata de un circuito serie por lo tanto la corriente será la misma en toda la malla. Para la resolución de este circuito consideraremos que ésta constituido por dos dipolos:

El de la izquierda identificado con las letras A y B y conformado por la fuente continua de valor **E** y la resistencia **r** que puede ser considerada la resistencia interna del generador.

El de la derecha identificado con las letras a y b constituido por la resistencia de valor **R**.

Para la resolución de este circuito consideraremos los dos dipolos como independientes y realizaremos la gráfica **V-A** para cada uno de ellos en un mismo par de ejes cartesianos. Se debe tener la precaución de trabajar con las mismas escalas para cada dipolo.

Consideremos en primer lugar el dipolo de la izquierda, su ecuación **V-A** es: $v_{AB} = E - r I$

Para su gráfica tomamos dos puntos, pueden ser los definidos previamente: De vacío y de cortocircuito.

En segundo lugar analicemos el dipolo de la derecha que es una resistencia y su característica es: $v_{ab} = R * i$

Al superponer las dos gráficas, tendremos la solución en el punto de intersección de las mismas, es decir se obtienen las variables **v** e **i** que se deseaban hallar.

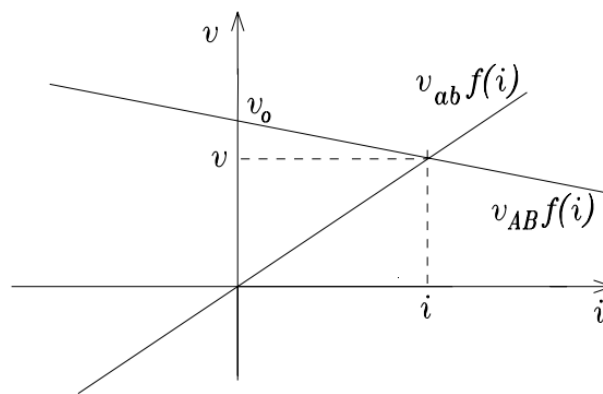


Figura 2-10

La diferencia $v_0 - v$ da la caída de tensión en la resistencia interna de la fuente. Se deja como ejercitación al lector la resolución de este problema cuando se toma la corriente **i** con sentido contrario. Verificar que el resultado no cambia.

2.2.4. Dipolos equivalentes

Se dice que dos o más dipolos son equivalentes cuando aun cuando se encuentran conformados por diferentes, todos ellos poseen la misma característica volt-amper. En dipolos lineales esto puede resumirse a que dos dipolos son equivalentes cuando estos comparten el punto de vacío y de cortocircuito. Es decir:

$$I_{cc}(\text{Dipolo 1}) = I_{cc}(\text{Dipolo 2})$$

$$V_0(\text{Dipolo 1}) = V_0(\text{Dipolo 2})$$

Esta particularidad permite introducir lo que se denomina como equivalencia de fuentes. Esta equivalencia dice que un dipolo conformado por una fuente de tensión en serie con una resistencia posee un dipolo equivalente conformado por una fuente de corriente en paralelo con otra resistencia.

Para demostrar esto se plantan los siguientes circuitos

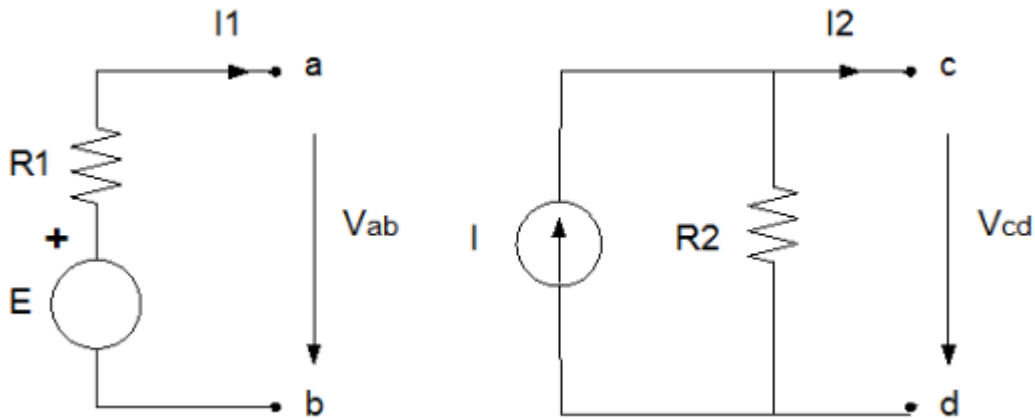


Figura 2-11

Siguiendo las premisas antes enunciadas para que estos dipolos sean equivalentes debe cumplirse:

Igualdad en corriente de cortocircuito

$$I_{cc1} = \frac{E}{R_1} \text{ y } I_{cc2} = I \Rightarrow \frac{E}{R_1} = I$$

Igualdad en tensión de vacío

$$V_{01} = E \text{ y } V_{02} = I * R_2 \Rightarrow E = I * R_2$$

Si se divide miembro a miembro se obtiene

$$\frac{E}{E/R_1} = \frac{IR_2}{I} \Rightarrow R_1 = R_2$$

Esto significa que la equivalencia se establece cuando la resistencia es igual en ambos dipolos al tiempo que el valor de la fuente de tensión o corriente puede calcularse con las expresiones anteriores.

Para analizar estas expresiones debe tener en cuenta que el circuito de la derecha al realizar un cortocircuito entre los bornes c y d se establece un camino de impedancia nula donde la corriente I de la fuente circula en su totalidad por dicho cortocircuito (es decir $I_2=I$) al tiempo que no circula nada por la resistencia. Por su parte al establecer la condición de vacío es decir cuando I_2 es igual a cero, toda la corriente de la fuente circula por la resistencia haciendo que la tensión de vacío es decir la tensión V_{cd} sea igual a la caída en dicha resistencia.

2.2.5. Dipolos alineales

Se denominan también dipolos anómalos y son aquellos en los que se verifica que $R = R(i) \neq cte$. En la práctica tenemos que la mayoría de los elementos verifican esta condición, pero las variaciones que se tienen de la variable en función de la corriente es en muchos casos despreciable por lo que puede tomarse como constante.

Como ejemplo de dipolos anómalos podemos citar un diodo, una descarga gaseosa, una lámpara de filamento etc.

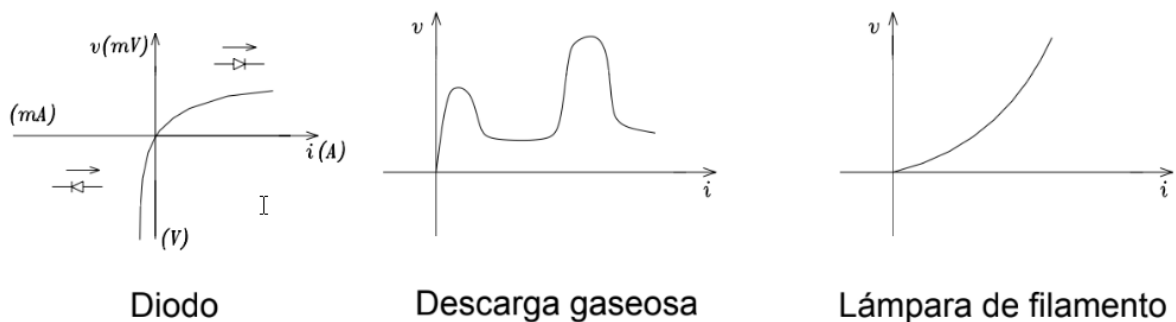


Figura 2-12

Los dipolos de la figura anterior también se ajustan a la siguiente clasificación

Diodo: Pasivo, asimétrico

Descarga gaseosa: Pasivo, simétrico

Lámpara de filamento: Pasivo, simétrico

En el diodo debe tenerse en cuenta que presenta características muy diferentes para ambos sentidos de circulación de la corriente, dado que la gráfica en el primer cuadrante corresponde al sentido de conexión directa, es decir permite el paso de la corriente. En este caso se tiene circulaciones importantes de corriente con caídas mínimas de tensión, en los ejes figuran como unidades Amperes y milivoltios. El tercer cuadrante corresponde al sentido inverso de circulación y las escalas de los ejes son Volts y mili ó microAmperes.

El cálculo y análisis de circuitos eléctricos con elementos alineales se efectúa en general con métodos gráfico-analíticos, basados en las leyes de Kirchhoff y de Ohm. Mediante programas de análisis numéricos los cálculos pueden efectuarse en forma analítica. Sin embargo a los efectos de conocer los métodos de resolución que son en síntesis los que aplica cualquier software, se detalla en forma muy somera algunos conceptos básicos.

i. Punto de trabajo y operación

Cuando un dipolo se encuentra inserto en un circuito, quedan definidas sobre él: un valor de tensión y corriente particulares, que resultan de la interacción del dipolo con el circuito. A este par de variables se las llama punto de trabajo o punto de operación. Este punto forma parte de la curva **V-A** del dipolo, por lo que puede ser

encontrado gráficamente como se presenta en la Figura 2-10. La determinación gráfica también es posible cuando se trata de dipolos no lineales.

Por ejemplo en circuito serie compuesto por una fuente de tensión ideal, una resistencia y un dipolo anómalo, donde la característica V-I de este último se presenta a continuación.

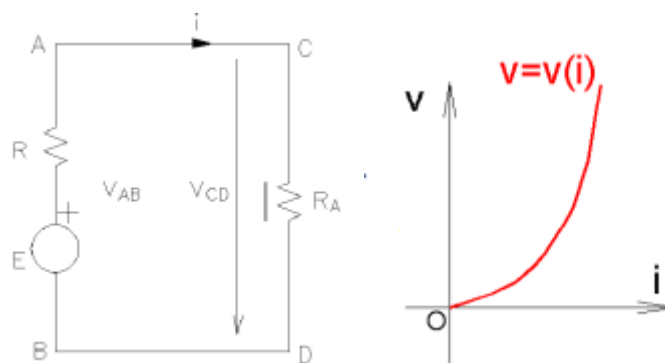


Figura 2-13

Si se desea encontrar el punto de operación del dipolo anómalo, es decir la corriente y la caída de tensión entre los terminales C-D debe aplicarse la segunda ley de Kirchoff como sigue.

$$V_{AB} = V_{CD} \Rightarrow E + R * i = V(i)$$

La resolución de la ecuación anterior puede realizarse gráficamente superponiendo la característica V-A del dipolo anómalo con la del dipolo conformado por la fuente de tensión y la resistencia (dipolo A-B). es decir un recta de pendiente R y ordenada al origen de valor E.

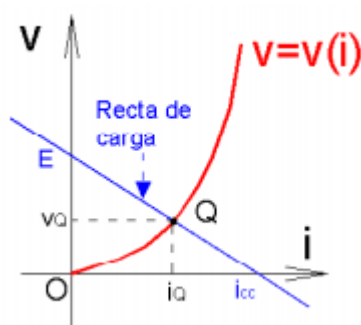


Figura 2-14

En la figura anterior Q representa el punto de trabajo del dipolo anómalo.

ii. Resistencia estática R_E

Es el cociente entre la tensión y la corriente en un punto de trabajo del dipolo, en el caso de dipolos alineales este valor cambia para cada punto de trabajo. En la Figura 2-15 se representa la gráfica $V - A$ y se muestra el cálculo de la resistencia estática R_E para el punto de trabajo A.

$$R_E|_A = \frac{(AB) \cdot m_u}{(ob) \cdot m_i} = \operatorname{tg}(\alpha) \frac{m_u}{m_i}$$

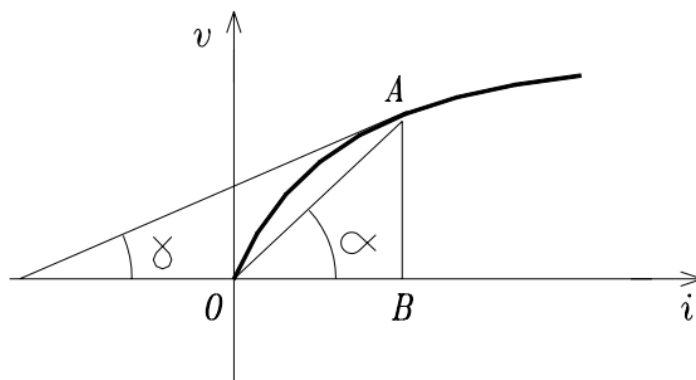


Figura 2-15

iii. Resistencia dinámica R_D

Está representada por la relación entre la variación incremental de la tensión y la variación de la corriente en un punto de trabajo del dipolo, en el caso de dipolos alineales este valor cambia para cada punto de trabajo. Matemáticamente se puede calcular mediante la derivada de la tensión respecto de la corriente calculada en el punto de trabajo. En la Figura 2-15 se representa la gráfica $V - A$ y se muestra el cálculo de la R_D para el punto de trabajo **A**, la cual está representada por la tangente trigonométrica del ángulo γ

$$R_D|_A = \left. \frac{dv(t)}{di(t)} \right|_A = \operatorname{tg}(\gamma) \frac{m_u}{m_i}$$

En un entorno del punto A la gráfica volt-ampere puede ser representada por la ecuación:

$$v = E + R * i$$

Que está representada gráficamente por la recta que es tangente a la curva en el punto A y que corresponde a un dipolo activo lineal constituido por:

Una fuente

$$E = V_{01}$$

y una resistencia

$$R = R_D = m_r * \operatorname{tg}(\alpha)$$

Siendo la ecuación del dipolo

$$v = V_{01} + R_D * i$$

Nota: es importante observar que la validez de la aproximación lineal se tiene para aquellos casos en que el error cometido no excede los admitidos. De esta manera podemos tener una aproximación de un dipolo anómalo por una serie de dipolos lineales, con validez en determinados intervalos, por lo que esta aproximación se llama segmento lineal.

2.2.6. Fuentes dependientes

Las fuentes dependientes son elementos que presentan las mismas características que las fuentes ideales pero donde el valor de misma no depende de si misma sino de otra variable. Es última puede corresponder al propio circuito donde se encuentra la fuente o a otro circuito.

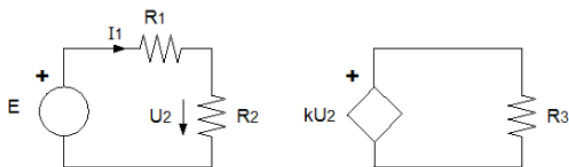
En general se pueden definir cuatro tipos de fuentes dependientes.

- Fuentes de tensión cuyo valor depende de otra tensión
- Fuentes de tensión cuyo valor depende de una corriente
- Fuentes de corriente que dependen de otra corriente
- Fuentes de corriente que dependen de una tensión

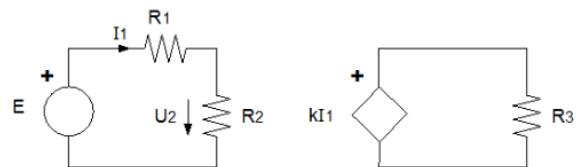
Las fuentes dependientes permiten representar la interacción entre dos partes un circuito o entre dos circuitos, donde dicha interacción no puede ser presentada en forma directa mediante otros elementos como resistencias, capacitores, etc. Este el caso por ejemplo de los bobinados de un transformador donde existe una vinculación entre ellos pero no eléctrica sino magnética. Otra posibilidad son los sistemas de control automáticos donde mediante la medición de una variable en un circuito se ejecuta una acción en otro, aquí la vinculación se realiza señales de comunicaciones.

Se presenta a continuación un ejemplo de cada tipo de fuente dependiente.

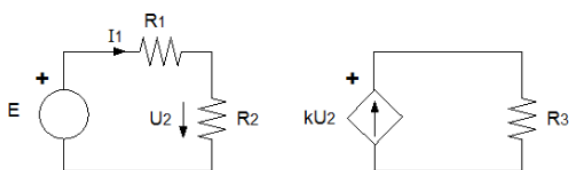
Fuente de tensión dependiente de una tensión



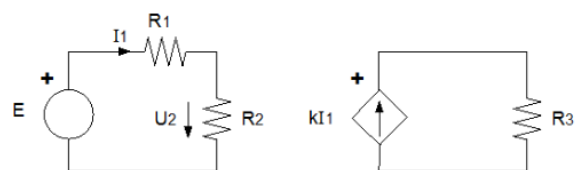
Fuente de tensión dependiente de una corriente



Fuente de corriente dependiente de una tensión



Fuente de corriente dependiente de una corriente



S

2.3. Ejercicios resueltos

Problema 1

Reducir los dipolos de la figura 1 a una rama con fuente única equivalente.

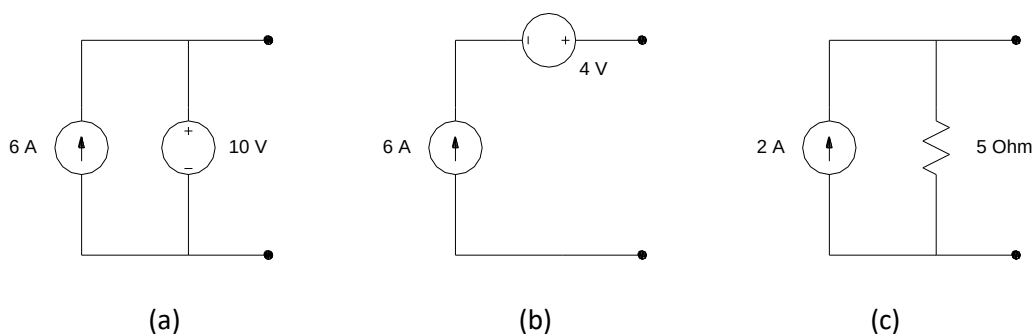
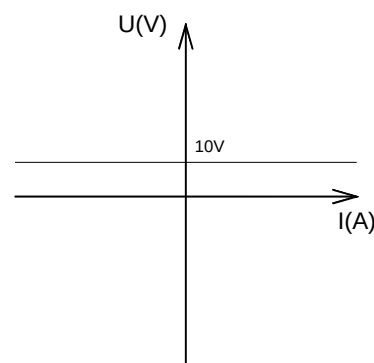


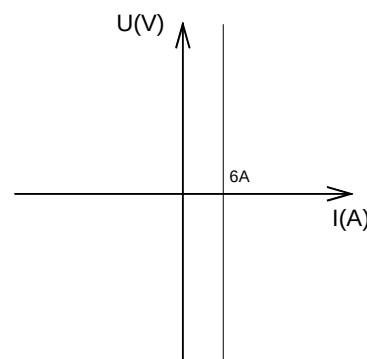
Figura 2-16

Resolución

- a) Al estar la fuente de tensión de 10 V en paralelo con la fuente de corriente de 5 A y por ser ambas ideales, la tensión en bornes es impuesta por la primera de ellas, es decir la fuente de tensión, mientras que la corriente puede ser cualquiera. Entonces la fuente equivalente al dipolo considerado es una fuente de tensión de 10 V. El dipolo resultante es el graficado en la figura 2 y su característica V-A será: $V = 10V$



- b) En la conexión en serie de fuentes de corriente y tensión la que domina es la fuente de corriente debido a que impone la circulación de corriente en el dipolo, mientras que la tensión entre sus bornes puede ser cualquiera. Entonces la fuente equivalente al dipolo considerado es una fuente de corriente de 6 A. El dipolo resultante es el graficado en la figura 3 y su característica V - A será: $I = 6 A$



- c) La ecuación V - A del dipolo puede ser obtenida por la aplicación de la LCK y resulta:

$$I = \frac{U}{5\Omega} - 2A \Rightarrow U = 5I + 10$$

Esta última ecuación coincide con la de una fuente de tensión de 10 V en serie con una resistencia de 5 Ohm, según se indica en la figura 4. La característica V - A del dipolo es la mostrada en la siguiente figura.

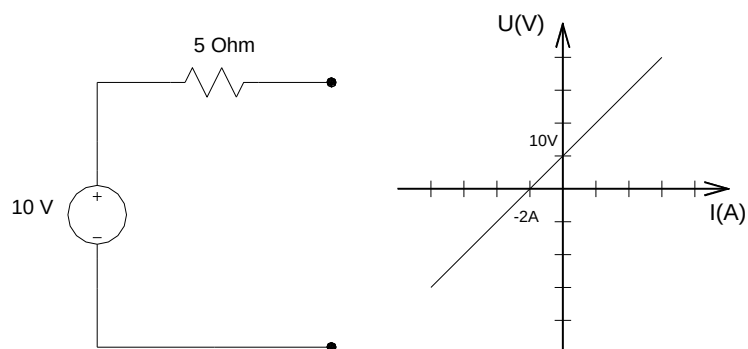


Figura 2-17

Problema 2

¿Es válida la conexión de la siguiente figura? Explicar por qué.

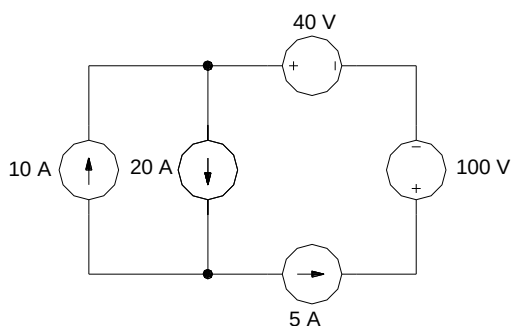


Figura 2-18

Resolución

No es válida la conexión de la figura 6 porque no se cumple la *LKI* (*Ley de Kirchhoff de corriente*) en el nudo B.

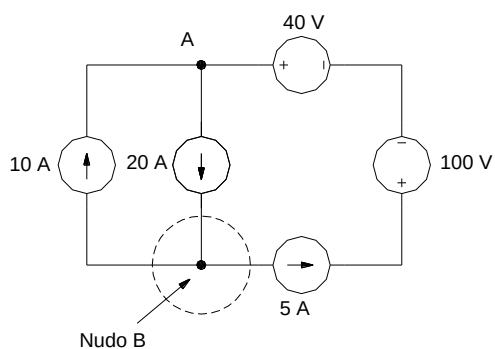


Figura 2-19

Problema 3

El siguiente circuito puede ser considerado como un dipolo si se lo mira desde los bornes de la derecha. Encontrar otro dipolo que se equivalente a este pero que esté constituido por una fuente de tensión y una resistencia en serie.

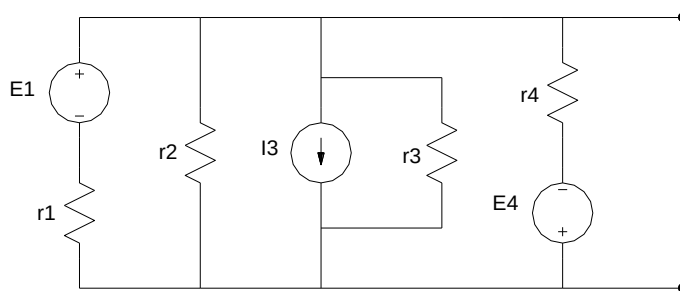


Figura 2-20

Resolución

Primero se transforman las fuentes de tensión en fuentes de corrientes, de manera de obtener un paralelo de fuentes de corrientes y resistencias

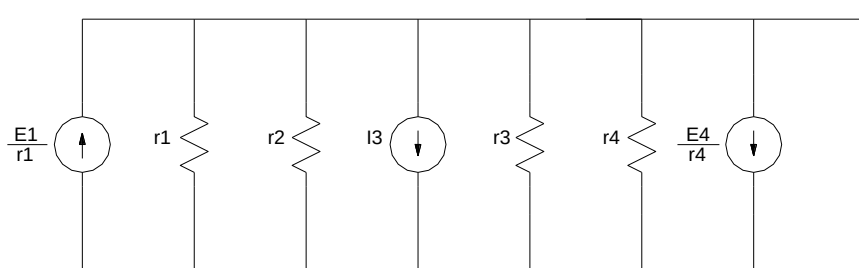
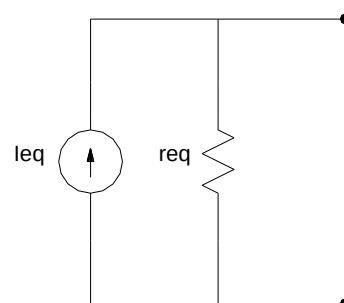


Figura 2-21

Ahora puedo sumar las fuentes de corriente (cada una con su signo teniendo en cuenta como positivo el sentido de referencia de la fuente equivalente) por estar conectados en paralelo, también se puede realizar el paralelo de las resistencias, o bien sumar sus conductancias, obteniéndose:



$$I_{eq} = \frac{E_1}{r_1} - I_3 - \frac{E_4}{r_4} \quad r_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}}$$

Finalmente se convierte el dipolo a una fuente de tensión en serie con una resistencia

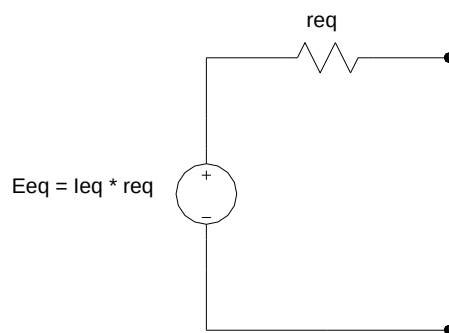


Figura 2-22

Problema 4

Dibujar la relación $V - A$ de los siguientes dipolos:

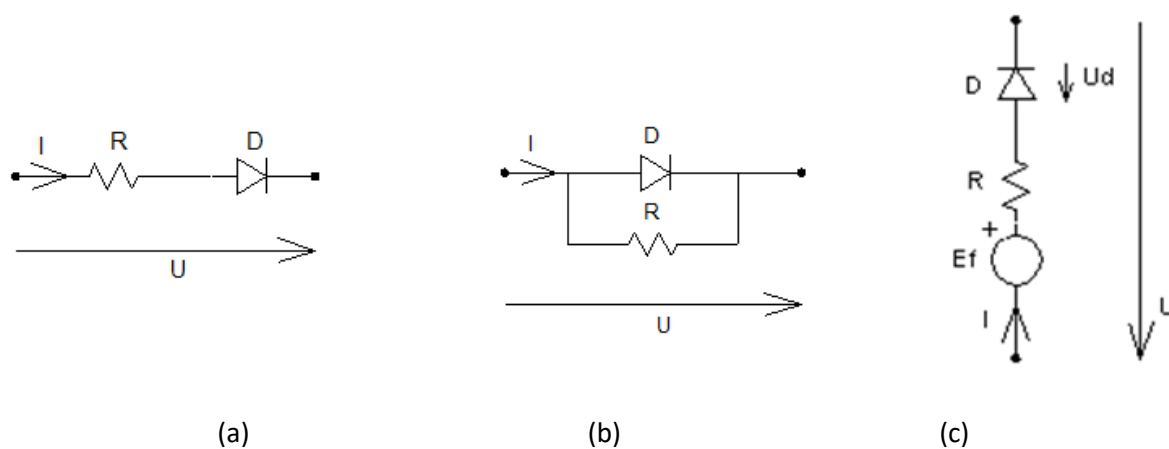


Figura 2-23

Nota: Considerar al diodo como ideal, es decir:

- En el sentido de conducción la caída de tensión en el es cero, se comporta como un cortocircuito.
- En el sentido opuesto se comporta como un circuito abierto.

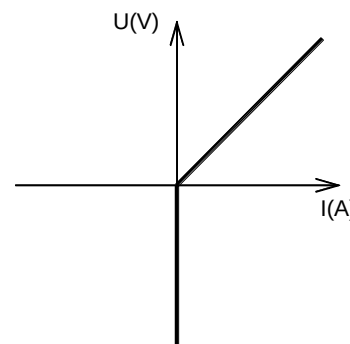
En todos los casos deben analizarse las dos condiciones posibles $U > 0$ y $U < 0$.

Resolución

(a) Para:

$U > 0$ el diodo se comporta como un cortocircuito y la corriente resulta $I = \frac{U}{R}$

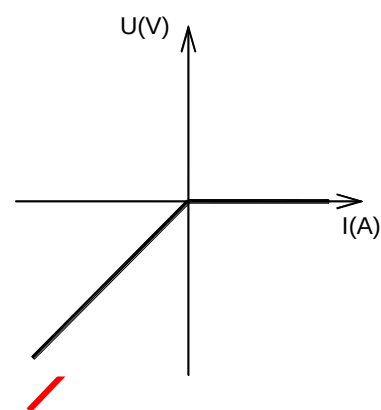
$U < 0$ el diodo se comporta como un circuito abierto, lo que implica $I \equiv 0$



(b) Para:

$U > 0$ el diodo se comporta como un cortocircuito y la corriente resulta indeterminada, dependiendo entonces del circuito externo.

$U < 0$ el diodo se comporta como un circuito abierto, lo que implica que la corriente solo puede circular por la resistencia resultando $I = \frac{U}{R}$



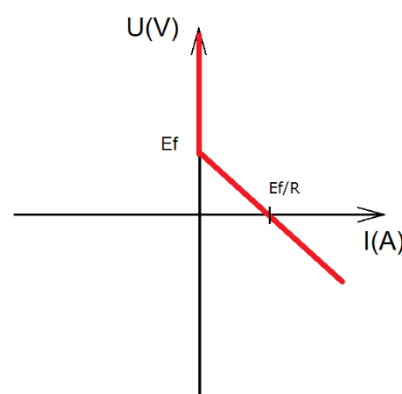
- (c) En este caso debe considerarse que el diodo no conduce cuando esta polarizado en sentido inverso, es decir para tensiones $U_d > 0$ (con el sentido considerado positivo), por lo que es importante la determinación del valor de la tensión U para el cual la caída en el diodo es cero y que corresponde a una corriente cero. Se tiene entonces la siguiente ecuación

$$U = U_d - I * R + E_f$$

Cuando simultáneamente $U_d = 0$ e $I = 0 \Rightarrow U = E_f$

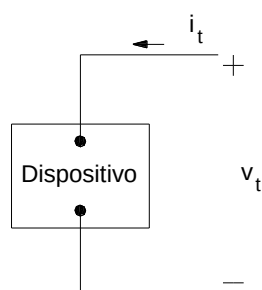
Por lo tanto para:

- $U < E_f$ La pendiente de la recta es R
- $U > E_f$ Se tiene una recta que coincide con el eje de tensiones



Problema 5

Se midió el voltaje y la corriente en los terminales del dispositivo de la figura y se obtuvieron los resultados volcados en la tabla.



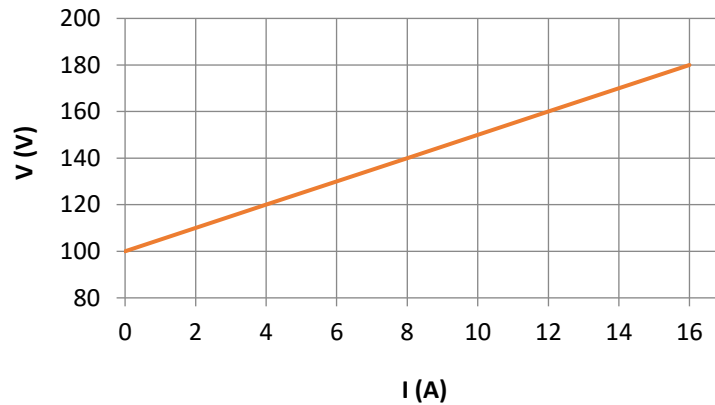
v_t (V)	i_t (A)
100	0
120	4
140	8
160	12
180	16

- (a) Construya un modelo de circuito para este dispositivo, utilizando una fuente de voltaje ideal y una resistencia.

- (b) Utilice el modelo para predecir la cantidad de potencia que suministrara el dispositivo a una resistencia de 20 Ohm.

Resolución

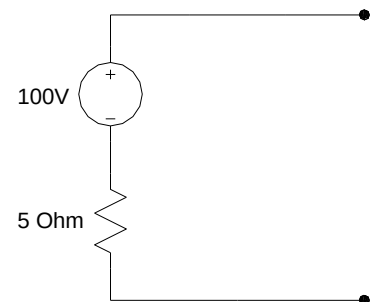
(a) .



En la figura se puede ver que cuando no circula corriente por el dispositivo la tensión entre bornes es de 100 V, es decir que la fuente de voltaje ideal del modelo del circuito es de 100 V.

Para modelar la resistencia se calcula la pendiente de la recta y este será el valor de la resistencia. Para esto se toma un intervalo del eje tensión y para este su equivalente en el de corriente, don el cociente entre los mismo es la pendiente de la recta.

$$\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{180V - 100V}{16A - 0A} = 5 \Rightarrow R = 5\Omega$$



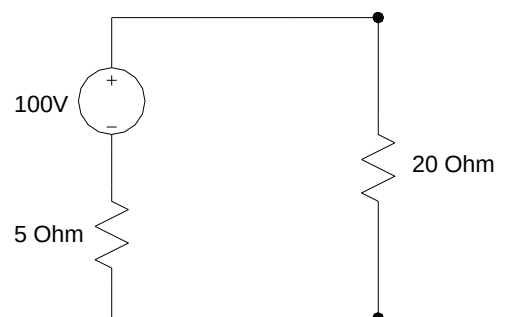
(b) .

Si se le conecta una resistencia de 20 Ohm al dispositivo el circuito queda como se indica en la figura

Dónde:

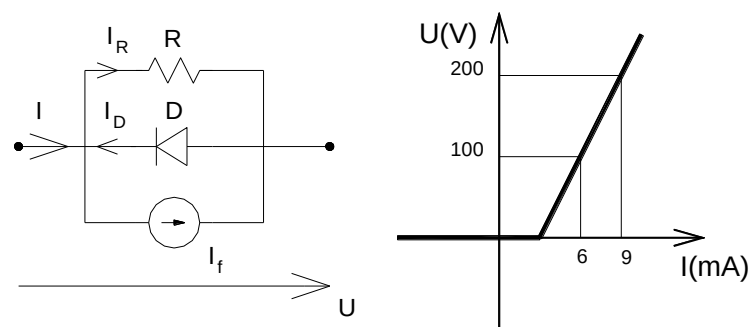
$$I = \frac{100V}{20\Omega + 5\Omega} = 4A$$

$$P_R = I^2 * R = 4^2 * 20 = 320W$$



Problema 6

Encontrar los parámetros del modelo seccionalmente lineal para el esquema propuesto en la figura siguiente, de manera que represente la característica $V - A$ indicada.



Resolución

El punto en que la recta corta al eje de corriente se tiene para $I = 3 \text{ mA}$, para valores $I < 3 \text{ mA}$, la tensión es idénticamente nula.

En el intervalo $-\infty < I < 3 \text{ mA}$ el diodo se comportará como un cortocircuito y la corriente I solo dependerá del circuito externo, en el mismo se tendrá la corriente por el diodo será: $I_D = I_f - I$ ya que la corriente por la resistencia será cero por ser cero la caída de tensión U .

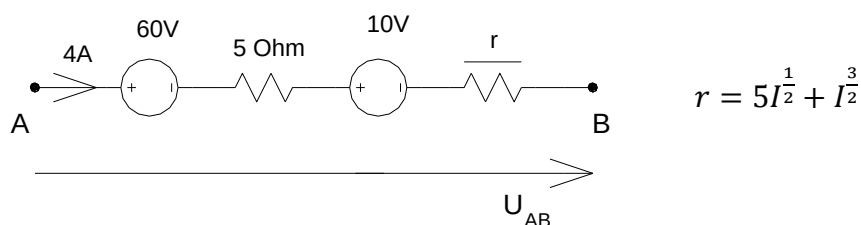
Cuando se llegue al valor $I_f = I$ se habrá arribado a la condición límite, ya que la corriente por el diodo no puede ser negativa (diodo ideal). Como conclusión se tiene que $I_f = 3 \text{ mA}$.

Para una corriente $I_f > 3 \text{ mA}$ circulará una corriente por la resistencia $I_R = I - I_f$ (por el diodo dejo de circular corriente, polarización inversa).

Se observa que la tensión varía con una pendiente de $33,3 \text{ k}\Omega$, por lo tanto el valor de la resistencia es de $33,3 \text{ k}\Omega$.

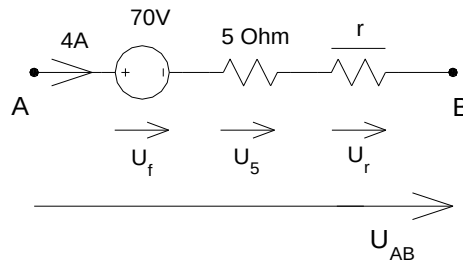
Problema 7

Encontrar la d.d.p. entre los nudos A y B de la figura. Determinar la resistencia estática y dinámica en el punto de trabajo del dipolo anómalo.



Resolución

La primera simplificación que podemos realizar es sumar las fuentes de tensión, para obtener el esquema indicado en la figura 24.



La caída de tensión total está dada por la suma de las caídas de tensión en los tres elementos, es decir que aplicamos la LTK:

$$U_{AB} = U_f + U_5 + U_r$$

Dónde:

U_f : Es la caída de tensión en la fuente.

U_5 : Es la caída de tensión en la resistencia de 5 Ohm y U_r es la caída de tensión en el elemento anómalo.

Resultando:

$$U_5 = 5\Omega \cdot 4A = 20V$$

$$U_r = I \cdot R = I(5\sqrt{I} + \sqrt{I^3}) = 4(5\sqrt{4} + \sqrt{4^3}) = 72V$$

Por lo tanto:

$$U_{AB} = 70V + 20V + 72V = 162V$$

Para el dipolo anómalo

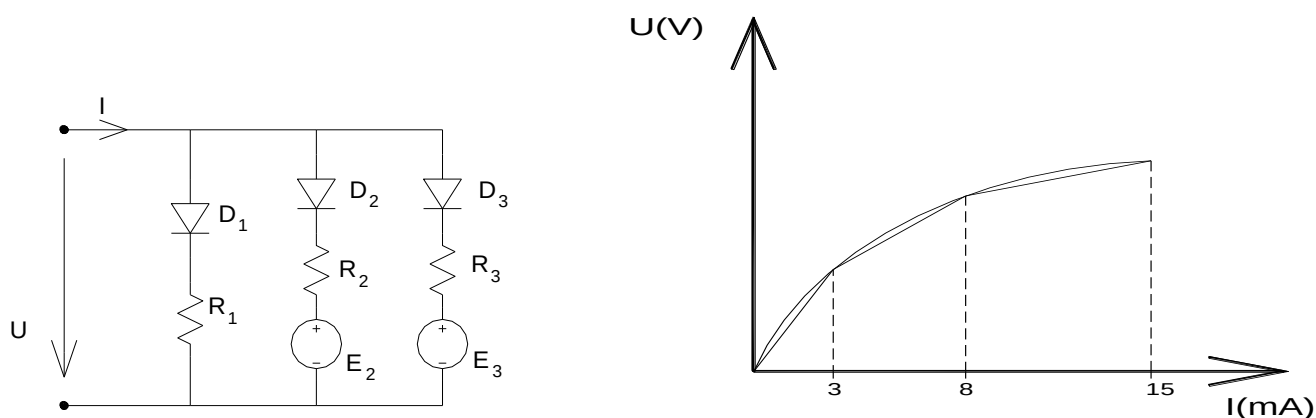
$$R_{est} = \frac{V}{I} = \frac{72V}{4A} = 18\Omega$$

$$R_{din} = \left. \frac{dV}{dI} \right| = \frac{d[I \cdot (5I^{\frac{1}{2}} + I^{\frac{3}{2}})]}{dI} = \frac{d[5I^{\frac{3}{2}} + I^{\frac{5}{2}}]}{dI} = 5 \cdot \frac{3}{2}I^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}I^{\frac{3}{2}}$$

$$R_{din} = \frac{15}{2}\sqrt{4} + \frac{5}{2}\sqrt{4^3} = 15 + 20 = 35\Omega$$

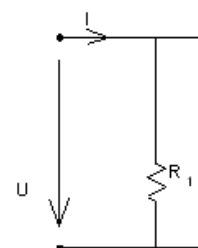
Problema 8

Determinar los parámetros del modelo seccionalmente lineal propuesto que aproxime la característica V – A del diodo cuya ecuación es: $I = 10^{-5} U^{\frac{3}{2}}$.



Resolución

Para $0 < U < E_2 < E_3$ observamos que solo conducirá la rama del diodo D_1 , ya que en las otras existen fuentes que provocan una polarización inversa de los diodos y por lo tanto impedirán la circulación de corriente por ellas. En la siguiente gráfica se muestra el circuito equivalente en tal condición de U .



Para la determinación de la resistencia R_1 calculamos la pendiente del primer segmento, la cual se obtiene a partir de la ecuación de la recta que se tiene al realizar la aproximación segmento-lineal.

$$I = 10^{-5} U^{3/2} \Rightarrow U = [10^5 I]^{2/3}$$

Resultando

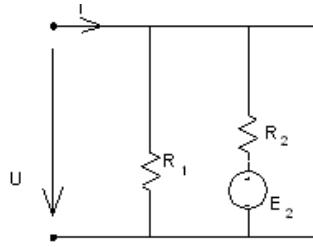
$$R_1 = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \tan \alpha_1 = \frac{[10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}]^{2/3}}{3 \cdot 10^{-3}} = 14,9 \cdot 10^3 \text{ k}\Omega$$

Donde α_1 es el ángulo de la primera recta, por lo tanto $R_1 = 14,9 \text{ k}\Omega$.

Esta pendiente se mantiene hasta que la caída en R_1 supera la tensión de fuente E_2 , en este momento comienza a conducir D_2 y el cambio de pendiente se debe producir para $I = 3 \text{ mA}$, siendo para esta condición el valor de tensión el que se calcula a continuación:

$$E_2 = 3 \cdot 10^{-3} (\text{A}) \cdot R_1 = 3 \cdot 10^{-3} (\text{A}) \cdot 14,9 (\text{k}\Omega) \cdot 10^3 = 44,8 \text{ V}$$

Ahora, para $E_2 < U < E_3$ el circuito equivalente es el que se observa en la siguiente figura:



Y la resistencia equivalente que corresponde al modelo seccionalmente lineal es:

$$R_{eq2} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\left[10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}\right]^{2/3} - \left[10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}\right]^{2/3}}{8 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}} = \frac{86,17 - 44,81}{5 \cdot 10^{-3}} = 8,270 \text{ k}\Omega$$

Donde α_2 es el ángulo de la segunda recta, siendo:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = R_1 \cdot R_2$$

Resultando:

$$R_2 = \frac{R_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{R_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} = 18,6 \text{ k}\Omega$$

Cuando la corriente alcanza los 8 mA, la tensión vale

$$U = [10^5 \cdot 8]^{2/3} = 86,2 \text{ V}$$

De modo que la tensión de la fuente 3 será:

$$E_3 = 86,2 \text{ V}$$

Pues a partir de allí comienza a conducir el diodo D3

De manera similar al caso anterior se obtiene la resistencia de la última rama.

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{[10^5 \cdot 15 \cdot 10^{-3}]^{2/3} - [10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}]^{2/3}}{15 \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-3}} = 6,41 \text{ k}\Omega$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{R_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{R_2} + \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{R_3} = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{R_3} = 1 - \operatorname{tg} \alpha_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$R_3 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \alpha_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = 28,5 \text{ K}\Omega$$

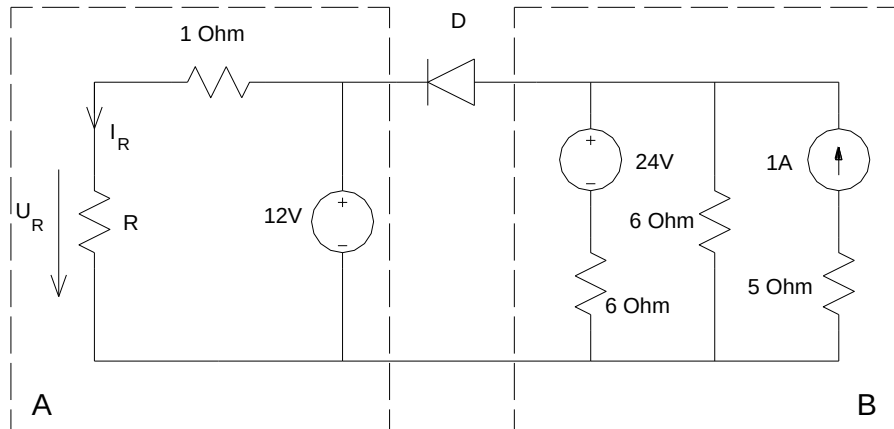
Problema 9

Siendo D un diodo ideal y R un dipolo anómalo cuya característica $V - A$ es

$$U_R = I_R^2 \quad (I_R > 0)$$

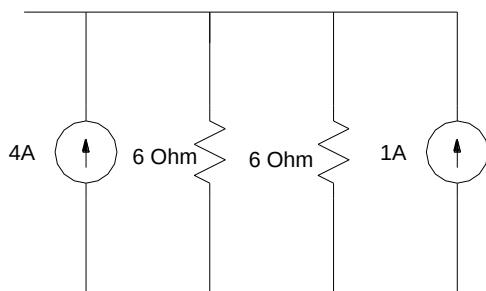
$$U_R = 100 I_R \quad (I_R < 0)$$

- Hallar el equivalente del dipolo A. Ídem del dipolo B.
- Determinar si el diodo conduce. En caso afirmativo, calcular su corriente.
- Calcular I_R e I_F .

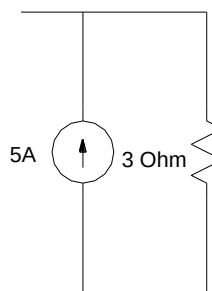


Resolución

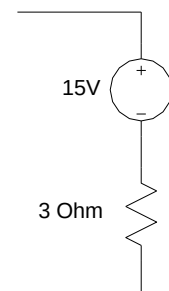
- El dipolo A se puede representar por el equivalente constituido por una fuente de 12 V, ya que la misma es ideal y está en paralelo con los bornes de salida. Para el dipolo B se realizan transformaciones de fuentes.



(a)



(b)



(c)

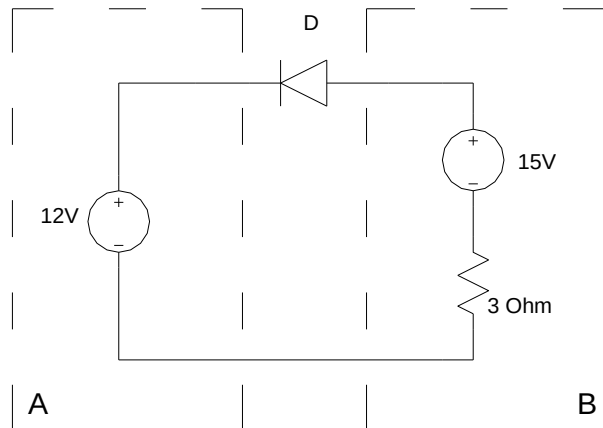
Para la obtención del circuito de la figura (a) se realizaron las siguientes equivalencias:

- Transformación de la fuente de tensión en serie con la resistencia en una fuente de corriente con una resistencia en paralelo.
- Sustitución de la rama que contiene la fuente de corriente en serie con la resistencia en una fuente de corriente.

Para la obtención del circuito de la figura (b) se efectuó la suma de las dos fuentes de corriente y el paralelo de las dos resistencias de 6 Ohm.

En el circuito de la figura (c) se efectuó la transformación de fuente de corriente en fuente de tensión, siendo este el equivalente del dipolo B.

- b) Para la determinación de la corriente que circula por el diodo se debe realizar el circuito con los dipolos equivalentes.



Se observa que el diodo está polarizado en sentido directo y para el cálculo de la corriente que circula por él se aplica la LTK, para lo cual el diodo es considerado un cortocircuito.

Para una corriente supuesta de derecha a izquierda en la rama superior, la ecuación siguiente permite hallar su valor.

$$I = \frac{(15 - 12)V}{3\Omega} = 1A$$

- c) En la rama del dipolo anómalo deben caer 12 V

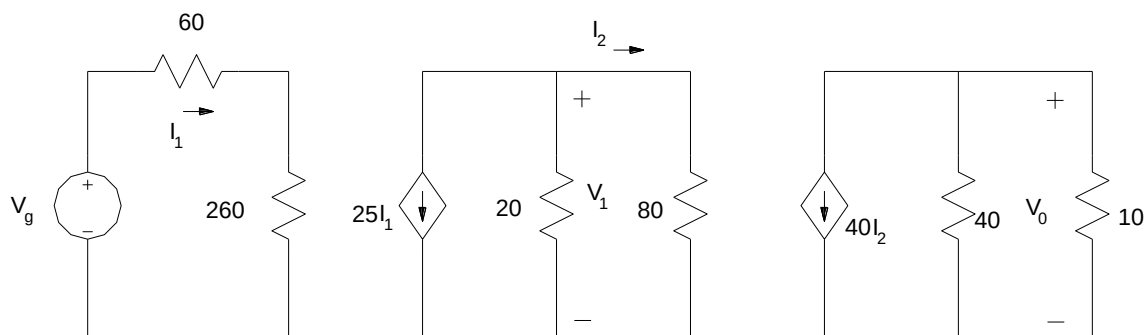
$$\Rightarrow I_R^2 + I_R = 12V \quad \Rightarrow \quad I_R^2 + I_R - 12 = 0$$

$$I_R = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 + \sqrt{49}}{2} = 4A$$

$$I_F = I_R - I_D = 4A - 1A = 3A$$

Problema 10

Encuentre v_1 y v_g en el circuito de la figura, donde v_0 es igual a 5 V. (Sugerencia: Comience en el extremo derecho del circuito y trabaje hacia v_g).

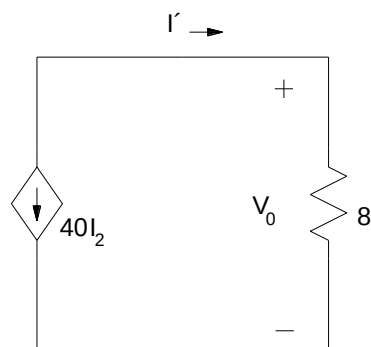


Resolución

En primer lugar se sabe que la caída de tensión en la resistencia de 10 Ohm es de 5V y esta será también la caída de tensión en la resistencia de 40 Ohm por lo tanto se calcula el paralelo de ambas resistencia para encontrar el valor de la fuente dependiente de corriente:

$$R_{10\Omega // 40\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{10}} = 8\Omega$$

$$I' = \frac{v_0}{8\Omega} = \frac{5V}{8\Omega} = 0,625A$$



Entonces:

$$I' = -40I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{I'}{-40} = \frac{0,625}{-40} = -0,015625A$$

$$v_{80\Omega} = I_2 \cdot 80\Omega$$

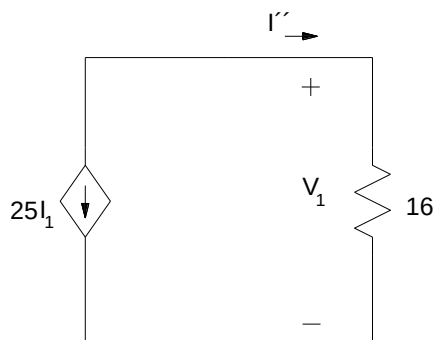
$$v_{80\Omega} = -0,015625 A \cdot 80\Omega = -1,25V$$

$$v_1 = v_{80\Omega} = -1,25 V$$

Trabajando nuevamente como se hizo anteriormente calculo el paralelo entre las resistencias de 20 Ohm y 80 Ohm para encontrar el valor de la fuente dependiente de corriente.

$$R_{20\Omega//80\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{80}} = 16\Omega$$

$$I'' = \frac{v_1}{16\Omega} = \frac{-1,25}{16} = -0,078125A$$



Entonces:

$$I'' = -25I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{I''}{-25} = \frac{-0,078125}{-25} = 3,125 \times 10^{-3} A$$

$$I_1 = \frac{v_g}{60\Omega + 260\Omega} = \frac{v_g}{320\Omega} \Rightarrow v_g = I_1 \cdot 320\Omega = 1V$$

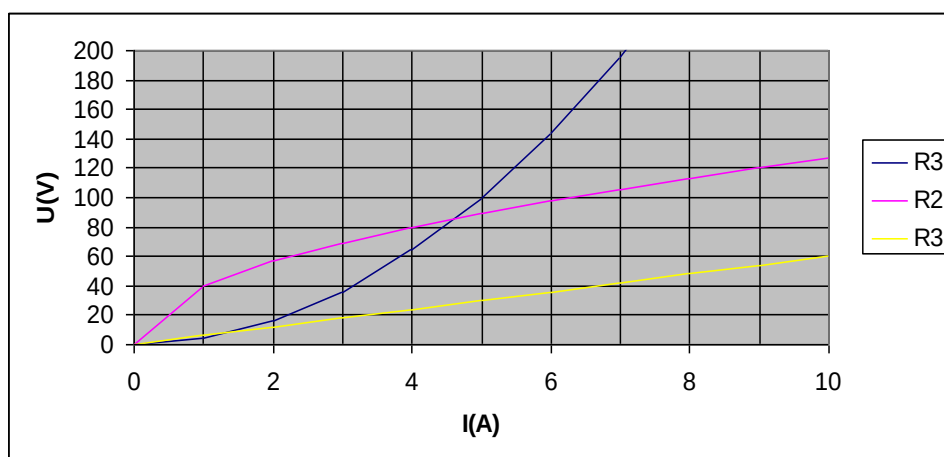
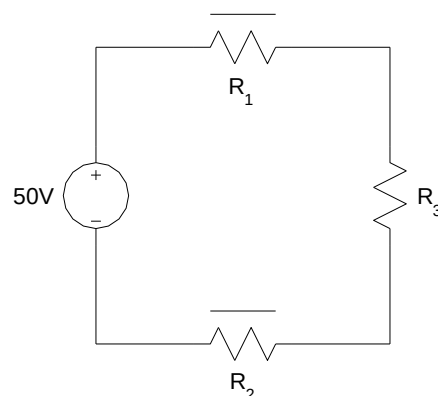
Problema 11

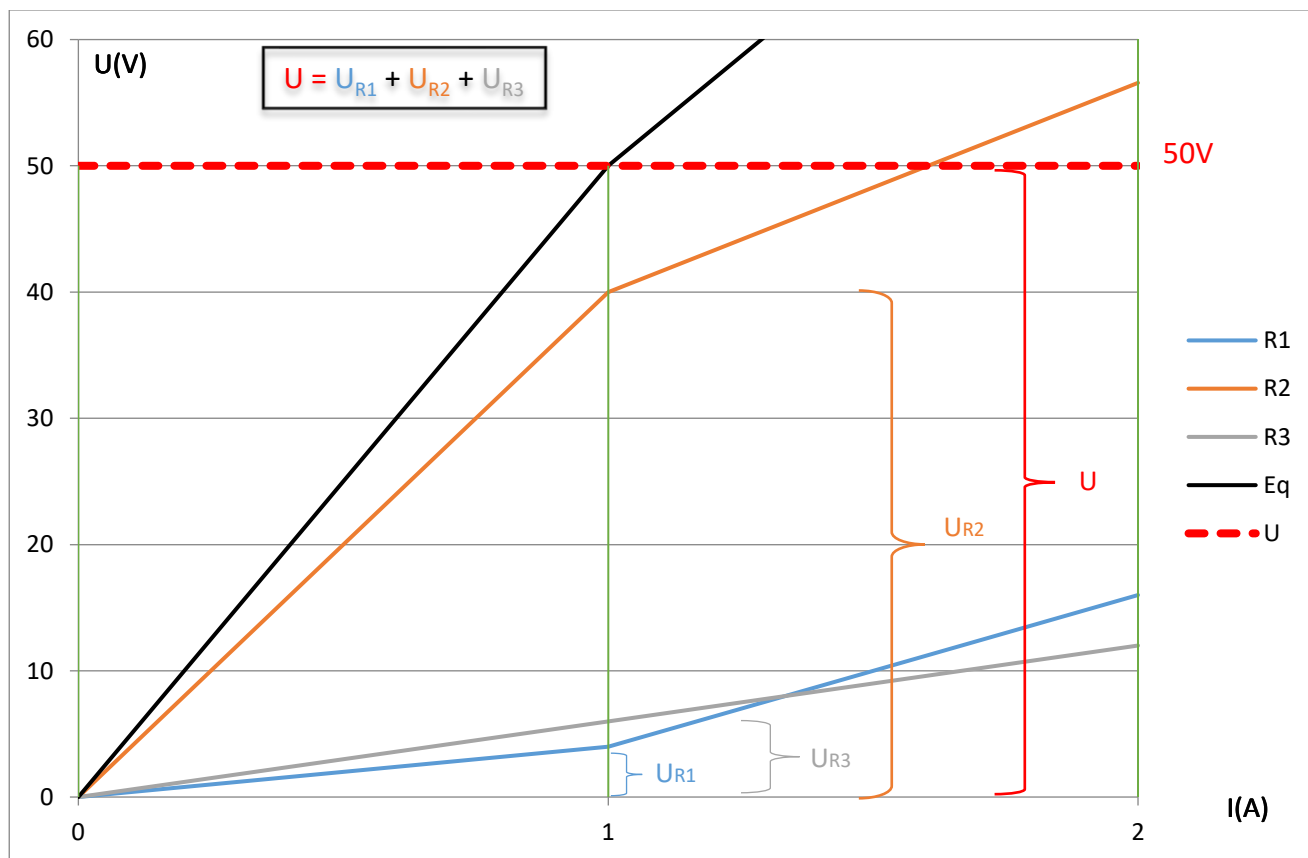
Resolver gráficamente el circuito con elementos anómalos simétricos de la figura

$$\text{En } R_1: U = K_1 I^2 \quad (I \geq 0)$$

$$\text{En } R_2: U = K_2 \sqrt{I} \quad (I \geq 0)$$

$$\text{En } R_3: U = K_3 I \quad (I \geq 0)$$

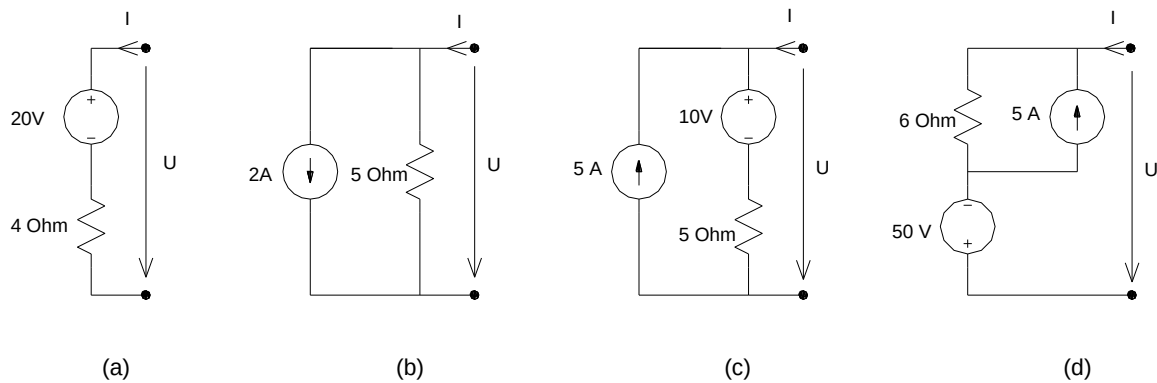




2.4. Ejercicios propuestos

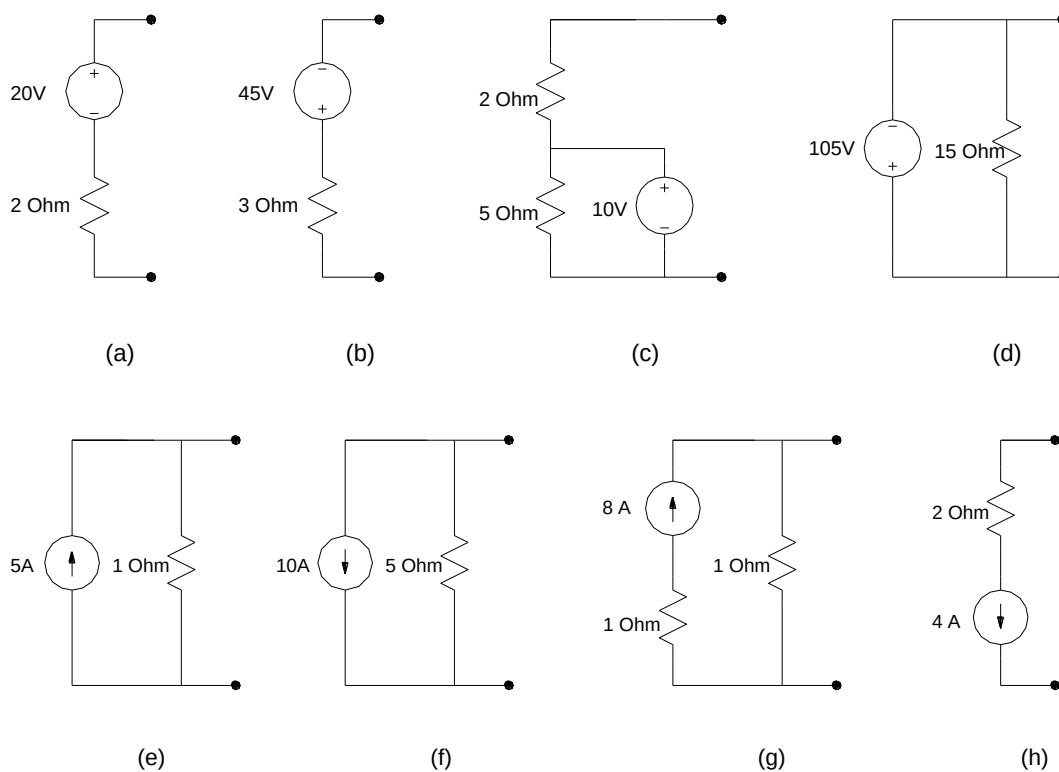
Problema 12

Obtener la ecuación $V - A$ de los siguientes dipolos



Problema 13

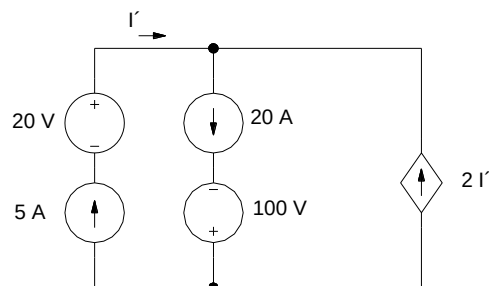
Convertir los dipolos con fuentes de tensión en equivalentes con fuentes de corrientes y viceversa.



Problema 14

Si la conexión de la figura es válida, encuentre la potencia total generada en el circuito.

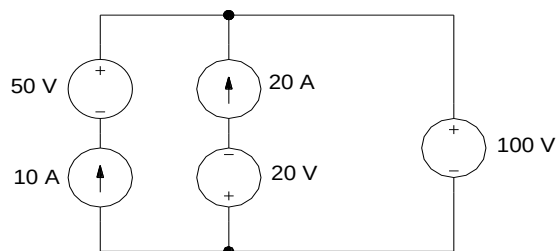
Si la conexión no es válida, explique por qué.



Problema 15

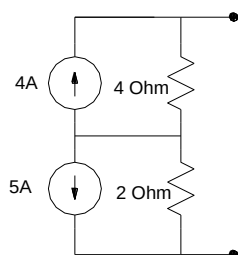
Si la conexión de la figura es válida, encuentre la potencia total generada en el circuito.

Si no es válida, explique por qué.

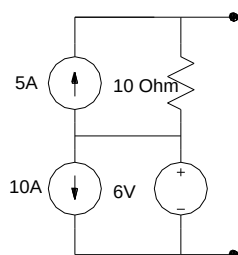


Problema 16

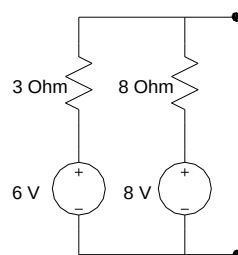
Simplificar en todo lo posible los dipolos y escribir la relación $V - A$.



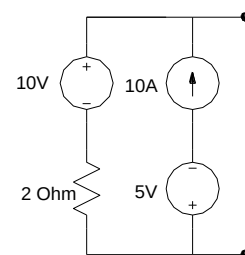
(a)



(b)



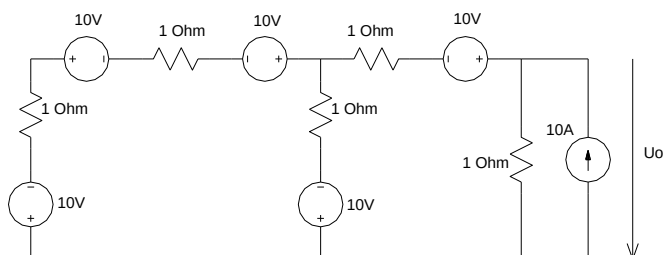
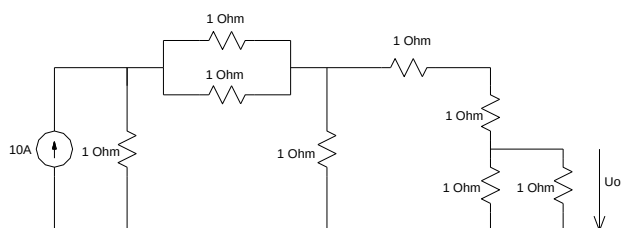
(c)



(d)

Problema 17

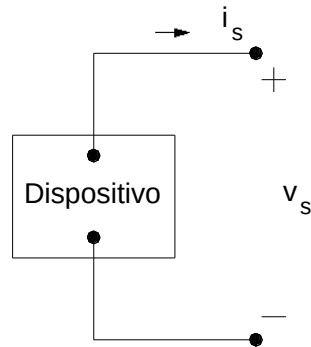
Calcular el valor de U_o en los siguientes circuitos



Problema 18

La siguiente tabla indica la relación existente entre el voltaje y la corriente terminales del dispositivo

v_s (V) (Volts)	i_s (A) (Amperes)
24	0
22	8
20	16
18	24
15	32
10	40
0	48

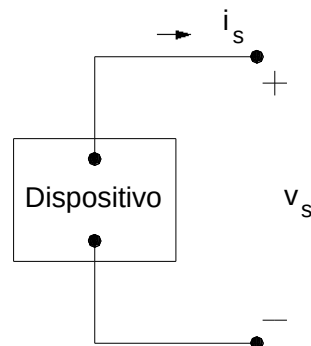


- Represente gráficamente v_s en función de i_s .
- Construya un modelo de circuito para la fuente práctica que sea válido para $0 \leq i_s \leq 24$ A. (Use una fuente de voltaje ideal en serie con una resistencia ideal).
- Emplee su modelo de circuito para predecir la corriente suministrada a una resistencia de 1 Ohm conectada a los terminales de la fuente práctica.
- Utilice su modelo de circuito para predecir la corriente suministrada a un cortocircuito conectado a los terminales de la fuente práctica.
- ¿Cuál es la corriente real en el cortocircuito?
- Explique por qué son distintas las respuestas de las partes (d) y (e).

Problema 19

La siguiente tabla indica la relación existente entre el voltaje y la corriente terminales del dispositivo

i_s (mA)	v_s (V)
20	0
17,5	25
15	50
12,5	75
9	100
4	125
0	140



- Represente gráficamente i_s en función de v_s .
- Construya un modelo de circuito para esta fuente de corriente que sea válido para $0 \leq v_s \leq 75$ V. (Use una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia ideal).
- Use su modelo de circuito para predecir la corriente suministrada a una resistencia de 2,5 KOhm.
- Emplee su modelo de circuito para predecir el voltaje en circuito abierto de la fuente de corriente.
- ¿Cuál es el voltaje real en circuito abierto?

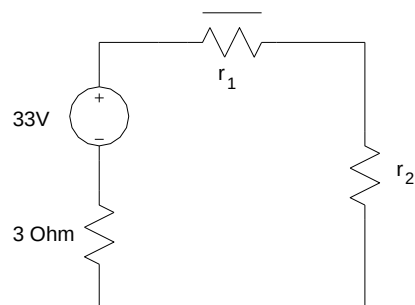
f) Explique por qué son distintas sus repuestas de las partes (d) y (e).

Problema 20

Encontrar gráfica y analíticamente la corriente que circula en el circuito de la figura

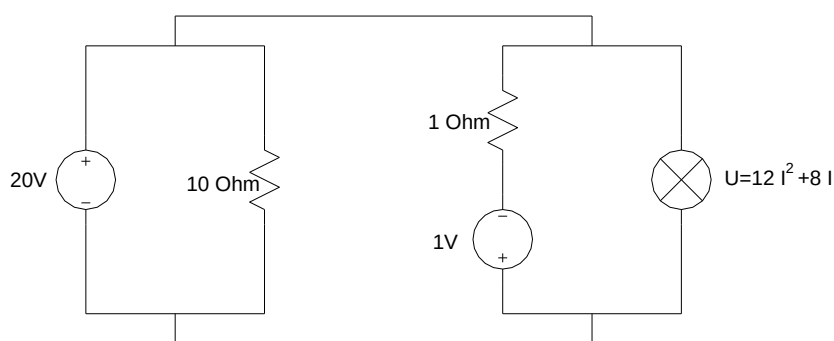
En r_1 : $U = I^2 + 2I$

En r_2 : $I = \frac{1}{3}U$



Problema 21

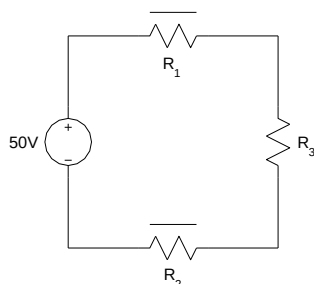
Hallar todas las corrientes en el circuito de la figura



Problema 22

Resolver gráficamente el circuito con elementos anómalos simétricos de la figura

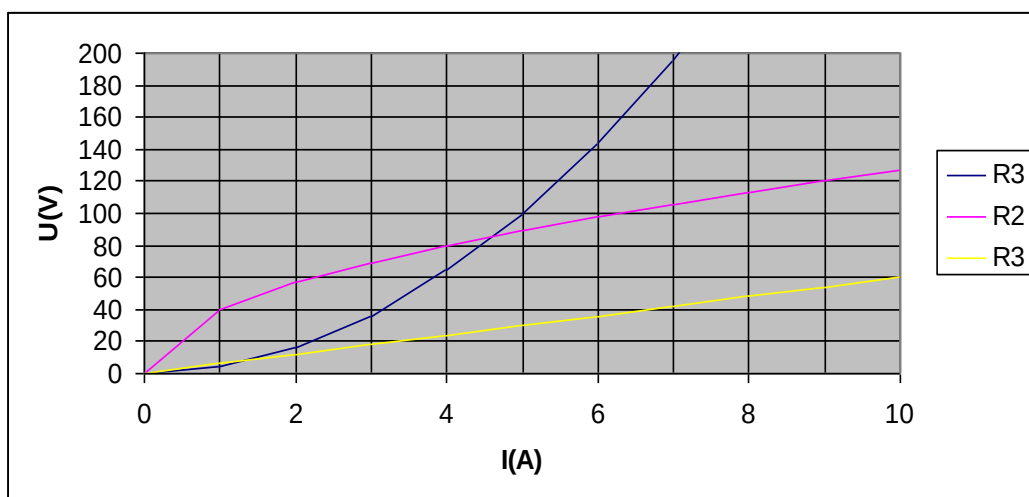
Determinado el punto de trabajo, efectuar una aproximación segmento lineal de cada elemento.



$$R_1 / U = K_1 I^2 \quad (I \geq 0)$$

$$R_2 / U = K_2 \sqrt{I} \quad (I \geq 0)$$

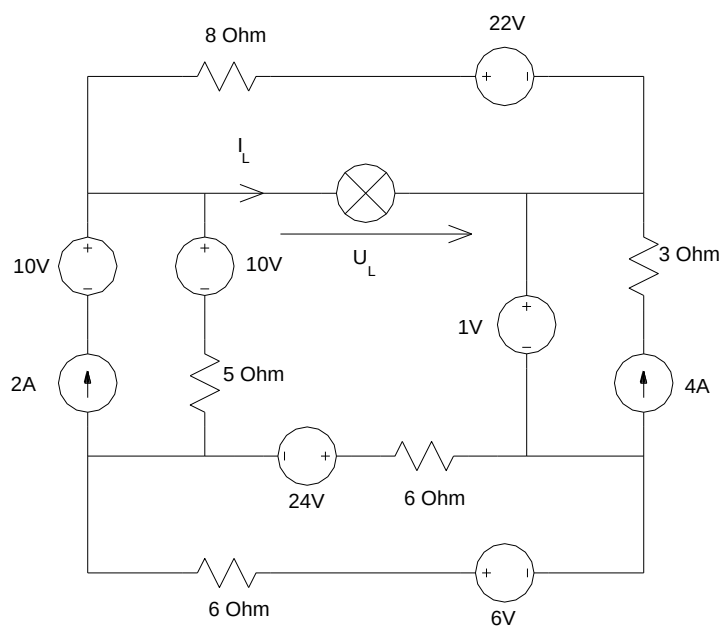
$$R_3 / U = K_3 I \quad (I \geq 0)$$



Problema 23

Sea L un dipolo anómalo simétrico cuya característica $V - A$ para $I_L > 0$ es $U_L = I_L^2 + 2I_L$.

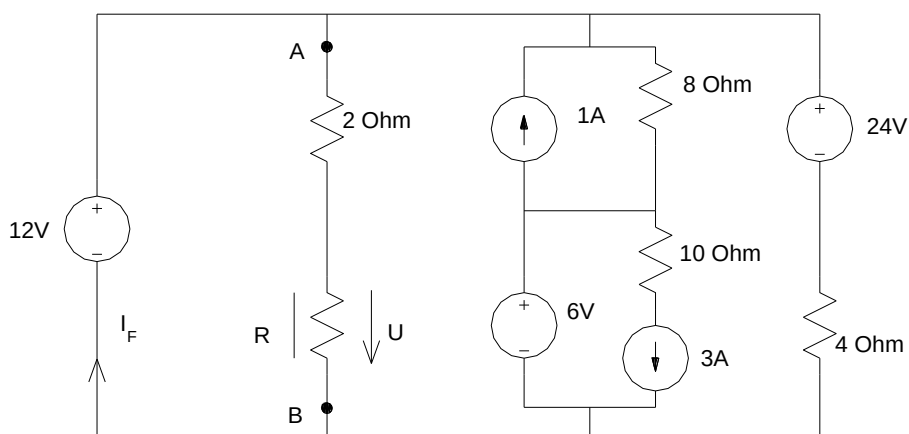
- Determinar el punto de trabajo del dipolo L (U_L, I_L).
- Calcular la potencia, la resistencia estática y la resistencia dinámica para dicho punto de trabajo.



Problema 24

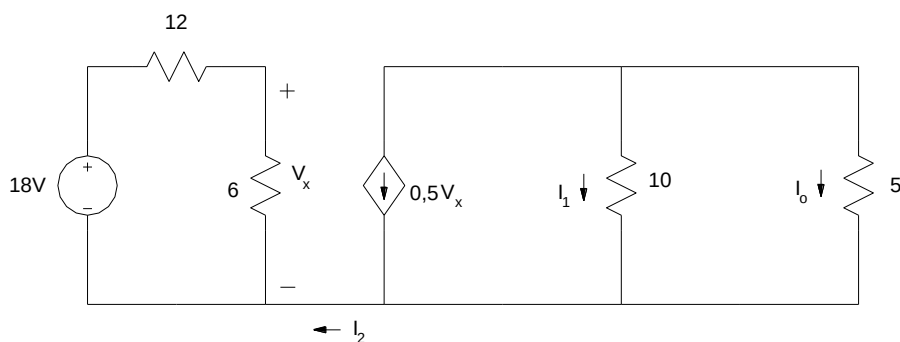
En el siguiente circuito calcular:

- La corriente I_F .
- Reemplazar la rama A – B por un circuito equivalente lineal que la represente exactamente en el punto de trabajo.
- Calcular la potencia disipada en el dipolo anómalo R. ($U=I^2+I+1$)



Problema 25

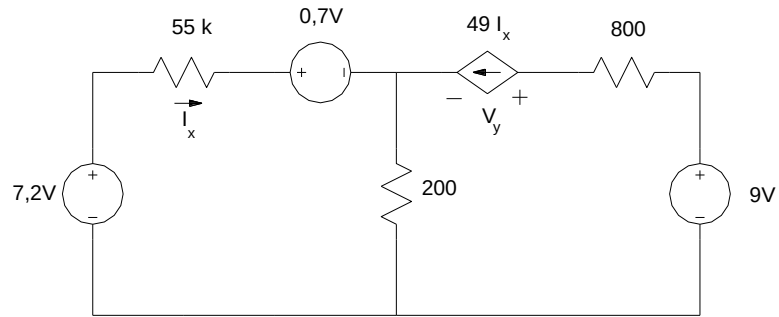
Encuentre I_1 , I_0 e I_2 en el circuito de la figura siguiente:



Problema 26

Encuentre el voltaje v_y en el circuito de la figura.

Muestre que la potencia total generada en el circuito es igual a la potencia total consumida.



3. CORRIENTE ALTERNA

3.1. Introducción

En el presente capítulo se aborda el análisis de circuitos energizados por fuentes de tensión o corrientes senoidales. Las fuentes senoidales y su efecto tienen gran relevancia por múltiples razones:

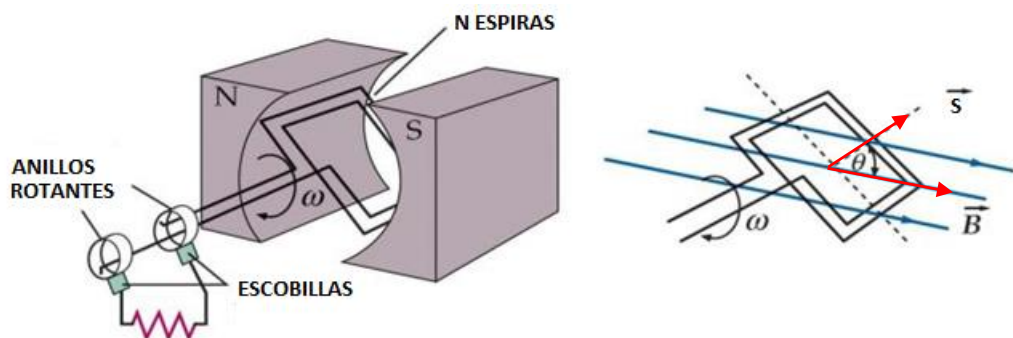
- La generación, transmisión, distribución y consumo de grandes bloques de energía se desarrollan esencialmente en condiciones de régimen permanente periódico, alterno, senoidal.
- Comprender el comportamiento en condiciones de régimen senoidal facilita la comprensión de la operación de los circuitos en condiciones de operación con fuentes no senoidales.
- Contemplar la condición de operación principalmente en condiciones de régimen permanente senoidal en general permite simplificar el diseño de los sistemas eléctricos.
- Las herramientas matemáticas aplicadas para facilitar el tratamiento de circuitos en corriente alterna (método fasorial) representan un caso particular de conceptos más generales, utilizados para el tratamiento de señales incluso no periódicas (e.g. Laplace).

Nota: el presente apunte se encuentra en desarrollo, de modo que se presentan los aspectos más relevantes con mínimas acotaciones, las cuales son complementadas con las explicaciones de clase y la bibliografía de referencia.

3.2. Corriente alterna

3.2.1. Producción de F.E.M. alternas sinusoidales

Una Fuerza Eléctro Motriz es del tipo alterna senoidal o sinusoidal si su evolución puede ser representada por una función seno o coseno. Un caso elemental de una fuente de tensión senoidal corresponde a una espira de **N** vueltas que se encuentra dentro de una región en la cual se presenta un flujo magnético Φ asociado a una inducción magnética uniforme **B** y la misma gira a una velocidad angular constante ω .



En estas condiciones, el flujo abrazado por la espira Φ_B resulta variable en el tiempo, debido a que a cada instante se modifica el área efectiva que abraza la inducción magnética uniforme presente en medio (producto vectorial de $\mathbf{B}$ y el vector área $\mathbf{S}$, ortogonal a la superficie de la espira). A partir de estos se puede plantear:

$$\Phi_B = B_m \cdot N \cdot S \cdot \cos(\theta) = B_m \cdot N \cdot S \cdot \cos(\omega t + \theta_0)$$

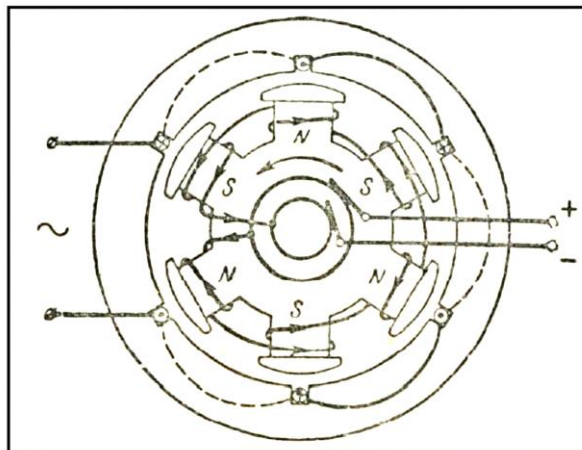
Adoptando una fase inicial θ_0 igual a $\pi/2$ (90°), se puede escribir:

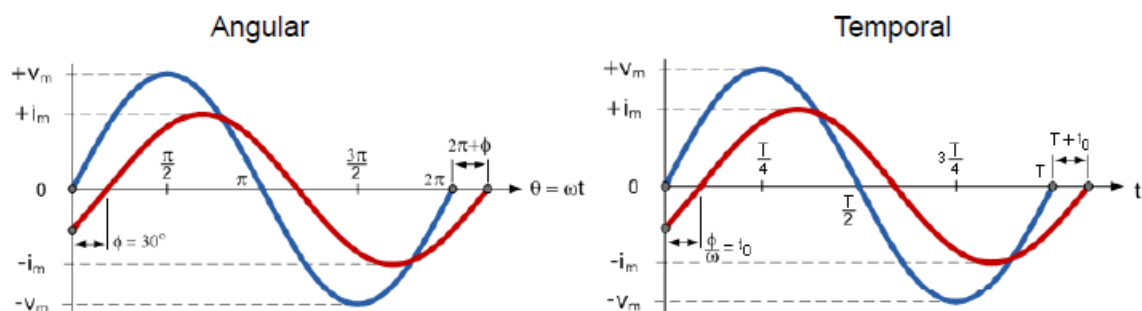
$$\Phi_B = -N \cdot B_m \cdot S \cdot \sin(\omega t)$$

De donde aplicando la ley de Faraday, se tiene que:

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = N \cdot B_m \cdot S \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = e_m \cos(\omega t)$$

Más allá de este ejemplo, la generación real de tensión senoidal implica la aplicación de múltiples espiras, polos magnéticos y diseños particulares de la geometría del material ferromagnético para alcanzar una forma de onda lo más próximamente posible a una función senoidal y, según sea la cantidad de polos, diferencias entre la velocidad (frecuencia) mecánica y la frecuencia eléctrica de la tensión generada.





V_m : Amplitud de la función



Valor máximo

$T=2\pi/\omega$: Periodo



Tiempo que tarda en recorrer un ciclo completo

$f=1/T$: Frecuencia



Ciclos realizados por unidad de tiempo (Hz)

3.2.2. Valores y parámetros característicos

3.2.2.1. Valor medio

A partir del siguiente análisis de la función senoidal se demuestra que la misma **no tiene valor medio**.

Caracterización de una corriente utilizando valores medios

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f dt \left\{ \begin{array}{l} V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v dt \\ I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt \end{array} \right.$$

$$\text{Si } v = V_m \cos \omega t \text{ con } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T V_m \cos \omega t dt = \frac{1}{2\pi} V_m [\sin \omega t]_0^{2\pi/\omega} = 0 \\ I_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T I_m \cos \omega t dt = \frac{1}{2\pi} I_m [\sin \omega t]_0^{2\pi/\omega} = 0 \end{array} \right\}$$



Los valores medios no dan información sobre las corrientes alternas.

3.2.2.2. Valor eficaz

A partir del presente análisis de la función se obtiene el valor eficaz de una función senoidal.

Caracterización de las corrientes alternas utilizando valores eficaces

$$F = \frac{1}{T} \sqrt{\int_0^T f^2 dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \frac{1}{T} \sqrt{\int_0^T v^2 dt} \\ I = \frac{1}{T} \sqrt{\int_0^T i^2 dt} \end{array} \right.$$

$$V^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T V_m^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{\omega}{2\pi} V_m^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos 2\omega t + 1}{2} dt = \frac{\omega}{2\pi} V_m^2 \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{V_m^2}{2} \quad \boxed{V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

$$I^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{\omega}{2\pi} I_m^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos 2\omega t + 1}{2} dt = \frac{\omega}{2\pi} I_m^2 \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{I_m^2}{2} \quad \boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Los voltímetros y amperímetros están diseñados para medir valores eficaces de la corriente o la tensión.

Analizando el resultado se encuentra que en un período T de la corriente alterna, se libera en un conductor de resistencia R, una energía térmica igual a:

$$\int_0^T Ri^2 dt = RT \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = RI^2 T$$

Así, se deduce que el valor eficaz de la corriente alterna es igual a la intensidad de corriente continua tal que, en un intervalo igual a un período, libera en una resistencia una cantidad de calor igual a la que libera la corriente continua.

3.2.2.3. Otros parámetros característicos y factores de relevancia:

Valores de pico $\Rightarrow A_p^+$ y A_p^- Máximos y mínimos de la función

Valor pico a pico $\Rightarrow V_{PP} = |A_p^+| + |A_p^-|$

Valor medio de módulo $\Rightarrow V_{MOD} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T |v(t)| dt$

Factor de forma $\Rightarrow F_F = \frac{V_{EF}}{V_{MOD}}$

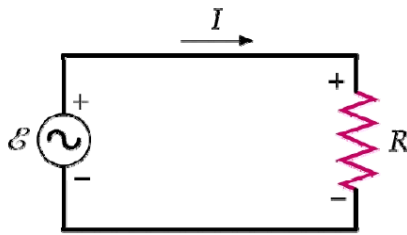
Factor de amplitud $\Rightarrow F_A = \frac{\max \left\{ |A_p^+|, |A_p^-| \right\}}{V_{EF}}$

En esta instancia se le recomienda al lector **calcular los valores** que debe tener cada uno de los parámetros característicos y factores de relevancia de una onda senoidal pura.

3.2.3. Corriente alterna en elementos de circuito

3.2.3.1. Resistencia

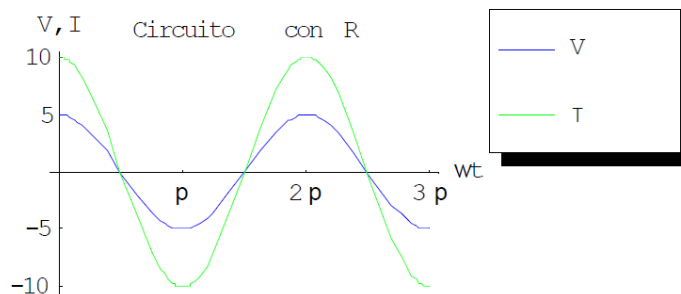
I. Corriente alterna en una resistencia



Si $e(t) = \sqrt{2} \varepsilon \cos \omega t$

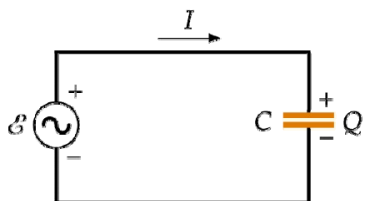
$$i(t) = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{R} \cos \omega t \Rightarrow i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t$$

La tensión aplicada y la corriente están en fase



3.2.3.2. Capacitor

II. Corriente alterna en un condensador



Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V

$$\varepsilon(t) = V_c = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow \varepsilon \cos \omega t = \frac{q(t)}{C}$$

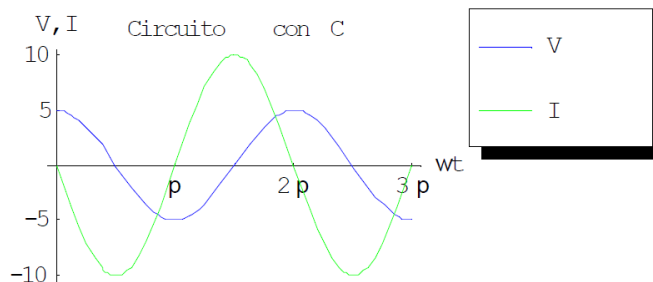
$$q(t) = \sqrt{2} \varepsilon C \cos \omega t$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\sqrt{2} \varepsilon C \omega \sin \omega t$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{1/C\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

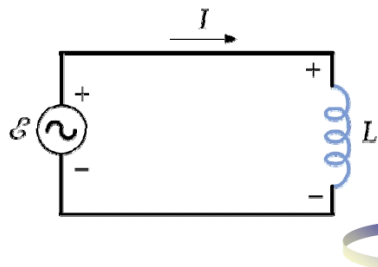
Donde $X_c = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow$ Reactancia capacitiva o capacitancia

En este caso, corriente y voltaje están desfasados: la corriente está adelantada $\pi/2$ respecto del voltaje



3.2.3.3. Inductancia

III. Corriente alterna en una bobina



Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V

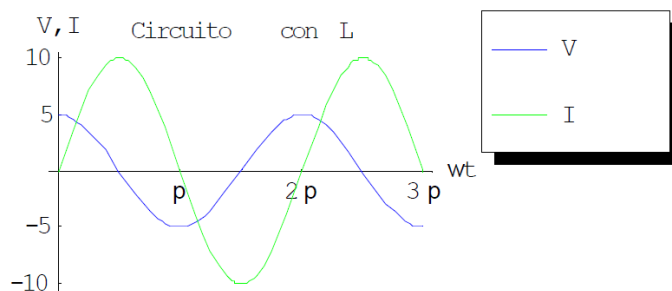
$$\varepsilon(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \varepsilon \cos \omega t = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$di = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{L} \cos \omega t dt$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{L \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

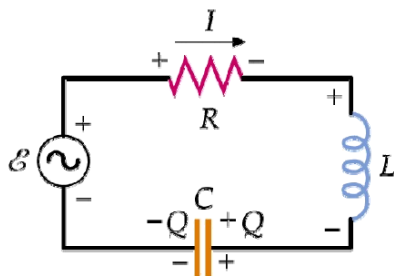
Donde $X_L = L \omega \Rightarrow$ Reactancia inductiva o inductancia

En este caso, corriente y voltaje están desfasados: la corriente está atrasada $\pi/2$ respecto del voltaje



3.2.3.4. Circuitos RLC

Circuito RLC en serie



$$\varepsilon \cos \omega t = \frac{q}{C} + i(t) R + L \frac{di(t)}{dt}$$

Derivando con respecto al tiempo

$$-\varepsilon \omega \sin \omega t = \frac{i(t)}{C} + R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial, cuya solución en régimen permanente se puede escribir de la forma

$$i(t) = I \cos(\omega t - \varphi) \quad I, \varphi : \text{constantes}$$

Ángulo de fase

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

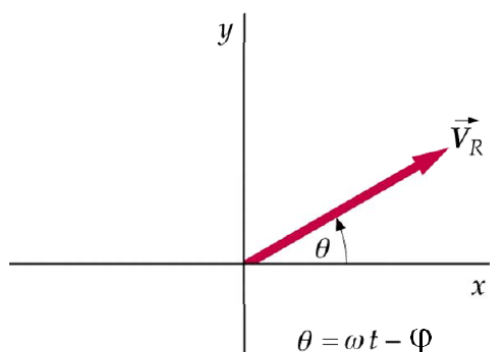
Corriente máxima

$$I = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\varepsilon}{Z}$$

$$\begin{cases} X_L - X_C & \text{Reactancia total} \\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} & \text{Impedancia} \end{cases}$$

3.2.4. Notación fasorial – Impedancia y Admitancia

La relación entre corriente y voltaje en una bobina o en un condensador puede representarse mediante vectores bidimensionales que giran, llamados **fasores**.

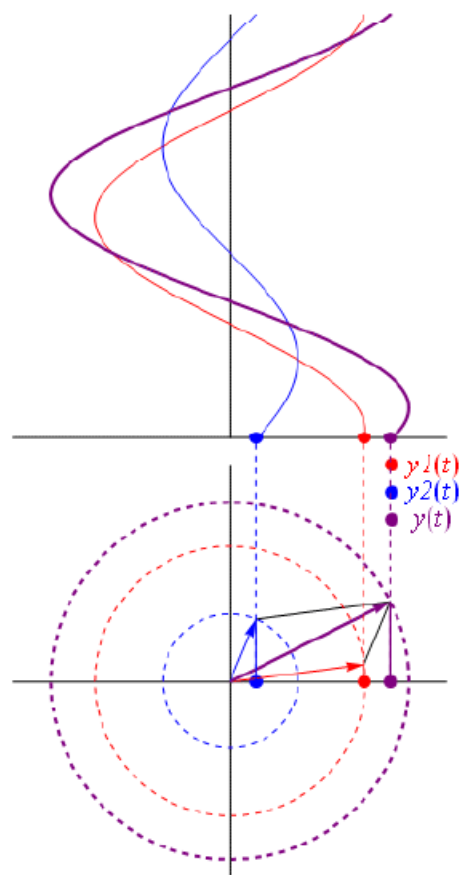
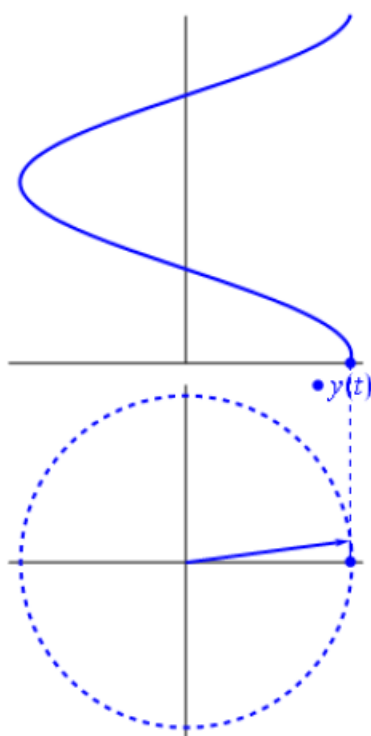


Podemos representar la caída de potencial en una resistencia como un vector de módulo $I R$, que forma un ángulo θ con el eje X

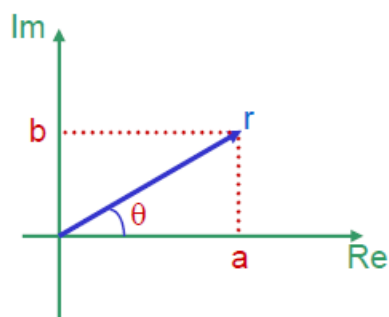
El valor instantáneo de la caída de tensión es la componente x del vector V_R , que gira en sentido antihorario con una velocidad ω .

Uso de los fasores ➡

Cualquier función $A \cos(\omega t - \phi)$, será la componente x de un fasor que forma un ángulo $(\omega t - \phi)$ con el eje x



Esta representación fasorial, la podemos llevar a cabo en el plano complejo



Coordenadas cartesianas $z = a + jb$

Coordenadas polares $z = r \angle \theta$

Cambio de coordenadas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cartesianas a polares} \\ \text{Polares a cartesianas} \end{array} \right\} \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \\ a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

Fórmula de Euler $\Rightarrow re^{\pm j\theta} = r \cos \theta \pm jr \sin \theta$

Supongamos que se tienen dos magnitudes senoidales de la forma:

$$a(t) = A \cos(\omega t + \varphi_A) \quad b(t) = B \cos(\omega t + \varphi_B)$$

A cada una de ellas se les puede asociar un fasor:

$$\dot{A} = A e^{j\varphi_A} \quad \dot{B} = B e^{j\varphi_B}$$

de tal manera que se pueda escribir:

$$a(t) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) \quad b(t) = \text{Re}(\dot{B} e^{j\omega t})$$

Si se define c(t) como la suma de ambas funciones del tiempo, se tiene:

$$c(t) = a(t) + b(t) = A \cos(\omega t + \varphi_A) + B \cos(\omega t + \varphi_B)$$

Como ambos vectores giratorios, tienen una velocidad angular ω igual, el vector suma girará uniformemente con la misma velocidad angular y su proyección sobre el eje real será también una función cosenoidal del tiempo, como se ve a continuación:

$$c(t) = a(t) + b(t) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) + \text{Re}(\dot{B} e^{j\omega t}) = \text{Re}[(\dot{A} + \dot{B}) e^{j\omega t}]$$

De este modo, el problema de sumar funciones sinusoidales del tiempo, **de igual frecuencia**, se reduce a determinar la amplitud y fase del vector suma $\dot{A} + \dot{B}$

3.2.4.1. Ejemplo numérico

Se desea obtener $c(t) = a(t) + b(t)$, donde:

$$a(t) = 5 \cos(t + 20^\circ) \quad b(t) = 10 \cos(t + 50^\circ)$$

Primero se escriben los fasores asociados:

$$\dot{A} = 5 \angle_{20^\circ} = 5 \cos(20^\circ) + j5 \sin(20^\circ) = 4.699 + j1.71$$

$$\dot{B} = 10 \angle_{50^\circ} = 10 \cos(50^\circ) + j10 \sin(50^\circ) = 6.428 + j7.66$$

Se suman los fasores:

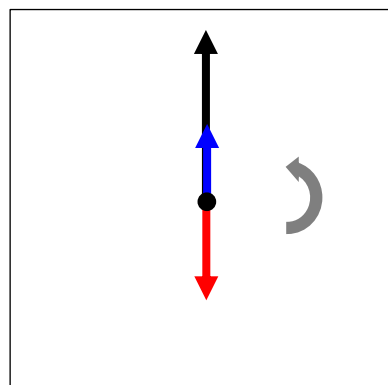
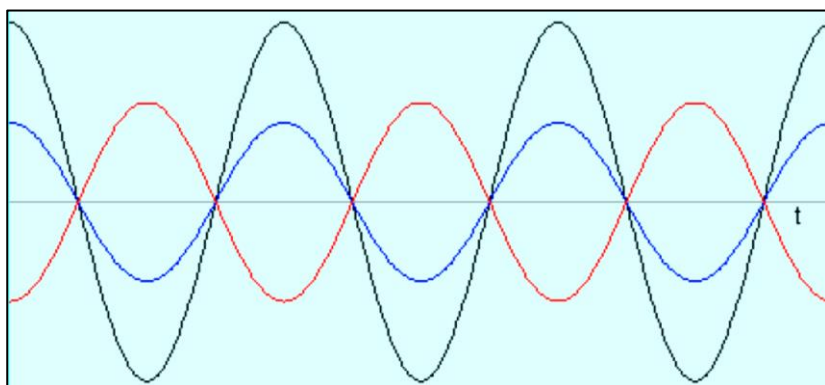
$$\dot{C} = \dot{A} + \dot{B} = 11.127 + j9.37 = 14.55 \angle_{40.1^\circ}$$

Y luego se vuelve a la expresión temporal:

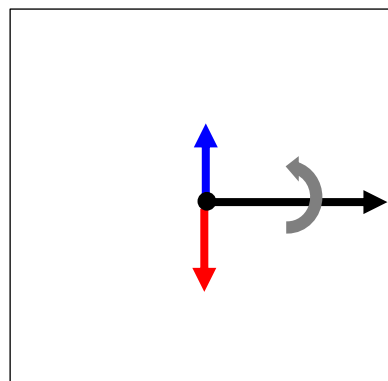
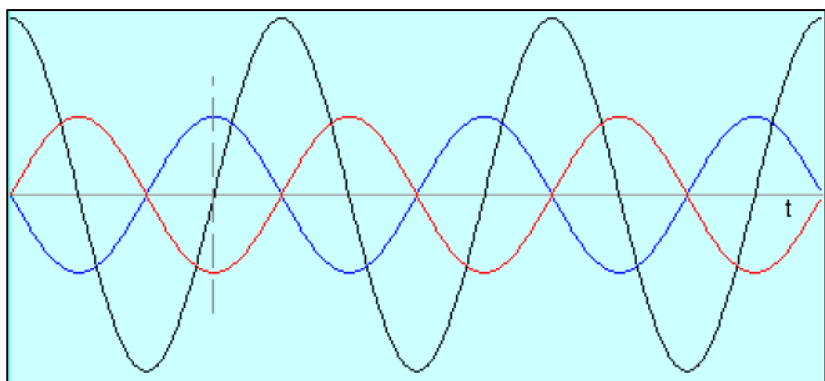
$$c(t) = 14.55 \cos(t + 40.1^\circ)$$

3.2.4.2. Ejemplo relaciones entre variables

Las ondas negra y azul se encuentran en fase mientras que la roja se encuentra en contrafase de estas:



La onda azul se encuentra en cuadratura y adelantada de la negra y la onda roja se encuentra en cuadratura y atrasada de la negra:



3.2.5. Método simbólico

El método simbólico permite representar mediante números complejos a las variables y elementos de los circuitos eléctricos en condiciones de régimen alterno senoidal.

Método Simbólico: Leyes de Kirchhoff – Ley de las Tensiones



En un circuito eléctrico cerrado, de corriente alterna:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_{AmB}, \quad \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_{BnA} = -U_{AnB}$$

$$U_{AmB} - U_{AnB} = -\frac{d\phi}{dt} = e$$

Es por eso que se considera que el circuito no es atravesado por un flujo variable en el tiempo, y todos los fenómenos inductivos se encuentran concentrados en las bobinas. De esta manera:

$$U_{AmB} - U_{AnB} = -\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow U_{AmB} = U_{AnB}$$

Y así se independiza la tensión del camino recorrido, con lo cual la suma de tensiones en un camino cerrado es nula y se puede emplear la ley de las tensiones de Kirchhoff al igual que en corriente continua.

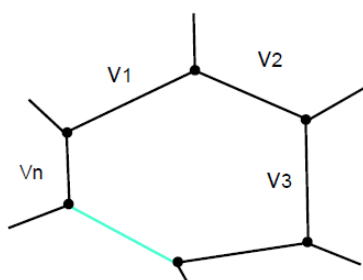
Método Simbólico: Leyes de Kirchhoff – Ley de las Tensiones

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0$$

$$v_k(t) = \sqrt{2} V_k \sin(\omega t - \phi_k) = \text{Im} \left(\sqrt{2} \dot{V}_k e^{j\omega t} \right)$$

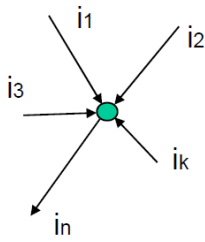
$$\sum_{k=1}^n \text{Im} \left(\sqrt{2} \dot{V}_k e^{j\omega t} \right) = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{2} \dot{V}_k e^{j\omega t} \right) \right) = 0$$

$$= \text{Im} \left(e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{2} \dot{V}_k \right) \right) = 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{2} \dot{V}_k \right) = 0$$

Método Simbólico: Leyes de Kirchhoff – Ley de las Corrientes



$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

$$i_k(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi_k) = \text{Im}(\sqrt{2} \dot{I}_k e^{j\omega t})$$

$$\sum_{k=1}^n \text{Im}(\sqrt{2} \dot{I}_k e^{j\omega t}) = \text{Im}\left(\sum_{k=1}^n (\sqrt{2} \dot{I}_k e^{j\omega t})\right) = 0$$

$$= \text{Im}\left(e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2} \dot{I}_k)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n (\sqrt{2} \dot{I}_k) = 0$$

A partir de esto, el método simbólico permite reproducir las corrientes encontradas en los circuitos de corriente alterna utilizando el formalismo de los números complejos. Representaremos así a tensiones y corrientes mediante números complejos, entendiendo que la variable física de nuestro interés será la parte real o imaginaria (según la fase inicial definida oportunamente). De esta forma los circuitos de corriente alterna se puede resolver considerando la ley de Ohm con el formalismo de los números complejos.

Los elementos básicos en corriente alterna serán entonces:

Fuente de tensión  $\dot{\varepsilon} = \varepsilon e^{j(\omega t + \varphi)}$ $\dot{\varepsilon} = \varepsilon e^{j\varphi}$ $\Rightarrow$
 $\text{Re}(\dot{\varepsilon}) = \varepsilon \cos(\omega t + \varphi)$

Resistencia  $Z_R = R$ $\Rightarrow$ Corriente y tensión están en fase.

Condensador  $Z_C = -\frac{j}{\omega C}$ $\Rightarrow$ Corriente adelantada $\pi/2$ respecto de la tensión.

Inducción  $Z_L = j\omega L$ $\Rightarrow$ Corriente atrasada $\pi/2$ respecto de la tensión.

Dada una impedancia cualquiera, suponiendo que la tensión no tiene fase inicial, tendremos por ejemplo un fasor tensión y una impedancia total:

$$\dot{V} = V e^{j0}$$

$$Z = |Z| e^{j\varphi}$$

Para calcular la corriente compleja aplicamos la ley de Ohm de forma que, operando con fasores podemos escribir

$$\dot{I} e^{j\omega t} = \frac{\dot{V}}{Z} e^{j\omega t} = \frac{V}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

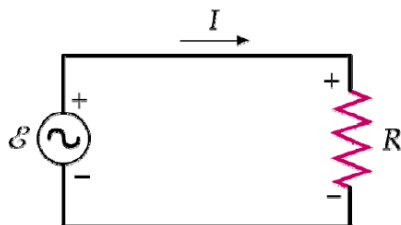
Con lo cual

$$i(t) = \text{Re}(\dot{I} e^{j\omega t}) = \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{V}{|Z|} \\ \tan \varphi = \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \end{array} \right.$$

Como el factor $e^{j(\omega t)}$ está presente en todas las expresiones, se suele obviar, incorporando la variable “tiempo” al final de los cálculos como se ve en el siguiente ejemplo.

3.2.5.1. Resistencia

I. Corriente alterna compleja en una resistencia



$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon \angle 0^\circ$$

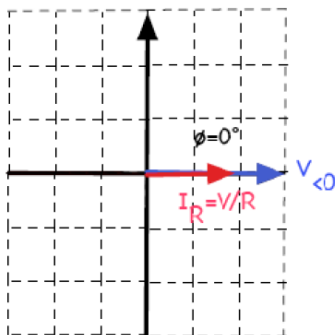
$$Z_R = R$$

$$\text{Si } \varepsilon(t) = \varepsilon \text{ sen}(\omega t)$$

Se tiene que:

$$\varepsilon(t) = \text{Im}(\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}) = \varepsilon \text{ sen}(\omega t)$$

Aplicando la ley de Ohm:



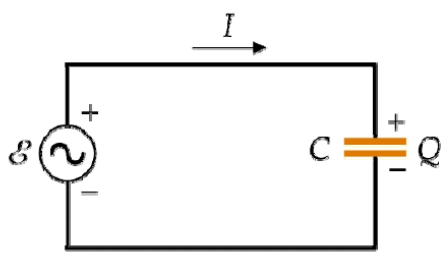
$$i(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \text{Im}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{R} e^{j\omega t}\right) = \text{Im}(\dot{I} e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \text{sen}(\omega t)$$

De aquí se desprende que:

$$\dot{I} = \frac{\dot{\varepsilon}}{Z_R} = \frac{\varepsilon \angle 0^\circ}{R} = \frac{\varepsilon}{R} \angle 0^\circ$$

3.2.5.2. Capacitor

II. Corriente alterna compleja en un condensador


$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon \angle 0^\circ \quad Z_C = -\frac{j}{C\omega}$$

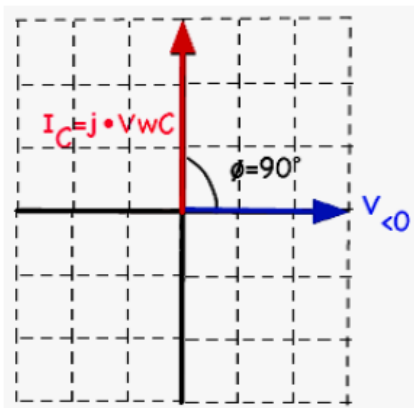
Si $\varepsilon(t) = \varepsilon \sin(\omega t)$ Se tiene que:

$$\varepsilon(t) = \text{Im}(\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}) = \varepsilon \sin(\omega t)$$

La relación entre tensión y corriente en un condensador es:

$$i(t) = C \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = C \frac{d \text{Im}(\dot{\varepsilon} e^{j\omega t})}{dt} = C \text{Im} \left[\dot{\varepsilon} \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} \right] =$$

$$= \text{Im} \left[j\omega C \dot{\varepsilon} e^{j\omega t} \right] = \text{Im} \left[\frac{\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}}{-j \frac{1}{\omega C}} \right] = \text{Im}(\dot{I} e^{j\omega t})$$

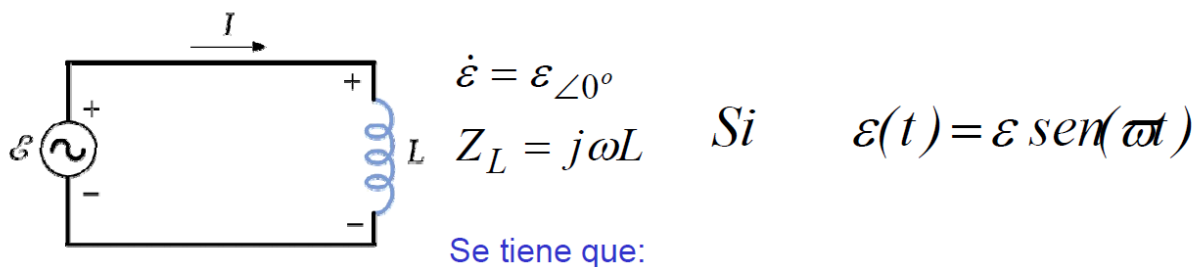


$$\dot{I} = \frac{\dot{\varepsilon}}{Z_C} = \frac{\varepsilon}{-j/C\omega} = \frac{\varepsilon}{1/C\omega} e^{j\pi/2}$$



$$i(t) = \text{Im}(\dot{I} e^{j\omega t}) = \frac{\varepsilon}{1/C\omega} \sin(\omega t + \pi/2)$$

3.2.5.3. Inductancia

III. Corriente alterna compleja en una bobina


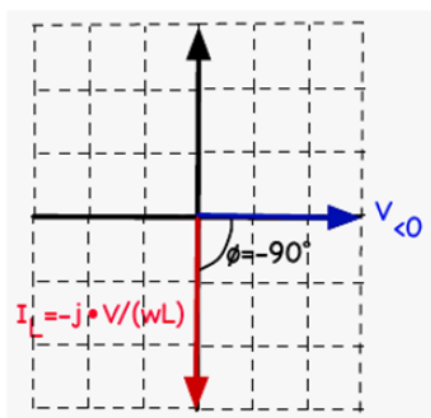
$$\varepsilon(t) = \operatorname{Im}(\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}) = \varepsilon \operatorname{sen}(\omega t)$$

La relación entre tensión y corriente en una bobina es:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{1}{L} \int \varepsilon(t) dt = \frac{1}{L} \int \operatorname{Im}(\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}) dt = \frac{1}{L} \operatorname{Im} \dots \left(\int \dot{\varepsilon} e^{j\omega t} dt \right) = \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{j\omega L} \dot{\varepsilon} e^{j\omega t} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{j\omega L} \dot{\varepsilon} e^{j\omega t} \right) = R \operatorname{Im}(\dot{I} e^{j\omega t})
 \end{aligned}$$

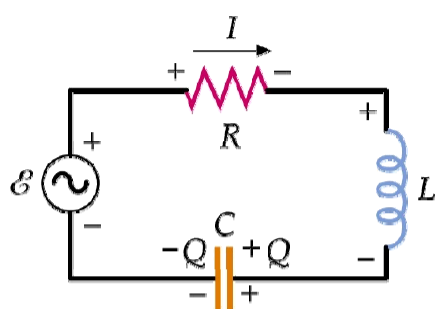
De aquí se desprende que:

$$\dot{I} = \frac{\dot{\varepsilon}}{Z_L} = \frac{\varepsilon}{j\omega L} = \frac{\varepsilon}{\omega L} e^{j(-\pi/2)}$$



$$i(t) = \operatorname{Im}(\dot{I} e^{j\omega t}) = \frac{\varepsilon}{L\omega} \operatorname{sen}(\omega t - \pi/2)$$

3.2.5.4. Circuito RLC Serie

Circuito RLC en serie


$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon \angle 0^\circ$$

$$Z_T = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + j(X_L - X_C)$$

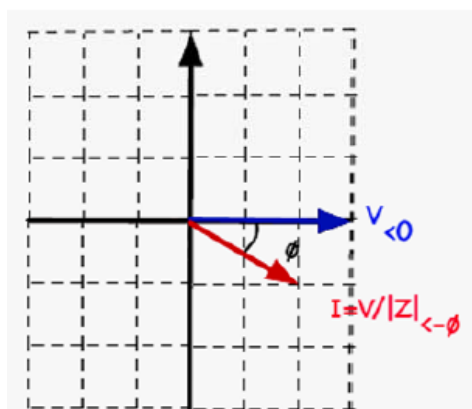
$$\dot{I}e^{j\omega t} = \frac{\dot{\varepsilon}}{Z_T} e^{j\omega t} = \frac{\varepsilon}{R + j(X_L - X_C)} e^{j\omega t}$$

Que se puede reescribir así



$$\dot{I}e^{j\omega t} = \frac{\dot{\varepsilon}}{Z_T} e^{j\omega t} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

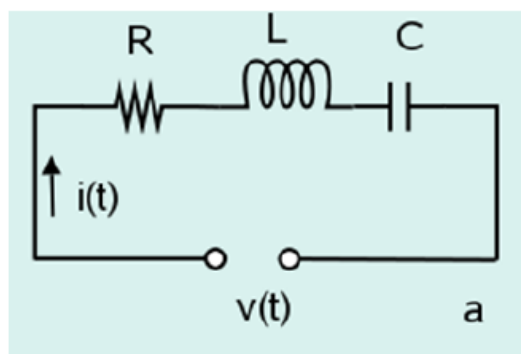
$$i(t) = \text{Re}(\dot{I}e^{j\omega t}) = I \sin(\omega t - \varphi)$$



Resultando

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \end{array} \right.$$

Ejemplo RLC Serie



$$\dot{V} = 100V \angle 0^\circ$$

$$f = 50\text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 314 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

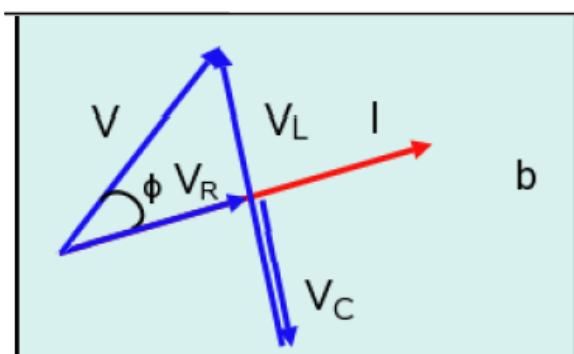
$$R = 10\Omega \quad L = 100\text{mH} \quad C = 150\mu\text{F}$$

$$Z_T = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + j(X_L - X_C)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{V}}{Z_T} = \frac{V}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j(-\varphi)} \\ &= \frac{100V}{10 + j\left(314 \times 100\text{mH} - \frac{1}{314 \times 150\mu\text{F}}\right)} = (4.91 - j5)\text{A} = 7 \angle -45^\circ \text{A} \end{aligned}$$

Diagrama Fasorial

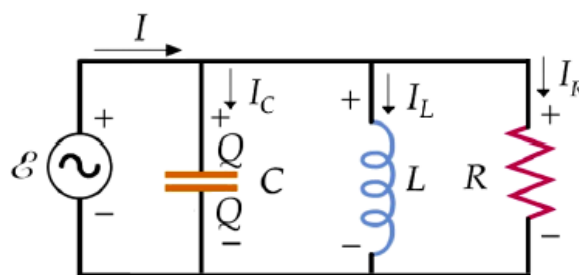
$$i(t) = \text{Im}(\dot{I}) = I \sin(\omega t - \varphi)$$



$$\left\{ \begin{aligned} I &= \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = 7\text{A} \\ \tan \varphi &= \frac{X_L - X_C}{R} = 1 \end{aligned} \right.$$

3.2.5.5. Circuito RLC Paralelo

Circuito RLC en paralelo



$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon \angle 0^\circ$$

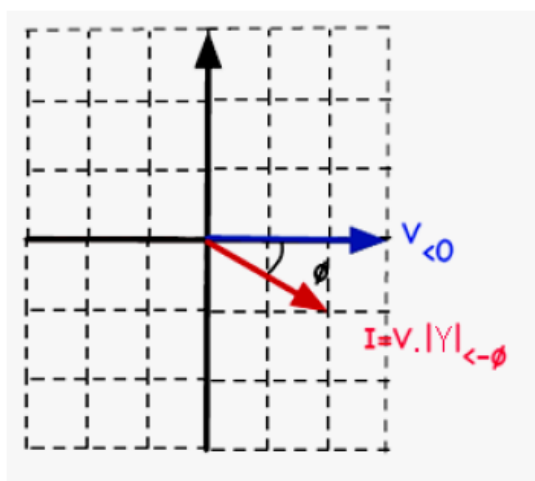
$$\frac{1}{Z_T} = Y_T = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = G + j(B_C - B_L)$$

$$\dot{I} = \dot{\varepsilon} Y_T = \varepsilon [G + j(B_C - B_L)]$$

Que se puede reescribir así

$$\dot{I} = \dot{\varepsilon} Y_T = \varepsilon \sqrt{(G^2 + (B_C - B_L)^2)} e^{-j\varphi}$$

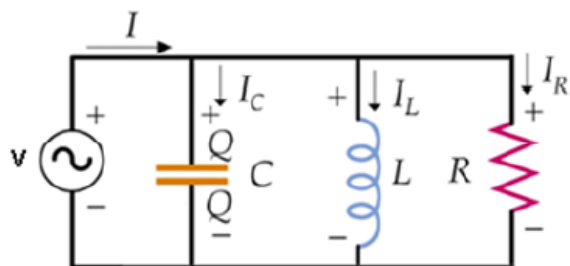
Diagrama Fasorial



$$i(t) = \text{Im}(\dot{I} e^{j\omega t}) = I \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \varepsilon \sqrt{(G^2 + (B_C - B_L)^2)} \\ \tan \varphi = \frac{B_C - B_L}{G} \end{array} \right.$$

Ejemplo RLC Paralelo



$$\dot{V} = 100V \angle 0^\circ \quad y \quad v = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$$

$$f = 50\text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 314 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$R = 10\Omega \quad L = 100\text{mH} \quad C = 150\mu\text{F}$$

$$\dot{I} = \dot{V} Y_T = \dot{V} [G + j(B_C - B_L)]$$

$$\dot{I} = \dot{V} Y_T = V \left(\frac{1}{R} + j(B_C - B_L) \right) = V \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + (B_C - B_L)^2} e^{j(-\varphi)}$$

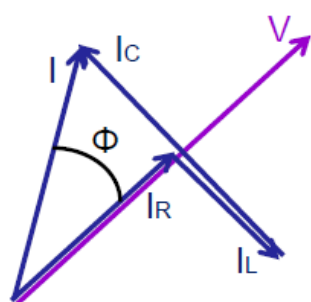
$$= 100V \left(\frac{1}{10\Omega} + j \left(314 \times 150\mu\text{F} - \frac{1}{314 \times 100\text{mH}} \right) \right) = 10.12 \angle -56.8^\circ \text{ A}$$

Siendo $v(t) = \text{Im}(\dot{V}) = V \sin(\omega t)$

Resulta

Diagrama fasorial

$$i(t) = \text{Im}(\dot{I}) = I \sin(\omega t - \varphi)$$



Haciendo cálculos

$$I = V \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + (B_C - B_L)^2} = 10.12 \text{ A}$$

$$\tan \varphi = \frac{B_C - B_L}{G} = 1.53 \Rightarrow \varphi = 56.8^\circ$$

3.3. Ejercicios

Problema 27

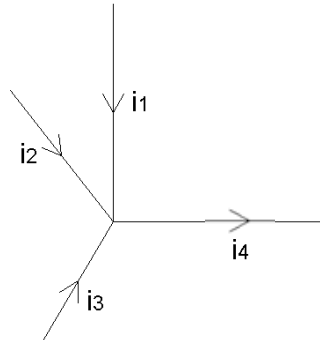
Encontrar $i_4(t)$, usando sólo las propiedades de las funciones senoidales, si:

(notar que i_4 es incógnita, por lo que su sentido de circulación ha sido asignado de manera arbitraria)

$$i_1(t) = 5 \cos(3t + 30^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 5000 \sin(3t) \text{ mA}$$

$$i_3(t) = 5 \cos(3t + 150^\circ) \text{ A}$$



Resolución

Se deben sumar las corrientes utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas

$$i_4 = i_1 + i_2 + i_3 \quad (\text{por la Ley de las Corrientes de Kirchhoff})$$

$$i_4 = 5 \cos(3t + 30^\circ) + 5 \sin(3t) + 5 \cos(3t + 150^\circ)$$

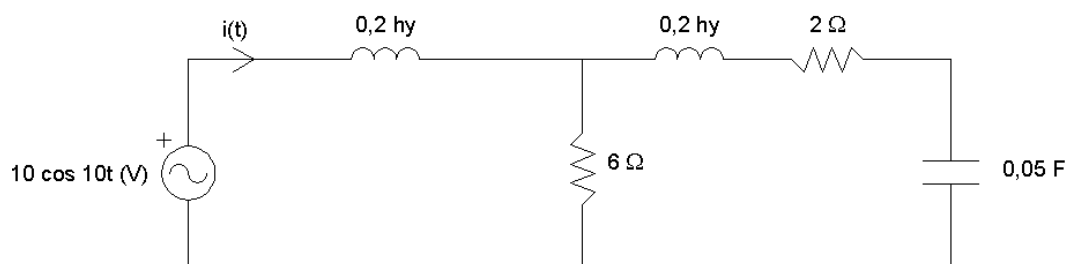
$$i_4 = 5 \cos(3t) \cdot \cos(30^\circ) - 5 \sin(3t) \cdot \sin(30^\circ) + 5 \sin(3t) + 5 \cos(3t) \cdot \cos(150^\circ) - 5 \sin(3t) \cdot \sin(150^\circ)$$

$$i_4 = 5 \cos(3t) \cdot \cos(30^\circ) - 5 \sin(3t) \cdot \sin(30^\circ) + 5 \sin(3t) - 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3t) - 5 \frac{1}{2} \sin(3t)$$

$$i_4 = 0$$

Problema 28

Hallar la corriente $i(t)$ en el circuito de la figura y realizar el diagrama fasorial.



Problema 29

Determinar el valor eficaz (RMS) de la corriente $i(t)$ de los apartados a) y b)

a) $i(t) = 2 - 4 \cos(2t) \text{ A}$

b) $i(t) = 2 \cos(2t) + 4\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) + 12 \sin(2t) \text{ A}$

Problema 30

Dada la tensión: $v(t) = 50 \cos(200\pi t + 60^\circ) \text{ V}$ encontrar:

- a) amplitud
- b) fase en grados y en radianes
- c) período en ms
- d) frecuencia en rad/seg y Hz
- e) cuántos grados adelanta o atrasa a la corriente $i = 2 \cos(200 \pi t - 17^\circ) \text{ A}$

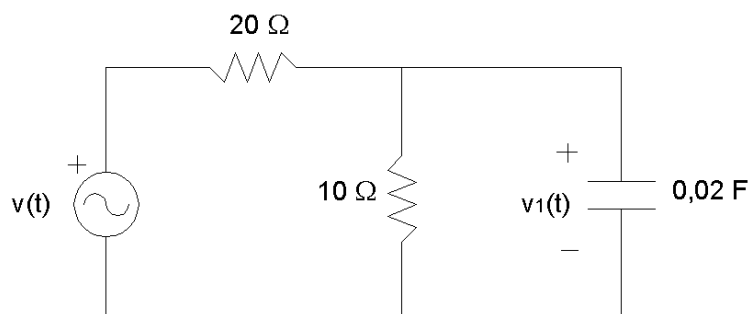
Problema 31

Calcular la respuesta forzada $v_1(t)$ para las siguientes fuentes de tensión:

$v(t) = 34 \cos(4t)$

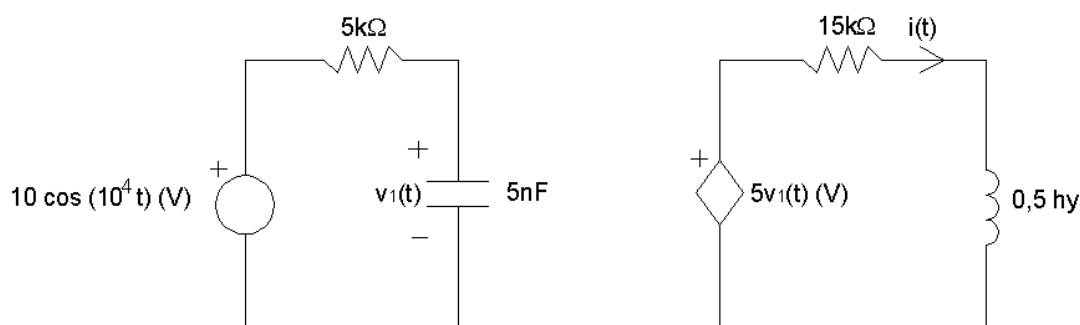
$v(t) = 17 \sin(5t)$

Nota: utilizar el método fasorial y luego hacer un diagrama fasorial.



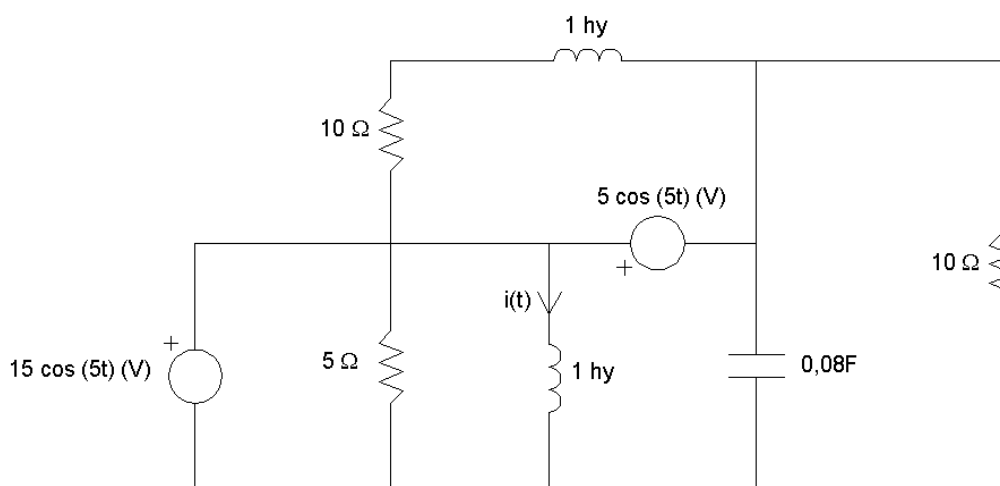
Problema 32

Hallar el valor de $i(t)$ en el siguiente circuito.



Problema 33

Calcular la corriente indicada en el circuito de la figura.



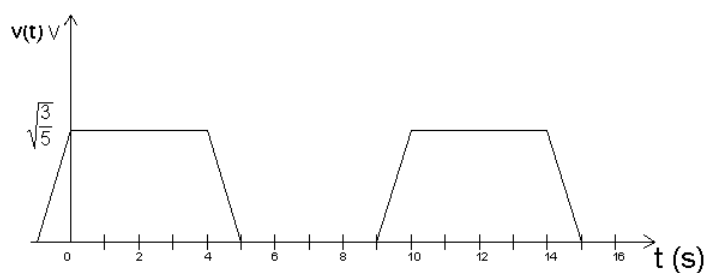
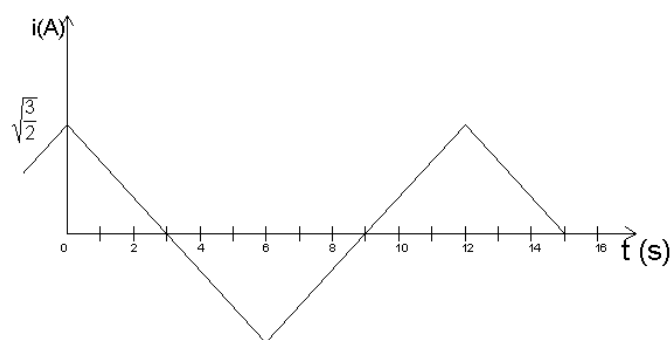
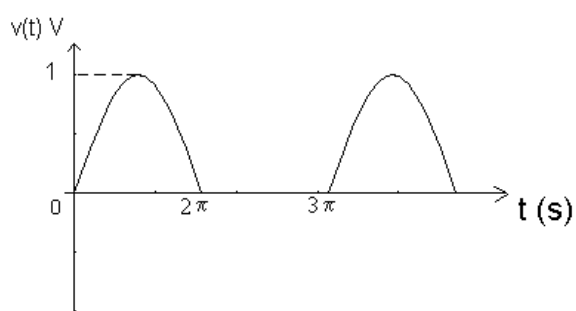
Problema 34

Determinar el valor eficaz de la siguiente evolución temporal de la corriente:

$$i = 3\text{sen}(\pi \cdot t) + \sqrt{2} \cos(\pi \cdot t) \text{ A}$$

Problema 35

Calcular el valor eficaz de cada una de las ondas mostradas en la figura.

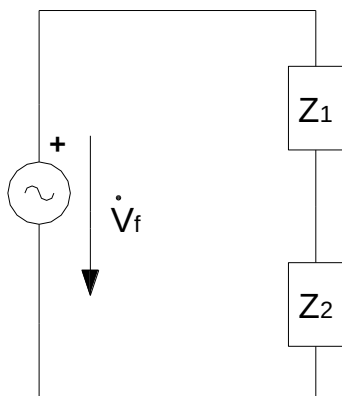


Problema 10

En el circuito de la figura calcular:

1. El valor complejo y eficaz de la corriente

2. La expresión temporal de la corriente



$$Z_1 = (10 + j5) \Omega$$

$$Z_2 = (5 - j10) \Omega$$

$$\omega = 100 \text{ 1/s}$$

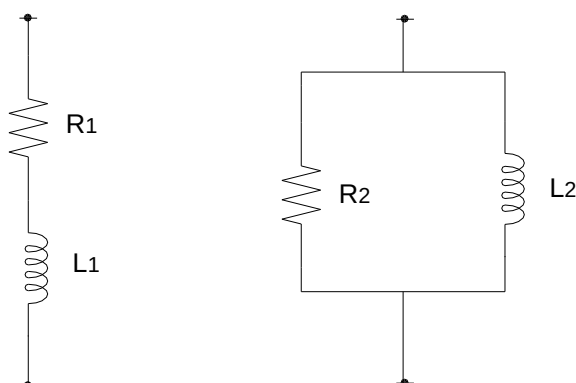
$$\dot{V}_f = 150 e^{j0} \text{ V}$$

Problema 11

Demostrar que para una pulsación ω dada, los circuitos de la figura son equivalentes si se verifica:

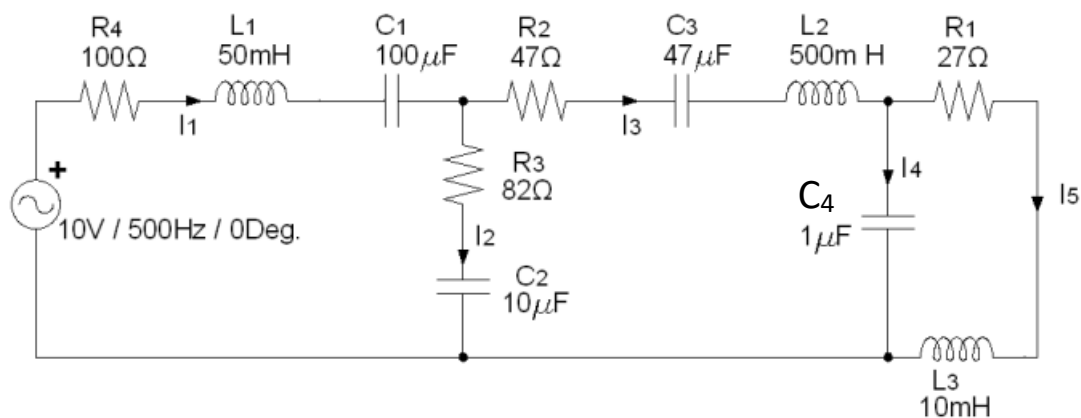
$$R_1 = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

$$L_1 = \frac{R_2^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$



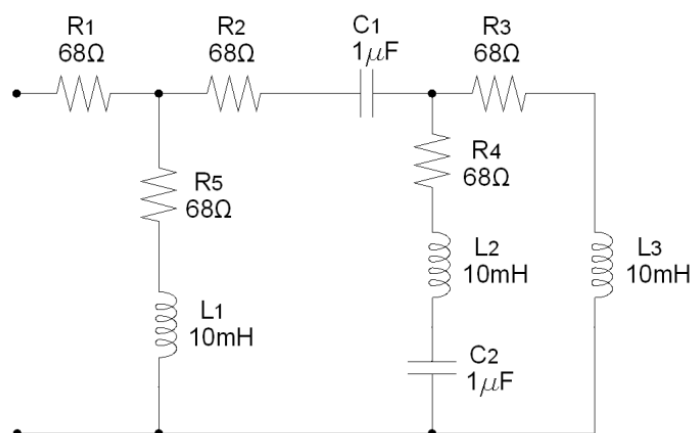
Problema 12

Hallar las corrientes en cada rama del circuito en valor eficaz (I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5)



Problema 13

Calcular el valor de la impedancia del circuito de la figura para una frecuencia $f = 250 \text{ Hz}$

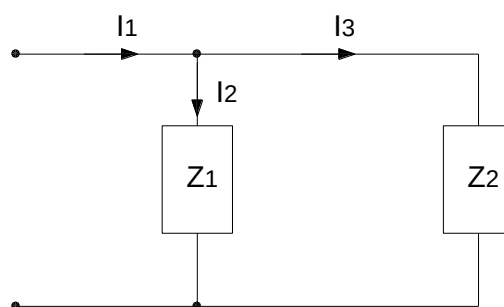


Problema 14

Calcular el valor de la corriente de cada rama del circuito si:

$$\dot{I}_1 = 2 e^{j50^\circ} \text{ A}$$

Realizar el diagrama fasorial de todas las corrientes

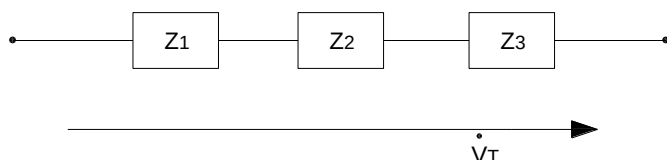


$$Z_1 = (150 - j90) \Omega$$

$$Z_2 = (70 + j50) \Omega$$

Problema 15

Calcular el valor de la caída de tensión, en valor eficaz, en las impedancias del circuito de la figura.



$$Z_1 = (70 - j80) \Omega$$

$$Z_2 = (15 + j90) \Omega$$

$$Z_3 = -j50 \Omega$$

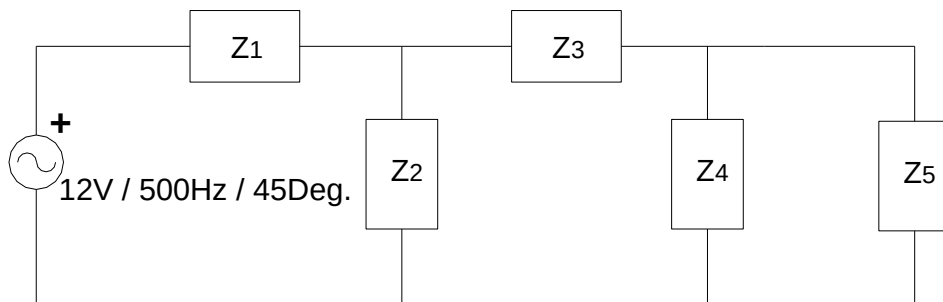
$$\dot{V}_T = (12 - j0) \text{ V}$$

Realizar un diagrama fasorial con las caídas de tensión y verificar que la suma de las mismas es igual a la tensión aplicada.

Problema 16

Calcular los valores eficaces de las tensiones en los nudos y las corrientes en todas las ramas del circuito de la figura.

Realizar un diagrama fasorial con las magnitudes indicadas anteriormente.



$$Z_1 = (10 + j60)\Omega$$

$$Z_2 = (20 - j70)\Omega$$

$$Z_3 = (30 + j80)\Omega$$

$$Z_4 = (40 + j90)\Omega$$

$$Z_5 = (50 + j100)\Omega$$

3.4. Caso de aplicación – Dimensionamiento de cable

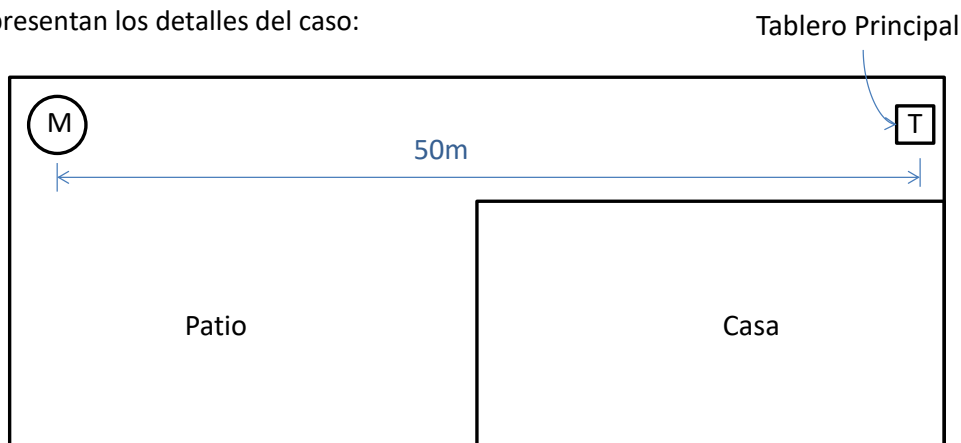
El objetivo de este capítulo es presentar una aplicación real de los temas adquiridos hasta el momento, familiarizarse con los complementos prácticos de la resolución de problemas (manuales, catálogos, etc.) y, específicamente, conocer las exigencias presentes en la selección de cables-conductores para una instalación.

Vale aclarar que el caso bajo análisis corresponde a la selección de cables para una instalación eléctrica simple, del tipo domiciliaria. Destacando que en aplicaciones reales de mayor complejidad podrán requerirse evaluaciones más rigurosas y de un mayor grado de precisión, para satisfacer adecuadamente todos los criterios técnico-económicos asociados al diseño de una instalación.

3.4.1. Situación problemática

Se desea seleccionar el cable más adecuado para alimentar una bomba de agua que se instalará en un domicilio.

A continuación, se presentan los detalles del caso:



- Bibliografía de consulta:
 - Manual y Catálogo del Electricista, Schneider Electric, 2013.
 - Manual de Cables, IMSA.
 - Catálogo de Cables, PRYSMIAM
 - Reglamento para la Ejecución de Instalaciones Eléctricas en Inmuebles, Asociación Electrotécnica Argentina, 2006.
- Datos de la instalación
 - Tensión 220V (valor eficaz)
 - Frecuencia 50Hz
 - Distancia: 50m
 - Montaje en cañería, un solo circuito, temperatura ambiente máxima 35°.
- Datos de la bomba
 - Impulsor: la bomba será impulsada por un motor eléctrico
 - Marca y modelo del motor: WEG, Uso General, Nema 48/56
 - Potencia 1HP
 - Tensión nominal 230V, monofásico
 - Corriente nominal 5,6A
 - Corriente de arranque 30,8A

Detalles del catálogo de motor asociado a la bomba:

Características

- Carcasa: D56
- Potencia: 0,75 kW
- Frecuencia: 50 Hz
- Polos: 4
- Rotación nominal: 1430
- Deslizamiento: 4,67 %
- Voltaje nominal: 230 V
- Corriente nominal: 5,60 A
- Corriente de arranque: 30,8 A
- I_p / I_n : 5,5
- Corriente en vacío: 3,60 A
- Par nominal: 5,01 Nm
- Par de arranque: 250 %
- Par máxima: 220 %
- Categoría: ---
- Clase de aislación: F
- Elevación de temperatura: 80 K
- Tiempo de rotor bloqueado: 6 s (caliente)
- Factor de Servicio: 1,00
- Régimen de servicio: S1
- Temperatura Ambiente: -20°C – +40°C
- Altitud: 1000 m
- Protección: IP55
- Masa aproximada: 18 kg
- Momento de inercia: 0,00564 kgm²
- Nivel de ruido: ---





Uso General - NEMA 48/56 - monofásico

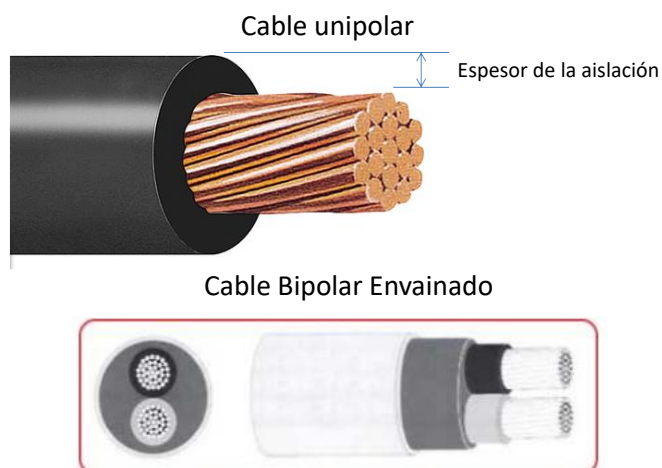
3.4.2.Solución

Para la selección de un cable-conductor, se realiza una evaluación integral teniendo presente al menos los siguientes aspectos:

- Tensión Nominal
- Capacidad Térmica
- Verificación de Caída de Tensión
- Verificación de Corriente de Cortocircuito

3.4.2.1. Tensión Nominal

Es la que define la aislación. Se deberá cumplir en todo momento que su tensión nominal sea superior, o a lo sumo igual, a la tensión de servicio existente en la instalación ($U_n > U_s$). Los conductores para las instalaciones eléctricas de baja tensión son diseñados para tensiones de servicio de 1,1 kV.



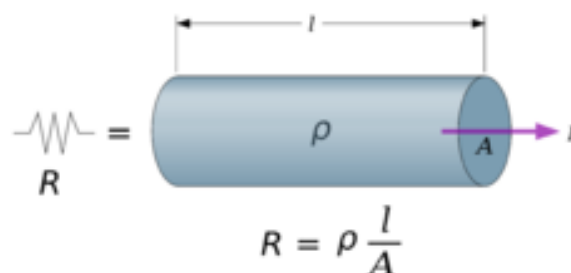
3.4.2.2. Capacidad Térmica

La capacidad de conducción de corriente (también denominada ampacidad) de un cable se establece en base a su temperatura de trabajo, la cual se encuentra directamente vinculada con sus aspectos constructivos y su capacidad de disipación del calor generado en su interior, producto de la circulación de corriente.

El valor eficaz de la intensidad de la corriente nominal del circuito no tendrá que ocasionar un incremento de temperatura superior a la especificada para cada tipo de cable. Para esto la norma IRAM 2178 define la intensidad de corriente máxima para cada tipo de conductor, de modo que estos no superen la temperatura de 70°C en su interior.

Todo conductor presenta una resistencia a la circulación de la corriente. La misma se calcula de acuerdo a la siguiente expresión.

La letra griega ρ representa a la resistividad específica del material con el que se construye el cable.



$$R = \rho \frac{l}{A}$$

➤ Aluminio: $\rho_{Al} = 0.026 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

➤ Cobre: $\rho_{Cu} = 0.0176 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

La circulación de corriente por la resistencia que presenta el conductor disipará calor por efecto Joule.

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t$$

La capacidad de disipación del cable dependerá de sus características propias, tales como sección, conductor, aislante; así como de su entorno: tipo de instalación (bandejas, cañerías, al aire libre, enterrado), proximidades con otros conductores (fuentes de calor) y, naturalmente, de la temperatura ambiente.

En este aspecto, los catálogos de los fabricantes de cables suelen establecer ciertas condiciones comunes de instalación y a partir de allí la aplicación de factores de corrección para indicar si un cable es capaz de transportar mayor o menor corriente que la nominal de diseño.

A continuación se presenta la información de catálogo asociada a la selección de un conductor, la aplicación de los factores de corrección por su instalación y una primera pre-selección del conductor requerido.

Datos cable



Sección Nominal mm²	Acondicionamiento					Diámetro alambre máximo	Diámetro cuerda¹ de cobre	Espesor de la aislación	Diámetro exterior¹	Peso¹ del cable completo	Resistencia² eléctrica máx a 20°C en CC	Corriente⁴ admisible cañería 2x	Caida de tensión
	Rollos			Longitud x envase									
	10 m	30 m	100 m	carrete Ø 280 mm	bobina Ø mayor								
1	—	•	•	1000	—	0,21	1,20	0,60	2,50	14	19,5000	11	37
1,5	•	•	•	800	—	0,26	1,50	0,70	3,00	19	13,3000	15	26
2,5	•	•	•	500	—	0,26	1,90	0,80	3,60	31	7,9800	21	15
4	—	—	•	400	—	0,31	2,50	0,80	4,20	45	4,9500	28	10
6	—	—	•	300	—	0,31	3,00	0,80	4,70	64	3,3000	36	6,4
10	—	—	•	200	—	0,41	3,90	1,00	6,00	107	1,9100	50	3,8
16	—	—	•	—	—	0,41	5,00	1,00	7,10	162	1,2100	66	2,4

1) Valores aproximados.

2) Según IRAM NM 280, indicada a 20°C, en CC.

3) Temp. amb. 40°C, dos conductores cargados en circuito monofásico más un conductor de protección, 100% factor de carga, 50/60 Hz CA.

4) Para sistemas de corriente alterna monofásicos de 50/60 Hz, considerando dos cables en contacto y $\cos \varphi = 0,8$.

Especificaciones sujetas a cambio.

- Factores de corrección para temperaturas distintas de 40°C y por agrupamiento de circuitos en un mismo caño ver página 68.

- Caidas de tensión según sección, % y longitudes ver páginas 76 a 79 inclusive.

Factores de corrección de capacidad

Sección del conductor Cu mm ²	Intensidad máxima admisible (A)	
	Aislación PVC	
	2x 	3x 
1,5	15	14
2,5	21	18
4	28	25
6	36	32
10	50	43
16	66	59

Factores de corrección para temperatura ambiente distinta de 40°C

2x= 2 cables cargados + cable de protección

3x= 3 cables cargados + cable de protección

Temp, Ambiente °C	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
PVC	1,4	1,34	1,29	1,22	1,15	1,08	1	0,91	0,82	0,7	0,57

Circuitos en un mismo caño	Factor
2	0,8
3	0,7

Pre-Selección de conductor

A partir de la corriente de diseño requerida para el funcionamiento continuo de la bomba (5,6A) y la información presentada en los catálogos, se podría pre-seleccionar un conductor con una sección de 1mm², ya que el mismo cumpliría con los requerimientos de capacidad térmica en las condiciones de instalación propuestas (aplicando los factores de corrección correspondientes).

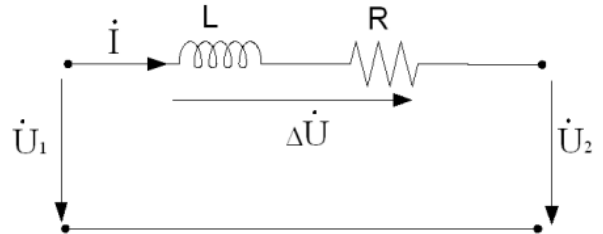
$$I^*_{Admisible} = I_{Adm \times catalogo} \cdot F_{T^\circ} \cdot F_{agr} = 11A \cdot 1,08 \cdot 1 = \mathbf{11,88A} > \mathbf{5,6A}$$

3.4.2.3. Evaluación de caída de tensión

La verificación de la caída de tensión considera la diferencia de tensión absoluta entre los extremos del conductor, calculada en base a la corriente absorbida por todos los elementos conectados al mismo y susceptibles de funcionar simultáneamente. Se deberá cumplir que no supere la máxima admisible determinada por la carga, de acuerdo con: $\Delta U < \Delta U_{adm}$

Como valores de caída de tensión admisible se deben tomar:

- Circuitos de iluminación: ΔU_{adm} 3%
- Circuito de fuerza motriz (motores)
 - ΔU_{adm} 5% (en régimen)
 - ΔU_{adm} 15% (en arranque)



Además de la resistencia un conductor presenta una reactancia inductiva, que modela el campo magnético producido alrededor del conductor. La circulación de corriente por la resistencia y reactancia del conductor producirán una caída de tensión entre sus extremos.

Sin embargo, para conductores de baja tensión la inductancia suele ser depreciable por lo que solo se considera la caída de tensión en la resistencia.

Evaluación del caso

Habiendo pre-seleccionado el conductor de 1mm^2 en base a la capacidad térmica, se evalúa si el mismo cumple con los parámetros de desempeño de caída de tensión tanto en condiciones de régimen como de arranque

- Evaluación en régimen

$$\Delta U_a = 37 \left[\frac{V}{A \cdot km} \right] \cdot 5.6A \cdot 0.05km = 10.36V = 4.7\% < 5\% \text{ ! Cumple al límite}$$

- Evaluación en arranque

$$\Delta U_a = 37 \left[\frac{V}{A \cdot km} \right] \cdot 30.6A \cdot 0.05km = 56.61V = 25.7\% > 15\% \text{ X NO cumple}$$

Siendo que el cable pre-seleccionado en base a la capacidad térmica de conducción no resulta adecuado en términos de caída de tensión, se selecciona uno de mayor sección que cumpla con este requerimiento. Específicamente se encuentra que el conductor de $2,5\text{mm}^2$ es el que permite satisfacer el desempeño requerido para la instalación en estudio. Naturalmente, al cumplir el requerimiento de caída se estará también cumpliendo la capacidad térmica.

- Evaluación en régimen

$$\Delta U_a = 15 \left[\frac{V}{A \cdot km} \right] \cdot 5.6A \cdot 0.05km = 4.2V = 1.8\% < 5\%$$

- Evaluación en arranque

$$\Delta U_a = 15 \left[\frac{V}{A \cdot km} \right] \cdot 30.6A \cdot 0.05km = 22.95V = 9.9\% < 15\%$$

3.4.2.4. Verificación del cortocircuito

Ante la presencia de un cortocircuito la corriente circulante por el cable excede ampliamente las corrientes de diseño, aunque sólo lo hace por breve intervalo, hasta la actuación de las protecciones específicamente previstas para ello. Durante ese intervalo de altas corrientes se presenta una alta disipación de energía, la cual, dado el corto período de tiempo, puede considerarse adiabática dentro del conductor. Es decir:

$$\text{Energía} = I^2 R t = K_{\text{material}} (T^{\circ}_{\text{final}} - T^{\circ}_{\text{inicial}})$$

En la verificación del cortocircuito se pretende determinar la máxima sollicitación térmica a la que se ve expuesto un cable durante la evolución de corrientes de breve duración o cortocircuitos. Existirá, entonces, una sección mínima S que será función del valor de la potencia de cortocircuito en el punto de alimentación, el tipo de cable evaluado y su protección automática asociada. En esta verificación se deberá cumplir con: $S < SC$ siendo SC la sección calculada térmicamente y verificada por caída de tensión.

Para la evaluación específica se requieren datos adicionales de la instalación, tales como la corriente de cortocircuito y el tipo de protección a instalar (e.g. protección termomagnética). En lo que respecta al cable, el aspecto que define la capacidad al cortocircuito es principalmente la máxima temperatura a la que se lo puede someter -transitoriamente- al aislante. En el caso del PVC, el límite es de 160°C, mientras que con XLPE el límite asciende a 220°C o 250°C, dependiendo del fabricante.

Una forma simplificada para la evaluación se basa en el concepto de que el calor generado por la corriente de falla será completamente “almacenado” en el conductor durante el transitorio de falla (i.e. evolución adiabática), implicando un aumento de temperatura en consecuencia. Esta es la forma más común utilizada en los catálogos:

$$I_{cc} \sqrt{t} = K \times S$$

La que indica que el producto de la corriente de cortocircuito (I_{cc}) y la raíz del tiempo de falla (t) es proporcional a la sección del cable (S) y una constante dependiente de las características del cable:

K	Aislante/Conductor
115	PVC sobre Cu
74	PVC sobre Al
135	XLPE o EPR sobre Cu
87	XLPE o EPR sobre Al

4. POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA

4.1. Introducción

Como continuación del capítulo de corriente alterna el presente documento aborda los conceptos de potencia principalmente enfocados en régimen permanente senoidal.

La gama de problemas que involucran estudiar el flujo de energía resulta muy amplia, desde el diseño específico de una máquina o dispositivo eléctrico hasta la definición de cuantas unidades generadoras, transformadores y líneas de transmisión se requieren para alimentar de forma correcta a grandes ciudades e industrias.

Conforme lo presenta la bibliografía específica, iniciaremos el tema desde la definición de potencia instantánea introducida en el primer capítulo para luego obtener y definir potencia media o activa, potencia reactiva, aparente y aparente compleja. Como corolario se introducirá el concepto de potencia de distorsión, presente en regímenes no senoidales

Nota: el presente apunte se encuentra en desarrollo, de modo que se presentan los aspectos más relevantes con mínimas acotaciones, las cuales serán complementadas con las explicaciones de clase.

4.2. Potencia

4.2.1. Potencia instantánea

Potencia instantánea $p(t)$ es el producto de la tensión $v(t)$ por la corriente $i(t)$

$$p(t) = v(t) i(t)$$

Si $v(t)$ e $i(t)$ son periódicas, es decir:

$$v(t) = v(t + T) \qquad i(t) = i(t + T)$$

Resulta: $p(t) = v(t) i(t) = v(t + T) i(t + T) = p(t + T)$

Es decir la potencia es también periódica de período T

4.2.2. Potencia media o activa

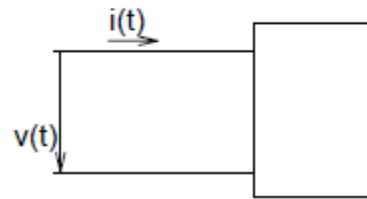
El valor medio de la potencia de la potencia instantánea se designa con el nombre de **POTENCIA ACTIVA**.

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

Potencia consumida $P > 0$

Potencia generada $P < 0$

Para los sentidos considerados



4.2.3. Potencia en régimen senoidal

Si $v(t)$ es senoidal y la carga lineal se tiene

$$v(t) = V_m (\cos \varpi t + \theta_V) \quad i(t) = I_m \cos(\varpi t + \theta_I)$$

Con
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Resulta
$$p(t) = V_m I_m \cos(\varpi t + \theta_V) \cos(\varpi t + \theta_I)$$

Aplicando identidad de funciones trigonométricas

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_V - \theta_I) + \cos(2\varpi t + \theta_V + \theta_I)]$$

La potencia media es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_V - \theta_I) + \cos(2\varpi t + \theta_V + \theta_I)] dt$$

Por lo que la potencia activa resulta

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I) = V I \cos(\varphi) \quad \text{Con} \quad \varphi = \theta_V - \theta_I$$

De la expresión

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_V - \theta_I) + \cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)]$$

El término

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)$$

Se denomina potencia fluctuante y no aporta a la potencia activa

4.2.4. Potencia aparente y factor de potencia

La potencia aparente se define como

$$S = V I \quad \text{su unidad es} \quad [S] = [V] [I] = \text{VA}$$

El factor de potencia se define como

$$fp = \frac{P}{S} \quad (\text{adimensional}) \quad \text{y} \quad -1 \leq fp \leq 1$$

En régimen senoidal $fp = \cos(\varphi)$

4.2.4.1. Ejemplo – Potencia instantánea y activa

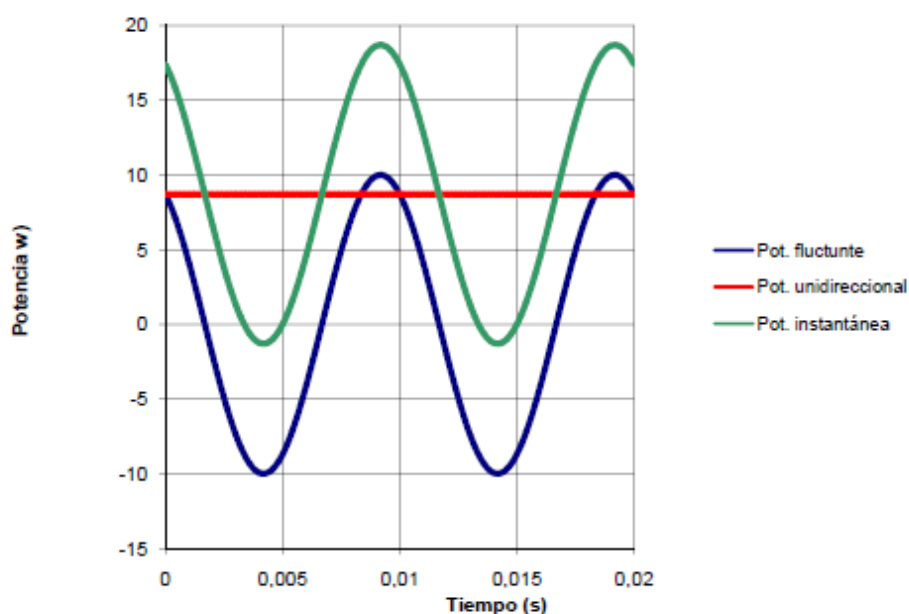
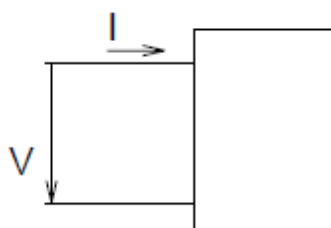
Tensión: 5 V

Corriente: 2 A

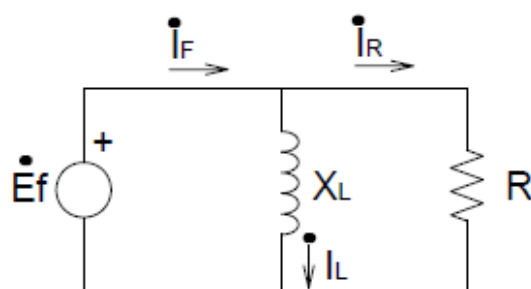
F.P 0,87

f = 50 Hz

T = 20ms



4.2.4.2. Evaluación de la Potencia aparente - No conservativa



$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= \frac{1}{R} \dot{E}_F \\ \dot{I}_L &= \frac{1}{jX_L} \dot{E}_F \\ \dot{I}_F &= \dot{E}_F \left(\frac{1}{R} - j \frac{1}{X_L} \right) \end{aligned}$$

$$S_R = E_F^2 \frac{1}{R}$$

$$S_L = E_F^2 \frac{1}{X_L}$$

$$S_R + S_L = E_F^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} \right)$$

$$S_F = E_F^2 \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} \right)^2}$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} \neq \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} \right)^2}$$

Se demuestra que la potencia aparente no es conservativa

4.2.5. Potencia aparente compleja

Escribiendo v e i en forma simbólica

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \angle \theta_I & \dot{V} &= V \angle \theta_V & \dot{I}_m &= I_m \angle \theta_I & \dot{V}_m &= V_m \angle \theta_V \\ & & & \text{ó} & & & & \end{aligned}$$

Resulta $\hat{S} = \dot{V} \dot{I}^* = V I \angle (\theta_V - \theta_I) = \frac{V_m I_m}{2} \angle (\theta_V - \theta_I)$

Convirtiendo a la forma rectangular

$$\hat{S} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I) + j \frac{V_m I_m}{2} \sen(\theta_V - \theta_I)$$

$$\hat{S} = V I \cos(\theta_V - \theta_I) + j V I \sen(\theta_V - \theta_I)$$

4.2.5.1. Determinación de potencia activa y reactiva

Primer término

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I) = V I \cos(\theta_V - \theta_I) = I^2 \operatorname{Re}(Z)$$

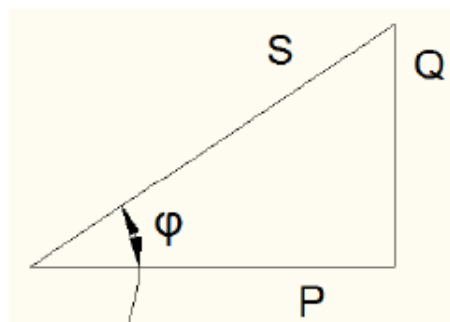
Segundo término

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I) = V I \operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I) = I^2 \operatorname{Im}(Z)$$

Se verifica además

$$\left| \hat{S} \right| = \frac{V_m I_m}{2} = V I = S$$

4.2.5.2. Triángulo de Potencia

Siendo $\hat{S} = P + jQ$ Resulta $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ y $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{V I \operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I)}{V I \cos(\theta_V - \theta_I)}$ 

Nota: Este triángulo de potencias sólo puede aplicarse en régimen senoidal puro

4.2.5.3. Evaluación de la potencia aparente compleja – Conservativa

Sea una red de “n” nudos° $\sum_{k=1}^n \dot{I}_{kj} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad k \neq j \quad n \text{ ecuaciones}$

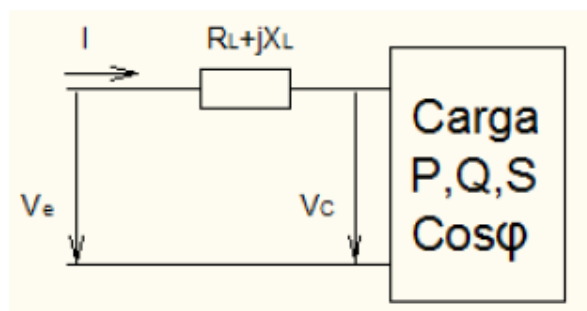
Conjugando ambos términos $\sum_{k=1}^n \dot{I}_{kj}^* = 0$

$$\dot{\varphi}_j \sum_{k=1}^n \dot{I}_{kj}^* = 0 \quad \text{con } \dot{\varphi}_1 = 0 \text{ (referencia)}$$

$$\dot{\varphi}_j \sum_{k=1}^n \dot{I}_{kj}^* = \sum_{k=1}^n \dot{\varphi}_j \dot{I}_{kj}^* = 0 \quad (n-1) \text{ ecuaciones}$$

Siendo $\dot{I}_{jk}^* = -\dot{I}_{kj}^* \longrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\dot{\varphi}_k - \dot{\varphi}_j \right) \dot{I}_{kj}^* = \sum_{k=1}^n \dot{S}_{kj} = 0 \quad \text{CQD}$

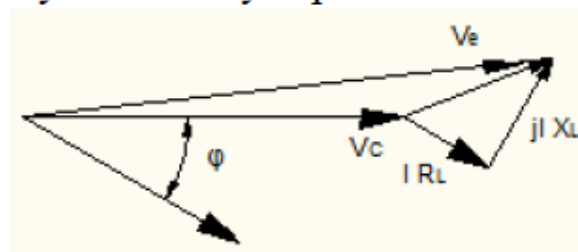
4.2.6. Ejercicio conceptual – Corrección de factor de potencia



$$I = \frac{P}{V_C \cos \varphi}$$

A menor $\cos \varphi$ mayor I

A mayor I mayor pérdidas en línea

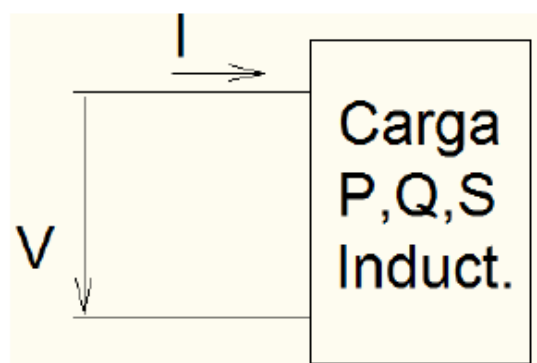


$$P_L = |I|^2 R_L$$

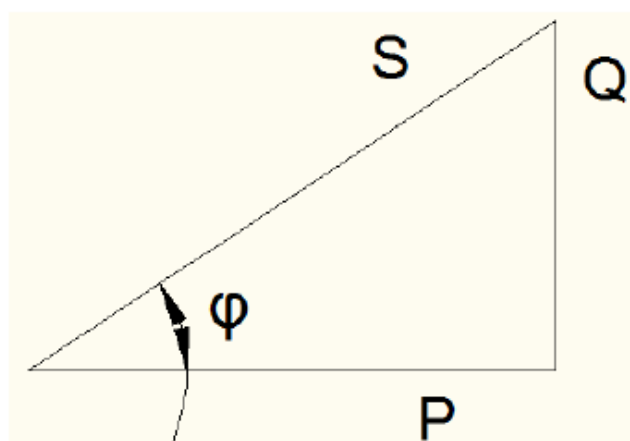
$$\Delta \dot{U} = \dot{I} (R_L + jX_L) \quad \text{Caída de tensión}$$

Perdida de tensión

$$|\Delta \dot{U}| = |\dot{I}| |(R_L + jX_L)| = |\dot{I}| z$$



El triángulo de potencia resulta



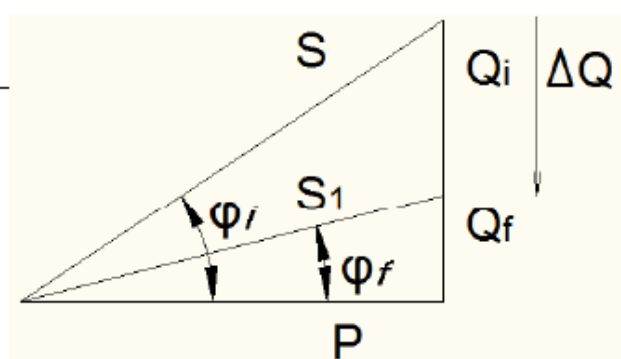
Si el FP o ángulo φ es mayor que el máximo se debe corregir

Corrección del FP

$$S = P + jQ$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi_i) = P \cdot \tan(\varphi_i)$$

$$\varphi_i = \arctg \frac{Q}{P} = \arccos \frac{P}{S}$$



Si $\cos \varphi$ requerido es mejor que el de la instalación. se debe corregir. Tomando $\cos \varphi_f$ como el requerido y siendo $\cos \varphi_i$ el de la instalación

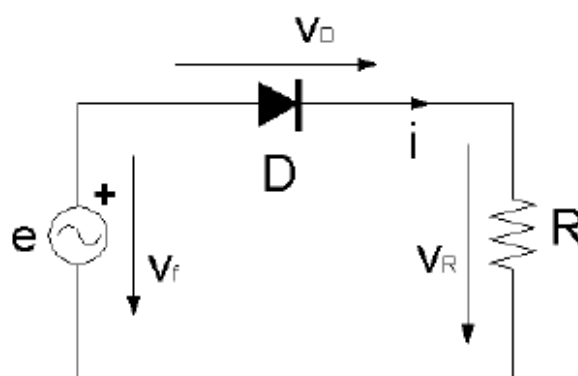
$$\left. \begin{array}{l} Q_f = S \sin(\varphi_f) \\ Q_i = S \sin(\varphi_i) \end{array} \right\} \Delta Q = Q_f - Q_i = S [\sin(\varphi_f) - \sin(\varphi_i)] \Rightarrow C = \frac{Q}{\omega U^2}$$

4.2.7. Potencia de distorsión (no senoidal)

Se pretende calcular la potencia activa, reactiva y aparente en la fuente y en la resistencia del circuito de la figura.

La fem tiene la evolución temporal:

$$e(t) = \sqrt{2} V \operatorname{sen}(\omega t)$$



El diodo es ideal y en forma instantánea se cumple la LTK, es decir:

$$v_f(t) = v_D(t) + v_R(t)$$

La corriente en el circuito será

$$i(t) = \begin{cases} \frac{V \operatorname{sen}(\omega t)}{R} & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Potencias en la resistencia

Instantánea

$$p(t) = v_R(t) i_R(t) = \begin{cases} \frac{V^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)}{R} & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Media o activa

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = \frac{V^2}{2R}$$

Aparente

$$S = V_R I = \frac{V^2}{2R}$$

Reactiva

$$Q = 0$$

Potencias en el diodo

Instantánea

$$p(t) = v_D(t) i_D(t) = 0$$

Media o activa

$$P = 0$$

Reactiva

$$Q = 0_R$$

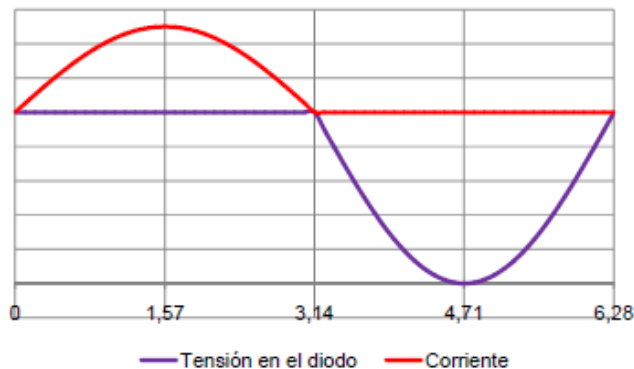
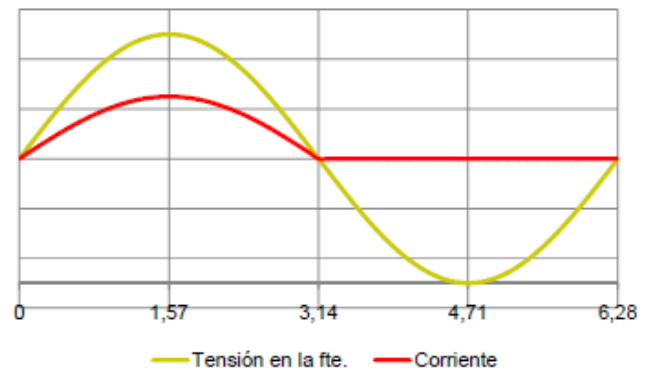
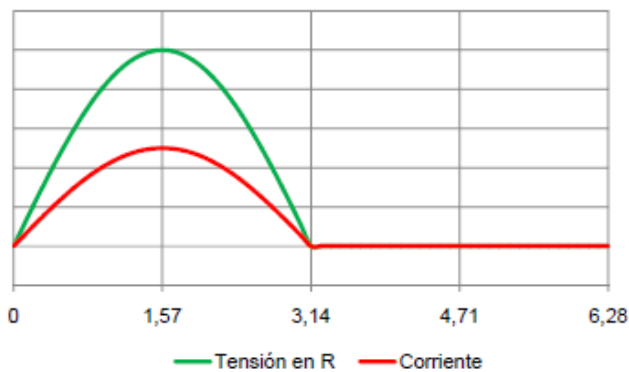
Aparente

$$S = V_R I = \frac{V^2}{2R}$$

Se tiene $S^2 \neq P^2 + Q^2 \longrightarrow S^2 = P^2 + Q^2 + T^2$

T se denomina potencia de distorsión y al cociente T/S coeficiente de distorsión

Análisis cualitativo y formas de onda



4.3. Ejercicios

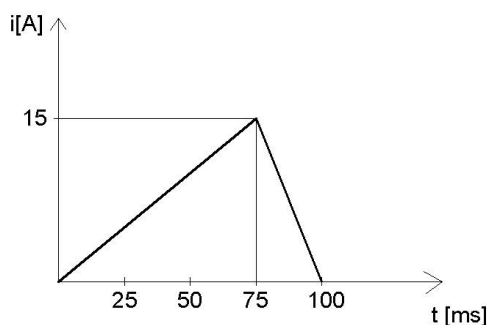
Problema 1

Una carga que consiste en una resistencia de $147\text{k}\Omega$ en paralelo con una inductancia de $50,4\text{ H}$ se conecta en terminales de una fuente de tensión senoidal $v_g = 840 \cos(10^4 t)\text{ V}$.

- ¿Cuál es el máximo valor de la potencia instantánea que suministra la fuente?
- ¿Cuál es el máximo valor de la potencia instantánea que absorbe la fuente?
- ¿Cuál es la potencia media suministrada a la carga?
- ¿Cuál es la potencia reactiva?
- ¿La carga absorbe o suministra VAR inductivos?
- ¿Cuál es el factor de potencia de la carga?

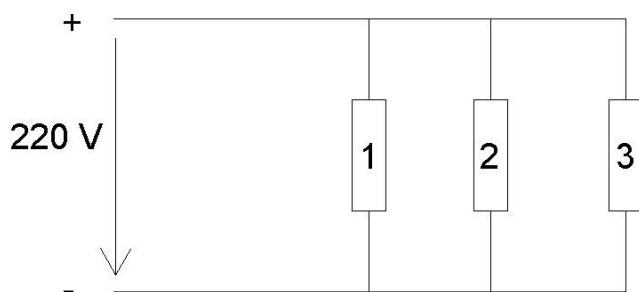
Problema 2

La corriente periódica que se muestra en la figura disipa una potencia media de 3000W en una resistencia. ¿Cuál es el valor de la resistencia?



Problema 3

Se conectan tres cargas en paralelo a través de una línea de 220V (r.m.s.), como se muestra en la figura.



La carga 1 absorbe 12kW y 12kVAR inductivos.

La carga 2 absorbe 6kVA con un factor de potencia de $0,8$ en avance.

La carga 3 absorbe 5kW con un factor de potencia unitario.

- Encontrar la impedancia equivalente.
- Determinar el factor de potencia de la carga equivalente

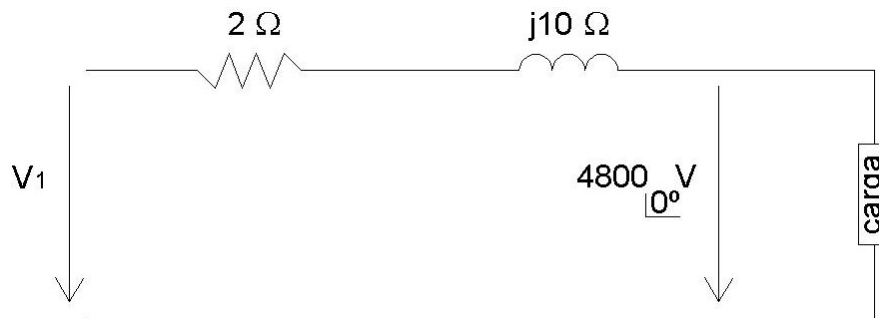
Problema 4

Un taller toma de una línea de 220V (50Hz) una potencia de 10kW con $\cos\phi = 0,707$ inductivo.

- Encontrar R y L de una impedancia equivalente al taller.
- Si la línea de transmisión tiene una impedancia $Z_L = (0,3 + j0,4) \Omega$, calcular la caída de tensión, la pérdida de tensión, la tensión al principio de la línea y el rendimiento de la transmisión.
- Corregir el factor de potencia a 0,9 ind utilizando un capacitor.

Problema 5

La caída de tensión entre el extremo de la carga y el extremo fuente de la línea de alimentación de una fábrica que se muestra en la figura es excesiva. Se coloca un condensador en paralelo con la carga y se ajusta hasta que el voltaje al principio de la línea tenga la misma magnitud que el voltaje en el extremo de la carga, es decir, 4800V (r.m.s.). Calcular el condensador (en μF) si el circuito funciona a 50Hz. La carga es de 192 kVA con un factor de potencia de 0,8 en retardo.



Solución

Para poder realizar este problema se debe tener en cuenta que la potencia activa y la tensión en la carga permanecen constantes.

La corriente de la línea tiene una componente en fase con la tensión de la carga y una en cuadratura, la componente en fase debe permanecer constante para que la potencia activa no varíe. La componente en cuadratura varía con el ajuste del capacitor y será la encargada de lograr que se igualen las tensiones ya que:

$$\dot{V}_1 = V + \dot{I}Z_L (*)$$

Por lo tanto, si se encuentra la parte compleja de la corriente (se toma como referencia a la tensión) que cumpla con la siguiente condición podremos encontrar la capacidad requerida:

$$|\dot{V}_1| = |V + \dot{I}Z_L| = 4800V$$

La corriente antes de la corrección se calcula utilizando la potencia compleja.

$$\tilde{S} = \dot{V}\dot{I}^* = 153,6 + j115,2kVA \Rightarrow \dot{I} = 32 - j24A$$

La corriente luego de la corrección será:

$$\dot{I} = 32 - jX$$

Siendo X la incógnita. De (*) se tiene que:

$$\dot{V}_1 = 4800 + (32 + jX)(2 + j10) = 4800 + 64 + j320 + j2X - 10X$$

Trabajando con módulos se obtiene:

$$4800V = \sqrt{(4864 - 10X)^2 + (320 + 2X)^2}$$

Que resulta una ecuación cuadrática que da como resultado dos valores

$$X = 7,6 \text{ A y } X = 915,4 \text{ A}$$

Si se elige el menor valor (menor corriente, menores pérdidas en la línea) se obtiene el valor de la corriente:

$$\dot{I} = 32 + j7,6$$

Luego se calcula el nuevo valor de la potencia compleja en la carga

$$\tilde{S} = \dot{V}\dot{I}^* = 153,6 - j36,48 \text{ kVA}$$

De la diferencia entre la vieja y la nueva potencia reactiva se obtiene la potencia reactiva aportada por el capacitor:

$$Q_C = Q_V - Q_N = 115,2 + 36,48 = 151,7 \text{ kVAR}$$

Entonces se encuentra el valor de la capacidad:

$$X_C = \frac{U^2}{Q_C} = 151,8 \Omega \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_C} = 21 \mu F$$

Problema 6

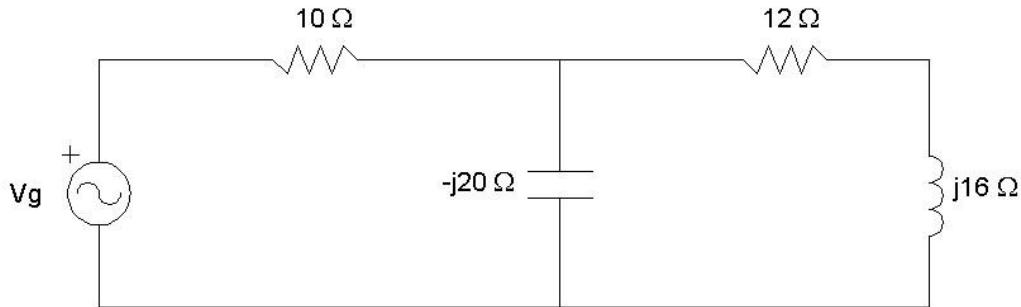
Una fábrica tiene una carga eléctrica de 1200 kW con un factor de potencia en retardo de 0,8. Se agregará una carga adicional con un factor de potencia variable que añadirá 240 kW a la carga de potencia global de la fábrica. El factor de potencia de la nueva carga se ajustará hasta que el factor de potencia global de la fábrica sea de 0,96 inductivo.

- Especificar la potencia reactiva asociada a la carga adicional.
- ¿La nueva carga genera o consume VAR inductivos?
- ¿Cuál es el factor de potencia de la carga adicional?
- Calcular la corriente que entra a la fábrica antes y después de agregar la carga adicional si la tensión de entrada es 2500 V.

Problema 7

La tensión V_g en la representación fasorial del circuito de la figura es $170V \angle 0^\circ$

- Encontrar las potencias media y reactiva en la fuente.
- ¿Absorbe o suministra potencia activa?
- ¿Absorbe o suministra potencia reactiva?
- Encontrar las potencias media y reactiva en cada una de las ramas.
- Realizar un balance energético de la potencia activa y reactiva.



Problema 8

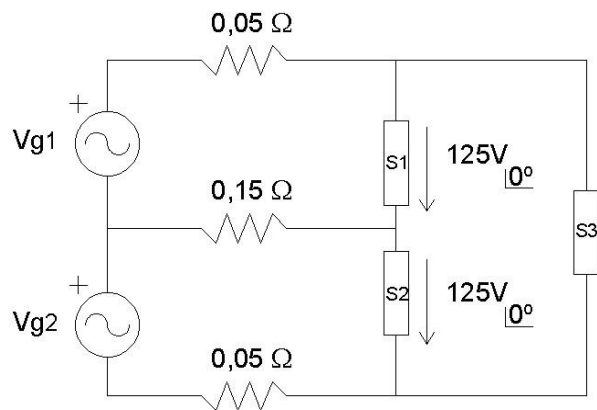
Las tres cargas del circuito de la figura son:

$$S_1 = (4+j1) \text{ kVA}$$

$$S_2 = (5+j2) \text{ kVA}$$

$$S_3 = (10+j0) \text{ kVA}$$

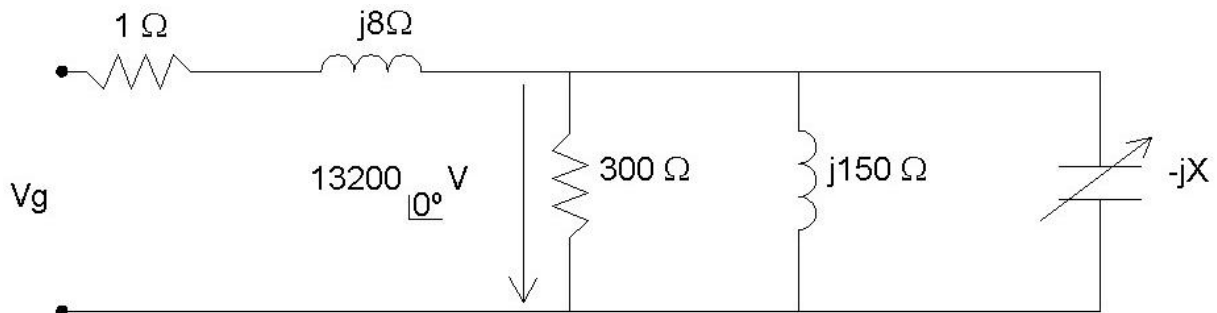
- Calcular la potencia compleja asociada a cada fuente.
- Realizar el balance energético.



Problema 9

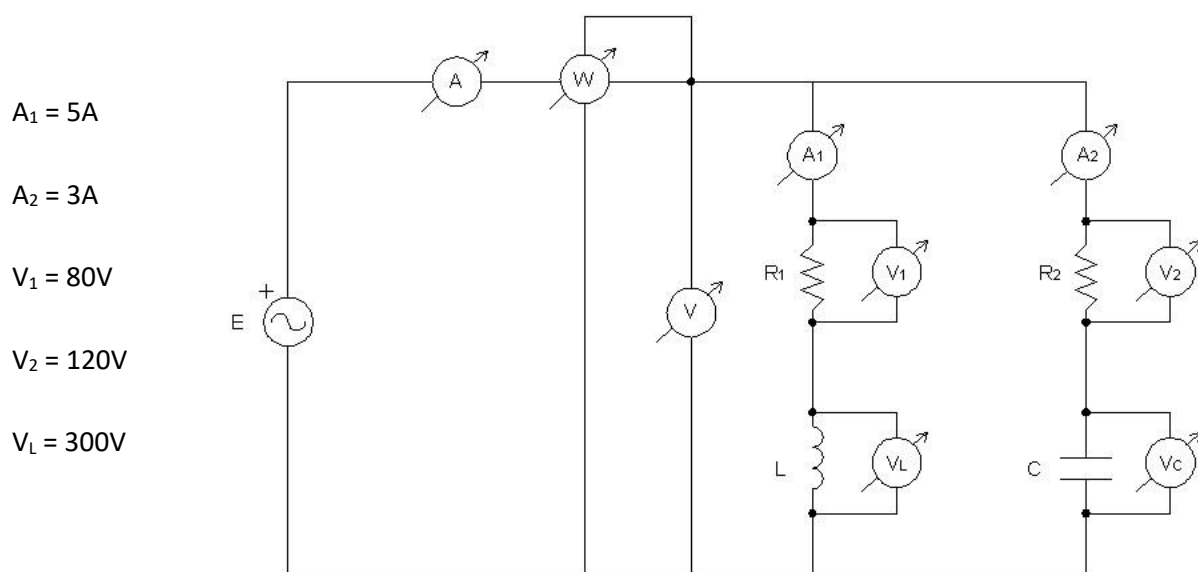
La tensión del extremo emisor en el circuito de la figura se ajusta para que el valor eficaz de la tensión en la carga sea siempre de 13200 V. El condensador variable se ajusta hasta que la potencia media disipada en la resistencia de línea sea mínima.

- Si la frecuencia de la fuente sinusoidal es de 50 Hz. ¿Cuál es el valor de la capacidad en μF ?
- Si se elimina el condensador del circuito. ¿Cuál es el porcentaje de aumento de la magnitud de V_g requerido para mantener los 13200V en la carga?
- Si se elimina el condensador del circuito ¿Cuál es el porcentaje de aumento en la pérdida de la línea?



Problema 10

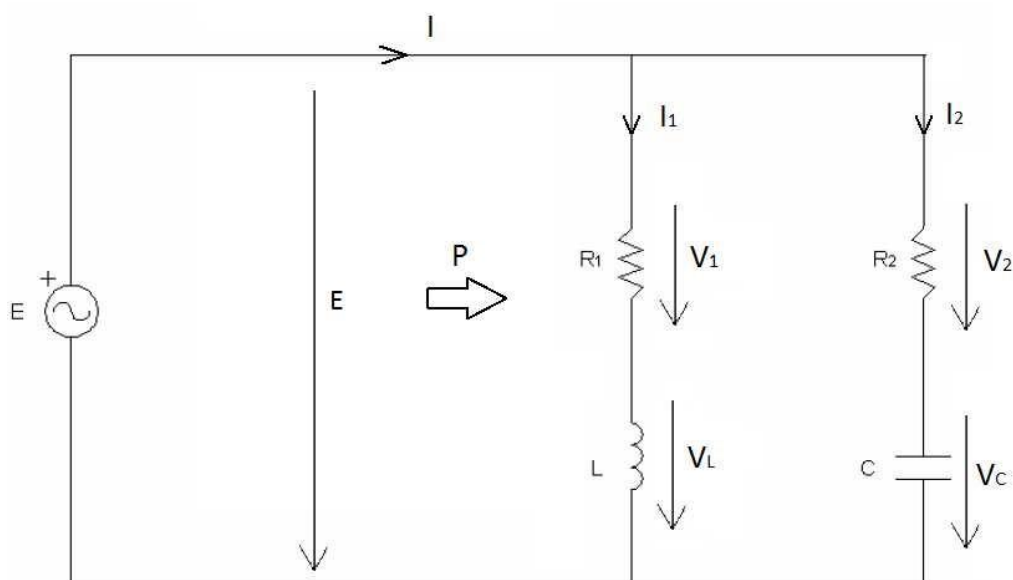
En el circuito de la figura se han realizado las siguientes lecturas:



Si la frecuencia del generador es 50Hz determinar la lectura de los demás instrumentos.

Solución

Para iniciar la resolución este ejercicio es necesario identificar qué mide cada uno de los instrumentos, lo que se esquematiza en la figura siguiente.



Donde P es la potencia activa que la fuente E le suministra a la carga.

Queda claro entonces que las incógnitas a hallar son: E, P, V_c e I.

La caída de tensión en R_1 está en fase con la corriente I_1 , mientras que la de la inductancia adelanta a la corriente 90° , teniendo esto en cuenta y los valores eficaces de dato se construye el siguiente diagrama fasorial. *(Tensiones y corrientes en distintas escalas)*

Se tomó como referencia la fase de $V_1 \rightarrow E = V_1 + jV_L = 310,48V / 75^\circ \rightarrow$
El voltímetro V marcará 310,48V

Para el cálculo de potencia activa debe tenerse en cuenta que P es la sumatoria de las potencias activas disipadas en las resistencias R_1 y R_2 . Como se conocen los valores eficaces de Tensión y Corriente en ambas:

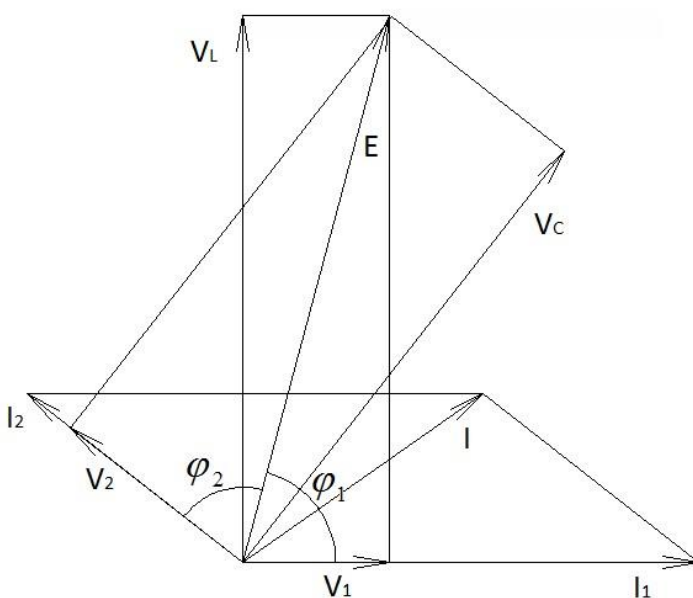
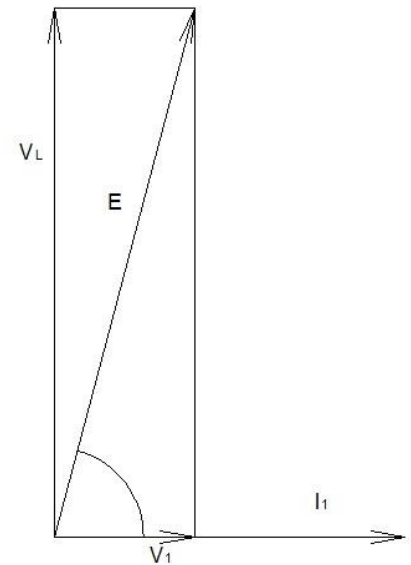
$$P = V_{11} \cdot I_1 + V_{22} \cdot I_2 = 760W$$

Cabe aclarar que el factor de potencia para los elementos resistivos puros es la unidad, dando el cálculo de la potencia activa el producto entre tensión y corriente.

La potencia activa de R_2 puede obtenerse como: $P_2 = E \cdot I_2 \cdot \cos(\phi_2) = V_2 \cdot I_2 \rightarrow$ Despejando, $\phi_2 = \cos^{-1}(V_2/E) = 67^\circ$

Como se conoce que el circuito serie de R_2 y C conforma un dipolo con fp capacitivo la corriente adelanta a la tensión 67° . Entonces: $V_C = E \cdot \sin(\phi_2) = 286,35V$

V_2 está en fase con I_2 , conociendo su valor eficaz se dibuja I de la suma de I_1 e I_2 obteniendo el diagrama:



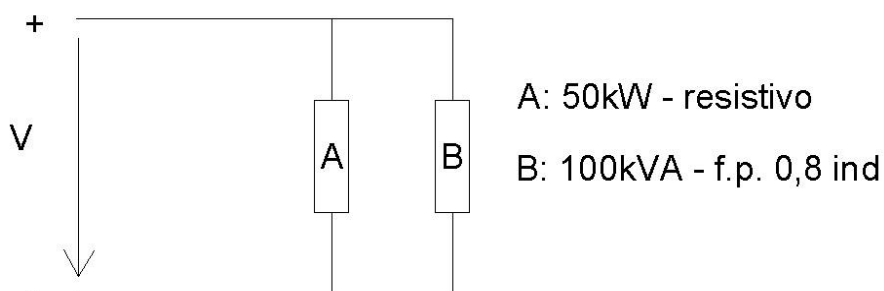
I puede obtenerse con la ayuda del diagrama como:

$$I = I_1 - I_2 \cos(\phi_{aux}) + jI_2 \sin(\phi_{aux}) \quad \text{Donde} \quad \phi_{aux} = 180^\circ - (\phi_1 + \phi_2) = 38^\circ$$

Finalmente, el amperímetro A marcará que I vale 3,22A

Problema 11

Una planta es alimentada con una tensión de 7,6kV, teniendo en cuenta la siguiente distribución de cargas:

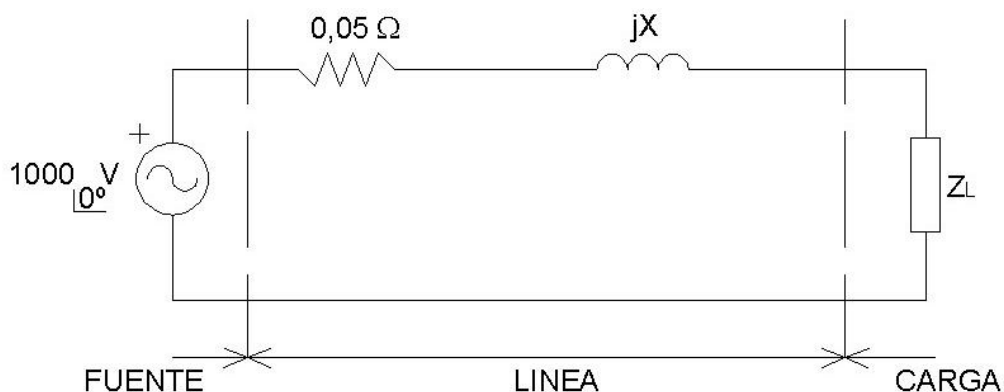


- Determinar el f.p. de la instalación.
- Calcular los capacitores a agregar si se desea corregir el f.p. a 0,95 ind.
- Si el costo de la energía es de 0,09 \$/kWh calcular la facturación diaria si trabaja 16 hs por día.

Opcionales

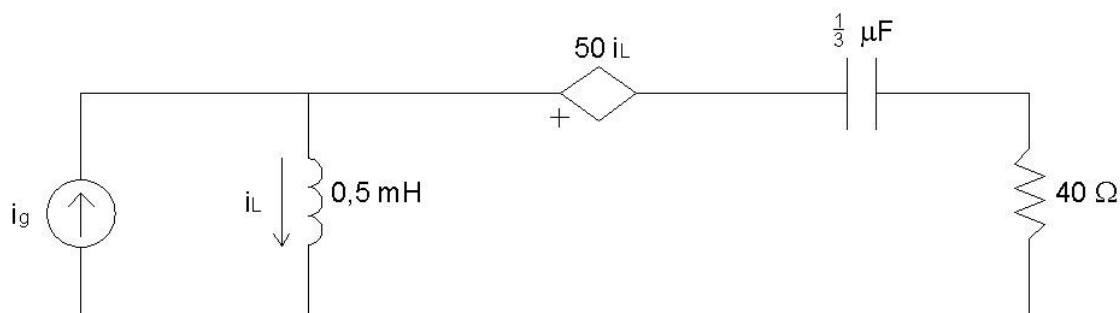
Problema 12

La impedancia de carga capacitiva de la figura tiene una magnitud de 100Ω y absorbe una potencia de 6144 W. La fuente de tensión sinusoidal suministra 6400 W. Encontrar la reactancia inductiva de la línea.



Problema 13

Encuentre la potencia disipada en la resistencia de 40Ω en el circuito si: $i_g = 4 \times \cos(10^5 t)$ A

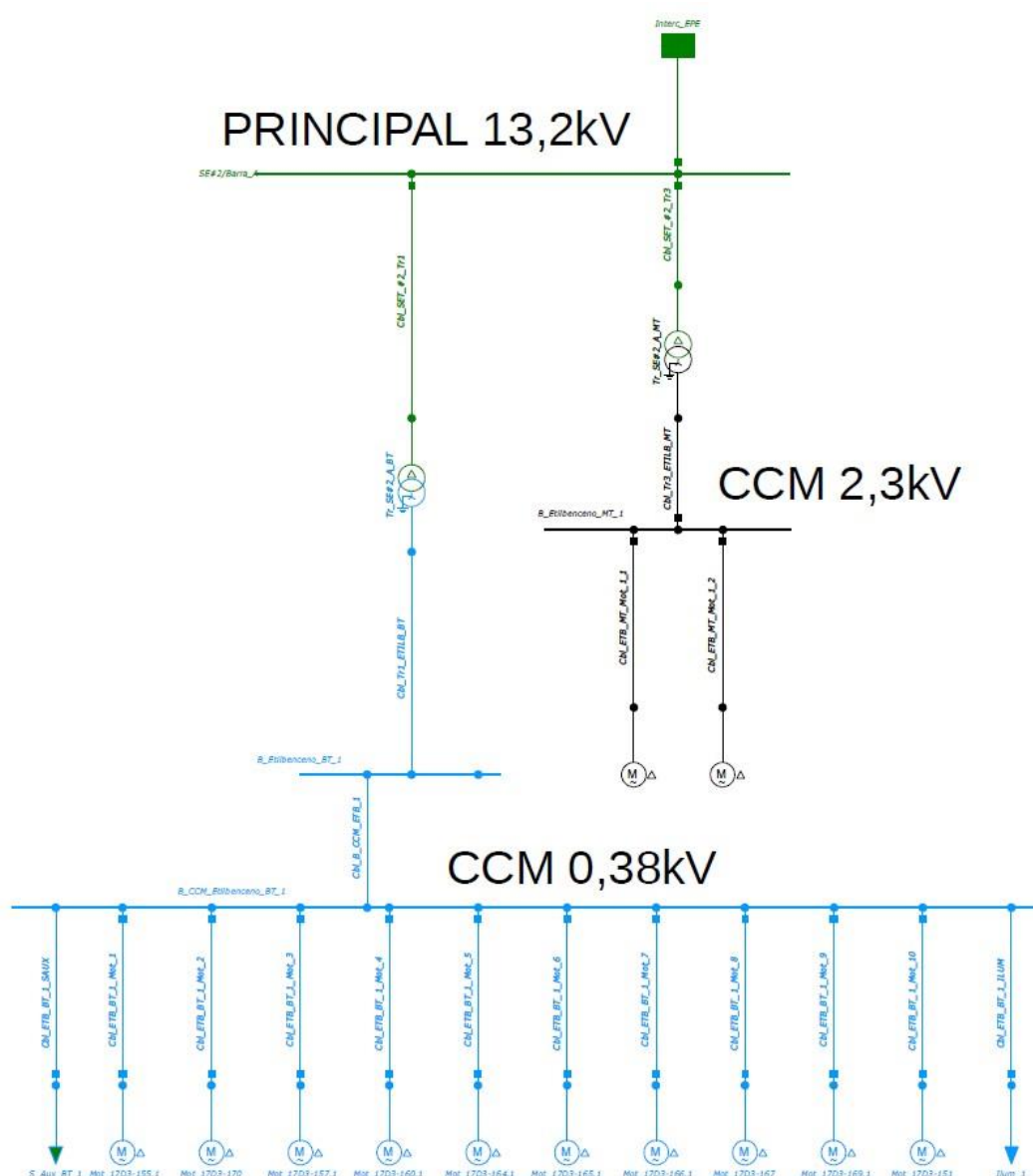


4.4. Caso de aplicación – Compensación de factor de potencia

El caso bajo análisis corresponde a una sección de la instalación eléctrica correspondiente a una industria petroquímica localizada en la localidad de Puerto General San Martín, Santa Fe, Argentina. La planta en estudio cuenta con una torre de destilación de donde el principal producto es el Etilbenceno, siendo los principales consumos eléctricos de la planta motores de diversos tamaños los cuales accionan bombas para el movimiento de los fluidos.

4.4.1. Características de la red

La siguiente figura representa esquemáticamente la configuración simplificada de la red. Se observa la alimentación a dos Centro de Control de Motores (CCM) uno de baja (0,38kV) y otro de media tensión (2,3kV), la barra principal de entrada es de 13,2kV.



A continuación, se detallan los niveles de potencia (activa, reactiva y aparente) instalada y simultánea del complejo.

Demanda		Potencia Instalada				Potencia Simultánea				
Grupo	Tensión	Activa P [kW]	Reactiva Q [kVAr]	Aparente S [kva]	$\cos\phi$	Activa P [kW]	Reactiva Q [kVAr]	Aparente S [kva]	$\cos\phi$	Factor de Simultaneidad
I	380 V	473	228	525	0,90	261	126	290	0,90	0,55
II	2,3 kV	1202	589	1338	0,90	601	294	669	0,90	0,50
Total	-	1674	817	1863	0,90	862	420	959	0,90	0,51

Tabla 1 – Resumen Demanda

4.4.2.Cálculo de la compensación CCM 380V

Para la compensación de reactivo al nivel de 380 V se plantea un banco automático de compensación instalado en el CCM, dimensionado para compensar hasta un factor de potencia de **0,97 inductivo** y con pasos que resulten acordes con los motores que puedan encontrarse E/S en cada uno de los tableros.

En este caso la demanda a compensar resulta (máxima potencia simultanea): **P = 261 KW fp= 0.9.**

Con el objetivo de disponer de un banco que permita compensar el factor de potencia hasta f.p.=0.97i ($\phi =14^\circ$). Se requerirá potencia reactiva Q_{Cap} .

$$Q_{Cap} = Q_{actual} - Q_{final} = 126 \text{ kVar} - 261 \text{ kW} \times \tan(14^\circ) = 60 \text{ kVar}$$

$$Q_{Cap} = 60 \text{ kVar}$$

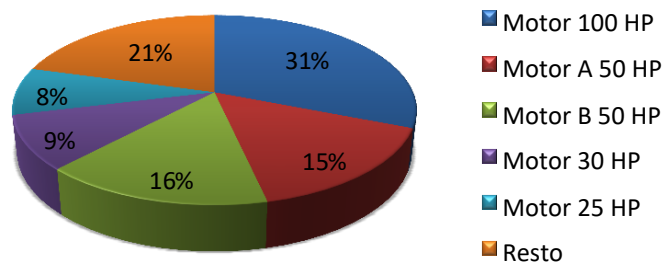
Dependiendo de la fase del proceso la demanda puede presentar variabilidad en sus consumos. Por esta razón se propone que el banco no sea fijo, sino que cuente con un regulador automático de factor de potencia con pasos acordes a la demanda alimentada. El objetivo es asegurar que siempre se cuente con un factor de potencia igual a 0,97 inductivo o mejor (hasta 1,00).

Para la definición de la cantidad de pasos y las dimensiones de cada uno de estos se realiza un “ranking” de potencias reactivas consumidas por las demandas asociadas al CCM. En la siguiente tabla se aprecia que la potencia reactiva demandada y la propuesta arribada de cinco pasos de compensación.

Consumo	Q [kVAr]	Proporción
Motor 100 HP	39	31%
Motor A 50 HP	20	16%
Motor B 50 HP	20	16%
Motor 30 HP	12	9%
Motor 25 HP	10	8%
Resto	26	21%

Tabla 2 – Potencia Reactiva demandada

4.4.2.1. Distribución del Consumo de Reactivo



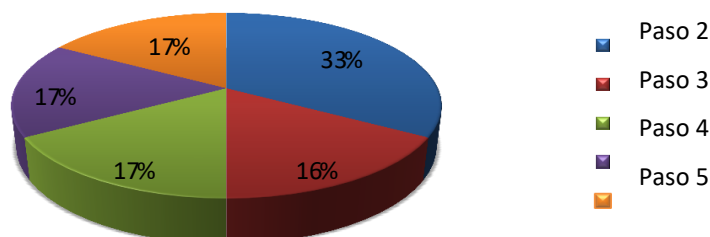
Por esta razón se propone la implementación de un banco de capacitores formado por los siguientes pasos:

Distribución	Q [kVAr]	Proporción
Paso 1	20	33%
Paso 2	10	17%
Paso 3	10	17%
Paso 4	10	17%
Paso 5	10	17%

Tabla 3 – Potencia Reactiva entregada

4.4.2.2. Distribución del Banco Capacitivo

Paso 1



Por la naturaleza del proceso se prevé que siempre se accionen las bombas más grandes en primera instancia y luego los motores complementarios de menor tamaño. Así las posibles demandas corresponden a los valores mostrados en la siguiente tabla. En punto relleno representa que tal motor se encuentra operativo.

Motor	100HP	50HP A	50HP B	30HP	25HP	Resto	Potencia Demandada		
P [kW]	80	40	40	24	20	56	P	Q	Cosfi
Q [kVAr]	39	20	20	12	10	26	[kW]	[kVAr]	
Condición	●	○	○	○	○	○	80	39	0,90
	●	●	○	○	○	○	121	59	0,90
	●	●	●	○	○	○	161	79	0,90
	●	●	●	●	○	○	185	91	0,90
	●	●	●	●	●	○	205	101	0,90
	●	●	●	●	●	●	261	127	0,90

Se valida el desempeño del banco propuesto comparando la operación del mismo para cada condición de demanda. Tal como se aprecia el banco propuesto, en cantidad de pasos y montos de cada paso, logra compensar satisfactoriamente la planta en cada condición operativa.

	Banco						Demanda		Ceto	
Paso	1	2	3	4	5	Q	P	Q	Q	Cosfi
Q [kVAr]	20	10	10	10	10	[kVAr]	[kW]	[kVAr]	[kVAr]	
Condición	●	○	○	○	○	20	80	39	19	✓ 0,97
	●	●	○	○	○	30	121	59	29	✓ 0,97
	●	●	●	○	○	40	161	79	39	✓ 0,97
	●	●	●	●	○	50	185	91	41	✓ 0,98
	●	●	●	●	●	60	205	101	41	✓ 0,98
	●	●	●	●	●	60	261	127	67	✓ 0,97

4.4.2.3. Especificaciones

Finalmente se proponen las siguientes especificaciones para el banco:

- Tensión Nominal = **400 V**
- Frecuencia Nominal = **50 Hz**
- Módulos = **1 x 20 kVAr (3x133uF) + 4 x 12,5 kVAr (3x83,3 uF)**
- Potencia Total Nominal = **70 kVAr (400V)**
- Corriente Nominal del Banco: **101 A (400V)**
- Potencia Total de Operación = **63 kVAr (380V)**
- Regulador: **Electrónico de 5 pasos**
- Contactores: **Tripolares con resistencia de preinserción. 1xBF25K (In = 30A) + 4xBF12K (In=18A)**
- Protección: **Fusibles gG 1x40A + 4x25A**

Notar que la tensión nominal adoptada para los capacitores es mayor a la nominal de trabajo. Como la potencia reactiva depende del cuadrado de la tensión deberá especificarse correctamente la potencia nominal respecto (Qnominal @ Unominal) a la requerida (Qrequerida @ U trabajo).

4.4.3.CCM 2,3 kV

Para la compensación de reactivos en 2,3 kV se plantea una compensación individual para cada motor

4.4.3.1. Motores de 600 HP

La potencia requerida por el motor en las condiciones de operación es de P=477kW y Q_M=231 kVAr (f.p.=0.9). Considerando una compensación a f.p.= 0,97 ($\varphi = 14^\circ$), se requerirá una compensación reactiva de:

$$Q_{Cap} = Q_{actual} - Q_{final} = 231 \text{ kVar} - 447 \text{ kW} \times \tan(14^\circ) = 120 \text{ kVar}$$

Las especificaciones para la compensación de este tipo de motor resultan:

- Tensión Nominal = **2,3 kV**
- Frecuencia Nominal = **50 Hz**
- Potencia Total Nominal = **120 kVAr**
- Corriente Nominal = **30 A**
- Contactores: **Tripolares de vacío con resistencia de preinserción**
- Protección: **Fusible gG 40A**

4.4.3.2. Motores de 150 HP

La potencia requerida por el motor en las condiciones de operación es de $P=123\text{kW}$ y $Q_M=63\text{ kVAr}$ (f.p.=0.89). Considerando una compensación a f.p.= 0,97 ($\varphi =14^\circ$), se requerirá una compensación reactiva de:

$$Q_{Cap} = Q_{actual} - Q_{final} = 63\text{ kVAr} - 123\text{kW} \times \tan(14^\circ) = 32\text{ kVAr} \rightarrow \mathbf{30\text{ kVAr}}$$

Las especificaciones para la compensación de este tipo de motor resultan:

- Tensión Nominal = **2,3 kV**
- Frecuencia Nominal = **50 Hz**
- Potencia Total Nominal = **30 kVAr**
- Corriente Nominal = **7,5 A**
- Contactores: **Tripolares de vacío con resistencia de preinserción**
- Protección: **Fusible gG 10A**

5. MÉTODOS DE RESOLUCION DE REDES

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores el análisis de los sistemas eléctricos se ha limitado a circuitos relativamente sencillos. La resolución de estos se realizaba mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff de manera casi directa sin la necesidad de conformar sistemas de ecuaciones. Esto se debía a que los circuitos contaban con una única fuente y reducido enmallamiento. A su vez, en los casos donde aparecía más de una fuente, estas se encontraban colocadas estratégicamente para facilitar la resolución.

En el análisis de sistemas eléctricos reales, es muy factible encontrarse con redes de diferente magnitud que presentan múltiples fuentes. Un ejemplo claro son los sistemas eléctricos interconectados como lo son las redes de generación, transmisión y distribución de países. En estas todas las plantas de generación (cualquiera sea su fuente primaria) y los consumos (residenciales o industriales) forman parte de la misma red eléctrica, vinculándose por medio de líneas de alta y media tensión. Un sistema de estas características tiene cientos de elementos, es fácil imaginarse la gran complejidad que posee su representación circuital.

Cuanto mayor el tamaño y la cantidad de elementos involucrados más trabajosa se vuelve la resolución, haciendo que la simple aplicación de las leyes de Kirchhoff ya no resulte la herramienta más adecuada. Esto ha llevado a que con el correr del tiempo se hayan desarrollado métodos más convenientes que permiten facilitar y agilizar la resolución de circuitos eléctricos.

En este capítulo se presentan dos métodos denominados de “Corrientes de mallas” y de “Tensiones de nudos”. Ambos permiten la resolución de circuitos mediante la aplicación de un sistema de ecuaciones mínimo del cual surgen las magnitudes esenciales que definen el comportamiento del sistema y a partir de las cuales es posible determinar todas las variables restantes. Si bien en ciertos circuitos ambos métodos resultan igualmente efectivos, en otros la aplicación de uno y no el otro puede facilitar considerablemente la tarea.

Volviendo a los sistemas eléctricos interconectados su tamaño es tal que la resolución manual sería prácticamente imposible. Sin embargo, existen herramientas computacionales que permiten automatizar la resolución, las cuales utilizan como forma de cálculo variantes de los métodos aquí presentados.

5.1.1. Definiciones

La aplicación exitosa de los métodos de resolución requiere conocer y reconocer las diferentes partes en las que puede dividirse un circuito.

Rama

Conjunto de elementos conectados en serie y que por lo tanto se encuentran circulados por la misma corriente. Un circuito tiene tantas ramas como corrientes diferentes puedan calcularse. Una rama tiene principio y fin

entre dos puntos. Ver por ejemplo los elementos R_1 , R_2 y E_1 entre los puntos A y D de la Figura 5-1. También es una rama la resistencia R_5 entre los puntos B y C.

Punto

Es la unión entre dos o más ramas

Nudo

Lugar de concurrencia de tres o más ramas. Así como la rama se caracteriza por su corriente, los nudos lo hacen por su potencial. Un circuito posee tantos nudos como potenciales distintos puedan calcularse, esto significa que puntos contiguos vinculados a través de una rama sin elementos (un cortocircuito) forman parte del mismo nudo eléctrico ya que comparten el potencial. En la Figura 5-1 donde podrían a priori identificarse 4 nudos (A-B-C y D) en realidad solo existen 3 ya que los puntos A y B pueden unirse sin alterar el funcionamiento del circuito tal como se presenta en la Figura 5-2.

Malla o bucle

Es un camino cerrado, conformado por dos o más ramas a través de las cuales es posible aplicar la segunda ley de Kirchhoff. Una Malla puede involucrar tantas corrientes diferentes como ramas ésta abarque. En la Figura 5-1 pueden identificarse entre otras una malla compuesta por los elementos R_1 , E_2 , R_3 , R_2 , E_1 u otra con los elementos E_2 , R_4 , R_6 , E_3 , R_5 . Queda para el lector identificar otras mallas.

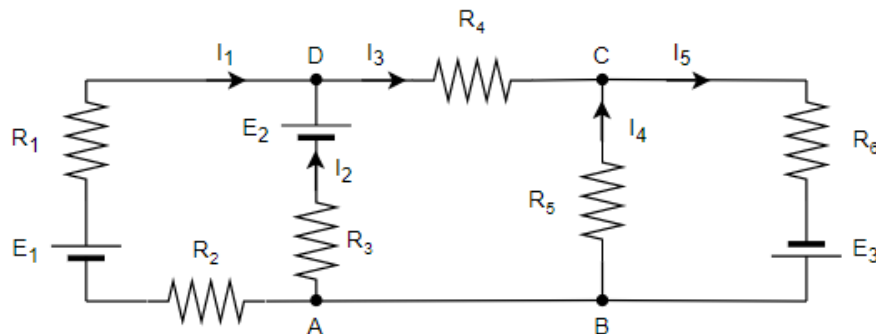


Figura 5-1: circuito original

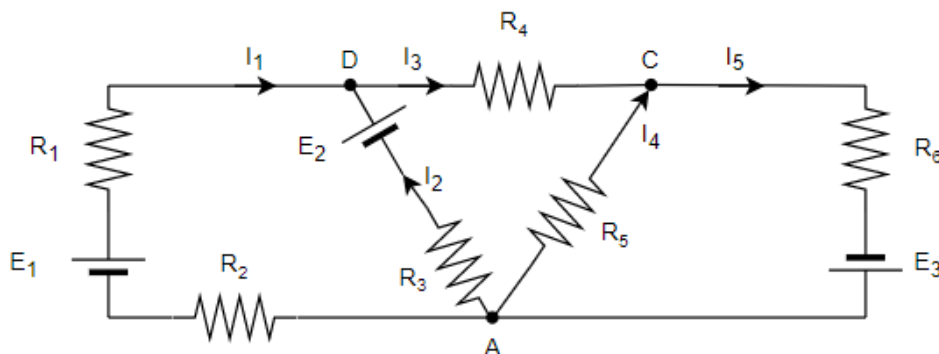


Figura 5-2: Cambio de representación gráfica que no altera funcionamiento

Redes planas

La red puede ser desarrollada en un plano

Redes no planas

La red no puede ser desarrollada en un plano

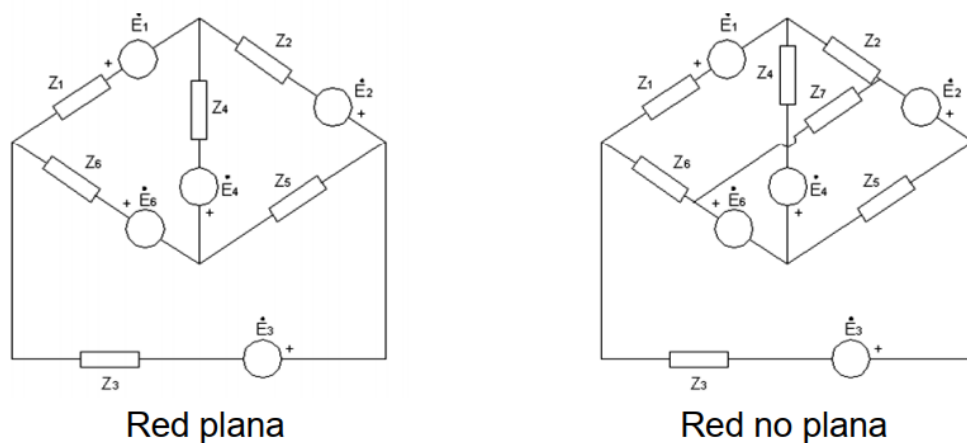


Figura 5-3

Gráfico de una red

Es un esquema que presenta la forma del circuito mediante sus ramas y nudos sin considerar los elementos eléctricos constitutivos.

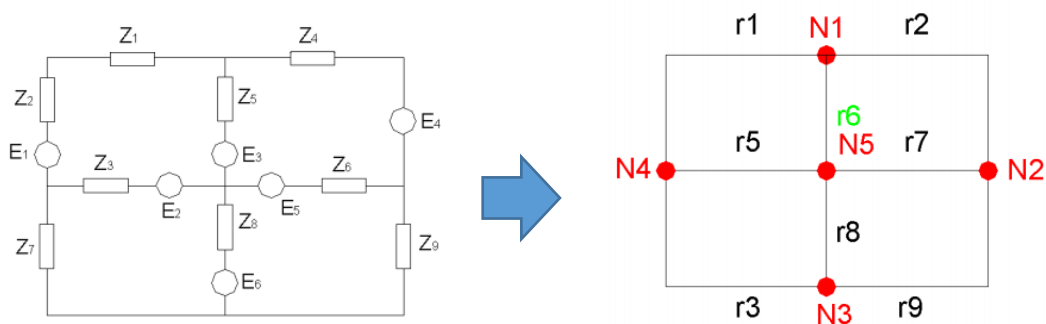


Figura 5-4: Gráfico de una red

Árbol

Es un subconjunto de ramas que une todos los nudos sin formar un camino cerrado, es decir, una malla. En consecuencia, si un circuito posee n nudos entonces el árbol está constituido por $n-1$ ramas. Dado el gráfico de una red, existen múltiples conjuntos de ramas que pueden conformar un árbol, tal como se presenta a continuación.



Figura 5-5

Ramas de enlace

Es el subconjunto de ramas de la red que no conforman el árbol. Habiendo definido un árbol, el agregado de una rama de enlace al gráfico de red permite la circulación de corriente. Debe recordarse que el árbol no forma un camino cerrado.

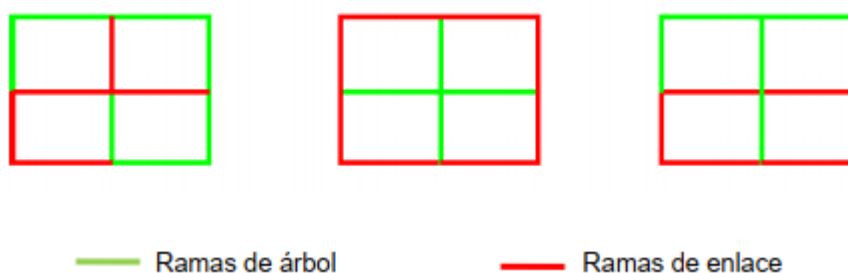


Figura 5-6: Ejemplos de arboles y ramas de enlace para una misma red

5.1.2.Planteamiento del problema

Resolver un circuito significa calcular todas las corrientes en sus ramas y los potenciales de todos sus nudos. Para esto pueden aplicarse las leyes de Kirchhoff, la primera como la sumatoria de corrientes en cada nudo y la segunda como la sumatoria de las caídas de potencial en las diferentes mallas que el circuito posea.

En una red con “**b**” ramas y “**n**” nudos existen **b + n** variables de red, es decir, **b + n** incógnitas. Esto implica inicialmente construir un sistema de igual cantidad de ecuaciones para resolver el problema. Sin embargo, no todas esas ecuaciones resultan linealmente independientes por lo cual es posible reducir su cantidad.

En la aplicación de la ley de Kirchhoff de corrientes sobre los nudos del circuito no es necesario hacerlo sobre la totalidad de ellos, ya que al momento de resolver la ecuación del nudo **n** ya serán conocidas todas las corrientes del circuito. Por ejemplo, en la Figura 5-2 si resuelven las ecuaciones en los nudos C (de donde surge el valor de las corrientes I3, I4, I5) y también aplicarla en el nudo D (de donde surgen las corrientes I1 e I2) no es necesario

realizarlo en el nudo A ya que todas las corrientes han sido previamente calculadas. Con esto del total de n nudos solo pueden construirse $n-1$ ecuaciones linealmente independientes.

La ley de Kirchhoff de tensiones se aplica sobre caminos cerrados, es decir sobre las mallas del circuito. Sin embargo, al igual que en el caso anterior, no es necesario aplicarla sobre todas las mallas que pueden identificarse (un circuito de b ramas y n nudos posee $b + n$ mallas distintas). El objetivo entonces es encontrar la cantidad de mallas mínima que permite la construcción de un sistema de ecuaciones linealmente independiente. Siendo que el número de mallas coincide con el de incógnitas planteadas inicialmente y que ya se han planteado $n-1$ ecuaciones de nudos, resulta entonces que las ecuaciones de mallas linealmente independientes son $b - (n-1)$

Por lo anterior, la resolución de un circuito con n nudos y b ramas por el método de Kirchhoff demanda la escritura de

$n-1$ ecuaciones de nudo

$b-(n-1)$ ecuaciones de mallas

Es decir que el sistema que se debe resolver es de b ecuaciones

Para afianzar la comprensión de este método se presenta a continuación su aplicación sobre el circuito de la siguiente figura. De la inspección de este circuito se concluye que el mismo posee 3 nudos y 5 ramas. Según lo descrito anteriormente el método requiere la aplicación de 2 ecuaciones en nudos y 3 ecuaciones en mallas.

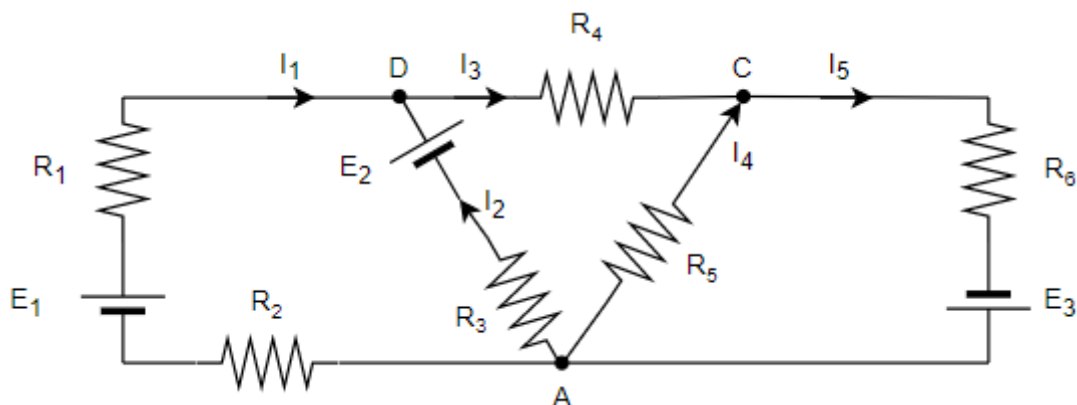


Figura 5-7

Se comienza con la aplicación de la primera ley de Kirchhoff sobre los nudos C y D. Se consideran inicialmente los sentidos de circulación de corriente indicados en la figura los cuales se han definido arbitrariamente. El sentido real de circulación quedará establecido luego de la resolución del circuito.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

A continuación, se plantea la segunda ley de Kirchhoff sobre 3 mallas cerradas, en este caso se elige partir desde el nudo A y recorrer las mallas hasta regresar a éste haciendo en el camino la sumatoria de las caídas de potencial:

$$I_1 * R_2 - E_1 + I_1 * R_1 + E_2 - I_2 * R_3 = 0$$

$$I_2 * R_3 - E_2 + I_3 * R_4 - I_4 * R_5 = 0$$

$$I_4 * R_5 + I_5 * R_6 - E_3 = 0$$

Una vez que se tienen las “b” ecuaciones en este caso 5, se debe reagrupar para formar un sistema de ecuaciones donde las corrientes de cada rama son las incógnitas.

$$I_1 + I_2 - I_3 + 0 * I_4 + 0 * I_5 = 0$$

$$0 * I_1 + 0 * I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

$$(R_1 + R_2) * I_1 - R_3 * I_2 + 0 * I_3 + 0 * I_4 + 0 * I_5 = E_1 - E_2$$

$$0 * I_1 + R_3 * I_2 + R_4 * I_3 - R_5 * I_4 + 0 * I_5 = E_2$$

$$0 * I_1 + 0 * I_2 + 0 * I_3 + I_4 * R_5 + I_5 * R_6 = E_3$$

La resolución del sistema anterior permite encontrar la corriente en cada rama pudiéndose luego calcular la diferencia de potencial entre los nudos.

Si bien la aplicación de este método puede resultar relativamente sencilla en este circuito no lo es para sistemas más grandes, tal como ha sido descripto anteriormente. Es por esto que se propone la introducción de dos nuevos métodos que permiten la resolución minimizando la cantidad de ecuaciones y sistematizando a resolución.

5.2. Método de los potenciales de nudos

El objetivo de este método es encontrar el potencial, es decir, un nivel de tensión asociado cada nudo del circuito. Es importante entender que un nudo no posee un potencial específico, sino una diferencia de potencia respecto a un punto de referencia. Esta última puede encontrarse dentro o fuera del circuito. En consecuencia, si se modifica la referencia también lo hace el potencial de cada nudo.

Para este método la referencia se establece dentro del propio circuito y en particular en uno de los nudos del mismo. Establecer un nudo como referencia implica fijarle un potencial (un valor de tensión) a partir del cual se mide la tensión de los nudos restantes. Por conveniencia y simplicidad la tensión del nudo de referencia se fija en cero voltios.

Al fijar la tensión de un nudo además de establecer una referencia se elimina una de las incógnitas ya que como se mencionó anteriormente, el objetivo es encontrar el potencial de todos los nudos. Dicho esto, un circuito de **n** nudos tiene **n-1** incógnitas desde punto de vista de este método, lo que implica además la necesidad de construir un sistema de **n-1** ecuaciones.

Para presentar la aplicación de este método se utiliza una técnica intuitiva ejecutada sobre un circuito ejemplo desde donde luego es posible generalizar alcanzando una metodología que aplique a cualquier sistema.

El siguiente circuito ya es conocido y posee 3 nudos. Se ha indicado con ϕ a la tensión o potencial de cada nudo y en particular se ha elegido el nudo 1 como referencia asignándole una tensión nula.

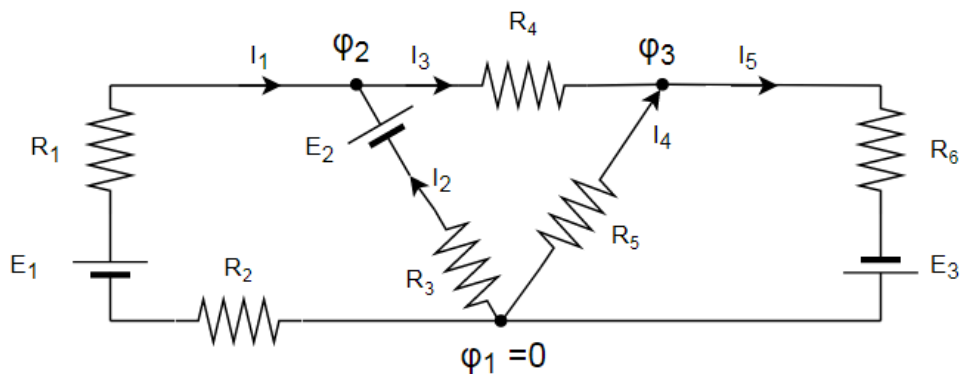


Figura 5-8

El desarrollo comienza escribiendo la primera ley de Kirchhoff sobre los nudos 2 y 3 es decir aquellos que no son referencia. Se aclara que la demostración es independiente del sentido arbitrario elegido para las corrientes indicadas en la figura.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

Luego se escribe cada corriente en función de los potenciales de nudos aplicando la segunda ley de Kirchhoff en cada una de las ramas correspondientes.

Por ejemplo si se aísla la rama 1 del circuito (Figura 5-8), puede aplicarse sobre ésta la segunda ley de Kirchhoff, recorriendo el bucle en sentido horario desde el vértice superior derecho:

$$U + I_1 * R_{E1} + I_1 * R_2 - E_1 + I_1 * R_1 = 0$$

En la ecuación anterior se ha considerado inicialmente la caída de tensión sobre la resistencia interna de la fuente de tensión (R_{E1}). Es importante recordar que dicha resistencia debe ser siempre tomada en cuenta a la hora de analizar un circuito. En particular en este caso todas las fuentes son del tipo ideal por lo que su

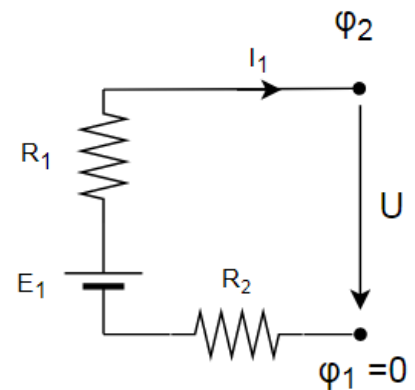


Figura 5-9

resistencia interna es **cero**, lo que permite eliminar la caída de tensión. Tomando esto se continúa el desarrollo como sigue.

$$U + I_1 * R_2 - E_1 + I_1 * R_1 = 0 \quad \leftarrow U = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 + I_1 * R_2 - E_1 + I_1 * R_1 = 0 \quad \leftarrow \varphi_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{E_1 - \varphi_2}{R_1 + R_2}$$

Según la expresión anterior la corriente 1 circulará en el sentido asumido cuando la fuente de tensión posea un valor mayor al potencial del nudo 2.

Utilizado la misma técnica se escriben las expresiones de las corrientes restantes.

$$I_2 = \frac{E_2 - \varphi_2}{R_3}$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4}$$

$$I_4 = \frac{-\varphi_3}{R_5}$$

$$I_5 = \frac{E_3 - \varphi_3}{R_6}$$

Una vez que se tiene la expresión de cada corriente, estas se reemplazan en las ecuaciones de Kirchhoff desarrolladas en los nudos que no son referencia.

$$\frac{E_1 - \varphi_2}{R_1 + R_2} + \frac{E_2 - \varphi_2}{R_3} - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4} = 0$$

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4} + \frac{-\varphi_3}{R_5} - \frac{E_3 - \varphi_3}{R_6} = 0$$

Tras el paso anterior se ha conformado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde estas últimas son justamente los potenciales de nudos. A continuación, se reescriben las ecuaciones para visualizarlas de manera más cómoda y comprensible.

$$\varphi_2 \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[-\frac{1}{R_4} \right] = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3}$$

$$\varphi_2 \left[-\frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right] = -\frac{E_3}{R_6}$$

Al analizar los términos que componen las ecuaciones se encuentra que en la primera de ellas la tensión del nudo 2 va multiplicada por la sumatoria de las admitancias de todas las ramas que convergen al nudo. Mientras que la tensión del nudo 3 va acompañada de la admitancia que conforma la rama que une los nudos 2 y 3. Por su parte a la derecha de la igualdad se encuentran las corrientes de cortocircuito de las ramas 1 y 2. Recordando

lo visto en el capítulo 2 de esta materia, la corriente de cortocircuito de un dipolo (en este caso una rama) se determina al anular la tensión de salida del mismo. Por ejemplo para la rama 1 su tensión de salida es $\varphi_2 - \varphi_1$. Si esta tensión es igual a cero la corriente de la rama queda como sigue

$$I_{cc1} = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

El mismo razonamiento anterior se ha utilizado para las restantes ramas. En particular para aquellas que no poseen fuente de tensión la corriente de cortocircuito es cero y no aparece en la ecuación.

Tras este desarrollo se está en condiciones de generalizar la construcción del sistema de ecuaciones que conforma al aplicar el método en un circuito de n nudos. Tal como ya es sabido se tienen $n-1$ ecuaciones con igual cantidad de incógnitas.

$$\begin{aligned} \varphi_1 * Y_{11} - \varphi_2 * Y_{12} - \dots - \varphi_{n-1} * Y_{1n-1} &= \sum I_{cc1} \\ &\vdots \\ -\varphi_1 * Y_{n-11} - \varphi_2 * Y_{n-12} - \dots + \varphi_{n-1} * Y_{n-1n-1} &= \sum I_{ccn-1} \end{aligned}$$

Utilizando escritura matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & -Y_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -Y_{n-11} & \dots & Y_{n-1n-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{cc1} \\ \vdots \\ \sum I_{ccn-1} \end{bmatrix}$$

Los elementos constitutivos del sistema son

Y_{11} es la sumatoria de las admitancias que convergen al nudo 1.

Y_{1n-1} es la sumatoria de las admitancias que vinculan los nudos 1 y $n-1$. Este factor igual a la sumatoria Y_{n-11}

φ_1 es el potencial del nudo 1

$\sum I_{cc1}$ es la sumatoria de las corrientes de cortocircuito de las ramas que convergen al nudo 1

El sistema anterior puede resumirse de la siguiente manera

$$[Y] * [\varphi] = [I_{cc}]$$

Donde $[Y]$ se la denomina matriz admitancia. En sistemas que solo poseen fuentes independientes esta matriz tiene las siguientes características.

- Simétrica
- Los elementos de la diagonal son positivos
- Los elementos fuera de la diagonal son negativos
- Un elemento de la diagonal es mayor o igual a la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la fila (o de la columna).

- La matriz es no singular es decir que su determinante es no nulo, esto implica que la solución del sistema es única

Se verá más adelante como se modifica la matriz al incluir fuentes dependientes.

Para sistematizar la aplicación del método de nudos se debe seguir el siguiente proceso

1. Elegir un nudo de referencia
2. Escribir el sistema de ecuaciones para todos los nudos exceptuando el de referencia.
3. Para el nudo 1 (ecuación N° 1) se escribe el potencial del nudo multiplicado por la suma de todas las admitancias que concurren a este; se resta el potencial de los demás nudos multiplicados por la admitancia que vincula al nudo en cuestión con el 1. Se iguala a la suma de las corrientes de cortocircuito de cada rama que llega al nudo 1.
4. Se repite el procedimiento con los demás nudos.
5. Se resuelve el sistema de n-1 ecuaciones

5.2.1.Caso particular – Fuente de corriente ideal

Se considera ahora que el circuito bajo análisis se modifica incorporando una fuente de corriente ideal de valor I_f dentro de la rama 4 en serie con la resistencia R_5 .

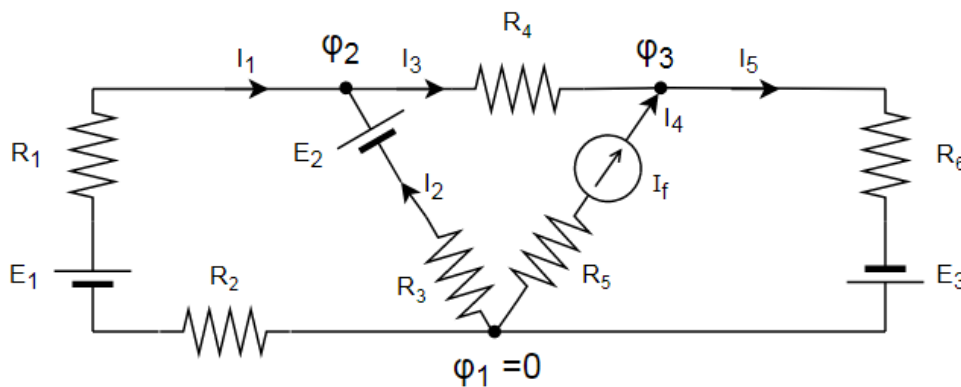


Figura 5-10

Siendo que la rama en cuestión vincula los nudos 1 y 3 la ecuación del nudo 2 no se ve afectada por el cambio dentro del circuito. Si lo hace la ecuación correspondiente al nudo 3.

Para analizar el cambio deben aplicarse los pasos descriptos en el punto anterior en especial el paso 4 que dice:

“Se escribe el potencial del nudo multiplicado por la suma de todas las admitancias que concurren a este; se resta el potencial de los demás nudos multiplicados por la admitancia que vincula al nudo en cuestión con cada uno de ellos. Se iguala a la suma de las corrientes de cortocircuito de cada rama que llega al nudo bajo análisis”.

Lo anterior se aplica sobre el nudo 3 surgiendo la ecuación siguiente.

$$\varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_f} + \frac{1}{R_6} \right] - \varphi_2 \left[\frac{1}{R_4} \right] = -\frac{E_3}{R_6} + I_f$$

En la expresión anterior se tiene

$\frac{1}{R_5 + R_I}$ es la admitancia de la rama 4 que ahora cuenta con la fuente de corriente, sin embargo debe tenerse en cuenta que dicha fuente es tipo ideal por lo que $R_I \rightarrow \infty$, en consecuencia la admitancia de la rama es nula por lo que desaparece de la ecuación.

I_f es corriente de cortocircuito que aporta la rama 4, tal como se puede confirmar al extraer la rama y establecer un cortocircuito entre los nudos φ_1 y φ_3 .

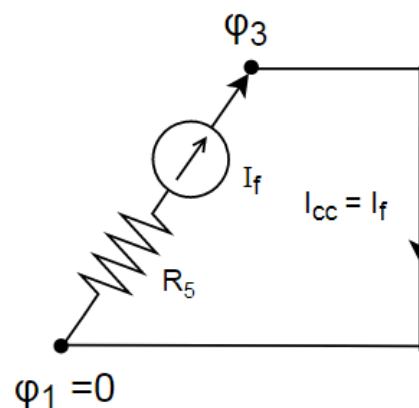


Figura 5-11

Bajo las consideraciones anteriores la ecuación de nudo resulta

$$\varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right] - \varphi_2 \left[\frac{1}{R_4} \right] = -\frac{E_3}{R_6} + I_f$$

La ecuación de nudo 2 no se modifica ya que la fuente de corriente no interactúa con este punto.

$$\varphi_2 \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] - \varphi_3 \left[-\frac{1}{R_4} \right] = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3}$$

Regla nemotécnica

1. Se escriben las ecuaciones igual que en el caso general.
2. Se considera que la fuente de corriente tiene impedancia infinita y la corriente de cortocircuito es el valor de la fuente.
3. La admitancia de la o las ramas que poseen fuentes de corriente es cero.
4. La admitancia de transferencia con otros nudos también es cero.

5.2.2.Caso particular – Fuente de tensión ideal

Se considera ahora que en la rama 1 se suprimen las resistencias quedando solamente la fuente de tensión. Este cambio tiene impacto directo sobre la conformación de la ecuación del nudo 2 al tiempo de que **condiciona la aplicación del método**.

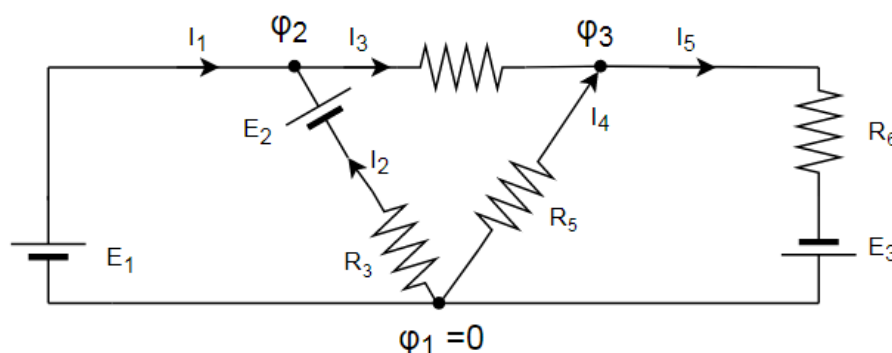


Figura 5-12

Al aislar la rama 1, tal como se hizo en otra oportunidad será posible determinar la admitancia de la rama y la corriente de cortocircuito de la misma. Por tratarse de una fuente de tensión ideal su impedancia interna es nula haciendo que la admitancia tienda a infinito. Por otro lado si se produce un cortocircuito entre los bornes de una fuente ideal, al no haber resistencia que limite la corriente, ésta también tiende a infinito. Estas particularidades hacen que al plantear la ecuación de nudo aparezca una indeterminación, tal como se indica a continuación.

$$\varphi_2 \left[\frac{1}{R_{E1}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] - \varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} \right] = \frac{E_1}{R_{E1}} + \frac{E_2}{R_3}$$

Donde

$$R_{E1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R_f} \rightarrow \infty \text{ y } \frac{E_1}{R_f} \rightarrow \infty$$

La indeterminación imposibilita la resolución de esta ecuación lo que no significa que el problema global no posea solución, sino que este procedimiento no permite encontrarlo. Para salvar la indeterminación existen dos opciones.

La primera consiste en hacer que uno de los bornes de la fuente ideal de tensión coincida con el nudo de referencia, es decir, se debe elegir el nudo de referencia correctamente para que esto ocurra. De esta manera la fuente fija el potencial de uno de nudos del circuito, así se elimina una incógnita y no es necesario escribir la ecuación de dicho nudo ya que su valor es conocido. Este es el caso que se presenta en el circuito de la Figura 5-12, por ende la aplicación del método de nudos queda como sigue. (solo existe una incógnita).

$$\varphi_2 = E_1$$

$$\varphi_2 \left[-\frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right] = -\frac{E_3}{R_6}$$

Tal como se observa la ecuación del nudo 3 no se modifica.

La segunda opción puede utilizarse cuando el circuito cuenta con 2 o más fuentes independientes y no es posible que todas coincidan con el nudo de referencia o simplemente no se ha elegido correctamente dicho nudo como se presenta a continuación, donde una fuente ideal vincula los nudos 2 y 3.

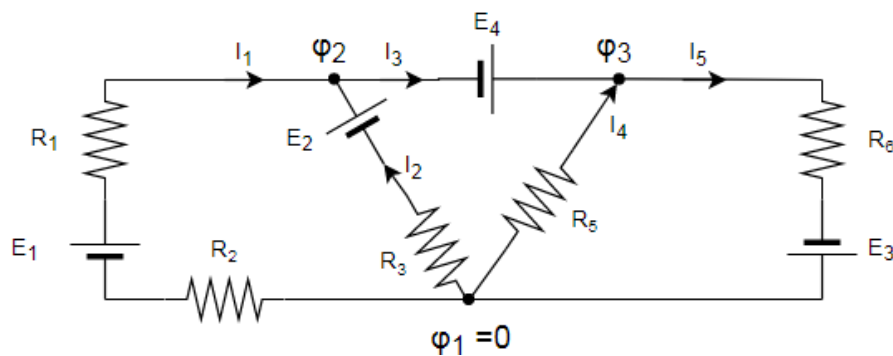


Figura 5-13

Esta técnica propone reemplazar la fuente de tensión ideal por otra auxiliar de corriente también ideal, donde el valor de esta última es una nueva incógnita. El objetivo es eliminar la resistencia interna nula de la fuente de tensión y reemplazarla por otra de valor infinito como la de la fuente de corriente. Una vez hecho el cambio es posible aplicar el método de nudos sin convenientes. La siguiente figura presenta el reemplazo mencionado.

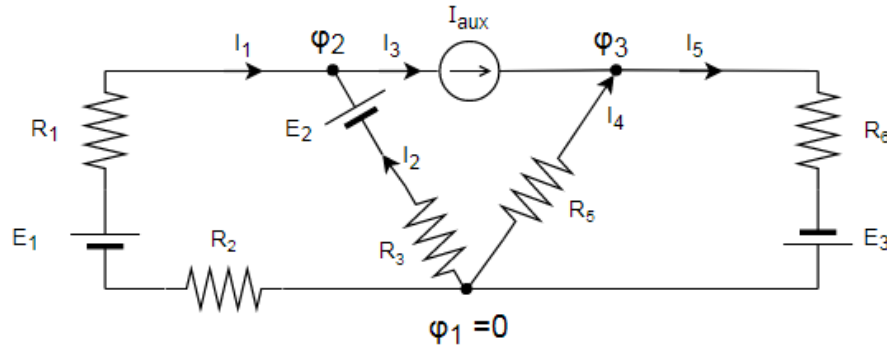


Figura 5-14

Se aplica entonces el método de nudos. **Notar que al incorporar la fuente de corriente la admitancia de la rama que vincula los nudos 2 y 3 ahora es cero y desaparece la participación de un nudo en la ecuación del otro.**

$$\varphi_2 \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right] = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3} - I_{aux}$$

$$\varphi_3 \left[\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right] = I_{aux} - \frac{E_3}{R_6}$$

El problema radica ahora en que se cuenta con 2 ecuaciones, pero tres incógnitas ya que I_{aux} es un valor desconocido. Para solucionar este problema se debe incorporar una ecuación más. Esta vincula los potenciales de los nudos 2 y 3 con la fuente de tensión ideal E_4 que se encontraba en el circuito original.

$$\varphi_3 - \varphi_2 = E_4$$

Esta nueva ecuación permite la resolución del sistema.

En resumen ante la presencia de una fuente ideal de tensión entre dos nudos se debe.

1. Se elige el nudo de referencia de modo tal que sea un extremo de la rama que contiene la fuente ideal de tensión.
2. El potencial del nudo extremo de la fuente ideal de tensión es conocido y en consecuencia se reduce en uno el número de ecuaciones.

Caso especial

1. En el caso de que lo anterior no sea posible, se reemplaza la fuente de tensión por una fuente de corriente auxiliar.
2. Se aplica el método de manera convencional
3. Se genera una nueva incógnita.
4. Se genera una nueva ecuación: la d.d.p. de esta rama es conocida e igual al valor de la fuente ideal de tensión

5.2.3.Caso particular – Fuente dependiente

Se analiza en esta ocasión como se ve afectado el método cuando el circuito cuenta con una fuente dependiente. Para esto se utiliza el siguiente circuito.

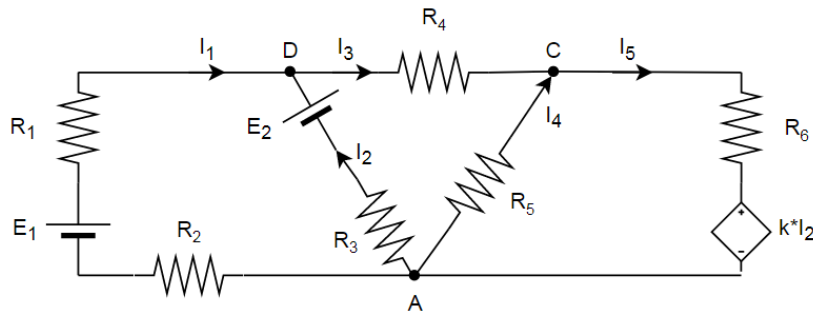


Figura 5-15

Se aplica el método asignado al nudo la referencia al punto A.

$$\varphi_2 \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[-\frac{1}{R_4} \right] = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3}$$

$$\varphi_2 \left[-\frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right] = \frac{k * I_2}{R_6}$$

En el sistema anterior existen 3 incógnitas φ_2 ; φ_3 e I_2 , sin embargo, esta última puede ponerse en función de uno o más potenciales de nudos según sea el caso. En esta ocasión, I_2 depende de φ_2 tal como se presenta a continuación.

$$I_2 = \frac{E_2 - \varphi_2}{R_3}$$

La expresión anterior puede remplazarse en la segunda ecuación eliminando la incógnita adicional lo que permite la resolución del sistema.

$$\varphi_2 \left[-\frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right] = \frac{k}{R_6} * \frac{E_2 - \varphi_2}{R_3}$$

Se reagrupan términos para una mejor comprensión de la ecuación y se incorpora la primera ecuación para una visualización completa del sistema.

$$\varphi_2 \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] + \varphi_3 \left[-\frac{1}{R_4} \right] = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2}{R_3}$$

$$\varphi_2 \left[-\frac{1}{R_4} + \frac{k}{R_6 * R_3} \right] + \varphi_3 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right] = \frac{k}{R_6} * \frac{E_2}{R_3}$$

Resulta importante destacar que la presencia de la fuente dependiente no impide la aplicación del método, pero si rompe con la simetría de la matriz admitancia. Esta particularidad tiene gran importancia al momento de implementar las técnicas de síntesis.

5.3. Método de las corrientes de mallas

Este método tiene por objetivo encontrar un conjunto de corrientes ficticias denominadas corrientes de mallas. Estas corrientes son aquellas que circularían por un camino cerrado. Se dice “circularían”, ya que un camino cerrado, dentro de un circuito enmallado, está constituido por diferentes ramas, es decir diferentes corrientes. Eso les da el carácter de ficticias. En la siguiente figura se han indicado dos corrientes de mallas a modo de ejemplo, a las cuales se las han nombrado J1 y J2.

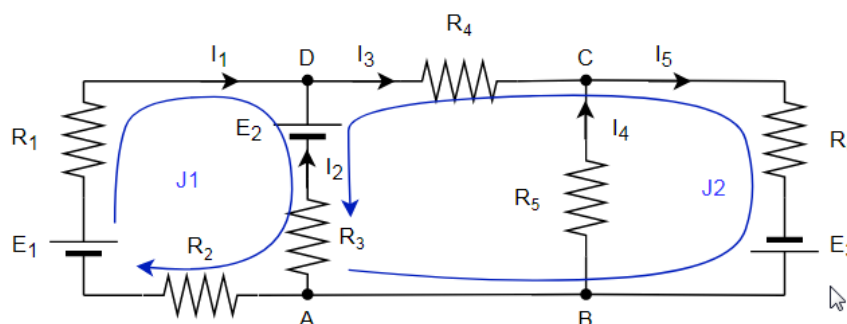


Figura 5-16: Ejemplo de corrientes de malla en un circuito

En un circuito pueden identificarse un gran número de corrientes de mallas, pero solo se necesitan **b-(n-1)** corrientes para definir el comportamiento total del circuito.

Para demostrar el método se utiliza el circuito ya conocido que se presenta a continuación.

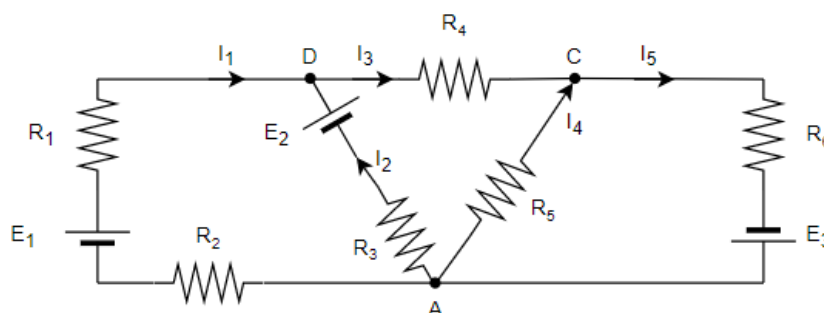


Figura 5-17: Circuito ejemplo para la explicación del método de mallas

El trabajo de demostración comienza escribiendo las ecuaciones de Kirchhoff linealmente independientes. Es decir sobre los nudos C y D.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

A continuación, se plantea la segunda ley de Kirchhoff sobre 3 mallas cerradas de libre elección, en este caso se elige recorrer las ventanas partiendo desde el nudo A hasta regresar a éste haciendo en el camino la sumatoria de las caídas de potencial. (Se considera que las fuentes de tensión son ideales por lo que su resistencia interna es nula).

$$I_1 * R_2 - E_1 + I_1 * R_1 + E_2 - I_2 * R_3 = 0$$

$$I_2 * R_3 - E_2 + I_3 * R_4 - I_4 * R_5 = 0$$

$$I_4 * R_5 + I_5 * R_6 - E_3 = 0$$

Se destaca que el sistema de ecuaciones final al que se arriba depende de los nudos y mallas utilizadas para la demostración, en este sentido el lector puede seleccionar otro conjunto y arribar a un sistema diferente. Sin embargo, lo importante es lograr una generalización que permita la aplicación del método independientemente del circuito o de las ramas y nudos seleccionados.

Una vez en este punto se despejan las corrientes de las ramas 2 y 4 como sigue.

$$I_2 = I_3 - I_1$$

$$I_4 = I_5 - I_3$$

Ahora las expresiones anteriores pueden ser utilizadas para eliminar incógnitas en las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff.

$$I_1 * R_2 - E_1 + I_1 * R_1 + E_2 - (I_3 - I_1) * R_3 = 0$$

$$(I_3 - I_1) * R_3 - E_2 + I_3 * R_4 - (I_5 - I_3) * R_5 = 0$$

$$(I_5 - I_3) * R_5 + I_5 * R_6 - E_3 = 0$$

En este punto ya se cuenta con un sistema de igual cantidad de ecuaciones e incógnitas por lo que se procede a ordenar el mismo para una mejor visualización.

$$I_1 * (R_1 + R_2 + R_3) - I_3 * (R_3) = E_1 - E_2$$

$$-I_1 * (R_3) + I_3 * (R_3 + R_4 + R_5) - I_5 * (R_5) = E_2$$

$$-I_3 * (R_5) + I_5 * (R_5 + R_6) = E_3$$

Finalmente se debe reemplazar las corrientes reales por las corrientes de mallas ficticias.

$$J_1 * (R_1 + R_2 + R_3) - J_2 * (R_3) = E_1 - E_2$$

$$-J_1 * (R_3) + J_2 * (R_3 + R_4 + R_5) - J_3 * (R_5) = E_2$$

$$-J_2 * (R_5) + J_3 * (R_5 + R_6) = E_3$$

La resolución de este sistema de ecuaciones brinda información suficiente para determinar el comportamiento total del circuito, pero para esto debemos darle una interpretación física a las corrientes de mallas, es decir, identificar por donde circulan, esto se muestra en siguiente figura.

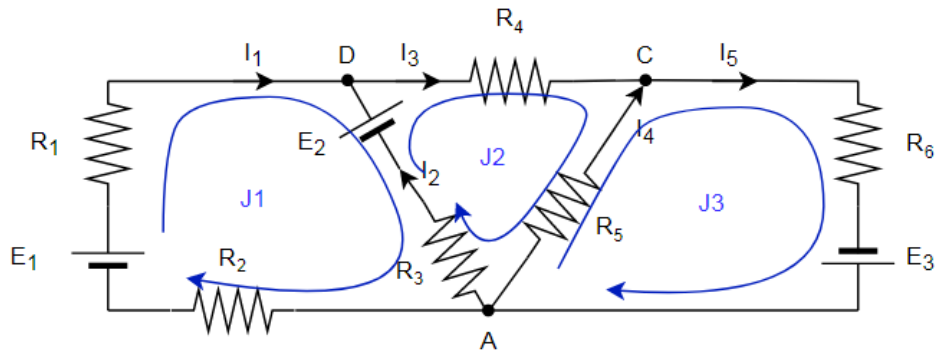


Figura 5-18

En función de lo anterior, una vez calculadas las corrientes de mallas, la resolución del circuito puede realizarse con las siguientes igualdades.

$$I_1 = J_1$$

$$I_2 = J_2 - J_1$$

$$I_3 = J_2$$

$$I_4 = J_3 - J_2$$

$$I_5 = J_3$$

Durante esta demostración se han utilizado indirectamente dos conceptos presentados al comienzo de este apunte, estos son el “árbol” y las ramas de enlace. Si bien estos conjuntos no se han definido expresamente si se encuentran presentes en el desarrollo. El árbol está conformado por las ramas 2 y 4, cumpliendo con la premisa de vincular todos los nudos del circuito sin formar un camino cerrado. Naturalmente una vez definido el árbol, las ramas restantes (1; 3 y 5) son necesariamente ramas de enlace. Ahora bien, ¿Cómo, se han identificado estas ramas? Muy simple, por su definición las ramas del árbol albergan la circulación de 2 o más corrientes de mallas, mientras que a través de las ramas de enlace puede circular una y solo una corriente de malla. (Ver Figura 5-18)

El método en un circuito de **n** nudos y **b** ramas puede generalizarse de la siguiente manera.

$$J_1 * Z_{11} + J_2 * Z_{12} + \dots + J_l * Z_{1l} = \sum E_1$$

$$J_1 * Z_{21} + J_2 * Z_{22} + \dots + J_l * Z_{2l} = \sum E_2$$

⋮

⋮

$$J_1 * Z_{l1} + J_2 * Z_{l2} + \dots + J_l * Z_{ll} = \sum E_l$$

Utilizado escritura matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{l1} & \dots & Z_{ll} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum E_1 \\ \vdots \\ \sum E_l \end{bmatrix}$$

En el sistema anterior se tiene

$l = b - (n - 1)$ cantidad de ecuaciones linealmente independientes

Z_{11} sumatoria de las impedancias circuladas por la corriente de malla J_1

Z_{1l} sumatoria de las impedancias circuladas simultáneamente por J_1 y J_l

$\sum E_1$ sumatoria de las fuentes de tensión circuladas por J_1 (se consideran positivas aquellas que “colaboran” con la circulación de la corriente de malla en cuestión).

El sistema anterior puede resumirse de la siguiente manera

$$[Z] * [J] = [E]$$

Donde $[Z]$ se la denomina matriz impedancia. En sistemas que solo poseen fuentes independientes esta matriz tiene las siguientes características.

- Simétrica
- Todos los elementos tanto de la diagonal como fuera de ella son positivos
- Un elemento de la diagonal es mayor o igual a la suma de los valores de los demás elementos de la fila (o de la columna).
- La matriz es no singular es decir que su determinante es no nulo, esto implica que la solución del sistema es única

Para la aplicación del método de malla puede seguirse la siguiente regla nemotécnica

1. Elegir un árbol para el circuito (recordar definición)
2. Redibujar el circuito comenzando solo por el árbol
3. Sobre el dibujo anterior incorporar de a una las ramas de enlace. Cada una de ellas define una corriente de malla. Dibujar el camino que recorre cada corriente de malla a medida que se incorporan las ramas de enlace.
4. Escribir las ecuaciones de la LCK para cada malla cuidando de no olvidar ninguna corriente, notar que cuando dos corrientes circulan en sentidos opuestos sobre la misma rama estas se restan en la ecuación.
5. Resolver el sistema de ecuaciones

5.3.1.Caso particular – Fuente de corriente ideal

Al igual que en el método de nudos existen casos particulares que requieren un análisis detallado ya que condicionan la aplicación de esta técnica. En este caso se explica cómo influye la presencia de una fuente de corriente en alguna de las ramas del circuito.

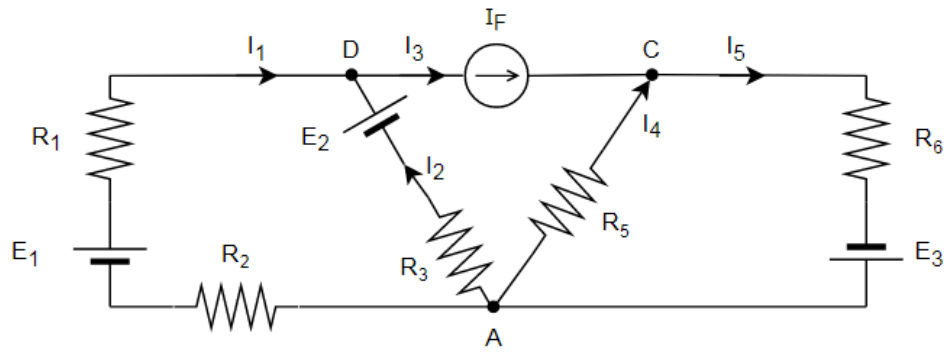


Figura 5-19

Para aplicar el método de mallas se debe inicialmente elegir un árbol y luego determinar la circulación de las corrientes de mallas, esto se presenta en la siguiente figura (por simplicidad estos se eligen igual a los ya utilizados en explicaciones anteriores).

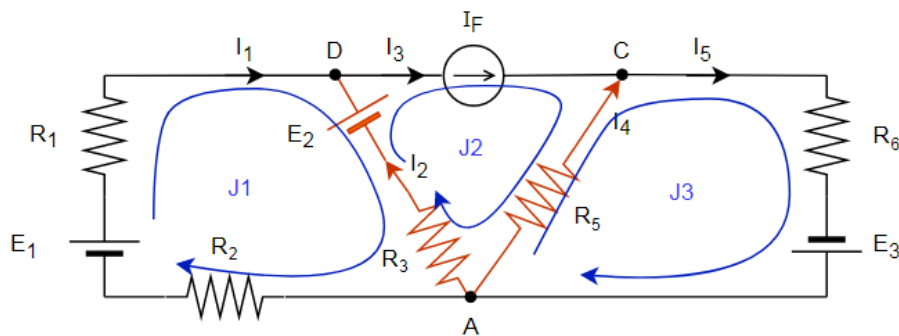


Figura 5-20

La fuente de corriente se encuentra en la malla 2 por lo cual esta es la única ecuación que se ve afectada por su presencia, las demás ecuaciones (mallas 1 y 3) no se modifican. En función de esto se plantea a continuación la ecuación del bucle 2.

$$-J_1 * (R_3) + J_2 * (R_3 + R_I + R_5) - J_3 * (R_5) = E_2 - (I_F * R_I)$$

Tal como se observa, en la expresión anterior se ha considerado la resistencia interna de la fuente de corriente R_I . Dado que la fuente es de tipo ideal su resistencia interna es "infinita" lo cual produce una indeterminación en la ecuación. La indeterminación imposibilita la resolución de esta ecuación lo que no significa que el problema global no posea solución, sino que este procedimiento no permite encontrarlo. Para salvar la indeterminación existen dos opciones.

La primera consiste en elegir el árbol de manera tal que la fuente de corriente queda en una rama de enlace, esto hace que la fuente fije una corriente de malla no siendo necesario plantear su ecuación. Esta es la opción que indirectamente se ha utilizado en esta explicación. Utilizando esta técnica la corriente de malla es igual a I_F , mientras que las ecuaciones restantes no se modifican. En consecuencia, el sistema de ecuaciones queda como sigue.

$$J_1 * (R_1 + R_2 + R_3) - J_2 * (R_3) = E_1 - E_2$$

$$J_2 = I_F$$

$$-J_2 * (R_5) + J_3 * (R_5 + R_6) = E_3$$

La segunda opción resulta útil cuando no es posible hacer coincidir todas las fuentes del corriente del circuito con ramas de enlace, con lo cual alguna de las fuentes pasa a formar parte del árbol. En ese caso debe recurrirse al reemplazo de la fuente de corriente en cuestión por otra de tensión auxiliar que permita salvar la indeterminación. La tensión de la nueva fuente auxiliar es desconocida por lo que incorpora una nueva incógnita al sistema de ecuaciones.

Para ejemplificar la técnica se utiliza el siguiente circuito donde la fuente de corriente forma parte del árbol.

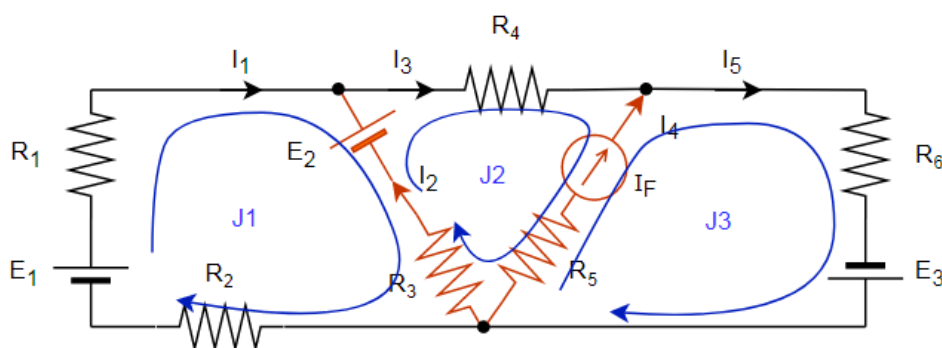


Figura 5-21

El remplazo se efectúa tal como se presenta en la siguiente figura:

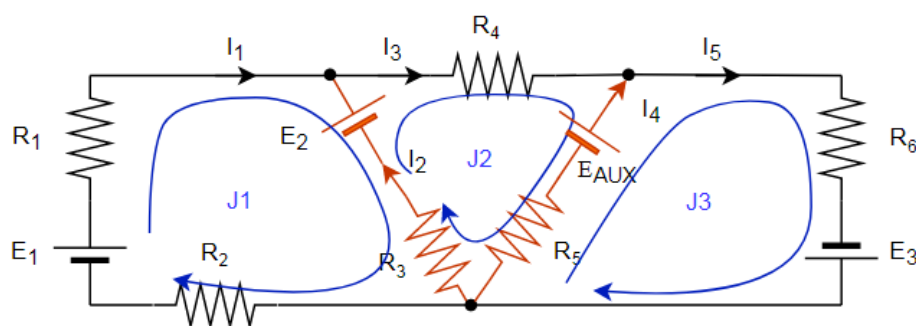


Figura 5-22

Llegado este punto no existen inconvenientes matemáticos para plantear las ecuaciones del método.

$$J_1 * (R_1 + R_2 + R_3) - J_2 * (R_3) = E_1 - E_2$$

$$-J_1 * (R_3) + J_2 * (R_3 + R_4 + R_5) - J_3 * (R_5) = E_2 - E_{AUX}$$

$$-J_2 * (R_5) + J_3 * (R_5 + R_6) = E_3 + E_{AUX}$$

La ecuación adicional que permite la resolución del sistema se logra combinando las corrientes de malla con el valor de la fuente de corriente ideal que se encontraba en el circuito original.

$$I_F = J_3 - J_2$$

Tomando lo anterior, ante la presencia de fuentes de corriente se debe utilizar la siguiente regla nemotécnica:

1. Elegir el árbol de modo que las fuentes sean ramas de enlace
2. Con lo anterior las fuentes fijan corrientes de malla y no es necesario escribir su ecuación
3. Si lo anterior no es posible remplazar la o las fuentes por otras de tensión auxiliar
4. Aplicar el método de manera convencional considerando las fuentes auxiliares
5. Escribir nuevas ecuaciones para lograr un sistema completo

5.3.2.Caso particular – Fuente dependiente

Se analiza en esta ocasión como se ve afectado el método cuando el circuito cuenta con una fuente dependiente.

Para esto se utiliza el siguiente circuito.

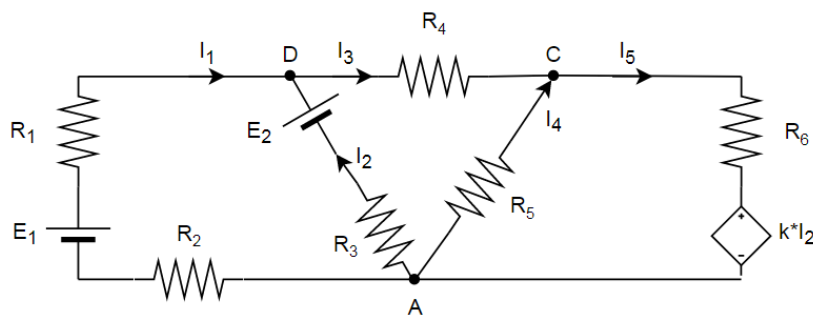


Figura 5-23

Se aplica el método, utilizando las ramas 2 y 4 como árbol mientras que la circulación de las corrientes de malla, circulan en sentido horario.

$$J_1 * (R_1 + R_2 + R_3) - J_2 * (R_3) = E_1 - E_2$$

$$-J_1 * (R_3) + J_2 * (R_3 + R_4 + R_5) - J_2 * (R_5) = E_2$$

$$-J_2 * (R_5) + J_3 * (R_5 + R_6) = -k * I_2$$

El sistema anterior posee 4 incógnitas J_1, J_2, J_3 e I_2 , sin embargo, esta última puede ponerse en función de las dos primeras, permitiendo así la resolución. Según el sentido elegido para las corrientes de mallas la corriente de la rama 2 se define como sigue.

$$I_2 = J_2 - J_1$$

Con lo anterior se rescribe el sistema de ecuaciones, donde las primeras dos ecuaciones no se modifican.

$$J_1 * (R_1 + R_2 + R_3) - J_2 * (R_3) = E_1 - E_2$$

$$-J_1 * (R_3) + J_2 * (R_3 + R_4 + R_5) - J_2 * (R_5) = E_2$$

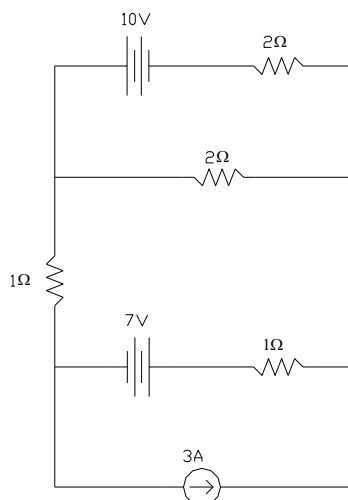
$$-J_1 * (k) - J_2 * (R_5 - k) + J_3 * (R_5 + R_6) = 0$$

Nuevamente se observa, al igual que en el método de nudos, la presencia de la fuente dependiente rompe con la simetría de la matriz impedancia.

5.4. Ejercicios

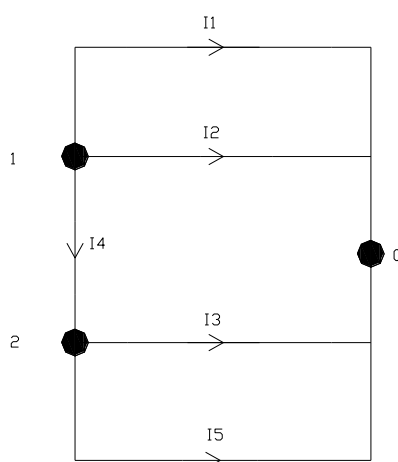
Problema 36

Resolver el siguiente circuito utilizando el método de nudos y de corrientes de bucles. Comparar el número de ecuaciones de estos procedimientos con la aplicación llana de las leyes de Kirchhoff.



Resolución por el método de los nudos

Primero se deben identificar los nudos del circuito con un número y las corrientes de rama:



Si llamamos como “n” al número de nudos del circuito tendremos que: $n^{\circ} \text{ de ecuaciones} = n - 1 = 2$

Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{1\Omega} \right) = \frac{10V}{2\Omega} \\ \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) - \varphi_1 \left(\frac{1}{1\Omega} \right) = -\frac{7V}{1\Omega} - 3A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos las soluciones:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0V \\ \varphi_2 = -5V \end{cases}$$

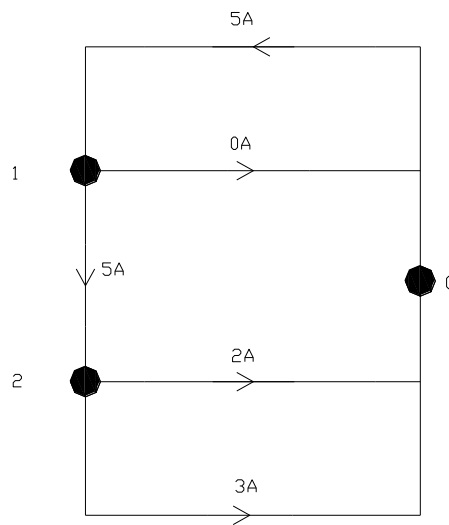
Con estos valores de los potenciales de nudos podemos despejar los valores de las corrientes de rama:

$$I_1 = \frac{-10V}{2\Omega} = -5A$$

$$I_2 = 0A$$

$$I_3 = \frac{7V - 5V}{1\Omega} = 2A$$

$$I_4 = \frac{0V - (-5V)}{1\Omega} = 5A$$



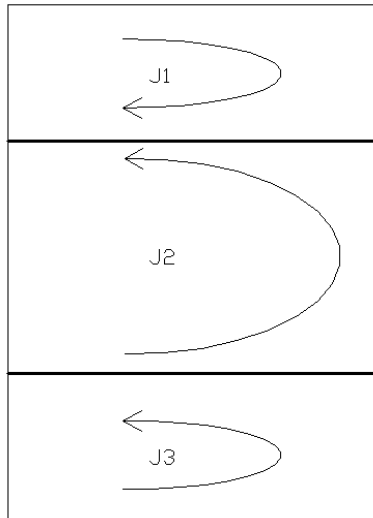
Resolución por el método de bucles

b = nº de ramas

n = nº de nudos

l = nº de ecuaciones = b – n + 1 = 3

Primero se debe identificar un árbol (recorrido que una todos los nudos del circuito sin formar un camino cerrado)



Las ecuaciones correspondientes serán:

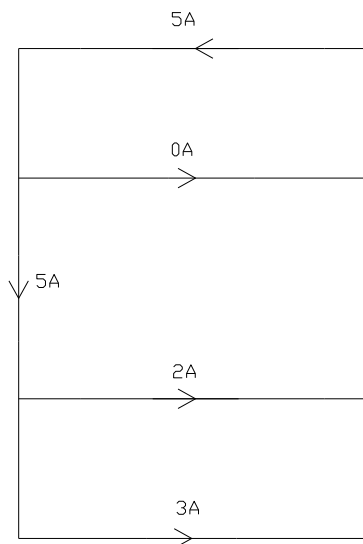
$$\begin{cases} J_1 \cdot (2\Omega + 2\Omega) + J_2 \cdot (2\Omega) = -10V \\ J_2 \cdot (1\Omega + 2\Omega + 1\Omega) + J_1 \cdot (2\Omega) - J_3 \cdot (1\Omega) = 7V \\ J_3 = 3A \end{cases}$$

Notar que al dejar la fuente de corriente en una rama de enlace, la tercera ecuación es trivial. La solución de dicho sistema es:

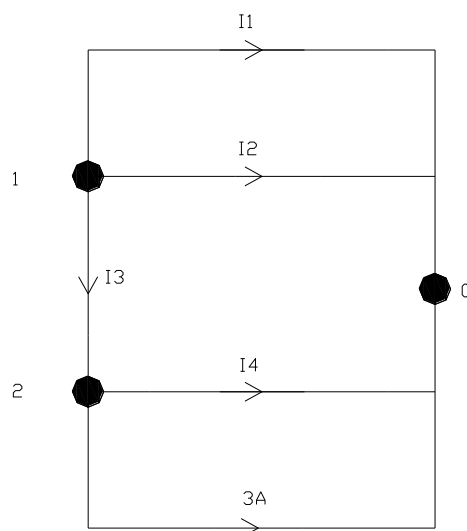
$$J_1 = -5A$$

$$J_2 = 5A$$

$$J_3 = 3A$$



Resolución aplicando las leyes de Kirchhoff



Si planteamos entonces las 3 ecuaciones independientes (5 ramas- 3nodos +1=3 ec) correspondientes a la segunda ley de Kirchhoff y las 2 ecuaciones independientes (3 nodos -1=2) correspondientes a la primera, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10V + 2\Omega \cdot I_1 - 2\Omega \cdot I_2 = 0 \\ 2\Omega \cdot I_2 - 1\Omega \cdot I_4 + 7V - 1\Omega \cdot I_3 = 0 \\ 10V + 2\Omega \cdot I_1 + V_3 - 1\Omega \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_3 = I_4 + 3A \end{cases}$$

Donde V_3 es la tensión que cae en la fuente de corriente de 3A.

Dado que tenemos 4 corrientes incógnitas, usaremos sólo 4 ecuaciones del anterior sistema. Para ello desechamos la ecuación que contiene V_3 ya que introduce una incógnita más. Luego resolvemos dicho sistema de ecuaciones por cualquiera de los métodos matemáticos conocidos, obteniendo:

$$I_1 = -5A$$

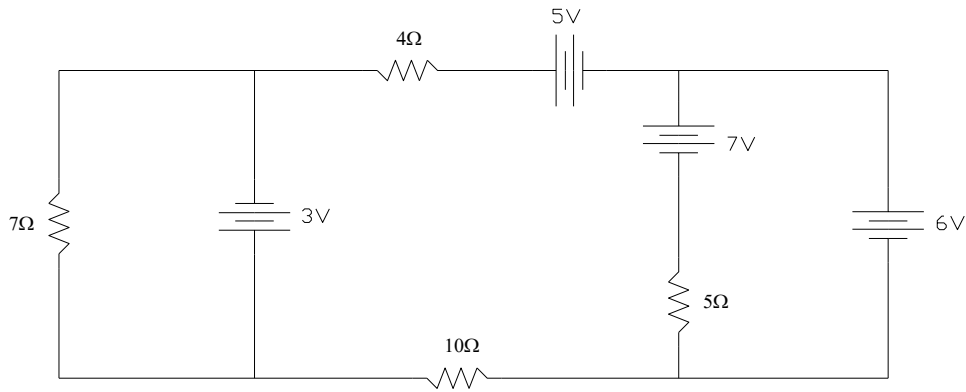
$$I_2 = 0A$$

$$I_3 = 5A$$

$$I_4 = 2A$$

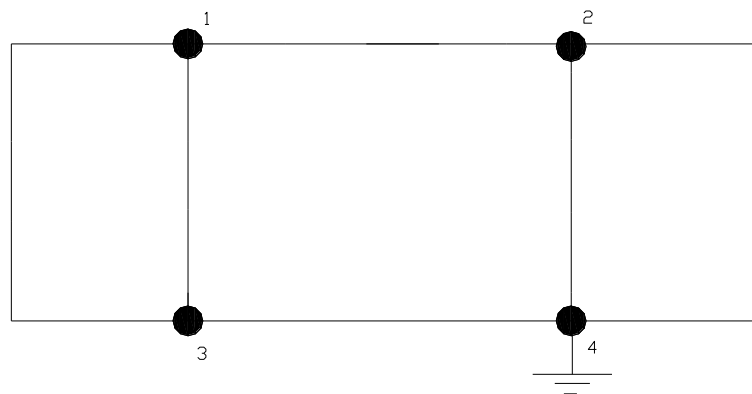
Problema 37

Escribir las ecuaciones de nudos y bucles del siguiente circuito:



Ecuaciones de nudo

Primero identificamos los nudos, numerándolos, y elegimos un nudo de referencia (nudo 4).



Luego determinamos el número de ecuaciones de nudo:

Número de nudos = n

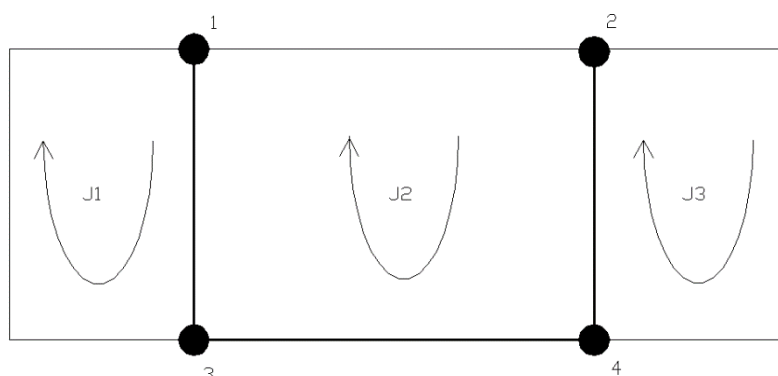
Número de ecuaciones = $n - 1 = 4 - 1 = 3$

Siendo que se ha elegido el nudo 4 como de referencia esto hace que el potencial del nudo 2 quede directamente fijado por la fuente de 6V. Por otro lado, la vinculación entre los nudos 1 y 3 se efectúa a través de una fuente ideal de tensión (3V) la cual tiene impedancia interna nula. Esto provoca que la sumatoria de las admitancias que convergen al nudo 1 no pueda calcularse ya que una de las impedancias es nula. Para solucionar esto se debe reemplazar la fuente de tensión de 3V por una de corriente ideal cuyo valor es desconocido y que representa a la corriente que circula por dicha rama. La incorporación de la fuente de corriente (cuya impedancia interna es infinita) permite la construcción del sistema de ecuaciones. Sin embargo, este procedimiento incorpora una nueva incógnita (el valor de la fuente). Para solucionar este problema se agrega una nueva ecuación, la cual considera la diferencia de potencial entre los nudos 1 y 3, la cual es conocida porque la fija la fuente de tensión. Tras aplicar este método, el sistema de ecuaciones queda conformado de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{7\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) - \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{4\Omega} \right) - \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{7\Omega} \right) = \frac{5V}{4\Omega} - I \\ \varphi_2 = 6V \\ \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{7\Omega} + \frac{1}{10\Omega} \right) - \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{7\Omega} \right) = I \\ \varphi_3 - \varphi_1 = 3V \end{cases}$$

Ecuaciones de bucles

Primero se debe elegir un árbol: elegimos el árbol 1 – 3 – 4 – 2.

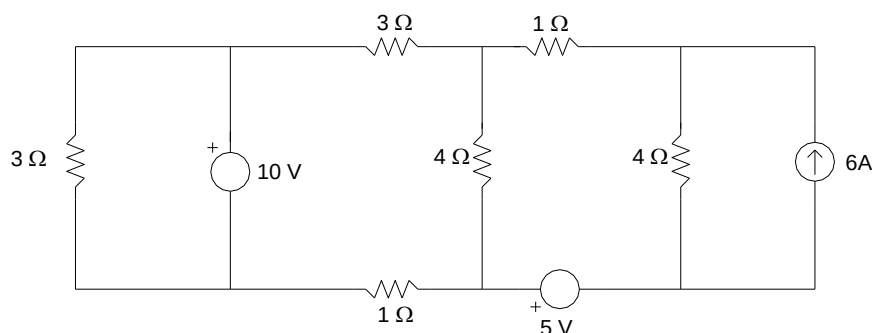


Cerramos una a una las ramas de enlace y escribimos una ecuación de bucle por cada una:

$$\begin{cases} J_1 \cdot (7\Omega) = 3v \\ J_2 \cdot (4\Omega + 5\Omega + 10\Omega) - J_3 \cdot (5\Omega) = -3v - 5v - 7v \\ -J_2 \cdot (5\Omega) + J_3 \cdot (5\Omega) = 7v - 6v \end{cases}$$

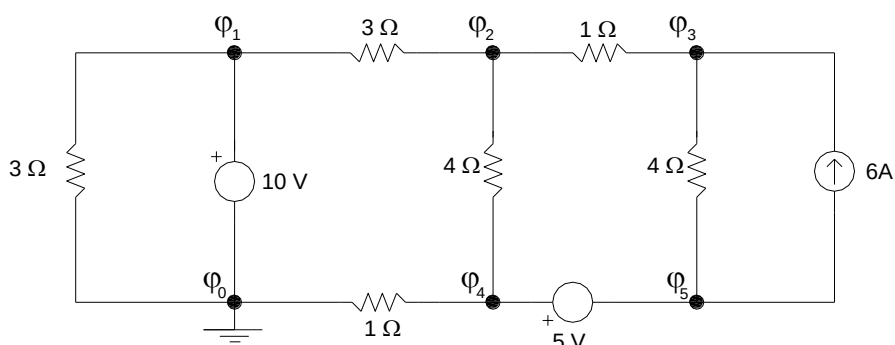
Problema 38

Calcular todas las tensiones de nudo y las corrientes de rama del circuito de la figura, empleando el método de los potenciales de nudo.

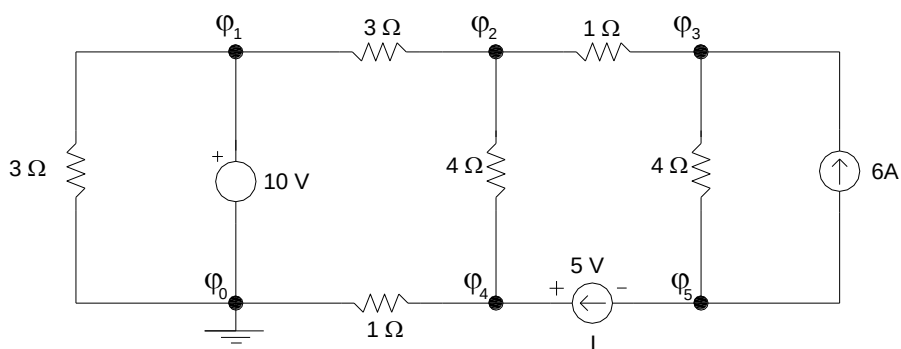


Solución:

Como primer paso se numeran los nudos, eligiendo un nudo de referencia:



Debido a la presencia de dos fuentes ideales, no adyacentes, una de ellas debe ubicarse en la referencia y la otra debe ser reemplazada por una fuente de corriente de valor genérico I :



Luego se plantean las ecuaciones de nudos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = 10V \\ -\varphi_1 \left(\frac{1}{3\Omega} \right) + \varphi_2 \left(\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) - \varphi_3 \left(\frac{1}{1\Omega} \right) - \varphi_4 \left(\frac{1}{4\Omega} \right) = 0 \\ -\varphi_2 \left(\frac{1}{1\Omega} \right) - \varphi_5 \left(\frac{1}{4\Omega} \right) + \varphi_3 \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) = 6A \\ -\varphi_2 \left(\frac{1}{4\Omega} \right) + \varphi_4 \left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) = I \\ -\varphi_3 \left(\frac{1}{4\Omega} \right) + \varphi_5 \left(\frac{1}{4\Omega} \right) = -I - 6A \\ \varphi_4 - \varphi_5 = 5V \end{array} \right.$$

$$\varphi_0 = 0V$$

$$\varphi_1 = 10V$$

$$\varphi_2 = 9,25V$$

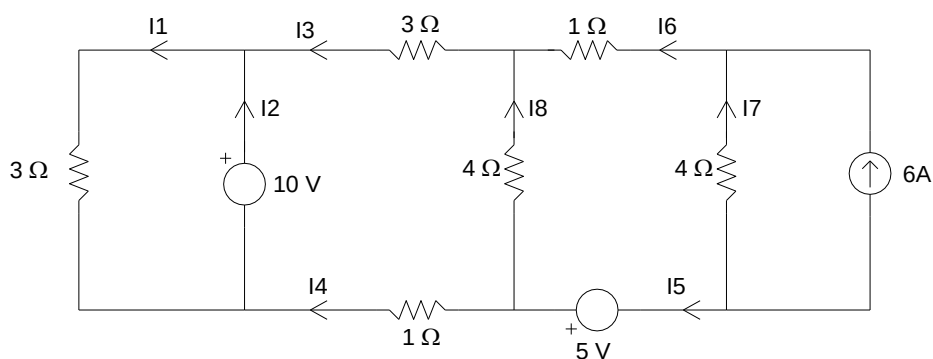
Y se resuelve el sistema de 6x6:

$$\varphi_3 = 11,25V$$

$$\varphi_4 = 0,25V$$

$$\varphi_5 = -4,75V$$

Por último, se calculan las corrientes:



$$I_1 = \frac{10V}{3\Omega} = 3,333A$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{3\Omega} = -0,25A$$

$$I_2 = I_1 - I_3 = 3,333A - (-0,25A) = 3,583A$$

$$I_4 = -I_3 = 0,25A$$

$$I_8 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_4}{4\Omega} = -2,25A$$

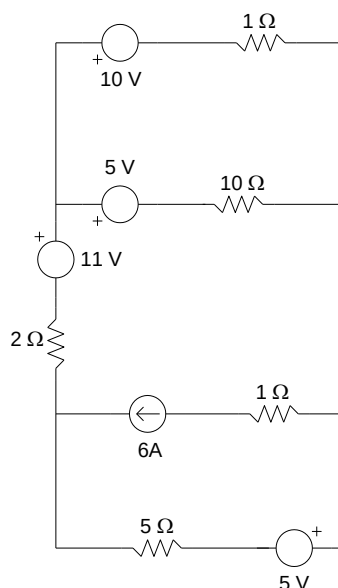
$$I_6 = I_3 - I_8 = -0,25A - (-2,25A) = 2A$$

$$I_7 = -6A + I_6 = -4A$$

$$I_5 = -I_6 = -2A$$

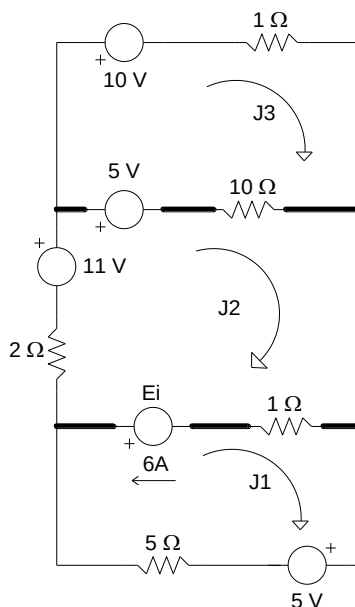
Problema 39

Calcular todas las corrientes de rama del circuito de la figura, empleando el método de los bucles.



Solución:

Como primer paso se elige un árbol. En este caso se elegirá intencionalmente un árbol poco conveniente, a los efectos de ilustrar la metodología a emplear cuando una rama con fuente de corriente queda incluida en el árbol. En general, debe evitarse ésta situación.

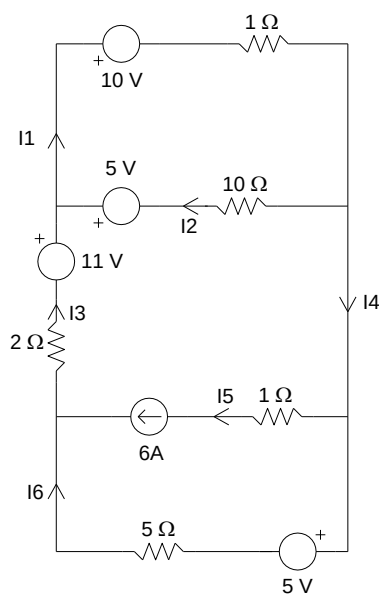


Luego, se cierra sucesivamente cada una de las ramas de enlace y se elige el sentido positivo de las corrientes ficticias, para después plantear las ecuaciones de bucles:

$$\begin{cases} J_1(5\Omega + 1\Omega) - J_2(1\Omega) = -5V - Ei \\ -J_1(1\Omega) + J_2(1\Omega + 2\Omega + 10\Omega) - J_3(10\Omega) = Ei + 11V - 5V \\ -J_2(10\Omega) + J_3(10\Omega + 1\Omega) = 5V - 10V \\ J_2 - J_1 = 6A \end{cases}$$

Resultando las corrientes ficticias:

$$\begin{cases} J_1 = -2,66A \\ J_2 = 3,34A \\ J_3 = 2,59A \end{cases}$$

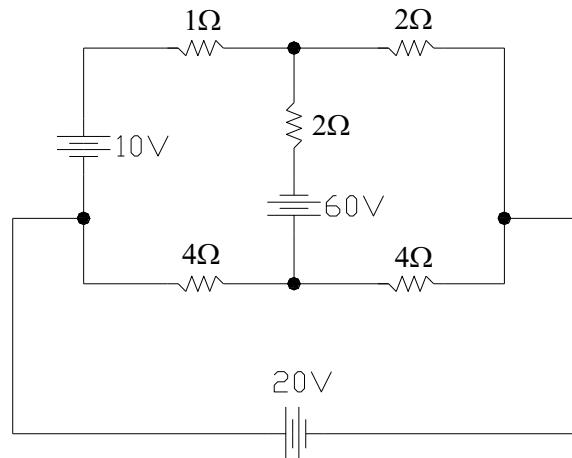


Y las corrientes de rama se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I1 &= J_3 = 2,59A \\ I2 &= J_3 - J_2 = -0,75A \\ I3 &= J_2 = 3,34A \\ I4 &= I3 \\ I5 &= 6A \\ I6 &= J_1 = -2,66A \end{aligned}$$

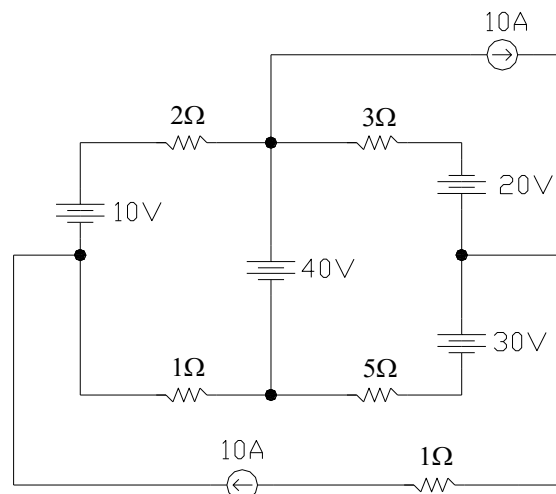
Problema 40

Resolver el siguiente circuito utilizando los métodos de nudos y de corrientes de bucles, comparando el número de ecuaciones de estos procedimientos con la aplicación llana de leyes de Kirchhoff.



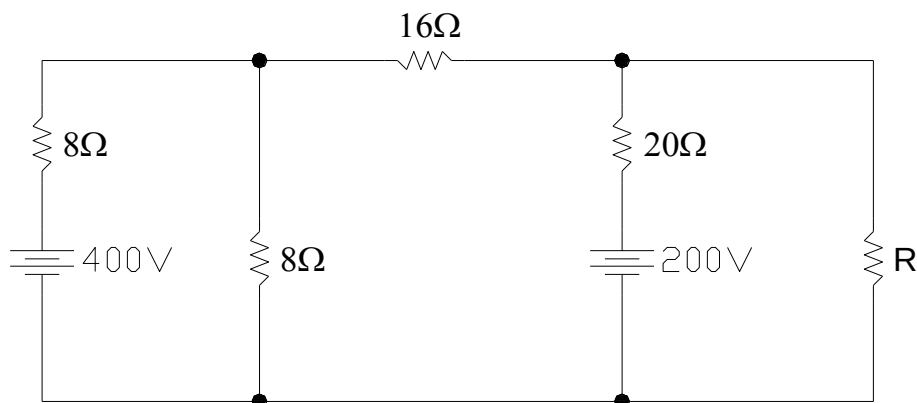
Problema 41

Escribir las ecuaciones de nudos y de bucles de los siguientes circuitos:



Problema 42

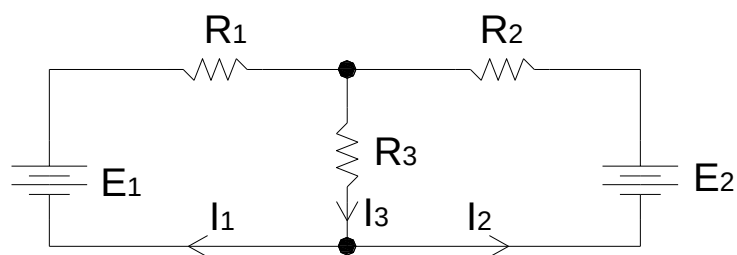
Calcular el valor que debe tomar la resistencia R para que la corriente por ella sea de 4A. Resolver aplicando el método más conveniente.



Problema 43

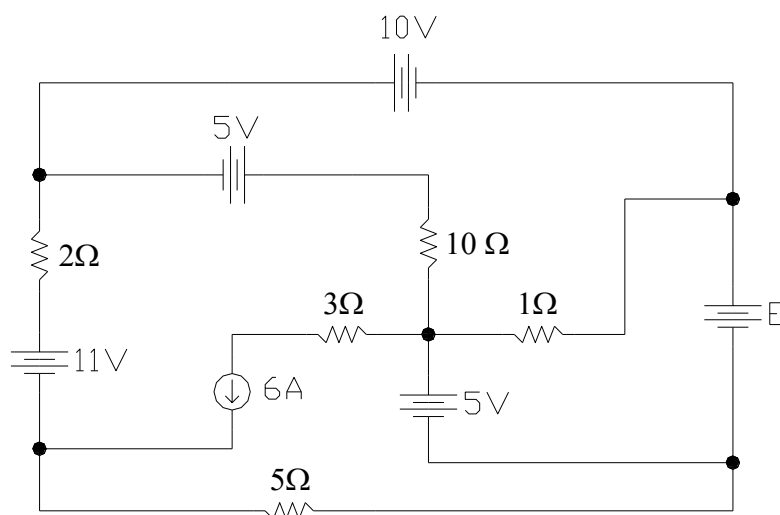
Determinar las relaciones que deben cumplir los parámetros del circuito de la figura para las siguientes condiciones.

- E_1 generador y E_2 receptor
- E_2 generador y E_1 receptor
- E_1 y E_2 generadores
- E_1 y E_2 receptores
- $I_3 = 0$



Problema 44

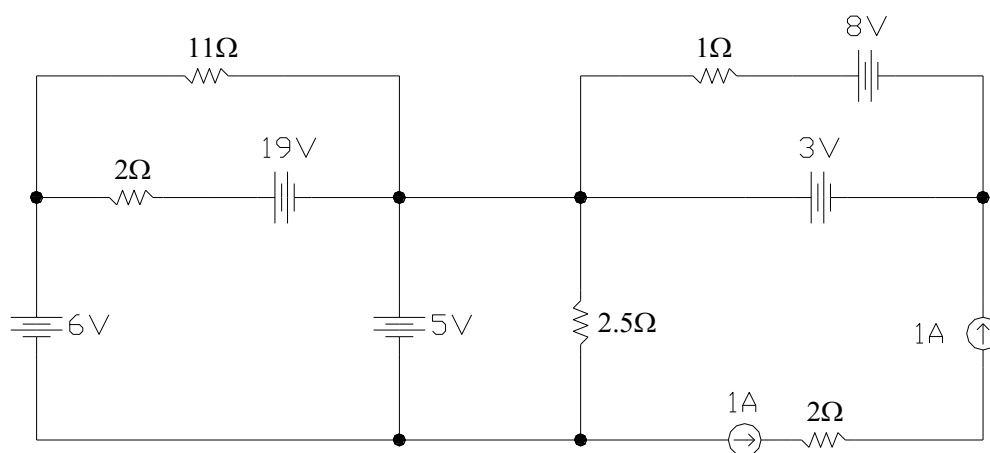
- Plantear las ecuaciones de bucles y de nudos
- Determinar el valor de E de tal manera que la fuente E no genere ni consuma
- Realizar el balance energético.



Problema 45

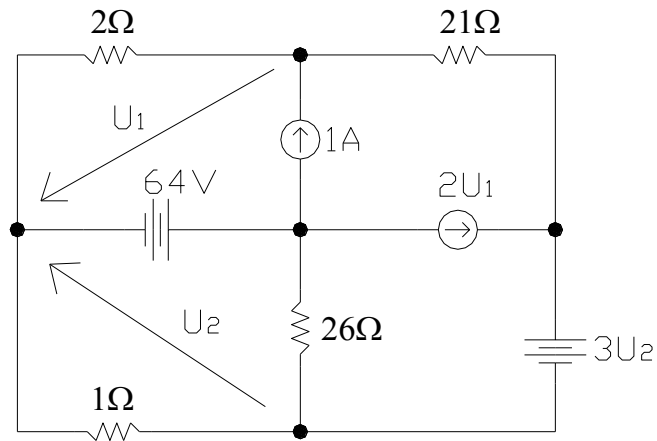
Dado el circuito de la figura:

- Plantear las ecuaciones de nudo y bucles
- Resolver el circuito por el método más conveniente.
- Realizar el balance energético. ¿Varía la potencia consumida por el circuito si se desconecta la fuente de 5V? ¿Por qué?



Problema 46

Plantear las ecuaciones de nudos y bucles. Calcular el régimen del circuito aplicando el método más apropiado.



5.5. Casos de aplicación

5.5.1. Enfoque matemático para el método de nudos

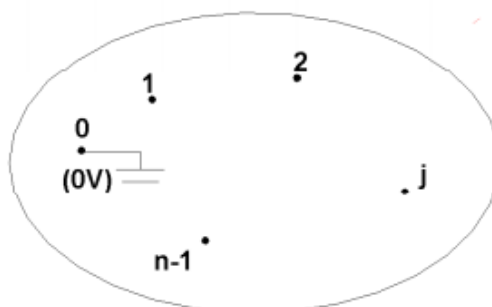
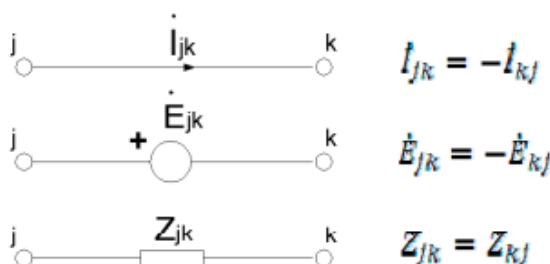
En capítulos 2 se ha realizado la explicación del método de nudos desde una perspectiva intuitiva basándose en un circuito ejemplo para luego generalizar la aplicación de los mismos. Sin embargo, existe la posibilidad de realizar la demostración desde un enfoque matemático de mayor rigurosidad científica, por decirlo de algún modo. En este sentido el presente anexo pone a disposición del lector dicho procedimiento.

Red de “b” ramas y “n” nudos $\longrightarrow$ Variables de red $m=b+n$

Referencia nudo 0 $\phi_0 = 0$

Número de incógnitas $h = m-1 = b+n-1$

Convenciones



Se plantean $n-1$ ecuaciones LI de la LCK

Para el nudo “h”

$$\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} i_{h\lambda} = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n-1 \quad [1]$$

Para cada rama

Diagram of a branch with impedance Z_{jk} and voltage E_{jk} (positive terminal at j) between nodes j and k . The current i_{jk} flows from j to k .

$$\phi_j - \phi_k = E_{jk} + Z_{jk} i_{jk} \longrightarrow i_{jk} = (\phi_j - \phi_k) Y_{jk} - E_{jk} Y_{jk} \quad [2]$$

Si hay más de una rama en paralelo entre “j” y “k”

$$\left. \begin{aligned} i_{jk}^1 &= (\phi_j - \phi_k) Y_{jk}^1 - E_{jk}^1 Y_{jk}^1 \\ i_{jk}^2 &= (\phi_j - \phi_k) Y_{jk}^2 - E_{jk}^2 Y_{jk}^2 \\ i_{jk}^g &= (\phi_j - \phi_k) Y_{jk}^g - E_{jk}^g Y_{jk}^g \end{aligned} \right\} \longrightarrow i_{jk} = i_{jk}^1 + i_{jk}^2 + i_{jk}^g \quad [3]$$

$$\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} [(\phi_h - \phi_\lambda) Y_{h\lambda}] - \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} [E_{h\lambda} Y_{h\lambda}] = 0 \quad \dots \quad \text{nudo } h \quad h = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad [4]$$

Ecuación nudo h Con $h = 1, 2, \dots, n-1$

$$\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} [(\phi_h - \phi_\lambda) Y_{h\lambda}] = \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} [E_{h\lambda} Y_{h\lambda}] \longrightarrow \phi_h \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} Y_{h\lambda} - \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} \phi_\lambda Y_{h\lambda} = \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} I_{h\lambda}^c \quad [5]$$

$I_{h\lambda}^c$ Corriente de cortocircuito de la rama $h\lambda$

$$\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} Y_{h\lambda} = Y_{hh} \quad Y_{hh} \text{ Admitancia propia nudo } h$$

$$\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} \phi_\lambda Y_{h\lambda} = \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} \phi_\lambda Y_{h\lambda} \quad \text{por ser} \quad \phi_0 = 0 \quad Y_{h\lambda} \text{ Admitancia mutua entre los nudos } h \text{ y } \lambda$$

Resulta $Y_{hh} \phi_h - \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq h}}^{n-1} Y_{h\lambda} \phi_\lambda = j_h \quad j_h \longrightarrow$ Corriente interna del nudo h suma de las corrientes de cortocircuito de las ramas que llegan al nudo h

En forma sintética $\sum_{\lambda=1}^{n-1} s_{h\lambda} Y_{h\lambda} \phi_\lambda = j_h \quad \text{para} \quad h = 1, 2, \dots, n-1 \quad [6]$

Donde $s_{h\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = \lambda \\ -1 & \text{si } h \neq \lambda \end{cases}$

[7]

En forma matricial se escribe $[Y][\phi] = [j]$

Con

$[Y] = \{s_{jk} Y_{jk}\}_{(n-1) \times (n-1)}$ Matriz admitancia

$[\phi] = [\phi_\lambda]_{(n-1) \times 1}$ Matriz tensión de nudo

$[j] = [j_h]_{(n-1) \times 1}$ Matriz Corriente interna de nudo

5.5.2. Síntesis

La técnica de síntesis permite construir un circuito eléctrico en base a un sistema de ecuaciones. Es importante destacar que al aplicar esta técnica el resultado encontrado no es único, es decir, existen muchos circuitos posibles que pueden ajustarse a un sistema de ecuaciones dado. El siguiente ejemplo permite explicar la metodología.

Se parte de un sistema de ecuaciones, el cual se asume ha sido obtenido tras la aplicación del método de nudos o bucles sobre un circuito cualquiera.

$$6x - 3y = -10$$

$$-3x + 8y = 5$$

En primera instancia se debe analizar el sistema para intentar prever de qué tipo de circuito se trata. Por ejemplo, las incógnitas no definen si son tensiones o corrientes por lo que el método utilizado no se encuentra especificado. Además, la matriz de coeficientes es simétrica por lo que el circuito no posee fuentes dependientes.

Llegado este punto debe elegirse que método se ha de aplicar, en este caso se resuelve primero por nudos. Habiendo elegido este método se rescribe el sistema de ecuaciones.

$$6\varphi_1 - 3\varphi_2 = -10A$$

$$-3\varphi_1 + 8\varphi_2 = 5A$$

Tal como se encuentra en las expresiones anteriores, los coeficientes que acompañan a las incógnitas son admitancias, mientras que el término independiente a la derecha del igual es la sumatoria de las corrientes de cortocircuito que convergen a cada nudo. Por último, al tener 2 incógnitas el circuito debe poseer 3 nudos. La siguiente figura presenta un circuito genérico con las características conocidas hasta ahora.

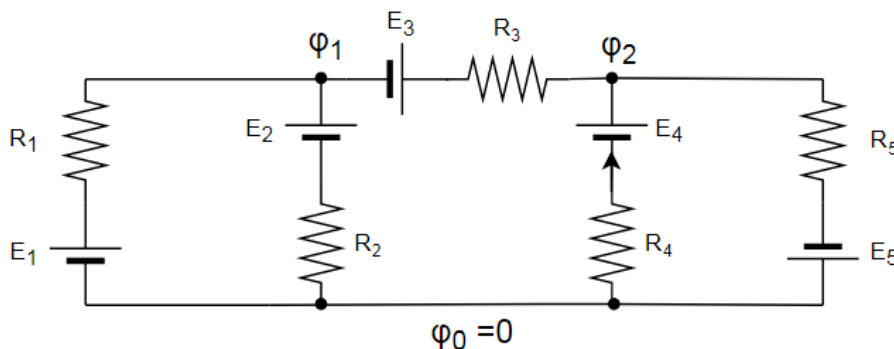


Figura 5-24: Circuito genérico que representa el sistema de ecuaciones por el método de nudos

Dentro del circuito anterior todos los elementos son a priori desconocidos. El valor de cada resistencia y fuente de tensión debe ser tal que si se aplica el método de nudos se llega al sistema de ecuaciones de partida. Aquí es

donde el abanico de posibilidad es muy grande, es decir existe un sinnúmero de combinaciones de valores que se ajustan a la premisa buscada. En este caso se analiza solo la siguiente alternativa.

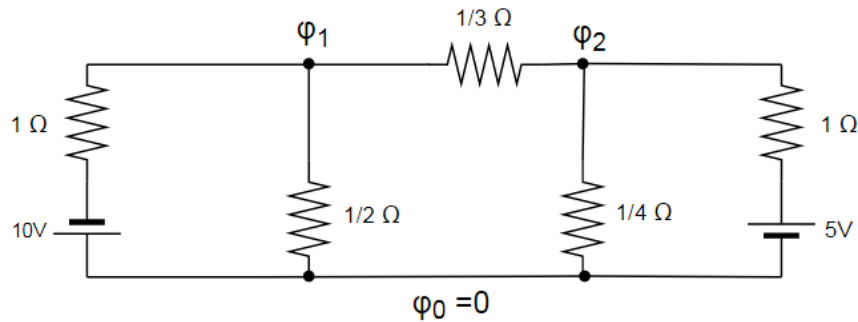


Figura 5-25: Ejemplo de circuito particular que representa el sistema de ecuaciones por el método de nudos

El circuito anterior se ajusta el sistema de ecuaciones ya cumple simultáneamente con las siguientes características.

- Sumatoria de admitancias entre los nudos 1 y 2 igual a $3\Omega^{-1}$
- Sumatoria de admitancias que convergen al nudo 1 igual a $6\Omega^{-1}$
- Sumatoria de admitancias que convergen al nudo 2 igual a $8\Omega^{-1}$
- Sumatoria de corrientes de cortocircuito en el nudo 1 igual a 10A saliente
- Sumatoria de corrientes de cortocircuito en el nudo 2 igual a 5A entrante

Tal como se ha mencionado anteriormente es un ejemplo que cumple con las características, queda para el lector encontrar otros circuitos.

Se analiza ahora la posibilidad de interpretar el mismo sistema de ecuaciones por ahora desde la perspectiva del método de mallas. Las ecuaciones se modifican de la siguiente manera.

$$6J_1 - 3J_2 = -10V$$

$$-3J_1 + 8J_2 = 5V$$

Ahora los coeficientes representan impedancias al tiempo que el término independiente corresponde a fuentes de tensión dentro del lazo de cada corriente de malla. Dado que se cuenta con dos incógnitas el circuito debe tener 3 ramas y 2 nudos. El siguiente es un circuito genérico que posee dichas características.

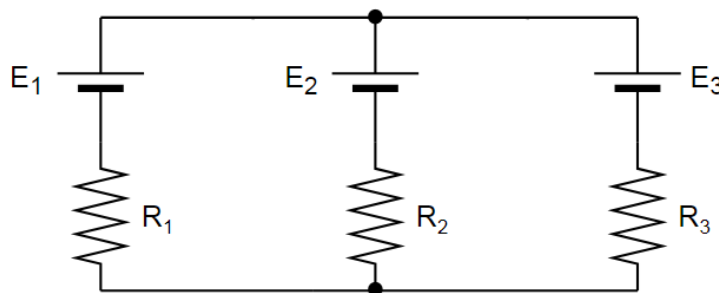


Figura 5-26 Circuito genérico que representa el sistema de ecuaciones por el método de mallas

Resta entonces asignarles valores a las fuentes de tensión y resistencias, nuevamente existen múltiples posibilidades. Para poder establecer un circuito particular. Para esto se debe primero elegir un árbol y luego el sentido de circulación de las corrientes de malla. En este caso se elige la rama central como árbol y un sentido de circulación horario.

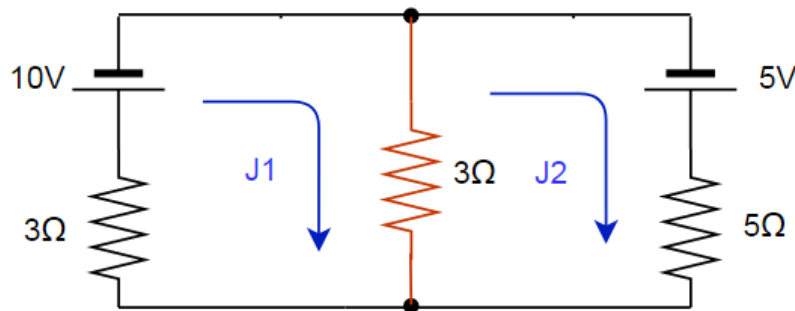


Figura 5-27: Circuito particular que representa el sistema de ecuaciones por el método de mallas

El circuito anterior se ajusta el sistema de ecuaciones ya cumple simultáneamente con las siguientes características.

- Sumatoria de impedancias en el bucle de la corriente 1 igual a 6Ω
- Sumatoria de impedancias en el bucle de la corriente 2 igual a 8Ω
- Sumatoria de impedancia por las que circulan ambas corrientes 3Ω
- Corrientes de mallas circulan en sentido opuesto por el árbol
- Sumatoria de fuentes de tensión en bucle de la corriente 1 igual a 10V (negativo)
- Sumatoria de fuentes de tensión en bucle de la corriente 2 igual a 5V (positivo)

Hasta aquí la aplicación de la técnica de síntesis se ha aplicado a un sistema de ecuaciones con su matriz de coeficientes simétrica. Sin embargo, existe la posibilidad de contar con una matriz no simétrica. Esto significa que el circuito cuenta con una fuente dependiente.

$$7x - 3y = 12$$

$$-5x + 10y = 8$$

Para resolver esta particularidad lo primero que debe hacerse es simetrizar la matriz de coeficientes, tal como sigue.

$$-5x + 10y = 8 \rightarrow -5x + (2x - 2x) + 10y = 8 \rightarrow -3x + 10y = 8 + 2x$$

Con lo anterior se vuelve a escribir el sistema de ecuaciones, donde puede interpretarse que el nuevo término que aparece en la segunda expresión se corresponde con una fuente dependiente que es proporcional a una de las incógnitas.

$$7x - 3y = 12$$

$$-3x + 10y = 8 + 2x$$

Llegado este punto de elegirse que método se utiliza para sintetizar las ecuaciones y para esto existen dos alternativas.

- Por el método de mallas

$$7J_1 - 3J_2 = 12V$$

$$-3J_1 + 10J_2 = 8V + 2J_1$$

Siendo que los términos del lado derecho se corresponden con fuentes de tensión, puede interpretarse que el circuito posee una fuente de tensión dependiente de una corriente que coincide con la corriente de malla J_1

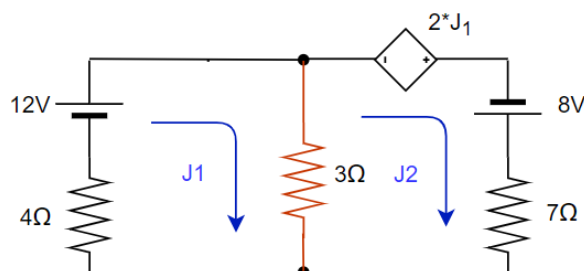


Figura 5-28: Síntesis realizada por el método de malla

- Por el método de nudos

$$7\varphi_1 - 3\varphi_2 = 12A$$

$$-3\varphi_1 + 10\varphi_2 = 8A + 2\varphi_1$$

Siendo que los términos del lado derecho se corresponden con corrientes de cortocircuito que ingresan al nudo, puede interpretarse que el circuito posee una fuente de corriente dependiente de la tensión del nudo φ_1

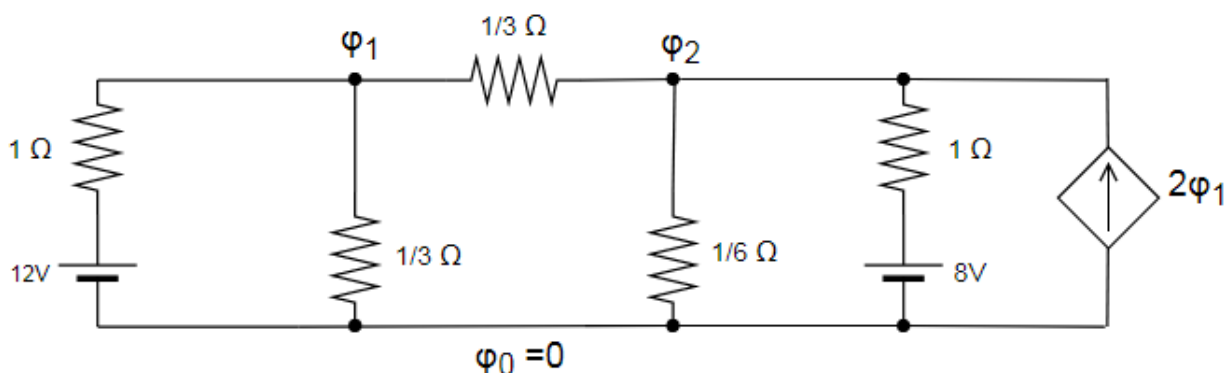


Figura 5-29: Síntesis realizada por el método de nudos

6. TEOREMAS DE REDES

6.1. Introducción

En este apunte se presentan una serie de teoremas los cuales van a permitir analizar y resolver redes complejas compuestas numerosas fuentes y múltiples enmallamientos. Al igual que los métodos de nudos y mallas, la aplicación de teoremas busca simplificar la tarea a la hora de resolver un circuito. En líneas generales los teoremas pueden dividirse en tres conjuntos:

- Construcción de equivalentes: cuando se desea evaluar el efecto de una red sobre otra sin que interese conocer que ocurre dentro de la primera, es decir solo importan las variables de salida, es posible obtener un equivalente de esta constituido por elementos simples.
- Simplificación de circuitos: aprovechando características topológicas es posible reducir una red a fin analizar una parte sin perder precisión pudiendo luego extrapolar los resultados a otros sectores del sistema.
- Sistematización de cálculos: utilizando la propiedad de linealidad de muchos circuitos es posible simplificar o acotar cálculos en la resolución.

En todos los casos se persiguen objetivos de simplificación de las redes, lo cual permite acotar cálculos o volverlos más sencillos logrando así reducir errores, acelerar el proceso de análisis y realizar estudios repetitivos sin pérdida de precisión.

Entre los casos más típicos se encuentra la evaluación de grandes redes de potencia y la necesidad de evaluar su efecto sobre distintas porciones. Algunos ejemplos son:

- El análisis de fallas como apertura de líneas de transmisión
- El ingreso de nuevos consumos
- La evaluación del arranque de grandes motores
- El diseño de nuevo equipamiento
- El ajuste de sistemas de protección

6.2. Conceptos básicos

En este apartado se dan a conocer los conceptos básicos necesarios para abordar este apunte.

6.2.1. Red Lineal

Se define a una red lineal a toda red que se encuentre constituida por elementos lineales tales como fuentes de tensiones ideales, fuentes de corrientes ideales, fuentes dependientes lineales, resistencias, capacitores e inductancias (dipolos lineales).

6.2.2.Red bilateral

Una red bilateral es aquella red que se encuentra constituida por elementos bilaterales, es decir, aquellos elementos cuya característica o mejor dicho comportamiento no depende de la polaridad que se les asigne, como por ejemplo una resistencia.

Un elemento no bilateral por ejemplo es un diodo, ya que su comportamiento se ve directamente afectado por la polaridad del mismo.

6.2.3.Red activa

Una red activa es aquella que posee dipolos activos, es decir dipolos capaces de suministrar energía, tales como las fuentes de corriente y de tensión.

6.2.4.Red pasiva

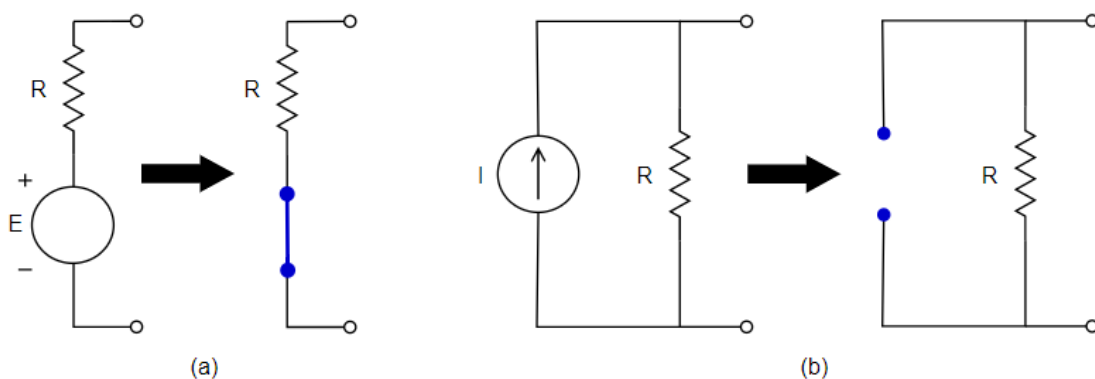
Una red pasiva es aquella que no posee ningún dipolo activo, y está constituida por dipolos pasivos.

Recordemos del apunte 1 “Dipolos” que un dipolo pasivo es aquel que es incapaz de generar energía eléctrica tales como las resistencias, inductancias y capacitancias.

6.2.5.Pasivar fuentes

Una fuente se encuentra pasivada cuando el módulo de su magnitud eléctrica se iguala a cero.

Aplicando esta definición para fuentes ideales de corriente y de tensión se tiene que: una fuente de voltaje en cero volts es el equivalente a colocar un cortocircuito a través de sus terminales, y establecer una fuente de corriente a cero amperes es el equivalente a reemplazarla con un circuito abierto.



6.3. Teoremas de redes

6.3.1. Teorema de Millman

Con la aplicación del Teorema de Millman, cualquier número de ramas en paralelo que contengan fuentes de tensión ($\dot{E}_k$) con impedancias (Z_k) en serie puede reducirse a una única rama que posea una fuente de tensión de f.e.m ($\dot{E}$) en serie con una impedancia (Z), como podemos observar a continuación:

$$\dot{E} = \frac{\dot{E}_1.Y_1 + \dot{E}_2.Y_2 + \dot{I}_1 + \dot{E}_3.Y_3}{Y_T}$$

$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3$$



Figura 1-1

Primero para llevar a cabo el teorema se debe transformar cada fuente de tensión con impedancia en serie en una fuente de corriente con impedancia en paralelo:

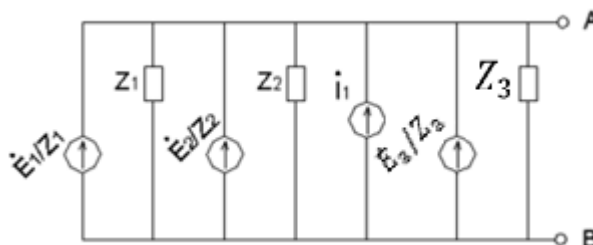


Figura 1.2

El segundo paso es hallar el equivalente de las fuentes de corriente y de las impedancias en paralelo. Finalmente, aplicando Kirchhoff, se obtiene el equivalente en fuente de tensión con impedancia en serie como se observa en la figura 1.3.

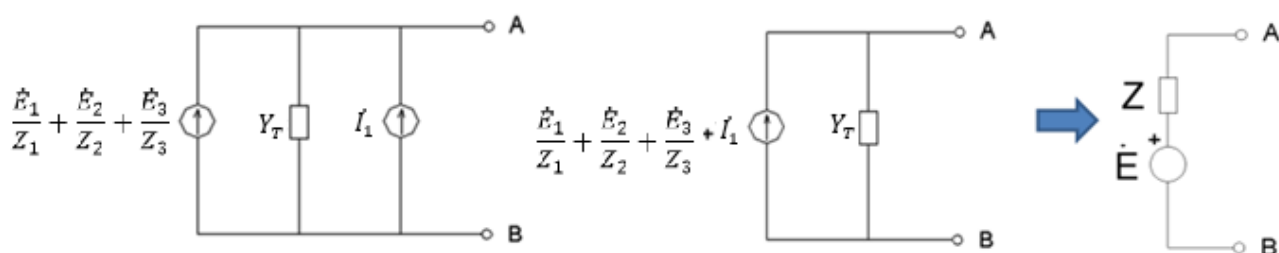


Figura 1.3

6.3.2.Red Escalera

Este teorema es aplicable a aquellos circuitos en los cuales solo contengan una sola fuente.

En la figura 7.1 se puede observar las configuraciones típicas que representan una red escalera.

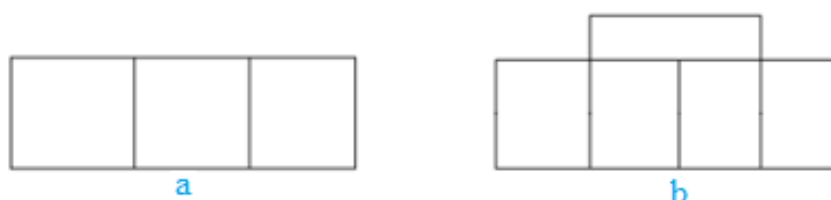


Figura 7.1 – (a) red escalera típica - (b) red escalera T puenteadada

El teorema consiste en suponer el valor de una corriente o tensión en alguna parte del circuito, para luego trasladar el efecto de dicha magnitud hacia el resto del mismo hasta llegar a la fuente. Luego desde allí se aplican las leyes de Kirchhoff para validar si la suposición había sido correcta, es decir el valor adoptado en el inicio es correcto o no. En el caso de que no lo sea se realiza una corrección muy sencilla que permite encontrar el valor correcto de todas las tensiones y corrientes del circuito en cuestión.

La resolución de estos circuitos lineales alimentados con una sola fuente se realizará mediante un ejemplo, basándose en el hecho que la relación excitación respuesta es lineal.

Sea el circuito de la figura 7.2. Hallar todos los valores indicados en el mismo.

Los valores supuestos llevarán un (*).

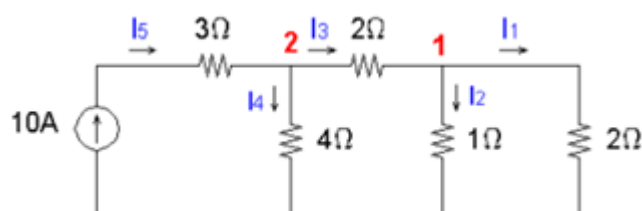


Figura 7.2

Para iniciar se supone un valor de $\dot{I}_1^* = 1A$ y a partir de este dato se procede a calcular los valores de tensión y corriente hacia la fuente, obteniendo:

$$\dot{V}_1^* = 2V$$

$$\dot{I}_2^* = 2A$$

$$\dot{I}_3^* = \dot{I}_1^* + \dot{I}_2^* = 3A$$

$$\dot{V}_2^* = 2\Omega * \dot{I}_3^* + \dot{V}_1^* = 8V$$

$$\dot{I}_4^* = \frac{\dot{V}_2^*}{4\Omega} = 2A$$

$$\dot{I}_5^* = \dot{I}_3^* + \dot{I}_4^* = 5A$$

Estos valores calculados de tensiones y corrientes serían correctos si $i_5^* = 10A$, que corresponde al valor de la fuente.

Como en este caso el valor supuesto no corresponde con el real del circuito se procede a calcular un factor llamado K de la siguiente manera:

$$i_5^* \cdot K = 10A \quad K = 10A / i_5^* = 2$$

Finalmente, para obtener los valores verdaderos del circuito, se debe afectar los calculados anteriormente por el factor K, teniendo así:

$i_1 = 2A$	$i_2 = 4A$	$i_3 = 6A$	$i_4 = 10A$
	$V_1 = 4V$	$V_2 = 16V$	

A continuación, se procede a resolver un circuito del tipo red T puentada como se ve en la figura 7.3.

Se supone a $i_1^* = 1A$ y a partir de esto se comienza a resolver.

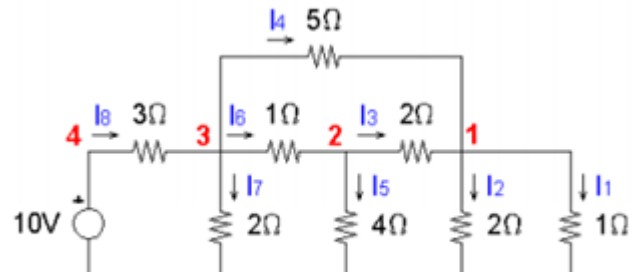


Figura 7.3

$$\begin{aligned} V_1^* &= 1V & i_2^* &= \frac{V_1^*}{2\Omega} & i_3^* &= x \\ i_4^* &= i_1^* + i_2^* - i_3^* = (1,5 - x)A \end{aligned}$$

$$V_2^* = 2\Omega \cdot x + V_1^* = (1 + 2 \cdot x)V \quad i_5^* = \frac{V_2^*}{4\Omega} = \frac{(1+2 \cdot x)V}{4\Omega} = (0,25 + 0,5 \cdot x)A$$

$$i_6^* = i_3^* + i_5^* = (0,5 + 1,5 \cdot x)A$$

El potencial del nudo 3 puede calcularse por dos caminos, S-superior o I-inferior.

$$V_3^{*S} = 5\Omega \cdot i_4^* + V_1^* = (0,25 + 0,5 \cdot x)V$$

$$V_3^{*I} = 1\Omega \cdot i_6^* + V_2^* = (1,25 + 3,5 \cdot x)V$$

Por ser único el valor del potencial de un nudo, debe verificarse que: $V_3^{*S} = V_3^{*I}$

De esta manera resulta: $x = 0,853$

Quedando:

$$i_1^* = 1A \quad i_2^* = 0,5A \quad i_3^* = 0,853A \quad i_4^* = 0,647A \quad i_5^* = 0,676A$$

$$i_6^* = 1,53A \quad i_7^* = \frac{V_3^*}{2\Omega} = 2,125A \quad i_8^* = i_4^* + i_6^* + i_7^* = 4,302A$$

$$\dot{V}_1^* = 1V \quad \dot{V}_2^* = 2,706V \quad \dot{V}_3^* = 4,256V \quad \dot{V}_4^* = \dot{V}_3^* + 3\Omega * \dot{I}_7^* = 15,458V$$

Factor K: $K = \frac{10V}{15,458V} = 0,647$

Los valores finales resultan para el circuito escalera T – punteada.

$\dot{I}_1 = 0,647A$	$\dot{I}_2 = 0,323A$	$\dot{I}_3 = 0,552A$	$\dot{I}_4 = 0,419A$
$\dot{I}_5 = 0,573A$	$\dot{I}_6 = 0,99A$	$\dot{I}_7 = 1,375A$	$\dot{I}_8 = 2,783A$
$\dot{V}_1 = 0,647V$	$\dot{V}_2 = 1,751V$	$\dot{V}_3 = 2,75V$	$\dot{V}_4 = 10V$

6.3.3. Teorema de Superposición

Este teorema permite determinar una corriente o voltaje utilizando sólo una fuente a la vez en un circuito lineal y bilateral. Es decir que este teorema es aplicable a aquellos circuitos en los cuales intervengan más de una fuente.

Para la aplicación de este teorema se utiliza el concepto explicado en la introducción “Pasivar fuentes” (figura 2.1).

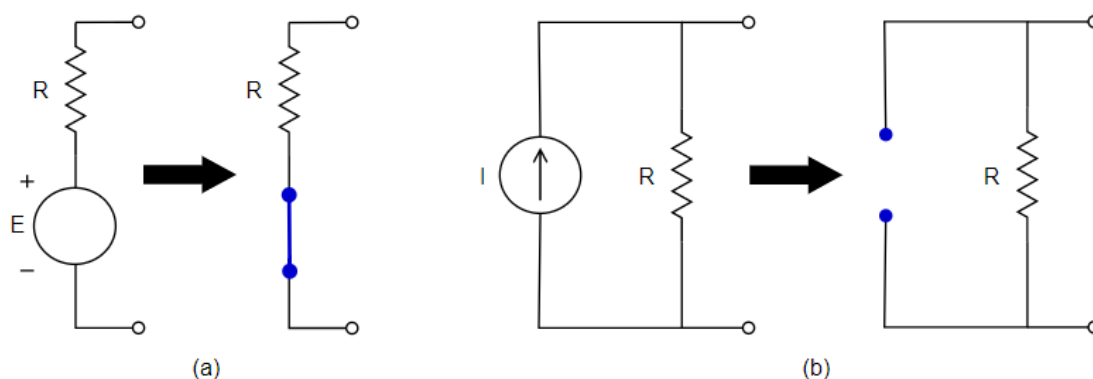


Figura 2.1 – (a) pasivar una fuente de tensión y (b) pasivar fuentes de corriente

Para llevar a cabo el teorema de superposición se tiene que tener en cuenta lo siguiente:

- Cada fuente debe estar sin pasivar una sola vez.
- Las fuentes dependientes no se pasivan.
- La superposición no puede ampliarse a efectos de calcular la potencia.

A continuación, se procede a aplicar el teorema de superposición al circuito de la figura 2.2.

En dicho circuito se desea obtener el valor de I_2 .

Como primera medida se procede a pasivar la fuente de corriente I obteniendo el circuito de la figura 2.3.

Luego se resuelve el circuito resultante quedando así: $I' = \frac{E}{R_2}$

Como segundo paso se procede a pasivar la fuente de tensión obteniendo así el circuito de la figura 2.4.

Calculando I'' se tiene: $I'' = \frac{R_1 * I}{R_1 + R_2}$

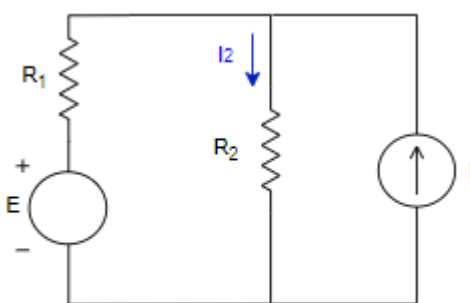


Figura 2.2

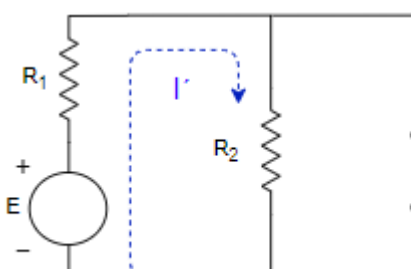


Figura 2.3

Una vez que se tiene el resultado para cada fuente, se procede a realizar la suma algebraica de los mismos, para así obtener el valor final. El término “suma algebraica” aparece en el enunciado del teorema porque las corrientes producidas por las fuentes pueden ser de direcciones diferentes, al igual que los voltajes resultantes pueden ser de polaridades opuestas.

De esta manera se tiene que: $I_2 = I' + I''$

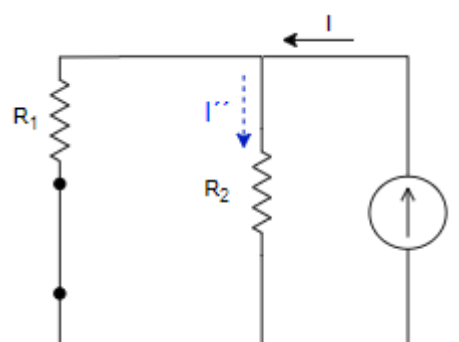
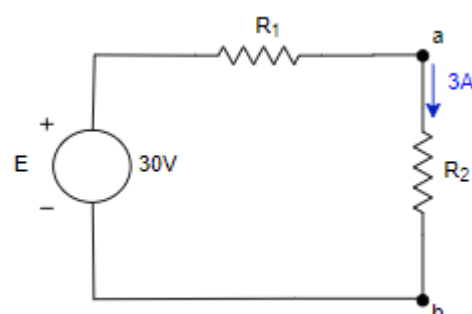


Figura 2.4

6.3.4. Teorema de Sustitución

El teorema de sustitución establece que en toda red una rama o porción de un circuito puede ser sustituida por otra distinta, siempre y cuando la parte sustituyente tenga igual diferencia de potencial cuando circula la misma corriente que tenía el circuito primitivo.

A continuación, se procede a aplicar el teorema en el ejemplo de la figura 3.1.



Sea : $R_1 = 6\Omega$ $R_2 = 4\Omega$

Para poder sustituir la rama a-b se debe calcular la caída de tensión en R_2 .

$$V_{R_2} = 12V$$

Figura 3.1

Ahora sabiendo la caída de tensión y la corriente en la rama a-b, se procede a sustituirla por un elemento activo como podemos visualizar en la figura 3.2, ya sea una fuente de tensión como en el caso (a) o una de corriente como en el caso (b).

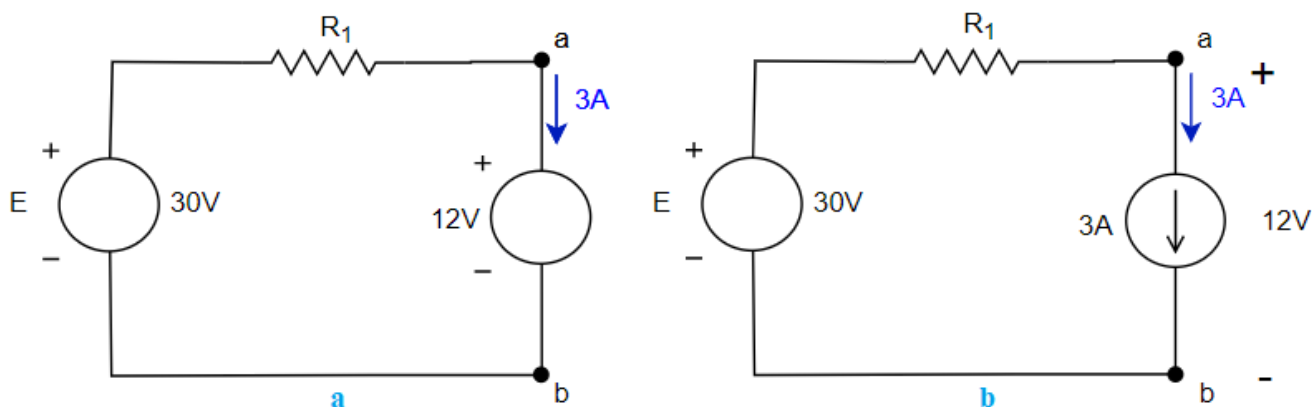


Figura 3.2

En el caso en el que se quiera reemplazar un elemento pasivo (ejemplo una resistencia) por un elemento pasivo acompañado de un elemento activo se procede de la siguiente manera:

Se considera que: $R = a \cdot R + (1 - a) \cdot R$

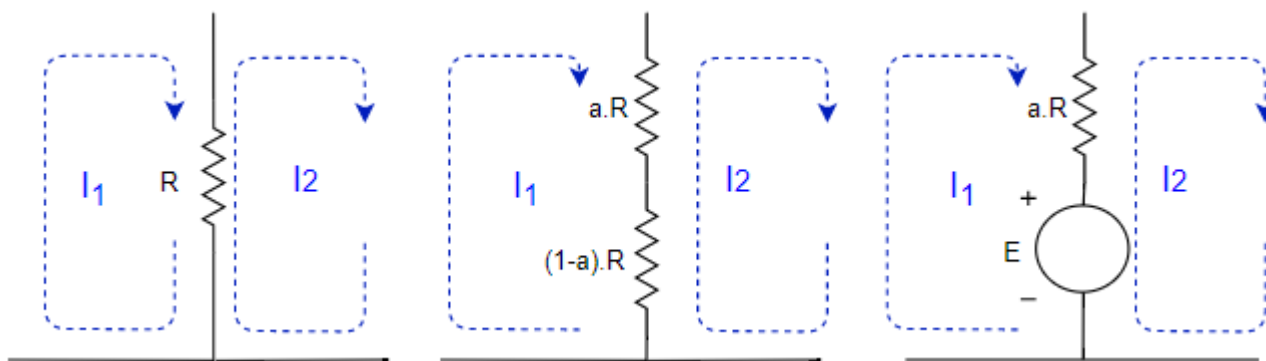


Figura 3.3

De esta manera el valor del elemento activo, en este caso una fuente de tensión ideal es: $E = (I_1 - I_2) \cdot (1 - a) \cdot R$

6.3.5. Transformación estrella triángulo

La transformación estrella/triángulo (Y/Δ) relaciona redes de tres terminales. En la figura 5.1 se puede observar sus configuraciones.

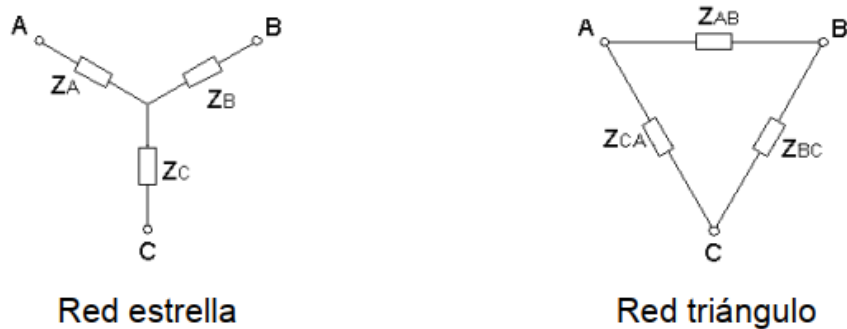


Figura 3.1

La equivalencia se demuestra resolviendo por superposición de dos circuitos, uno en triángulo y otro equivalente en estrella.

A continuación en la figura 5.2 se tiene el circuito equivalente en triángulo (Δ).

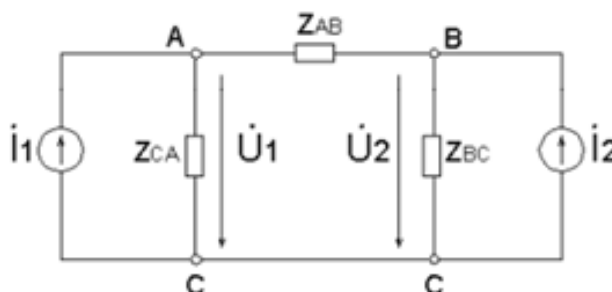


Figura 5.2 – Circuito equivalente en triángulo (Δ)

Aplicando el teorema de superposición al circuito de la figura 5.2 se obtiene la figura 5.3.

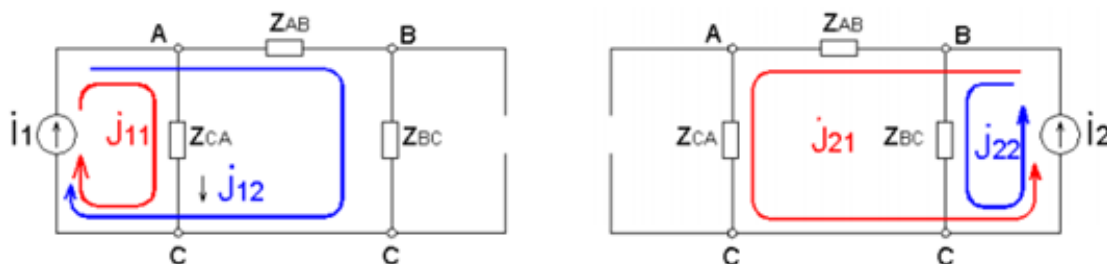


Figura 5.3 - Circuito equivalente en triángulo (Y)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{J}_{11} * Z_{CA} + \dot{J}_{21} * Z_{CA} \\ \dot{U}_2 &= \dot{J}_{12} * Z_{BC} + \dot{J}_{22} * Z_{BC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 * \frac{Z_{AB} + Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{CA} + \dot{I}_2 * \frac{Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{CA} \\ \dot{U}_2 &= \dot{I}_1 * \frac{Z_{CB}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{BC} + \dot{I}_2 * \frac{Z_{AB} + Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{BC} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ahora se puede observar en la figura 5.4 el circuito equivalente en estrella (Y).

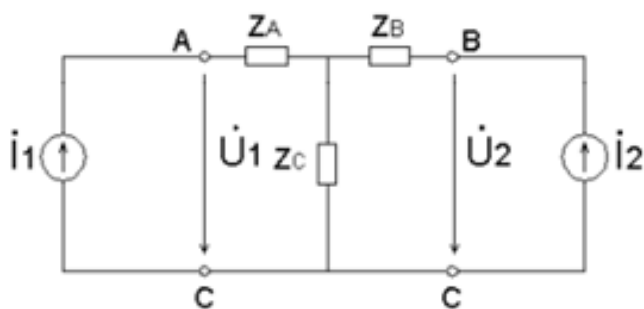


Figura 5.4

Aplicando el teorema de superposición al circuito de la figura 5.4 se obtiene la figura 5.5.

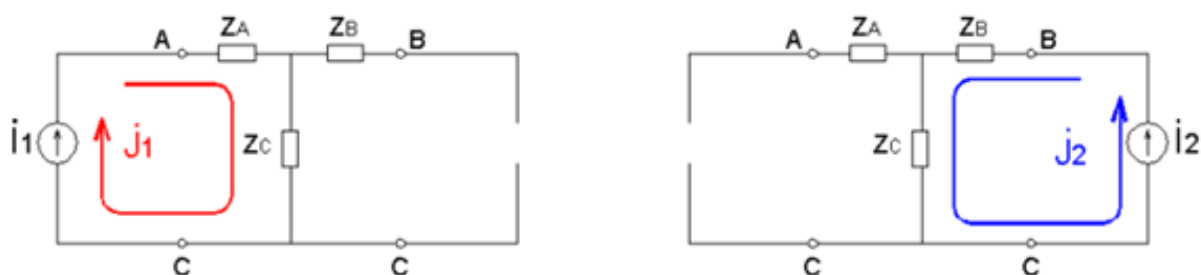


Figura 5.5

$$\left[\begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{J}_1 * (Z_A + Z_C) + \dot{J}_2 * Z_C \\ \dot{U}_2 = \dot{J}_1 * Z_C + \dot{J}_2 * (Z_B + Z_C) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 * (Z_A + Z_C) + \dot{I}_2 * Z_C \\ \dot{U}_2 = \dot{I}_1 * Z_C + \dot{I}_2 * (Z_B + Z_C) \end{array} \right] \quad (2)$$

Una vez hecho esto, para lograr la equivalencia de la Y con el Δ los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) deben ser iguales.

$$Z_A + Z_C = \frac{Z_{AB} + Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{CA}$$

$$Z_C = \frac{Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{CA}$$

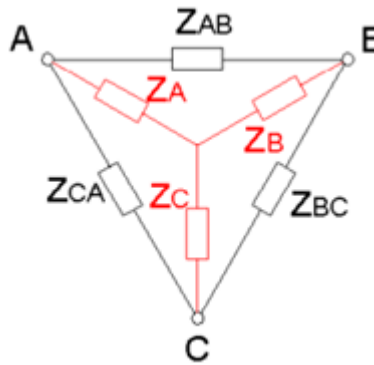
$$Z_B + Z_C = \frac{Z_{AB} + Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} * Z_{BC}$$

De esta manera se obtiene la equivalente estrella del triángulo ($\Delta \rightarrow Y$).

$$Z_A = \frac{Z_{AB} * Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$

$$Z_B = \frac{Z_{AB} * Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$

$$Z_C = \frac{Z_{BC} * Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$



Ahora se procede a calcular la impedancia en Δ equivalente a una Y dada.

Se multiplica Z_A por Z_B , Z_B por Z_C y Z_C por Z_A y se obtiene:

$$Z_A * Z_B = \frac{Z_{AB}^2 * Z_{BC} * Z_{CA}}{(Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA})^2}$$

$$Z_B * Z_C = \frac{Z_{AB} * Z_{BC}^2 * Z_{CA}}{(Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA})^2}$$

$$Z_C * Z_A = \frac{Z_{AB} * Z_{BC} * Z_{CA}^2}{(Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA})^2}$$

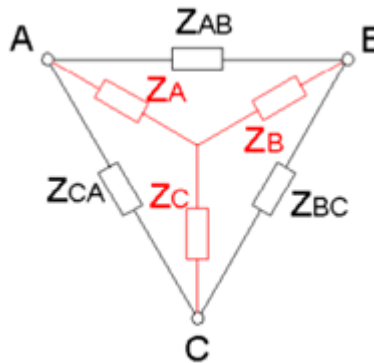
Luego llamando $\sum Z = (Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA})^2$ y operando se tiene:

De esta manera se resulta el equivalente triángulo de la estrella ($Y \rightarrow \Delta$).

$$Z_{AB} = Z_A + Z_B + \frac{Z_A * Z_B}{Z_C}$$

$$Z_{BC} = Z_B + Z_C + \frac{Z_B * Z_C}{Z_A}$$

$$Z_{CA} = Z_C + Z_A + \frac{Z_C * Z_A}{Z_B}$$



6.3.6. Teorema de Thevenin

Este teorema plantea que todo dipolo lineal que contenga fuentes e impedancias puede ser reemplazado por una única fuente de tensión $\dot{E}_{th}$ en serie con una impedancia Z_{th} (figura 8.1), en donde el valor de $\dot{E}_{th}$ es la tensión a circuito abierto en los terminales 1-2 y Z_{th} es la impedancia vista desde el par de terminales estando el dipolo pasivado.

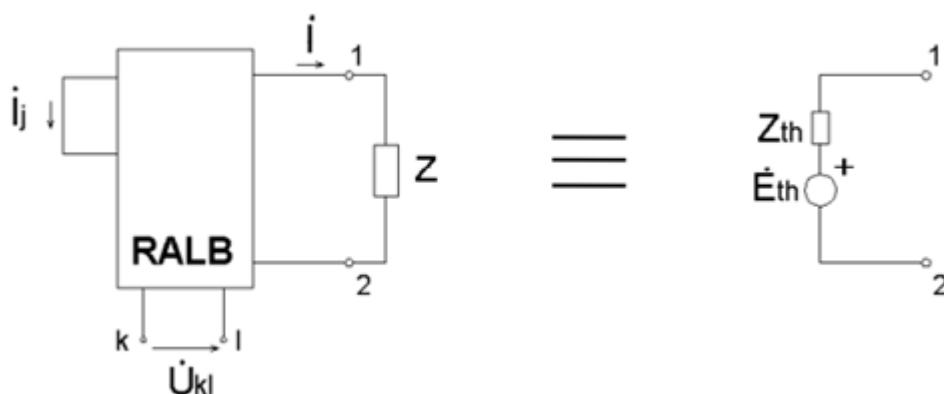


Figura 8.1

Demostración:

Dada una red activa y lineal de la cual se pueden identificar dos bornes (1-2) donde al conectarse una impedancia Z circula por esta última una corriente I (figura 8.2 (a)).

En primera instancia se abre el circuito de modo que se anula la corriente a través de la impedancia Z . Colocamos el subíndice “0” para los valores a circuito abierto (figura 8.2 (b)).

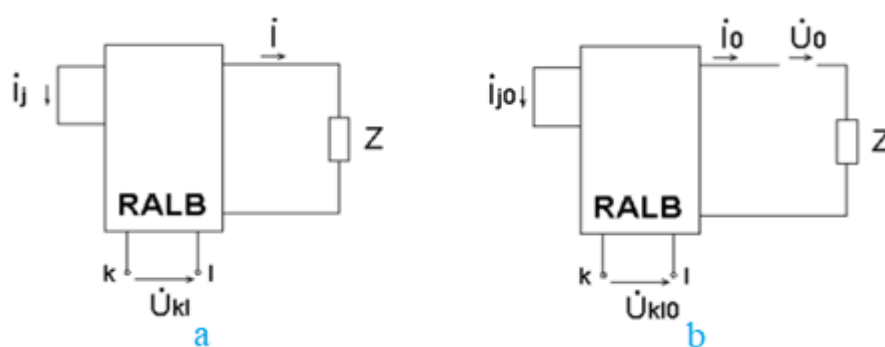


Figura 8.2

Ahora colocando una fuente de tensión de valor $\check{U}_0$ tenemos el circuito de en la figura 8.3 (a), que es equivalente al circuito de la figura 8.2 (b).

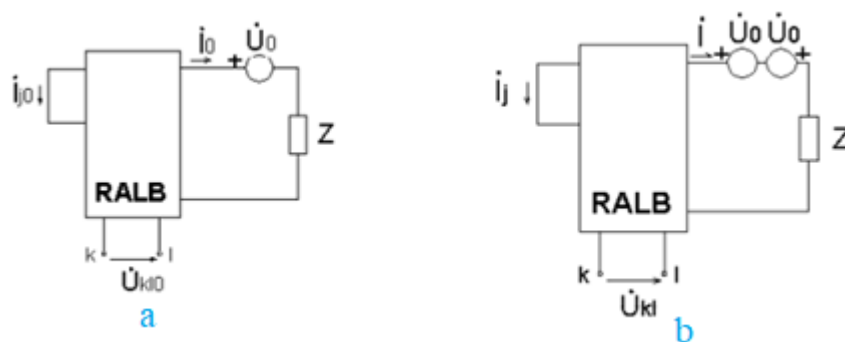


Figura 8.3

Luego si en serie sobre la misma rama se incorpora otra fuente de igual valor, pero en sentido opuesto se obtiene un circuito de la figura 8.3 (b) es el equivalente al circuito original.

A este último procedemos a aplicarle superposición. Notar que la red de la izquierda tiene sus fuentes independientes activas, mientras que en el de la derecha las fuentes están pasivadas siendo la fuente $\dot{U}_0$ el único elemento activo.

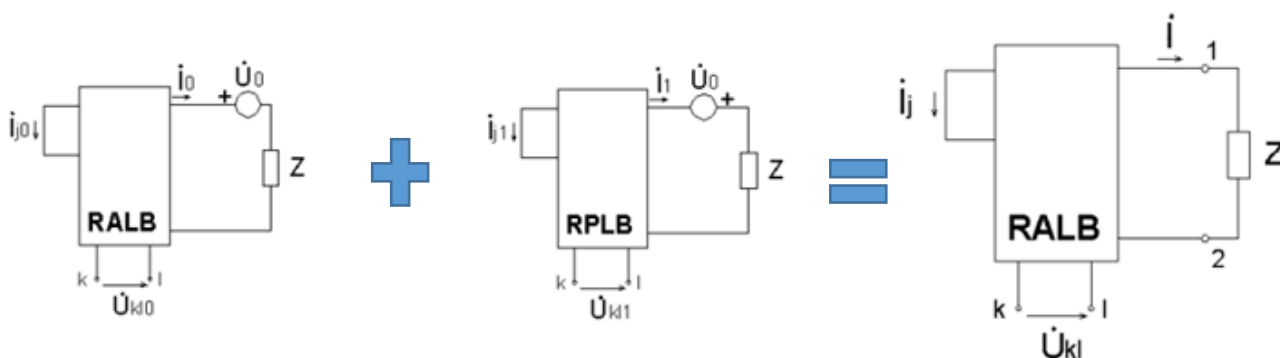


Figura 8.4

De la figura 8.4 tenemos que: $\dot{I}_j = \dot{I}_{j0} + \dot{I}_{j1}$ $\dot{U}_{kl} = \dot{U}_{kl0} + \dot{U}_{kl1}$ $\dot{I} = \dot{I}_0 + \dot{I}_1$

Por ser $\dot{I}_0 = 0$ tenemos que $\dot{I}_1$ es la corriente que circula por Z.

Para calcular la impedancia vista, se procede a pasivar la red como se observa en la figura 8.5.

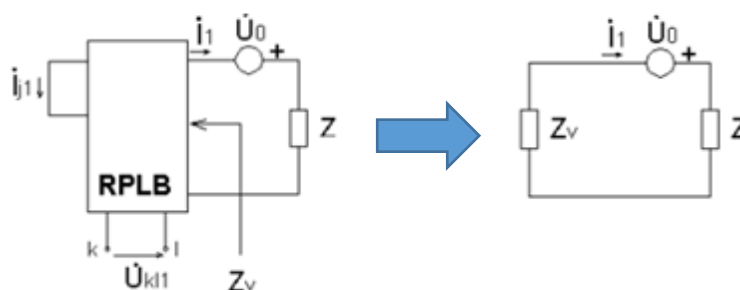


Figura 8.5

Por último, si sustituimos a $\dot{U}_0$ por $\dot{E}_{th}$ y a Z_v por Z_{th} tenemos, en la figura 8.6, la demostración del teorema.

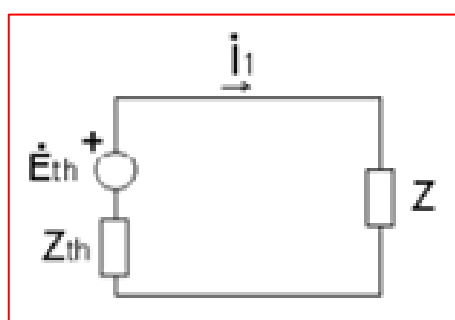


Figura 6.3-1

Según se presenta hasta aquí el teorema de Thevenin implica encontrar un equivalente compuesto por dos elementos: una fuente de tensión y una impedancia. La fuente de tensión es igual a la tensión de vacío entre los bornes de la red que desea reducir. En la cuanto a la impedancia esta se denomina impedancia vista, su obtención se explica a continuación.

6.3.6.1. Cálculo de impedancia vista

La impedancia vista es la impedancia equivalente que el circuito ofrece entre sus bornes cuando todas sus fuentes independientes se encuentran pasivadas.

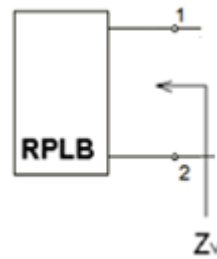


Figura 6.3-2

Independientemente de la conformación de la red existe un método infalible para el cálculo de la impedancia vista. Este consiste en colocar una fuente auxiliar en los bornes de la red (a la cual se han previamente pasivado todas sus fuentes independientes). La fuente auxiliar puede ser tanto de tensión como de corriente y su valor es igualmente anecdótico. El objetivo es calcular la impedancia vista mediante la ley de ohm, por lo que si se utiliza por ejemplo una fuente tensión es necesario calcular la corriente resultante de la interacción entre la fuente auxiliar y el resto de la red. Esto se muestra en la siguiente figura.

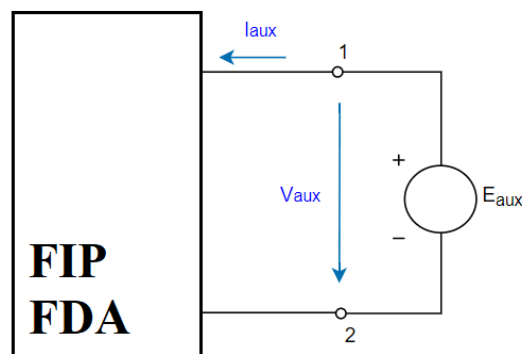


Figura 6.3-3

Una vez obtenida la corriente, la impedancia vista se calcula como sigue.

$$Z_v = \dot{E}_{aux} / \dot{I}_{aux}$$

Es de suma importancia tener en cuenta que si el circuito posee fuentes dependientes, estas no se deben pasivar. En función de esto en la figura anterior se utiliza la siguiente nomenclatura

FIP: fuentes independientes pasivadas.

FDA: fuentes dependientes activa.

Tal como se ha comentado anteriormente la aplicación de esta técnica es igualmente válida utilizando una fuente de corriente.

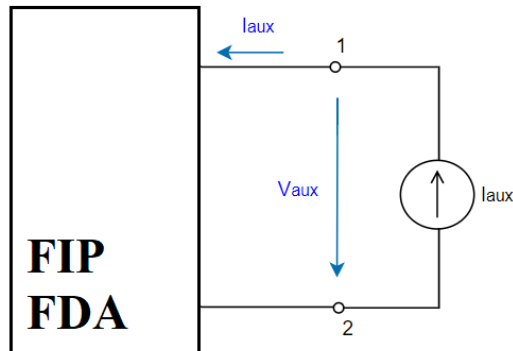


Figura 6.3-4

Para afianzar los conceptos presentados hasta el momento se propone a continuación un ejemplo donde se determina el equivalente de Thevenin sobre un circuito simple.

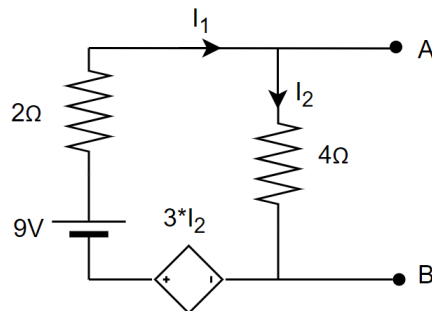


Figura 6.3-5

En primer lugar, se debe calcular la tensión de vacío entre los puntos A-B que en este caso es igual a la tensión que cae sobre la resistencia de 4Ω al ser circulada por la corriente I_2 . Se aplica ahora la segunda ley de Kirchhoff sobre la malla.

$$-9V + I_1 * 2\Omega + I_2 * 4\Omega - 3I_2 = 0$$

Al considerar al circuito en vacío las corrientes I_1 e I_2 resultan iguales. Esto permite una rápida resolución de la ecuación.

$$I_2 = \frac{9V}{3\Omega} = 3A \Rightarrow U_0 = I_2 * 4\Omega = 12V$$

En consecuencia, se tiene:

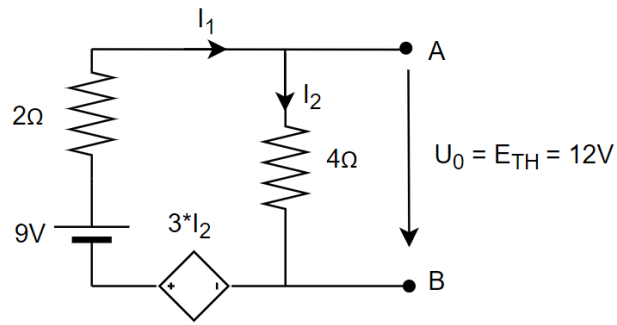


Figura 6.3-6

Resta ahora calcular la impedancia vista. Para esto se comienza pasivando las fuentes activas y colocando una fuente auxiliar de 1V entre los bornes A-B.

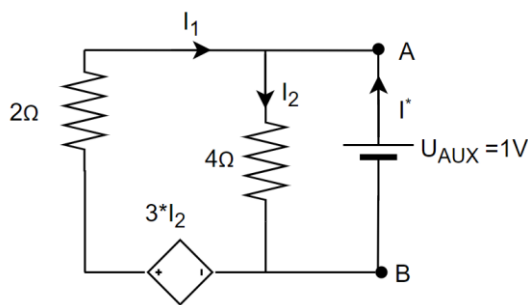


Figura 6.3-7

El objetivo aquí es calcular la corriente I^* que circula a través de la fuente auxiliar. Para esto se tiene que dicha fuente fija el potencial de la resistencia de 4Ω por lo que resulta sencillo calcular la corriente I_2 .

$$I_2 = \frac{1V}{4\Omega} = 0,25A$$

Se debe ahora calcular la corriente I_1 , para esto se aplica la segunda ley de Kirchhoff sobre la malla de la izquierda.

$$I_1 * 2\Omega + I_2 * 4\Omega - 3I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{3I_2 - I_2 * 4\Omega}{2} = -0,125A$$

El signo menos en el resultado anterior indica que para las condiciones planteadas en la figura anterior la corriente I_1 circula en sentido contrario.

Acto seguido se aplica la primera ley de Kirchhoff sobre el nodo superior para calcular la corriente I^*

$$I_1 + I^* = I_2 \Rightarrow I^* = I_2 - I_1 = 0,25A + 0,125A = 0,375A$$

Con esta información es posible determinar la impedancia de Thevenin

$$Z_{Th} = \frac{U_{aux}}{I^*} = 2,66\Omega$$

Se tienen en este punto todos los componentes del equivalente los cuales se presentan en la siguiente figura.

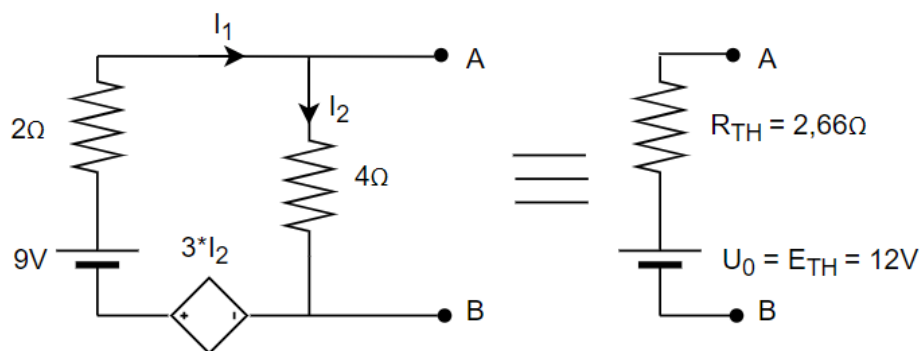


Figura 6.3-8

6.3.6.2. Aplicaciones particulares

Circuito con elemento anómalo.

Una de las condiciones para la aplicación del teorema de Thevenin es la de linealidad del circuito, sin embargo, existe un caso particular para los dipolos pasivos simétricos en donde se puede aplicar. Es cuando los estados son (0,0) y el final.

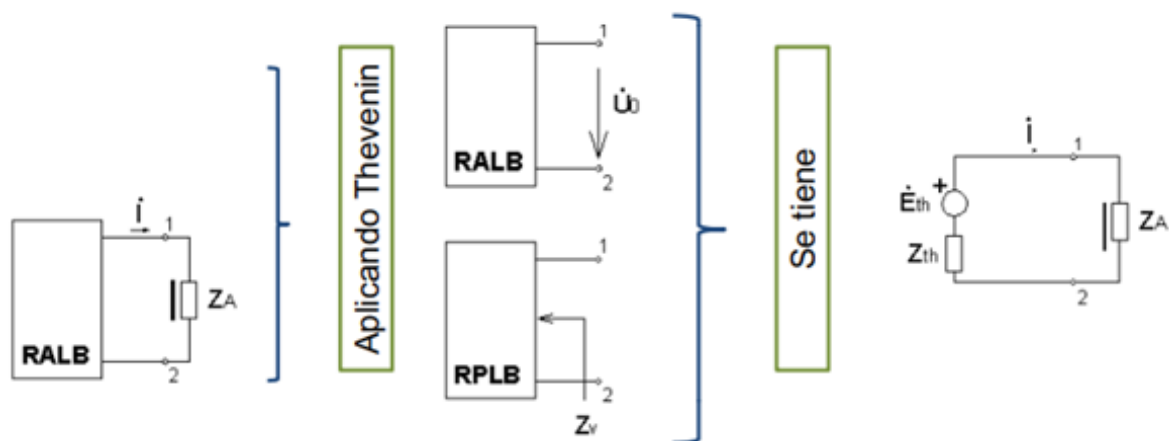


Figura 8.11

6.3.7. Teorema de Norton

Este teorema plantea que todo dipolo lineal que contenga fuentes e impedancias puede ser reemplazado por una única fuente de corriente $\hat{I}_N$ en paralelo con una impedancia Z_N (figura 9.1), en donde el valor de $\hat{I}_N$ es la corriente de cortocircuito entre los terminales 1-2 y Z_N es la impedancia vista desde el par de terminales estando el dipolo pasivado.

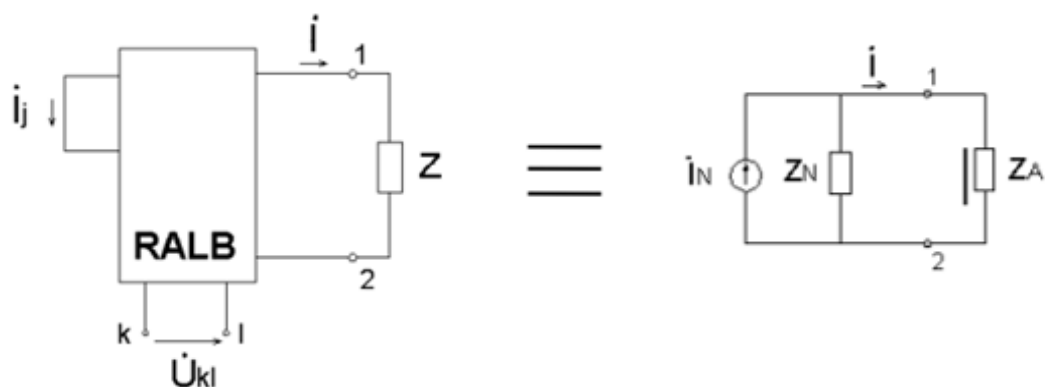


Figura 6.3-9

Demostración:

Dada una red activa y lineal de la cual se puede identificar dos bornes (1-2) donde al conectarse una impedancia Z circula por esta última una corriente I (figura 9.2 (a)).

Para encontrar un equivalente de la red, en primera instancia se realiza un cc entre 1-2 como se observa en la figura 9.2 (b).

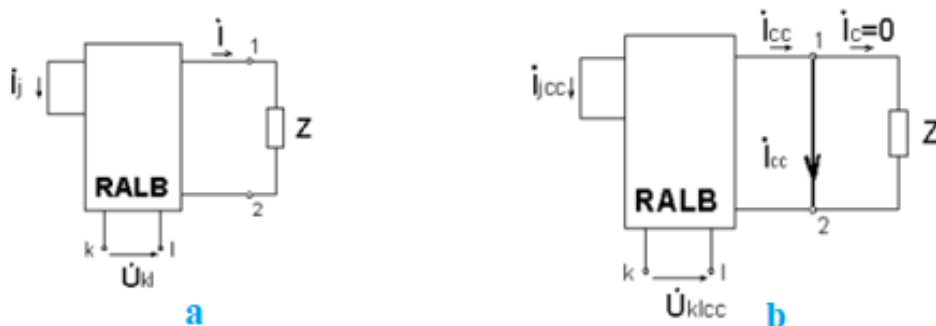


Figura 9.2

Después procedemos a sustituir la rama cc por una fuente de corriente (figura 9.3).

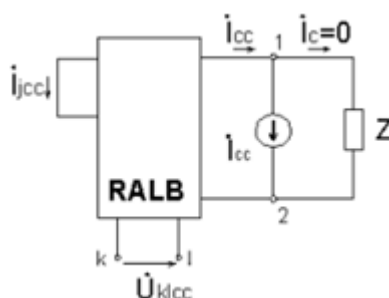


Figura 9.3 – Equivalente al circuito de la figura 9.2 (b)

Ahora bien, si se agrega otra fuente de corriente en paralelo, pero en sentido opuesto obtenemos un circuito que es equivalente al de la figura 9.2 (a).

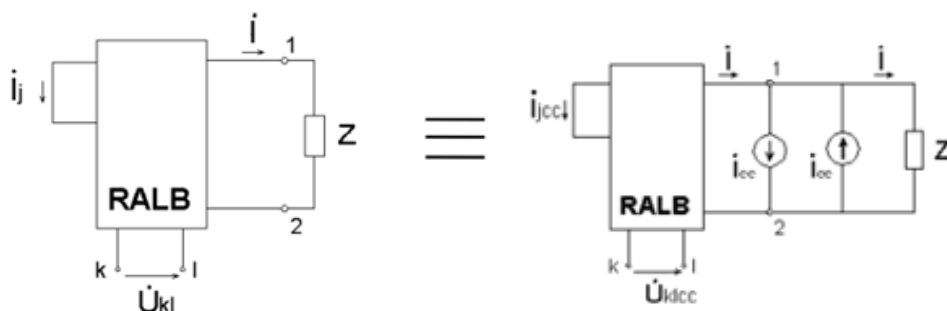


Figura 9.4

Aplicando superposición tenemos la figura 9.5.

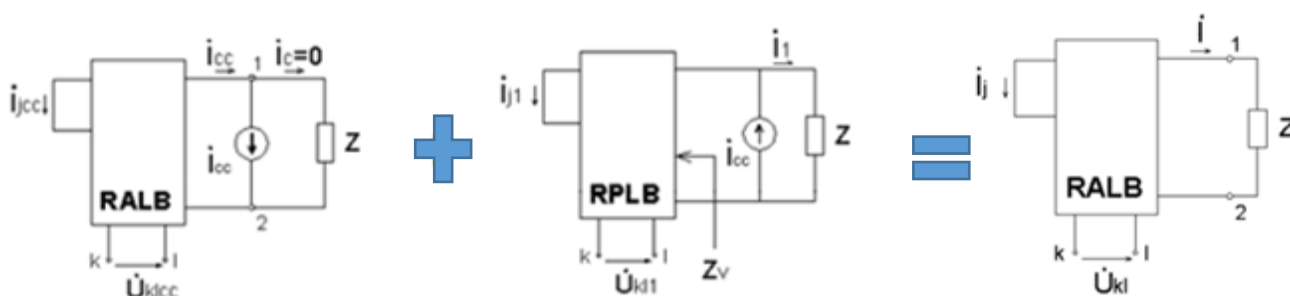


Figura 9.5

Siendo de esta manera: $\dot{I}_j = \dot{I}_{jc} + \dot{I}_{j1}$ $\dot{U}_{kl} = \dot{U}_{klcc} + \dot{U}_{kl1}$ $\dot{I} = \dot{I}_{cc} + \dot{I}_1$

Por ser $\dot{I}_c = 0$, $\dot{I}_1$ es la corriente real por Z.

El circuito equivalente quedaría como el de la figura 9.6

Finalmente, si sustituimos a $\dot{I}_{cc}$ por $\dot{I}_N$ y a Z_v por Z_n tenemos, en la figura 9.7, la demostración del teorema.

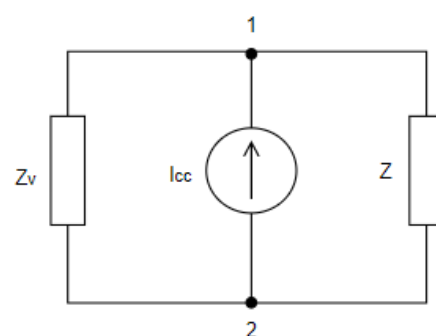


Figura 9.6

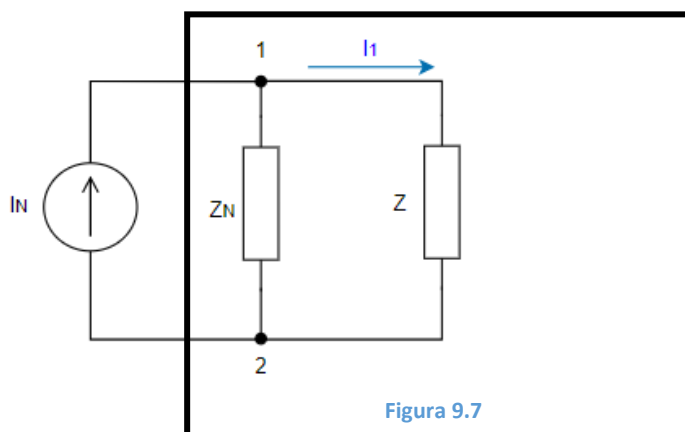


Figura 9.7

6.3.7.1. *Equivalencia entre Thevenin y Norton*

Consideremos un circuito el cual hallamos el equivalente de Thevenin y el de Norton, por carácter transitivo ambos circuitos de Thevenin y Norton son equivalentes entre sí. Esto significa que existe la siguiente relación.

$$Z_{Th} = Z_N = \frac{E_{Th}}{I_N}$$

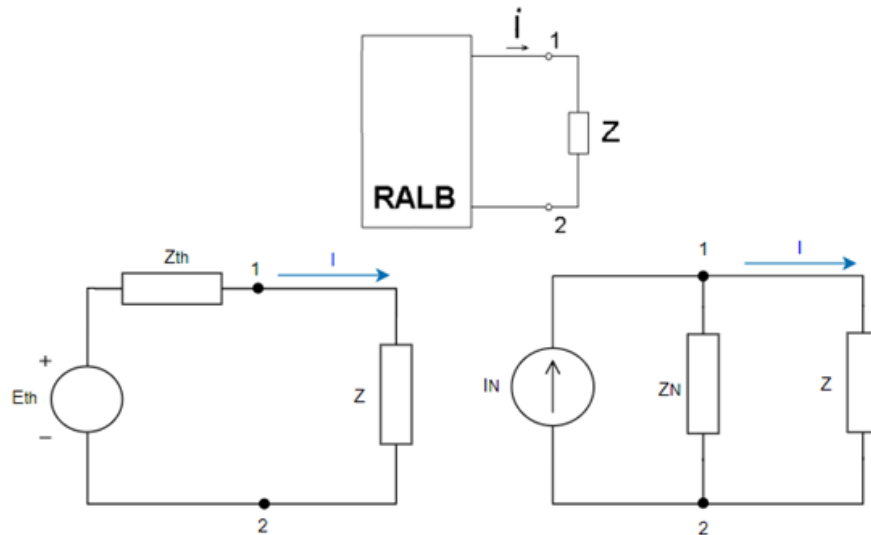


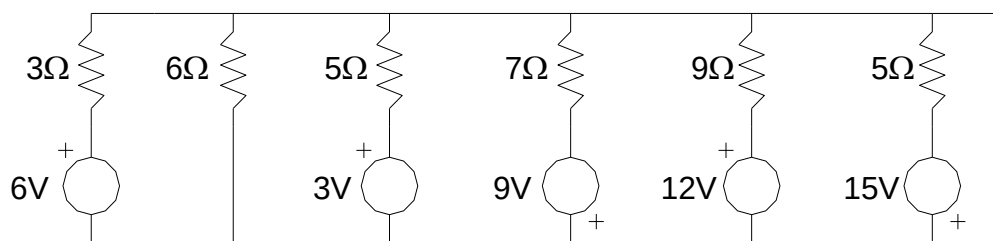
Figura 9.8

6.4. Ejercicios

Problema 47

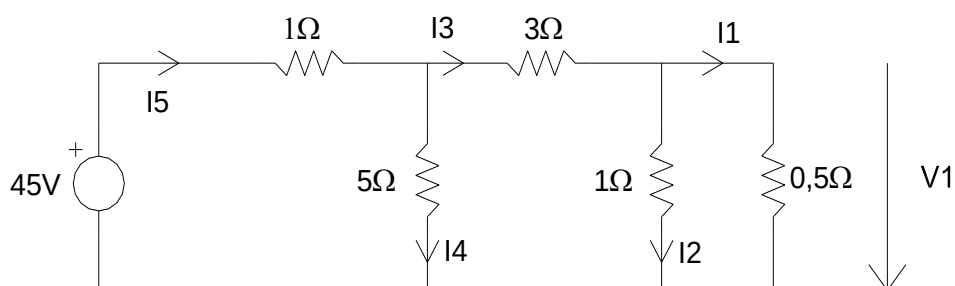
Calcular la fuente real equivalente que sustituya al esquema de la figura. Usar:

- Una fuente de tensión
- Una fuente de corriente.



Problema 48

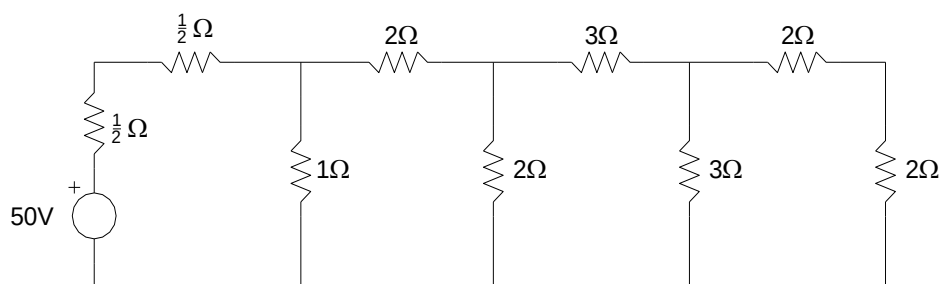
Encontrar V_1 usando el método escalera



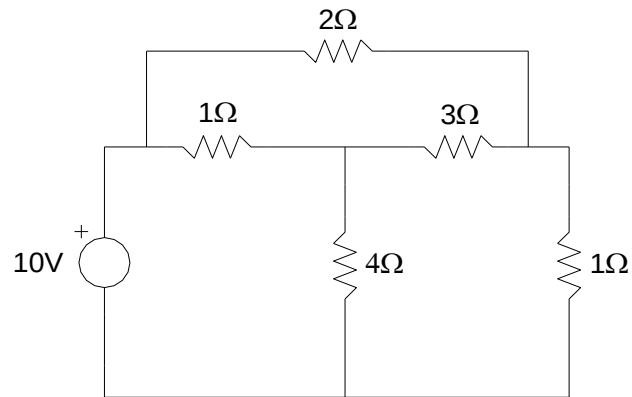
Problema 49

Utilizar el método escalera para resolver los siguientes circuitos:

a)

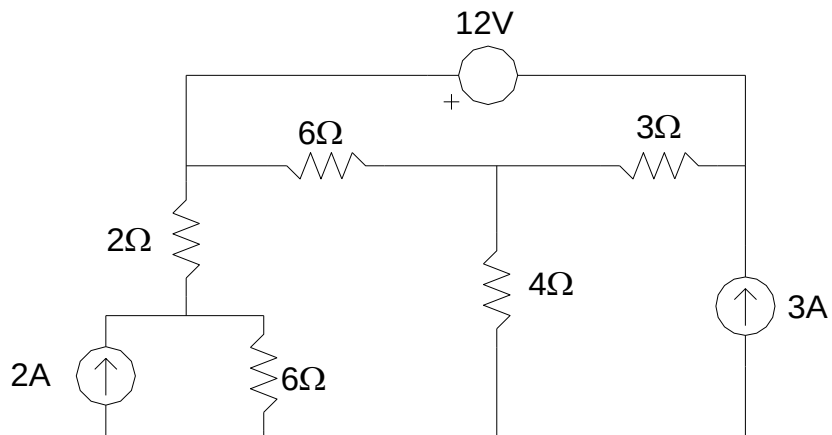


b)



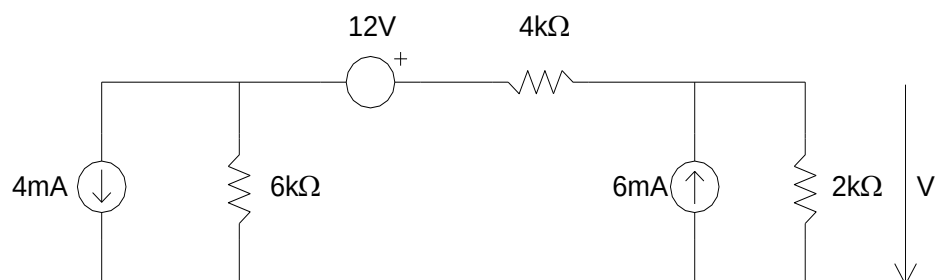
Problema 50

Usando superposición, hallar la potencia disipada en la resistencia de 4 Ω



Problema 51

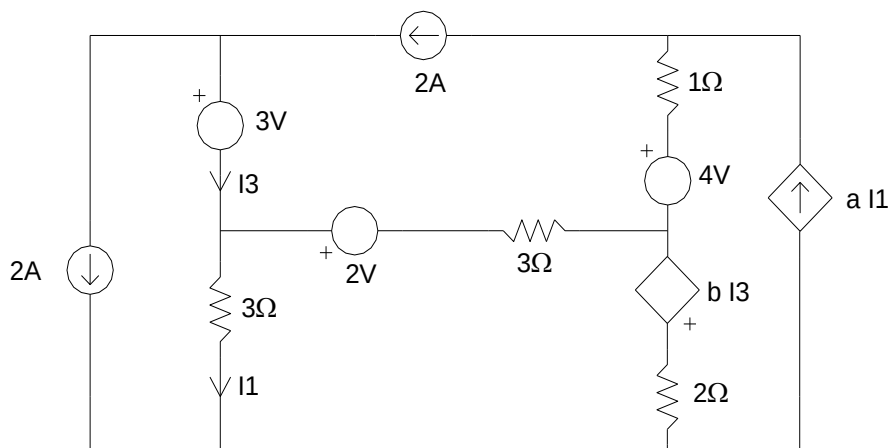
Calcular el valor de V usando el principio de superposición.



Problema 52

En el circuito de la figura ($a = 3$ y $b = 2$):

a) Calcular todas las corrientes y potenciales aplicando el principio de superposición.

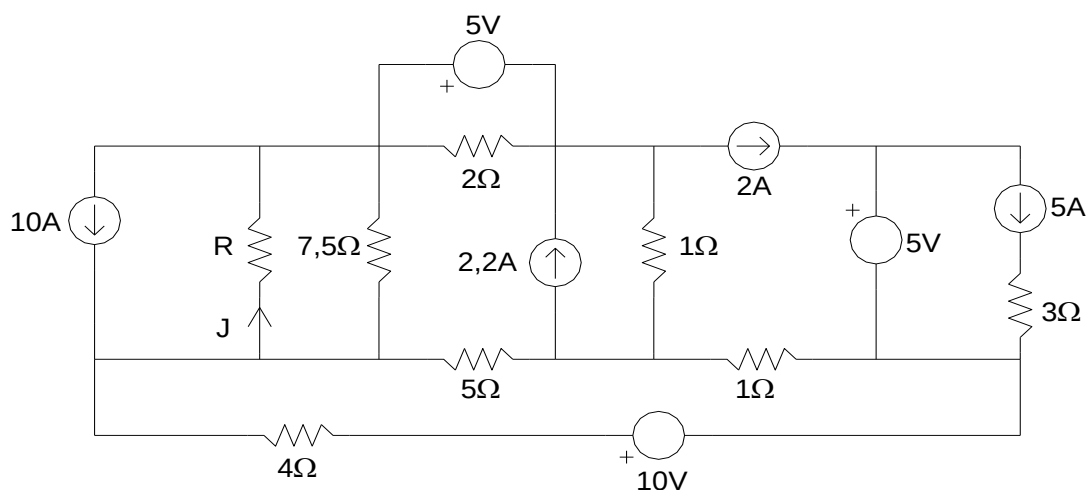


Problema 53

Aplicando el principio de superposición,

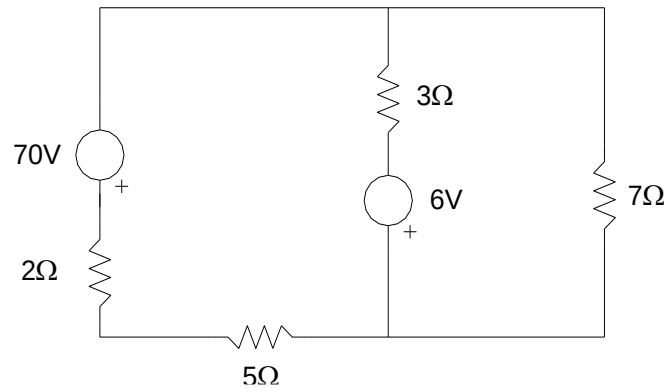
- Calcular la corriente J ,
- Calcular la variación de la d.d.p. en bornes de R cuando esta disminuye $0,5\Omega$, siendo su valor inicial de $1,25\Omega$.

Sugerencia: Pasivar simultáneamente todas las fuentes del mismo tipo.



Problema 54

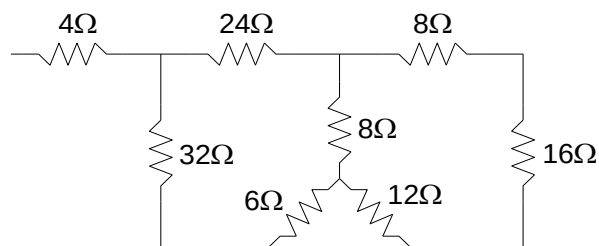
En el esquema de la figura sustituir la resistencia de 7Ω por una fuente de FEM tal que mantenga el estado de régimen de la red.



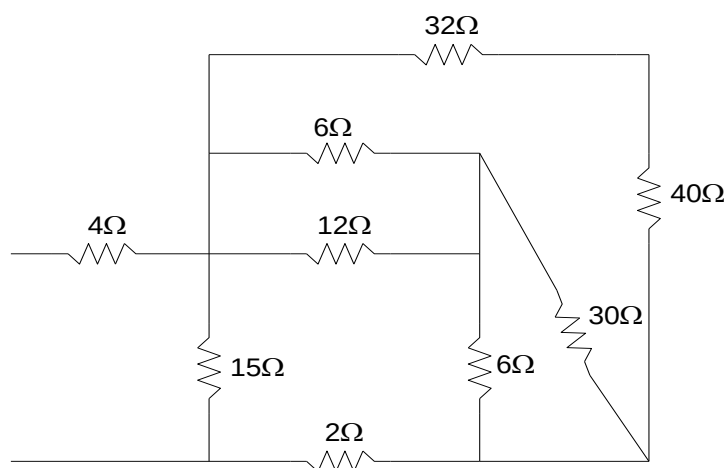
Problema 55

Calcular la resistencia vista desde los bornes en las siguientes redes:

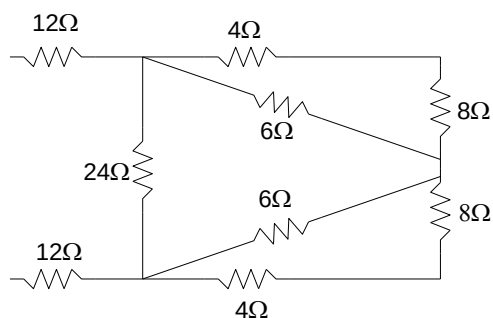
a)



b)



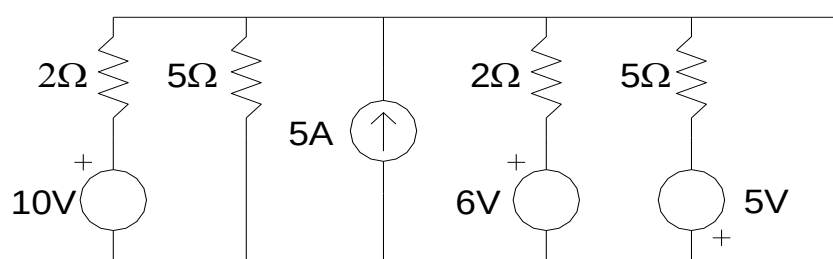
c)



Problema 56

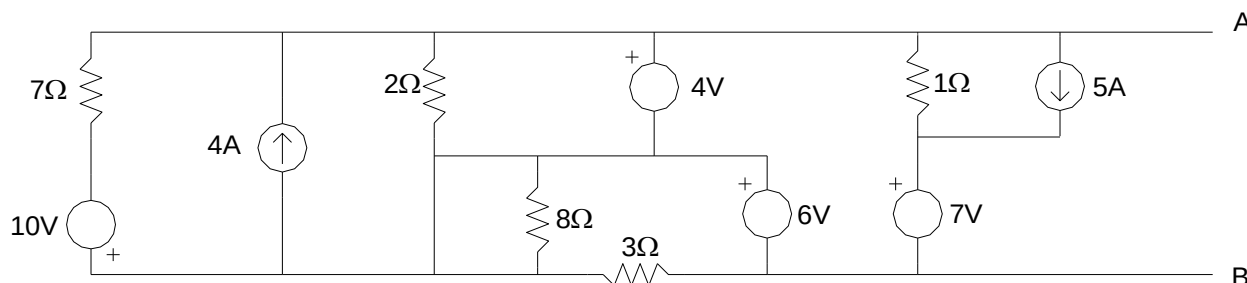
Calcular la fuente real equivalente que sustituya al esquema de la figura. Usar:

- Una fuente de tensión
- Una fuente de corriente



Problema 57

A partir del dipolo de la figura:

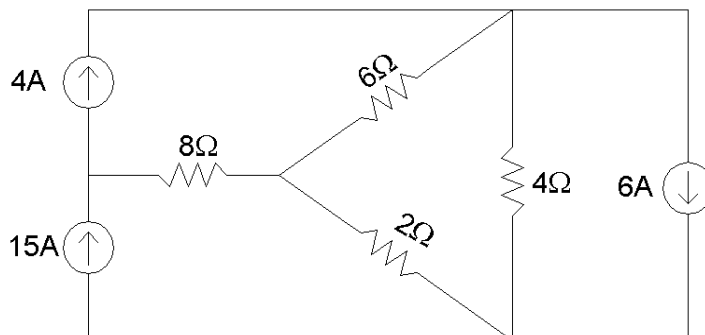


a) Hallar el dipolo A-B equivalente:

- con fuente de tensión
- con fuente de corriente

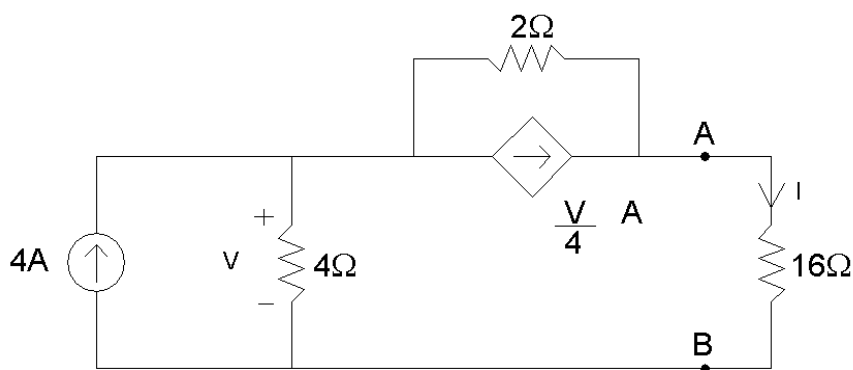
Problema 58

Calcular la potencia disipada en la resistencia de 4Ω mediante la aplicación del teorema de Thevenin.



Problema 59

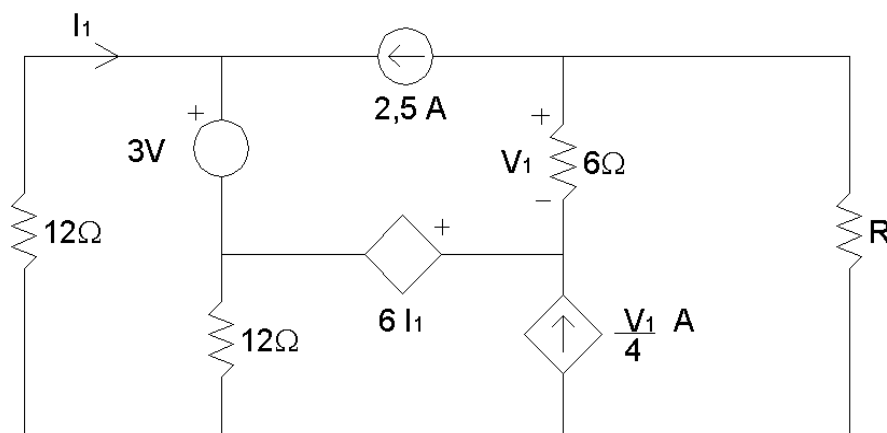
En el circuito de la figura:



- Encontrar I reemplazando la red de la izquierda de A-B por su equivalente de Norton.
- Encontrar el estado de régimen si en lugar de la resistencia de 16Ω se encontrara un dipolo anómalo simétrico cuya característica para $I_L > 0$ es: $U_L = 2(I_L^2 + I_L)$
- Determinar la potencia disipada en ambos casos.

Problema 60

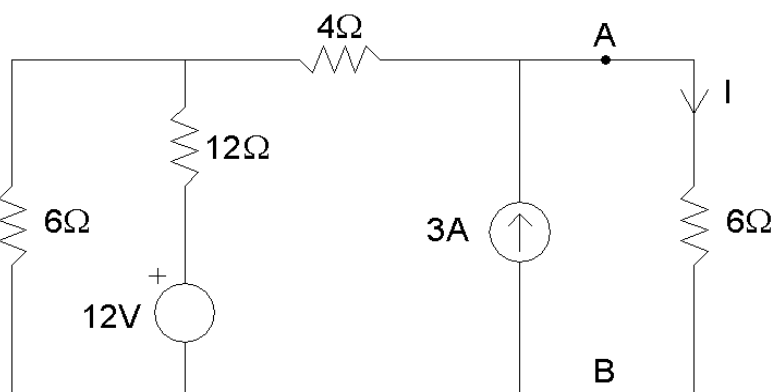
En el circuito de la figura (aplicar el teorema de Norton).



- Encontrar el valor de R para que disipe máxima potencia.
- Calcular el valor de dicha potencia.

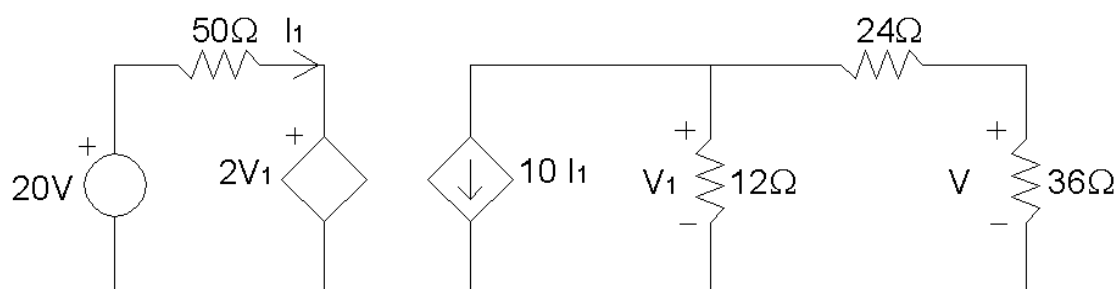
Problema 61

Reemplazar la red a la izquierda de los terminales A-B por su equivalente Thevenin y calcular I .



Problema 62

Utilizar los teoremas de Thevenin y Norton para hallar V



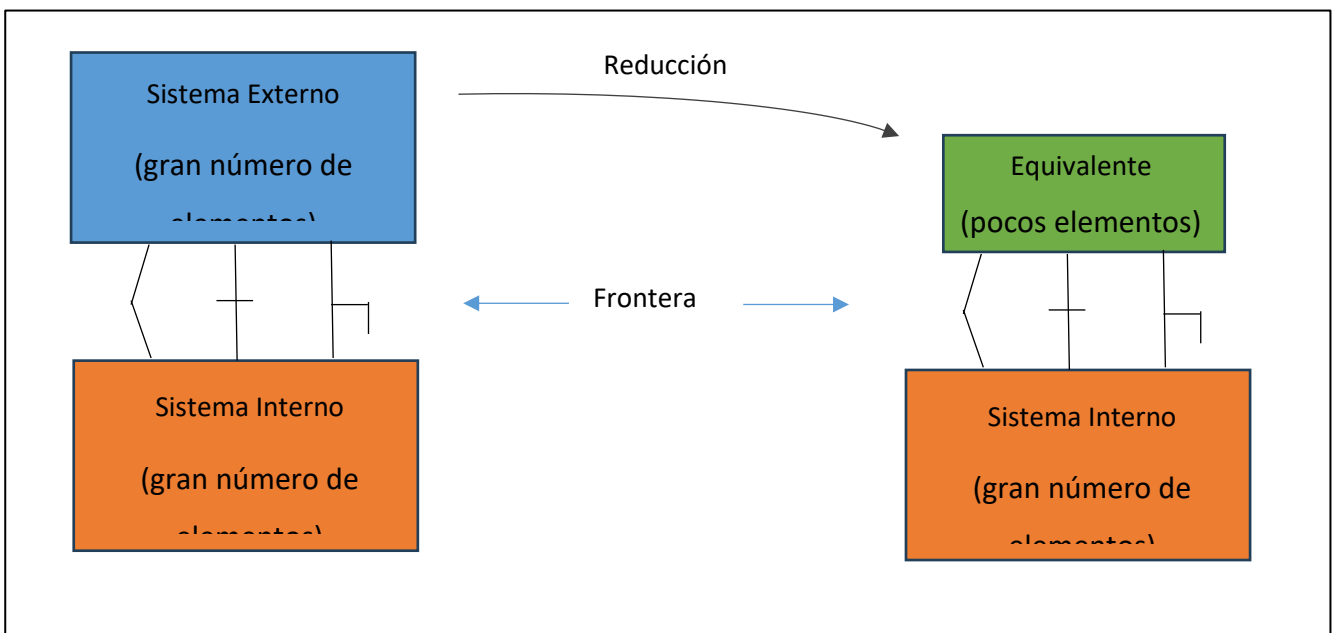
6.5. Caso de aplicación – Equivalentes de red

La utilización de equivalentes de red resulta muy útil y muchas veces necesario en el análisis de red eléctricas de diferente tipo. Esto ocurre especialmente cuando el sistema bajo estudio se encuentra conformado por un elevado número de elementos (generadores, transformadores, demandas, líneas de transmisión, etc) o deben llevar adelante una gran cantidad de cálculos con importante detalle y precisión.

Un equivalente de red es una representación simplificada de una porción del circuito eléctrico. Su carácter simplificado radica en que cuenta con reducido número de elementos, lo cual disminuye el esfuerzo de cálculo y ahorra tiempo de trabajo. La reducción permite en muchos casos concentrar el poder de cálculo sobre un sector específico del sistema, lo cual resulta muy ventajoso.

A la hora de construir un equivalente de red es habitual utilizar la siguiente terminología:

- Sistema Interno: corresponde a la porción de red que es foco del estudio y que por lo tanto debe mantener representada con un alto grado de detalle.
- Sistema Externo: corresponde a la porción de la red que no es foco del estudio y que por lo tanto puede ser reducida.
- Frontera o borde: es el límite entre las dos zonas antes mencionadas.



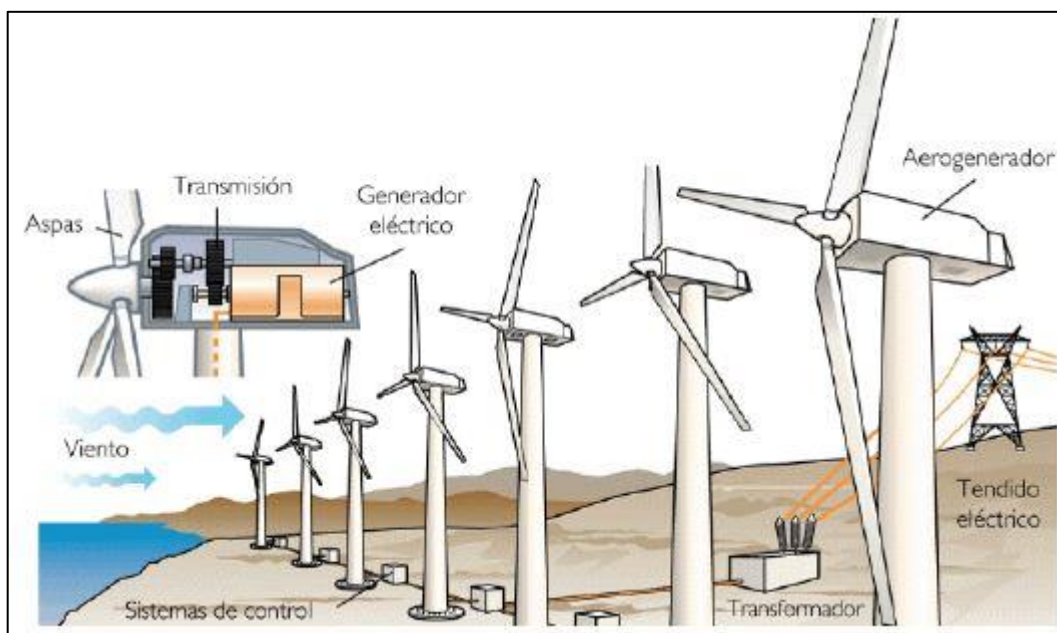
En la construcción del equivalente debe garantizarse que éste represente fielmente (o lo mejor posible) el comportamiento del sistema original. Sin embargo, la precisión con la cual el equivalente homologa el funcionamiento de la porción reducida depende fuertemente de los fenómenos que se desee analizar. Así, no será igual la conformación del equivalente en estudios de cortocircuito, de flujo de potencia, de control de frecuencia, de estabilidad transitoria, de energización de transformadores, de sobretensiones, resonancia, etc.

Existen en la práctica diferentes tipos de equivalentes según su aplicación. El desarrollo y perfeccionamiento de éstos, constituye una actividad muy importante para el estudio de redes eléctricas. Tal vez el equivalente más conocido y utilizado sea el que surge de la aplicación del teorema de Thévenin, explicado en este apunte.

6.5.1. Plantas de generación renovable

Desde hace ya más de una década se encuentra en pleno crecimiento la utilización de recursos renovables (sol y viento) como fuente para la producción de energía eléctrica. Proyectos cada vez mas ambiciosos se planifican y construyen, donde el principal objetivo es incrementar la cantidad de potencia y energía que se puede producir. Sin embargo, se tiene la limitación de que los molinos eólicos, así como los paneles fotovoltaicos poseen capacidad de generar montos relativamente acotados, si se los compara con los volúmenes de demanda que se busca abastecer. En consecuencia, para incrementar la producción, se construyen sistemas donde se colecta o reúne la generación de muchos equipos trabajando de manera simultánea, para luego inyectar toda la potencia en un punto específico. Para esto se necesita conformar una red donde interviene un gran número de elementos como generadores, transformadores, cables, líneas de transmisión, etc.

Para ejemplificar este sistema se presenta a continuación una figura donde puede apreciarse de manera esquemática un parque eólico y sus elementos.



Usualmente un aerogenerador comercial es capaz de producir entre 2MW a 6MW y lo hace en el nivel de 700V aproximadamente. Su potencia es elevada mediante un transformador a una red colectora en media tensión que opera entre 20kV y 35kV según el proyecto. Usualmente entre 3 y 5 aerogeneradores son colocados juntos en un circuito colector. La planta puede contar con muchos circuitos colectores según su extensión. Varios de estos circuitos acometen a un punto común donde la potencia es elevada nuevamente hacia el sistema de transmisión en alta tensión, superior a 100kV.

La representación en detalle de la red interna de las plantas renovables es muy habitual para el desarrollo de análisis durante la etapa de su diseño y puesta en servicio. Esto se realiza con el objetivo de evaluar niveles de corriente, tensión, intercambios de potencia, ajustes de protecciones, sobre los elementos constitutivos.

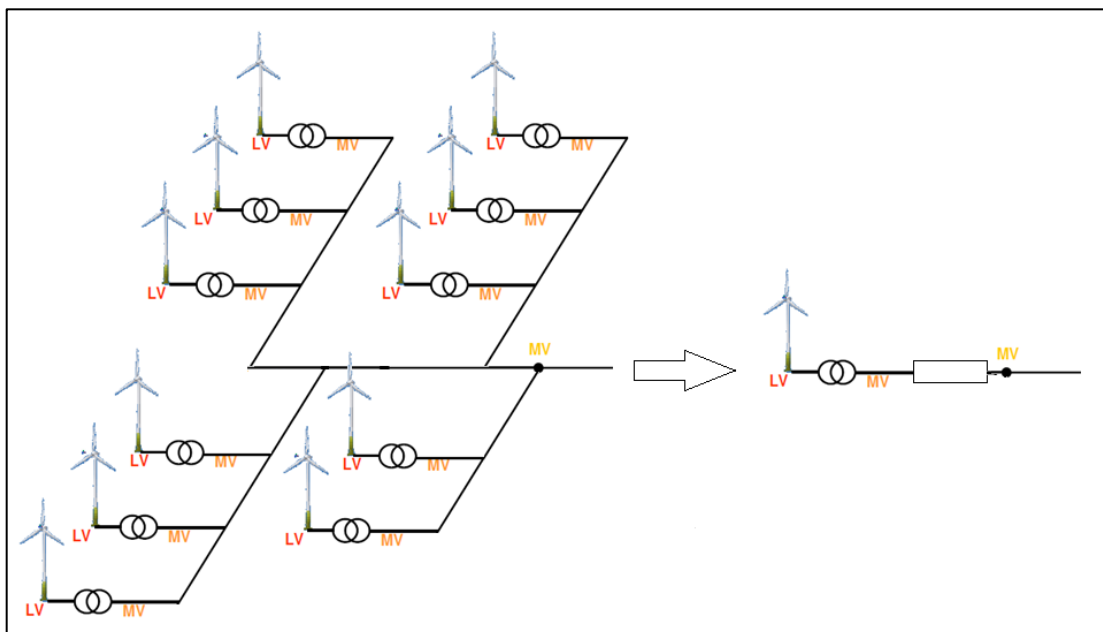
Sin embargo, cuando el foco del análisis cambia y se concentra sobre el sistema externo, la representación detallada de la interna pierde sentido. Además, en los sistemas donde existe un gran número de estos proyectos, tener a todos ellos representados de manera precisa resulta contraproducente para la velocidad y efectividad del cálculo. Es así como, en muchos casos es necesario implementar un equivalente para representar el comportamiento de la central, facilitando su manipulación y agilizando la obtención de resultados.

6.5.2. Equivalentes de plantas renovables

La red interna de una planta renovable tiene esencialmente tres elementos constitutivos:

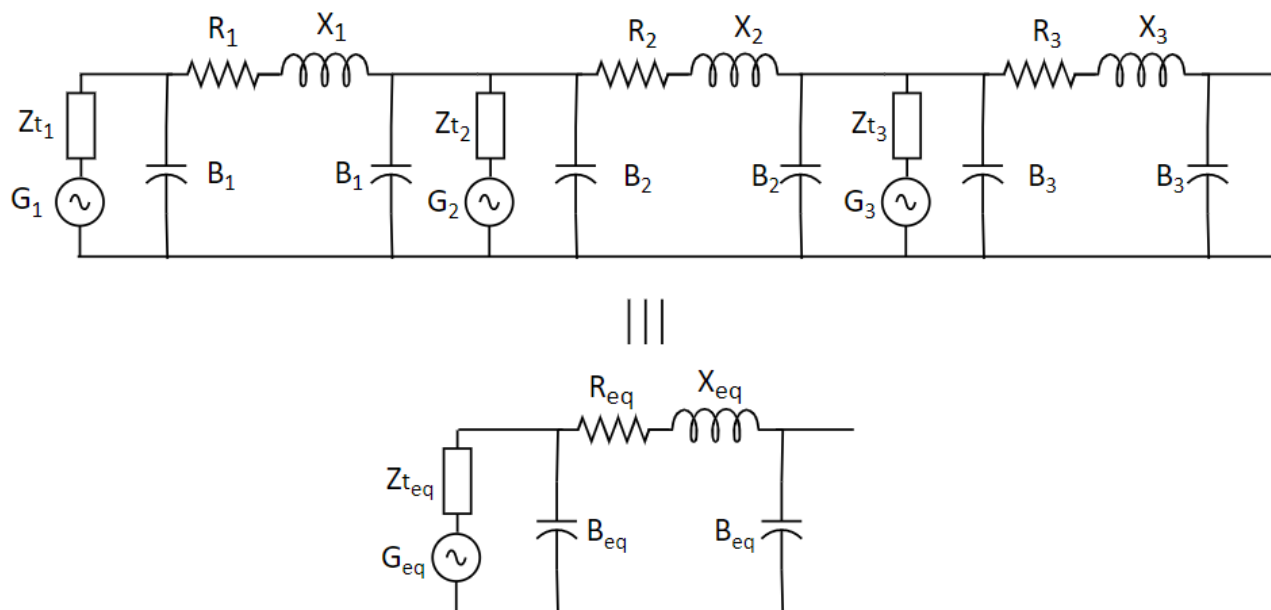
- Generadores: son los encargados de producir energía. Inyectan potencia activa y tienen la capacidad de entregar o absorber potencia reactiva según las necesidades del sistema externo.
- Transformadores de bloque: se localizan directamente a la salida de los generadores y elevan su tensión desde baja hacia media tensión para que la potencia producida sea inyectada sobre la red colectora.
- Cables de la red colectora: se encargan de “juntar” la inyección individual de cada generador (ya en el nivel de media tensión) para trasladar la potencia hacia un punto común.

Normalmente una planta que tiene la capacidad de producir por ejemplo 50MW posee entre 20 y 40 elementos. La construcción de un equivalente reduce ese número a tan solo tres, un generador, un transformador y una impedancia. La siguiente figura presenta esto de manera esquemática.



A su vez la siguiente figura posee una representación circuital de los elementos. En lo que respecta a la red colectora en media tensión, esta se conforma habitualmente por cables subterráneos. A los fines prácticos estos cables pueden ser representados por sus características resistivas, inductivas y capacitivas (los cables por su

conformación física desarrollan una importante capacidad a tierra que usualmente debe ser tomada en cuenta dentro de la representación).



Dado lo anterior no es posible agrupar las resistencias y reactancias de forma directa, una alternativa sería aplicar el teorema de Milman. Sin embargo, existe otra metodología que aprovecha las características del sistema.

Las bases para llevar adelante la reducción se encuentran desarrolladas en el documento *“Equivalencing the Collector System of a Large Wind Power Plant”, Quebec, 2006*. A continuación, se presentan los aspectos más importantes.

El generador equivalente debe ser capaz de intercambiar la misma cantidad de potencia activa y reactiva que los “n” generadores que posee la planta completa. Por cuestiones de simplicidad y costos, una planta posee todos sus generadores iguales, por lo tanto, el equivalente se confecciona multiplicando por “n” las cualidades del equipo real. Veamos un ejemplo.

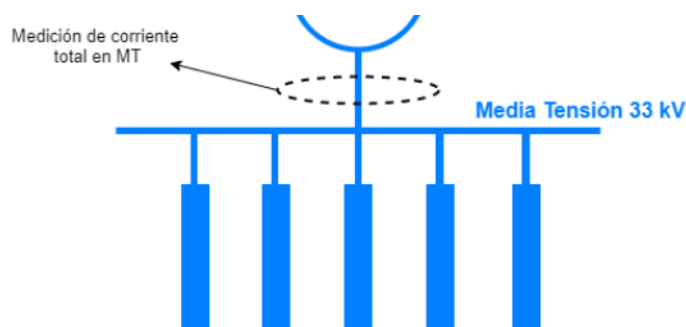
Característica	Equipo real	Equivalente
Potencia nominal	3.5MW	n*3.5MW
Factor de potencia nominal	0.9 (ind/cap)	Sin cambios
Tensión nominal	750V	Sin cambios

Para los transformadores de bloque que realizan la elevación baja/media tensión se trabaja de la misma manera. Es decir, que se multiplican por “n” las características de potencia y mantienen sin cambios las restantes.

Característica	Equipo real	Equivalente
Potencia nominal	4MVA	n*4MVA
Pérdidas	200kW	n*200kW
Impedancia	5%	Sin cambios
Tensión nominal LV	750V	Sin cambios

Tensión nominal MV	33kV	Sin cambios
--------------------	------	-------------

Los parámetros R y X que componen la impedancia equivalente se calculan de forma tal que representen exactamente las pérdidas totales de la red colectora, tanto activas como reactivas. Para esto se miden no solo dichos valores sino, además, la corriente total que el sistema colector inyecta sobre las barras de media tensión en la estación elevadora, tal como se muestra en la siguiente figura.



Una vez obtenidas las magnitudes necesarias, se procede al cálculo de las impedancias de la siguiente manera:

$$Z_{eq} = R_{eq} + j \cdot X_{eq} = \frac{P_{loss}}{3|\sum I|^2} + j \cdot \frac{Q_{loss}}{3|\sum I|^2}$$

La representación equivalente de la capacidad en derivación de los cables “B” puede considerarse como la suma de todas las susceptancias de la red interna de media tensión. Considerando el circuito equivalente de la Figura 4.1, la potencia reactiva generada por la capacidad en derivación es proporcional al cuadrado de la tensión donde, bajo condiciones normales de funcionamiento, es cercana a 1pu. Por lo tanto, la susceptancia en derivación de la red se calcula como la suma de cada una de las susceptancias de los cables de la red colectora.

$$B_{eq} [\mu S] = \sum B_i [\mu S]$$

Resulta importante destacar que los valores anteriores están íntimamente relacionados con la configuración topológica y el nivel de generación presente en la planta. Por lo tanto, el equivalente representa la red solo para un estado específico de operación.

Con lo presentado hasta aquí se demuestra la utilidad de los conceptos abordados en la materia y su aplicación para resolver problemas actuales en el análisis de sistemas eléctricos.

6.6. Temas complementarios

6.6.1. Teorema de Alteración

Así como otros teoremas aquí presentados, el de alteración se constituye como una herramienta de gran poder al analizar circuitos de gran tamaño. Su fortaleza radica en el hecho de que permite resolver la red completa una única vez, para luego estudiar versiones simplificadas del mismo, donde la ventaja se encuentra en la reducción de la cantidad de fuentes activas que interactúan en el circuito.

La aplicación del teorema es de posible cuando en un circuito de cualquier tamaño se produce justamente una alteración. Pero no cualquier alteración, sino **un cambio de valor en uno de sus elementos pasivos**. Por ejemplo, una resistencia que varía un 50% su impedancia, es decir pasa de 2Ω a 3Ω . El cambio o alteración en este elemento modifica el comportamiento (tensiones y corrientes) no solo de la rama donde se encuentra la resistencia, sino en todo el circuito ya en general los sistemas están enmallados. Se muestra a continuación un ejemplo sencillo de este fenómeno.

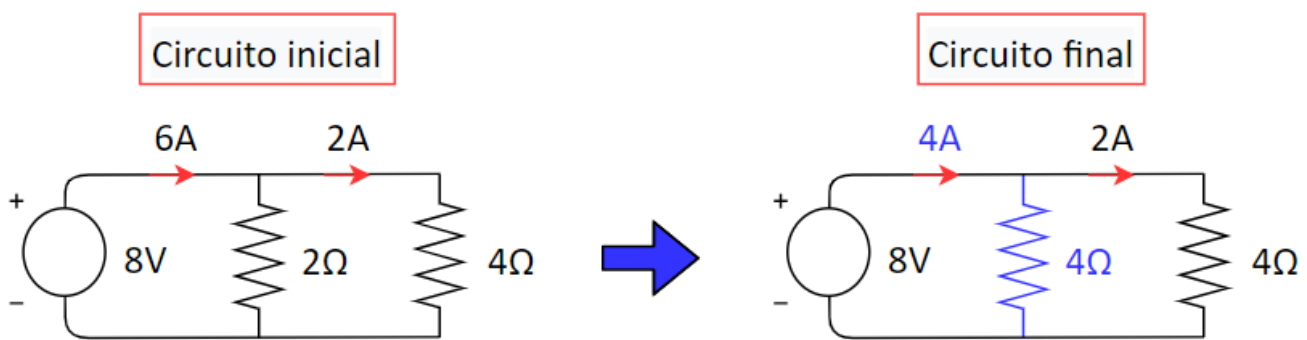


Figura 6.6-1: Ejemplo simple de alteración en un circuito

Tal como se observa en la figura anterior, cuando la resistencia de 2Ω duplica su valor, el circuito se ve alterado, lo que se evidencia en la variación de algunas corrientes que lo circulan. Siendo que el circuito es muy simple su resolución tanto en su estado inicial como final no trae mayores complicaciones. Ahora bien, si el circuito hubiese sido muy complejo, es decir posee muchas fuentes y gran enmallamiento, se hubiese tenido que implementar por ejemplo un método para su resolución y peor aún esa tarea hubiese sido necesaria dos veces. Es importante destacar que por el simple hecho de que una resistencia cambia levemente su valor hay que resolver el sistema completo nuevamente. Es justamente esa tarea la que el teorema de alteración busca simplificar.

Para implementar esta técnica se debe pensar que ocurre cuando una impedancia varía dentro de un circuito donde el resto de sus elementos se mantienen igual. Esto es:

- Impedancia aumenta $\rightarrow$ Disminuye la corriente de la rama
- Impedancia se reduce $\rightarrow$ Incrementa la corriente

Lo anterior puede ser representado por una fuente de tensión que se incorpora dentro la rama de la siguiente manera.

- Impedancia aumenta $\rightarrow$ Fuente de tensión en oposición $\rightarrow$ Disminuye la corriente
- Impedancia se reduce $\rightarrow$ Fuente de tensión a favor $\rightarrow$ Incrementa la corriente

Para ejemplificar concepto se utiliza el circuito simple

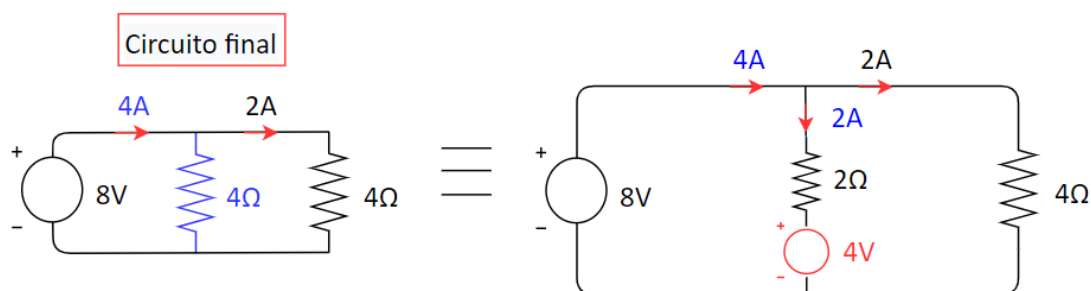


Figura 6.6-2: Aplicación del teorema de sustitución sobre el circuito final

El circuito anterior puede resolverse mediante la aplicación del teorema de superposición. Para esto se pasiva primero la fuente de 4V obteniendo todas las corrientes en cada rama. Luego se pasiva la fuente de 8V realizando la misma tarea. Finalmente se suman las corrientes que circulan por sendas ramas en ambos circuitos.

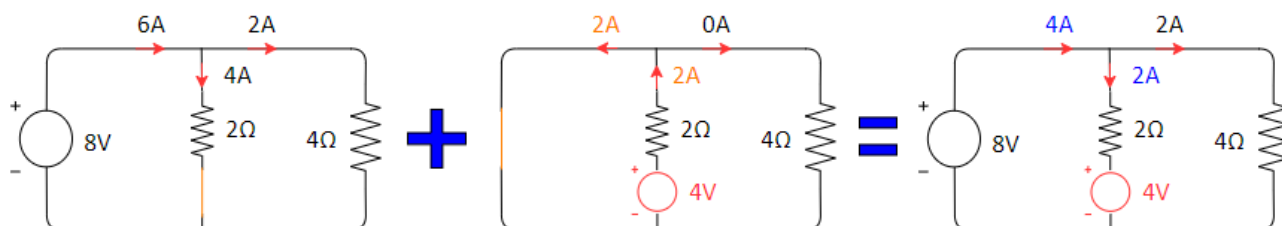


Figura 6.6-3: Aplicación del teorema de superposición

Observando los circuitos anteriores se puede notar que el de la izquierda es el circuito inicial, mientras que el de la derecha es el circuito final. Por lo tanto, se ha encontrado una forma de obtener el resultado del circuito final sin resolver efectivamente dicho circuito, sino que se llega abordando un circuito adicional que se denomina “alterado” el cual surge justamente de la variación introducida en el circuito inicial. A este sistema se le aplica nuevamente el teorema de sustitución, el cual permite relacionar las magnitudes iniciales y las alteradas.

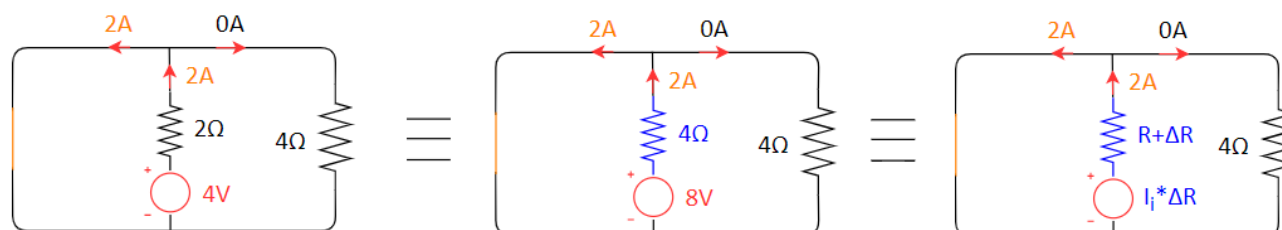


Figura 6.6-4: Aplicación del teorema de sustitución sobre el circuito alterado

Es importante notar que en la construcción del circuito alterado no hay información del estado final, he ahí uno de los factores importantes de la herramienta. Otro punto de relevancia es que sin importar la complejidad del circuito inicial, el circuito alterado solo cuenta con una fuente activa lo cual simplifica notablemente su resolución.

Con base en lo anterior puede enunciarse el teorema de alteración.

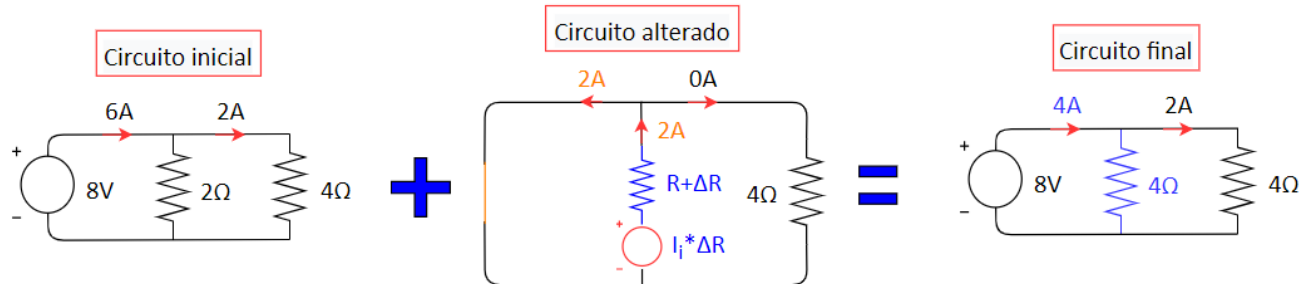


Figura 6.6-5: Aplicación del teorema de alteración

Cabe destacar que, si la alteración es una reducción en impedancia de la rama, la fuente en circuito alterado debe colocarse en sentido contrario, es decir a favor la circulación de la corriente inicial.

6.6.1.1. Generalización del teorema de alteración

En una red lineal y bilateral, las variaciones producidas en las corrientes (tensiones) de una rama (nudo) debidas a la alteración de una impedancia en “ Z ” en “ ΔZ ”, son las mismas que las corrientes (tensiones) que tendríamos en el circuito en cuestión si solo actuase una fuente de f.e.m. “ $-i * \Delta Z$ ”, donde “ i ” es la corriente que circula por la rama que contenía a “ Z ” y con las demás fuentes pasivadas.

Ahora bien, en la figura 4.1 (a) tenemos una red activa lineal y bilateral donde por la rama de “ Z ” circula una corriente “ i ”, luego se la altera cómo se puede observar en la figura 4.1 (b), debido a esto último la corriente en esta rama pasa a ser $i + \Delta i$.

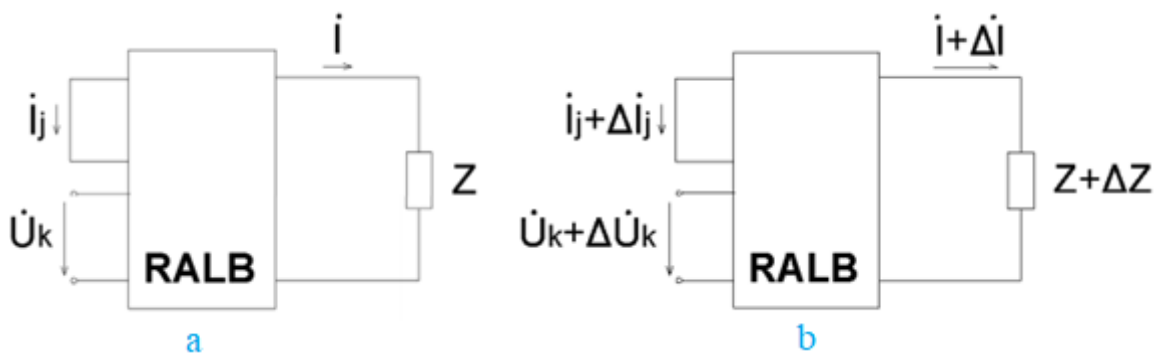


Figura 4.1 -En (a) tenemos a la red inicial y en (b) la red final donde una impedancia varía en ΔZ

En la figura 4.2 (a) es un equivalente de la figura 4.1 (a), y consiguientemente en la figura 4.2 (b) se sustituye una fuente “ ΔE ” por una impedancia cuyo valor es “ ΔZ ”.

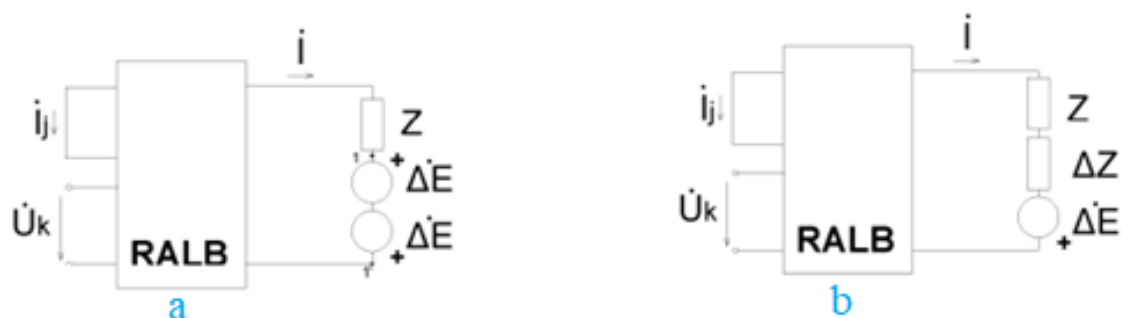


Figura 4.2: Aplicación del teorema de sustitución sobre el circuito inicial

Aplicando el teorema de superposición a la figura 4.2 (b) obtenemos el circuito de la figura 4.3 (b), en donde se encuentran todas las fuentes del circuito pasivadas menos la fuente de valor " ΔE ", y por la rama tenemos una corriente cuyo valor es " Δi ".

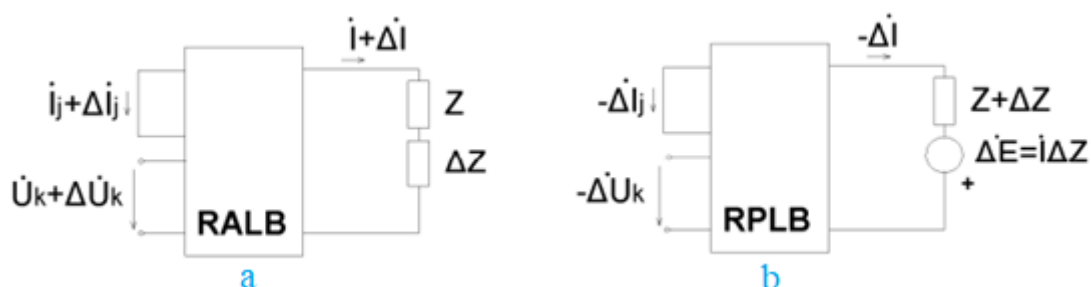


Figura 4.4 – (a) solo se pasiva la fuente de valor ΔE y (b) donde se pasiva las fuentes de la red.

Finalmente, en la figura 4.3 (b) se invierte la polaridad de la única fuente presente, se cambiarán las polaridades tanto de las corrientes de ramas como de las tensiones de nudos (Figura 4.4).

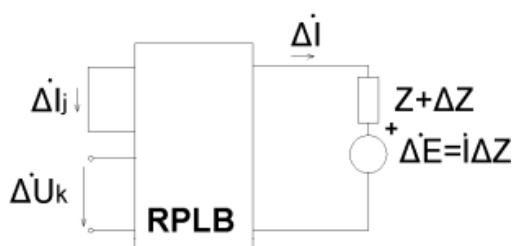


Figura 4.5: Circuito alterado

REGLA NEMOTECNICA: cuando la "impedancia aumenta" la corriente por esa rama tiende a disminuir, por lo que la polaridad de la fuente debe ser tal que ocasione una disminución de la corriente por dicha rama. Para el caso contrario se realiza un análisis similar.

Sobre la base del teorema de alteración pueden constituirse otros dos subteoremas que surgen cuando las variaciones en la impedancia de una rama son extremas, es decir que la mismas varía desde o hacia infinito. Estos cambios se conocen como extracción o inserción de rama. La explicación de estos casos particulares se presenta a continuación.

6.6.1.2. Caso particular extracción de rama

En este apartado procedemos a analizar que sucede cuando en una red activa lineal y bilateral se extrae una rama, en este caso una impedancia de valor “Z”. Para realizar esto supondremos una alteración de la impedancia “Z” en un valor de “ΔZ” muy elevado tanto que tiende a infinito, lo cual representa que la rama pasa a comportarse como un circuito abierto. (figura 4.5).

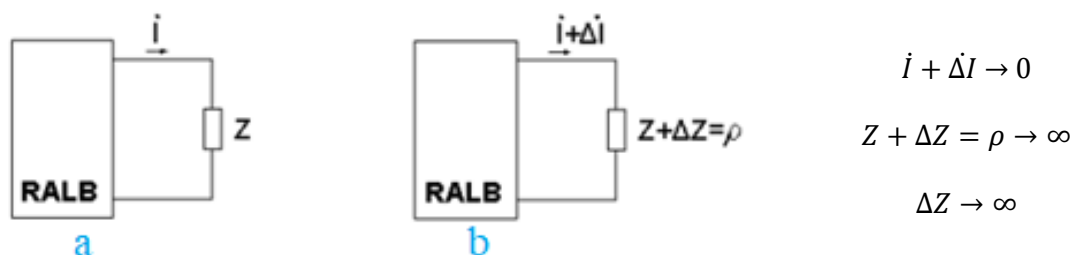


Figura 4.5- Circuito inicial (a) – Circuito Final (b)

Aplicando el teorema de alteración en la figura 4.5 (b) obtenemos la figura 4.6 (a) y luego se aplica la transformación de fuentes obteniendo así la figura 4.6 (b).

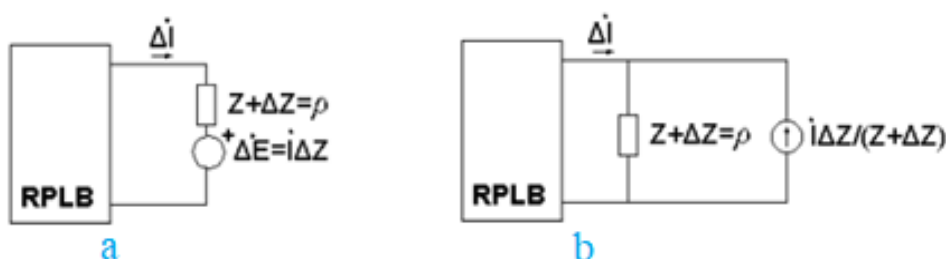


Figura 4.6- Circuito alterado (a) – Circuito alterado con cambio de fuente (b)

Teniendo que: “ $Z + \Delta Z = \rho \rightarrow \infty$ ”, es equivalente a tener el circuito abierto en esta rama.

$$\text{Luego: } \frac{i \cdot \Delta Z}{Z + \Delta Z} \xrightarrow{\Delta Z \rightarrow \infty} i$$

Por lo tanto, el circuito resulta el de la figura 4.7.

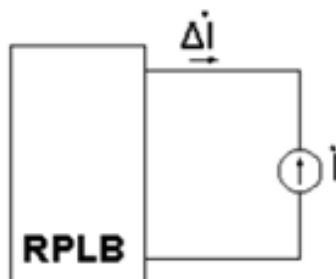


Figura 4.7: Circuito alterado para extracción de rama

Concluyendo entonces que, para calcular las corrientes y tensiones en una RALB a la cual se le extrae una rama se debe insertar en la red pasiva de la misma una fuente de corriente en la rama intervenida, cuyo valor es igual

al de la corriente inicial en dicha rama, pero de sentido opuesto. Podría decirse entonces que esa fuente realiza un efecto como devolución de la corriente que circulaba originalmente por la rama nuevamente hacia el circuito. En consecuencia, dicha corriente se deriva a través de las diferentes ramas modificando el comportamiento del circuito.

Para ejemplificar la aplicación se utiliza el mismo circuito presentado durante la explicación del teorema de alteración, al cual se le extrae la rama central.

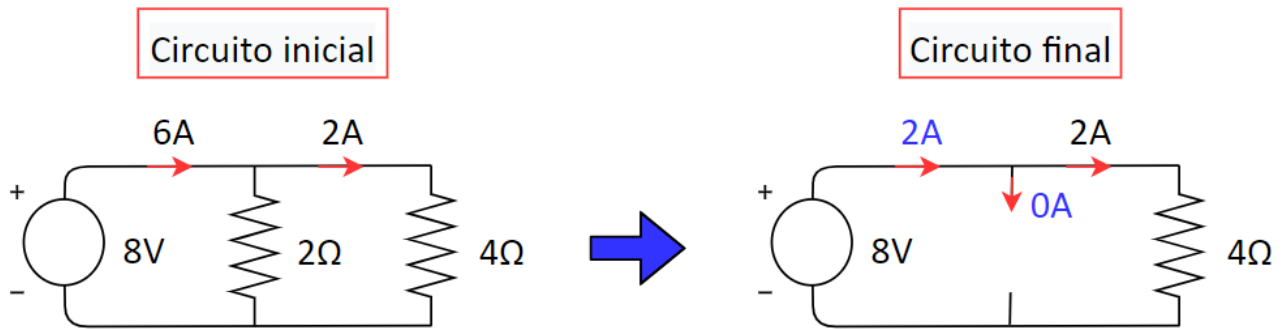


Figura 6.6-6: Ejemplo extracción de rama

Se debe ahora construir el circuito alterado donde como se ha explicado anteriormente solo existe una única fuente donde la misma se encuentra en la rama alterada (en este caso extraída). Para esto debe colocarse una fuente de corriente con igual valor al que circulaba inicialmente por dicha rama, pero en sentido contrario.

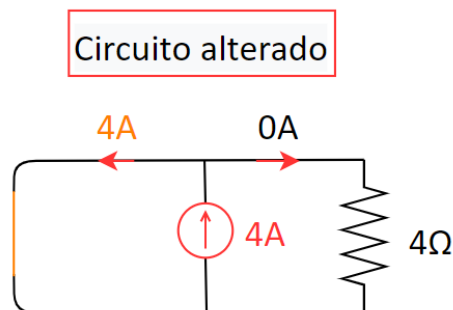


Figura 6.6-7: Circuito alterado ante extracción de rama

Considerando lo anterior es posible resolver el problema aplicando el teorema de superposición entre los circuitos inicial y alterado.

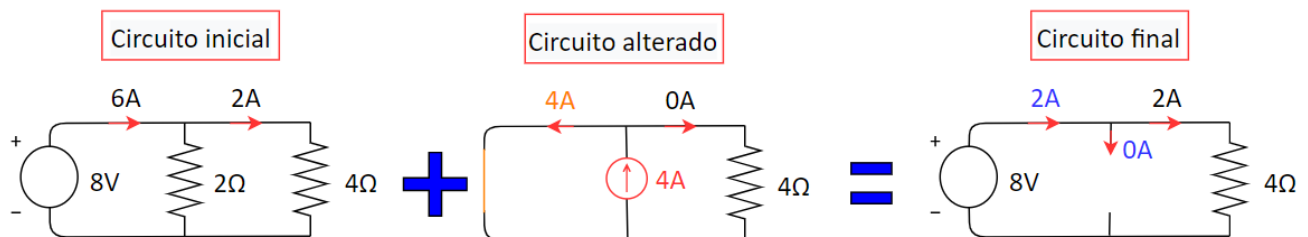


Figura 6.6-8: Aplicación del teorema de extracción de rama

6.6.1.3. Caso particular inserción de rama

En este apartado procedemos a analizar que sucede cuando en una RALB se procede a realizar la inserción de una rama.

Podemos observar en la figura 4.8 (a) que tenemos a nuestra red y en la figura 4.8 (b) tenemos la red con la inserción de una impedancia “Z” en los puntos 1-2.

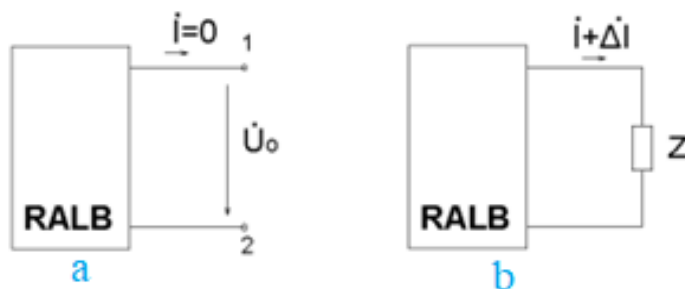


Figura 4.8 – Circuito inicial (a) – Circuito alterado (b)

En la figura 4.9 (a) tenemos el circuito equivalente al de la figura 4.8 (a) y en la figura 4.9 (b) tenemos el equivalente al de la figura 4.8 (b).

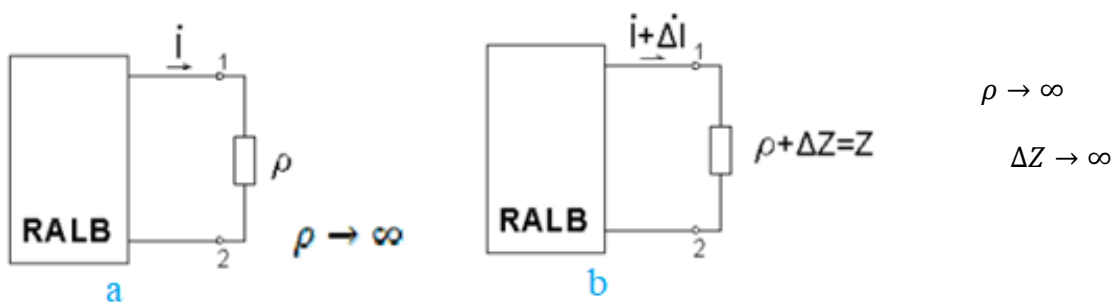


Figura 4.9:

Aplicando el teorema de alteración obtenemos

lo que podemos observar en la figura 4.10.

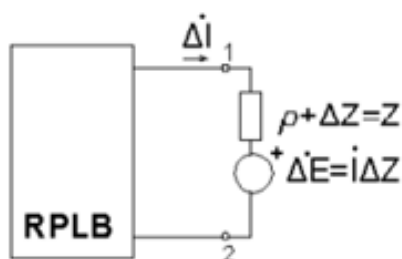


Figura 4.10: Circuito alterado paso intermedio

Donde: $\Delta Z = Z - \rho$

$$\left. \begin{array}{l} i = \dot{U}_0 / \rho \\ \Delta \dot{E} = \frac{\dot{U}_0}{\rho} * (Z - \rho) \end{array} \right\}$$

Con esto último procedemos a calcular el límite:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta \dot{E} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} i * \Delta Z = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\dot{U}_0}{\rho} * (Z - \rho) = -\dot{U}_0$$

Quedando así el circuito para realizar el cálculo el que se presenta en la figura 4.11.

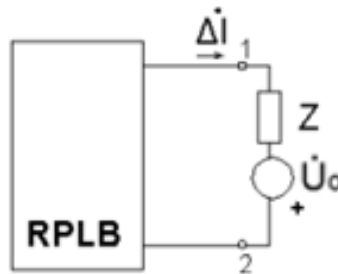


Figura 4.11: Circuito alterado

Concluyendo entonces que, para calcular las variaciones en corrientes y tensiones en una red en la cual se le inserta una rama se debe

- Resolver la red (circuito inicial) calculando la tensión de vacío U_0 entre los puntos donde se desea insertar la nueva rama.
- Pasivar la red bajo estudio
- Entre los puntos donde se desea insertar la rama se debe incorporar la impedancia en serie con una fuente de tensión de valor igual a la tensión de vacío calculada, pero en sentido opuesto.
- Resolver nuevamente (circuito alterado).
- Aplicar el teorema de superposición entre ambas resoluciones

6.6.2. Teorema de Reciprocidad

Con este teorema se demuestra que la relación entre excitación y respuesta es invariable para un intercambio entre los puntos de excitación y observación, siempre que no se altere la configuración circuital.

Este teorema se aplica para redes lineales, bilaterales y pasivas, la única fuente es la de excitación.

Dicho de otra forma, la corriente “I” en cualquier rama de una red producida por una sola fuente de voltaje “E” en cualquier otra parte de la red, será igual a la corriente a través de la rama en la cual se localizaba originalmente la fuente si la fuente, valga su redundancia, se coloca en la rama en que se midió originalmente

la corriente “I”. En otras palabras, la localización de la fuente de voltaje y la corriente resultante pueden intercambiarse sin que cambie la corriente. El teorema requiere que la polaridad de la fuente de voltaje tenga la misma correspondencia con la dirección de la corriente de rama en cada posición.

Para poder entenderlo se aplica a un ejemplo como el de la figura 11.1.

Se desea calcular la corriente I y luego colocar la fuente de tensión E en la rama donde circula I.

$$R_1 = 12 \, \Omega \quad R_2 = 6 \, \Omega$$

$$R_3 = 2 \, \Omega \quad R_4 = 4 \, \Omega$$

Se procede a calcular la resistencia total del circuito:

$$R_T = R_1 + R_2 || (R_3 + R_4) = 15 \, \Omega$$

$$I_S = \frac{E}{R_T} = 3 \, \text{A}$$

Luego se calcula la corriente I: $I = \frac{3 \, \text{A}}{2} = 1,5 \, \text{A}$

El paso siguiente es “quitar” la fuente de tensión, es decir se aplica un cortocircuito en donde se encontraba originalmente y se la coloca en la rama donde se calculó anteriormente la corriente “I”. De esta forma, donde se encontraba en un principio la fuente de tensión E ahora debería circular la corriente que anteriormente se tenía en la rama donde se encontraban las resistencias R_3 y R_4 .

Como se puede observar se obtiene el circuito de la figura 11.2.

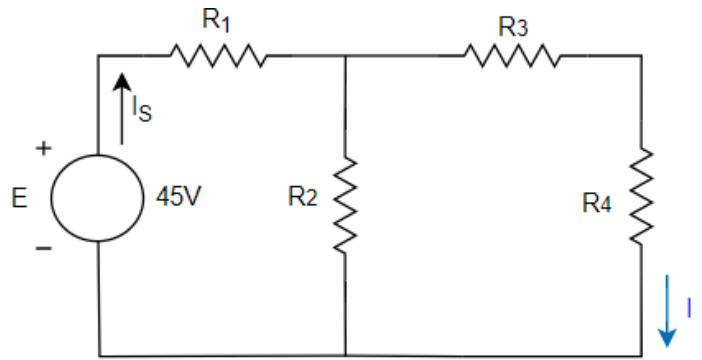


Figura 11.1

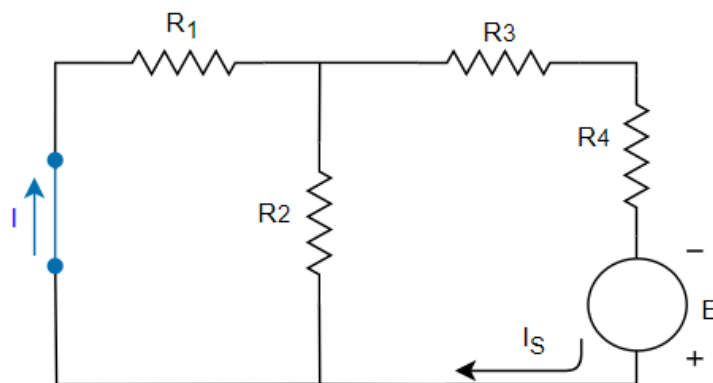


Figura 11.2

Calculamos R_T :

$$R_T = R_4 + R_3 + R_1 || R_2 = 10 \, \Omega$$

Volvemos a calcular I_S :

$$I_S = \frac{E}{R_T} = 4,5 \, \text{A}$$

Finalmente procedemos a calcular I : $I = \frac{6\ \Omega \cdot 4,5\ \text{A}}{12\ \Omega + 6\ \Omega} = 1,5\ \text{A}$

De esta manera se aplica el teorema de reciprocidad en un circuito cuya fuente de alimentación es de tensión.

A continuación, se presenta un ejemplo similar al anterior, pero en vez de tener una fuente de tensión se tiene una fuente de corriente.

Sea el circuito de la figura 11.3 calcular la tensión en la, y luego aplicar el teorema de reciprocidad.

$$R_1 = 12\ \Omega \quad R_2 = 6\ \Omega$$

$$R_3 = 2\ \Omega \quad R_4 = 4\ \Omega$$

$$\text{Se tiene que: } I_0 = I_1 + I_2$$

$$\text{Como } R_3 + R_4 = R_2 \text{ entonces se tiene que } I_1 = I_2 = I_0/2 = 2\ \text{A}$$

$$\text{Con esto se tiene: } U = I_1 \cdot R_4 = 8\ \text{V}$$

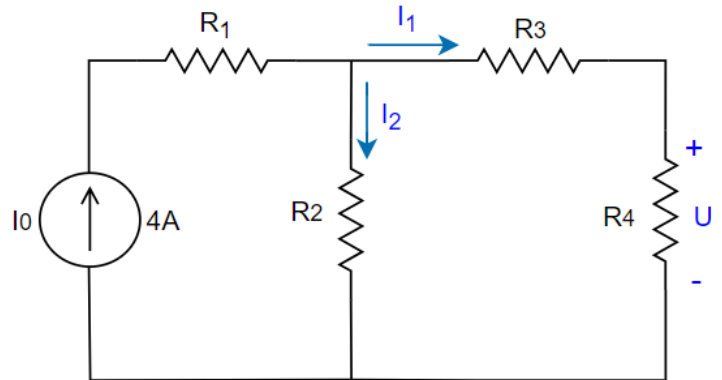


Figura 11.3

Ahora se procede a aplicar el teorema de reciprocidad. Al tener una fuente de corriente cuando se la quita de la rama original es como tener el circuito abierto como se puede observar en la figura 11.4.

En este caso lo que se tiene es que la caída de potencial anterior llamada “U” que se tenía sobre la resistencia R_4 ahora debería estar donde anteriormente se encontraba la fuente de corriente I_0 .

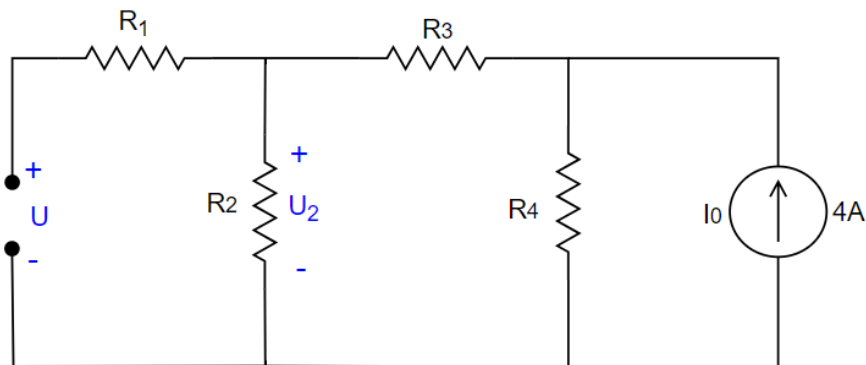


Figura 11.4

Observando la figura 11.4 se concluye que en la rama donde se encuentra R_1 ya no puede circular corriente debido a que se tiene un circuito abierto, y por ende la caída de potencial U es igual a la caída de potencial sobre la resistencia R_2 , siendo entonces $U = U_2$.

De esta última conclusión se tiene el circuito de la figura 11.5

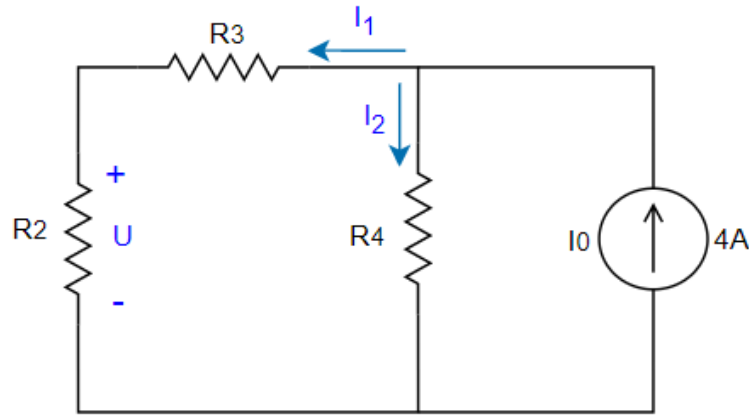


Figura 11.5

Procedemos a calcular $I_1 = \frac{R_4}{R_4 + (R_2 + R_6)} * I_0 = \frac{4}{3} A$

Se procede a calcular la caída de tensión sobre R_2

$$U = U_2 = R_2 * I_1 = 8V$$

De esta manera se aplica el teorema de reciprocidad en un circuito cuya fuente de alimentación es de corriente.

6.6.2.1. Observaciones del teorema de Reciprocidad

El intercambio de excitación y respuesta tiene una relación invariable siempre que sea entre una corriente y una tensión y no entre tensiones o corrientes. Esto es debido a que solo en el primer caso no se altera el grafico del circuito.

- Si ambas fueran tensiones la excitación es un cortocircuito y la respuesta un circuito abierto.
- Si ambas fueran corrientes la excitación es un circuito abierto y la respuesta un cortocircuito.

6.6.3. Teorema de Simetría

Se define simetría como la correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano.

Se define eje de simetría a un límite imaginario el cual se delimita en donde se encuentra que la figura o en este caso circuito es simétrico.

6.6.3.1. Circuito simétrico

A continuación, se presenta un ejemplo el cual se resolverá de la manera convencional y luego aplicando el teorema de simetría.

Sea el circuito de la figura 6.1, calcular las corrientes en todos sus componentes.

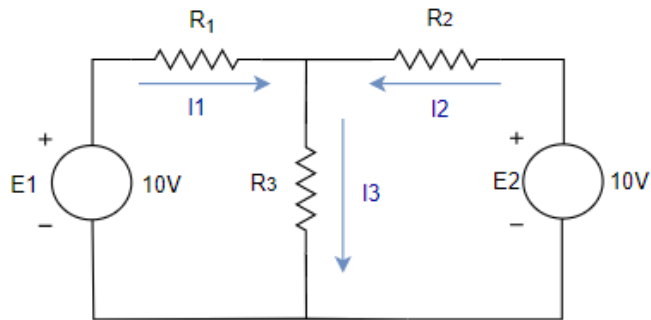


Figura 6.1

$$R_1 = R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 4\Omega$$

Resolución convencional:

Aplicando la primera ley de Kirchhoff se tiene que: $I_3 = I_1 + I_2$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff se tiene: $E_1 - R_1 * I_1 - R_3 * I_3 = 0$ (1)

$$E_2 - R_2 * I_2 - R_3 * I_3 = 0$$
 (2)

De esto último se concluye que $I_1 = I_2 = I \rightarrow I_3 = 2I$

Reemplazando esto último en (1): $E_1 - R_1 * I - R_3 * 2 * I = 0$ (3)

Despejando I de (3) obtenemos que: $I = \frac{E_1}{R_1 + R_3 * 2} = 1A$

Con lo cual $I_1 = I_2 = 1A$ e $I_3 = 2A$

Resolución aplicando el teorema de simetría

Lo que se procede a hacer es “convertir” el circuito de la figura 6.1 en un circuito simétrico, y para esto se puede “dividir” la rama intermedia donde se encuentra R_3 en dos resistencias cuyo valor es $R_3 * 2$. De esta forma, el circuito de la figura 6.2 (a) es equivalente al circuito de la figura 6.1.

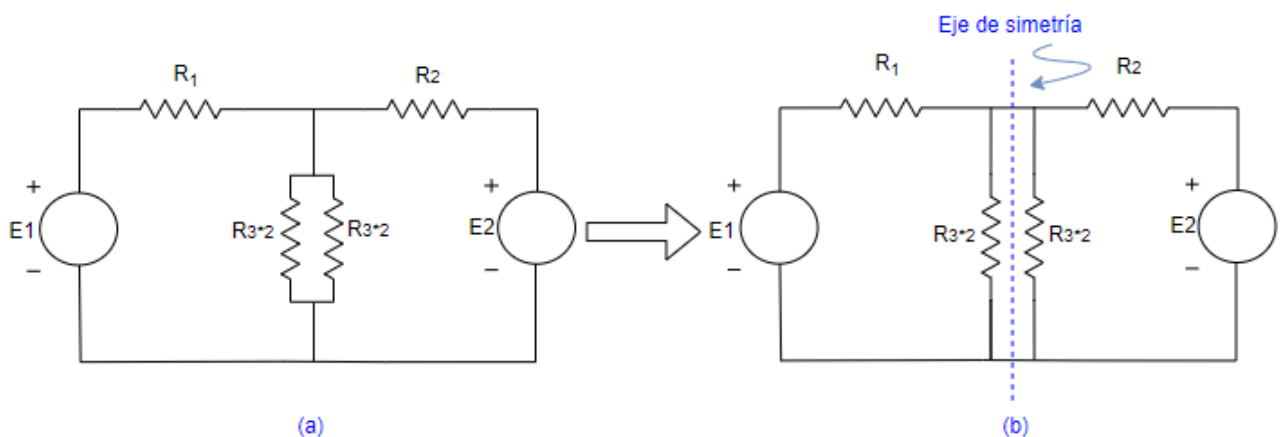


Figura 6.2

Como $R_1 = R_2$, se puede observar que hay simetría en este circuito respecto del eje de simetría en la figura 6.2 (b).

Aplicando el teorema de superposición en el circuito de la figura 6.2 (b) se obtiene:

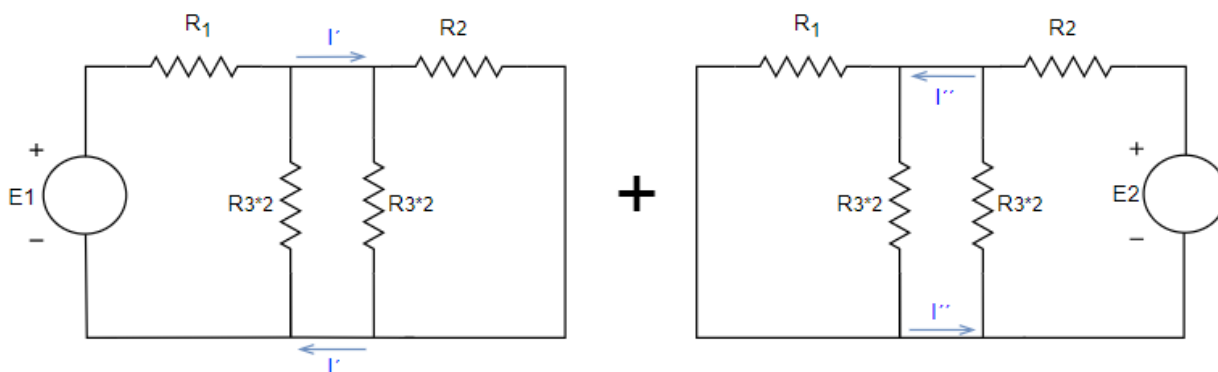


Figura 6.3

De esto último se tiene que: $I' = -I''$ con lo cual la corriente por esa rama es igual a cero y virtualmente es como si el circuito estuviera abierto, teniendo:

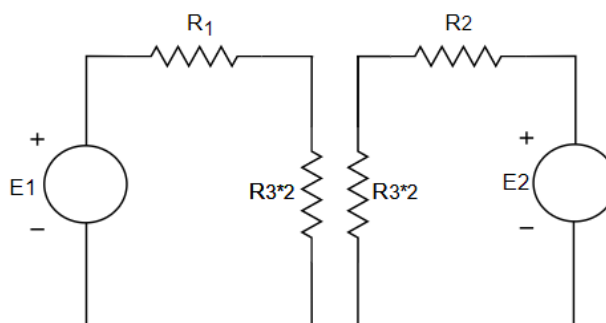


Figura 6.4

Se procede a resolver uno de estos dos circuitos, ya que ambos son iguales.

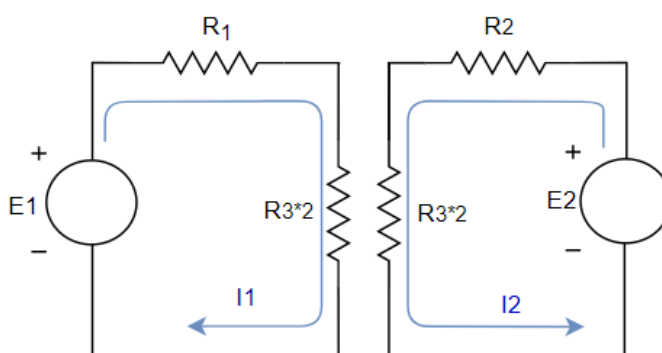


Figura 6.5

Se tiene que: $I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_{3*2}} = 1A$

$$I_1 = I_2$$

Para calcular I_3 se deben sumar las corrientes que pasan por $R_3 * 2$, siendo:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2A$$

Realizando la comparación con ambas resoluciones es sencillo notar que aplicando el teorema de superposición se puede resolver dicho ejemplo de una manera más simplificada.

Para generalizar este teorema sea la figura 6.6 una red pasiva lineal y bilateral simétrica respecto de su eje de simetría y cuyas fuentes, en este caso de tensión, entre los bornes a-b y c-d sean: $V_{ab} = V_{cd} = E_1$, entonces es un circuito simétrico.

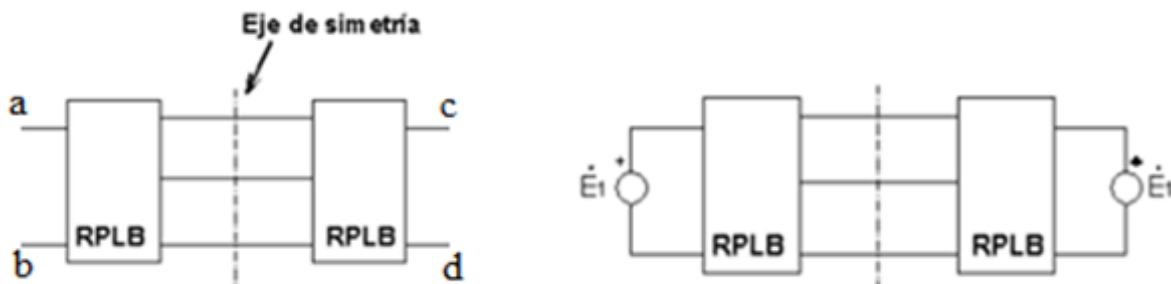


Figura 6.6

Aplicando el teorema de superposición se obtiene:

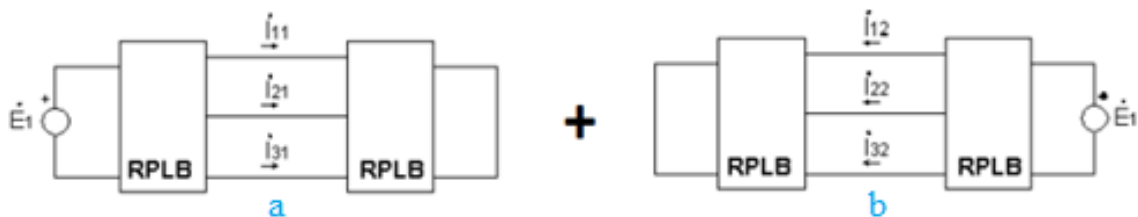


Figura 6.7

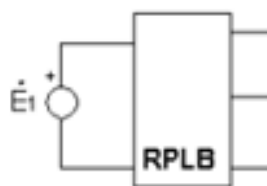
A simple vista se puede observar que la suma algebraica de las corrientes que circulan por las ramas de enlaces de los circuitos de la figura 6.7 dan cero ya que son iguales y opuestas.

Si en una rama la corriente que circula por ella es cero, entonces puede ser sustituida por un circuito abierto, como se puede observar en la figura 6.8.



Figura 6.8

Por lo tanto, la resolución del circuito original (figura 6.6) se reduce a resolver solamente la mitad del mismo, quedando el circuito como se observa en la figura 6.9.



Figuras 6.9

6.6.3.2. Circuito asimétrico

Otro caso es cuando se tiene asimetría en el circuito. Para este nuevo caso se presenta el siguiente ejemplo, igual al anterior pero se invierte la polaridad de la fuente E_2 .

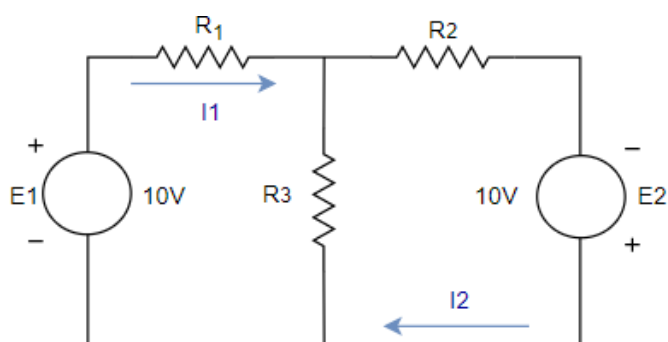


Figura 6.10

$$R_1 = R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 4\Omega$$

El circuito de la figura 6.7 es el equivalente al de la figura 6.10.

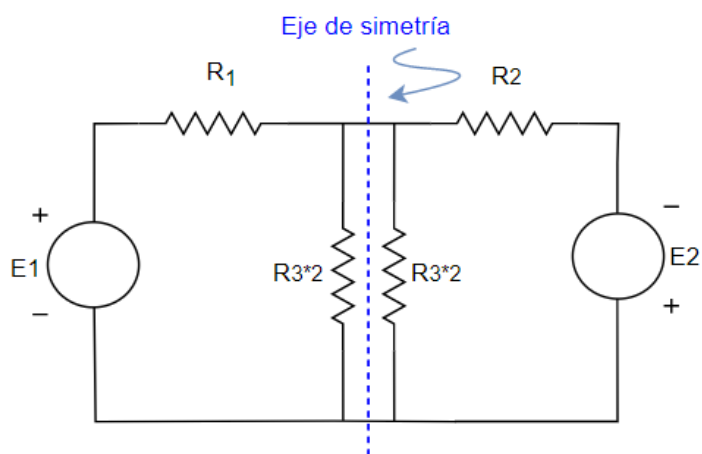


Figura 6.11

Se observa en la figura 6.11 la simetría en el circuito, pero como la fuente E_2 es opuesta a la fuente E_1 , se tiene que el circuito es asimétrico.

Aplicando el teorema de superposición en el circuito se tiene:

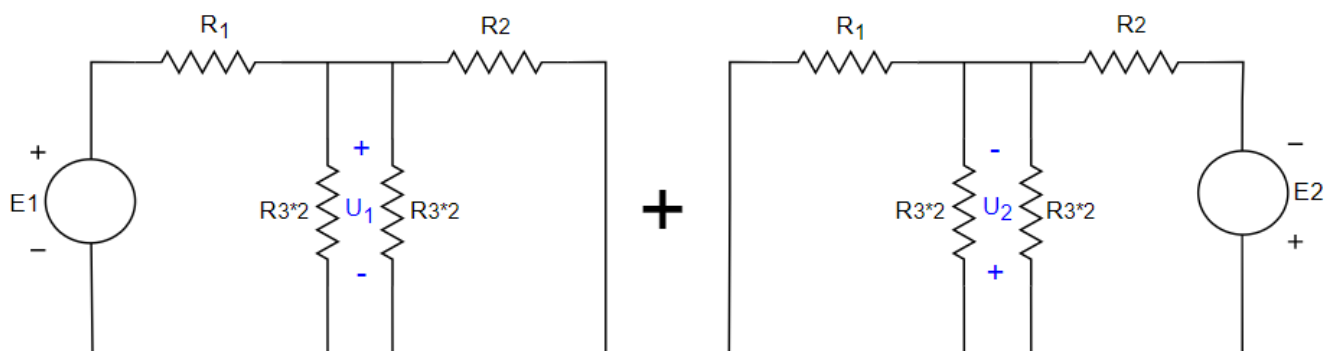


Figura 6.12

Observando la figura 6.12 se tiene que las caídas de potencial sobre las impedancias en las ramas centrales son de igual magnitud, pero de polaridad opuestas, con esto se deduce que virtualmente es como tener un cortocircuito entre las mismas.

De aquí que $U_1 = -U_2$, se obtiene:

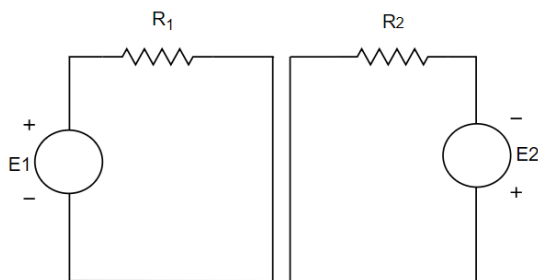


Figura 6.13

Con resolver uno de los dos es suficiente.

Por ejemplo, se resuelve el circuito de la izquierda y se obtiene:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = 5A$$

Como se puede observar $I_1 = -I_2$, de esta manera se tiene que $I_1 + I_2 = 0$.

Para generalizar el caso de asimetría, tenemos la figura 6.14 un circuito simétrico respecto a su eje de simetría, pero asimétrico respecto a sus fuentes de tensión $E_{ab} = -E_{cd}$.

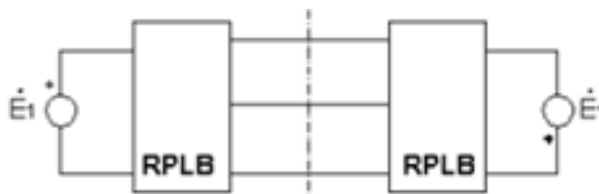


Figura 6.14

Se aplica el teorema de superposición (figura 6.15).

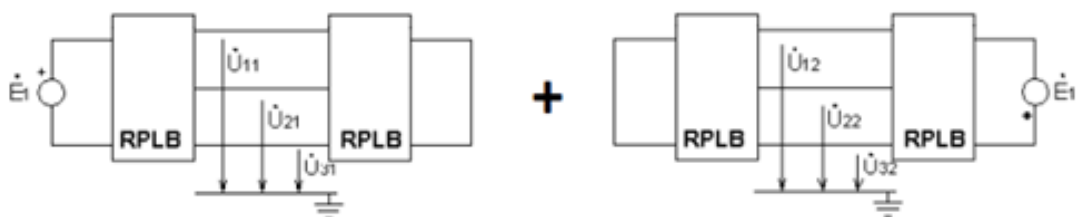


Figura 6.15

De esto último tenemos que: $U_{11} = -U_{12}$ $U_{21} = -U_{22}$ $U_{31} = -U_{32}$

De la superposición de los circuitos de la figura 6.15 resulta que en estos casos las sumas algebraicas de las tensiones dan cero (figura 6.16 (a)), y su equivalente circuital en dichas ramas es un cortocircuito, ya que la d.d.p es igual a cero como en un corto circuito como se tiene en la figura 6.16 (b).

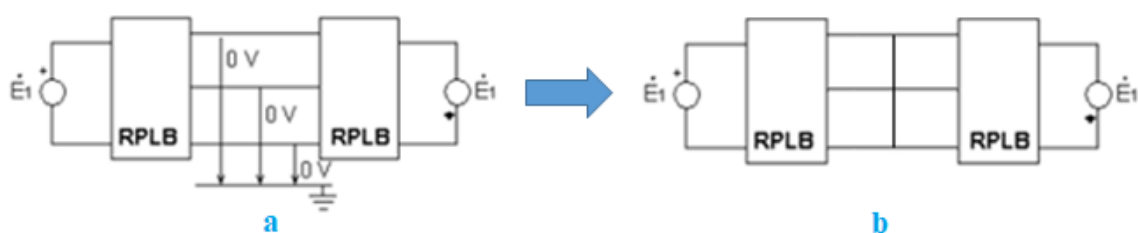


Figura 6.16

Por lo tanto, la resolución del circuito original (figura 6.14) se reduce a resolver solamente el circuito como se observa en la figura 6.17.

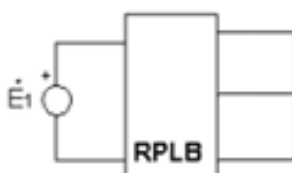


Figura 6.17

6.6.3.3. Caso general de simetría

Para casos generales, teniendo el circuito de la figura 6.18 una red que es simétrica pero solamente en sus elementos pasivos.

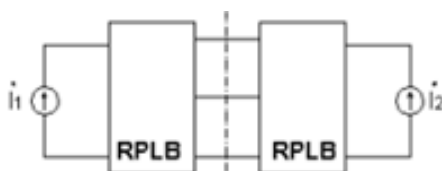


Figura 6.18

Se procede a armar un equivalente del mismo como se observa en la figura 6.19.



Figura 6.19

Aplicando superposición:

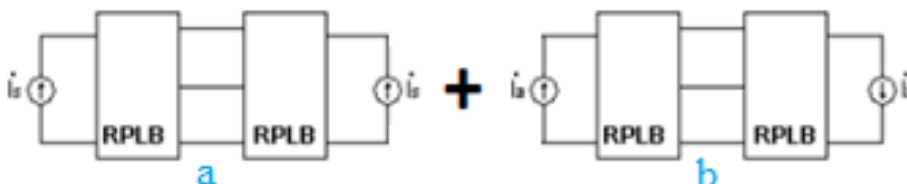


Figura 6.20 – (a) red simétrica y (b) red asimétrica

Bajo las condiciones de: $I_1 = I_S + I_A$ y $I_2 = I_S - I_A$, es equivalente al circuito de la figura 6.18.

De esto último resulta que:

$$I_S = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

$$I_A = \frac{I_1 - I_2}{2}$$

A continuación, se procede a resolver el siguiente ejemplo aplicando el teorema recién mencionado.

Sea el circuito de la figura 6.21, calcular todas las corrientes de los componentes.

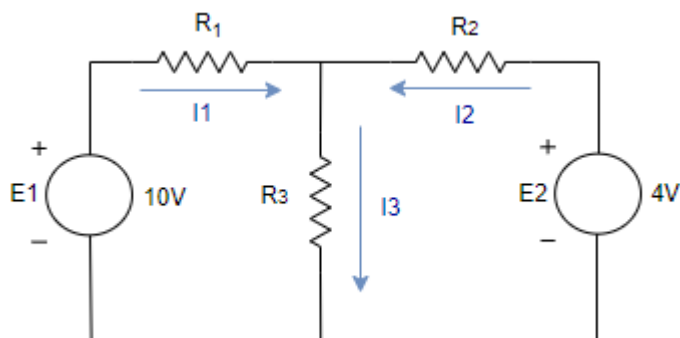


Figura 6.21

$$R_1 = R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 4\Omega$$

Como se vio anteriormente, este circuito se puede representar de la siguiente manera.

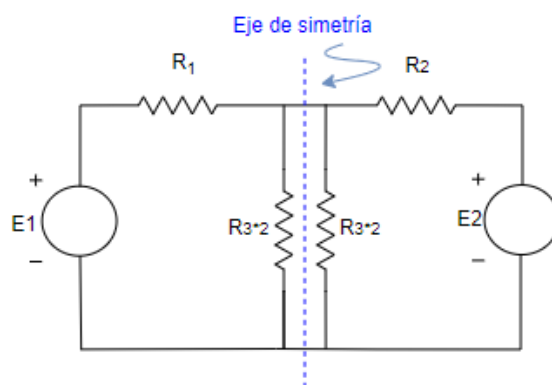


Figura 6.22

Como $E_1 \neq E_2$ se procede de la siguiente forma.

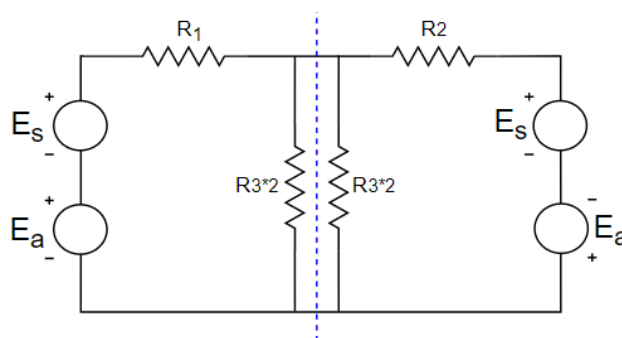


Figura 6.23

Para que el circuito de la figura 6.23 sea equivalente al de la figura 6.21 se debe cumplir lo siguiente:

$$E_1 = E_s + E_a \quad E_2 = E_s - E_a$$

De esto último se obtiene que: $E_s = \frac{E_1 + E_2}{2} = 7V$

$$E_a = \frac{E_1 - E_2}{2} = 3V$$

Aplicando el teorema de superposición al circuito de la figura 6.23 se tiene:

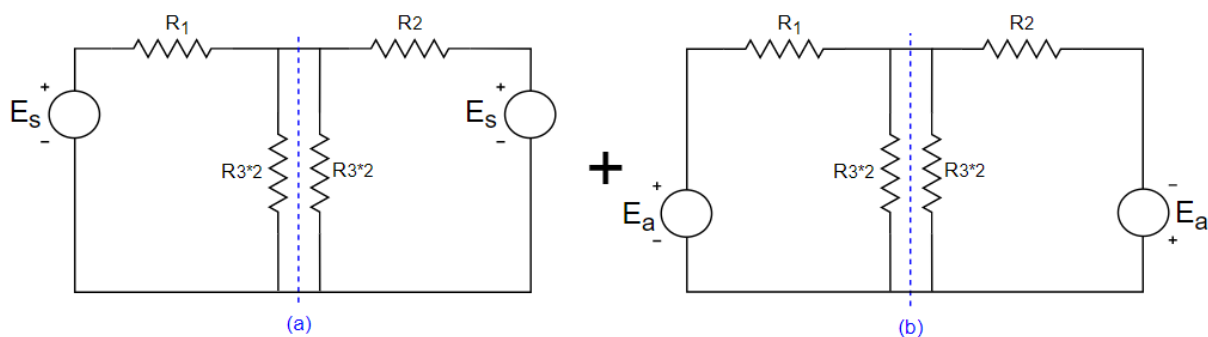


Figura 6.24

Como se puede fácilmente observar se tiene en este caso en la figura 6.24 (a) un circuito simétrico y en la figura 6.24 (b) un asimétrico.

Se deja para el lector la resolución final de este ejemplo.

6.6.4. Traslación de Fuentes

6.6.4.1. Corrimiento de fuentes de tensión

Su demostración se realiza aplicando el método de bucles.

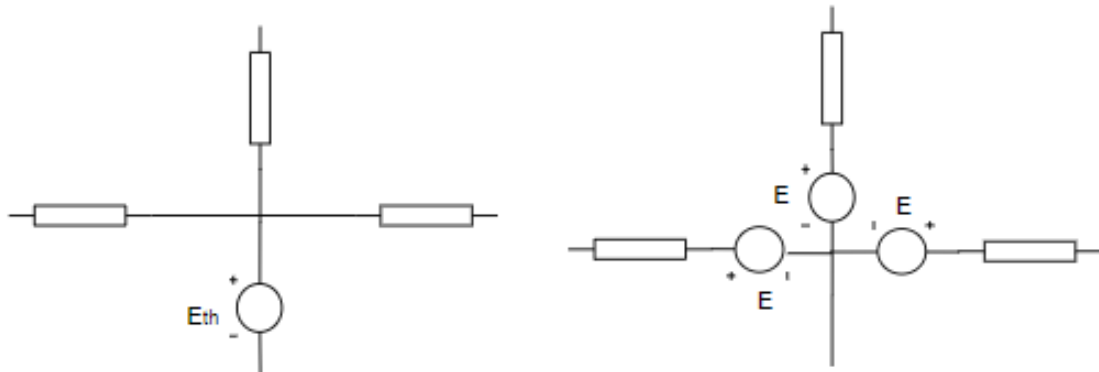


Figura 10.1

6.6.4.2. Corrimiento de fuentes de corriente

Su demostración se realiza aplicando métodos de nudos.

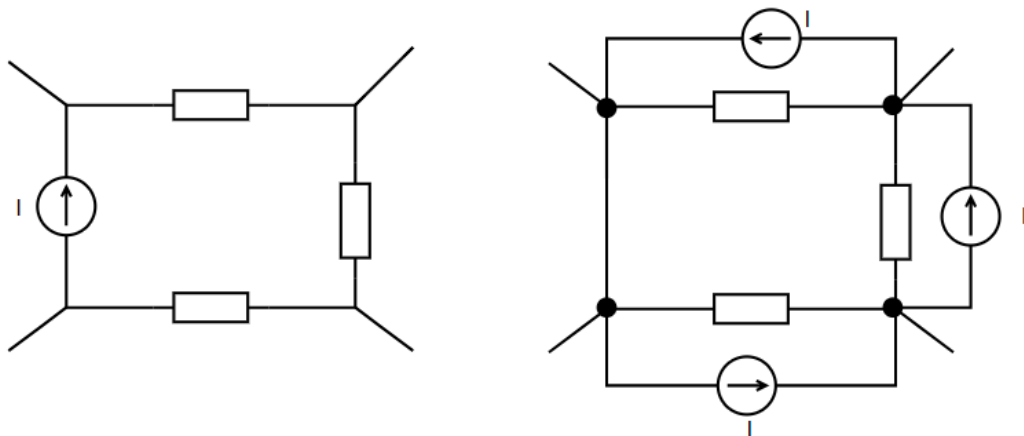


Figura 6.2

7. SISTEMAS ELÉCTRICOS TRIFÁSICOS

7.1. Introducción

Desde sus inicios, los sistemas de corriente alterna se ha desarrollado de manera trifásica. Es decir, redes que cuentan con una configuración trifilar (tres conductores o fases) donde las magnitudes de corriente o tensión de cada una poseen idealmente la misma magnitud y se encuentran desfasadas entre sí 120° eléctricos.

Ahora bien, ¿cuál es el motivo de esta elección? y ¿por qué estos sistemas se han consolidado al punto de convertirse casi con exclusividad en el modo de generación, transmisión y consumo de energía eléctrica?

Las respuestas radican en las ventajas que el sistema trifásico posee por sobre el monofásico, algunas de las más destacadas son:

- Si se cuenta con dos cargas una trifásica y otra monofásica de igual tensión y potencia consumida. El sistema trifásico tiene la capacidad de abastecer la carga con una corriente 43% más chica. Esto permite reducir la sección de los conductores hasta un 50% y por consiguiente producir un importante ahorro en la construcción de la instalación.
- La potencia trifásica es constante en el tiempo, es decir, no posee potencia fluctuante. Esto permite que el torque eléctrico que da lugar al funcionamiento de los motores sea constante, minimizando vibraciones y esfuerzos en el rotor.
- Los motores trifásicos tienen la capacidad de arrancar de manera autónoma. No así los motores monofásicos que necesitan de dispositivos adicionales para lograr el toque de arranque.

En vistas de lo anterior, dominar el funcionamiento de sistemas trifásicos es vital para la formación de los profesionales del sector eléctrico, sin importar el área específica en la que se desempeñen.

7.2. Generación de un sistema trifásico de tensiones

En apuntes previos se ha presentado como, un campo magnético giratorio, puede inducir una FEM de tipo senoidal sobre una bobina, dando lugar al generador elemental de corriente alterna. Dado que esos generadores contaban con tan solo una bobina el sistema de tensión resultaba monofásico.

Ahora bien, si a ese mismo generador se le incorporan más bobinas ubicadas sobre el estator con una determinada separación espacial se logra un sistema polifásico donde la cantidad de fases está dada por el número de bobinas.

Para lograr un sistema trifásico el generador debe contar con 3 bobinas, las cuales se ubican equidistantes una de otra a 120° geométricos. La siguiente figura presenta esquemáticamente ese proceso.

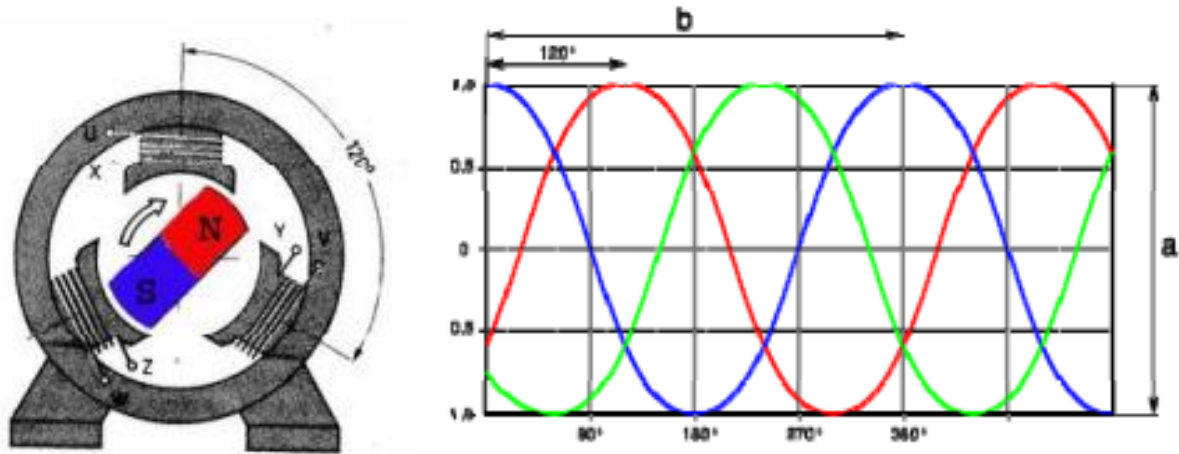


Figura 7-1

Al igual que en los generadores monofásicos la tensión inducida es de tipo senoidal, pero en este caso esta tensión se induce en cada bobina, es decir que se tienen tres tensiones con desfase temporal debido a la separación espacial establecida en el estator. Coincidente con la distancia geométrica de las bobinas, las tensiones resultantes presentan también una separación de 120° eléctricos.

Lo anterior puede visualizarse en la Figura 7-1 donde se aprecia la evolución temporal de las tres tensiones (rojo, azul y verde) inducidas en las bobinas del generados. El desfase temporal de 120° puede medirse entre dos máximos consecutivos.

En general, un sistema polifásico (de más de una fase) es **simétrico** si las magnitudes (corrientes, tensiones) de cada fase son iguales entre sí en módulo y cada una se encuentra atrasada en un mismo ángulo con respecto a su precedente.

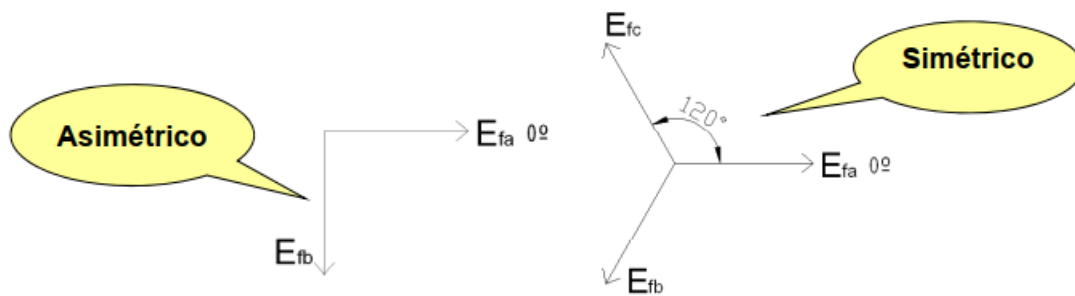


Figura 7-2

Debe entenderse como fase a cada una de la partes de un circuito donde se genera, transmite o utiliza una de la tensiones del sistema trifásico. Típicamente a cada una de las fases se le asigna un número o letra.

El régimen simétrico se obtiene al aplicar un sistema simétrico de tensiones a un circuito en el cual las impedancias de las fases son iguales entre sí.

Se dice que un sistema polifásico es **equilibrado** si el valor instantáneo de la potencia es constante en el tiempo.

De acuerdo con lo anterior las expresiones temporales y fasoriales de las tensiones inducidas presentan la siguiente forma.

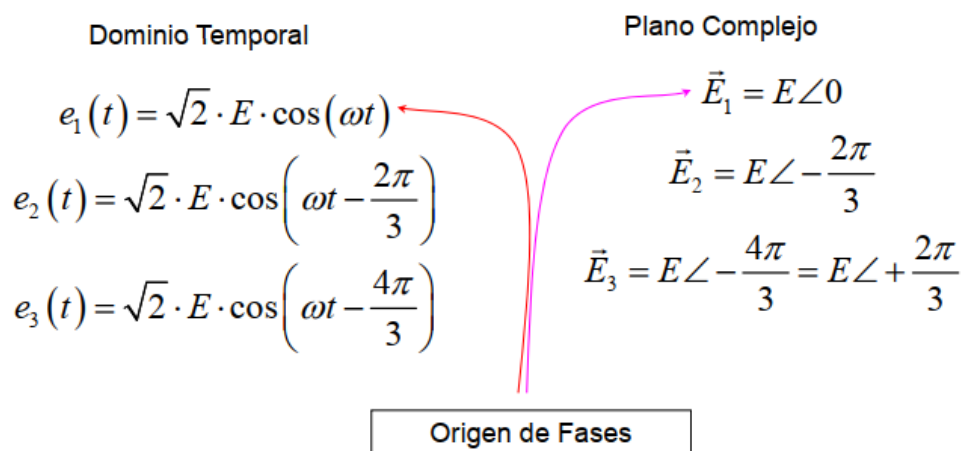


Figura 7-3

El sentido de giro del rotor define lo que se conoce como secuencia, que define el orden en que se suceden los fasores, es decir cuales adelantan o atrasan respecto del resto. Suponiendo un sistema trifásico cuyas fases se denominen con las letras RST en el cual se toma como referencia la fase R, existen dos posibles secuencias. La secuencia positiva o directa definida como RST y la secuencia negativa o inversa definida como RTS.

La siguiente figura presenta el diagrama fasorial de cada secuencia. Debe considerarse que si bien la secuencia está relacionada con el sentido de giro del generador los diagramas fasoriales se han dispuesto con el mismo sentido de giro para poder compararlos.

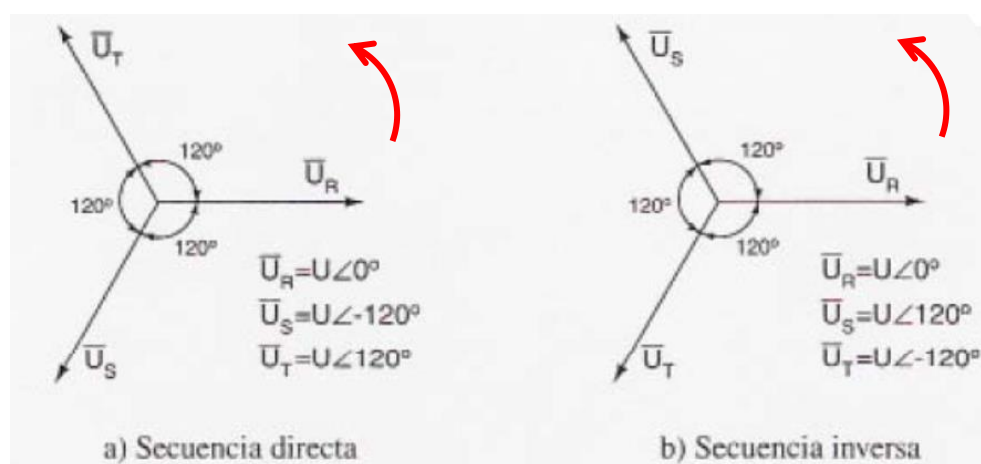


Figura 7-4

En un sistema trifásico simétrico la sumatoria de las tensiones de las tres fases en cada instante es igual a cero.

$$\begin{aligned} |\vec{E}_R| &= |\vec{E}_S| = |\vec{E}_T| \\ \vec{E}_R + \vec{E}_S + \vec{E}_T &= 0 \end{aligned}$$

7.3. Conexión de fuentes y cargas

Suponiendo que cada bobina del generador tiene disponible sus dos bornes se puede pensar que estas bobinas representan una fuente de tensión senoidal individual, donde cada una posee su módulo y desfase angular con la particularidad de que los módulos son todos iguales y están desfasadas 120° entre sí. También se puede considerar que cada fuente tiene su propia resistencia interna. El hecho de pensar a las bobinas en forma individual donde cada una se presenta mediante una fuente, permite construir circuitos para luego analizar el comportamiento de los sistemas trifásicos.

Las fuentes (es decir las bobinas), se pueden vincular entre sí de dos maneras posibles, en estrella o en triángulo. Cada conexión deriva en magnitudes de salida de diferente valor.

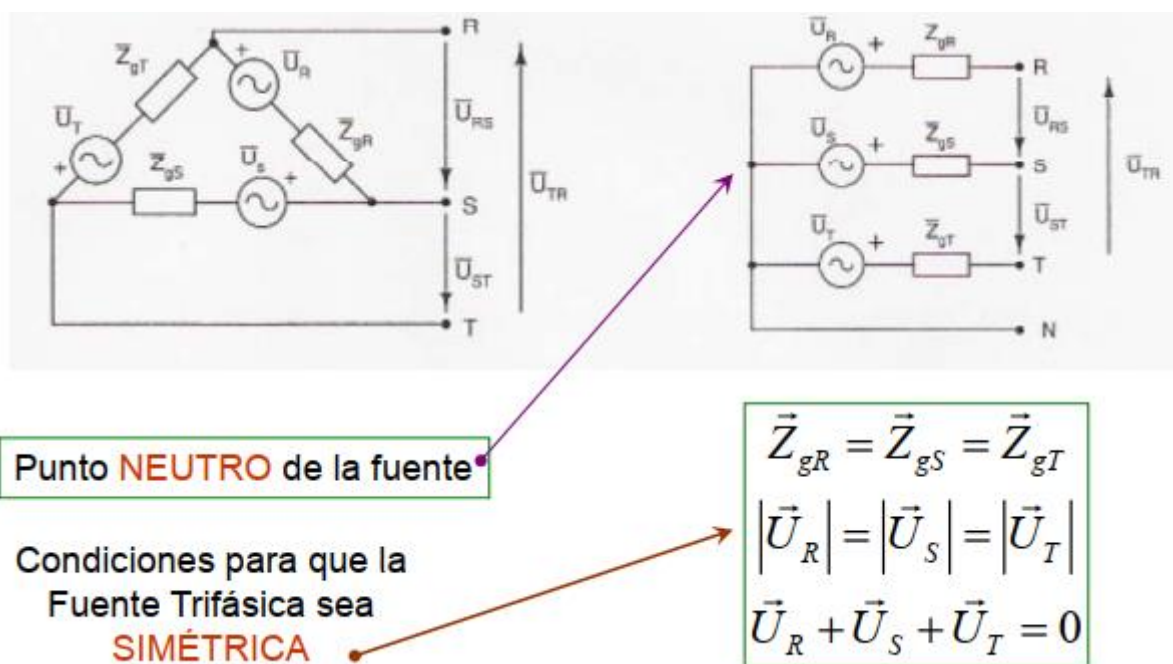


Figura 7-5

En los sistemas trifásicos, tanto las líneas de transmisión, cables o demandas de potencia también poseen tres elementos uno por cada fase. En la demanda o carga también se puede establecer una conexión en estrella o triángulo.

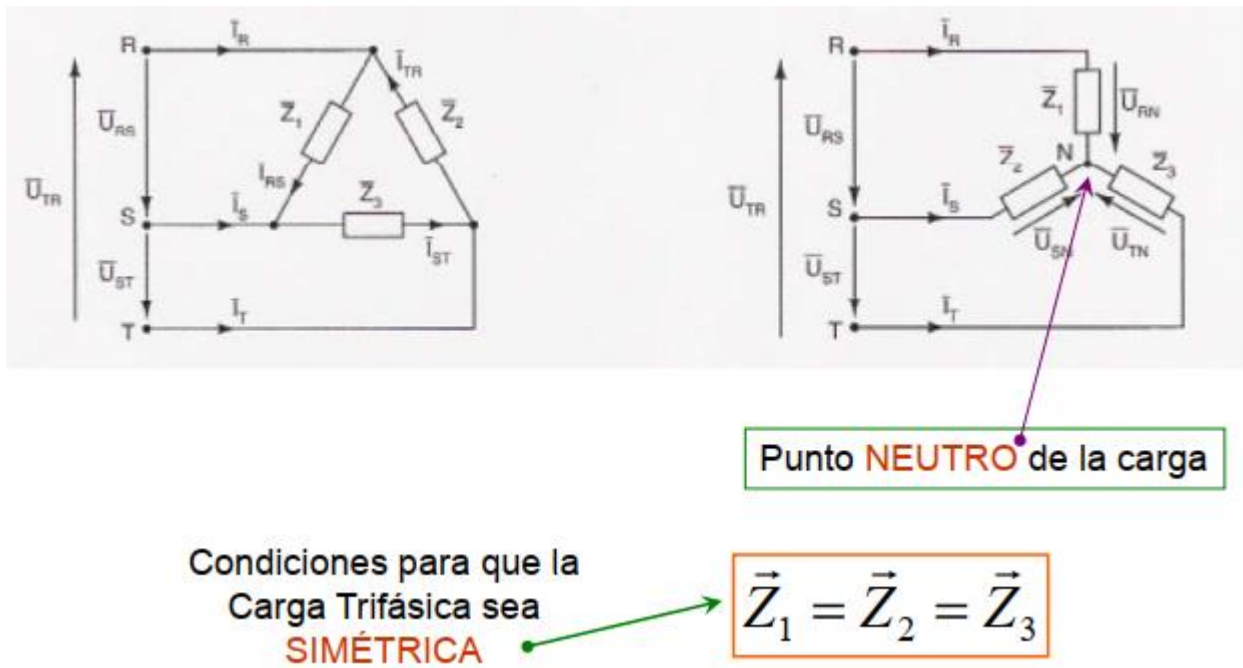


Figura 7-6

La siguiente figura presenta las posibles conexiones vistas hasta aquí.

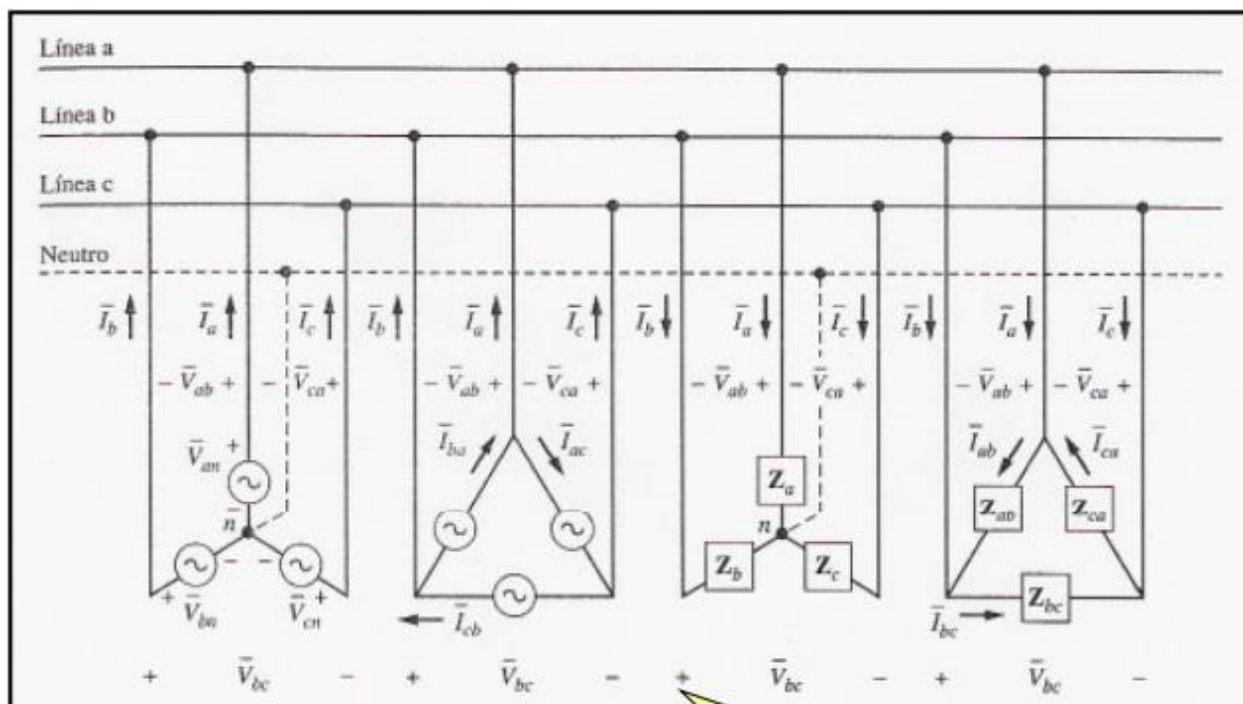


Figura 7-7

7.4. Magnitudes de fase y de línea

Tensión simple o de fase: es la diferencia de potencial que existe en cada una de las ramas monofásicas de un sistema trifásico. En otras palabras la tensión de fase es la que se puede medir desde cualquier punto hasta el centro de estrella de la carga o generador.

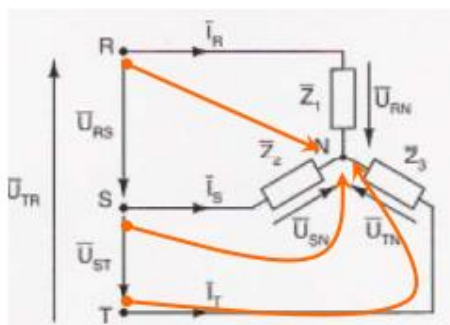


Figura 7-8

Tensión compuesta o de línea: es la diferencia de potencial entre dos conductores de línea.

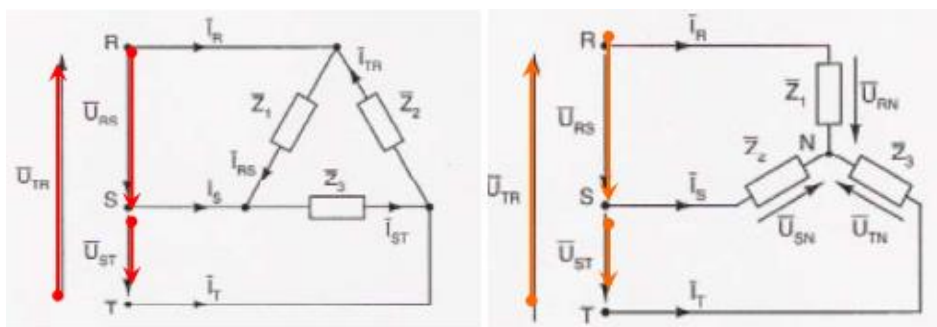


Figura 7-9

Corriente de fase: es la que circula por cada elemento monofásico.

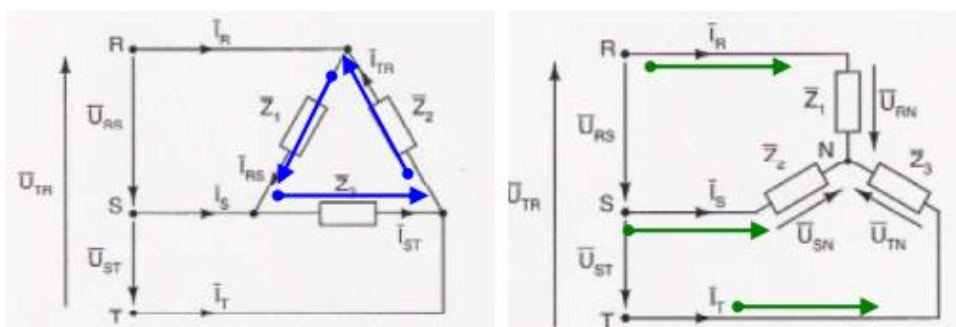


Figura 7-10

Corriente de línea: es la que circula por los conductores de línea.

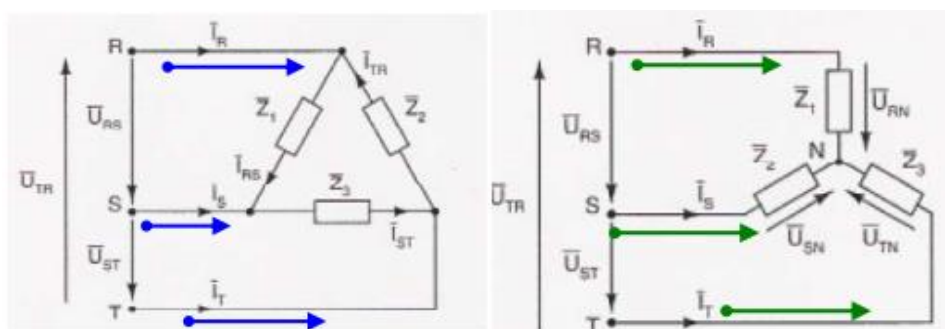


Figura 7-11

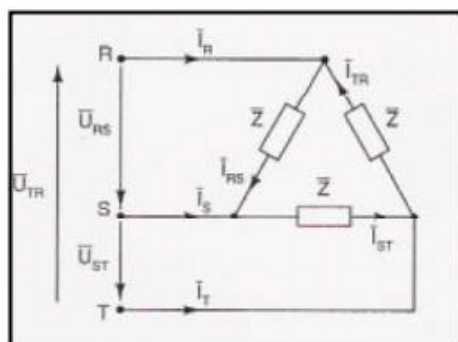
7.5. Relación entre magnitudes de línea y fase

Un sistema simétrico y equilibrado es uno donde tensiones y corrientes en elemento trifásico ya sea activo o pasivo se cumpla la suposición de que estas magnitudes poseen la misma amplitud y están desfasada 120° . En un sistema como este se pueden aplicar las siguientes relaciones que surgen de la matemática de números complejos.

La siguiente explicación se realiza utilizando una carga como ejemplo, sin embargo, resulta totalmente válido también para una fuente o generador.

7.5.1. Conexión en triángulo

Sea un conjunto de tres impedancias iguales conectadas en triángulo.



De acuerdo con la figura se adoptan los siguientes desfases en las corrientes de fase.

$$\dot{I}_{RS} = I_F \angle 0 \quad \dot{I}_{ST} = I_F \angle -120 \quad \dot{I}_{TR} = I_F \angle +120$$

Al aplicar la primera ley de Kirchoff en cada nodo se obtiene.

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{RS} - \dot{I}_{TR} = \sqrt{3} \dot{I}_{RS} \angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_{ST} - \dot{I}_{RS} = \sqrt{3} \dot{I}_{ST} \angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_T = \dot{I}_{TR} - \dot{I}_{ST} = \sqrt{3} \dot{I}_{TR} \angle -30^\circ$$

Considerando lo anterior se construye el siguiente diagrama fasorial

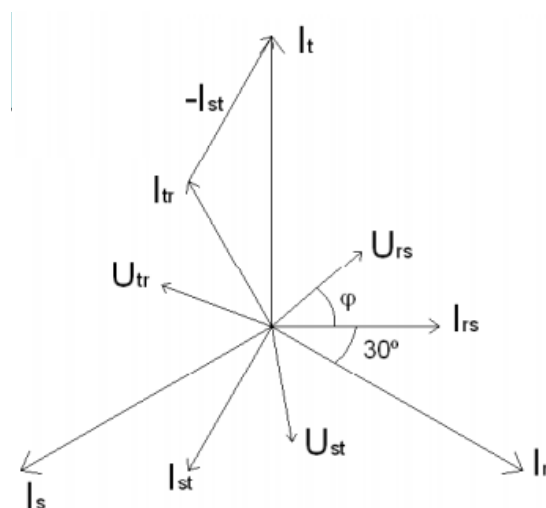


Figura 7-12

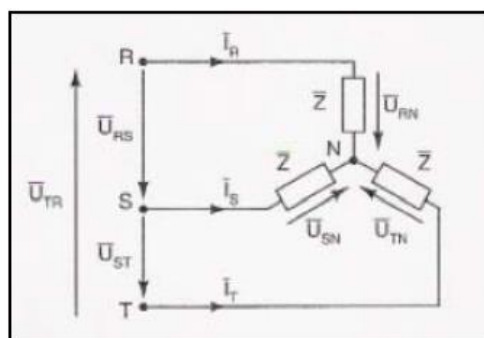
Notar que en este circuito

$$I_L = \sqrt{3} I_F$$

Intensidad de línea retrasa 30° respecto a la de fase

7.5.2. Conexión en estrella

Sea un conjunto de impedancias iguales conectadas en estrella



De acuerdo con la figura se adoptan los siguientes desfases en las tensiones de fase.

$$\dot{U}_{RN} = E \angle 0^\circ \quad \dot{U}_{SN} = E \angle -120^\circ \quad \dot{U}_{TN} = E \angle 120^\circ$$

Al aplicar la segunda ley de Kirchff sobre cada “malla” conformada por dos conductores de línea.

$$\dot{U}_{RS} = \dot{U}_{RN} - \dot{U}_{SN} = E\angle 0^\circ - E\angle -120^\circ = \sqrt{3} \dot{U}_{RN} \angle 30^\circ$$

$$\dot{U}_{ST} = \dot{U}_{SN} - \dot{U}_{TN} = E\angle -120^\circ - E\angle 120^\circ = \sqrt{3} \dot{U}_{SN} \angle 30^\circ$$

$$\dot{U}_{TR} = \dot{U}_{TN} - \dot{U}_{RN} = E\angle 120^\circ - E\angle 0^\circ = \sqrt{3} \dot{U}_{TN} \angle 30^\circ$$

Considerando lo anterior se construye el siguiente diagrama fasorial

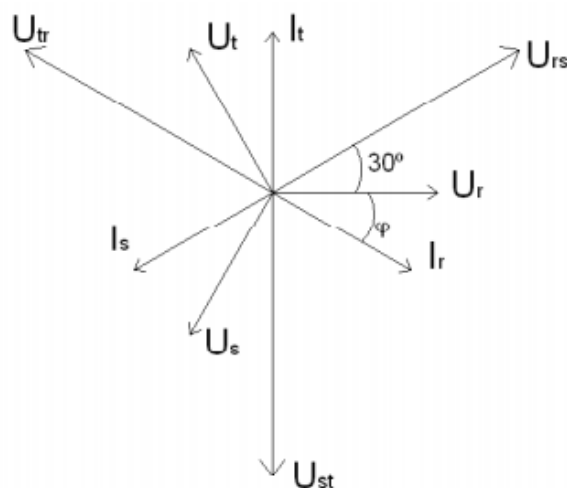


Figura 7-13

Notar que en este circuito

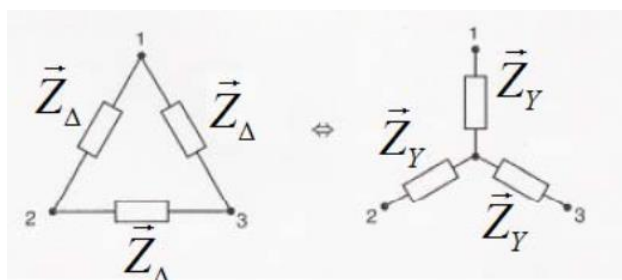
$$U_L = \sqrt{3}E$$

Tensión de línea adelanta 30°
respecto a la de fase

7.5.3. Conversión estrella-triángulo

Utilizando las equivalencias demostradas anteriormente es posible realizar la conversión de la representación de un elemento. Es decir, pasar de estrella a triángulo o viceversa ya sea que se trate de un generador o una carga.

Carga



$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad ; \quad Z_\Delta = 3 Z_Y$$

Generador

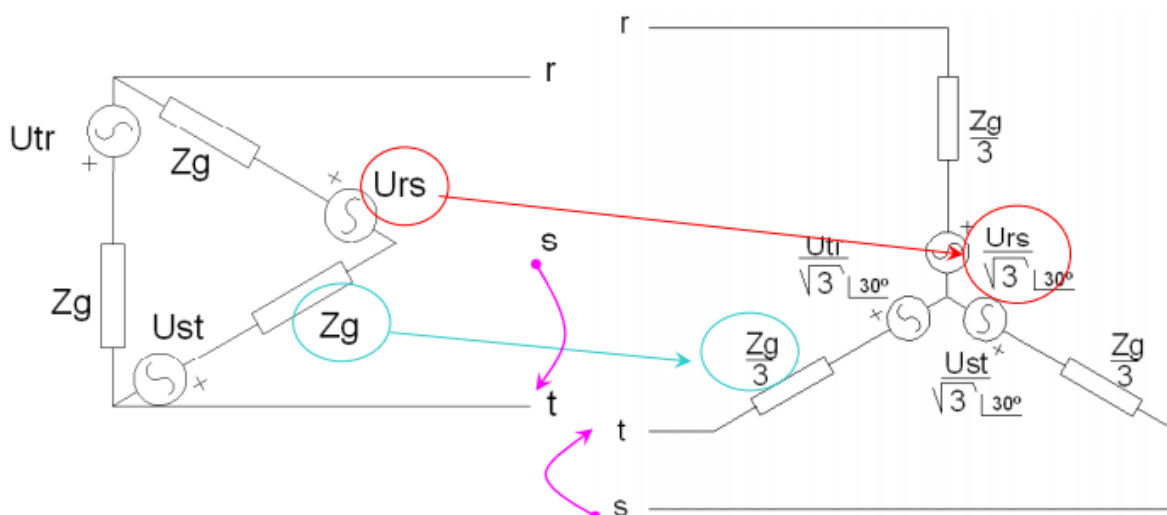


Figura 7-14

7.6. Teorema de fase fundamental

El análisis de sistemas trifásicos implica la resolución de circuitos con múltiples fuentes (múltiplos de 3 según la cantidad de generadores presentes) junto a posibilidad de contar con numerosas mallas. Eso significa que la cantidad de tensiones y corrientes a calcular se vuelve significativa. Sin embargo, los sistemas simétricos y equilibrados tienen la particularidad que al comparar una fase respecto de las otras la diferencia entre las magnitudes se presenta sólo en desfase angular (el cual además es conocido), manteniéndose iguales los módulos. En función de esto surge la iniciativa de desarrollar una alternativa que permita conocer el estado (tensiones y corrientes) de una fase **resolviendo un circuito monofásico**, pudiendo fácilmente extrapolar dicho resultado a las restantes aplicando el desfase apropiado. Esta alternativa se logra a través del Teorema de fase fundamental el cual se presenta a continuación.

Se considera un sistema trifásico compuesto por un generador real con impedancia interna Z_g al cual se vincula con una carga representada por tres impedancias Z , donde la vinculación entre generador y carga se realiza mediante una línea de transmisión de impedancia Z_L . Tanto el generador, como la carga se conectan en estrella y sus centros se vinculan entre sí por un cuarto cable con impedancia Z_N . Los centros de estrella se han denominado N en el generador y N' en la carga. Este sistema se encuentra presentado en la siguiente figura.

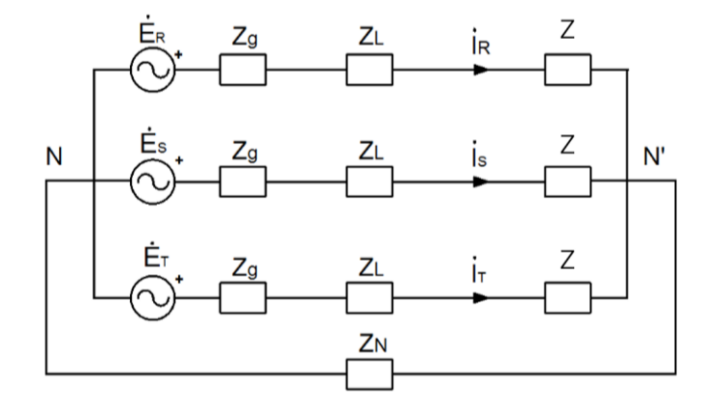


Figura 7-15

Sobre este circuito se considera $Z_T = Z_g + Z_L + Z$

Siendo el sistema simétrico y equilibrado la suma de las tensiones de fuente resulta $\dot{E}_R + \dot{E}_S + \dot{E}_T = 0$

Tomando lo anterior se aplica el teorema de Millman para determinar la diferencia de potencial que se desarrolla entre los centros de estrella es decir sobre la impedancia Z_N

$$U_{N'N} = \frac{\frac{\dot{E}_R}{Z_T} + \frac{\dot{E}_S}{Z_T} + \frac{\dot{E}_T}{Z_T}}{\frac{1}{Z_T} + \frac{1}{Z_T} + \frac{1}{Z_T} + \frac{1}{Z_N}} = 0$$

Por lo anterior es posible eliminar el conductor de neutro y cortocircuitar los centros de estrella. Tras esto se construyen tres circuitos independientes (uno por cada fase)

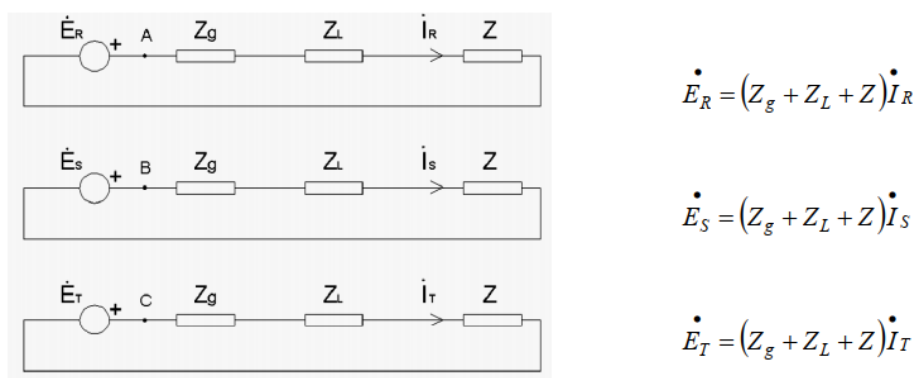


Figura 7-16

Resultado

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{E}_R}{Z_g + Z_L + Z} \quad \dot{I}_S = \frac{\dot{E}_S}{Z_g + Z_L + Z} \quad \dot{I}_T = \frac{\dot{E}_T}{Z_g + Z_L + Z}$$

Donde

$$\dot{I}_S = \dot{I}_R \angle -120^\circ \quad \dot{I}_T = \dot{I}_R \angle -240^\circ$$

Así el sistema trifásico puede ser analizado resolviendo solamente una de sus fases. Se destaca que si el neutro no existe o está desconectado el teorema es igualmente válido.

7.7. Potencia en sistemas trifásicos

Como ha sido demostrado en el capítulo de corriente alterna, en sistemas monofásicos la potencia instantánea tiene un comportamiento oscilatorio senoidal con el doble de frecuencia que la de alimentación. En los sistemas trifásicos en cambio, dado el desfase entre las fases la potencia tiene una característica constante, esto se demuestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 P_{3\phi} &= P_a(t) + P_b(t) + P_c(t) = v_{an}(t) \cdot i_a(t) + v_{bn}(t) \cdot i_b(t) + v_{cn}(t) \cdot i_c(t) = \\
 &V_M \cdot I_M [\cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \varphi - 120^\circ) + \cos(\omega t - 240^\circ) \cos(\omega t - \varphi - 240^\circ)] : \\
 &\frac{V_M I_M}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi - 120^\circ) + \cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi - 240^\circ)] = \\
 &3 \cdot V_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi = P = \text{CONSTANTE}
 \end{aligned}$$

Donde los valores de tensión y corriente eficaces corresponden a magnitudes de fase.

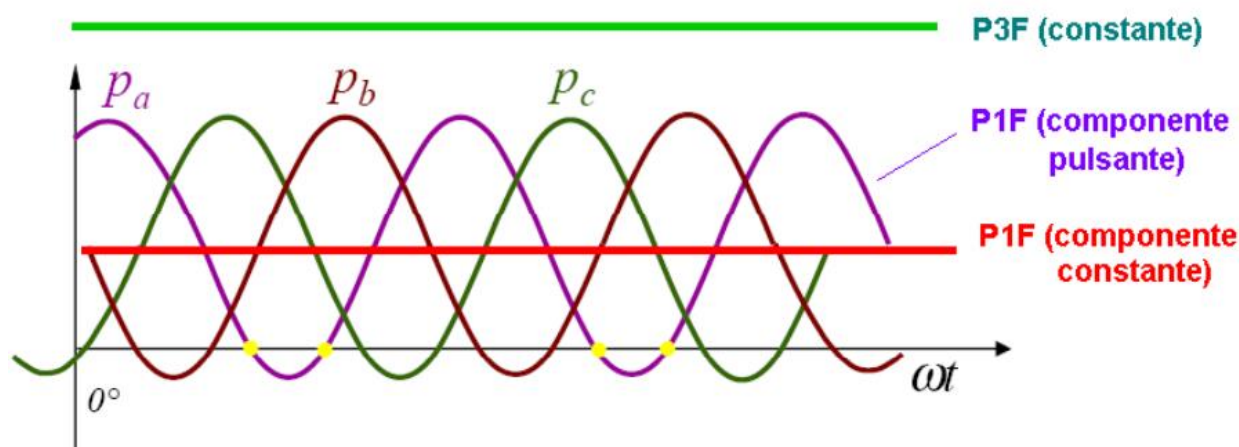


Figura 7-17

Por otro lado, según se observa en la demostración, la potencia trifásica transferida desde el generador a la carga es tres veces la potencia transferida por cada una de las fases. Esto permite obtener la potencia trifásica multiplicando por tres el valor obtenido en la resolución del circuito de fase fundamental. En este sentido resulta importante poder distinguir entre valores de potencia monofásica (asociados a una fase) y trifásica.

Por su parte la potencia reactiva puede calcularse operando con el seno del ángulo del desfase entre la tensión y la corriente.

7.7.1. Corrección de factor de potencia

Al igual que para los sistemas monofásicos, el consumo de elevados montos de potencia reactiva produce la circulación de altos niveles de corriente los cual impactan principalmente en pérdida sobre los sistemas de transmisión y distribución, es decir en los elementos que vinculan la generación con la carga.

Para reducir la potencia reactiva (típicamente inductiva) consumida por una carga o un conjunto de ellas es posible compensar o corregir el factor de potencia en éstas. La inclusión de bancos de capacitores conectados en paralelo con la demanda logran “abastecer” localmente la potencia reactiva requerida por la carga evitando que la misma deba ser suministrada por lo generadores y por ende trasportada desde un punto lejano.

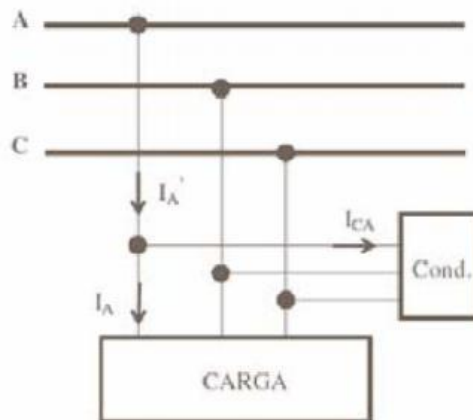


Figura 7-18

Los bancos de compensación trifásicos están compuestos por tres capacitores que pueden conectarse entre sí en estrella o triángulo. Independientemente de su conexión, cada capacitor aporta un tercio de la potencia reactiva trifásica requerida para la compensación.

Más allá el cálculo de la potencia reactiva de compensación puede realizarse de manera trifásica o monofásica, esto último mediante la utilización del circuito de fase fundamental. Sin importar desde que perspectiva se realice el cálculo, este se encuentra resumido en la siguiente figura, donde Q_c es la potencia reactiva de compensación.

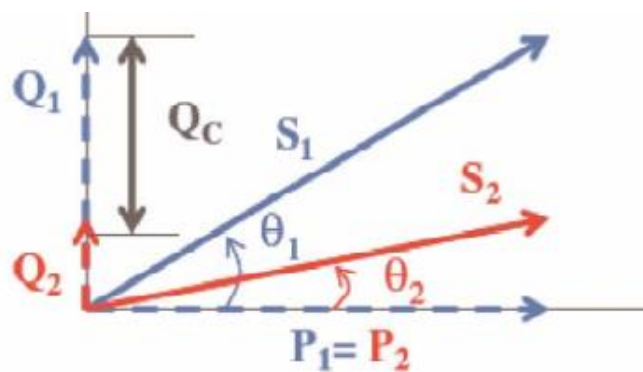
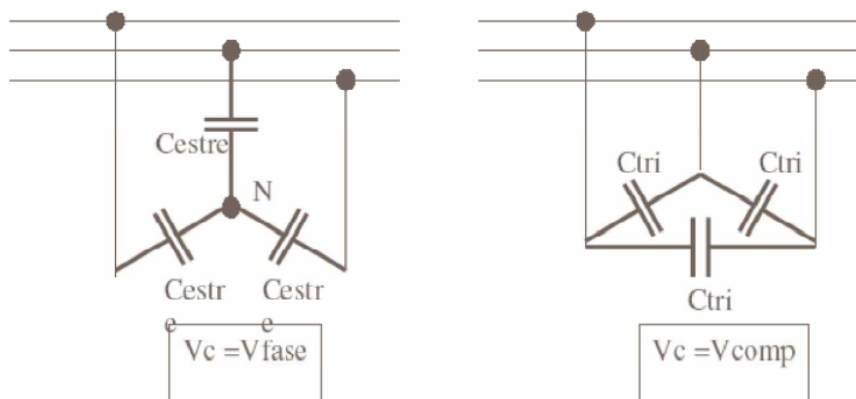


Figura 7-19

El valor de la capacidad en Faradios de los condensadores a utilizar depende de su conexión, existiendo la siguiente relación.



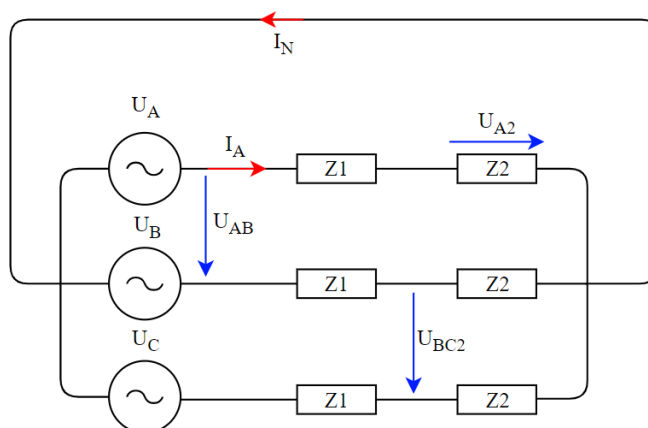
$$C_{estrella} = 3 \times C_{triangulo}$$

7.8. Ejercicios

Problema 63

Sobre el siguiente circuito calcular las tensiones y corrientes indicadas: I_A U_{AB} U_{BC2} U_{A2} I_N

Realizar diagrama fasorial donde aparezcan U_A U_B U_C U_{AB} I_A



$$U_A = 110V \angle 0^\circ \quad U_B = 110V \angle -120^\circ \quad U_C = 110V \angle 120^\circ \quad Z_1 = 7\Omega - j3\Omega \quad Z_2 = 5\Omega + j4\Omega$$

Problema 64

Tres impedancias $Z = 2 + j1 \, \Omega$ son conectadas en triángulo al final de una línea de transmisión cuyos conductores presentan una impedancia $Z_L = 0,2 + j0,3 \, \Omega$ cada uno. Si los potenciales de línea (o compuesto) en la estación generadora son de 2200 V:

- ¿Cuál es la corriente de línea?
- ¿Cuál es el potencial de línea en la carga?
- ¿Cuál es el rendimiento energético (en términos de la potencia activa) de la transmisión?
- Realizar un diagrama fasorial.

Respuesta:

- $I_L = 1184,1 \, \text{A}$
- $U_0 = 1528,6 \, \text{V}$
- $\eta_t = 76,92 \, \%$

Problema 65

Seis resistencias ideales idénticas están conectadas en dos grupos de tres resistencias a un circuito trifásico. El primer grupo está conectado en estrella y el segundo en triángulo. Si se mide la corriente de línea y el potencial de fase a neutro (tensión de fase), se tienen **40A** y **100V** respectivamente.

- Dibujar el circuito
- Identificar los valores medidos
- Calcular el valor de las resistencias.

Respuesta: $R = 10 \, \Omega$

Problema 66

Al final de una línea de impedancia $Z_L = 2 + j1 \, \Omega$ por conductor, están conectados dos grupos de impedancias: uno en estrella de $Z_Y = 25 + j15 \, \Omega$ y otro en triángulo de $Z_D = 45 + j15 \, \Omega$. ¿Cuál es el potencial de línea (o compuesto) necesario en el generador si se desean mantener un potencial de línea de 2300 V en la carga?

Respuesta: $U_L = 2798 \, \text{V}$

Problema 67

Tres cargas simétricas, dos de ellas en triángulo y una en estrella, están conectadas en paralelo a un sistema trifásico de 519,6V (tensión de línea). Las impedancias de las cargas por elemento son:

- $Z_{\text{triangulo1}} = 6+j3 \, \Omega$
 - $Z_{\text{triangulo2}} = 12-j6 \, \Omega$
 - $Z_{\text{estrella}} = 2-j2 \, \Omega$
- a. ¿Cuánto vale la corriente de línea?
 - b. ¿Cuál es la potencia total consumida (valor trifásico)?
 - c. ¿Cuál es la expresión compleja de cada una de las tres impedancias iguales que conectadas en estrella al sistema, toman la misma corriente y la misma potencia que las tres cargas en paralelo?
 - d. Realizar un diagrama fasorial

Respuesta:

- a. $I_L = 259,11 \, \text{A}$
- b. $P_T = 229626,15 \, \text{W}$
- c. $Z_{\text{estrella}} = 1,14 - j0,2 \, \Omega$

Problema 68

Una industria recibe alimentación a través de un sistema de media tensión con valor 15kV entre fases.

Durante la mañana la industria posee un consumo de 0,253MVA (trifásico) con un factor de potencia 0,90 inductivo. ¿Cuánta corriente consume?

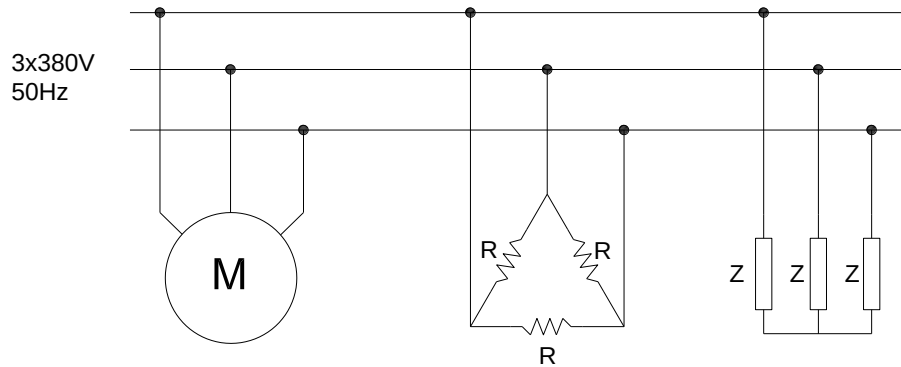
Durante la tarde se conecta un horno adicional que consume 45000W, pero la tensión en la entrada de la planta se reduce a 14,5kV entre fases ¿Cuánta corriente consume ahora?

¿Cuál es la variación de la potencia reactiva consumida entre la mañana y la tarde?

Calcular el banco de potencia reactiva que debe tener un banco de compensación capacitiva para llevar el factor de potencia a 0.98 durante la tarde.

Problema 69

De acuerdo al circuito mostrado en la siguiente figura y en función a los datos presentados en la parte inferior del mismo:



$$\text{Motor} \begin{cases} \text{Potencia} = 6\text{HP} \\ \eta = 0.8 \\ \cos \varphi = 0.85 \end{cases} \quad \dots\dots\dots P_R = 300 \text{ W c/u} \dots\dots\dots Z \begin{cases} L = 50\text{mH} \\ r = 3\Omega \end{cases}$$

- Calcular la corriente absorbida por la instalación
- El factor de potencia total
- La batería de condensadores necesaria para elevar el factor de potencia a **0,85 ind.** Indicar la conexión.
- La corriente absorbida por la instalación después de corregir el factor de potencia.

Respuesta:

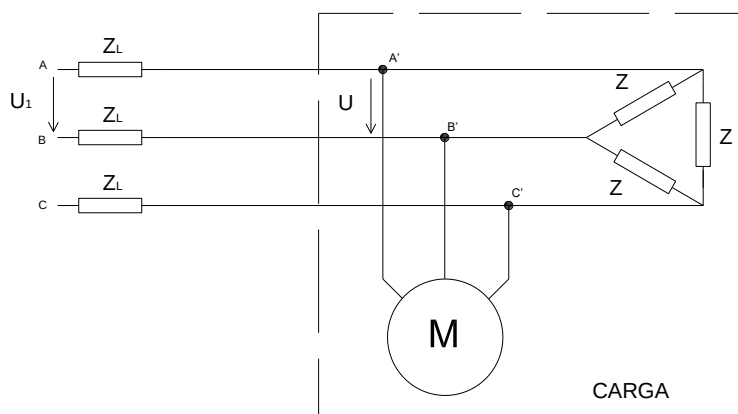
- $I = 22,62 \text{ A}$
- $\cos \phi = 0.55 \text{ ind.}$
- $C_Y = 160,14 \mu\text{F}$ $C_D = 53,38 \mu\text{F}$
- $I' = 14,64 \text{ A}$

Problema 70

De acuerdo al circuito mostrado en la siguiente figura y en función a los datos presentados en la parte inferior del mismo, determinar:

- El rendimiento del motor η_M (Calculado como el cociente entre la potencia la potencia útil y la potencia eléctrica consumida)
- La impedancia de la línea $Z_L = (R_L + jX_L)$
- La tensión al principio de la línea U_1

- $U = 400\text{V}$** (sistema simétrico en tensiones); **$Z = 30 + j40 \Omega$**
- Al principio de la línea se tiene: **$P_T = 12 \text{ kW}$** ; **$\cos \phi_T = 0,6$**
- En el motor: **$P_{\text{útil}} = 5184 \text{ W}$** ; **$\cos \phi_M = 0,6$**
- Pérdida de potencia en la línea: **$P_L = 480 \text{ W}$**

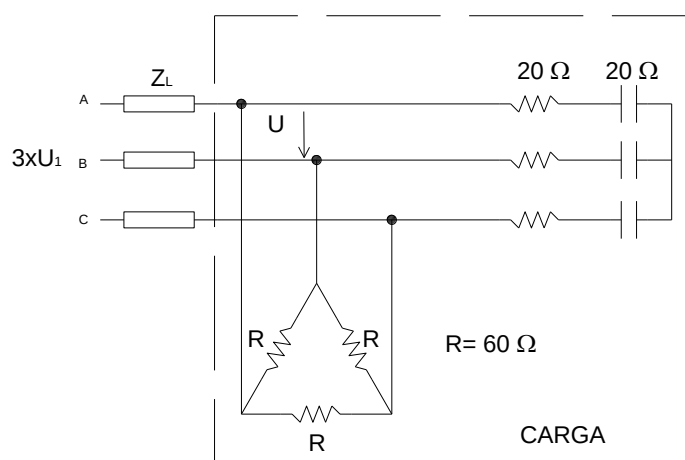


Respuesta:

- $\eta_M = 90\%$
- $R_L = 0,208 \Omega$ $X_L = 0,277 \Omega$
- $U_1 = 418,66 \text{ V}$

Problema 71

En el circuito de la figura es: $U = 160 \sqrt{3} \text{ V}$, $P_L = 480 \text{ W}$ y $Q_L = 480 \text{ VAR}$ (pérdidas activa y reactiva de la línea).



Determinar:

- Impedancia de la línea Z_L (R_L , X_L)
- La reactancia necesaria para corregir totalmente el factor de potencia (en bornes de la carga), indicando el tipo y conexión, suponiendo que U se mantiene constante.
- La tensión al principio de la línea (U_1 valor de línea) antes y después de la corrección.

Respuesta:

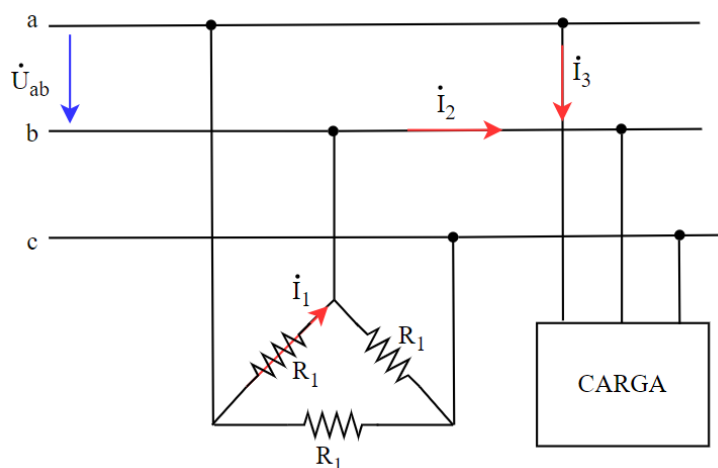
- $R_L = 1 \Omega$ $X_L = 1 \Omega$
- $X_{\text{estrella}} = 40 \Omega$ inductancia
- Antes: $U_1 = 292,3 \text{ V}$; Después: $U_1 = 298,6 \text{ V}$

Problema 72

Sobre el circuito de la figura calcular: U_{ab} I_2

Calcular Potencia activa, reactiva y aparente, trifásica y monofásica en la carga.

Realizar diagrama fasorial de la corrientes entrantes e internas de las resistencias en triángulo.



$$R_1=20\Omega \quad I_1=10A \angle 15^\circ \quad I_3=15A \angle -30^\circ$$

7.9. Caso de aplicación – Sistemas de potencia interconectados

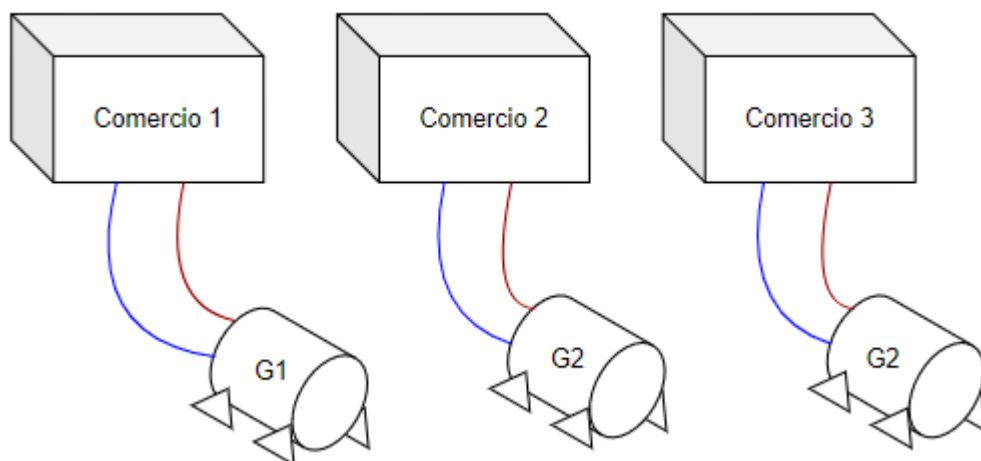
En muchas ocasiones surge la siguiente pregunta:

¿De dónde proviene la energía eléctrica que alimenta nuestros hogares?

La respuesta lamentablemente no es fácil de formular, ya que requiere un entendimiento de como funcionan los sistemas de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, dentro de los cuales nuestros hogares se encuentran inmersos.

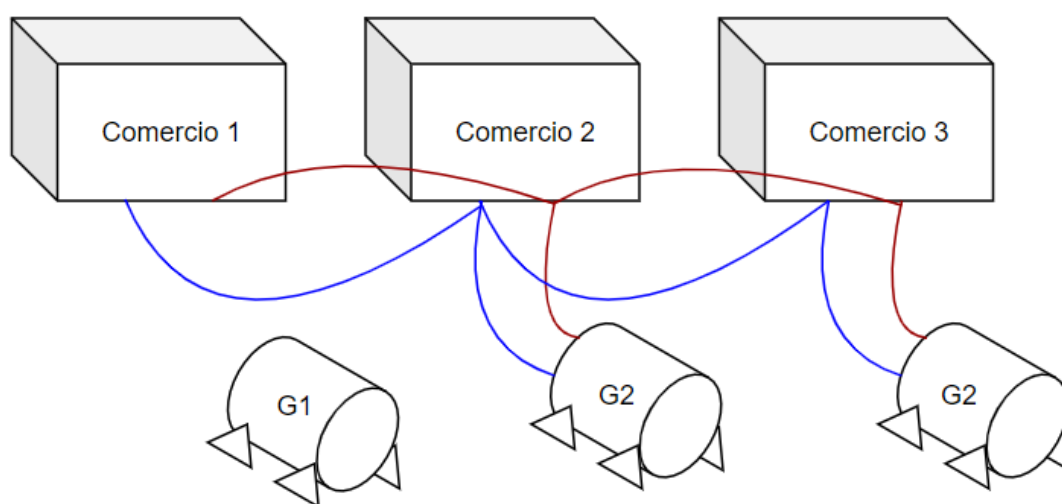
Comencemos con un ejemplo sencillo.

Es un día de verano con altas temperaturas y se interrumpe el suministro eléctrico en la zona céntrica de la ciudad. Los propietarios de los comercios de esta área, ya cansados de esta situación, han comprado generadores para poder continuar trabajando. Entonces, cada comercio pone en marcha su equipo. En esta condición no hay dudas desde donde proviene la energía, cada comercio se encuentra alimentado por un generador diferente.



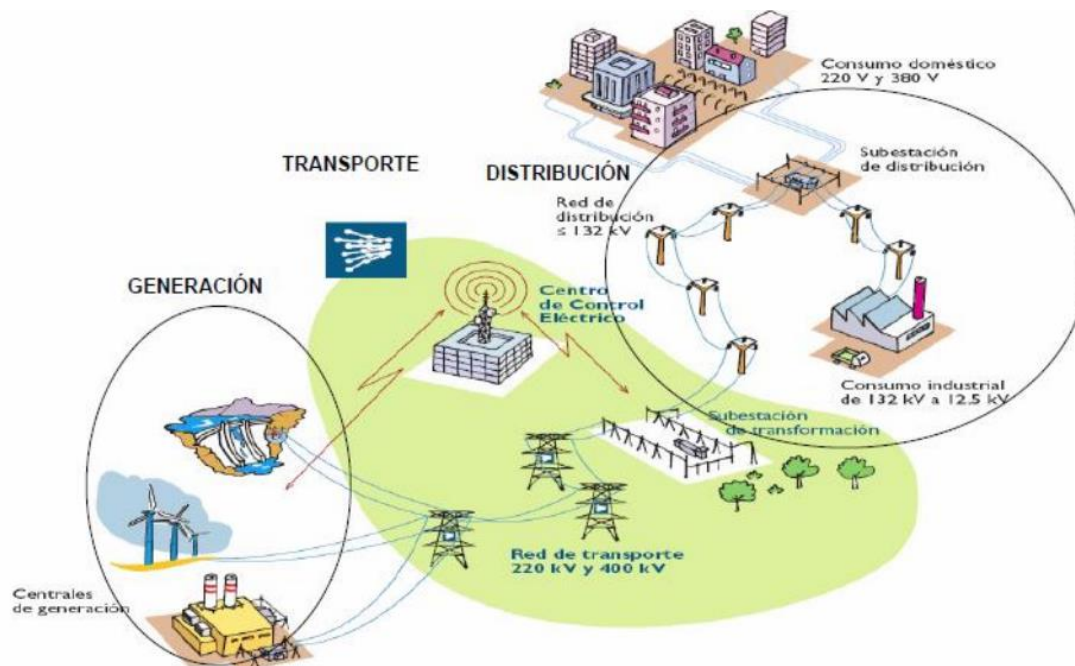
Complejicemos el ejemplo.

Un día el generador que alimenta el comercio 1 se queda sin combustible. Entonces, sus colegas de los comercios 2 y 3 proponen vincular las instalaciones y utilizar los generadores 2 y 3 para alimentar los tres locales. En esta condición, ya no está tan claro desde donde proviene la energía que llega a cada comercio, ya que se ha establecido una red interconectada con múltiples fuentes y consumos. (es importante aclarar que la conexión aquí plantea es hipotética, ya que en la práctica ésta no podría llevarse a cabo dado el modo de funcionamiento de los grupos electrógenos hogareños. Los conceptos teóricos para explicarlo exceden largamente los contenidos de esta materia)



El ejemplo anterior podría considerarse como un estado embrionario de los sistemas eléctricos de media y gran potencia, en los cuales se cuenta con gran cantidad de fuentes de generación, muchas de estas distribuidas geográficamente según la disponibilidad de recursos primarios. Así como también existen numerosos focos de demanda de diferentes características, entre ellos nuestros hogares. Muchas veces la producción de energía y el consumo se encuentran en lugar muy distantes, lo que obliga a transportar la energía desde un lugar a otro. Además, se ha comprobado la efectividad de contar con múltiples vínculos que interconectan generación y

demanda logrando así una red enmallada que resulta más confiable, segura y económica en su funcionamiento. En la siguiente figura se presenta de manera esquemática una red de este tipo.



Tal como lo presenta la figura anterior, en los sistemas eléctricos pueden identificarse diferentes secciones o estados.

Generación: corresponde a un proceso de conversión energética desde una fuente primaria que puede ser viento, agua, vapor, etc. capaz de hacer girar el eje de un generador donde la energía mecánica es transformada en eléctrica. También existen fenómenos que no involucran movimiento como el que se produce en los paneles fotovoltaicos donde la radiación del sol es captada y transformada en energía eléctrica.



Figura 7-20: Sistema de turbina y alternador en Central Atucha II

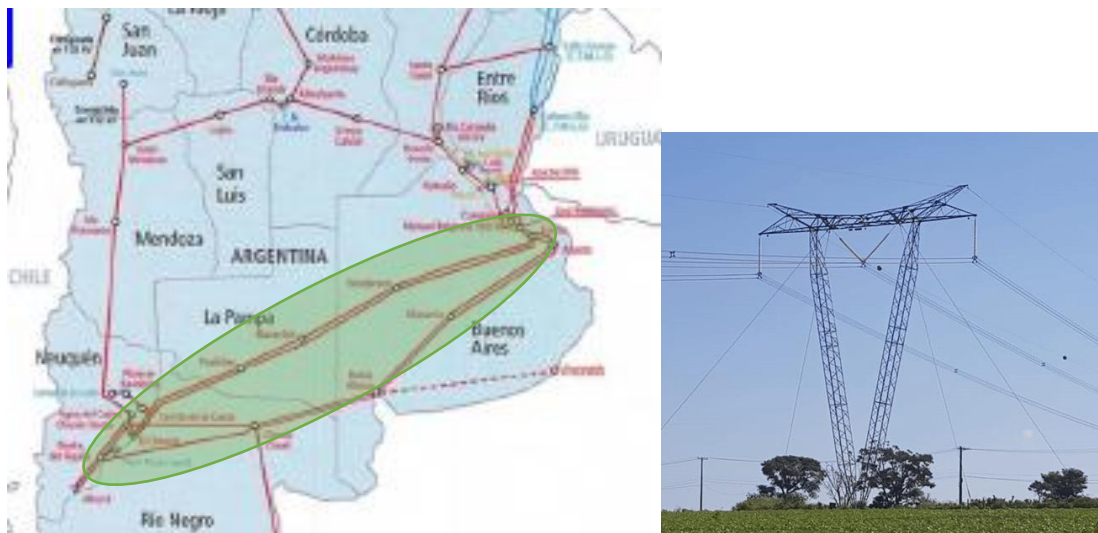
Los equipos de generación rotativos pueden tener capacidad entre unos cientos de kilo Watt hasta cientos de Mega Watt (por ejemplo, la unidad de mayor potencia instalada en el sistema Argentino es de 745MW correspondiente a la Central Nuclear Atucha II). Los molinos eólicos por su parte suelen tener capacidad de unos pocos Mega Watt, mientras los paneles fotovoltaicos solo son capaces de producir algunos kilowatts. Por esto, en la producción de energía renovable suelen conformarse parques o granjas donde se conecta un gran número de generadores o paneles a fin de aumentar la capacidad total (por ejemplo, el parque Solar Cauchari localizado en la provincia de Jujuy es capaz de inyectar 300MW y es el más grande en la red eléctrica Argentina).



Figura 7-21: Parque Solar Cauchari – Jujuy, Argentina

En lo que respecta a la tensión, los generadores operan normalmente en baja (menor a 1000V) o media tensión (entre 1kV y 20kV). No resulta factible la construcción de equipos con mayor tensión debido a problemas de aislación que implicarían dimensiones muy grandes.

Transmisión y distribución: en esta instancia la potencia generada es transportada hasta los centros de consumo. Para esto se utilizan en su gran mayoría líneas aéreas en configuración trifásica. Como regla general cuanto más grande el monto de potencia a transferir y mayor la longitud sobre la cual se realiza el transporte, se incrementa el nivel de tensión. Esto se hace para disminuir las pérdidas derivadas de la circulación de corriente por los conductores. Por ejemplo, el sistema troncal de transporte en Argentina utiliza una tensión de 500kV. Un caso emblemático es el corredor que lleva la producción hidroeléctrica de la cuenca del Comahue en Neuquén hasta el principal centro de consumo que se encuentra en la capital del país y sus alrededores donde habita el 40% de la población.



Cuando las distancias y montos de potencia transferida se reducen también lo hace la tensión del sistema, en particular las redes de distribución de nuestro país operan en 13,2kV o 33kV. Si este servicio se realiza en áreas poco pobladas puede implementarse de forma aérea, mientras que en zonas de alta densidad urbana se lleva a cabo de manera subterránea. Dependiente del nivel de consumo muchas industrias reciben su alimentación en media tensión.





Figura 7-22: Red de distribución subterránea en el centro de Rosario

Finalmente, para abastecer hogares, comercios y fabricas pequeñas se realiza distribución en baja tensión que utiliza 380V, que es el nivel en el cual funcionan todos los equipos que se utilizan en estos lugares.

Estaciones de transformación: como se ha mencionado anteriormente, las instancias de generación, transmisión y distribución trabajan con diferentes niveles de tensión según las necesidades del caso o el equipamiento involucrado. El cambio en los niveles de tensión requiere de un elemento muy importante dentro del funcionamiento de los sistemas de potencia, el transformador. Estos elevan o reducen el potencial utilizando el acoplamiento magnético entre varias bobinas, como todos los demás elementos ya descritos, también trabajan de manera trifásica.

Los transformadores se instalan en estaciones a donde a comenten generadores, líneas y cables por donde entra y sale la energía. En una misma estación puede haber equipos de diferente relación de transformación y capacidad. Veamos como ejemplo la Estación Transformadora Rosario Oeste (ubicada en Perez es el principal punto a bastecimiento de todo el sur de la provincia de Santa Fe).

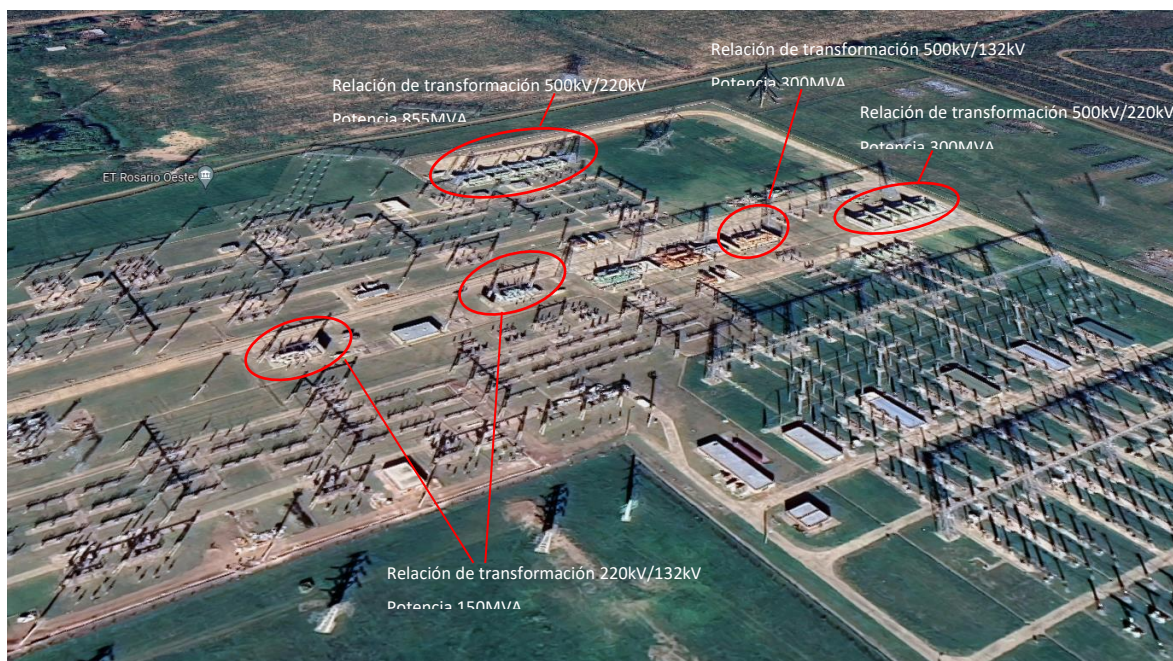


Figura 7-23: Imagen satelital Estación Transformadora Rosario Oeste

Demanda: el camino de la energía termina en los puntos y elementos donde se consume. En la actualidad existen dos grandes tipos de equipamiento, por un lado, motores utilizados tanto en industrias (bombas, molienda de granos, trenes de laminación, cintas transportadoras) como en hogares (heladeras, lavarropas, acondicionadores de aire, ascensores), según el nivel de consumo los motores pueden ser de tipo trifásico o monofásico. Por otro, están los equipos electrónicos, cada vez más difundidos (computadoras, televisores, iluminación led) estos son en su totalidad monofásicos.

8. RESONANCIA

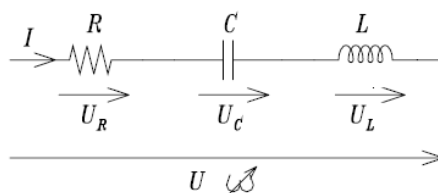
8.1. Introducción

De forma genérica la resonancia es un proceso de oscilaciones forzadas de frecuencia tal que la amplitud de estas sea máxima a igualdad de las condiciones restantes. Esta condición se presenta cuando un sistema dinámico es excitado con una fuente cuya frecuencia resulta equivalente a su frecuencia natural.

En términos del análisis de los circuitos en corriente alterna diremos que un circuito presenta condiciones de resonancia cuando la parte imaginaria de su impedancia / admitancia resulta nula, por lo que la tensión y la corriente estarán en fase.

8.2. Resonancia serie

El circuito en serie RLC es tan interesante y al mismo tiempo tan importante que es a la vez un placer y una necesidad estudiarlo con excepción al cuidado. Su característica más obvia, es la de tener baja impedancia para la corriente a una frecuencia particular y relativamente alta impedancia, para todas las frecuencias que son significativamente diferentes, tanto más altas como más bajas.



Para el circuito de la figura la impedancia se puede escribir de la siguiente manera:

$$Z = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX \quad (\text{Ec. 1})$$

Los términos de reactancia están entre paréntesis. La reactancia inductiva es positiva y la reactancia capacitiva es negativa. es evidente que hay alguna frecuencia, algún valor de ω , a la que estas reactancias individuales serán iguales y opuestas, haciendo la reactancia total del circuito igual a cero ($X=0$), así como $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$. Por definición, **ésta es la frecuencia de resonancia**. Si se llama f_0 a la frecuencia de resonancia y a $2\pi f_0$ se le designa por ω_0 tendremos que, en resonancia:

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{Ec. 2})$$

Dado que, en esta condición, en la frecuencia de resonancia, el circuito se comporta como resistivo puro, los rasgos característicos de la resonancia serie serán más marcados si la resistencia del circuito es pequeña, lo que

equivale a decir que el circuito cuenta con un alto factor de mérito; este tema sea aborda posteriormente con mayor detalle.

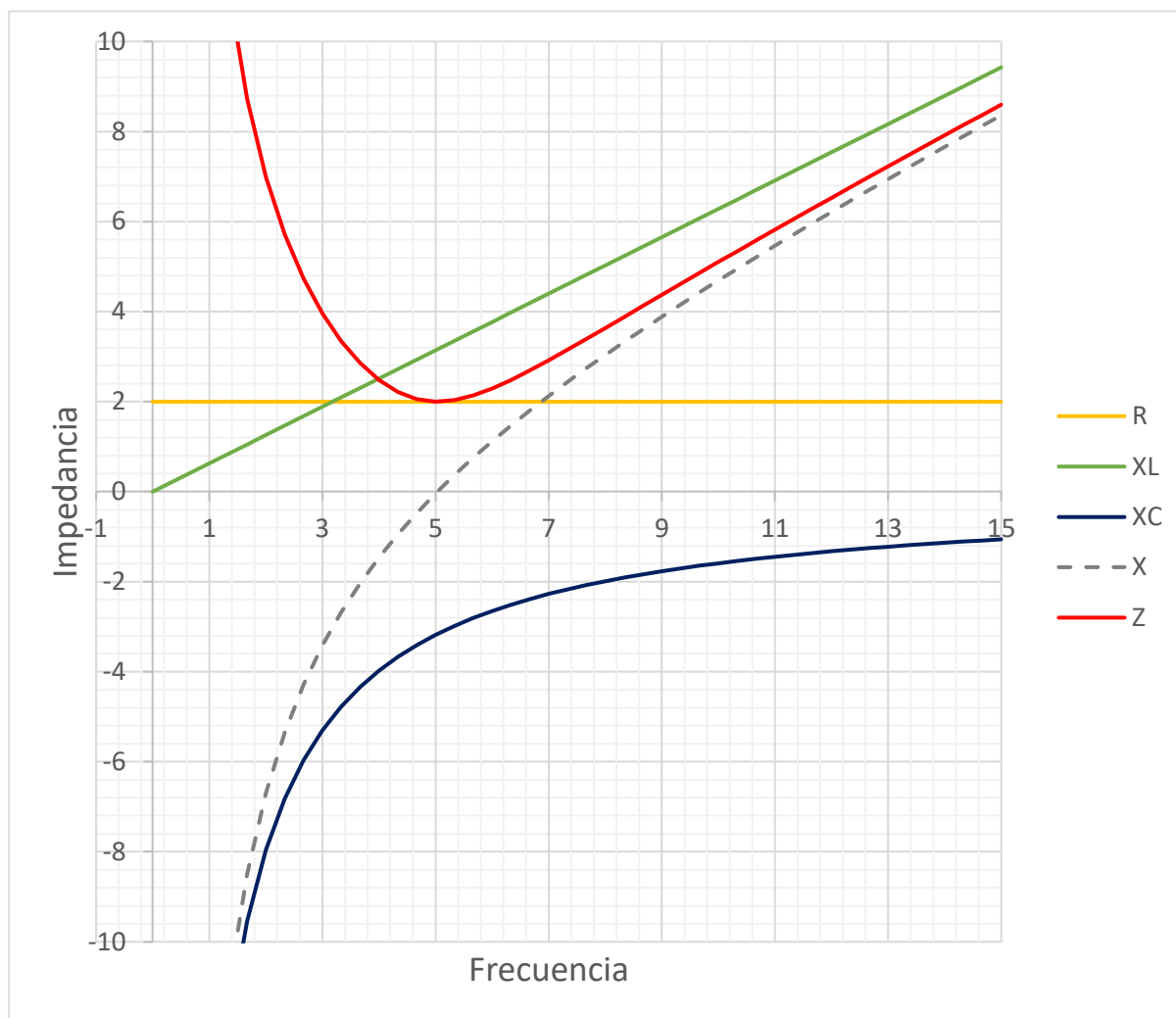
8.2.1. Análisis de la impedancia

De la Ec.1, se puede obtener el módulo de la impedancia, siendo,

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (\text{Ec. 3})$$

Para analizar el comportamiento de la impedancia total del circuito se plantea la siguiente gráfica impedancia (módulo) vs frecuencia. En esta figura se muestra:

- La impedancia o resistencia pura del resistor (**R**)
- La impedancia o reactancia pura del inductor (**XL**)
- La impedancia o reactancia pura del capacitor (**XC**)
- La parte imaginaria de la impedancia o reactancia total del circuito (**X**)
- El módulo de la impedancia compleja de todo el circuito (**Z**)



Del análisis de esta figura se ponen en evidencia importantes aspectos del comportamiento del circuito RLC serie para las condiciones de resonancia y en su entorno:

En resonancia, la impedancia total es R; es un valor pequeño y resistivo puro. Para una frecuencia mayor, el término ωL de la ecuación (1) va haciéndose más importante y la impedancia se incrementa rápidamente con la frecuencia. En tales condiciones, excepto para frecuencias muy cercanas a la de resonancia, la impedancia tiende a incrementarse de forma proporcional al incremento de la frecuencia (i.e. con una característica similar a ωL). Cuando la frecuencia es superior a la de resonancia la impedancia total del circuito es de carácter inductivo de modo que la corriente atrasa a la tensión. Cuando es inferior, el término inductivo decrece y se hace preponderante el efecto capacitivo, de modo que la corriente adelanta a la tensión.

La corriente es

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (\text{Ec. 4})$$

Cuyo modulo es

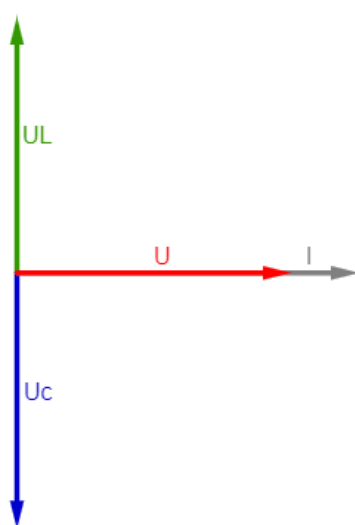
$$I = \frac{\dot{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (\text{Ec. 5})$$

En resonancia se cumple que

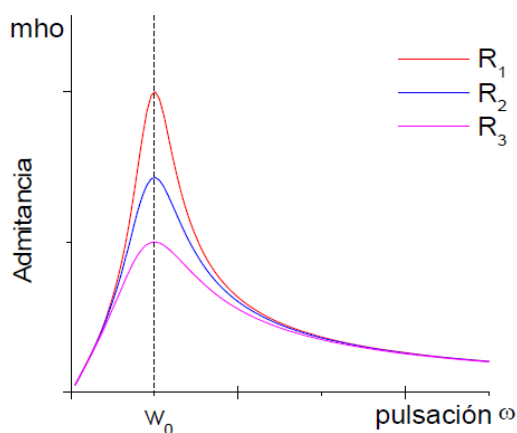
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} \quad (\text{Ec. 6})$$

Siendo ω_0 la pulsación de resonancia.

Dado que las reactancias capacitiva e inductiva son iguales en modulo, las tensiones de ambos elementos también lo serán, quedando así el diagrama fasorial como el siguiente. Con $\dot{U} = \dot{U}_R$



A continuación, se muestra la gráfica de la admitancia en función de la frecuencia para distintos valores de resistencias, siendo $R_1 < R_2 < R_3$



Para $R = 0$

$$|Z(\bar{\omega})| = \left| \bar{\omega}L - \frac{1}{\bar{\omega}C} \right|$$

Entonces, en resonancia,

$$|Z(\bar{\omega})| = 0 \Rightarrow \bar{\omega}L - \frac{1}{\bar{\omega}C}$$

Realizando la derivada de la función

$$\left. \frac{d|Z|}{d\bar{\omega}} \right|_{\bar{\omega}_{0-}} = -\frac{1}{\bar{\omega}_0^2 C} - L$$

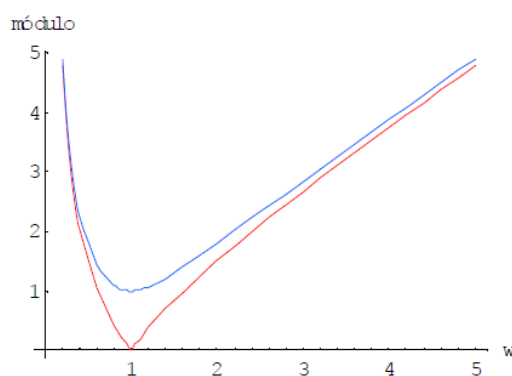
$$\left. \frac{d|Z|}{d\bar{\omega}} \right|_{\bar{\omega}_{0+}} = L + \frac{1}{\bar{\omega}_0^2 C} - L$$

En $\bar{\omega}_0$ se tiene un punto anguloso.

Para $R \neq 0$

$$|Z(\bar{\omega})| = \sqrt{R^2 + \left(\bar{\omega}L - \frac{1}{\bar{\omega}C} \right)^2}$$

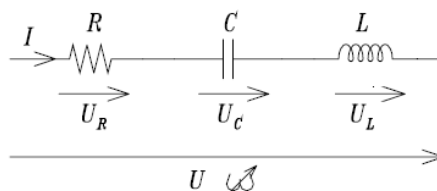
En resonancia la función posee un mínimo, por lo que, con resistencia no nula, $\frac{d|Z|}{d\bar{\omega}}$ es continua.



8.2.2. Análisis de factor de mérito

El factor de mérito Q se define como la relación entre la tensión en bornes de la bobina (o del capacitor) y la tensión en la fuente en resonancia.

Analizando el mismo circuito serie,



En función de la tensión de la bobina,

$$U_{L0} = j\omega_0 L I_0 = j\omega_0 L \frac{\dot{U}}{R} \Rightarrow |U_{L0}| = \omega_0 L \frac{|\dot{U}|}{R} \Rightarrow Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (\text{Ec. 7})$$

En función de la tensión del capacitor, cabe recordar que en resonancia se cumple que $U_L = U_C$

$$U_{C0} = -j \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\dot{U}}{R} \Rightarrow |U_{C0}| = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{|\dot{U}|}{R} \Rightarrow Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (\text{Ec. 8})$$

Por lo que Q depende solo de los componentes del circuito.

Otra definición del este factor es la relación entre la máxima energía almacenada y la energía disipada por ciclo.

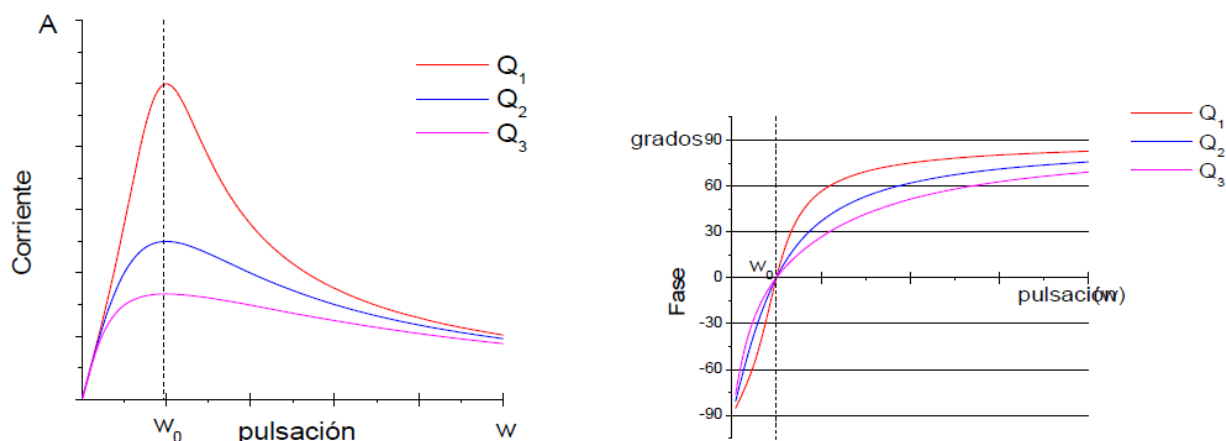
Siendo,

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energía almacenada}}{\text{energía disipada por ciclo}} \quad (\text{Ec. 9})$$

Teniendo en cuenta la energía almacenada en la bobina (de manera equivalente con capacitor) se obtiene

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_{\max}^2}{\frac{I_{\max}^2 R}{2 f_0}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (\text{Ec. 30})$$

Se muestra a continuación las gráficas de la corriente (modulo y fase) en función de la frecuencia para distintos valores de Q



8.2.3. Energía en resonancia

Dado que la corriente del circuito es $i = I_{m\acute{a}x} \text{sen}(\bar{\omega}t)$ y la tensión en el capacitor es $u_c = U_{c_{m\acute{a}x}} \cos(\bar{\omega}t)$

La suma de las energías magnética y eléctrica es:

$$W = W_M + W_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}L I_{m\acute{a}x}^2 \text{sen}^2(\bar{\omega}t) + \frac{1}{2}C U_{c_{m\acute{a}x}}^2 \cos^2(\bar{\omega}t)$$

Como en resonancia $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$

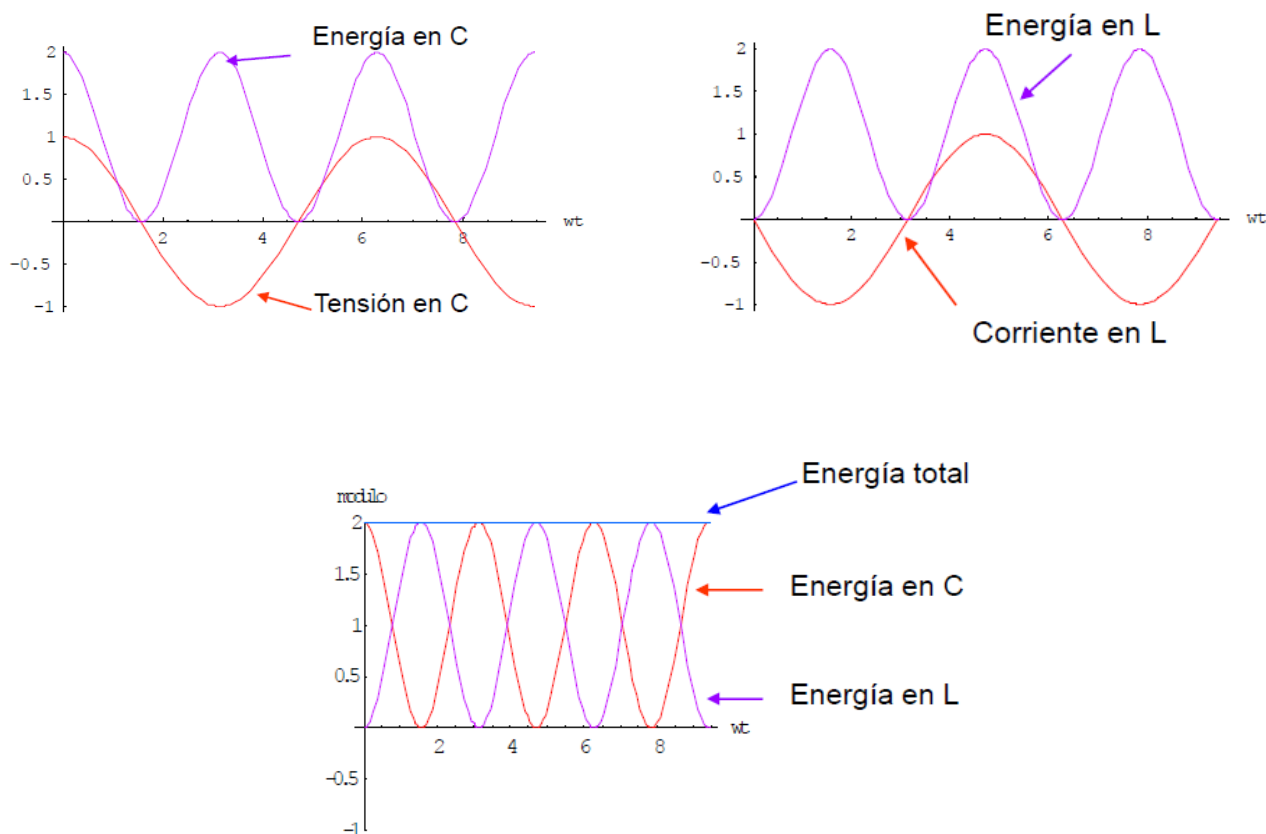
Además, como $U_{c_{m\acute{a}x}} = I_{m\acute{a}x} \frac{1}{\bar{\omega}_0 C} = I_{m\acute{a}x} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$W = W_M + W_E = \frac{1}{2}L I_{m\acute{a}x}^2 \text{sen}^2(\bar{\omega}_0 t) + \frac{1}{2}C I_{m\acute{a}x}^2 \frac{L}{C} \cos^2(\bar{\omega}t) = \frac{1}{2}L I_{m\acute{a}x}^2$$

Entonces

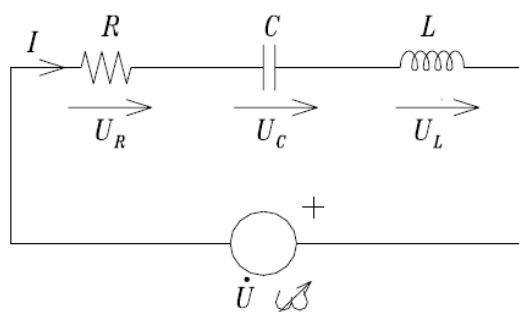
$$W = W_M + W_E = \frac{1}{2}L I_{m\acute{a}x}^2 = \frac{1}{2}C U_{c_{m\acute{a}x}}^2 = \text{constante}$$

En resonancia, la suma de las energías de los campos magnético y eléctrico es constante, lo que significa que la variación de la energía del campo eléctrico es compensada con un aumento de la energía del campo magnético y viceversa; y toda la energía que entrega la fuente de alimentación se transforma en energía térmica disipada en la resistencia.



8.2.4. Tensión en la inductancia

Partiendo del mismo circuito serie en análisis, se puede analizar la tensión de la bobina en función del factor de mérito (análogo para la tensión del capacitor)



$$\dot{U}_L = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \dot{U} \quad (\text{Ec. 40})$$

$$|U_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} |U| = \frac{\omega L I_0}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \quad (\text{Ec. 51})$$

Para obtener el máximo de la tensión en la bobina, haciendo $\frac{dU_L}{d\omega} = 0$, resulta

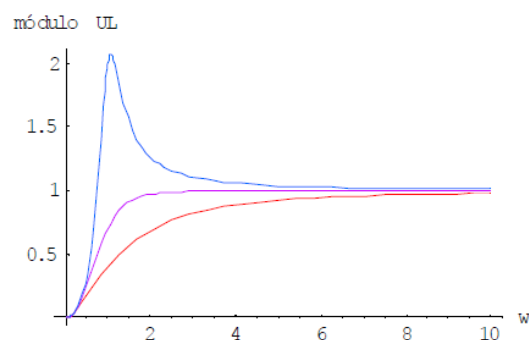
$$\omega = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} \omega_0 \quad (\text{Ec. 62})$$

Se muestra a continuación la gráfica de U_L en función de la frecuencia para 3 valores de R distintos.

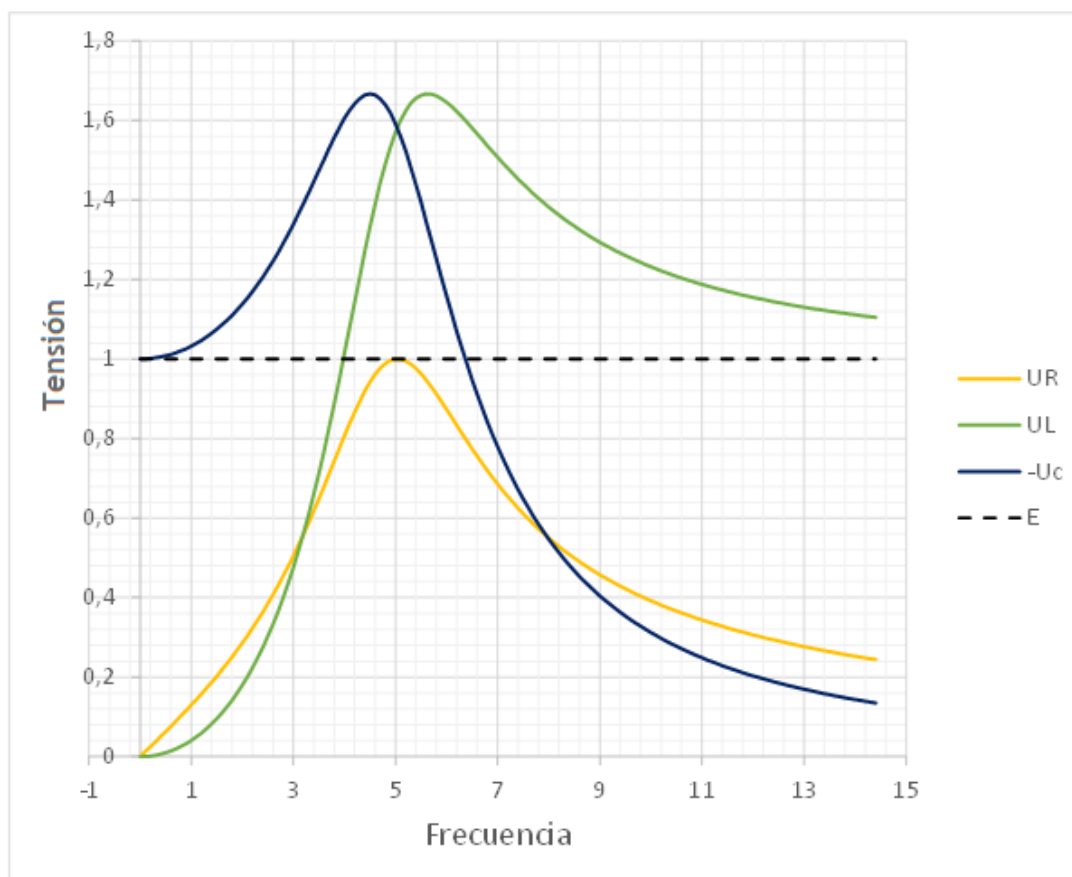
$R = 2,5 \, \Omega$ $Q = 0,4$ — (línea roja)

$R = 0,707 \, \Omega$ $Q = 0,707$ — (línea morada)

$R = 0,5 \, \Omega$ $Q = 2,0$ — (línea azul)



Se puede comparar también las tensiones de los tres elementos y de la fuente en función de la frecuencia, como se muestra a continuación.



8.2.5. Puntos de potencia mitad

Se define el ancho de banda como $AB = \overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}$, siendo

$$\frac{1}{\overline{\omega_1}C} - \overline{\omega_1}L = R \Rightarrow \overline{\omega_1} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad (\text{Ec. 73})$$

$$\overline{\omega_2}L - \frac{1}{\overline{\omega_2}C} = R \Rightarrow \overline{\omega_2} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad (\text{Ec. 84})$$

$$\overline{\omega_0} = \sqrt{\overline{\omega_1} \overline{\omega_2}} \quad (\text{Ec. 95})$$

Además se cumple que,

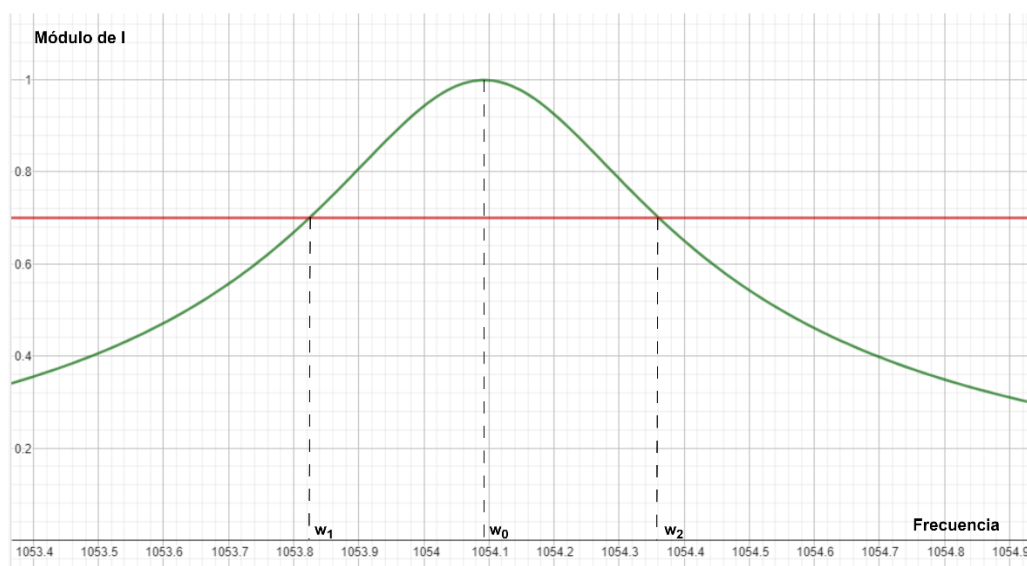
$$Q_0 = \frac{\overline{\omega_0}}{AB}$$

Los puntos de potencia mitad con los que se dan para las frecuencias ω_1 y ω_2 , en los cuales se cumple que el módulo de la corriente es 70.7% el valor de la corriente en resonancia.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Ec. 106})$$

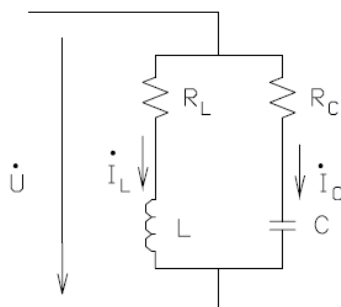
Además, teniendo en cuenta la Ec. 15 se obtiene que la potencia para estos valores de frecuencias es la mitad que en resonancia, por eso son denominados **puntos de potencia mitad**.

$$\frac{P}{P_0} = \frac{I^2 R}{I_0^2 R} = \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{Ec. 117})$$



8.3. Resonancia en paralelo

De manera análoga a lo desarrollado para la resonancia en serie, se analizará el siguiente circuito conformado por una resistencia y una bobina en paralelo con otra resistencia y un capacitor (pudiendo ser, por ejemplo, el modelo de dos elementos no ideales, con resistencias internas)



La admitancia de dicho circuito es:

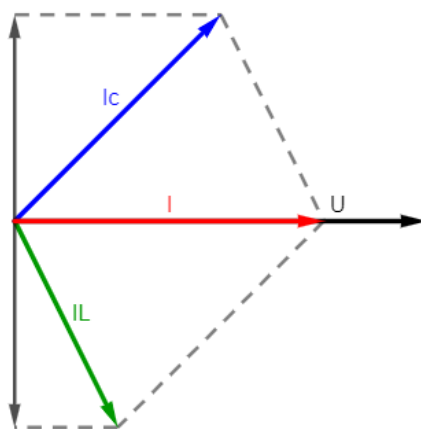
$$Y = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right) \quad (\text{Ec. 128})$$

Por lo que existe un ω tal que susceptancia del circuito se haga nula y el circuito se encuentre en resonancia.

$$\overline{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} \quad (\text{Ec. 139})$$

En la siguiente figura se muestra el diagrama fasorial en resonancia, donde I es la corriente resultante de la suma de ambas ramas en paralelo, cabe destacar que la parte imaginaria de las corrientes de las ramas en paralelo son iguales en modulo y opuestas en angulo, por lo que la resultante está en fase con la tensión (en concordancia con que la susceptancia es nula). En el caso ideal en que $R_C = R_L = 0$, la corriente resultante I sería nula

Analizando la Ec. 19 continuación se enuncian algunos casos particulares:



- Si $R_C = R_L$ entonces $\overline{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- Si ambas resistencias, R_C y R_L , son mayores o menores a $\sqrt{\frac{L}{C}}$ entonces existe $\overline{\omega_0}$
- Si una de las resistencias es menor y la otra es mayor a $\sqrt{\frac{L}{C}}$ entonces no existe $\overline{\omega_0}$

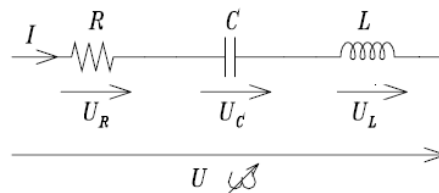
8.4. Curva universal de resonancia

A continuación, se enuncian algunas definiciones necesarias para definir la curva.

- Desintonía relativa: $\delta = \frac{f-f_0}{f_0} = \frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$ (Ec. 20)
- Desintonía fraccional relativa: $a = Q \delta$ (Ec. 21)

La **curva universal de resonancia** es la gráfica del cociente $\frac{Y}{Y_0}$ en función de a , definida de esta manera, independiente de la frecuencia y el valor de la resistencia, es posible aplicarla a cualquier circuito.

Retomando el circuito serie original,



$$\frac{I}{I_0} = \frac{R_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \text{ con } I_0 = \frac{U}{R_0} \text{ (Ec. 22)}$$

Aplicando la Ec.20 en la anterior se obtiene

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R_0}{R + j\left(\frac{\omega_0 LC(\delta+1)^2 - 1}{\omega_0(\delta+1)C}\right)} = \frac{1}{\frac{R}{R_0} + jQ\frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta+1}} \text{ (Ec. 23)}$$

Considerando que para un entorno reducido de $\overline{\omega_0}$, se puede considerar que

$$\frac{R}{R_0} \approx \frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega_0}} = \delta + 1 \text{ (Ec. 24)}$$

Aplicando entonces las Ec.21 y 24 a la Ec.23,

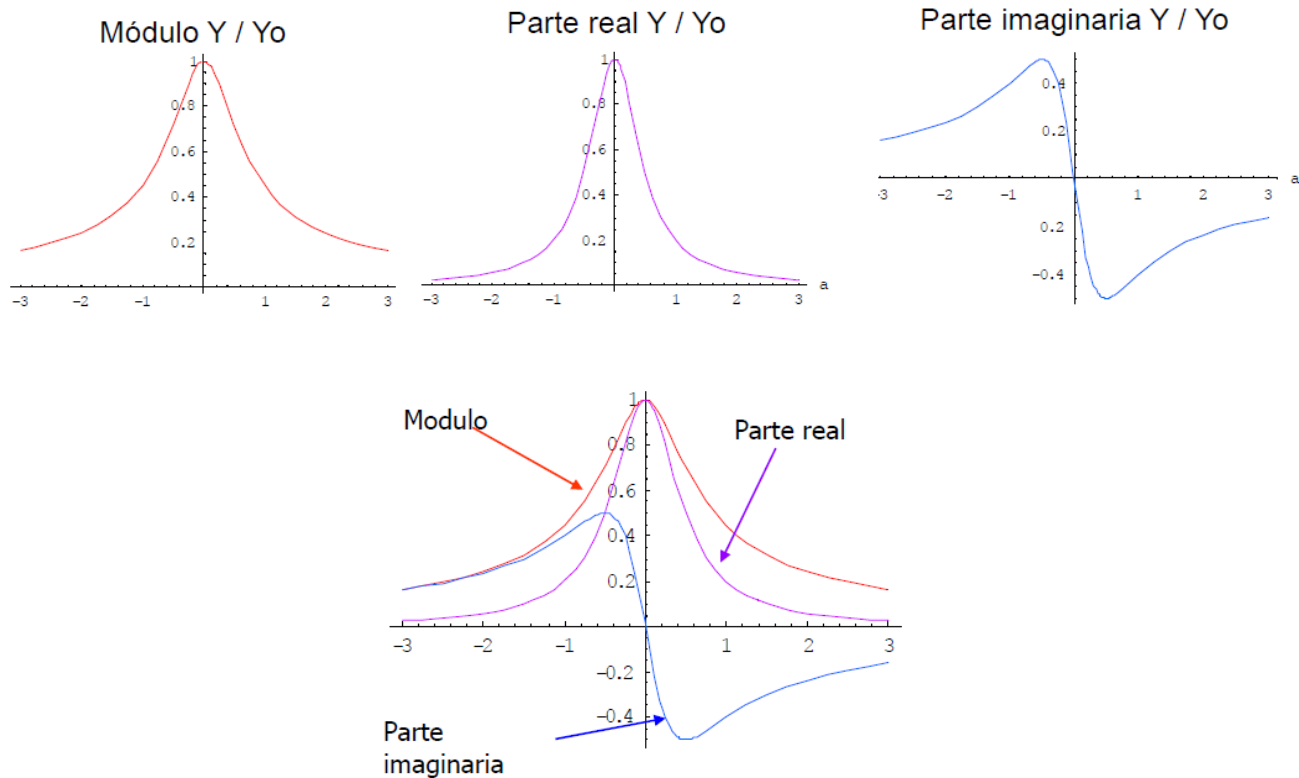
$$\frac{I}{I_0} = \frac{R_0}{\delta+1 + jQ\delta\left(\frac{\delta+2}{\delta+1}\right)} \cong \frac{1}{1+jQ\delta} = \frac{1}{1+j2a} \text{ (Ec. 25)}$$

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{1+2a} \text{ (Ec. 26)}$$

De esta ecuación se obtienen las siguientes tres gráficas

1. Módulo: $\frac{y}{y_0} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}$

2. Parte Real $Re\left(\frac{Y}{Y_0}\right) = \frac{1}{1+4a^2}$
3. Parte Imaginaria $Im\left(\frac{Y}{Y_0}\right) = \frac{-2a}{1+4a^2}$



Se puede relacionar la definición de puntos de potencia mitad con lo presentado en este apartado.

Calculando el máximo y mínimo de la parte imaginaria se obtiene.

$$\frac{d\left(Im\frac{Y}{Y_0}\right)}{da} = \frac{d\left(-\frac{2a}{1+4a^2}\right)}{da} = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

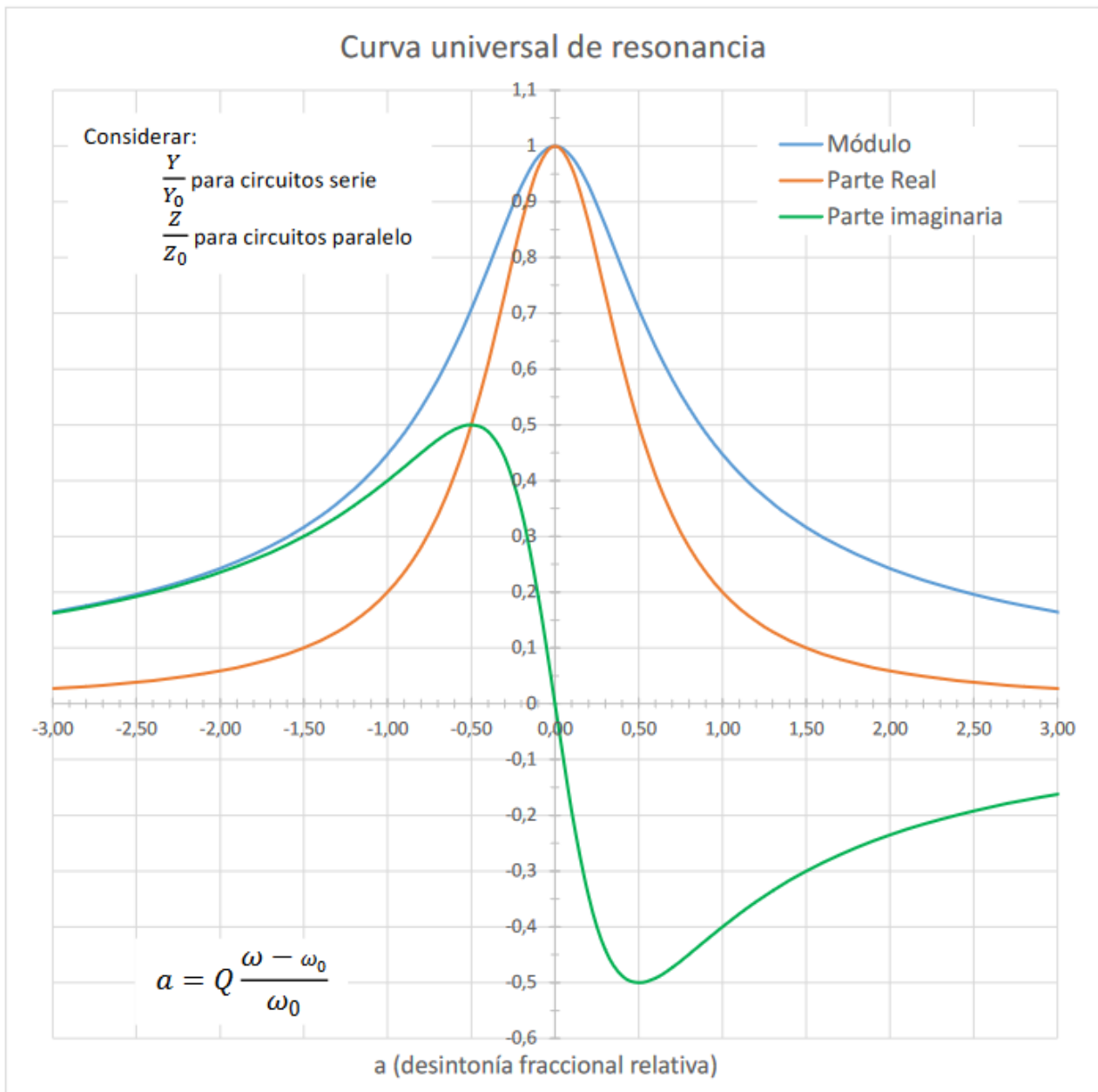
Evaluando este valor en las tres curvas se obtiene

$$Re\left(\frac{Y}{Y_0}\right)\Big|_{a=\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$Im\left(\frac{Y}{Y_0}\right)\Big|_{a=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \quad Im\left(\frac{Y}{Y_0}\right)\Big|_{a=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

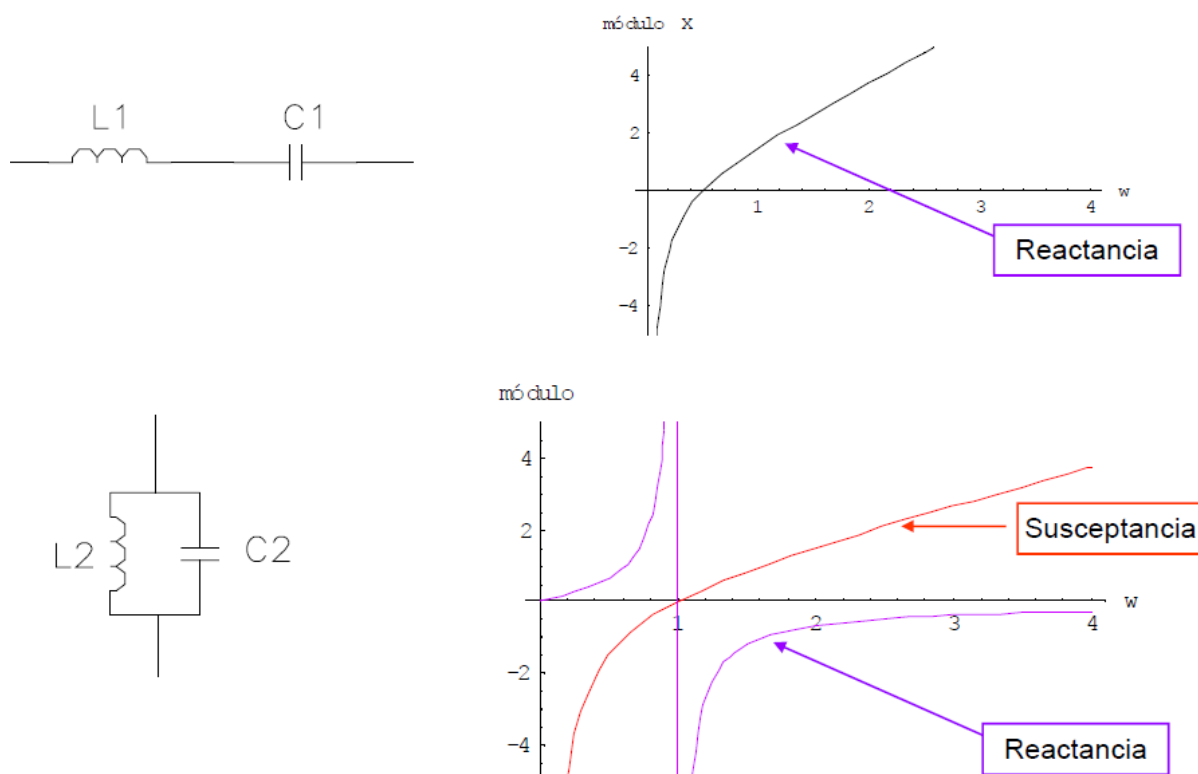
$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)\Big|_{a=\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se concluye entonces que los puntos $a = \pm\frac{1}{2}$ son los puntos de potencia mitad (en los cuales se cumple que el módulo sea igual al 70.7% del módulo en resonancia).

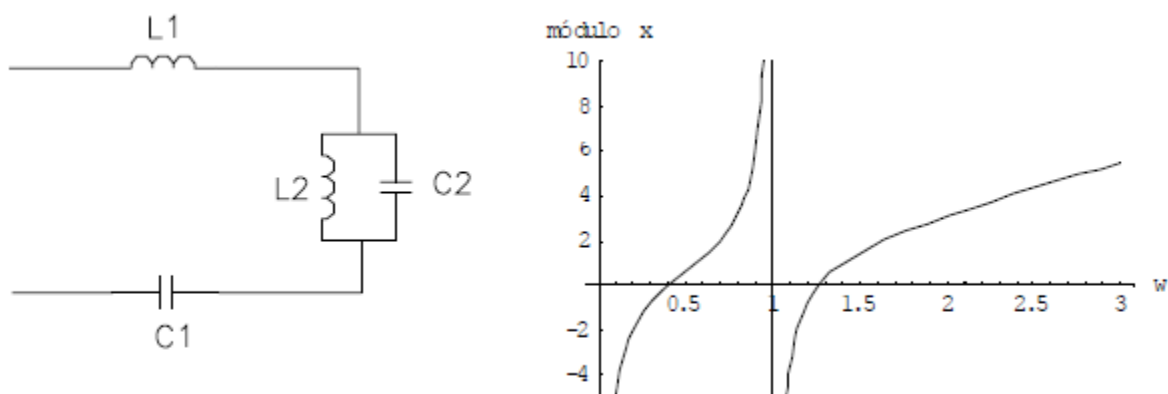


8.5. Resonancia en circuitos no disipativos

Los circuitos no disipativos son los reactivos puros. Para los dos primeros casos presentados a continuación, serie y paralelo, se puede observar que el comportamiento cambia con el aumento de la frecuencia pasando de comportarse como capacitivo a inductivo y por un valor de ω con la cual la reactancia, para el caso serie, o la susceptancia, en el caso paralelo, son nulas. A esta frecuencia se la denomina frecuencia de resonancia.



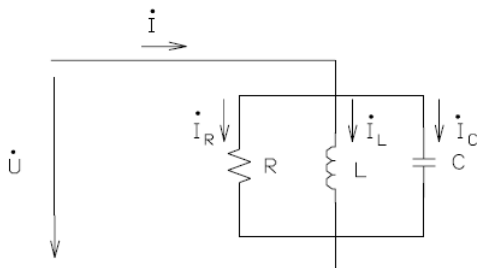
En el último caso presentado se puede observar que el comportamiento tiene distintos comportamientos con el aumento de la frecuencia. Existen tres frecuencias destacables, dos frecuencias a la cual la reactancia es nula (Resonancia serie) y una cuya reactancia tiende a infinito (Resonancia paralelo).



8.6. Ejercicios

Problema 1

Encontrar el valor de la frecuencia de resonancia en el circuito de la figura.



Resolución

Siendo

$$u = U_m \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$i = I_m \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi)$$

Las corrientes que circulan por la resistencia y la susceptancia serán

$$i_R = \frac{1}{R} U_m \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

$$i_b = (b_L - b_C) U_m \text{sen}\left(\bar{\omega}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces

$$p = ui = u(i_R + i_b) = p_u + p_f$$

Siendo

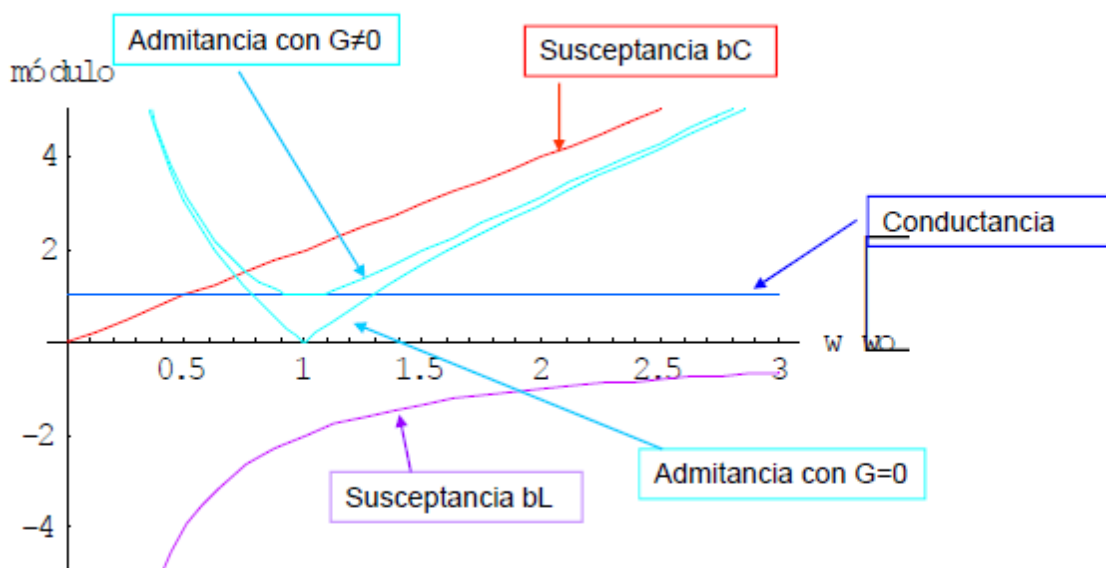
$$p_u = \frac{1}{R} U_m^2 \text{sen}^2(\bar{\omega}t)$$

$$p_f = (b_L - b_C) U_m^2 \text{sen}(\bar{\omega}t) \text{sen}\left(\bar{\omega}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{En resonancia } p_f = 0 \Rightarrow b_L = b_C \Rightarrow \bar{\omega}_0 C = \frac{1}{\bar{\omega}_0 L}$$

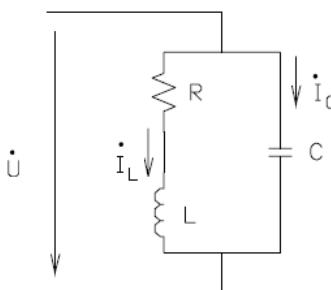
Por lo que la frecuencia de resonancia es

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Problema 2

Encontrar el valor de la frecuencia de resonancia en el circuito de la figura



Partiendo del calculo de la admitancia

$$Y = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$

En resonancia la susceptacia es nula por lo que la frecuencia de resonancia es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - CR_L^2}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR_L^2}{L}}$$

Problema 3

Determinar el valor de la capacidad que debe poseer un condensador para que, conectado en serie con una bobina ideal de $60 \mu\text{H}$, conforme un circuito resonante a una frecuencia de 1250 Hz .

Resolución

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = 0,27 \text{ mF} = 270 \mu\text{F}$$

Problema 4

En un circuito serie que consta de una resistencia, una bobina y un condensador ideales, se conecta una fuente de voltaje senoidal de amplitud constante y frecuencia variable. La frecuencia se aumenta lentamente de 20 Hz hasta por sobre 60 Hz de tal modo que el transitorio producido es despreciable. Se conecta un vatímetro y un amperímetro obteniéndose los siguientes datos: cuando la frecuencia alcanza el valor de 25 Hz el vatímetro indica $314,4 \text{ W}$, al aumentar la frecuencia las lecturas del vatímetro y del amperímetro aumentan, siendo a 60 Hz : 35 A y 3851 W . Cualquier aumento posterior de frecuencia reduce la lectura en el vatímetro.

- ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito?
- ¿Cuál es la amplitud del voltaje aplicado?
- ¿Cuáles son los parámetros del circuito?

Resolución

a) Dado que la potencia que mide el vatímetro se calcula como $P = I^2 R$, la medición será máxima cuando I lo sea. Esto ocurrirá cuando la impedancia del circuito serie sea mínima, o sea, cuando la reactancia inductiva se anule completamente con la capacitiva, estando el circuito en resonancia.

Se concluye, entonces, que la frecuencia de resonancia es de 60 Hz .

b) La potencia disipada en resonancia se puede calcular como:

$$P = I^2 \times R \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{3851 \text{ W}}{(35 \text{ A})^2} = 3,144 \Omega \quad \text{o también como:} \quad P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow U = \sqrt{P \times R} = 110 \text{ V}$$

c) La corriente que circula por el circuito a una frecuencia de 25 Hz se puede calcular como:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{314,4W}{3,144\Omega}} = 10A$$

La impedancia del circuito a 25Hz se expresa:

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{110V}{10A} = 11\Omega = \sqrt{9,88 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Entonces, despejando y teniendo en cuenta que la frecuencia es de 25 Hz:

$$\left(\frac{1}{157C} - 157L\right) = 10,54\Omega \quad (1)$$

La otra ecuación que vincula los valores de L y C se obtiene para la frecuencia de resonancia:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 60Hz \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de 2x2 conformado por las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$L = 14,1mH$$

$$C = 500\mu F$$

Problema 5

Un circuito RLC serie con $Q_0 = 250$ está en resonancia a 1,5 MHz. Encontrar las frecuencias a las que la potencia activa del circuito resonante es un décimo de la potencia en resonancia, permaneciendo el voltaje de entrada constante.

$$P_{10} = \frac{P_0}{10}$$

$$I_{10}^2 \times R = \frac{1}{10} I_0^2 \times R \Rightarrow \frac{I_{10}}{I_0} = \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 0,316$$

Además se puede escribir:

$$I_{10} = Y_{10} \times V$$

$$I_0 = Y_0 \times V$$

Como el voltaje de entrada se mantiene constante, efectuando el cociente entre (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{I_{10}}{I_0} = \frac{Y_{10}}{Y_0} = 0,316$$

Dado que el factor de mérito $Q_0 = 250$ (mayor a 20) se puede emplear la curva universal de resonancia para buscar el valor de $\frac{Y_{10}}{Y_0} = 0,316$ y así determinar las frecuencias para las cuales la potencia es un décimo de la de resonancia:

$$a = Q_0 \times \delta = Q_0 \times \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = Q_0 \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) = Q_0 \times \left(\frac{f}{f_0} - 1 \right) = \pm 1,5$$

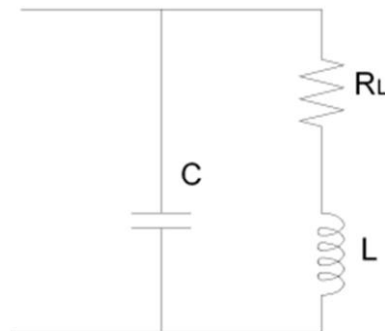
y sabiendo que $Q_0 = 250$ y que la frecuencia de resonancia es de 1,5 MHz, se obtienen los dos valores:

$$f_1 = 1,509 \text{ MHz}$$

$$f_2 = 1,491 \text{ MHz}$$

Problema 6

Calcular el factor de mérito de la bobina que al disminuir la potencia a un 40% de la resonancia, la frecuencia varíe solo un 3%. Consideramos que la resistencia vista permanece constante ante la variación de la frecuencia.



Resolución

Recordemos la expresión que vincula el factor de mérito con la variación de los parámetros del circuito ante la frecuencia

$$Q_0 = \frac{a}{\delta}$$

Donde

a : Puede obtenerse la curva universal de resonancia conociendo $\frac{Z}{Z_0}$ o $\frac{Re(Z)}{Re(Z_0)}$

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

Suponemos que el circuito se alimenta con una fuente de corriente ideal

$$\frac{P}{P_0} = \frac{I^2 \operatorname{Re}(Z)}{I^2 \operatorname{Re}(Z_0)} = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{\operatorname{Re}(Z_0)} = 0.4$$

Por lo tanto, utilizando la curva universal de resonancia

$$a = 0.6$$

Por otro lado

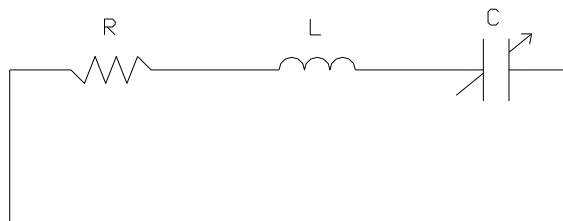
$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 0.03$$

Finalmente

$$Q_0 = \frac{a}{\delta} = \frac{0.6}{0.03} = 20$$

Problema 7

En el circuito serie de la figura es:



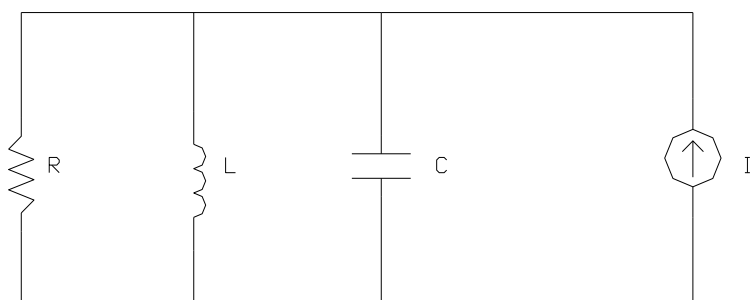
$$R = 5,1\Omega \quad L = 65\mu\text{H} \quad C = 1,56 \text{ nF}$$

Calcular:

- Frecuencia de resonancia
- Factor de mérito en resonancia
- Impedancia del circuito a una frecuencia de 1% por encima de la de resonancia.

Problema 8

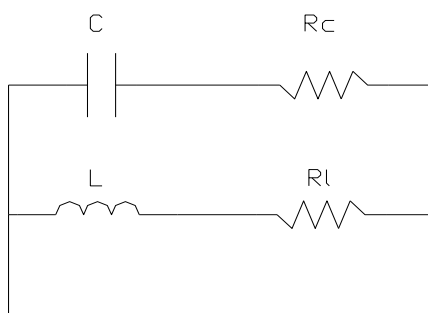
Un circuito paralelo de tres ramas RLC con $Q_0 = 250$ está en resonancia a 1,5 Mhz. Encontrar las frecuencias a las que la potencia activa es un décimo de la potencia en resonancia, permaneciendo la corriente de entrada constante.



Problema 9

En el circuito de la figura determinar:

- Frecuencia e impedancia de resonancia supuesta ω variable.
- El mínimo valor que puede tomar R_C para mantener la resonancia. Se suponen constantes a R_L , L , C .

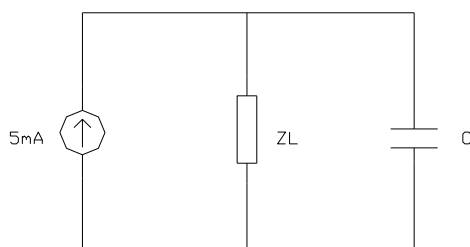


$$R_L = 208,8 \, \Omega ; R_C = 110 \, \Omega ; C = 2 \mu F ; L = 20 \text{mH}$$

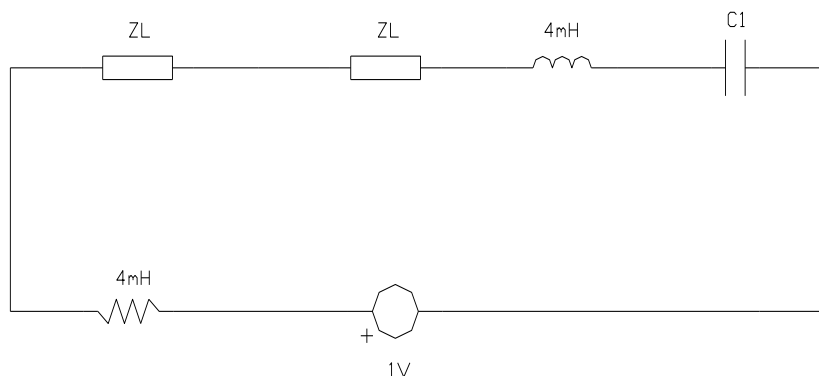
Problema 10

Se efectúan los siguientes ensayos:

- Una bobina no ideal y un condensador ideal se conectan en paralelo y se los somete a la alimentación de una fuente de corriente de 5mA eficaces y frecuencia variable, obteniéndose para $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$: $U_{\max} = 10\text{V}$ con $Q_0 = 200$.



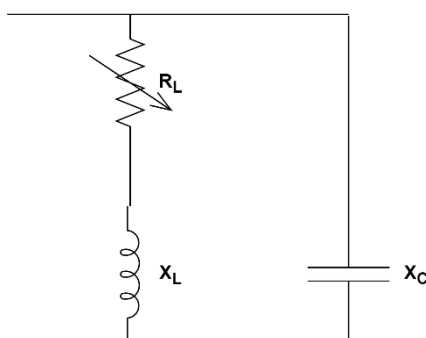
- II. Se conectan dos bobinas iguales a la anterior en el circuito que sigue, encontrándose que a la frecuencia de resonancia $Q = 100$.



Determinar C_1

Problema 11

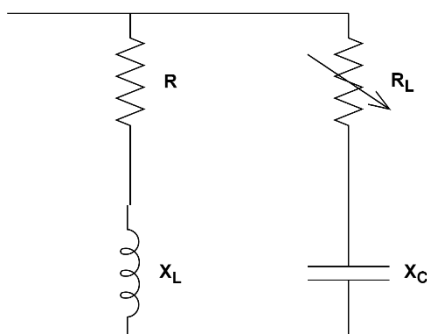
Hallar, si existe, R_L para que el circuito tenga resonancia. Obtener dicha frecuencia de resonancia.



Donde: $X_L = 10\Omega$ $X_C = 5\Omega$

Problema 12

Hallar, si existe, R_L para que el circuito tenga resonancia. Obtener dicha frecuencia de resonancia.

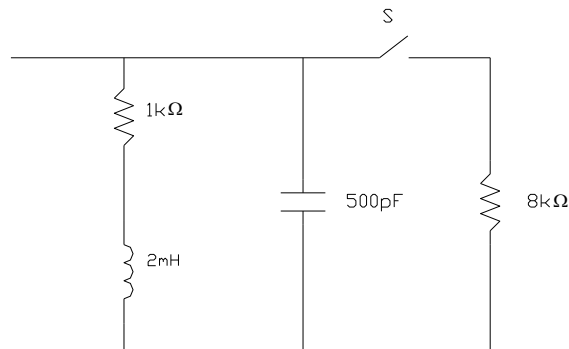


Donde: $X_L = 10\Omega$ $X_C = 2\Omega$ $R = 10\Omega$

Si se aplica al circuito una tensión $U = 100V$, obtener las corrientes en resonancia y en $\frac{\omega_0}{10}$

Problema 13

En el sistema de la figura:



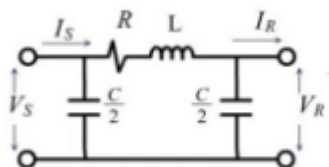
- Determinar la frecuencia de resonancia a S abierto y la correspondiente impedancia de entrada al sistema.
- Al cerrar S , ¿subsiste la anterior frecuencia de resonancia? ¿Existe alguna nueva? Justificar
- Calcular la o las nuevas impedancias de entrada al sistema.

8.7. Caso de aplicación – Resonancia en la red de transmisión

Una red de transporte de energía eléctrica está constituida por elementos necesarios para llevar la energía eléctrica generada en las centrales eléctricas hasta los puntos de consumo a través de grandes distancias. Uno de los componentes principales son las líneas de transmisión.

Una línea de transmisión de energía eléctrica de alta tensión es básicamente el medio físico mediante el cual se realiza la transmisión de la energía eléctrica. Está constituida tanto por el elemento conductor, usualmente cables de acero, cobre o aluminio, como por sus elementos de soporte, las torres de alta tensión.

Como se verá en materias posteriores, existen varios niveles de tensión para transmitir energía. Además, hay varios tipos de modelados de líneas, en este caso vamos a basarnos en el siguiente modelado de línea, cuyo esquema se muestra a continuación. En el mismo se muestra que una línea está conformada por una resistencia, parámetro relacionado con el material del cual esté compuesto el conductor. Una reactancia inductiva, relacionada con la forma del conductor. Por último, dos capacitores que están relacionados con el aislante que posee el cable.



Cuando la energía eléctrica se genera en una central, debe ser transportada a través de líneas de transmisión largas para llegar a los centros de consumo. Estas líneas de transmisión, por lo general, están compuestas por

cables y otros componentes eléctricos. En el camino, pueden surgir diversos problemas, uno de los cuales es la resonancia.

La resonancia ocurre cuando la frecuencia natural de un sistema coincide con la frecuencia de las señales eléctricas que están siendo transportadas. En otras palabras, es como si una oscilación en el sistema se "sintonizara" con la frecuencia de la electricidad que fluye a través de las líneas. Esto puede llevar a oscilaciones no deseadas y problemas graves en el sistema eléctrico, dado que tanto la tensión como la corriente aumentarían su módulo conforme se dé la resonancia. Esta condición tiene posibilidad de ocurrencia al aumentar significativamente la capacitancia de la línea, por ejemplo, con compensación.

Dado que la transmisión de potencia está limitada por la impedancia de la línea que comprende tanto a la resistencia como a la reactancia, los capacitores serie han sido ampliamente utilizados como medio muy eficaz, para aumentar la capacidad de transmisión (disminuyendo las pérdidas y la caída de tensión en la línea), además de mejorar la estabilidad de los sistemas de potencia. Esto se debe en parte al hecho de compensar la reactancia de las líneas. Sin embargo, la compensación reactiva serie en las líneas de transmisión de gran longitud podrían generar problemas de resonancia.

La interacción entre la compensación y el entorno del sistema se produce de varias maneras. El capacitor serie, junto a la impedancia de la línea conforman un circuito resonante, que puede interactuar con otros circuitos resonantes o sistemas oscilantes.

Estas líneas con la combinación LC serie, tiene una frecuencia natural ω_n la cual está definida por la ecuación presentada anteriormente en el apunte

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Los capacitores serie son aplicados para reducir la reactancia inductiva en las líneas de transmisión. Los beneficios de aplicar capacitores serie en una línea de transmisión incluye mejorar los márgenes de estabilidad, habilidad de ajustar los niveles de carga de la línea, reducir las pérdidas de transmisión, y reducir la caída del voltaje en el sistema durante disturbios severos.

En resumen, la resonancia es un fenómeno importante en sistemas eléctricos de potencia, y su comprensión es esencial para mantener la estabilidad y la confiabilidad en la transmisión de energía eléctrica.

9. FILTROS

9.1. Introducción

9.2. Función Transferencia

La función transferencia (FT) es una definición matemática que facilita el estudio de cualquier sistema físico, ya sea mecánico, térmico, fluido dinámico o en nuestro caso eléctrico. La particularidad de esta función es que permite estudiar el vínculo que existe entre el estímulo y la respuesta de un determinado sistema. Además permite utilizar el principio de superposición, si el sistema es lineal, para analizar diferentes estímulos sobre un mismo sistema.

En concreto la función transferencia se define como la relación entre la entrada y la salida.

$$\text{Función Transferencia} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}}$$

De manera esquemática se puede presentar mediante un diagrama de bloques.

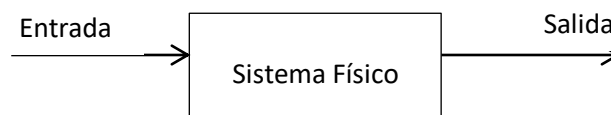


Figura 9-1 Diagrama de bloques de un sistema físico

La importancia de la función transferencia en estudio de filtros es que permite relacionar fácilmente las señales de entrada y salida del mismo. Generalmente esas señales se representan por sus tensiones, aunque también pueden vincularse las corrientes o porque no la potencia. De aquí en más nos referiremos directamente a las tensiones de las señales intervinientes.

Según su definición la magnitud de la FT es adimensional y sus valores se encuentran en la mayoría de los casos entre cero y uno. Suponiendo que la señal de entrada puede modificar su frecuencia de oscilación. El análisis de la FT a lo largo de diferentes frecuencias brinda una gran herramienta a la hora de evaluar las características más relevantes de un filtro, como la banda de paso o atenuación, la frecuencia de corte, etc. Parámetros que serán definidos en su momento.

De acuerdo a lo anterior podemos decir lo siguiente, para el caso más general.

$$H = \frac{\text{Tensión de Salida}}{\text{Tensión de Entrada}} = \frac{v_o}{v_i}$$

Veamos un ejemplo del cálculo de la FT para un circuito eléctrico.

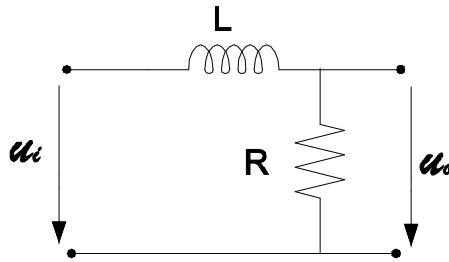


Figura 9-2: Circuito ejemplo para cálculo de FT

De acuerdo a lo definido anteriormente procedemos al cálculo de la función transferencia poniendo a la salida en función de la entrada. Lo hacemos aplicando un divisor de tensión.

$$v_i = V_i \sin(\omega t + \alpha_i)$$

$$v_o = V_o \sin(\omega t + \alpha_o)$$

$$v_o = v_i * \frac{R/L}{j\omega + R/L}$$

Por lo tanto:

$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R/L}{j\omega + R/L}$$

Considerando aquí, como en el resto del apunte, que los valores de R, L y C son independientes de la frecuencia, la FT depende de $(j\omega)$ por lo que al variar la frecuencia de la tensión de entrada se modifica el valor de la salida tanto en magnitud como en desfase (temporal o angular) respecto de la entrada. Esto se debe a que la FT es un número complejo adimensional, cuyo modulo y fase dependen de la frecuencia.

Podemos entonces calcular el modulo y la fase de la FT anterior.

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

$$\theta(j\omega) = \arctg\left(\frac{-\omega * L^2}{R^2}\right)$$

Al módulo de la función transferencia se lo suele llamar ganancia y se lo grafica en función de frecuencia junto al desfase angular en lo que se denomina diagrama de ganancia y de fase respectivamente.

Para ser más claros en la evolución de los parámetros calculados, mostraremos sus respectivos diagramas. Los valores asignados a R, L y C pueden ser cualquiera, sin embargo se han seleccionado los siguientes:

$$R = 10\Omega; L = 5H$$

$|H(j\omega)|$

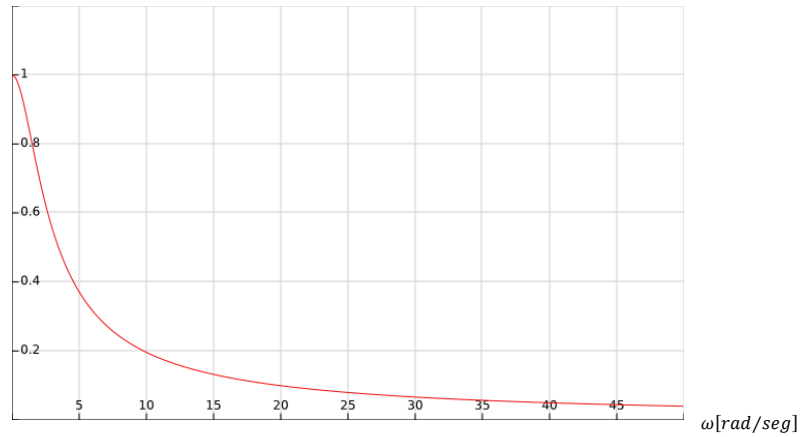


Figura 9-3: Diagrama de ganancia de la FT ejemplo

$\theta [^\circ]$

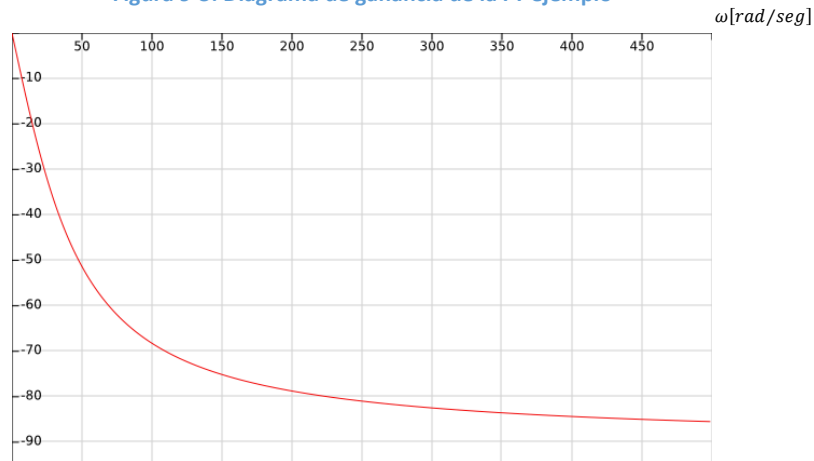


Figura 9-4: Diagrama de fase de la FT ejemplo

Observando el comportamiento del módulo de FT en estudio podemos decir que para frecuencias cercanas a cero la salida se comporta igual que la entra. Luego medida que la frecuencia aumenta, la salida decae rápidamente acercando progresivamente a cero cuando la frecuencia tiende a infinito.

La fase por su parte presenta valores muy pequeños (negativos) para un entorno cercano a frecuencia igual a cero. Dichos valores se vuelven más negativos cuando la frecuencia aumenta, acercándose al valor -90° cuando la frecuencia tiende a infinito.

Lo desarrollado hasta aquí es ejemplificativo ya que por ejemplo el diagrama de fase no será utilizado durante nuestro estudio de filtros. El impacto de la fase toma importancia en la distorsión de una señal lo cual es determinante en el estudio del comportamiento de circuitos de medición o sistemas de control. Temas que serán abordados más adelante en la carrera. A modo de ejemplo podemos observar la evolución de la fase de FT ejemplo. Para frecuencias bajas la fase se encuentra en valores cercanos a cero lo que indica que el circuito es predominantemente resistivo. Luego la fase disminuye, por ende la bobina comienza a tener impacto dentro del sistema. Finalmente el ángulo tiende a -90° , lo cual permite concluir que la inductancia predomina casi absolutamente sobre la resistencia para frecuencias elevadas. Esto nos permite apreciar como a medida que la frecuencia de la tensión de entrada se modifica también lo hace la impedancia equivalente del circuito, por ende su comportamiento.

El diagrama de ganancia por su parte será de ayuda a la hora de mostrar cómo se comporta un filtro de manera cuantitativa en un determinado rango de frecuencia. Sin embargo nos focalizaremos en darle a nuestro análisis un carácter cualitativo y conceptual desde la teoría de circuitos. En materias posteriores se incorporaran las bases matemáticas necesarias (Transformada de Laplace) para un abordaje cuantitativo integral de este tema.

9.3. Conceptos Generales de Filtros

Los filtros eléctricos tienen por objetivo eliminar o suprimir señales (tensiones o corrientes) cuyas frecuencias de oscilación se encuentran dentro de un determinado rango. Eliminar significa evitar que las señales atraviesen el filtro y lleguen a la salida. Esto quiere decir que las señales en la entrada del circuito podrán tener diferentes frecuencias, pero solo alcanzarán la salida aquellas cuya frecuencia sea la deseada por el diseñador, sin embargo, también existen acciones de filtrado no directamente intencionales, que se producen de manera natural por las características del equipamiento y aun cuando no fueron diseñados específicamente para tal fin.

Vemos en la siguiente figura un esquema de un filtro con sus señales de entrada y salida.



Figura 9-5: Diagrama esquemático de un filtro con su señales de entrada y salida.

Recordemos que las señales en nuestro análisis serán representadas por tensiones.

Existen dos grandes maneras de clasificar los filtros, una de ellas es en función de los elementos constructivos.

Filtros pasivos: estos filtros están compuestos por elementos pasivos (resistencias, bobinas y capacitores). Los elementos que componen el filtro modifican su impedancia con la frecuencia, logrando que en su conjunto el filtro presente diferentes valores de impedancia ante diferentes frecuencias. La variación de la impedancia del filtro permite que solo algunas señales puedan atravesarlo y llegar a la salida. En general la máxima ganancia que logran es igual a la unidad o menor si se coloca una resistencia en serie con la entrada. Existen sin embargo los filtros resonantes que pueden amplificar la entrada ($|H(j\omega)| > 1$) en rangos acotados de frecuencia y de manera muy alineal.

Filtros activos: estos filtros están contruidos con amplificadores operacionales principalmente y generan señales en contra fase a las señales cuya frecuencia se desea eliminar. Estos dispositivos tienen la capacidad de eliminar rangos de frecuencia de manera más precisa similar a los filtros ideales. Además mediante un filtro activo es posible amplificar la señal de salida en rangos más amplios de frecuencia.

Para describir el funcionamiento de un filtro es adecuado observar su función transferencia. Esta será máxima para el rango de frecuencia en el que las señales de entrada alcanzan la salida, mientras que será mínima para

las frecuencias dentro del cual el filtro rechaza la entrada. Dichos intervalos se definen comúnmente como **banda de paso** y **banda eliminada** respectivamente.

Lo anterior puede ser ejemplificado con la siguiente gráfica.

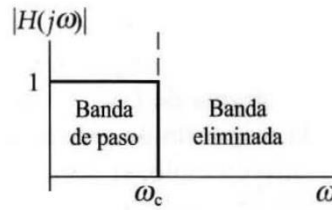


Figura 9-6: Rangos de frecuencia en un filtro.

La función transferencia ejemplificada en la Figura 9-6, presenta un valor igual a 1 en la banda de paso y cero en la banda eliminada. Esto significa que el filtro es **ideal** o sea que elimina perfectamente las señales cuya frecuencia es mayor a ω_c mientras que para las de menor frecuencia no se registra atenuación. Lo que significa que la salida es exactamente igual a la entrada en la banda de paso. Debe decirse que no existe en la realidad un filtro que se comporte de manera ideal. En consecuencia un filtro real registra una atenuación leve en la banda de paso y una atenuación mucho mayor en la banda eliminada. Además no es posible apreciar un cambio brusco entre ambas zonas de trabajo, en cambio la transición desde una banda a otra será paulatina. Cuanto más complejo el filtro, más se asemeja su funcionamiento al de un dispositivo ideal.

Lo anterior puede observarse en la siguiente figura, donde se ha graficado la función transferencia de un filtro que se comporta de manera similar al de la Figura 9-6. El cual se puede construir con filtros de diferente orden.

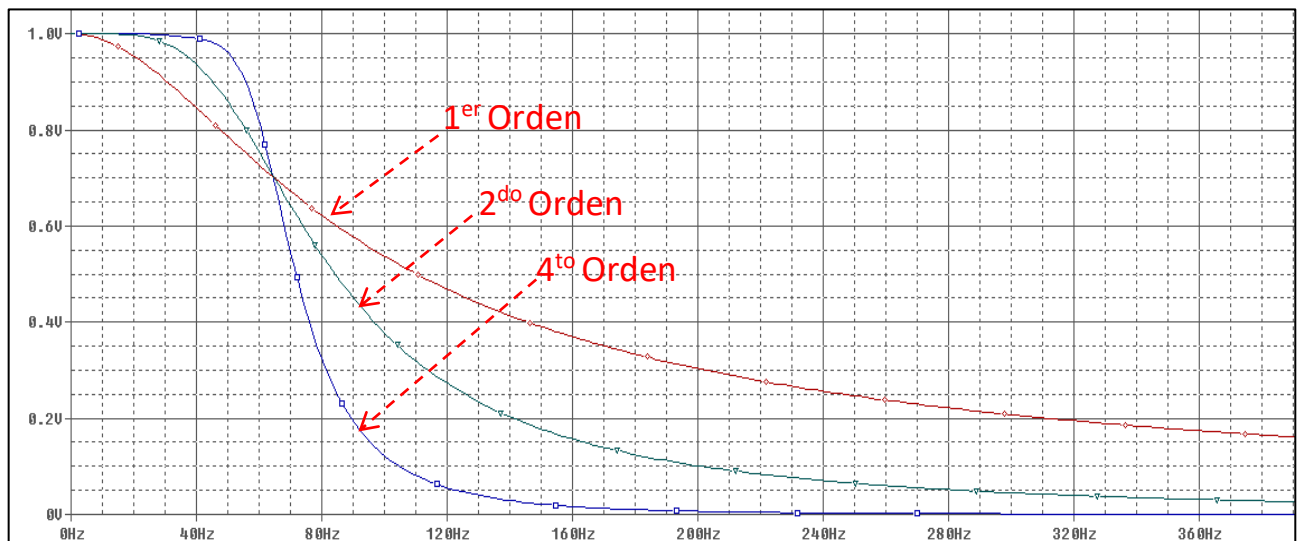


Figura 9-7: Comparación módulo de FT entre filtros de diferente orden.

Queda claro al observar la Figura 9-7 que al aumentar el **orden** del filtro, su comportamiento se asemeja más al de un filtro ideal. El **orden** de un filtro hace referencia a la cantidad de almacenadores de energía (bobinas y capacitores) que lo constituyen. En nuestro estudio nos concentraremos solo en los filtros de 1^{er} y 2^{do} orden.

Esto se debe a que los dispositivos de orden superior son más complejos de analizar y diseñar, por lo que se pierde el carácter intuitivo que se le pretende imprimir a nuestro análisis.

La figura siguiente contiene la evolución de la fase de la función transferencia de los filtros analizados. En ésta puede observarse que el desfase angular entre la tensión de entrada tiende a un valor que es proporcional al orden del filtro. Concretamente $-90^\circ \times \text{Orden}$.

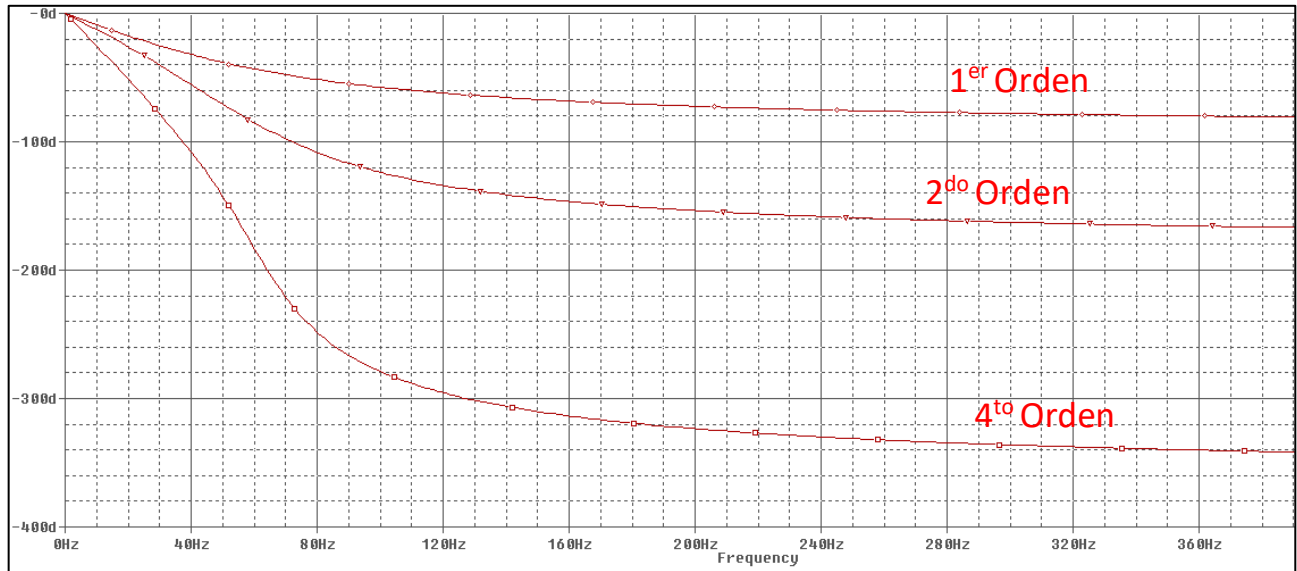


Figura 9-8: Comparación fase de FT entre filtros de diferente orden.

9.3.1. Frecuencia de Corte

Al definir las bandas de paso y eliminada se hizo referencia a un valor de frecuencia ω_c . Valor para el cual el filtro modificaba su comportamiento. A este valor de frecuencia se lo denomina **frecuencia de corte** y como ya se dijo separa las bandas o rangos de frecuencia de trabajo.

La frecuencia de corte es fácilmente distinguible en un filtro ideal, sin embargo en filtros reales esto no es tan claro, como puede observarse en la Figura 9-7. Se define entonces a la frecuencia de corte de la siguiente manera.

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}$$

Lo anterior significa que en la frecuencia ω_c la ganancia del filtro será igual al 70.7% de la ganancia máxima. Considerando que la mayoría de los filtros que analizaremos tendrán una ganancia máxima igual a la **unidad**, en la frecuencia de corte el valor absoluto de las FT será 0.707.

El valor utilizado para definir la frecuencia de corte puede resultar arbitrario. Sin embargo se puede demostrar (así lo haremos) que la potencia transferida a la salida cuando la frecuencia es igual a la de corte es igual a la mitad de la potencia máxima disponible.

Pensemos que si la alimentación de nuestro filtro es de tipo senoidal también lo será la salida. Por lo tanto podemos definir la potencia en bornes de la salida de nuestro filtro, suponiendo que este tiene conectado una carga resistiva.

$$P = \frac{U_o^2}{R}$$

Donde U_o es el valor eficaz de la tensión de salida, mientras que R es el valor de la carga.

Utilizando las expresiones ya presentadas podemos poner a la tensión de salida en función de la tensión de entrada a través del módulo de la función transferencia.

$$P = \frac{(|H(j\omega)|U_i)^2}{R}$$

Suponiendo constante la magnitud de la tensión de entrada, el valor máximo de la potencia disponible en la salida se presenta para el valor máximo del módulo de la función transferencia.

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{(H_{m\acute{a}x}U_i)^2}{R}$$

Aplicando la definición de frecuencia de corte podemos calcular la potencia en la salida para dicho valor de frecuencia.

$$P(j\omega_c) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}H_{m\acute{a}x}U_i\right)^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{(H_{m\acute{a}x}U_i)^2}{R}$$

Lo que demuestra que la potencia disponible en la salida para la frecuencia de corte es igual a la mitad de la potencia máxima registrada.

$$P(j\omega_c) = \frac{1}{2} P_{m\acute{a}x}$$

Por la definición anterior a la frecuencia de corte se le suele llamar también frecuencia de potencia mitad.

Para dar un ejemplo de este parámetro característico de un filtro, repetimos la gráfica del filtro pasa bajo, mostrando que todos los filtros más allá de su construcción, han sido diseñados con la misma frecuencia de corte. Por lo tanto en dicha frecuencia la ganancia alcanza el valor 0.707.

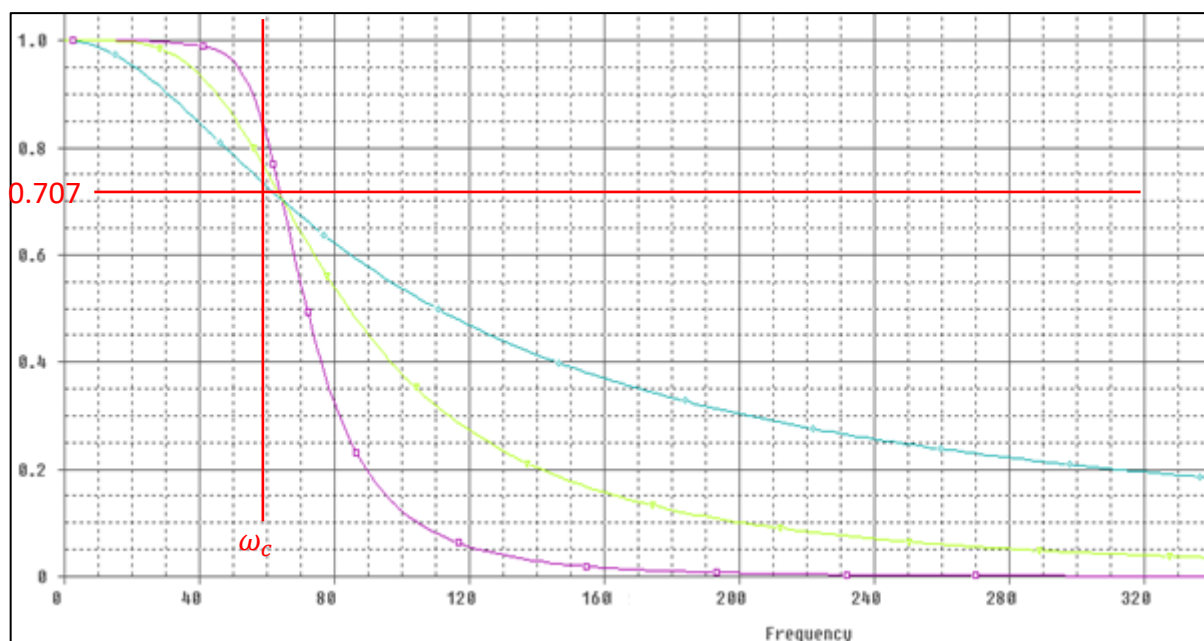


Figura 9-9: Frecuencia de corte para filtros de diferente orden.

9.3.2. Tipos de Filtros

En las explicaciones y definiciones realizadas hasta aquí hemos utilizado como ejemplo al filtro pasa bajo, sin embargo existen otros tres tipos de filtros cuyos parámetros son similares, pero su funcionamiento es diferente. Los tipos de filtros se diferencian por la cantidad y ubicación de la banda de paso. La que se describe a continuación es la segunda forma de clasificación.

Filtro Pasa Bajo

Este filtro deja pasar solo las frecuencias bajas. Se entiende por frecuencias bajas a aquellas que son menores a la frecuencia corte. Si bien ya se ha trabajado con este filtro, se presenta la respuesta en frecuencia de su función transferencia.

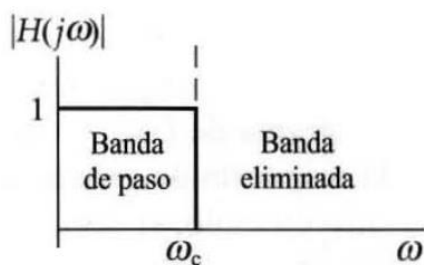


Figura 9-10: Filtro pasa bajo ideal.

Filtro Pasa Alto

De manera opuesta al filtro anterior este permite el paso solo de las frecuencias altas, es decir las frecuencias mayores a la frecuencia de corte. Se presenta a continuación, la característica de su FT en un filtro de tipo ideal.

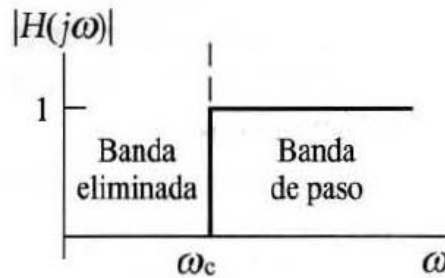


Figura 9-11: Filtro pasa alto ideal.

Filtro Pasa Banda

En este caso la banda de paso se encuentra entre dos bandas eliminadas. Cada una de las bandas de eliminación se encuentra en las frecuencias bajas y altas, mientras que la banda de paso se encuentra en las frecuencias medias. Para ser más exactos, este filtro cuenta con dos frecuencias de corte, por lo que la banda de paso corresponde al rango de frecuencia entre los valores de corte. El siguiente es un esquema de su comportamiento ideal.

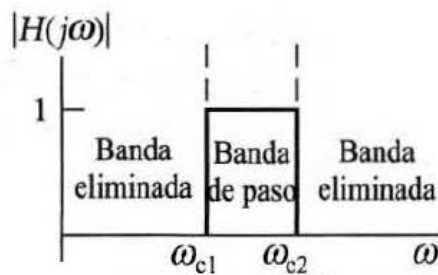


Figura 9-12: Filtro pasa banda ideal.

Filtro Banda Eliminada

Como se vio que el filtro pasa alto y pasa bajo presentan características de funcionamiento opuestas, lo mismo ocurre con los filtro pasa banda y banda eliminada. En el último caso el filtro permite eliminar frecuencias dentro de un rango, que se encuentra entre las frecuencias de corte. Por lo tanto la salida contendrá a las frecuencias de valor nulo e "infinito", cuestión que no ocurría en el filtro pasa banda.

Se concluye esta etapa con la respuesta de este filtro.

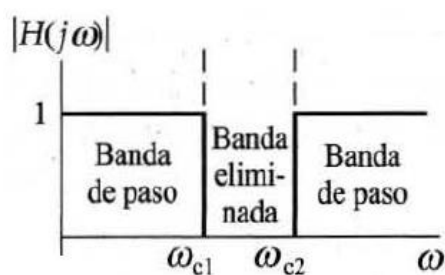


Figura 9-13: Filtro banda eliminada ideal.

9.3.3. Respuesta en Frecuencia de Bobinas y Capacitores

Dado que la composición de los filtros que estudiaremos en detalle, se realiza mediante bobinas y capacitores y que además el comportamiento de cada filtro depende íntimamente de la respuesta en frecuencia de estos elementos. Nos proponemos recordar la dependencia de la reactancia con la frecuencia, para luego poder interpretar y diseñar los filtros más eficientemente.

Bobina

Cómo ya se sabe la reactancia y la frecuencia se relacionan de la siguiente manera.

$$X_L = j\omega L$$

Es evidente que la respuesta es en forma de una recta que comienza en el origen para frecuencia nula y que luego aumenta tendiendo a infinito para frecuencias muy altas. La velocidad de crecimiento depende del valor de inductancia L . Observemos en la siguiente figura el comportamiento de la reactancia en función de la frecuencia para diferentes valores de L .

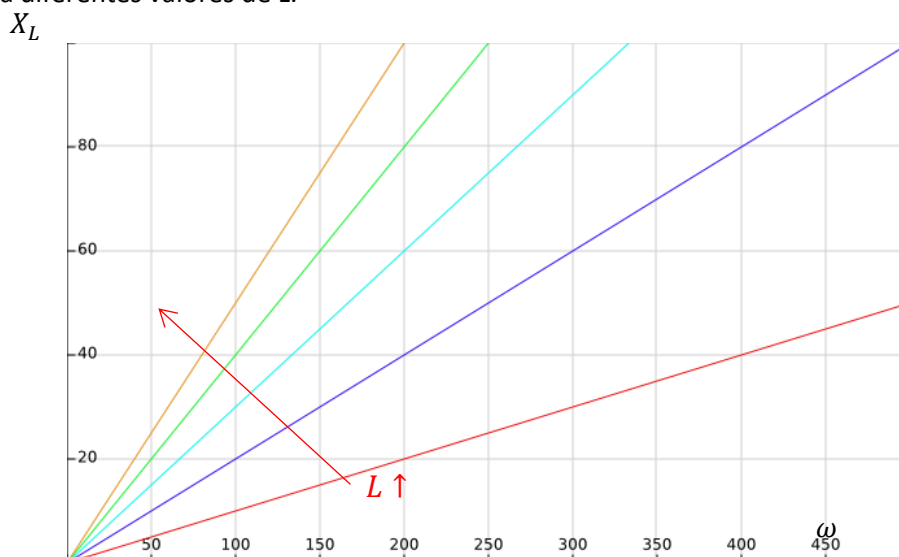


Figura 9-14: Respuesta en frecuencia de una bobina.

Capacitor

Recordando la relación entre la reactancia capacitiva y la frecuencia:

$$X_C = -\frac{j1}{\omega C}$$

Podemos decir que la reactancia describe una hipérbola asintótica al semieje imaginario negativo para las tendientes a cero y que el mismo comportamiento se obtiene para las frecuencias tendientes a infinito pero respecto al semieje real positivo. En función de lo anterior (como se observa en la Figura 9-15), un capacitor presenta una impedancia muy grande para frecuencias bajas y en cambio una impedancia muy pequeña para frecuencias altas.

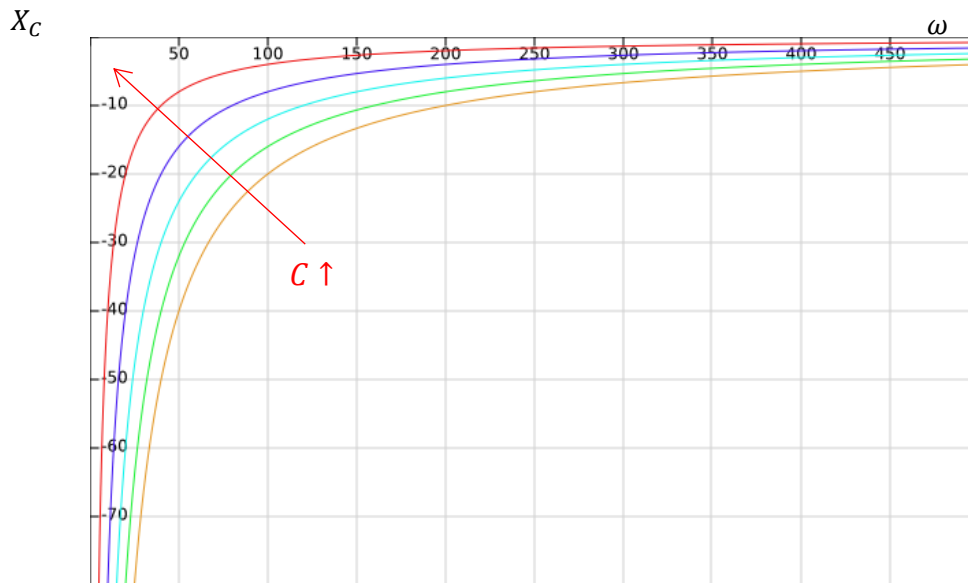


Figura 9-15: Respuesta en frecuencia de un capacitor.

Como ya se ha mencionado será muy importante tener presente estas evoluciones a la hora de analizar el comportamiento de los diferentes filtros que se proponen en el apartado siguiente.

9.4. Implementación de Filtros

Existen muchas maneras de construir filtros, la complejidad y precisión de su funcionamiento depende fuertemente de su aplicación. En nuestro caso nos interesa focalizarnos sobre las construcciones más sencillas, de manera tal de sentar bases para el futuro estudio de dispositivos de mayor complejidad.

Como se comentó con anterioridad los filtros que estudiaremos serán los de primer y segundo orden, los cuales permiten confeccionar los cuatro tipos de filtros existentes.

En lo que se sigue se presentan los filtros separados por tipos y dentro de cada uno se las diferentes alternativas disponibles para la complejidad elegida.

9.4.1. Filtros Pasa Bajo

Se presentan a continuación las diferentes alternativas de circuitos que pueden ser implementados como filtros pasa bajo.

Primer Orden RL

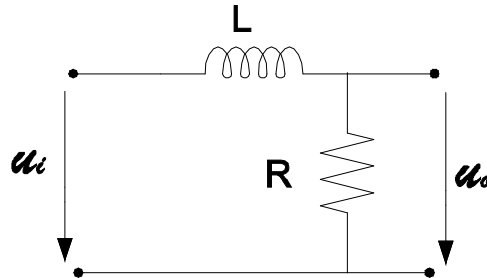


Figura 9-16: Filtro pasa bajo RL

En este circuito la tensión de entrada se encuentra aplicada a una bobina en serie con una resistencia, mientras que la salida se encuentra midiendo la tensión que cae sobre el elemento resistivo. Para frecuencias nulas o mucho menores que la frecuencia de corte la bobina se comporta prácticamente como un cortocircuito, por lo que no se registra caída de potencia en ella. Así la tensión en la salida es igual a la de la entrada. A medida que la frecuencia se incrementa la reactancia inductiva aumenta y por lo tanto la caída de tensión en ella, esto produce una disminución de la tensión medida en la resistencia y por lo tanto en la salida del filtro. Finalmente para frecuencias muy altas, mucho mayores a la frecuencia de corte, la impedancia presentada por la bobina se encuentra en valores muy altos tendientes a infinito por lo que la tensión registrada en la resistencia se acerca a cero lo que anula la salida del circuito.

Se detallan a continuación los parámetros más relevantes del filtro.

$$H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

$$\omega_c = R/L$$

Primer Orden RC

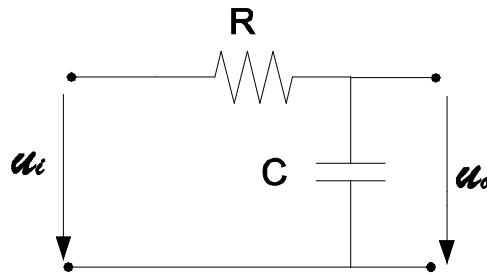


Figura 9-17: Filtro pasa bajo RC.

En este circuito la tensión de entrada se encuentra aplicada sobre una resistencia en serie con un capacitor, la tensión de salida se obtiene midiendo la caída de tensión sobre el capacitor. Para frecuencias bajas, menores a la frecuencia de corte, la reactancia capacitiva toma valores muy altos por lo que la corriente que circula por el capacitor es muy pequeña. Es así que de no existir ningún elemento conectado en bornes de la salida tampoco circula corriente por la resistencia, haciendo que la salida sea igual a la entrada. En el caso de conectarse un elemento en la salida, se percibe una caída de tensión en la resistencia lo que reduce la tensión de salida respecto de la de entrada. Se dice entonces que el filtro posee una atenuación en la banda de paso que depende del tamaño del elemento resistivo y de la corriente que demanda la carga conectada en la salida. Este análisis debe reproducirse siempre que nuestro filtro posea un elemento resistivo conectado en serie con la salida.

Conforme aumenta la frecuencia la impedancia que presenta el capacitor disminuye, esto aumenta la circulación de corriente por la resistencia ya sea que el filtro se encuentre en vacío o con carga en su salida. El aumento de la caída de potencial en la resistencia reduce la tensión en la salida, efecto que se acentúa en las frecuencias mayores a la frecuencia de corte, hasta que la salida se anula, cuando la frecuencia tiende a infinito.

A continuación se presentan las ecuaciones características del filtro.

$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

$$\omega_c = 1/RC$$

NOTA: Es importante destacar que los filtros de primer orden solo cuentan con una frecuencia de corte. Existe una gran similitud en el “formato” de la función de transferencia de todos filtros de este orden.

Segundo Orden

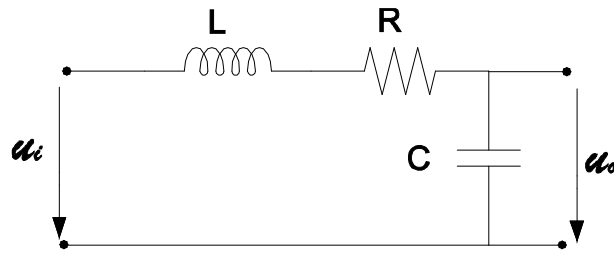


Figura 9-18: Filtro pasa bajo RLC.

En este filtro la tensión de entrada se encuentra aplicada sobre los tres elementos que lo componen conectados en serie. La salida por su parte se toma sobre el capacitor.

Dado que este circuito es algo más complejo que los anteriores analizaremos primero su comportamiento en los extremos del espectro de frecuencia. Para valores bajos de oscilación de la señal de entrada, la bobina presenta una impedancia muy baja mientras que el capacitor una muy alta. Esto produce que no se registre caída de tensión en el inductor ante la pequeña corriente que circula por el circuito, debido al gran valor de la reactancia capacitiva. En función de esto y ante condiciones de vacío de los terminales de salida, la tensión de entrada no percibe atenuaciones en la salida. En el extremo opuesto en presencia de frecuencias altas, la reactancia inductiva es muy grande mientras que la capacitiva se vuelve pequeña, esto produce una alta caída de tensión en la bobina lo que reduce la tensión de salida. Más aún la tensión de salida se ve disminuida por la caída de tensión en la resistencia. Finalmente el último factor que favorece a la reducción de la tensión de salida es que esta se encuentra medida sobre un elemento cuya impedancia tiende a cero para valores de frecuencia muy grandes.

Dado lo anterior este filtro presenta un comportamiento mucho mejor para frecuencias bajas y altas. En el caso de frecuencias cercanas a la frecuencia de corte debe realizarse un análisis más cuidadoso.

Como es sabido este circuito presenta una frecuencia de resonancia en la que las reactancias de la bobina y el capacitor son iguales y opuestas. En un circuito resonante la tensión del capacitor registra un valor máximo el cual puede ser mayor a la tensión de entrada. Dicho sobre valor depende la relación entre los valores de R , L y C en lo que denomina factor de calidad. Cuanto mayor sea dicho factor mayor el sobre valor registrado en bornes del capacitor. Es importante destacar que para valores de factor de calidad menor o igual a 0.707 no existe sobre valor en la tensión sobre el capacitor.

La determinación del factor de calidad será importante por dos motivos, primero nos permite saber si el filtro tiene la capacidad de amplificar la entrada y segundo porque incide directamente en el cálculo de la frecuencia de corte.

En función de lo anterior podemos decir que dependiendo del factor de calidad, la salida del filtro puede presentar un determinado sobrevalor en frecuencias menores a la frecuencia de corte. Luego de alcanzar el

máximo vuelve a disminuir a medida que la frecuencia aumenta y nos acercamos a la frecuencia de corte. Esto se aprecia en la figura siguiente.

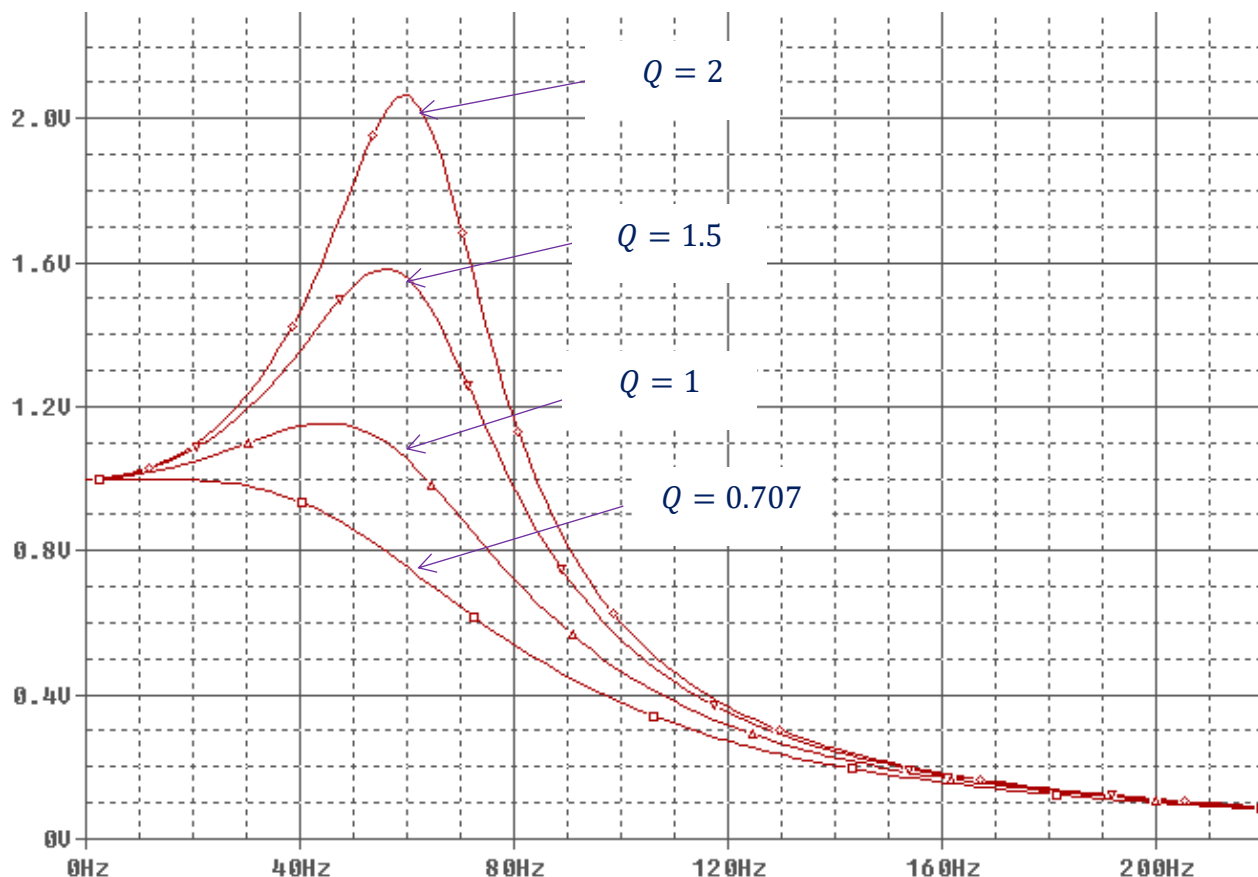


Figura 9-19: FT de un filtro pasa bajo de segundo orden, con diferentes valores de Q.

La figura anterior exhibe la tensión de salida de un filtro RLC para diferentes valores del factor de calidad. Como se indicó, para valores de Q iguales o menores a 0.707 no existe sobre valor.

Particularmente en el caso de $Q=0.707$ la frecuencia de corte es igual a la frecuencia de resonancia, lo cual facilita considerablemente el diseño y análisis de estos circuitos. **Es por esto que en nuestro estudio solo consideraremos filtros pasa bajos de segundo orden con $Q=0.707$.**

$$\text{Si } Q = 0.707 \Rightarrow \omega_c = \omega_0$$

A continuación se presentan las magnitudes más relevantes de este circuito.

$$H(j\omega) = \frac{1/LC}{-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/LC}{\sqrt{\frac{\omega^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

9.4.2. Filtros Pasa Altos

Tomando como base los circuitos anteriores se plantean ahora filtros que se comportan como pasa altos. Para esto se modifica el punto de medición de la tensión de salida de modo tal que el comportamiento del sistema sea opuesto al descrito para el caso de pasa bajos. Dada esta última característica no se realiza el desarrollo detallado de cada circuito, quedando esto para el alumno. Sin embargo se presentan los esquemas de cada filtro junto con las expresiones más relevantes que permiten su análisis y diseño.

Primer Orden RL

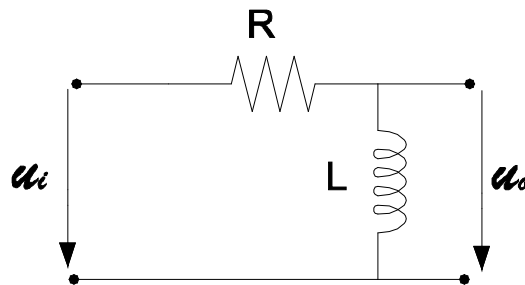


Figura 9-20: Filtro pasa alto RL

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + R/L}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

$$\omega_c = R/L$$

Primer Orden RC

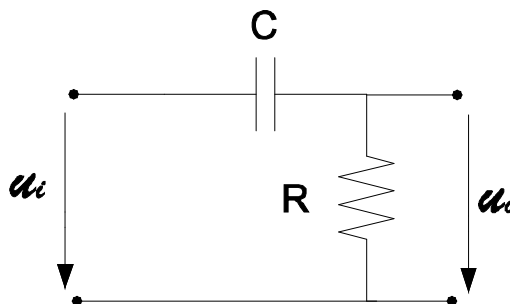


Figura 9-21: Filtro pasa alto RC

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

$$\omega_c = 1/RC$$

Se destaca la similitud en la “forma” de la función transferencia de los filtros anteriores.

Segundo Orden

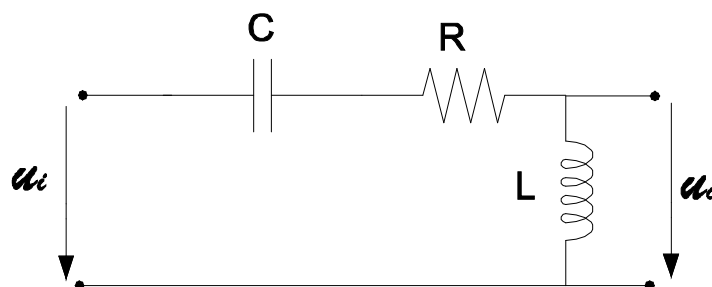


Figura 9-22: Filtro pasa alto de segundo orden.

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{\frac{\omega^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\text{Si } Q = 0.707 \Rightarrow \omega_c = \omega_0$$

En los filtros pasa altos RLC también consideraremos un factor de calidad igual 0.707, durante el diseño.

9.4.3. Filtros Pasa Banda

La característica de la función transferencia para filtros ideales se puede ver en la Figura 9-12. Aquí describiremos dos circuitos que se comportan de manera tal que pueden ser implementados como filtros pasa banda. Ésta clase de filtros tiene la particularidad de presentar dos frecuencias de corte, lo que arroja tres zonas de trabajo. Para lograr este comportamiento se necesita que los circuitos sean al menos de segundo orden.

Filtro RLC Serie

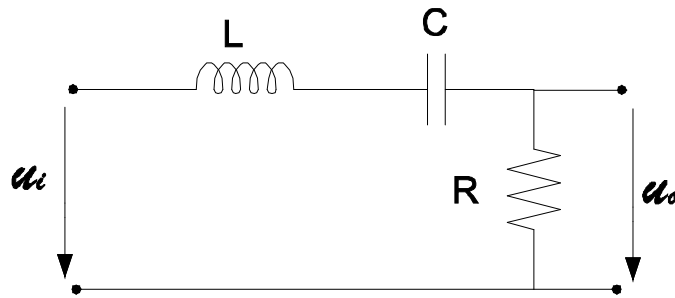


Figura 9-23: Filtro pasa banda RLC serie

Dado que en este circuito la tensión de salida se encuentra medida sobre la resistencia, cuyo valor consideramos que no cambia con la frecuencia, la salida depende exclusivamente de la corriente que circula por el elemento resistivo. La máxima corriente que puede circular por la resistencia se da en el momento en que la bobina y el capacitor se encuentran en resonancia. Para esa frecuencia las reactancias inductivas y capacitivas se compensan entre sí encontrándose la resistencia sometida a la tensión de entrada. En consecuencia la salida se iguala a la entrada para la frecuencia de resonancia. Dicha frecuencia se encuentra entonces dentro de la banda de paso.

Para frecuencias menores o mayores a la de resonancia, la corriente que circula por la resistencia será menor ya que se produce una caída de tensión sobre las reactancias del capacitor y la bobina. En los extremos, para frecuencias mucho menores y mucho mayores a la frecuencia de corte, el capacitor en primera instancia y luego la bobina presentan reactancias muy altas (tendientes a infinito) por lo que la corriente por la resistencia es muy baja reduciendo la tensión de salida.

Los que siguen son algunos de los parámetros más relevantes.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega(R/L)}{-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{\frac{\omega^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Como en todo circuito resonante se define el factor de calidad.

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

El factor de calidad afecta directamente a la determinación de las frecuencia de corte y por lo tanto a comportamiento del filtro. Esto se presenta en la siguiente figura.

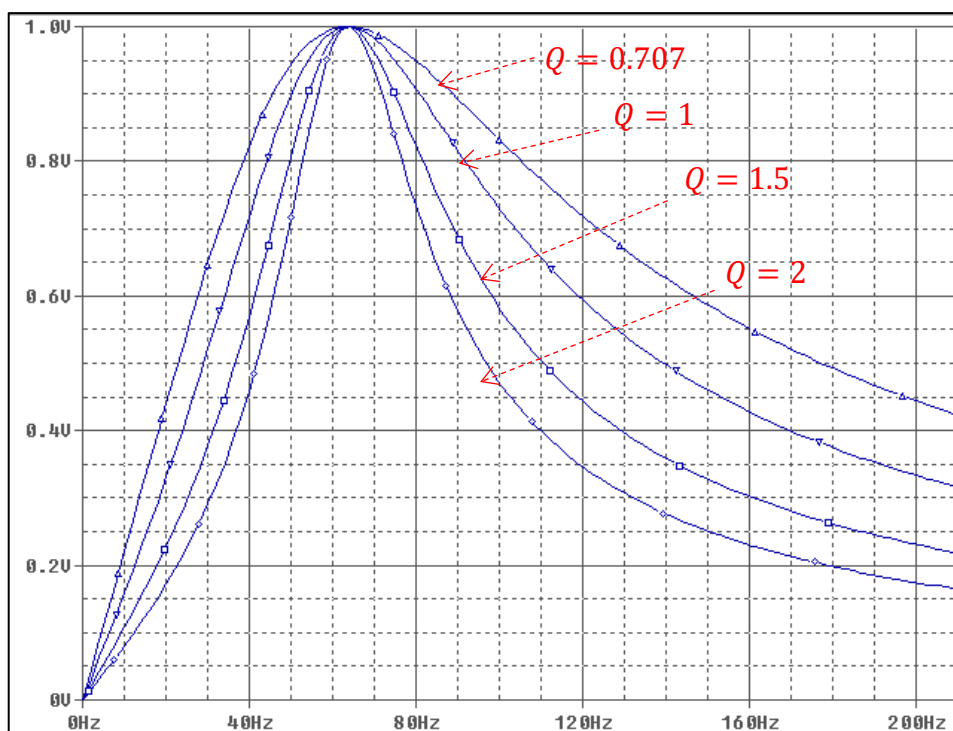


Figura 9-24: FT filtro pasa banda RLC serie con diferentes valores de Q

Tal como se observa en la figura Figura 9-24 al modificarse el valor del factor de mérito, varía el tamaño de la banda paso. O sea el rango de frecuencias para las cuales $|H(j\omega)| \geq 0.707$. Las frecuencias de corte se calculan como sigue. Además, a la diferencia entre dichos valores se denomina ancho de banda, magnitud que define el tamaño de la banda de paso.

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L}$$

Filtro RLC Paralelo

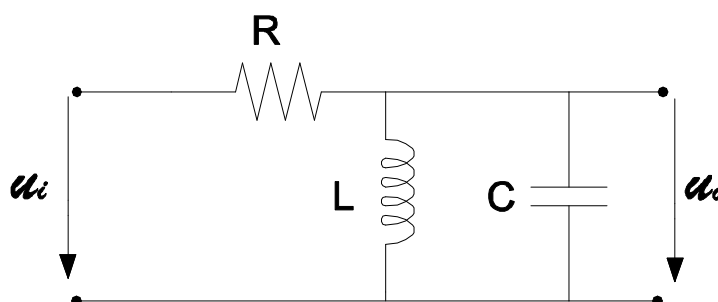


Figura 9-25: Filtro pasa banda RLC paralelo.

Si bien en este circuito solo la bobina y el capacitor se encuentran en paralelo el nombre se ha impuesto con el objetivo de diferenciarlo del filtro pasa banda serie.

En cuanto a su funcionamiento, la tensión de salida será máxima para las frecuencias en las que la impedancia equivalente del paralelo sea grande y a su vez se registre una pequeña caída de tensión en la resistencia. En función de esto el punto máximo se registra en la frecuencia de resonancia, instancia en la que la impedancia paralelo tiende a infinito. Si además el filtro se encuentra en vacío, la salida se iguala a la entrada. En el caso de contar con una carga, la caída de potencial producto de la corriente que demanda la carga reduce la tensión de salida.

Para cualquier frecuencia mayor o menor a la frecuencia de resonancia la tensión de salida se reduce. Acentuándose el descenso fuera de la banda de paso definida por las frecuencias de corte. Para frecuencias bajas la bobina presenta una reactancia baja lo que reduce la impedancia del paralelo. Esto reduce la tensión de salida ya que esta se encuentra siendo medida sobre una impedancia pequeña, además el incremento de la corriente por la resistencia aumenta la caída de potencial en ella, acentuando la reducción en la salida. El mismo razonamiento puede realizarse para frecuencias altas en donde el capacitor presenta una reactancia pequeña.

Mediante las siguientes expresiones puede diseñarse un filtro de estas características.

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{RC}}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{R^2C^2} + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

NOTA: Como hemos visto hasta aquí los filtros pasa banda poseen cinco parámetros para su diseño $(\omega_0, Q, \omega_{c1}, \omega_{c2}, \beta)$. Sin embargo estos no son todos independientes por lo que solo se pueden especificar dos

de ellos. Una vez elegidos dos de estos parámetros el resto quedan fijados por las relaciones existentes. Lo mismo ocurre para los filtros de banda eliminada.

9.4.4. Filtros Elimina Banda

Intuitivamente podemos pensar a estos filtros como lo opuesto a los filtro pasa banda y de hecho así es como funcionan. Por este motivo, al igual que se realizó para los filtros pasa alto, no realizaremos un análisis del funcionamiento de los circuitos, dejando el mismo para el lector. A su vez, se incorporan todas las expresiones que rigen su funcionamiento y permite diseñarlos.

Filtros RLC Serie

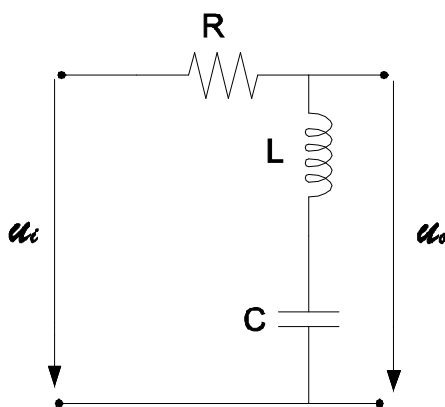


Figura 9-26: Filtro elimina banda RLC serie.

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 \right|}{\sqrt{\frac{\omega^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L}$$

Se puede ver claramente que a pesar de que existe una diferencia en la función transferencial, los parámetros característicos son iguales a los del filtro banda serie.

Filtro RLC Paralelo

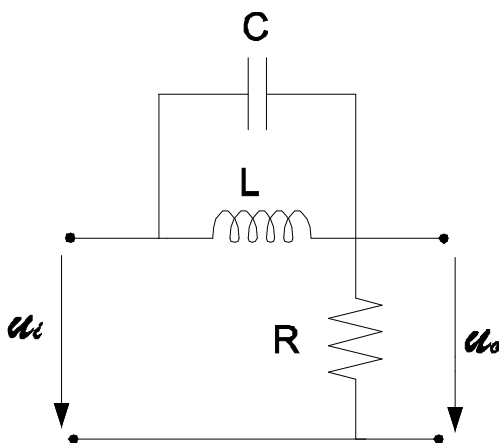


Figura 9-27: Filtro elimina banda RLC paralelo.

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 \right|}{\sqrt{\frac{\omega^2}{R^2 C^2} + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{CL}} \quad \omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

9.5. Resumen

- Un circuito de frecuencia selectiva o filtro permite que las señales de ciertas frecuencias pasen hacia la salida y atenúa las señales de otras frecuencias. La banda de paso está compuesta por las frecuencias de aquellas señales que se dejan pasar; la banda eliminada está compuesta por las frecuencias de las señales que atenúan.
- La frecuencia de corte, ω_c , identifica la ubicación en el eje de frecuencias del punto que separa la banda de paso de la banda eliminada. A la frecuencia de corte, el módulo de la función transferencia es igual a $(1/\sqrt{2})H_{m\acute{a}x}$.
- Un filtro pasa bajo deja pasar las señales cuya frecuencia está por debajo de la frecuencia de corte y atenúa las frecuencias situadas por encima ω_c . Los filtros pasa bajo de primer orden tienen una función transferencia del tipo:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

- Un filtro pasa alto deja pasar las señales cuya frecuencia sea superior a ω_c y atenúa aquellas cuya frecuencia está situada por debajo. Los filtros pasa alto de primer orden tienen una función transferencia del tipo:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c}$$

- Los filtros pasa bajos y pasa altos pueden ser implementados con circuitos de segundo orden. Para topologías de este tipo trabajaremos solo con circuitos cuyo factor de calidad Q sea igual a 0.707.
- Tanto los filtros pasa banda como los de banda eliminada tienen dos frecuencias de corte, ω_{c1} , ω_{c2} . Estos filtros se caracterizan además por su frecuencia central (ω_0), su ancho de banda (β) y su factor de calidad (Q). Estas magnitudes se definen como:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

- Un filtro pasa banda deja pasar las señales cuya frecuencia se encuentra dentro de la banda de paso es decir entre ω_{c1} y ω_{c2} . El filtro atenúa las señales con frecuencias fuera de la banda de paso. Los filtros pasa banda poseen una función transferencia del tipo:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega\beta}{-\omega^2 + j\omega\beta + \omega_0^2}$$

- Un filtro elimina banda atenúa las señales cuya frecuencia está comprendida dentro de la banda de eliminación, es decir entre ω_{c1} y ω_{c2} . Mientras que deja pasar las frecuencias que se encuentran fuera de dicho rango. Los filtros elimina banda tienen una función transferencia del tipo:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{-\omega^2 + j\omega\beta + \omega_0^2}$$

- Si se conecta una carga a la salida de un filtro pasivo, cambian las propiedades de filtrado, alterando la ubicación y la anchura de la banda de paso. Si sustituimos una fuente de tensión ideal por una cuya resistencia interna sea distinta de cero, también se cambian las propiedades de filtrado del resto del circuito, de nuevo alterando la ubicación y la anchura de la banda de paso. Estos dos últimos temas serán desarrollados en la ejercitación práctica.

9.6. Ejercicios

Problema 1

Diseñar un filtro pasa bajo RL, cuya frecuencia de corte sea de 2kHz. Utilizando una $R=5\Omega$ calcular:

- a) EL valor de la inductancia L.
- b) $|H(j\omega)|$ a 50 kHz.

Respuesta: a) 0.4mHy; b) 0.04

Problema 2

Determinar el valor del capacitor a utilizar si el filtro pasa bajo del problema anterior se implementa con un filtro RC.

Respuesta: 15.92 μF

Problema 3

Un filtro pasa alto RL, posee los siguientes elementos, $R=5k\Omega$; $L=3.5\text{mH}$. ¿Cuál es el valor de la frecuencia de corte resultante?

Respuesta: 227kHz

Problema 4

Calcular los elementos que componen un filtro pasa banda paralelo con las siguientes características; frecuencia central 2kHz, ancho de banda 500Hz. Utilizar una resistencia de 250 Ω .

Respuesta: $L=4.97\text{mHy}$, $C=1.27\mu\text{F}$

Problema 5

Un filtro pasa banda se implementa mediante los siguientes elementos: $R=14.92\Omega$, $L=3.17\text{mHy}$, $C=500\text{nF}$. Calcular los parámetros característicos del filtro si este de constituye:

- a) En serie
- b) En paralelo

Problema 6

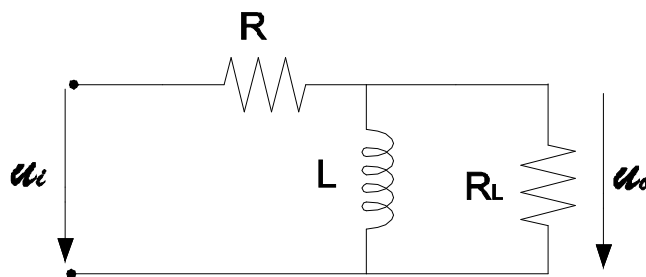
Calcular la pérdida de potencia activa que se registra en los filtros del problema anterior, para la frecuencia central, cuando el mismo es alimentado por una fuente de 10V (eficaces) y tiene conectado en la salida una resistencia de 10ohm.

Problema 7

Determinar cómo se modifica la función transferencia de un filtro pasa alto RL cuando a este se le conecta una resistencia de carga en su salida. Además identificar cómo varía los parámetros característicos del filtro.

Resolución

Siendo el siguiente circuito:



La tensión de salida está ahora medida sobre el paralelo entre la resistencia de carga y el bobina. Por lo tanto la impedancia sobre la que se toma la salida del filtro es ahora en todo momento (para todo el rango de frecuencia) menor que la reactancia inductiva de la bobina. Esto produce que la tensión de salida sea menor comparada con la tensión para la condición de vacío. Otro modo de ver la disminución de la tensión de salida es que al conectar la resistencia de carga, circula una mayor corriente por la resistencia R del filtro, por lo que aumenta la caída de tensión sobre ella y esto reduce la tensión de salida.

La función transferencia resultante es la siguiente:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega L R_L}{R_L + j\omega L}}{R + \frac{j\omega L R_L}{R_L + j\omega L}} = \frac{\boxed{\left(\frac{R_L}{R + R_L}\right)} j\omega}{j\omega + \left(\frac{R_L}{R + R_L}\right) \frac{R}{L}} = \frac{K j\omega}{j\omega + K\omega_c}$$

Calculamos ahora el módulo de la FT

$$|H(j\omega)| = \frac{K\omega}{\sqrt{\omega^2 + (K\omega_c)^2}} \quad \begin{array}{l} \text{Máximo} \\ \text{posible "v"} \end{array}$$

Si buscamos el valor de frecuencia tal que se cumpla la definición de frecuencia de corte, o sea que el módulo de la función transferencia sea igual a 0.707 del **su valor máximo posible**, encontraremos que:

$$\omega_c^* = K\omega_c$$

Es evidente que la frecuencia de corte depende del valor de la resistencia de carga. Veamos que ocurre para dos valores característicos, en primera instancia para $R_L \rightarrow \infty$ la constante $K \rightarrow 1$, por lo que $\omega_c^* \rightarrow \omega_c$. En el caso de $R_L \rightarrow 0$ la constante $K \rightarrow 0$, por lo que $\omega_c^* \rightarrow 0$. Esto último indica que a medida que la resistencia de carga la frecuencia de corte ocurre para valores más cercanos a cero, lo cual responde al hecho de que como ya se dijo la reducción de la impedancia de salida disminuye la tensión de salida en todo el rango de frecuencia.

Problema 9

Utilice un capacitor de $5\mu\text{F}$ para diseñar un filtro pasa bajo con una frecuencia de corte de 50krad/s .

- Especifique el valor de la resistencia.
- Suponga que la frecuencia de corte no puede incrementarse más de un 5% ¿Cuál es el valor más pequeño de resistencia de carga que podemos conectar en los terminales de salida del filtro?
- Si conectamos la resistencia calculada en el apartado anterior, ¿cuál será el módulo de la función transferencia cuando $\omega = 0$.

Problema 10

Utilizando un condensador de $0.5\mu\text{F}$ se debe diseñar un filtro elimina banda. Calcular los valores de R y L , si el filtro se implementa con ambas configuraciones disponibles (serie y paralelo).

Considerar que el filtro debe contar con un ancho de banda de 5kHz y $Q=10$.

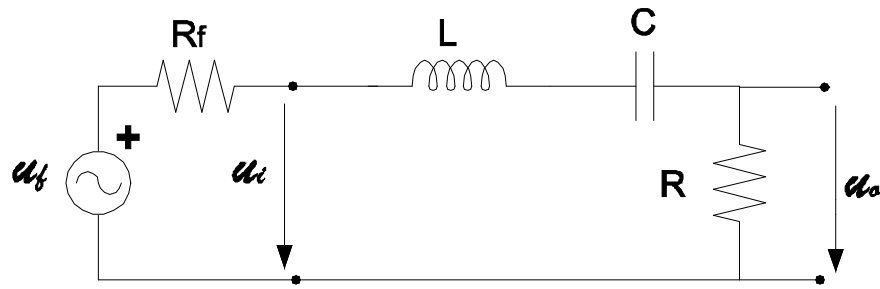
Para las dos alternativas anteriores, calcular como varían los parámetros característicos de los filtros (ω_0 ; ω_1 ; ω_2), cuando a éstos se les coloca una resistencia de carga de $1\text{k}\Omega$ en la salida.

Problema 11

Determinar cómo se modifican los parámetros característicos de un filtro pasa banda serie. Cuando se encuentra alimentado por una fuente cuya resistencia interna es no nula.

Resolución

Según el enunciado podemos representar el sistema de la siguiente manera.



La forma más sencilla de trabajar es calculando la función transferencia del filtro en conjunto con la resistencia de la fuente. Por lo tanto la FT será la relación entre la tensión de la fuente y la tensión de salida del filtro.

$$H(j\omega) = \frac{u_o}{u_f} = \frac{j\omega(R/L)}{-\omega^2 + j\omega\left(\frac{R + R_f}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Buscaremos ahora determinar los parámetros característicos de todo el sistema. Comenzamos desarrollando la expresión del módulo de la FT.

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{\left(\omega \frac{R + R_f}{L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}}$$

Dada la expresión anterior podemos calcular su valor máximo y la frecuencia para la cual se da dicho valor.

$$|H(j\omega_0)| = H_{m\acute{a}x} = \frac{R}{R + R_f}$$

Donde

$$\omega_0^* = 1/\sqrt{LC}$$

Queda que la frecuencia central del filtro no se ha modificado, sin embargo el valor de la salida para ese punto en el espectro de frecuencia es ahora inferior, comparado con el que presentaría el filtro si fuese alimentado con una fuente ideal de tensión. En consecuencia se dice que el filtro presenta una mayor atenuación en la banda de paso. Esto era de esperarse que ya dicho comportamiento es exhibido por todo los filtros que presentan una resistencia en serie entre la entrada y la salida.

Calculemos ahora las frecuencias de corte. Estas pueden ser calculadas igualando la el módulo de la función transferencia a $(1/\sqrt{2})H_{m\acute{a}x}$ o sea $\frac{R}{\sqrt{2}(R + R_f)}$

$$\omega_{c1}^* = -\frac{R + R_f}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R + R_f}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$\omega_{c2}^* = \frac{R + R_f}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R + R_f}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL}}$$

Respecto a los valores anteriores podemos decir que:

$$\omega_{c1}^* < \omega_{c1}$$

$$\omega_{c2}^* > \omega_{c2}$$

Por lo tanto:

$$\beta^* = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R + R_f}{L} > \beta$$

Respecto de lo anterior podemos decir que el filtro al estar alimentado por una fuente no ideal presenta un banda de paso más grande lo que sumado a la mayor atenuación de la tensión de salida en dicho rango el filtro presenta un cambio menos marcado entre la banda de paso y las bandas de atenuación. Esto puede ser cuantificado mediante el cálculo del factor de calidad del sistema.

$$Q^* = \frac{\sqrt{LC}}{R + R_f} = Q$$

Como conclusión podemos decir que cuanto más grande la resistencia interna de la fuente de alimentación menor será la capacidad de filtrado del circuito.

Problema 12

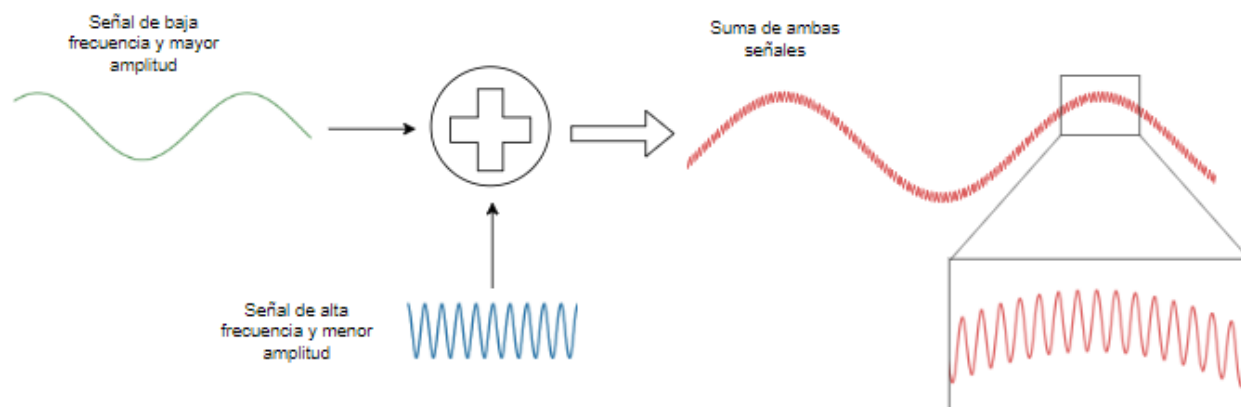
Un circuito pasa bajo RL se alimenta con una fuente no ideal que posee una resistencia interna R_f .

Siendo los elementos constitutivos del filtro $R=127\Omega$ y $L=10\text{mHy}$. Determinar:

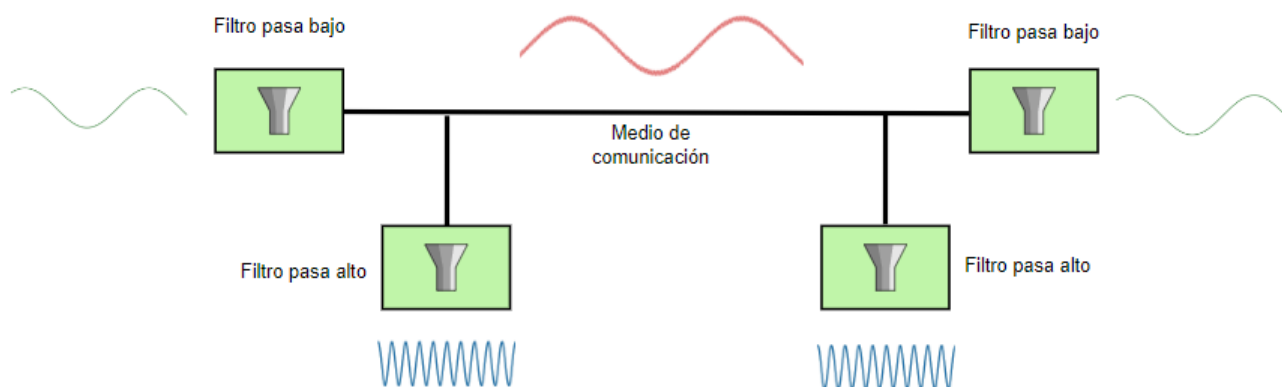
- La expresión de la función transferencia.
- Frecuencia para la que se obtiene el valor máximo del módulo de la FT.
- Valor máximo del módulo de la FT.
- Valor de la frecuencia de corte
- Calcular el máximo valor que puede tener R_f para que la frecuencia de corte no varíe más de un 10% respecto del valor original del filtro.

9.7. Caso de aplicación – Sistemas de Onda Portadora

En telecomunicaciones existe una técnica donde donde dos señales o más de diferentes frecuencia y amplitud son montadas sobre un mismo medio de transferencia. Cada señal tiene sus propias características y permite enviar mensajes diferentes.



Para que cada señal pueda ser inyectada en un extremo del medio de comunicación y capturada en el otro se requiere del uso de filtros, generalmente de tipo pasa altos y pasa bajo.

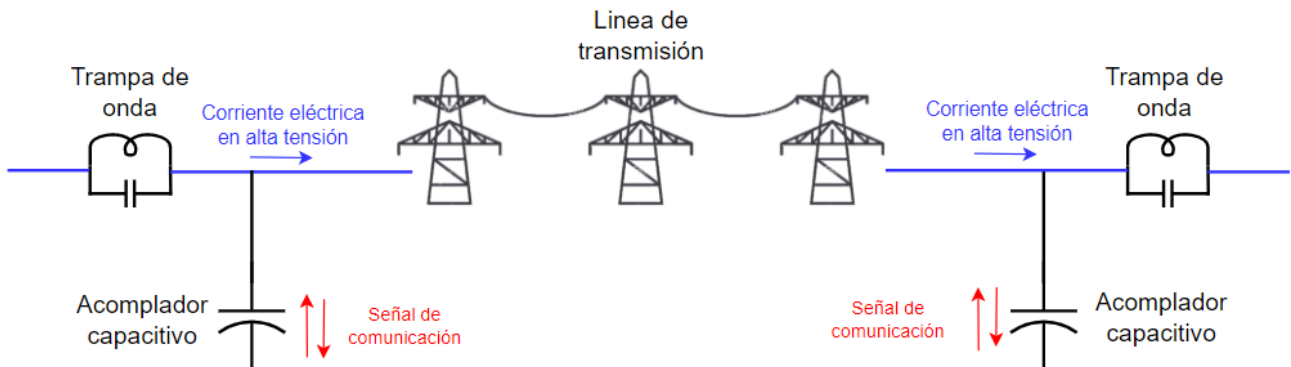


Los filtros pasa bajo solo pueden ser atravesados por señales de menor frecuencia mientras que bloquean las de mayor frecuencia. Los filtros pasa alto funcionan de manera inversa. Así se puede emitir o capturar un mensaje específico según la frecuencia de oscilación del mismo. También es posible utilizar filtros pasa banda cuando se transmiten más de dos señales. Incluso los filtros pueden ser ajustables, permitiendo modificar la frecuencia de corte según el mensaje que se desee emitir o capturar.

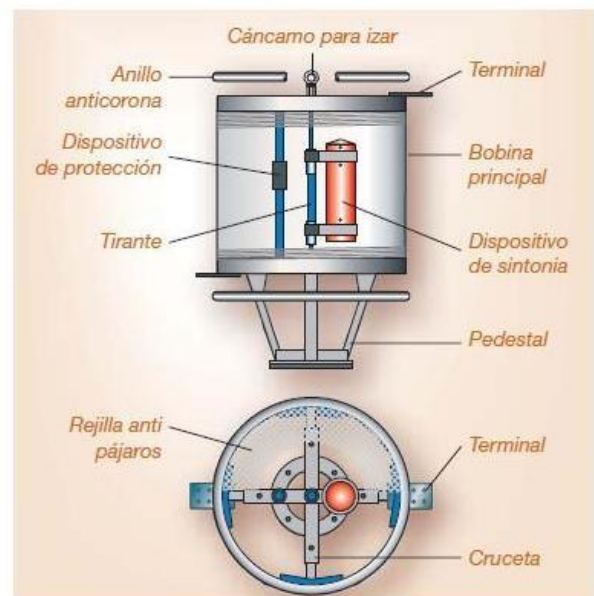
Este concepto se utiliza en las líneas eléctricas de alta tensión y se conoce como OPLAT (Onda Portadora en Líneas de Alta Tensión), donde señales de alta frecuencia son montadas sobre la onda de corriente eléctrica para utilizar los cables de energía como medio de comunicación y así transportar mensajes. Estos, son de diferente tipo y están relacionados con la operación del sistema eléctrico, entre los más destacados se encuentran.

- Actuación de protecciones y teleprotección
- Estado de interruptores de línea, enclavamiento, comandos de apertura y cierre
- Medición de variables eléctricas (corriente, tensión, potencia, energía)
- Comandos de esquemas automáticos para desconexión de generación o demanda
- Mensajes de voz, texto, etc.

Para que un sistema como este pueda ser implementado se deben instalar sobre la línea de transmisión los filtros a fin de aislar las señales de comunicación de la onda de corriente, así como también contar con el equipamiento necesario para emitir y tomar los mensajes.



La trampa de onda funciona como filtro pasa bajo, a través de ella circula la corriente eléctrica de alta tensión, la bobina que la conforma ofrece un camino de baja impedancia para ondas de baja frecuencia (50Hz o 60Hz). Al mismo tiempo boquea el paso señales de comunicación que poseen mucha mayor frecuencia (0.3kHz a 3.5kHz). La inyección y captura de señales de comunicación se realiza mediante un acoplador capacitivo que funciona como filtro pasa alto, es decir ofrece un camino de baja impedancia para señales de alta frecuencia. En general ambos filtros (trampa de onda y acoplador capacitivo) tienen la posibilidad de variar su impedancia para ser ajustados en función de las frecuencias que se utilizan en cada caso.

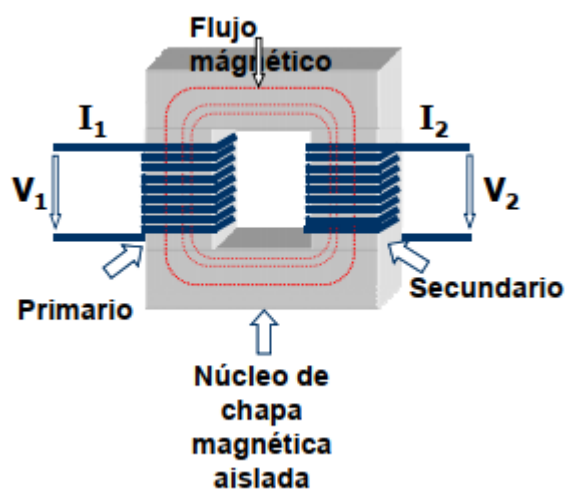


Referencias: <https://oss.mx/documentos/documentos-tecnicos-manuales-de-calidad>

10. ACOMPLEMENTAMIENTO MAGNÉTICO

10.1. Introducción

Cuando la interacción entre dos bobinas se realiza a través de un campo magnético, se dice que los circuitos están acoplados magnéticamente. La siguiente figura presenta de manera esquemática dos circuitos eléctricos que se encuentran arrollados sobre un núcleo de hierro que colabora con la interacción magnética entre ellos.



Típicamente toda máquina eléctrica funciona gracias a la interacción magnética entre dos o más circuitos, tal es el caso de transformadores, motores y generadores.

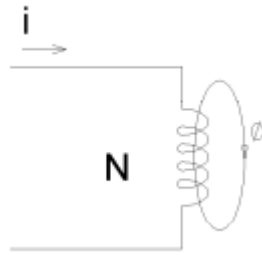
10.2. Conceptos generales

El análisis del acoplamiento requiere de utilización de conceptos relacionados a las inductancias que se presentarán a continuación.

10.2.1. Autounductancia

Al variar la corriente en un circuito se produce una variación del campo magnético y como consecuencia una FEM que se opone a la causa que la produce. Si el circuito magnético es cuasi lineal, la FEM será proporcional a la velocidad de variación del flujo.

Si se considera un conductor arrollado en forma de bobina, la cual pose N espiras y coeficiente de autoinductancia L , la circulación de corriente produce un flujo ϕ .

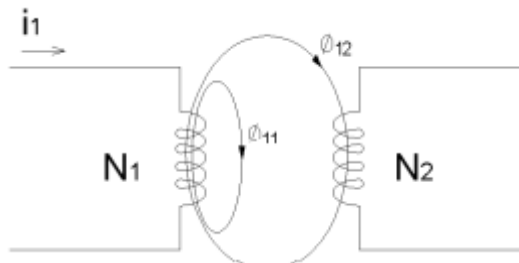


Donde

$$v_L = L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow L = N \frac{d\phi}{di}$$

10.2.2. Inductancia mutua

Si se cuenta con dos bobinas y por una de ellas circula corriente es decir produce un flujo magnético, parte de ese flujo puede ser captado por la otra bobina. Este flujo que atraviesa la bobina 2 induce una FEM sobre esta.



La tensión inducida (FEM) en la bobina depende del flujo que esta abraza y de su cantidad de espiras. Notar que en la configuración anterior sólo circula corriente por la bobina 1.

$$v_{L2} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

Como el flujo ϕ_{12} depende de la corriente que circula por la bobina 1, entonces la tensión en la bobina 2 también depende de dicha corriente. Se puede escribir:

$$\phi_{12} = k * i_1 \quad \rightarrow \quad v_{L2} = M \frac{di_1}{dt}$$

Aplicando las consideraciones anteriores se tiene

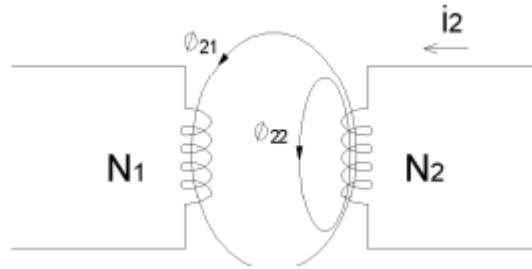
$$v_{L2} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \Rightarrow M = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}$$

M es una constante denominada inductancia mutua. Por su definición tiene unidad de [H_v].

El valor de M depende de la posición física de las bobinas entre si y del medio en el cual se propaga el flujo magnético. Si el medio es lineal entonces.

$$M = N_2 \frac{\phi_{12}}{i_1}$$

Del mismo modo si ahora la corriente circula a través de la bobina 2 se tiene.



$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2}$$

El valor de M es el mismo si la corriente circula por bobina 1 y la tensión se induce en bobina 2 o si la bobina 2 es sede de una corriente y se mide la tensión en bobina 1.

10.2.3. Coeficiente de acoplamiento

Del total del flujo creado por la bobina 1 la porción concatenada por la bobina 2 depende del posicionamiento de los ejes de cada arrollamiento.

La relación entre el flujo concatenado por la bobina 2 y el creado por la bobina 1 se llama “**coeficiente de acoplamiento**” “**k**”, ídem si se invierte excitación y respuesta.

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

Siendo

$$\phi_{12} \leq \phi_1 \text{ y } \phi_{21} \leq \phi_2 \rightarrow k \leq 1$$

Existen dos casos extremos:

- K=0 cuando los ejes de las bobinas se encuentran perpendiculares
- K=1 cuando los ejes se encuentran paralelos

10.2.4. Relación entre k y M

Multiplicando los valores de M para cada bobina y considerando un medio lineal resulta

$$M^2 = N_1 \frac{\phi_{21}}{i_2} * N_2 \frac{\phi_{12}}{i_1}$$

Aplicando la definición de k se tiene

$$M^2 = N_1 \frac{k * \phi_2}{i_2} * N_2 \frac{k * \phi_1}{i_1}$$

Reordenando los términos y reemplazando

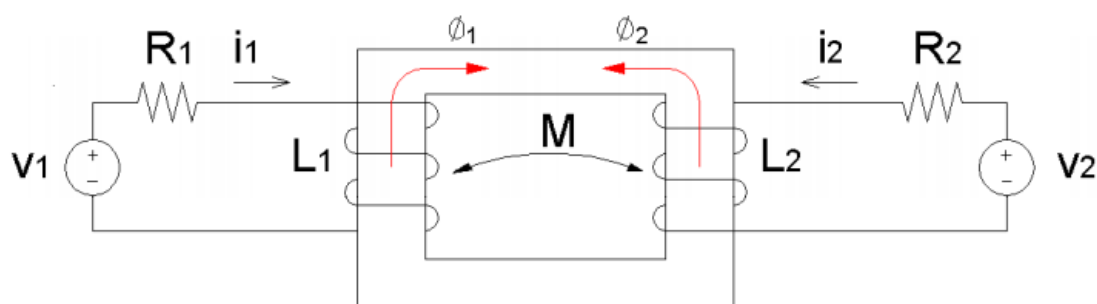
$$M^2 = k^2 \frac{N_2 * \phi_2}{i_2} * \frac{N_1 * \phi_1}{i_1}$$

En función de los coeficientes de autoinductancia

$$M^2 = k^2 L_1 L_2 \quad \Rightarrow \quad M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

10.3. Análisis de circuitos acoplados

Se toman dos circuitos eléctricamente independientes pero acoplados magnéticamente de acuerdo a la siguiente.



Es sabido ya, que el acoplamiento magnético produce la inducción de FEMs (tensiones) sobre una y otra bobina donde la tensión inducida depende la corriente circulante por la bobina opuesta y del valor de inductancia mutua. Esto hace que dicha tensión inducida deba ser considerada al construir las ecuaciones de Kirchhoff, tal como se presenta a continuación.

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned}$$

El factor $M \frac{di_n}{dt}$ puede ser aditivo a sustractivo dependiendo de la interacción entre los flujos magnéticos. Dado que en el circuito anterior los flujos circulan por el núcleo en sentidos opuestos entonces el efecto de la tensión inducida por la bobina 2 sobre el circuito 1 es sustractivo, ocurriendo lo mismo con la tensión inducida por la bobina 1 en la 2.

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned}$$

Si las fuentes de alimentación son de tipo senoidal entonces las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$\begin{aligned}(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{V}_1 \\ (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 &= \dot{V}_2\end{aligned}$$

Que en forma general puede escribirse

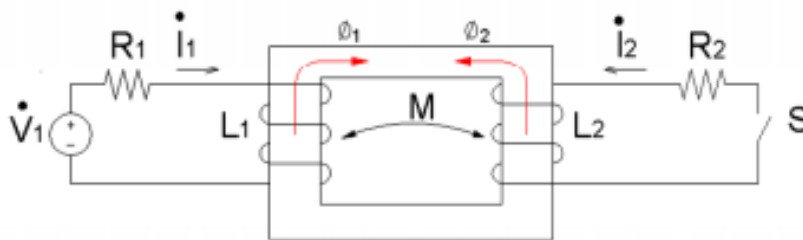
$$\begin{aligned}Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 &= \dot{V}_1 \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 &= \dot{V}_2\end{aligned}$$

La impedancia mutua resulta $Z_{12} = Z_{21}$

Los circuitos no están acoplados conductivamente, pero si hay transferencia energética, por lo que decimos que tienen “**acoplamiento magnético**”

10.3.1. Corriente Natural

Se consideran ahora dos circuitos acoplados magnéticamente pero donde solo el circuito 1 posee fuente de alimentación. Además, el circuito 2 posee una llave que permite anular la circulación de corriente por el mismo.



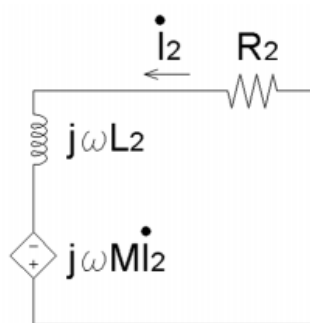
Con S abierto se tiene

$$(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 = \dot{V}_1$$

Mientras que al cerrar S y permitir la circulación de corriente por el circuito 2 se produce la interacción magnética induciéndose tensiones en ambas bobinas.

$$\begin{aligned}(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{V}_1 \\ (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 &= 0\end{aligned}$$

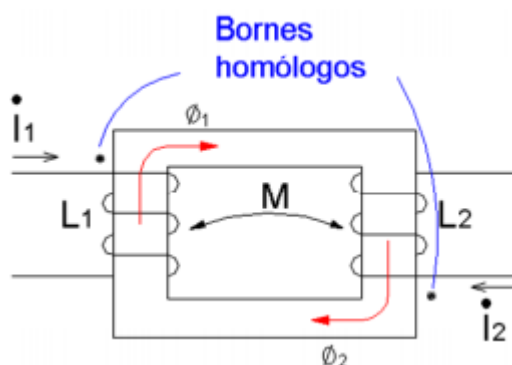
Siendo que en el circuito 2 no existe fuente de alimentación, la corriente será producto de la tensión inducida por la bobina 1. En consecuencia puede pensarse que en el circuito 2 existe una fuente dependiente, cuyo valor depende de la corriente que circula sobre el circuito 1.



10.4. Bornes homólogos

Dos bornes pertenecientes a dos elementos acoplados magnéticamente se llaman homólogos y se señalan con marcas iguales de acuerdo a la siguiente regla:

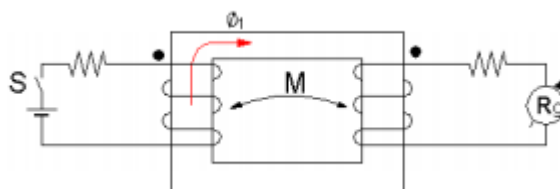
Para un mismo sentido de las corrientes respecto de los bornes homólogos los flujos magnéticos de autoinducción y de inducción mutua se suman.



10.4.1. Determinación de bornes homólogos

Métodos de la pila

Si al cerrar S el instrumento (galvanómetro) deflexiona hacia la derecha la homología de terminales es la indicada. Al abrir S tiene que forzar el movimiento hacia la izquierda



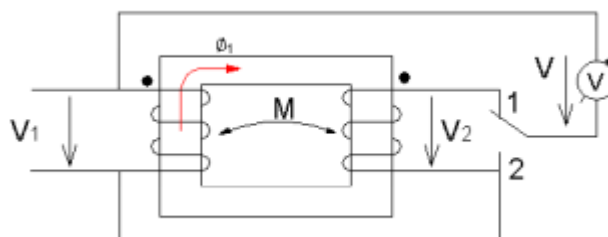
Método con fuente de alterna

Con conexión en 1: $V_s = V_1 - V_2$

Con conexión en 2: $V_L = V_1$

Si $V_s < V_L$ Homología coincide con la indica

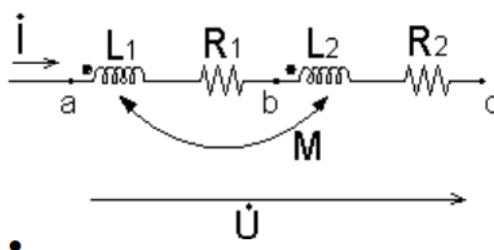
Si $V_s > V_L$ Homología no coincide con la indicada



10.4.2. Conexión de bobinas en serie

Hasta aquí se ha considerado que las bobinas si bien comparten el circuito magnético eran eléctricamente independientes. Sin embargo, existe la posibilidad que compartan también el circuito eléctrico, estando por ejemplo conectadas en serie.

Conexión aditiva



$$(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M)\dot{I} + (R_2 + j\omega L_2 + j\omega M)\dot{I} = \dot{U}$$

$$[(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]\dot{I} = \dot{U}$$

$$L_{eq} = \frac{\phi}{i} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{i}$$

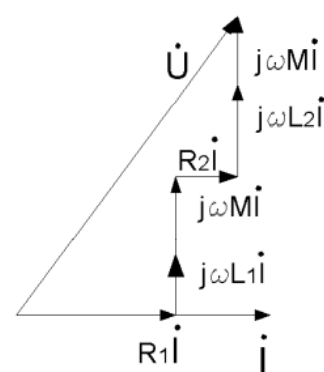
$$\phi_1 = L_1 i + M i$$

$$\phi_2 = L_2 i + M i$$

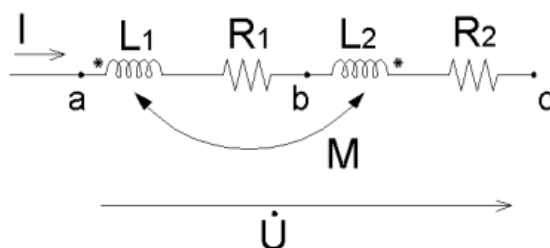
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

§7

Diagrama fasorial



Conexión sustractiva



$$(R_1 + j\omega L_1 - j\omega M)\dot{I} + (R_2 + j\omega L_2 - j\omega M)\dot{I} = \dot{U}$$

$$[(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)]\dot{I} = \dot{U}$$

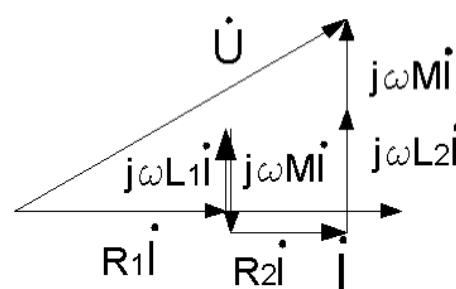
$$L_{eq} = \frac{\phi}{i} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{i}$$

$$\phi_1 = L_1 i - M i$$

$$\phi_2 = L_2 i - M i$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

Diagrama fasorial

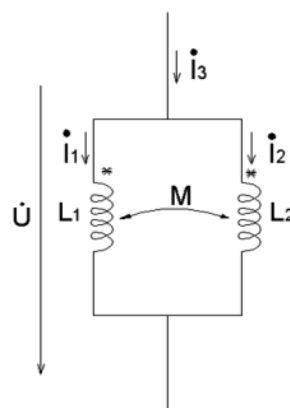


10.4.3. Conexión de bobinas en paralelo

Para el análisis de bobinas en paralelo debe utilizarse el hecho de ambas comparten la misma diferencia de potencial.

Las ecuaciones de este circuito resultan

$$\begin{aligned} j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U} \\ j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 &= \dot{U} \end{aligned}$$



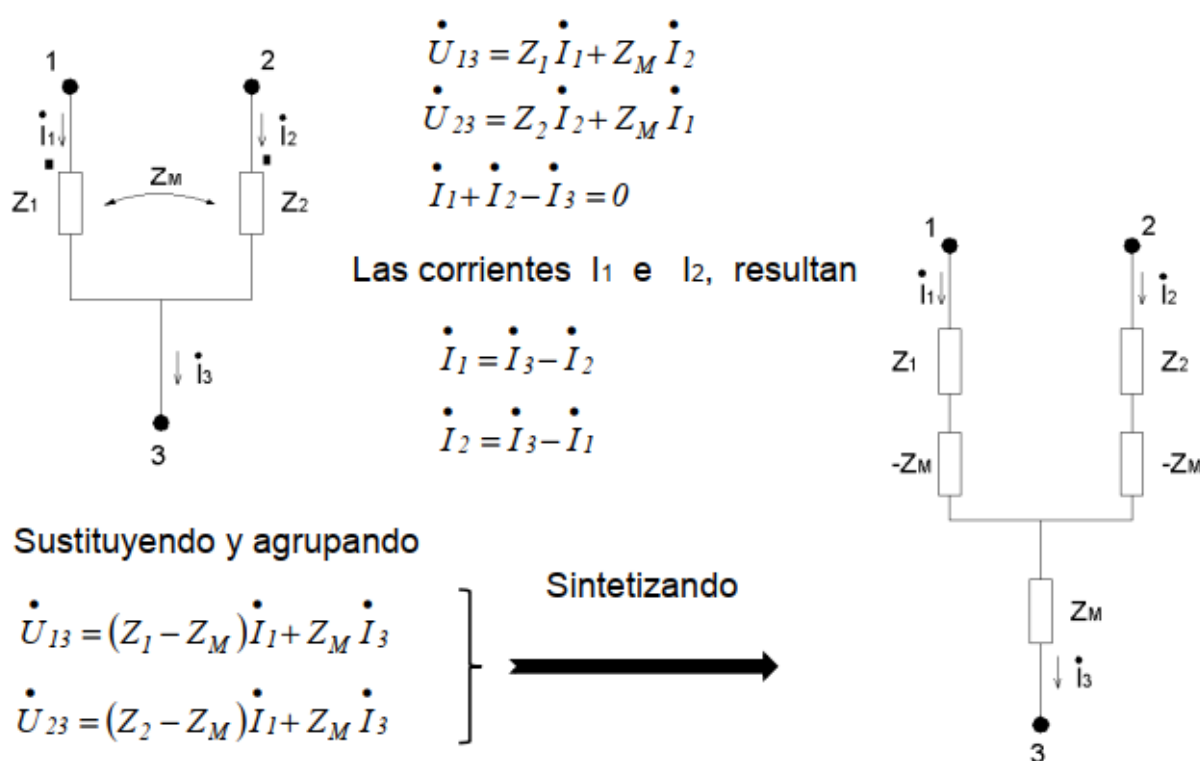
$$\dot{I}_1 = \frac{j\omega L_2 - j\omega M}{-\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} \dot{U} = -j \frac{L_2 - M}{\omega(L_1 L_2 - M^2)} \dot{U}$$

$$\dot{I}_2 = -j \frac{L_1 - M}{\omega(L_1 L_2 - M^2)} \dot{U}$$

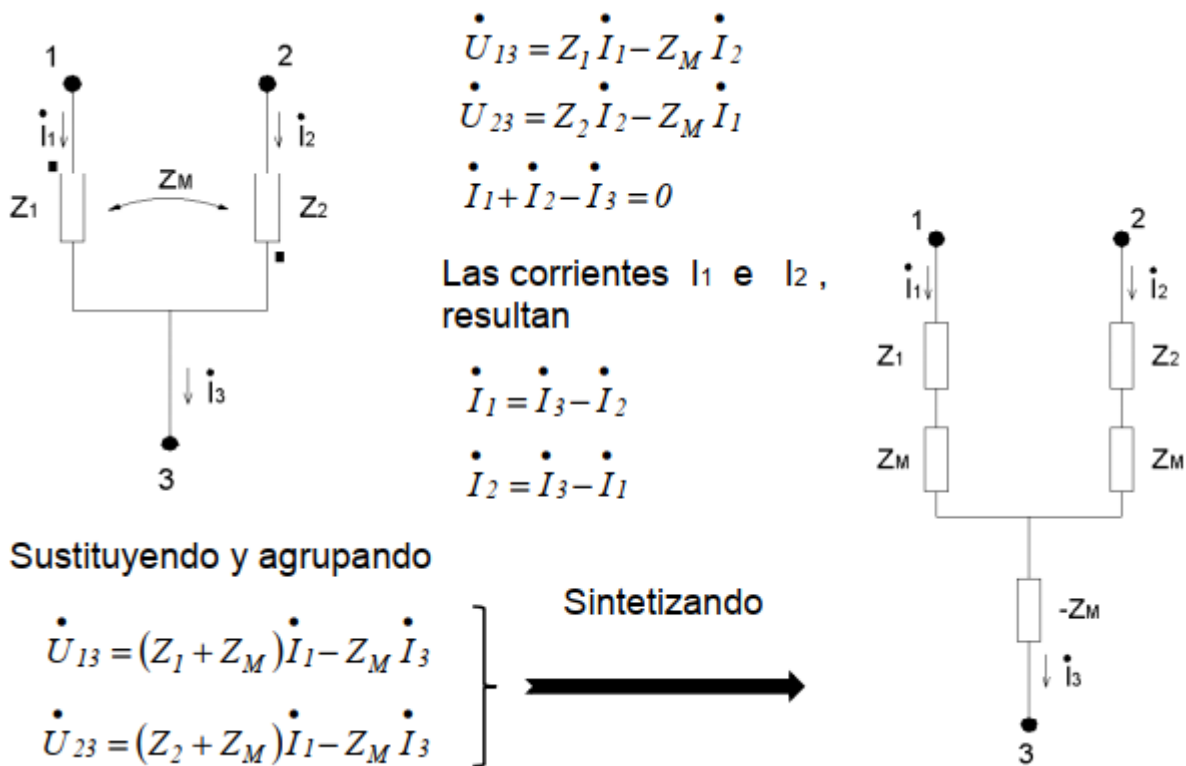
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -j \frac{L_1 + L_2 - 2M}{\omega(L_1 L_2 - M^2)} \dot{U} \quad \Rightarrow \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

10.5. Sustitución equivalente

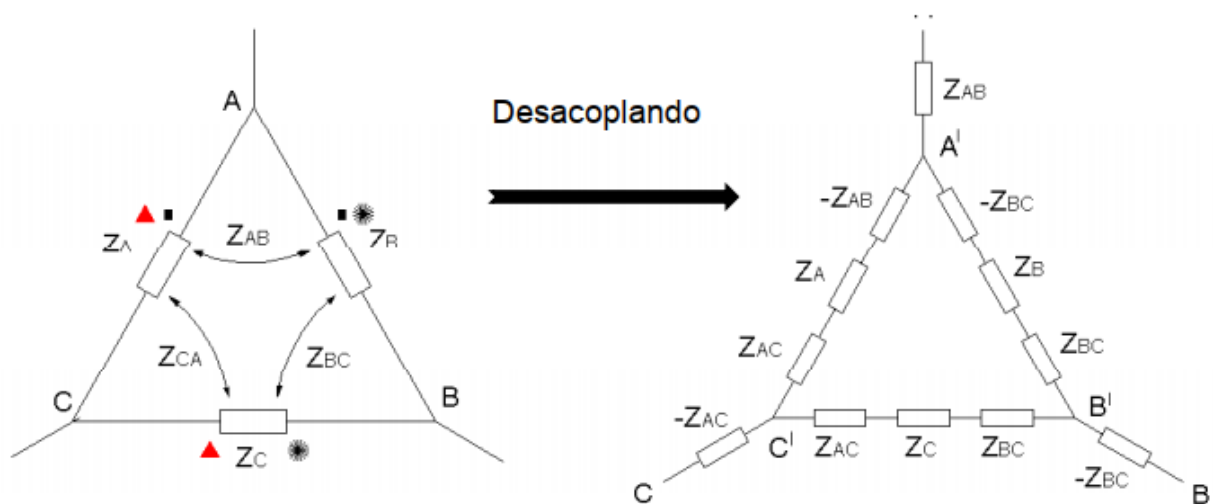
10.5.1. Acoplamiento inductivo concordante



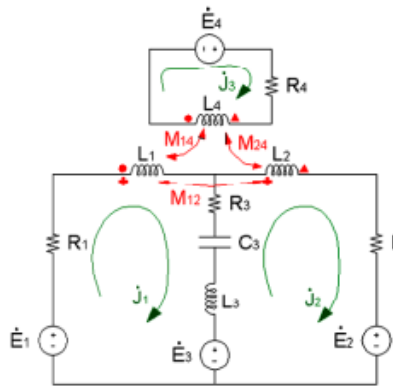
10.5.2. Acoplamiento inductivo discordante



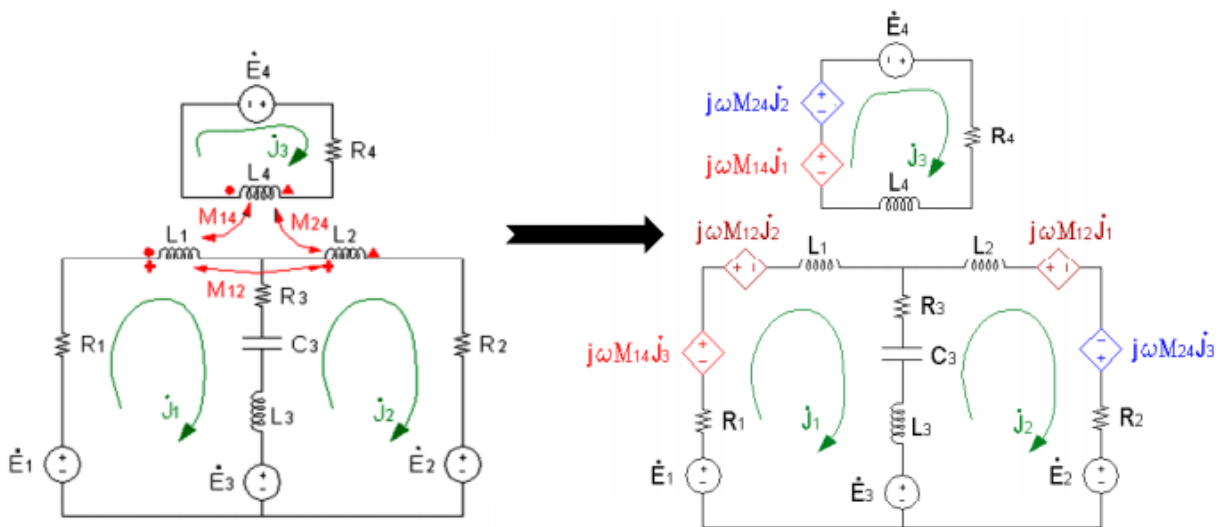
Ejemplo de desacoplamiento



10.5.3. Circuitos ramificados con inductancias mutuas



$$\begin{aligned} & \left[(R_1 + R_3) + j \left(\omega L_1 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right] \dot{J}_1 - \left[R_3 + j \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right] \dot{J}_2 + \\ & + j \omega M_{12} \dot{J}_2 - j \omega M_{14} \dot{J}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \\ & - \left[R_3 + j \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right] \dot{J}_1 - \left[(R_3 + R_2) + j \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} + \omega L_2 \right) \right] \dot{J}_2 + \\ & + j \omega M_{12} \dot{J}_1 - j \omega M_{24} \dot{J}_3 = \dot{E}_3 - \dot{E}_2 \\ & - j \omega M_{14} \dot{J}_1 - j \omega M_{24} \dot{J}_2 + [R_4 + j \omega L_4] \dot{J}_3 = \dot{E}_4 \end{aligned}$$

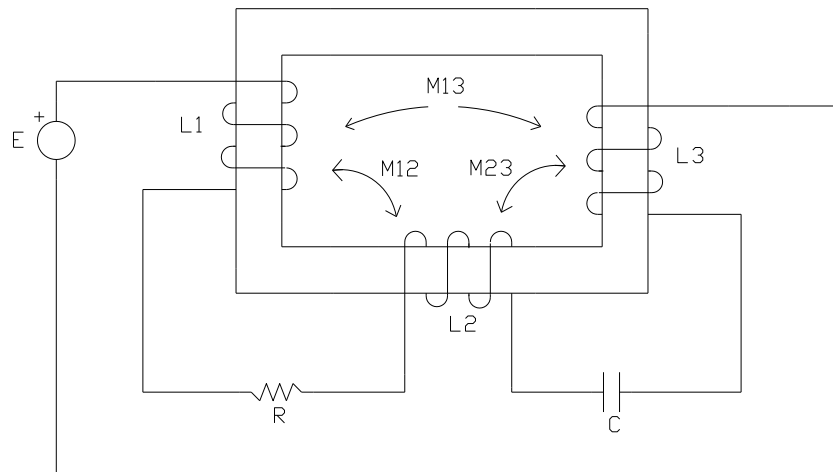


10.6. Ejercicios

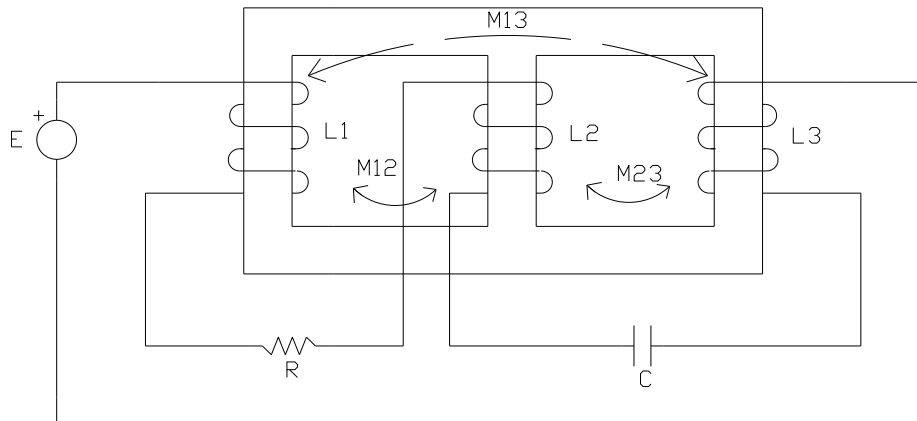
Problema 73

En los siguientes circuitos magnéticos determinar los bornes homólogos, calcular U_{L1} , U_{L2} , U_{L3} y potencia entregada por la fuente.

a)



b)



$$E = 50 + j0$$

$$C = 0,5 \text{ F}$$

$$L1 = 8 \text{ H}$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$R = 6 \Omega$$

$$L2 = 6 \text{ H}$$

$$L3 = 4 \text{ H}$$

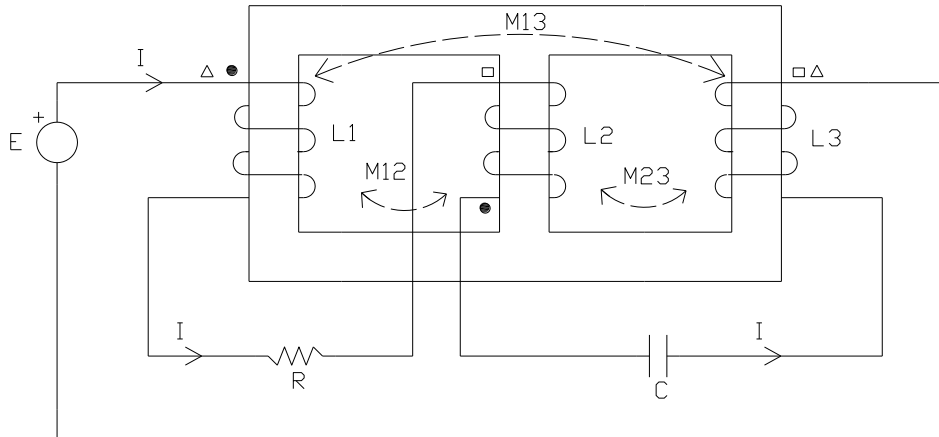
$$M12 = 1 \text{ H}$$

$$M23 = 2 \text{ H}$$

$$M13 = 3 \text{ H}$$

Resolución

Como primer paso se encuentra la homología de bornes y se la expresa en el circuito.



El segundo paso consiste en plantear la ecuación de la Ley de las tensiones de Kirchhoff en el bucle, teniendo en cuenta las inductancias mutuas:

$$\dot{E} = I \left[j\omega(L_1 - M_{12} - M_{13}) + R + j\omega(L_2 - M_{12} - M_{23}) - j\frac{1}{\omega C} + j\omega(L_3 - M_{13} - M_{23}) \right]$$

$$I = \frac{\dot{E}}{\left[j\omega(L_1 - M_{12} - M_{13}) + R + j\omega(L_2 - M_{12} - M_{23}) - j\frac{1}{\omega C} + j\omega(L_3 - M_{13} - M_{23}) \right]}$$

$$I = \frac{\dot{E}}{\left[j\omega(L_1 + L_2 + L_3 - 2M_{13} - 2M_{23} - 2M_{12}) + R - j\frac{1}{\omega C} \right]}$$

$$I = \frac{50V \angle 0^\circ}{\left[j1 \times (8H + 6H + 4H - 2 \times 3H - 2 \times 2H - 2 \times 1H) + 6\Omega - j\frac{1}{1 \times 0,5F} \right]} =$$

$$I = 5,77 - j3,85 = 6,93 \angle -33,7^\circ A$$

$$I^* = 5,77 + j3,85 = 6,93 \angle 33,7^\circ A$$

$$\tilde{S} = \dot{V} I^* = 50 \angle 0^\circ V \times 6,93 \angle 33,7^\circ A = (288,4 + j192,3) VA$$

$$\dot{U}_1 = I \times j\omega(L_1 - M_{12} - M_{13}) = (-15,4 + j23,08) V$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I} \times j\omega(L_2 - M_{12} - M_{23}) = (-11,55 + j17,31)V$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I} \times j\omega(L_3 - M_{13} - M_{23}) = (3,85 - j5,77)V$$

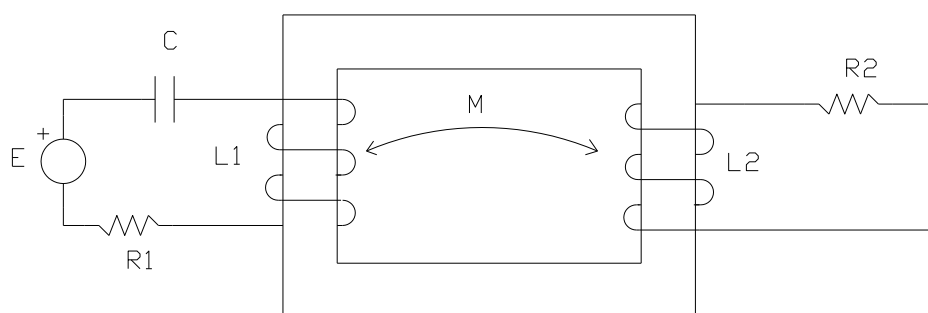
Problema 74

Calcular la potencia activa entregada por la fuente.

$$E = 12 + j0 \quad L_2 = 15 \text{ mH} \quad f = 159 \text{ Hz}$$

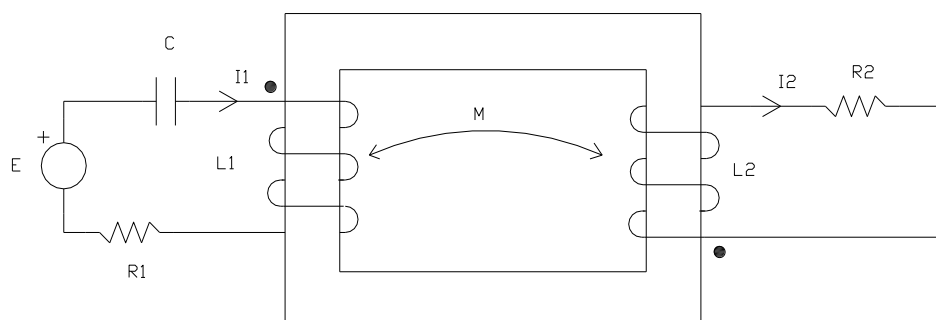
$$C = 400 \mu\text{F} \quad R_1 = 3 \Omega \quad M = 5 \text{ mH}$$

$$L_1 = 10 \text{ mH} \quad R_2 = 2 \Omega$$

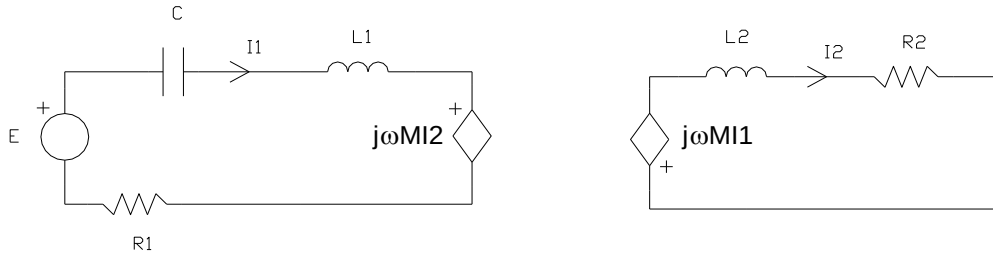


Resolución

El primer paso es determinar los bornes homólogos y establecer los sentidos convencionales de las corrientes.



Luego se efectúa el desacoplamiento utilizando fuentes dependientes:



Y se plantea una ecuación para cada malla, quedando el sistema de 2x2:

$$\begin{cases} i_1 \left(R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = E - j\omega M \times i_2 & (1) \\ i_2 = - \frac{j\omega M \times i_1}{R_2 + j\omega L_2} & (2) \end{cases}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$i_1 \left(R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = E - i_1 \times \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}$$

Se despeja el valor de la corriente por la fuente:

$$i_1 = (0,863 - j1,573)A$$

Y la potencia compleja vale:

$$i_1^* = (0,863 + j1,573)A = 1,794 \angle 61,3^\circ A$$

$$\tilde{S} = \dot{V}_1 i_1^* = 12 \angle 0^\circ V \times 1,794 \angle 61,3^\circ A = (10,356 + j18,876)VA$$

Por lo tanto, la potencia activa entregada por la fuente es de 10,356 W.

Problema 75

Hallar la potencia activa que entrega el generador y la que absorbe la carga. Calcular el rendimiento de la transmisión.

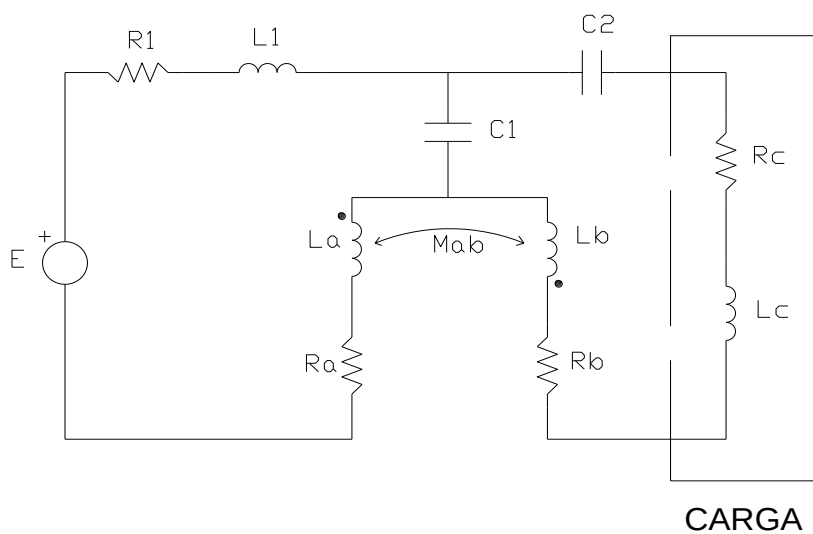
$$R1 = 4,4 \, \Omega \quad L1 = 55 \, \text{mH} \quad E = 10V$$

$$C1 = 7,6 \, \mu\text{F} \quad C2 = 42,1 \, \mu\text{F} \quad M_{ab} = 268 \, \text{mH}$$

$$L_a = 725 \, \text{mH} \quad L_b = 106 \, \text{mH} \quad \omega = 1000 \, \text{rad/s}$$

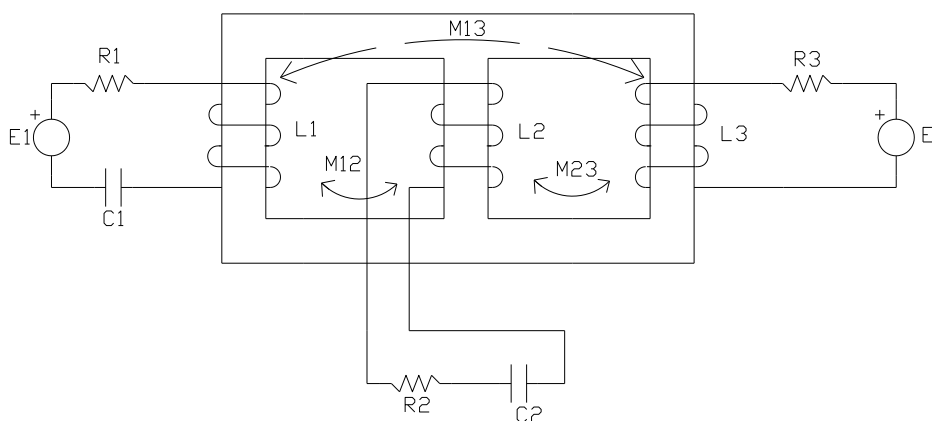
$$R_a = 5,1 \, \Omega \quad R_b = 0,5 \, \Omega$$

$$R_c = 120 \, \Omega \quad L_c = 450 \, \text{mH}$$



Problema 76

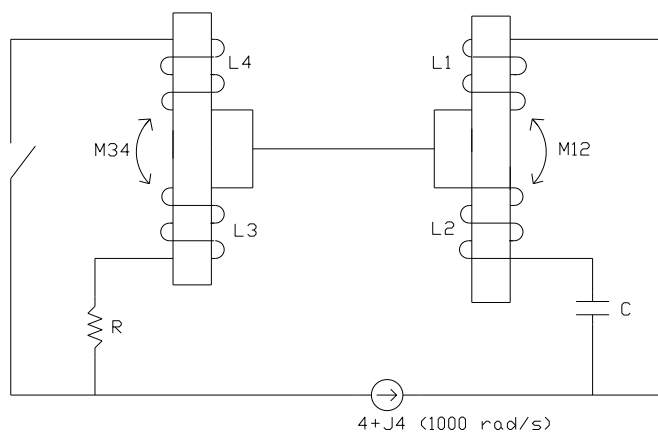
Plantear las ecuaciones de bucles del siguiente circuito.



Problema 77

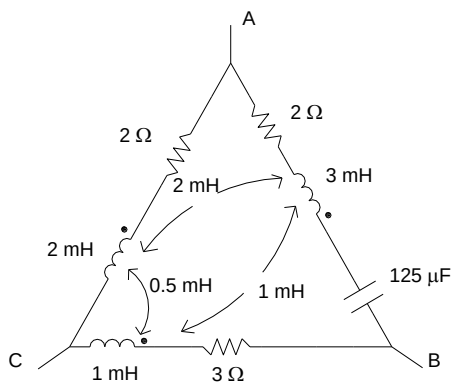
Calcular la tensión en bornes del interruptor abierto

$$L_1 = 7 \, \text{mH} \quad L_2 = 12 \, \text{mH} \quad M_{12} = 4 \, \text{mH} \quad L_3 = 2 \, \text{mH} \quad L_4 = 1 \, \text{mH} \quad M_{34} = 1 \, \text{mH} \quad R = 2$$



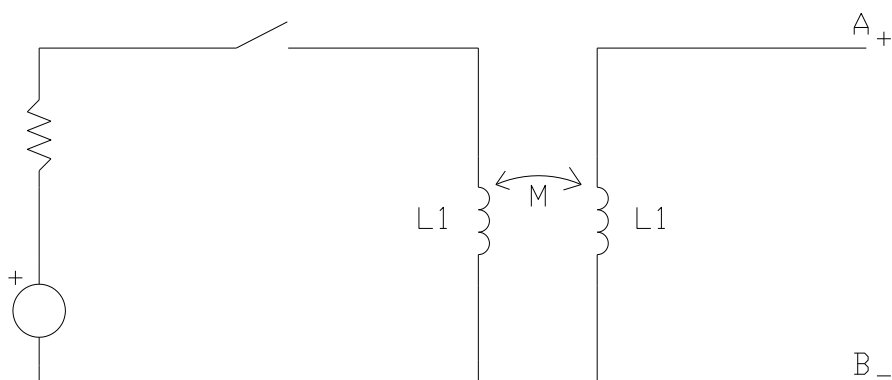
Problema 78

Hallar la configuración en estrella equivalente tendida entre los nudos A, B y C del siguiente esquema.



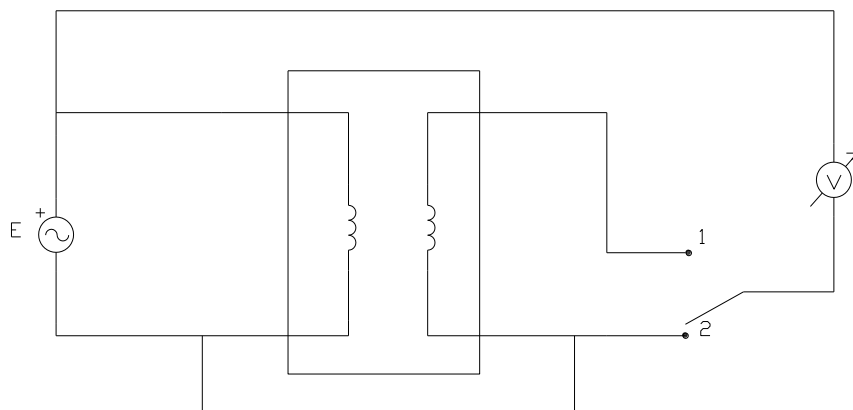
Problema 79

Determinar los bornes homólogos del circuito de la figura si cuando se cierra el interruptor aparece en los bornes A-B una tensión con la polaridad indicada. Justificar



Problema 80

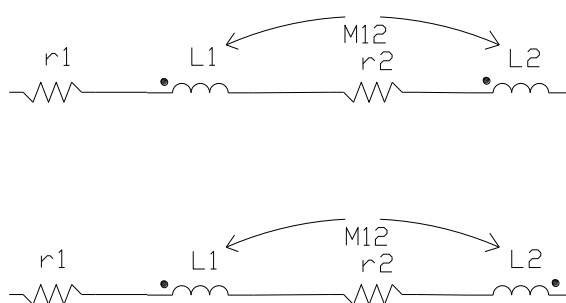
En el circuito de la figura el voltímetro mide una tensión V_1 cuando el interruptor se encuentra en la posición 1 y V_2 cuando se encuentra en la posición 2. Determinar homología de terminales si las mediciones arrojan como resultado que $V_1 > V_2$.



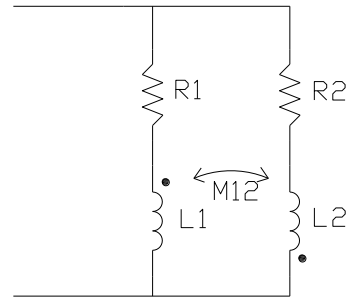
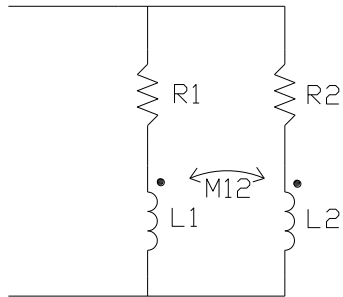
Problema 81

Indicar cuál de las conexiones es la de mayor impedancia. Demostrar.

a)



b)



11. CIRCUITOS MAGNÉTICOS

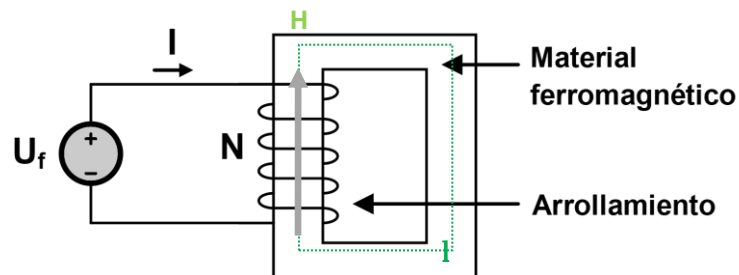
11.1. Introducción teórica

11.1.1. Generalidades

La mayoría de máquinas eléctricas (generadores, transformadores, motores, etc.) cuentan con componentes magnéticos capaces de producir y canalizar flujos de gran valor. Se utilizan sobre estos dos tipos principales: materiales magnéticos blandos y duros. Los primeros se utilizan en aplicaciones en las que el material debe magnetizarse y desmagnetizarse con facilidad, como en los núcleos de los transformadores, rotores y estatores de generadores y motores. Por otro lado, los materiales magnéticos duros se emplean en aplicaciones que requieren imanes permanentes que no se desmagneticen con facilidad como motores y generadores síncronos sin escobillas.

Se puede decir entonces que en estos equipos se utilizan materiales ferromagnéticos para intensificar o establecer el flujo magnético en una determinada parte del espacio. Llamaremos circuito magnético al conjunto de dispositivos destinados a crear y encauzar un campo magnético en una determinada parte del espacio.

Un circuito magnético elemental puede apreciarse en la siguiente figura. Este sistema está conformado por un objeto cerrado de material ferromagnético, rodeado por un arrollamiento de N vueltas de un hilo conductor aislado sobre el cual se establece una corriente I a través de una fuente de tensión externa.



La corriente I en el arrollamiento provocará la aparición de un vector de intensidad de campo magnético H . La relación entre estas magnitudes puede calcularse mediante la ley de Ampere, calculada sobre la trayectoria cerrada de longitud media l .

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad \xrightarrow[\text{campo medio } H]{\text{trayectoria media } l} NI = Hl \quad (1)$$

La intensidad de campo magnético H provoca en el material la aparición de un vector inducción magnética B .

La inducción magnética se puede expresar según las siguientes expresiones:

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H \quad \text{ó} \quad B = \mu_0 J + \mu_0 H$$

Donde:

- μ : permeabilidad magnética
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$: permeabilidad magnética del vacío
- μ_r : permeabilidad relativa del material (para un estado magnético específico)
- $\mathbf{J}$: vector de imantación, también denominado intensidad de magnetización ($\mathbf{M}$)

Finalmente se calcula flujo magnético Φ presente en un circuito magnético a partir de la integral de área.

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{inducción magnética media } B]{\text{sección de área } S} \Phi = B S \quad (2)$$

Combinando (1) y (2) se tiene la expresión:

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} \quad (3)$$

11.1.2. Ley de Hopkinson

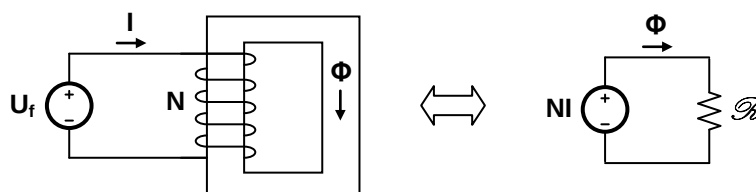
Entre los valores que caracterizan los circuitos eléctricos y magnéticos existe una analogía formal que permite introducir, para los circuitos magnéticos, una serie de conceptos análogos a los que sirven para describir los fenómenos de los circuitos eléctricos. Partiendo de la ecuación (3) se plantea la ley de Hopkinson o análogo magnético de la ley de Ohm:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}mm}{\mathcal{R}} \quad \xleftrightarrow{\text{Analogía}} \quad I = \frac{U}{R}$$

Donde:

- Φ : Flujo magnético → Análogo a la corriente eléctrica I
- $\mathcal{F}mm = NI$: Fuerza magneto-motriz → Análogo a la tensión o diferencia de potencial U
- $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$: Reluctancia magnética → Análoga a la resistencia eléctrica R

A partir de esto se puede hacer una equivalencia entre el circuito magnético anterior con uno eléctrico de la siguiente forma:

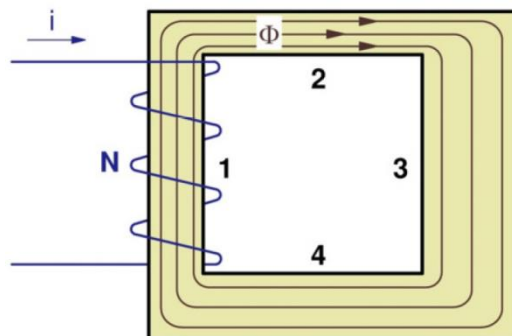


Así, gracias a la similitud de las fórmulas, el conjunto de los elementos que canalizan el flujo, pueden compararse a un circuito eléctrico del mismo esquema y tratarse como tal en los cálculos. Debe tenerse en cuenta que no se trata, sin embargo, más que una analogía matemática ya que los fenómenos físicos involucrados son completamente diferentes.

Finalmente debe tenerse en consideración que la intrínseca relación no lineal entre el campo magnético H y la inducción magnética B restringe los métodos a aplicar en la resolución de tales circuitos magnéticos, haciéndose necesario aplicar métodos gráficos o computacionales para la resolución de los mismos.

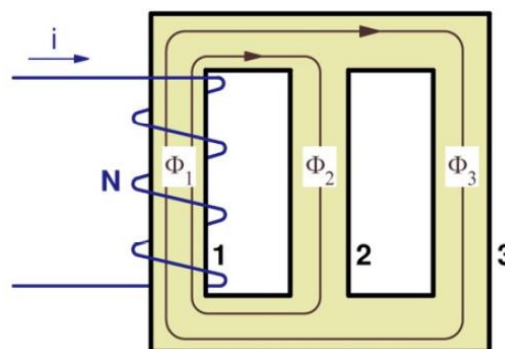
11.1.2.1. Circuito serie

Si el recorrido de las líneas de campo de un circuito magnético se encuentra con zonas de propiedades magnéticas y geometrías diferentes, la reluctancia total del circuito puede descomponerse en una serie de reluctancias parciales de forma tal que la reluctancia total es igual a la suma de las reluctancias parciales (de forma análoga a un circuito eléctrico). En el circuito de la figura, se cuenta con 4 reluctancias (1 a 4) conectadas en serie.



11.1.2.2. Circuito paralelo

En otros casos, el flujo magnético total del circuito magnético toma distintos cambios parciales. Cada uno de estos circuitos parciales tiene un recorrido cerrado, utiliza una parte de las líneas de campo totales y conduce sólo una parte del flujo magnético total, de forma que la suma de los flujos de todos los circuitos magnéticos parciales es igual a flujo total. En este caso los circuitos parciales están en paralelo, la permeancia total es equivalente a la suma de las permeancias de los circuitos magnéticos parciales.

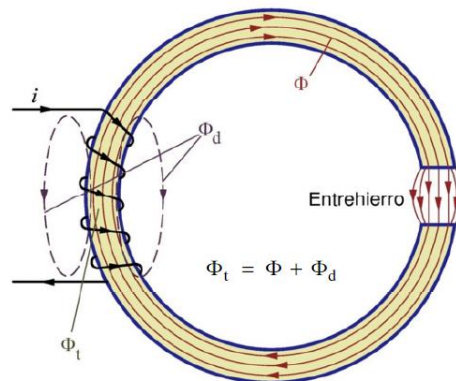


11.1.2.3. Dispersión y entrehierro

Aunque la elevada permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos hace que la mayor parte de las líneas de campo queden conducidas por los circuitos magnéticos realizados con tales materiales, el aire y, en general, los materiales amagnéticos no actúan como “aislantes magnéticos” y una pequeña parte de las líneas de campo se “escapan” del circuito magnético, circulando fuera del él. Así el flujo total Φ_t (generado por las bobinas o un imán permanente) constará de un flujo útil Φ y un flujo de dispersión Φ_d o de fuga que no participa en el circuito ferromagnético.

$$\Phi_t = \Phi + \Phi_d$$

El coeficiente de dispersión o de Hopkinson v es un parámetro que toma valores 1,1 a 1,3 y se define mediante:



$$v = \frac{\Phi_t}{\Phi} = \frac{\Phi + \Phi_d}{\Phi} \rightarrow \Phi_t = v \Phi$$

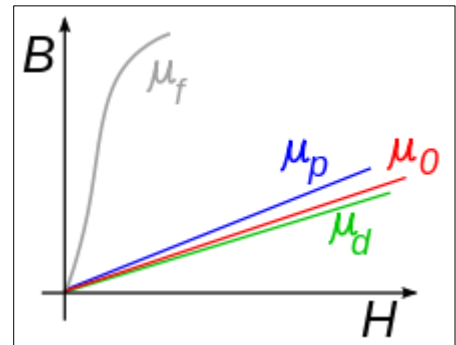
Como se observa en la figura en algunos casos es preciso incluir un parte de material amagnético dentro del circuito magnético, la cual se denomina entrehierro. Normalmente estos están formados por aire. Las líneas de campo, en su paso por el entrehierro, sufren una expansión que aumenta la sección a través la cual circula el flujo magnético. En este apunte, salvo que se indique expresamente lo contrario, se despreciará esta expansión y se supondrá la misma sección que la del material ferromagnético.

Se aprecia que el enterhierro queda en serie con el camino ferromagnético. Ya a que la permeabilidad de los materiales ferromagnéticos es mucho mayor a la del aire, suele ser una primera aproximación en la resolución, deprecia la reluctancias del ferromagnético y contemplar sólo la reluctancia del entrehierro.

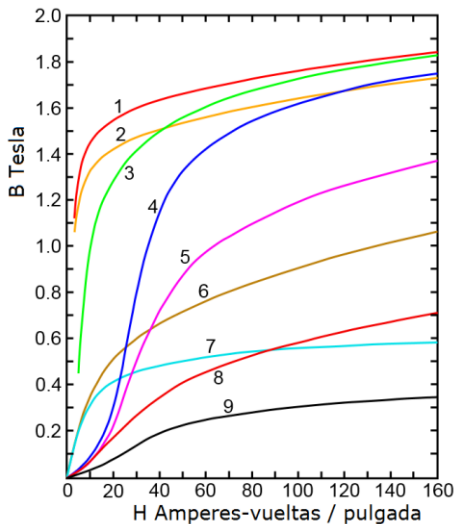
11.1.3. Materiales magnéticos

Según su comportamiento frente a la exposición de campos magnéticos, los materiales se clasifican en:

- **Diamagnéticos (d):** reacción débil, negativa y repulsiva de un material a un campo magnético aplicado; un material diamagnético tiene una pequeña susceptibilidad magnética negativa.
- **Paramagnéticos (p):** reacción atractiva, positiva y débil de un material a un campo magnético aplicado; el material paramagnético tiene una pequeña susceptibilidad magnética positiva.
- **Ferromagnéticos (f):** creación de una magnetización muy grande en un material cuando se somete a un campo magnético aplicado. Después de que se suprime el campo aplicado, el material ferromagnético retiene significativamente de la magnetización.



Por sus propiedades, dentro de la ingeniería eléctrica, resultan de gran interés los materiales ferromagnéticos (Hierro, Cobalto, Níquel y aleaciones). En estos materiales la relación entre el campo magnético H y la inducción magnética B no tiene una expresión analítica exacta, de modo que se la representa, para cada material ferromagnético, en formas de curvas de imantación o magnetización determinadas experimentalmente.



A modo ilustrativo se muestra en la figura siguiente nueve curvas de magnetización de materiales ferromagnéticos diferentes, mostrándose aquí sólo el comportamiento del primer cuadrante

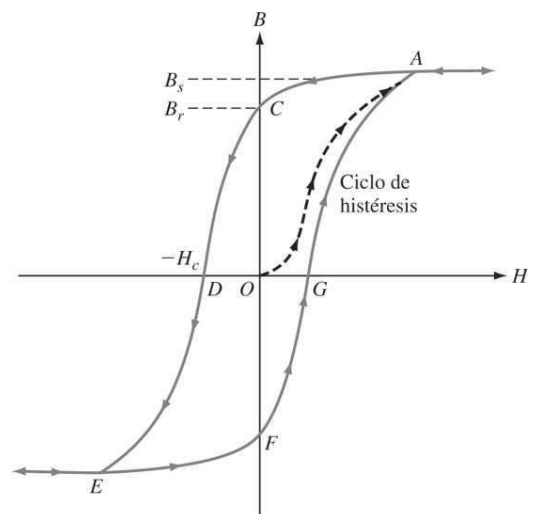
1.Hoja de acero, 2.Acero al silicio, 3.Acero de crisol, 4.Acero al tungsteno, 5.Acero magnético, 6.Hierro de crisol, 7.Níquel, 8.Cobalto, 9.Magnetita

Los metales ferromagnéticos adquieren grandes magnetizaciones

cuando se colocan en un campo magnetizante, y permanecen en la condición magnetizada a un menor grado después de que se suprime el campo de magnetización. Se considerará el efecto de un campo aplicado H sobre la inducción magnética B de un metal ferromagnético durante la magnetización y desmagnetización, como se muestra en la gráfica de B en función de H de la figura siguiente.

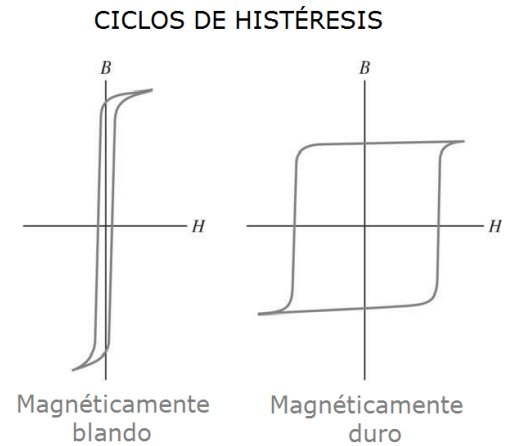
Primero, se desmagnetiza un metal ferromagnético como el hierro. Después, se aplica un campo magnetizante a la muestra y se sigue el efecto del campo aplicado sobre la inducción magnética. Cuando el campo aplicado aumenta desde cero, B crece desde cero a lo largo de la curva OA hasta que la inducción por saturación se alcanza en el punto A . Después de reducir el campo aplicado hasta cero, la curva de magnetización original ya no se vuelve a trazar y ahí permanece una densidad de flujo magnético conocida como inducción remanente B_r (punto C). Para disminuir la inducción magnética hasta cero, debe aplicarse un campo inverso (negativo) de la cantidad H_c , que recibe el nombre de fuerza coercitiva (punto D). Si el campo aplicado negativo se aumenta todavía más, a la larga el material alcanzará la inducción por saturación en el campo inverso en el punto E .

Cuando se suprime el campo inverso, la inducción magnética volverá a la inducción remanente en el punto F y luego de la aplicación de un campo positivo, la curva B - H continuará el trayecto FGA para completar un circuito. Una aplicación adicional de los campos aplicados inverso y directo para la inducción por saturación, producirá el ciclo repetitivo de $ACDEFGA$. Este circuito de magnetización se conoce como ciclo de histéresis, y su área interna es una medida de la energía perdida por el trabajo realizado por medio del ciclo de magnetización y desmagnetización (típico ante una circulación de corriente alterna).



La parte de la curva situada en el segundo cuadrante, limitada por la inducción remanente B_r ($H=0$) y la fuerza coercitiva H_c ($B=0$) se llama curva de desmagnetización y se utiliza para el cálculo de imanes permanentes.

Un material magnético blando se magnetiza y desmagnetiza con facilidad, mientras que un material magnético duro es difícil de magnetizar y desmagnetizar. En un principio, los materiales magnéticos blandos y duros eran físicamente blandos y duros. En la actualidad, sin embargo, la dureza física de un material magnético no indica necesariamente si es magnéticamente blando o duro. Los materiales blandos como las aleaciones de hierro con 3 a 4 por ciento de silicio que se utilizan en los núcleos de transformadores, motores y generadores tienen ciclos de histéresis reducidos con bajas fuerzas coercitivas. Por otro lado, los materiales magnéticos utilizados en los imanes permanentes tienen ciclos de histéresis anchos con fuerzas coercitivas altas.



11.1.4. Energía almacenada en el campo magnético

Suponiendo un circuito magnético elemental formado por una bobina de N espiras arrollada sobre un núcleo de sección S , longitud media l , volumen V y reluctancia $\mathcal{R}$ fabricado con un material de permeabilidad magnética μ . La bobina está recorrida por una corriente i que produce una fuerza magnetomotriz $\mathcal{F}_{mm}$ y sus espiras atravesadas por un flujo Φ , lo que hace que la bobina tenga unos enlaces de flujo total Ψ . L es la inductancia de la bobina. Todas estas magnitudes se relacionan entre sí de la siguiente manera:

$$V = S \cdot l \qquad \mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \qquad \mathcal{F} = N \cdot i = H \cdot l$$

$$\Phi = B \cdot S \qquad \Psi = N \cdot \Phi = L \cdot i \qquad B = \mu \cdot H$$

La **energía magnética** W_m almacenada en el sistema vale:

$$W_m = \int_V \left[\int_0^B H \, dB \right] dV = \left[\int_0^B H \, dB \right] (S \cdot l) = \int_0^B (H \cdot l) (S \cdot dB) = \int_0^\Phi \mathcal{F} \, d\Phi$$

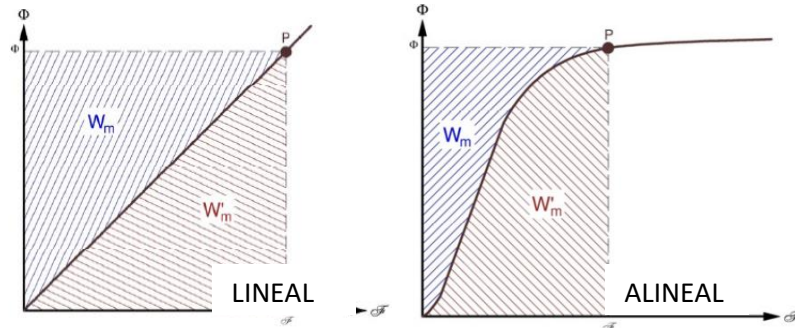
$$W_m = \int_0^\Phi (N \cdot i) \, d\Phi = \int_0^\Phi i (N \cdot d\Phi) = \int_0^\Psi i \, d\Psi$$

$$W_m = \int_0^\Phi \mathcal{F} \, d\Phi = \int_0^\Psi i \, d\Psi$$

Obteniéndose análogamente una función matemática la coenergía magnética que suele usarse en el campo de magnetismo:

$$W'_m = \int_0^{\mathcal{F}} \Phi d\mathcal{F} = \int_0^i \Psi di$$

Las siguientes figuras muestran la curva Flujo – Fuerza MagnetoMotriz de un circuito magnético lineal y alineal y las áreas que definen W_m y W'_m



En medios lineales se verifica que:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F} \Phi = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}}$$

De donde se puede expresar:

$$L = N \frac{\Phi}{i} \text{ y } \mathcal{F} = Ni \rightarrow W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F} \Phi = \frac{1}{2} (Ni) \left(\frac{Li}{N} \right)$$

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L i^2$$

(medios lineales)

A través de otra operatoria matemática

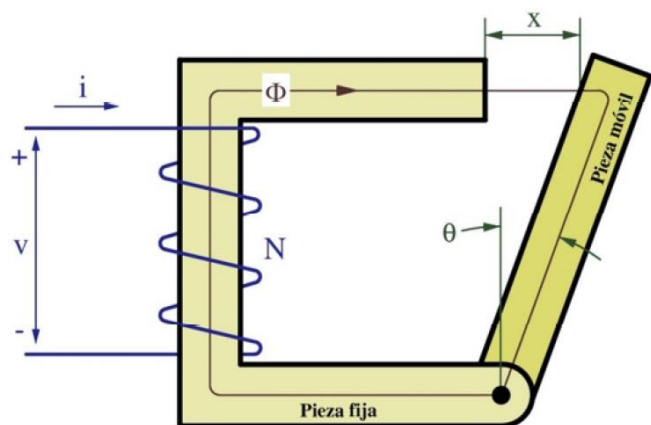
¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., también considerando permeabilidad constante como sucede en el caso de un entrehierro se encuentra

$W = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2$ en total correspondencia con la encontrada mediante trabajos virtuales.

11.1.5. Fuerzas - Principios de los trabajos virtuales

Del mundo real es evidente que en un circuito magnético como el de la figura aparece sobre la pieza móvil una fuerza horizontal f que tiende a “acercar” dicha pieza o de otra forma reducir la distancia x , y que provoca entonces un torque o par M que tiende a reducir el ángulo θ .

Existen diversos caminos para calcular la fuerza f y torque M siendo uno de ellos el principio de los trabajos virtuales. Supongamos que la fuerza f provocara un movimiento diferencial en la dirección de x (o de forma equivalente, un giro diferencial de θ) y que este movimiento realiza de forma que se mantiene constante el valor de flujo. Esto no significa que se va a mover, pero si supone un movimiento ficticio (virtual) de esta



manera los valores de f y M se pueden calcular a partir de la variación que se presentaría en la energía magnética almacenada en los mismos:

$$f = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{\Phi=\text{cte}} \quad M = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right|_{\Phi=\text{cte}}$$

Si el movimiento virtual se realizara de forma que la corriente de la bobina permaneciera siempre constante, se deduce que f y M se puede obtener a partir de las variaciones de coenergía magnética:

$$f = + \left. \frac{\partial W'_m}{\partial x} \right|_{i=\text{cte}} \quad M = + \left. \frac{\partial W'_m}{\partial \theta} \right|_{i=\text{cte}}$$

Aplicando este principio sobre un sistema lineal (o linealizado en su punto de operación) se deduce que:

$$f = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

$$M = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$

Considerando que el electroimán de la figura previa se encuentra cerrado es posible calcular la fuerza “portadora” o de “sujeción” considerando que la reluctancia del entrehierro se ve afectada sólo en la distancia x , sin afectarse la superficie.

$$\mathcal{R} = \frac{x}{\mu_0 S} \rightarrow \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{\mu_0 S} \rightarrow f = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{\mu_0 S} \rightarrow f = - \frac{B^2 S}{2 \mu_0}$$

Se encuentra así una ecuación de la fuerza muy utilizada que sólo resulta válida cuando el volumen del entrehierro es mucho menor que la del material magnetizado y se ignoran los efectos de punta.

11.1.6. Pérdidas magnéticas

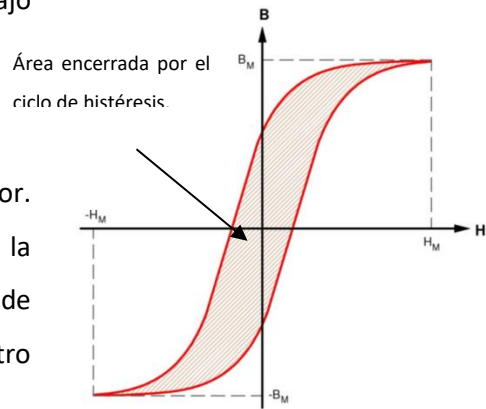
Cuando un material ferromagnético se ve sometido a la acción de un campo variable en el tiempo, en su interior se produce fenómenos físicos que conllevan un gasto de energía que, finalmente, se acaba convirtiendo en calor. La potencia correspondiente a dicha energía, naturalmente activa, se la denomina **Pérdidas Magnéticas**. De forma general el gasto de energía se divide en dos fenómenos, la histéresis y las corrientes de Foucault.

11.1.6.1. Pérdidas por histéresis

Los cambios de tamaño y las rotaciones de los dominios magnéticos que se producen en el interior de un material ferromagnético sometido a una excitación magnética variable, conllevan el gasto de una energía debido al fenómeno de histéresis magnética. Formalmente el trabajo desarrollado en un ciclo de histéresis puede obtenerse como:

$$Wh = \oint H \cdot dB$$

Esta energía finalmente se acaba transformando en calor. Desarrollando matemáticamente la expresión se obtiene que la energía desarrollada durante un ciclo y por unidad de volumen de material ferromagnético es proporcional al área encerrada dentro del ciclo de histéresis.



De esta forma, si la excitación magnética está variando de forma periódica con un período de T segundos, lo que equivale a una frecuencia de $f=1/T$ [Hz], la potencia perdida por histéresis en una pieza de material ferromagnético de volumen V_{Fe} vale:

$$P_H = \frac{V_{Fe} \cdot \text{Área del ciclo}}{T} = V_{Fe} \cdot \text{Área del ciclo} \cdot f$$

Esta expresión no depende de la forma en como varía la excitación en el tiempo, sino sólo de su frecuencia, del volumen del material ferromagnético y de sus propiedades magnéticas (de las que depende el área de su ciclo de histéresis). La **fórmula de Steinmetz** es una relación *empírica* que permite obtener las pérdidas por histéresis de una pieza de material ferromagnético:

$$P_H = V_{Fe} \cdot k_H \cdot B_M^\alpha \cdot f$$

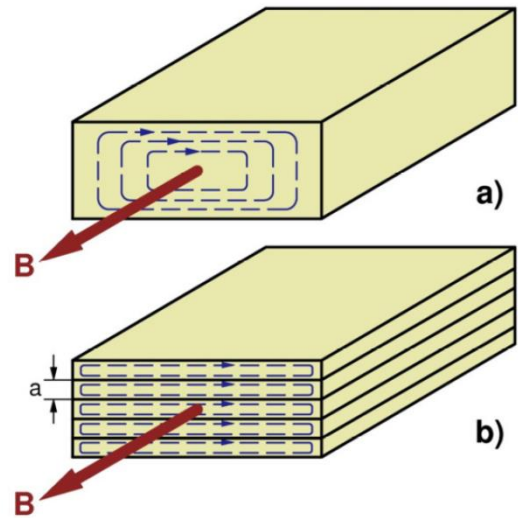
El coeficiente de Steinmetz k_H y el exponente de Steinmetz α dependen del material ferromagnético y se obtienen experimentalmente. α toma valores entre 1,5 y 2,5, siendo 1,6 su valor más habitual. En el acero al silicio k_H toma valores entre 100 y 200.

11.1.6.2. Pérdidas por corrientes de Foucault

Los materiales ferromagnéticos son metales y, por consiguiente, son conductores eléctricos. Por lo tanto, cuando se ven sometidos a un flujo variable en el tiempo se inducen fuerzas electromotrices (fems) en ellos, que dan lugar a la circulación de corrientes en su interior. Estas corrientes inducidas en la masa del material ferromagnético se denominan corrientes parásitas (Eddy currents) o corrientes de Foucault.

El material ferromagnético presenta una resistencia eléctrica, por lo que la circulación de las corrientes de Foucault da lugar a pérdidas por efecto Joule (I^2R). Para reducir este tipo de pérdidas se aumenta la resistencia que presentan las piezas de material ferromagnético construyéndolas no de forma maciza (como la fig. a) sino mediante el apilamiento de múltiples chapas delgadas, aisladas entre si colocadas de forma tal que su plano sea paralelo al de las líneas de campo magnético (fig. b). Esta disposición aumenta la longitud del recorrido y disminuye la sección neta, incrementando así la resistencia eléctrica total a la circulación de las corrientes parásitas.

Para una condición similar al caso de la fig. b, donde campo magnético B variable atraviesa un paquete de chapas de material ferromagnético y que la inducción magnética B varía de forma sinusoidal:



$$B = B_M \cos(2\pi ft)$$

Planteando la integral de las pérdidas producidas por un hilo diferencial de corriente que circula por un diferencial de resistencia, se encuentra que las pérdidas por corriente de Foucault se pueden calcular según:

$$P_F = V_{Fe} \cdot k_F \cdot a^2 \cdot \sigma \cdot B_M^2 \cdot f^2$$

Donde:

- V_{Fe} : Volumen del material ferromagnético
- k_F : Coeficiente del recorrido de la corriente que para bajas frecuencias vale $\frac{\pi^2}{6}$
- a : Espesor de las chapas de material ferromagnético
- σ : Conductividad eléctrica (inversa de la resistividad) de l material ferromagnético
- B_M : Valor máximo de la inducción magnética
- f : Frecuencia de la variación de B

11.1.6.3. Pérdidas magnéticas totales

Conforme se deduce de los resultados previos, las pérdidas totales en el hierro resultan la suma de una componente por histéresis más otra por corrientes de Foucault:

$$P_{Fe} = P_H + P_F = V_{Fe} \cdot (k_H \cdot B_M^\alpha \cdot f + k_F \cdot a^2 \cdot \sigma \cdot B_M^2 \cdot f^2)$$

Se destaca, que fijadas las características intrínsecas del material, las pérdidas en el hierro sólo dependerán de la frecuencia y del valor máximo de la inducción magnética.

11.2. Circuitos excitados con una fuente de corriente continua

Si se hace circular una corriente continua sobre un arrollamiento que abraza un circuito magnético, se establecerá un flujo magnético constante (en el tiempo) sobre el mismo. Las relaciones que se establezcan entre las variables eléctricas y magnéticas se pueden relacionar mediante la Ley de Hopkinson previamente enunciada y, naturalmente, las características de los materiales presentes.

Si se cuenta con una bobina alimentada con una tensión continua V , por ella circulará una corriente continua $I=U/R$ (ley de ohm), independiente de la reluctancia $\mathcal{R}$, **o sea independiente del circuito magnético. Por otra parte, el flujo va a depender de las características magnéticas y de la resistencia de la bobina, tal como se obtiene de la Ley de Hopkinson:**

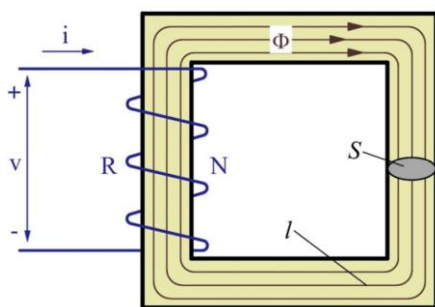
$$\Phi = \frac{\mathcal{F}_{mm}}{\mathcal{R}} = \frac{N \cdot V}{\mathcal{R} \cdot R}$$

Para poder explicar los conceptos de forma aplicada, se presentan a continuación los cálculos requeridos sobre ejemplos elementales tomando distintas condiciones conocidas e incógnitas.

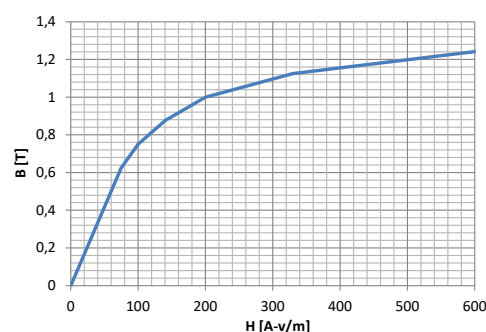
11.2.1. Ejemplo 1 – Circuito magnético homogéneo

Caso A: Tomando la característica B-H del material y las características constructivas del circuito se desea calcular la corriente necesaria para operar con un nivel de inducción magnética $B = 1$ Tesla.

Caso B: Tomando la característica B-H del material y las características constructivas del circuito se desea calcular el flujo Φ del circuito si el bobinado es recorrido por una corriente de 2,5 A.



H [A-v/m]	B [T]
0	0
75	0,625
100	0,75
140	0,875
200	1
330	1,125
620	1,25



Datos constructivos:

- Sección $S = 4 \text{ cm}^2$
- Longitud total del circuito magnético $l = 20 \text{ cm}$
- Cantidad de espiras (vueltas) $N = 30$

Resolución Caso A

Partiendo de un nivel objetivo de inducción magnética **B**, el valor de campo magnético **H** requerido se encuentra directamente relacionado con el material, el cual resulta de la curva del mismo $H = 200 \text{ Av/m}$.

Siendo así la corriente requerida: $I = \frac{Hl}{N} = \frac{200 \text{ Av/m} \cdot 0,2 \text{ m}}{30v} = 1,33 \text{ A}$

Resolución Caso B

Para el Caso B, considerando un material homogéneo, el proceso de resolución es recíproco. Se calcula inicialmente la fuerza magnetomotriz (**$\mathcal{F}_{mm}$**) generada por la corriente indicada.

$$\mathcal{F}_{mm} = NI = 30 \cdot 2,5 \text{ A} = 75 \text{ Av}$$

Por otra parte se obtiene la función $\Phi = \Phi(\mathcal{F}_{mm})$ a partir de la curva $B = B(H)$.

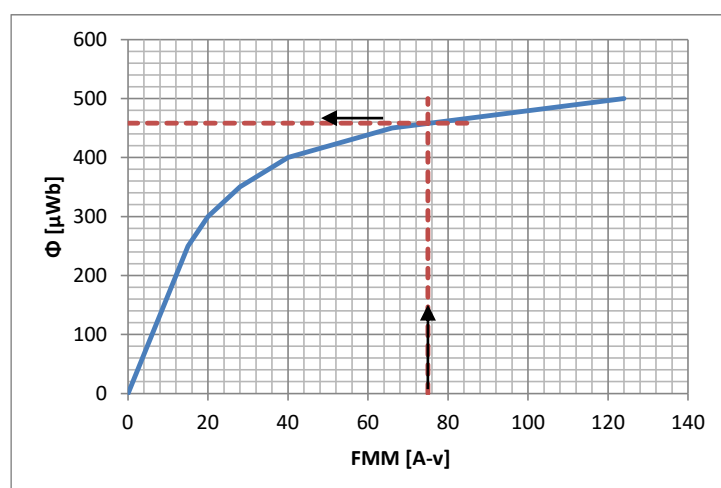
Finalmente, el flujo solicitado se determina directamente (interpolando) de la curva obtenida, ingresando desde el eje de las abscisas. El valor objetivo resulta entonces $\Phi(75\text{Av}) = 458\mu\text{Wb}$

Las relaciones entre el flujo Φ y la fuerza magnetomotriz $\mathcal{F}_{mm}$ con la inducción magnética **B** y el campo magnético **H** para tal punto de operación se obtienen, respectivamente, de las características constructivas.

Nota: "Av" corresponde a la abreviación AMPERE - VUELTAS

H [A-v/m]	B [T]	FMM [A v] = H x l	Φ [μWb] = B x S
0	0	0	0
75	0,625	15	250
100	0,75	20	300
140	0,875	28	350
200	1	40	400
330	1,125	66	450
375	1,144*	75	458*
620	1,25	124	500

* Valor interpolado



11.2.2. Ejemplo 2 – Circuito magnético con entrehierro (no homogéneo)

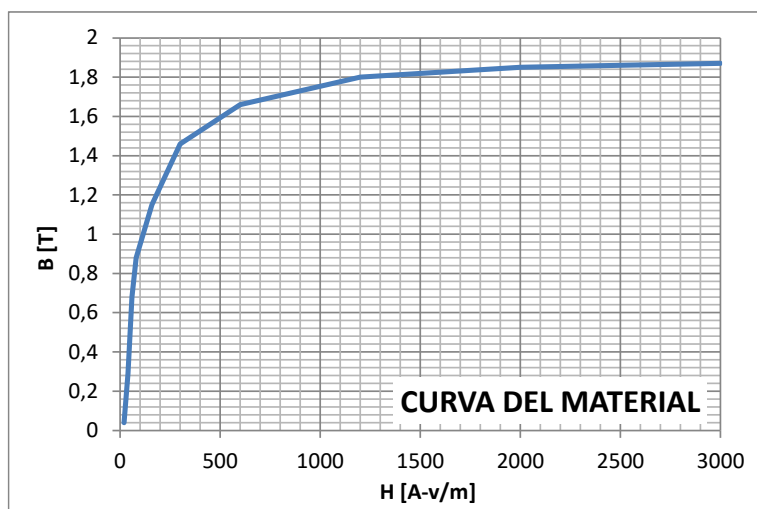
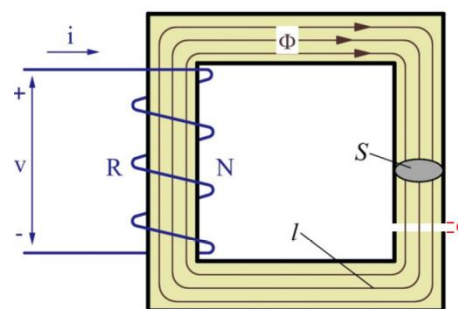
De modo análogo al ejemplo anterior se desean resolver los casos A y B considerando que el circuito magnético cuenta ahora con un entrehierro (e).

Caso A: Tomando la característica B-H del material y las características constructivas del circuito se desea calcular la corriente necesaria para operar con un nivel de inducción magnética $B = 1 \text{ Tesla}$.

Caso B: Tomando la característica B-H del material y las características constructivas del circuito se desea calcular el flujo Φ del circuito si el bobinado es recorrido por una corriente de 90 A.

Datos constructivos:

- Sección $S = 4 \text{ cm}^2$
- Longitud total del circuito magnético $\ell = 20 \text{ cm}$
- Cantidad de espiras (vueltas) $N = 30$
- Entrehierro $e = 0,2 \text{ cm}$. Considerar que es suficientemente pequeño, de modo que $S_e = S$.
- Material según curva adjunta



Curva del Material	
H [A-v/m]	B [T]
20	0,04
40	0,29
60	0,68
80	0,88
160	1,15
300	1,46
600	1,66
1200	1,8
2000	1,85
3000	1,87

Resolución Caso A

El circuito magnético en cuestión puede representarse por un equivalente conforme a la siguiente figura. En el mismo se considera que todo el flujo generado por la fuente de FMM (NI) se cerrará a través del camino magnético, el cual presenta un solo flujo y distintas reluctancias en base a las características físicas del mismo.

Considerando $S_e = S$, resulta $B_e = B = \frac{\Phi}{S} = 1,0 \text{ T}$

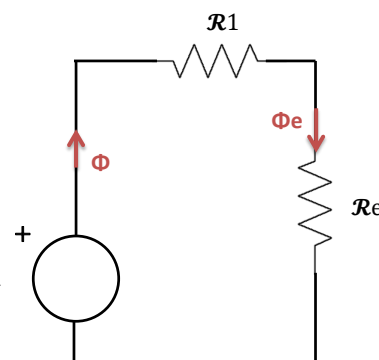
Tomando la característica del material y considerando que en el entrehierro vale la permeabilidad del vacío, se obtienen $H_e = \frac{B}{\mu_0} = 795775 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ y $H_1 \approx 116 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ (obtenido de la curva B-H del material)

De esta forma, la caída de potencial magnético total se puede plantear como:

$$\mathcal{F}_{mm} = N \cdot I = H_1 \cdot l_1 + H_e \cdot l_e$$

$$\Rightarrow H_1 \cdot l_1 + H_e \cdot l_e = 795775 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,002\text{m} + 116 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0,2\text{m} = 1591,5\text{Av} + 26,2 \text{ Av} = 1614 \text{ Av}$$

Por último la corriente total requerida resulta $\cdot I = \frac{H_1 \cdot l_1 + H_e \cdot l_e}{N} = 53,82 \text{ A}$



Resolución Caso B

Siendo que el material no es lineal la resolución de este caso no puede hacerse de forma directa. Una opción es representar la curva del elemento completo (ferromagnético más entrehierro) y resolver de forma gráfica. La otra opción, adoptada aquí, es resolver de forma iterativa tal como lo haría un programa de cálculo.

En primera instancia, la **FMM** se calcula directamente con la corriente y número de espiras.

$$\mathcal{F}mm = NI = 30 \cdot 90A = 2700 \text{ Av}$$

Asimismo la reluctancia del entrehierro resulta: $\mathcal{R}_e = \frac{l}{\mu_0 S} = 3.978.874 \text{ Av/Wb}$

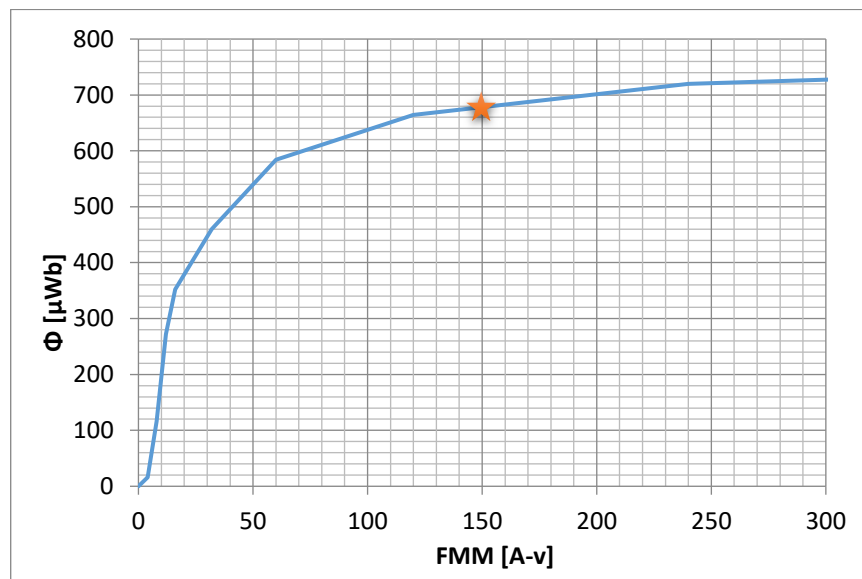
Como primera aproximación podemos suponer que el camino del ferromagnético es prácticamente despreciable frente al entrehierro (o sea $\mathcal{R}_1 \ll \mathcal{R}_e$) de modo que prácticamente toda la FMM caerá en el entrehierro. Esta condición nos dará un flujo máximo ya que no considera la caída en la reluctancia del ferromagnético.

$$\rightarrow \text{PASO 1 - } \mathcal{R}_1 \rightarrow 0 - \Phi = \Phi_{MAX} = \frac{\mathcal{F}mm}{Re} = 678,6 \text{ } \mu\text{Wb}$$

Conociendo ahora una primera aproximación del flujo previsto, se puede calcular la caída de potencial magnético que se presentaría en esta condición y a partir de allí estimar un nuevo valor de flujo. Para realizar esto se calcula la tabla $\Phi - FMM$ en base a la curva B-H, la longitud y sección del material.

$$\rightarrow \text{PASO 2 - } \mathcal{R}_1 \text{ tal que } \Phi = 678,6 \text{ } \mu\text{Wb}$$

Interpolando la curva $\Phi - FMM$ se tiene que para ese nivel de flujo la caída en el ferromagnético es: $H_1 \cdot l_1 = 150 \text{ Av}$. De esta forma se tiene entonces otra aproximación, considerando ahora que en el entrehierro la caída será $\mathcal{F}mm - H_1 \cdot l_1 = 2550 \text{ Av}$



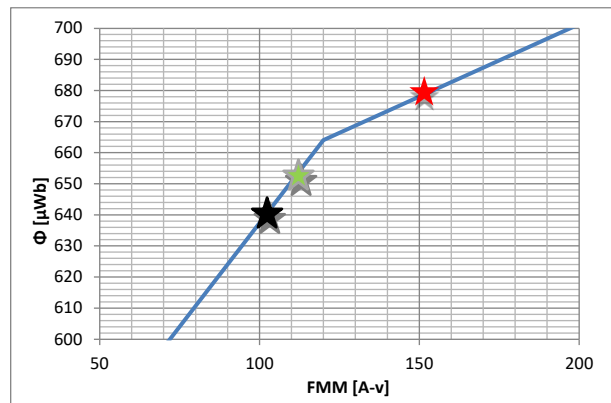
$$\rightarrow \text{PASO 3 - Recálculo de } \Phi = \frac{\mathcal{F}mm - H_1 \cdot l_1}{Re} = 641 \text{ } \mu\text{Wb}$$

De forma análoga se ingresa nuevamente a la curva y se obtiene un nuevo valor de la caída de potencial para tal nivel de flujo ($H_1 \cdot l_1 = 103 \text{ A}\cdot\text{v}$), con este valor se vuelve a calcular un flujo. Este proceso se repite hasta que los sucesivos pasos no tengan un impacto relevante en el resultado.

→ PASOS SIGUIENTES

A modo de resumen la siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para los siguientes pasos. Nótese que a partir del tercer paso los resultados no varían apreciablemente.

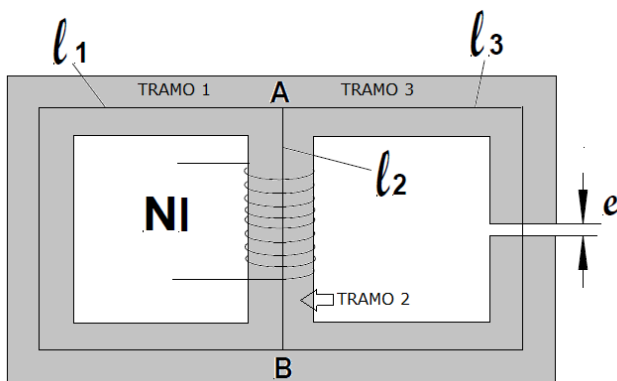
Iteración	FMM [A v]	H1x1 [A v]	Hexle [A v]	Φ [μWb]
0	2700	0	2700	678,6
1	2700	150	2550	640,9
2	2700	103	2597	652,7
3	2700	111	2589	650,7
4	2700	110	2590	650,9
5	2700	110,2	2589,8	650,9



Finalmente se encuentra que el flujo solicitado es de **650,9 μWb** lo que equivale a una inducción $B = \frac{\Phi}{S} = 1,6 \text{ T}$

11.2.3. Ejemplo 3 – Circuito magnético ramificado y con entrehierro (no homogéneo)

El siguiente circuito magnético consta de tres ramas, una de ellas cuenta con un entrehierro (e) mientras que otra cuenta con un bobinado (NI). Se desea determinar la corriente continua a inyectar en el bobinado para establecer un flujo magnético en el entrehierro de 0,1Wb. Calcular también todos los flujos magnéticos presentes en el circuito. Considerar que el espesor del entrehierro (e) es suficientemente pequeño, pudiendo considerarse que la sección del mismo es idéntica a la del tramo 3.



Datos:

- $S_1=S_3=0,1\text{m}^2$
- $S_2 = 0,2\text{m}^2$
- $l_1=1\text{m}$
- $l_2=0,5\text{m}$
- $l_3=1,2\text{m}$
- $e=0,001\text{m}$
- $\Phi_e = 0,1 \text{ Wb}$
- $N = 100$ vueltas
- Material según curva adjunta Ej2

Resolución

El circuito magnético en cuestión puede representarse por un equivalente conforme a la siguiente figura. En el mismo se considera que todo el flujo generado por la fuente de FMM (NI) se cerrará a través del camino magnético, el cual presenta distintas reluctancias en base a las características físicas del mismo.

En estas condiciones se pueden plantear

directamente las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{F}_{mm} = N \cdot I = H_2 \cdot l_2 + H_1 \cdot l_1$$

$$\Rightarrow H_1 \cdot l_1 = N \cdot I - H_2 \cdot l_2 \quad (1)$$

$$\mathcal{F}_{mm} = N \cdot I = H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_e \cdot l_e$$

$$\Rightarrow H_3 \cdot l_3 + H_e \cdot l_e = N \cdot I - H_2 \cdot l_2 \quad (2)$$

Asimismo considerando $S_e = S_3$, resulta $B_e =$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = 1,0 \text{ T}$$

Considerando la característica del material y considerando que en el entrehierro vale la

permeabilidad del vacío, se obtienen $H_e = \frac{B_3}{\mu_0} = 795775 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ y $H_3 \approx 116 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ (obtenido de la curva B-H del material)

De esta forma, la caída de potencial magnético de la rama 3 resulta según (2):

$$\Rightarrow H_3 \cdot l_3 + H_e \cdot l_e = 795775 \cdot 0,001 + 116 \cdot 1,2 = 935 \text{ Av}$$

Juntando (1) y (2) se tiene entonces: $H_3 \cdot l_3 + H_e \cdot l_e = H_1 \cdot l_1 = 935 \text{ Av} \Rightarrow H_1 = 935 \text{ A/m}$

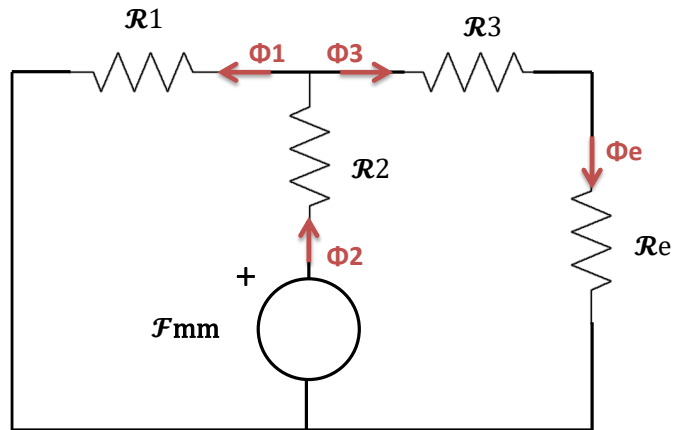
De donde, tomando la característica del material se obtiene: $B_1 = 1,738 \text{ T}$

Resultando: $\Phi_1 = B_1 \cdot S_1 = 0,1738 \text{ Wb}$ y $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 = 0,2738 \text{ Wb}$

Luego, a partir de Φ_2 se determina $B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = 1,369 \text{ T}$ obteniéndose de la curva B-H $\rightarrow H_2 = 262 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

Así se obtiene la fuerza magnetomotriz $\mathcal{F}_{mm} = N \cdot I = H_2 \cdot l_2 + H_1 \cdot l_1 = 262 \cdot 0,5 + 935 \cdot 1 = 1066 \text{ Av}$

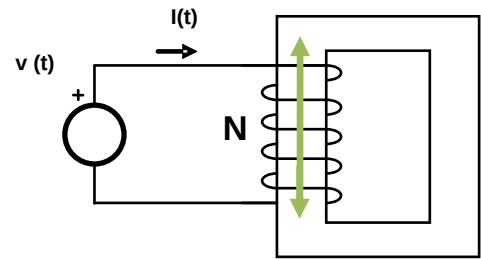
Finalmente a partir del número de espiras se obtiene la corriente requerida $I = 10,66 \text{ A}$



11.3. Circuito excitado con una fuente de corriente alterna

Considerando que el circuito magnético se alimenta con una tensión alterna $v(t) = \sqrt{2}V\cos(\omega t)$ en la bobina se presentará una diferencia de potencial asociada a la resistencia R y, por ley de Faraday, a la variación del flujo observado en cada una de las N espiras.

$$v(t) = Ri + \frac{d\psi}{dt} = Ri + N \frac{d\Phi}{dt}$$



Despreciando inicialmente el efecto de la resistencia

(condición razonable en las máquinas eléctricas), se puede escribir que

$$v(t) = N \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \Phi = \frac{\int v(t)dt}{N} \rightarrow \Phi = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V \cdot \sin(\omega t) = \Phi_{MAX} \cdot \sin(\omega t)$$

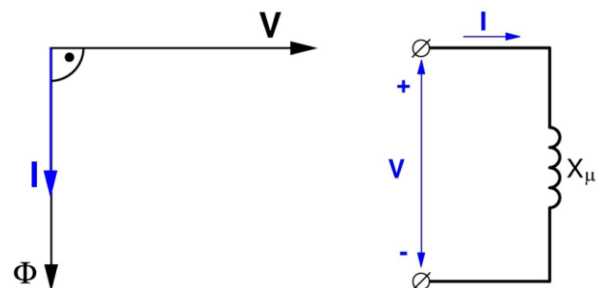
Siendo $\Phi_{MAX} = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V = \frac{\sqrt{2}}{N2\pi f} V = \frac{1}{N4,44f} \rightarrow V = 4,44 \cdot N \cdot f \cdot \Phi_{MAX}$

En función de esto se encuentra que cuando un circuito se alimenta con corriente alterna, el flujo depende de la tensión y de la frecuencia, sin que influyan las características del núcleo (no interviene la reluctancia). Sin embargo, dado a que el flujo y la corriente se relacionan mediante la ley de Hopkinson, para obtener el flujo Φ deberá circular una corriente proporcional a la reluctancia. Es decir, el valor de la corriente va a depender de las propiedades magnéticas del circuito; justo lo contrario al caso en el que el circuito magnético se alimenta con tensión continua.

Las ecuaciones previamente presentadas muestran que la tensión y el flujo (integral de la tensión) se encuentran desfasados 90° . Por otra parte, si suponemos que el circuito magnético no tiene pérdidas en el hierro la corriente que circula por la bobina se dedica únicamente a generar flujo y por lo tanto debe estar en fase con él y ser proporcional a él (dentro del rango de la linealidad del material). De esto se deduce que el diagrama fasorial que relaciona estas magnitudes es presentado a continuación, donde se aprecia que es similar al de una bobina ideal sin resistencia, valiendo un circuito equivalente como el adjunto.

La reactancia de la bobina equivalente está relacionada con su inductancia:

$$X_\mu = 2\pi f L_\mu \text{ siendo } L_\mu = \frac{\psi}{i} = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N}{i} \frac{F_{mm}}{\mathcal{R}} = \frac{N}{i} \frac{Ni}{\mathcal{R}} \rightarrow L_\mu = \frac{\mu N^2 S}{l}$$



Así en un circuito magnético sin pérdidas en el hierro y con resistencia despreciable, alimentado con corriente alterna sólo consume potencia reactiva

11.3.1. Pérdidas en el hierro

Supongamos ahora que la bobina sigue teniendo una resistencia R prácticamente nula pero las pérdidas en el hierro P_{Fe} ya no son despreciables. Estas pérdidas, que se producen en el núcleo magnético debidas a la histéresis y las corrientes parásitas, exigen que la bobina consuma una potencia activa del dominio eléctrico que luego se transformarán en calor. Así la corriente de magnetización total estará asociada a una componente reactiva (previamente presentada) y una componente activa (pérdidas), haciendo que su fase resulte menor a 90° (respecto a la tensión de alimentación).

$$I_{P_{Fe}} = I \cos \varphi \quad I_{\mu} = I \sin \varphi$$

La componente magnetizante (I_{μ}) es la que genera el flujo y por lo tanto es paralela a éste y sólo consume potencia reactiva. La componente de pérdidas ($I_{P_{Fe}}$) es paralela a la tensión por lo que consume potencia activa que tiene que tener un valor igual P_{Fe} .

De modo que se deduce que el circuito eléctrico equivalente de un circuito magnético alimentado con corriente alterna y que contempla las pérdidas magnéticas puede ser representado por la figura siguiente.

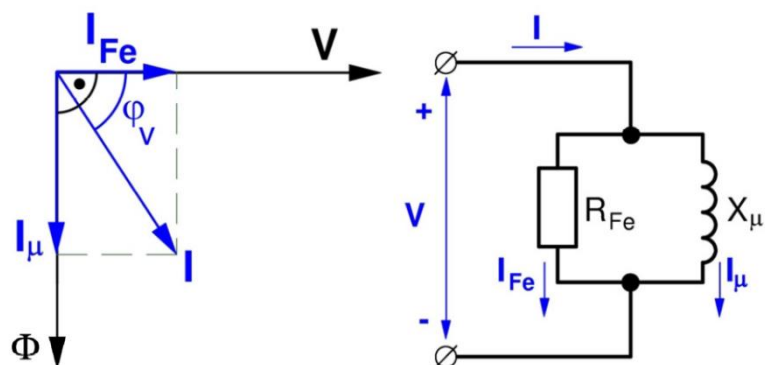
En este aparece la reactancia de magnetización (X_{μ}), calculada como se indica en el apartado anterior y la resistencia de pérdidas en el hierro R_{Fe} de valor tal que:

$$R_{Fe} = U^2 / P_{Fe}$$

Siendo las pérdidas totales en el

$$\text{hierro: } P_{Fe} = V_{Fe} \cdot (k_H \cdot B_M^{\alpha} \cdot f + k_F \cdot \alpha^2 \cdot \sigma \cdot B_M^2 \cdot f^2)$$

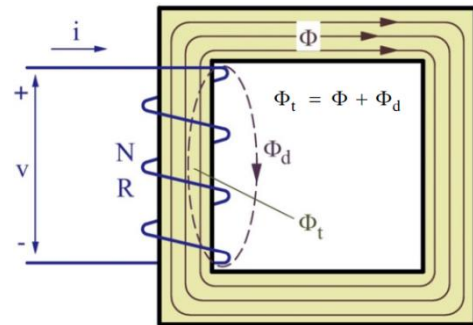
Circuito magnético con dispersión, resistencia y pérdidas en el hierro



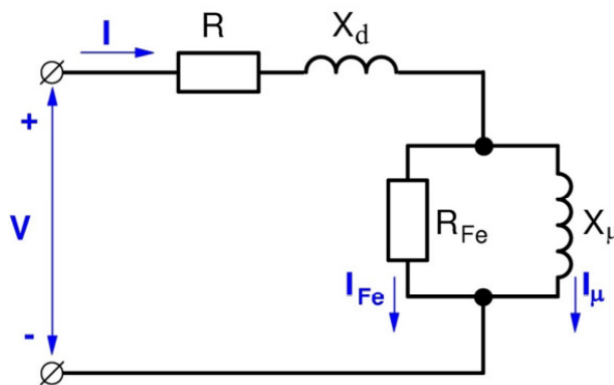
Finalmente se considera aquí que la bobina del circuito magnético cuenta con resistencia R apreciable y que además el flujo total Φ_t de la misma se conforma por un flujo útil Φ y una componente de dispersión Φ_d que no se cierra por el material magnético.

Se puede definir una reactancia de dispersión (leakage) L_d y una reactancia de dispersión X_d :

$$X_d = 2\pi f L_d \text{ siendo } L_d = \frac{\psi_d}{i} = \frac{N\phi_d}{i}$$



De esta forma se puede construir un el circuito equivalente más detallado, conforme se presenta en la siguiente figura. Donde la R corresponde a la resistencia óhmica del bobinado y los restantes componentes se obtienen conforme a lo presentado previamente.



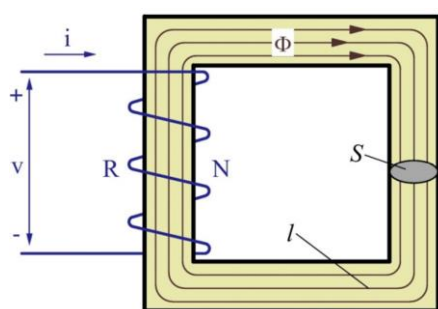
En los materiales ferromagnéticos la permeabilidad μ no es constante y se por lo tanto la corriente I no varía de forma sinusoidal en el tiempo. Sin embargo, esta corriente se puede sustituir por otra corriente sinusoidal equivalente que tiene el mismo valor eficaz y que origina las mismas pérdidas en el hierro. Esta corriente equivalente es la que, de manera implícita, se utiliza al aplicar un circuito equivalente como el presentado.

11.4. Ejercicios

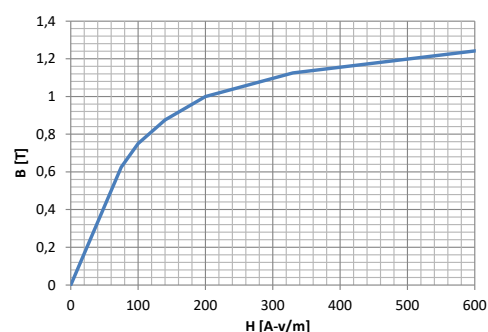
Problema 1

- Tomando la característica B-H del material y las características constructivas del circuito se desea calcular la corriente necesaria para operar con un nivel de inducción magnética $B = 1,2$ Tesla.
- Calcular el flujo magnético establecido en el circuito magnético.
- Indicar el valor de tensión v para establecer la corriente requerida

H [A-v/m]	B [T]
0	0



75	0,625
100	0,75
140	0,875
200	1
330	1,125
620	1,25



Datos constructivos:

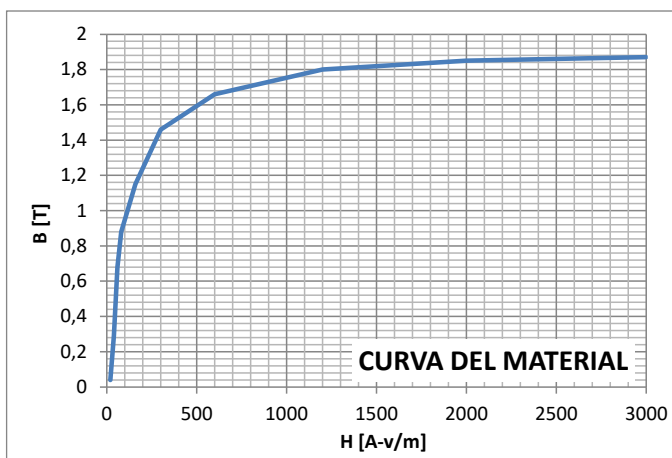
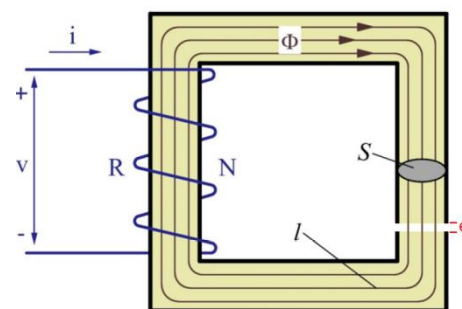
- Sección $S = 4 \text{ cm}^2$
- Longitud total del circuito magnético $l = 20 \text{ cm}$
- Cantidad de espiras (vueltas) $N = 30$
- Resistencia del bobinado $R = 4 \Omega$

Problema 2

Tomando la característica B-H del material y las características constructivas del circuito se desea calcular el flujo Φ del circuito si el bobinado es recorrido por una corriente de 54 A.

Datos constructivos:

- Sección $S = 4 \text{ cm}^2$
- Longitud total del circuito magnético $l = 20 \text{ cm}$
- Cantidad de espiras (vueltas) $N = 30$
- Entrehierro $e = 0,2 \text{ cm}$. Considerar que es suficientemente pequeño, de modo que $S_e = S$.
- **Material según curva adjunta**

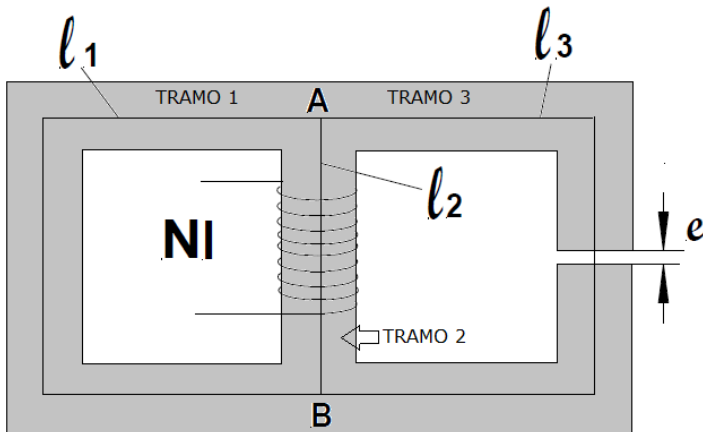


Curva del Material	
H [A-v/m]	B [T]
20	0,04
40	0,29
60	0,68
80	0,88
160	1,15
300	1,46
600	1,66
1200	1,8
2000	1,85
3000	1,87

Problema 3

El siguiente circuito magnético consta de tres ramas, una de ellas cuenta con un entrehierro (e) mientras que otra cuenta con un bobinado (NI). Se desea determinar la corriente continua a inyectar en el bobinado para establecer un flujo magnético en el entrehierro de 0,05Wb. Calcular también todos los flujos magnéticos

presentes en el circuito. Considerar que el espesor del entrehierro (e) es suficientemente pequeño, pudiendo considerarse que la sección del mismo es idéntica a la del tramo 3.



Datos:

- $S_1=S_3=0,1\text{m}^2$
- $S_2=0,2\text{m}^2$
- $l_1=1\text{m}$
- $l_2=0,5\text{m}$
- $l_3=1,2\text{m}$
- $e=0,001\text{m}$
- $\Phi_e=0,1\text{Wb}$
- $N=100$ vueltas
- Material según Problema 2

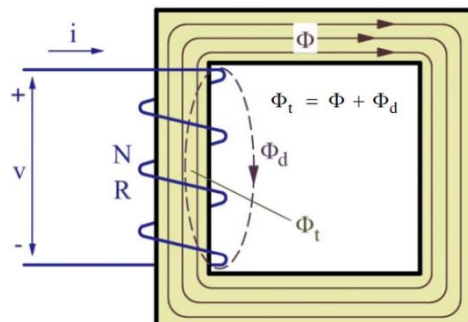
Problema 4

Considerando que el circuito magnético de la figura se alimenta con una tensión alterna:

$$v(t) = \sqrt{2} * 220 * \cos(314t)$$

- Tomando una condición inicial ideal, calcular el número de espiras N requerido para que el mismo opere con un $\Phi_{\text{max}} = 1\text{T}$.
- Adoptando una Sección $S = 1\text{cm}^2$ y una permeabilidad relativa $\mu_r(\text{Fe}) = 30.000$, obtener la reactancia y corriente de magnetización.
- Obtener la resistencia equivalente para representar las pérdidas de histéresis y por corrientes de Foucault (Total 10W).
- Considerando un coeficiente de Hopkinson $v=1,1$ obtener la reactancia de dispersión.
- Construir el circuito eléctrico equivalente del circuito magnético contemplando adicionalmente una resistencia del bobinado $R = 1\Omega$
- Calcular la corriente total de magnetización y el potencial en la rama de magnetización.

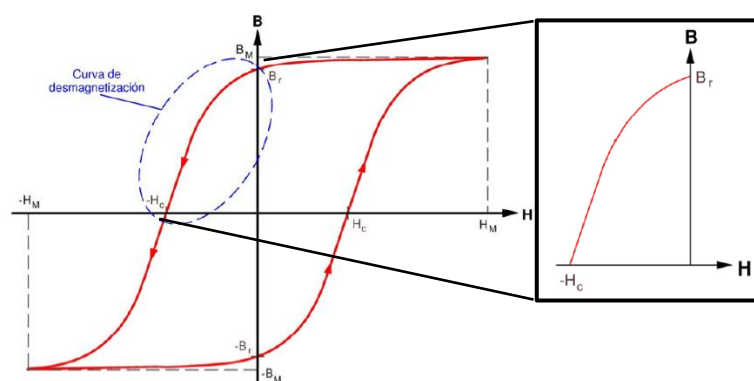
- Longitud total del circuito magnético $\ell = 10\text{cm}$



11.5. Caso de aplicación - IMANES PERMANENTES

Tal como se adelantó previamente, los imanes permanentes se constituyen de materiales ferromagnéticos duros. Estos materiales presentan un alto magnetismo remanente B_r por lo que mantienen una magnetización M elevada en ausencia de campo magnético externo y, por lo tanto, estos materiales son capaces de generar una inducción magnética por sí mismos, sin necesidad de que ninguna causa externa genere una excitación H . Asimismo, para que el material no pierda fácilmente su magnetización, interesa que su campo coercitivo H_c tenga un valor absoluto elevado.

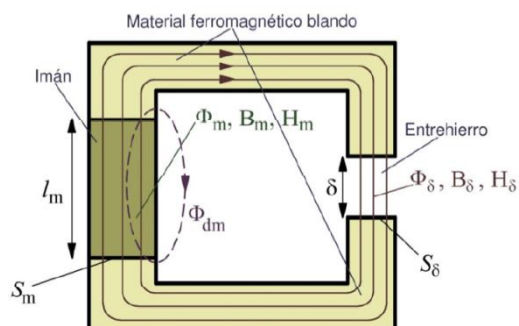
En la siguiente figura se identifica la curva de desmagnetización la cual, como se presenta a continuación, corresponde a la zona de trabajo de un imán permanente.



11.5.1. Punto de operación

La siguiente figura muestra un circuito magnético simple que cuenta con un imán (material ferromagnético duro), material ferromagnético blando y un entrehierro. El imán tiene una longitud l_m y una sección S_m y el entrehierro tiene dimensiones δ y S_δ respectivamente.

Dado que la permeabilidad magnética del material ferromagnético blando es muy superior a la del entrehierro y a la del imán, la supondremos de valor prácticamente infinito ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$). Así, sea cual sea el valor del flujo B_{Fe} , el campo H_{Fe} será nulo en el material ferromagnético blando por lo que su caída de potencial magnética $H_{Fe} \times l_{Fe}$ resultará nula.



El entrehierro se ve atravesado por el flujo útil Φ_δ , lo que hace que su inducción sea B_δ y su campo H_δ . El imán tiene un flujo de dispersión Φ_{dm} y un coeficiente de Hopkinson v_m por lo que el flujo total que lo atraviesa es:

$$\Phi_m = \Phi_\delta + \Phi_{dm} = v_m \Phi_\delta$$

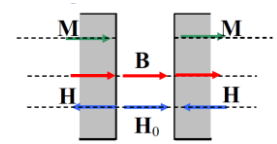
La inducción y campo en el imán son $\mathbf{B}_m$ y $\mathbf{H}_m$ respectivamente. La relación de estas dos magnitudes viene dada por la curva de desmagnetización de material ferromagnético duro con que está fabricado el imán. Operando la ecuación previa se tiene:

$$B_m \cdot S_m = v_m \cdot B_\delta \cdot S_\delta \quad \rightarrow \quad B_\delta = \left[\frac{S_m}{v_m S_\delta} \right] B_m$$

De esta relación se deduce que para conseguir un valor de inducción $\mathbf{B}_\delta$ en el entrehierro no es necesario que el imán tenga una inducción $\mathbf{B}_m$ de igual valor. Ajustando adecuadamente las secciones se puede lograr un mayor nivel de inducción en el entrehierro respecto a la de operación del imán.

Por otra parte, la caída de potencial magnético total se puede plantear como (ignorando la caída $H_{Fe} \times l_{Fe}$):

$$\mathcal{F}_{mm} = H_m \cdot l_m + H_\delta \cdot \delta = 0 \quad \rightarrow \quad H_m = -\frac{\delta}{l_m} H_\delta$$



Este resultado es muy importante, siendo necesario destacar que:

- Si no hubiera entrehierro ($\delta=0$) el campo del imán $\mathbf{H}_m$ sería nulo y según la curva de desmagnetización su inducción $\mathbf{B}_m$ sería máxima, igual a valor de magnetismo remanente $\mathbf{B}_r$.
- Al existir un entrehierro, hace que en el imán aparezca un campo negativo $\mathbf{H}_m$ y que la inducción sea menor al remanente $\mathbf{B}_r$. Así se encuentra entonces la razón por la que en circuitos con imanes permanentes se trabaja sobre el segundo cuadrante del ciclo de histéresis o curva de desmagnetización.

La permeabilidad magnética en el entrehierro es prácticamente igual a la del vacío y su reluctancia se obtiene directamente como:

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta \quad \rightarrow \quad H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta}$$

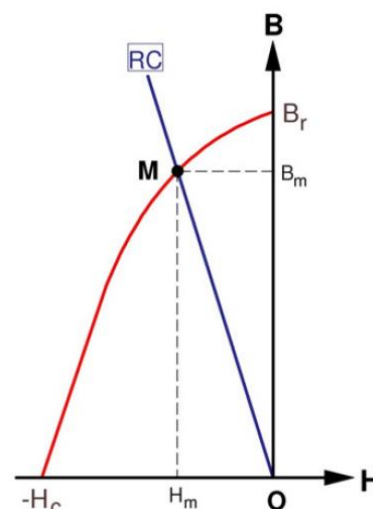
Combinando esta ecuación con la del circuito magnético completo previamente calculadas:

$$H_m \cdot l_m + \frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot \delta = 0 \quad \rightarrow \quad B_\delta = -\frac{\mu_0}{\delta} l_m H_m$$

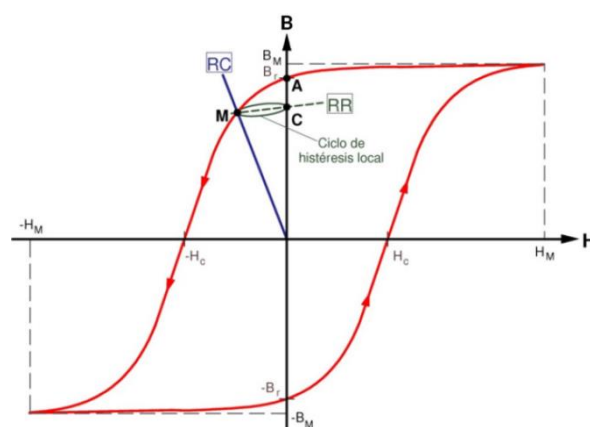
$$B_m = -\left[v_m \frac{\mu_0 S_\delta}{\delta S_m} l_m \right] H_m \quad \rightarrow \quad B_m = -\left[v_m \frac{l_m}{S_m \mathcal{R}_\delta} \right] H_m$$

La expresión previa indica que la relación entre B_m y H_m es lineal y por lo tanto es la ecuación de una recta, denominada recta de entrehierro o recta de carga (RC).

En resumen, la geometría y constitución del circuito magnético hacen que la relación entre B_m y H_m sea lineal; mientras que, por otra parte, las características magnéticas del imán hacen que, al menos inicialmente, la relación de estas dos magnitudes sea la correspondiente a la curva de desmagnetización. Siendo que ambas condiciones se deben cumplir simultáneamente, el circuito trabaja en el PUNTO DE OPERACIÓN o de FUNCIONAMIENTO M, obtenido como la intersección de la curva de desmagnetización y la recta de carga RC del circuito magnético.



En la figura siguiente se muestra el caso del circuito magnético en estudio, donde inicialmente el entrehierro es nulo y el circuito funciona en el punto A con una inducción remanente B_r . Seguidamente el entrehierro se aumenta hasta un valor δ al que corresponde la recta de carga RC. Esto hace que el punto de operación se mueva a lo largo de la curva de desmagnetización y pase a ser el punto M (intersección). Si ahora se vuelve a anular el entrehierro, el circuito no regresa al punto A inicial, sino al punto C, donde la inducción va a ser inferior a la remanente B_r que había en el punto A.



En efecto, debido al fenómeno de la histéresis no se obtiene el mismo valor de la inducción para un mismo valor de campo magnético si la historia previa del material es distinta. Mientras que el campo del material H_m ha ido haciéndose cada vez más negativa el punto de funcionamiento se ha ido desplazando a lo largo de la curva de desmagnetización, ya que ese es el sentido que le corresponde a esta curva. Si el entrehierro varía cíclicamente entre 0 y δ lo que sucede es que el imán recorre un pequeño ciclo de histéresis local entre los puntos M y C. Este ciclo es muy estrecho y se lo suele sustituir por una recta que une los puntos M y C que se denomina **recta de retroceso** o de **retorno (RR)**.

Se puede demostrar que la recta de retroceso es paralela a la tangente de la curva de desmagnetización en el punto A (B_r). En cada caso la recta de retroceso se inicia en el punto de la curva de desmagnetización (M) a partir del cual se ha empezado a disminuir el valor absoluto del campo H_m . Este punto de inicio de la recta de retroceso y que pertenece a la curva de desmagnetización se denomina **punto base**.

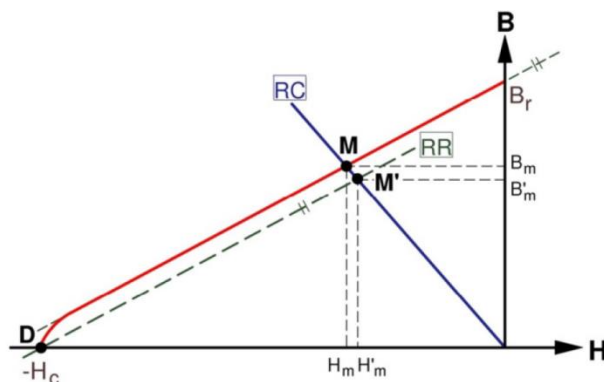
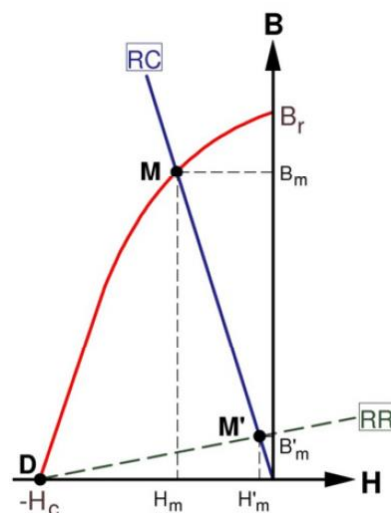
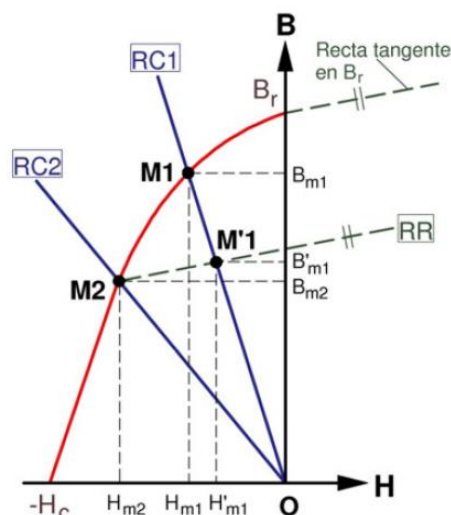
En resumen, si se parte de un punto de funcionamiento inicial sobre la curva de desmagnetización (donde el campo H_m en el imán es negativo) y se aumenta el valor absoluto de H_m , el nuevo punto de operación estará también sobre la curva de desmagnetización. Pero si desde el punto de operación se disminuye el valor absoluto de la excitación H_m , el nuevo punto de funcionamiento se encontrará sobre la recta de retroceso cuyo punto base es el punto inicial.

Tomando el punto inicial $M1$ si se aumenta el entrehierro $\delta_1 > \delta_2$ se pasará a una condición $M2$. Allí la recta de retroceso es otra por lo que si se vuelve al valor original del entrehierro el nuevo punto será $M'1$. Si ahora se modifica el valor del entrehierro entre δ_1 y δ_2 el punto de operación se moverá entre $M'1$ y $M2$.

Partiendo nuevamente desde una condición donde el circuito opera en un punto M si el entrehierro se aumenta hasta un caso límite, prácticamente infinito, el punto de operación decrecerá hasta la condición D , donde la inducción B_m resulta nula y el campo alcanza la condición de fuerza coercitiva H_c . Esto equivaldría a extraer el imán permanente del circuito magnético de una máquina eléctrica.

Si ahora se reestablece el valor original de entrehierro, el nuevo punto de funcionamiento M' estará sobre la recta de retroceso cuyo punto base es D resultando resultará mucho menor al caso inicial. Es decir, el imán se ha desmagnetizado. Por lo tanto, hay materiales ferromagnéticos que sufren una fuerte desmagnetización al aumentar el entrehierro y que hay que tener la precaución al desmontar-montar máquinas construidas por estos elemento.

Este problema resulta menos importante en imanes contruidos con materiales cuya curva de desmagnetización es casi recta, como ocurre con materiales modernos basados en tierras raras: Samario-Cobalto y neodimio-Hierro-Boro. En este caso la curva de desmagnetización y la recta de retroceso son casi coincidentes y en consecuencia los puntos de funcionamiento M y M' están muy cercanos.



11.5.2. Aspectos relevantes para el diseño

11.5.2.1. Producto energético máximo

En el apartado anterior se obtuvo la relación entre B_m y H_m , a partir de las mismas se deduce que

$$B_m \cdot H_m = - \left[v_m \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_\delta} \right] H_m^2$$

Por otra parte se obtiene:

$$H_m = - \frac{\delta}{\mu_0 l_m} B_\delta = - \frac{\delta}{\mu_0 l_m} \frac{\Phi_\delta}{S_\delta} = - \frac{\mathcal{R}_\delta}{l_m} \Phi_\delta$$

Combinando estas expresiones se obtiene:

$$B_m \cdot H_m = - \left[v_m \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_\delta} \right] \cdot \left[\frac{\mathcal{R}_\delta}{l_m} \Phi_\delta \right]^2 = - \left[v_m \frac{\mathcal{R}_\delta}{l_m \cdot S_m} \right] \Phi_\delta^2$$

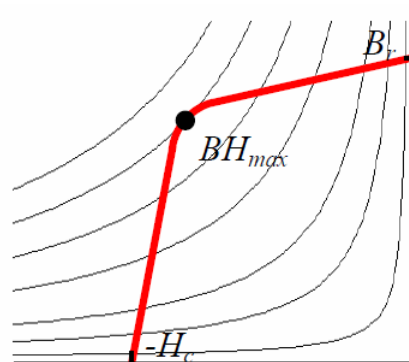
$$B_m \cdot H_m = - v_m \frac{\mathcal{R}_\delta}{V_m} \Phi_\delta^2$$

En la expresión anterior V_m es el volumen del imán y el producto $B_m H_m$ se denomina el **producto energético** o **producto de energía**. De esta relación se deduce finalmente que:

$$V_m = l_m \cdot S_m = - v_m \frac{\mathcal{R}_\delta}{(B_m H_m)} \Phi_\delta^2$$

Así, se encuentra que si se tiene un circuito magnético con un entrehierro de dimensiones determinadas y por consiguiente con un valor fijado de reluctancia $\mathcal{R}_\delta$ y se desea conseguir que, mediante un imán, el flujo magnético en dicho entrehierro sea Φ_δ , dicho imán tendrá un volumen mínimo si se trabaja con el valor máximo del producto de energía $B_m H_m$.

En la figura se muestran las hipérbolas que grafican $BH=\text{cte}$. La hipérbola tangente a la curva B-H del material define el $(B_m H_m)_{\max}$, punto donde la densidad de energía que puede almacenar el imán es máxima. Esto significa que, de una parte, en la fabricación de un imán interesa utilizar un material cuyo producto energético máximo $(B_m H_m)_{\max}$ sea el más grande posible y, por otra parte, interesa diseñar el circuito magnético de forma que el imán trabaje en el punto de la curva de desmagnetización donde es máximo el producto energético del material con el que se ha construido.



Por esta razón los fabricantes de materiales ferromagnéticos incluyen en sus catálogos las especificaciones de producto energético máximo, ya que es una magnitud importante en la elección del material y en el diseño de los dispositivos con imanes permanentes.

12. TRANSITORIOS

12.1. Introducción

Por su definición un fenómeno transitorio es algo pasajero, temporal o que no dura para siempre. En la física el transitorio es el proceso durante el cual un sistema cambia de un estado a otro. Existen muchos ejemplos este tipo de procesos se presentan continuamente en vida cotidiana, es el caso de un vehículo que encontrándose en reposo acelera hasta una velocidad determinada por ejemplo 100km/h manteniéndose en dicho valor durante mucho tiempo. Ligado a la electricidad quizás el ejemplo más gráfico sea el proceso de carga un capacitor que fue descrito durante el Capítulo 1 de la materia.

Los fenómenos transitorios se evalúan según el desempeño de las magnitudes que caracterizan al sistema bajo análisis, posición, velocidad, caudal, temperatura, presión, etc. En el caso de circuitos eléctricos la tensión y la corriente son las variables predilectas, aunque también puede hablarse de campo eléctrico, magnético, potencia, etc.

Para identificar el transitorio es importante conocer los estados extremos (de partida y de llegada) entre los que se mueve la variable bajo análisis. De forma general se puede decir que una variable se encuentra dentro de un transitorio cuando la misma presenta una determinada variación en el tiempo. Fuera del transitorio es decir, cuando la variable no cambia de valor en el tiempo, se dice que el sistema se encuentra en estado estacionario. Por ejemplo, un péndulo al que manualmente se lo desplaza desde su punto de equilibrio hasta una determinada posición para luego soltarlo dejando que este evolucione libremente. Es conocido a esta altura, que el péndulo describe un movimiento armónico simple, oscilando alrededor de su punto de equilibrio hasta detenerse. Si en este experimento se monitorea la posición de la masa que conforma el péndulo, ésta presenta un comportamiento como el que sigue.

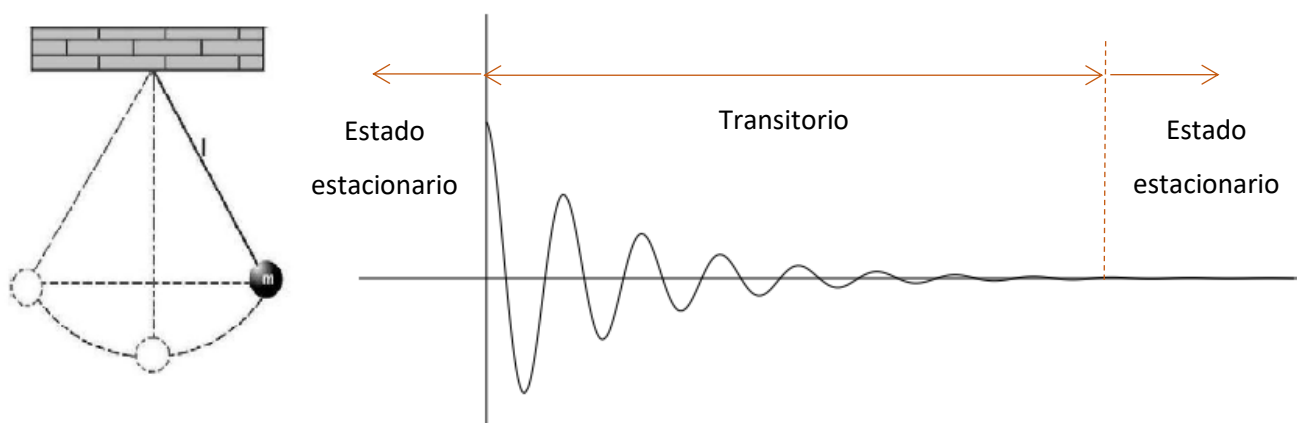


Figura 12-1: Posición en el tiempo de un péndulo que evoluciona libremente

Dado que se conoce el punto inicial y final del movimiento, es fácil identificar el transitorio dentro de la figura anterior. Como se ha mencionado el fenómeno puede ser analizado desde diferentes perspectivas, como por ejemplo evaluando también la velocidad de la masa, la cual se presenta a continuación.

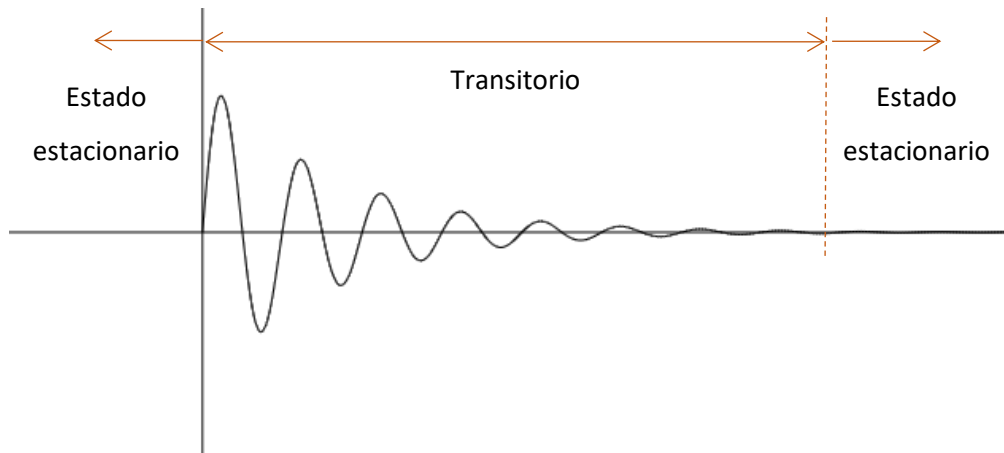


Figura 12-2 Velocidad en el tiempo de un péndulo que evoluciona libremente

Al igual que el péndulo, en los circuitos eléctricos también se presentan procesos transitorios cuando éstos cambian repentinamente de un estado a otro, en particular cuando dichos circuitos poseen almacenadores de energía (bobinas y/o capacitores). En el primer apunte de esta materia (“Introducción y Modelado”) se ha presentado como estos almacenadores responden ante cambios bruscos en su entorno. La bobina se “resiste” a un cambio brusco en la corriente que la circula, al tiempo que el capacitor lo hace con la tensión entre sus bornes. Esta oposición, hace que en presencia de almacenadores la corriente o tensión de un circuito no pueda variar a saltos dando origen a los transitorios que son foco de este documento.

12.2. Enfoque matemático

Desde hace ya mucho tiempo, el análisis del comportamiento de sistemas físicos de cualquier tipo (térmicos, fluido dinámicos, mecánicos, eléctricos, etc) se realiza mediante la manipulación de un modelo matemático que representa al sistema bajo estudio. Este modelo vincula, a través de ecuaciones, las expresiones que definen el desempeño de los elementos que lo componen.

Los modelos matemáticos se clasifican en diferentes tipos, una de ellas se basa en la relación estímulo/respuesta que presentan los elementos constitutivos, en particular cuando para determinar la respuesta se requiere conocer no solo el valor actual de la viable sino también su valor pasado, se dice entonces que el modelo es de carácter dinámico. Este el caso de sistemas con almacenadores de energía, donde su representación requiere de la utilización de ecuaciones diferenciales.

Una Ecuación diferencial es una expresión matemática que relaciona una función con sus derivadas, donde la incógnita es precisamente la función. En sistemas físicos esta última representa una magnitud específica mientras que las derivadas se asocian a sus razones de cambio.

Las ecuaciones diferenciales tienen la siguiente forma

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = F(x)$$

Donde $f(x)$ es la incógnita de la ecuación y n el orden de la ecuación dado por la derivada más alta. Por ejemplo si $f(x)$ representa la posición de una partícula en el tiempo, la primera derivada es la su velocidad y la segunda la aceleración. Por su parte, $F(x)$ corresponde otra función conocida que depende la misma variable, normalmente en sistemas físicos esta función representa el estímulo al cual se ve sometido el sistema.

Toda ecuación diferencial tiene una solución del tipo

$$f(x) = Y_N(x) + Y_F(x)$$

Donde $Y_N(x)$ corresponde a la respuesta natural o libre, en ésta solo intervienen los elementos propios del sistema. En circuitos eléctricos la primera respuesta se debe a los elementos pasivos (resistencias, bobinas y capacitores). Hallar esta respuesta requiere contemplar los factores que se encuentran del lado izquierdo de la ecuación, es decir de la resolución de la siguiente expresión.

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

La respuesta natural depende del orden la ecuación y de la composición de la misma, así se tienen los siguientes ejemplos, que se presentan a título informativo.

Si $\frac{df(x)}{dx} - f(x) = 0$ entonces $Y_N(x) = k e^{\lambda x}$ con k y λ real

Si $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) = 0$ entonces $Y_N(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ con a y b reales

Por su parte $Y_F(x)$ representa la respuesta forzada es decir la que le imprime el estímulo al sistema, ésta se debe a las fuentes ya sea de tensión o corriente, pudiendo ser también continuas o alternas. Esta respuesta tiene la misma “forma” que la función estímulo, tal como se presenta a continuación.

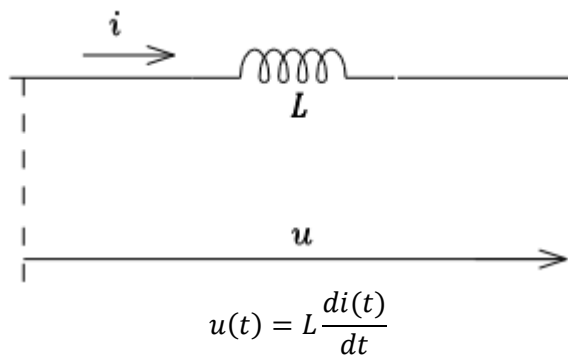
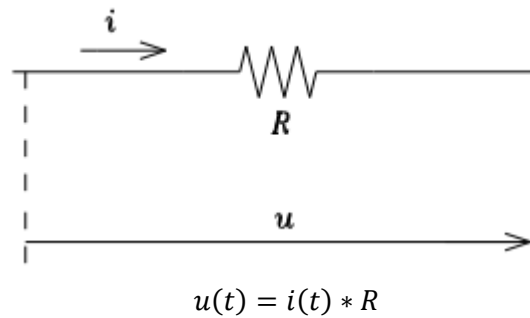
Si $F(x) = cte$ entonces $Y_F(x) = A$ con A constante

Si $F(x) = a \sin(x)$ entonces $Y_F(x) = b \sin(x)$ con a y b real

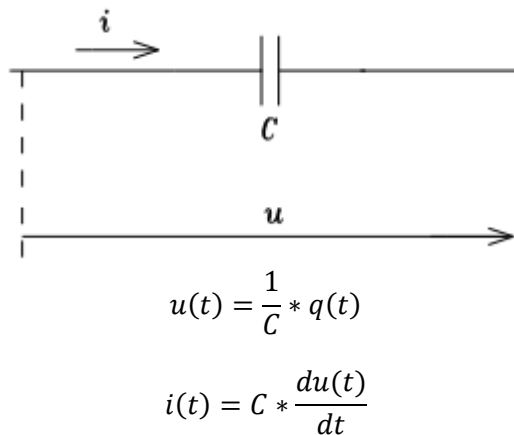
La demostración de cada una de las soluciones antes presentadas no es motivo de este curso quedando la misma a cargo de las materias de análisis matemático, sin embargo, se presentan de manera ilustrativa para que alumno cuente con la base teórica necesaria para comprender el enfoque matemático que el análisis de transitorios requiere.

12.3. Ecuaciones básicas de circuitos eléctricos

En función de los conceptos volcados en el apartado anterior, en el análisis de transitorios se requiere la construcción de las ecuaciones diferenciales que conforman el modelo matemático el cual representa el comportamiento del circuito eléctrico bajo estudio. En este sentido se resumen a continuación las ecuaciones básicas que se derivan del funcionamiento de cada elemento, estas ecuaciones ya han sido introducidas en el primer apunte de la materia (Introducción y modelado).



Debe recordarse que la corriente en la bobina no puede variar a saltos, esto significa que la bobina se opone a cambios bruscos en la corriente que la circula.



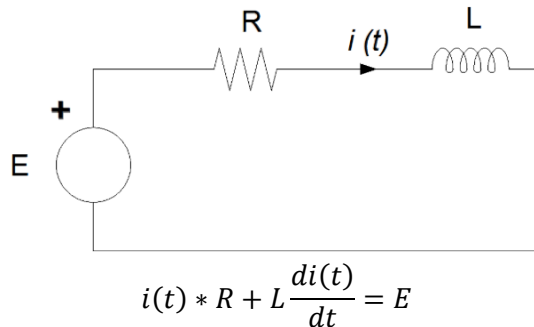
En este caso la tensión sobre el capacitor no puede presentar saltos, el condensador se opone a cambios bruscos en la tensión entre sus bornes.

12.4. Circuitos con un almacenador de energía

A continuación se realiza el desarrollo del análisis matemático de circuitos serie constituidos por una resistencia y un almacenador de energía (capacitor o bobina) alimentados por una fuente de tensión de corriente continua.

12.4.1. Circuito RL

Sobre el siguiente circuito se aplica la segunda ley de Kirchhoff considerando la evaluación instantánea de la corriente.



De la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff surge la expresión de la ecuación diferencial de la corriente. En consecuencia la evolución temporal de dicha variable resulta de la resolución de la misma.

Según lo definido previamente se tiene: $i(t) = I_N(t) + B$

Donde $I_N(t)$ es del tipo $ke^{\lambda t}$; al tiempo que λ surge de la resolución de la ecuación característica, k depende las condiciones iniciales, es decir del valor inicial de la corriente, mientras que B es una constante que representa la respuesta forzada y que se debe al tipo de alimentación con la que cuenta el circuito, que al ser de corriente continua no depende del tiempo.

Para la construcción de la ecuación característica se debe anular el estímulo (la fuente) y remplazar la función incógnita (en este caso $i(t)$) por la variable λ , la cual se debe elevar a una potencia igual al número de derivada. Luego λ resulta de la resolución de la ecuación.

Aplicando lo anterior:

$$R * \lambda^0 + L * \lambda^1 = 0 \Rightarrow R + L * \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

Con lo anterior la expresión de la corriente toma la siguiente forma:

$$i(t) = k e^{-\frac{R}{L}t} + B$$

Para determinar la constante B se debe reemplazar la misma en la ecuación diferencial, del siguiente modo.

$$B * R + L \frac{dB}{dt} = E$$

Dado que B es una constante su derivada es nula por lo cual la expresión anterior queda:

$$B * R = E \Rightarrow B = \frac{E}{R}$$

Resta únicamente determinar la constante k . Esta depende del valor inicial de la función cuya expresión temporal se intenta determinar. En consecuencia, la misma surge de aplicar la expresión en $t=0$ e igualarla a su valor inicial.

$$i(t)|_0 = k e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \frac{E}{R} = k + \frac{E}{R} = I_0 \Rightarrow k = I_0 - \frac{E}{R}$$

De lo anterior la expresión temporal de la corriente en un circuito RL con alimentación constante resulta

$$i(t) = \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) * e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Se presenta a continuación la gráfica de la expresión anterior para tres condiciones posibles.

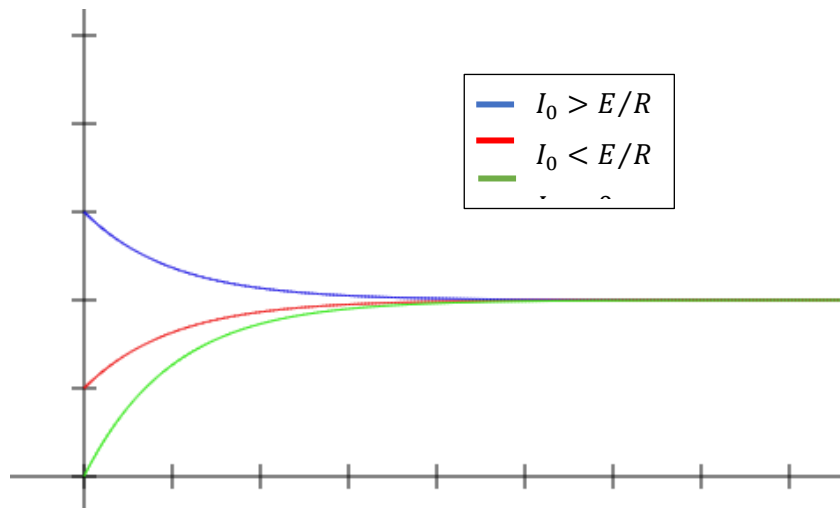
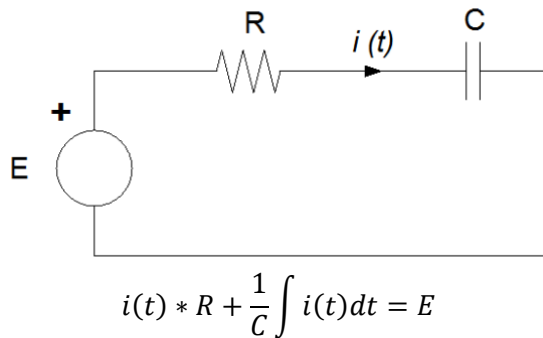


Figura 12-3: Respuesta cualitativa de la corriente en un circuito RL

Observando la figura anterior se aprecia que independientemente del monto inicial de la corriente, ésta tiende siempre al mismo valor. Este último es E/R que se corresponde con la corriente que circula al considerar a la bobina como un cortocircuito. Esto se debe a que si se analiza la expresión de la tensión en bornes de la bobina, éste depende de la derivada de la corriente, entonces a medida que transcurre el tiempo y la corriente se acerca a su valor final, su derivada se reduce tendiendo indefinidamente a cero, lo cual anula la tensión en bornes de la bobina convirtiéndola en un cortocircuito.

12.4.2. Circuito RC

Al igual que en caso anterior se comienza aplicando la segunda ley de Kirchhoff



La resolución de una ecuación de tipo integral como la anterior no es sencilla por lo cual para facilitar el trabajo se propone derivar miembro a miembro la misma. Al realizar este método, se anula la integral quedando en dicho término sólo la función $i(t)$ mientras que del lado derecho siendo la fuente una constante su derivada es nula.

Luego de derivar se tiene

$$\frac{di(t)}{dt} * R + \frac{1}{C} * i(t) = 0$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación diferencial presenta estímulo nulo por lo cual la expresión de la corriente depende solo de su respuesta natural, es decir.

$$i(t) = k e^{\lambda t}$$

Para la obtención de λ se debe resolver la ecuación característica.

$$\lambda * R + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$$

Por lo tanto

$$i(t) = k e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Por su parte

$$i(t)|_0 = k e^{-\frac{1}{RC}*0} = I_0 \Rightarrow k = I_0$$

Finalmente se tiene

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Más allá de lo anterior, en la mayoría de los casos las condiciones iniciales de un circuito que cuenta con un capacitor, se encuentran dadas por la tensión inicial del mismo. En cuyo caso, la corriente inicial se determina de la siguiente manera.

$$I_0 = \frac{E - v_{C0}}{R}$$

Se presenta a continuación la evolución de temporal de la corriente acorde a la expresión calculada.

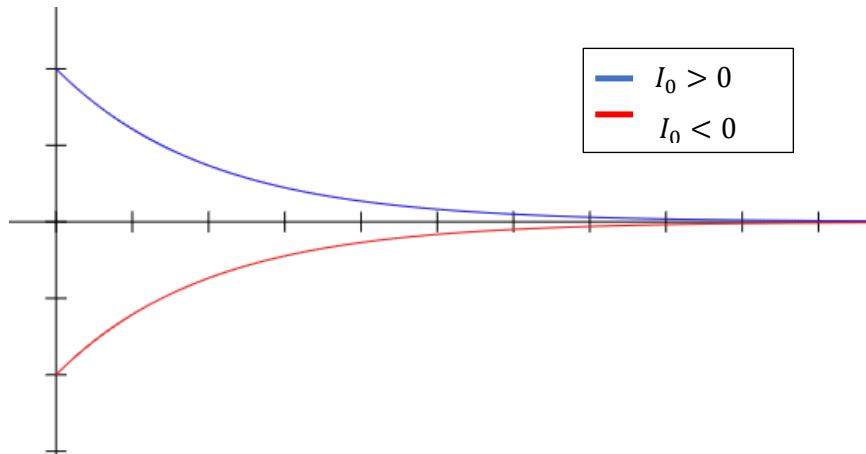


Figura 12-4: Respuesta cualitativa de la corriente en un circuito RC

Otro enfoque de interés para el análisis de circuitos RC es determinar el comportamiento de la tensión en bornes del capacitor. Para esto es posible reescribir la 2da ley de Kirchhoff pero en términos de dicha tensión tal como se muestra a continuación.

$$i(t) * R + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \Rightarrow i(t) * R + u_c(t) = E \Rightarrow C * \frac{du_c(t)}{dt} * R + u_c(t) = E$$

Tras la aplicación del método de resolución ya presentado anteriormente, la expresión temporal de la tensión en bornes del capacitor resulta.

$$u_c(t) = (u_{C0} - E) e^{-\frac{1}{RC}t} + E$$

Se observa entonces que el comportamiento de la tensión en el capacitor de un circuito RC es análogo a la corriente de un circuito RL. Se presenta a continuación la respuesta cualitativa.

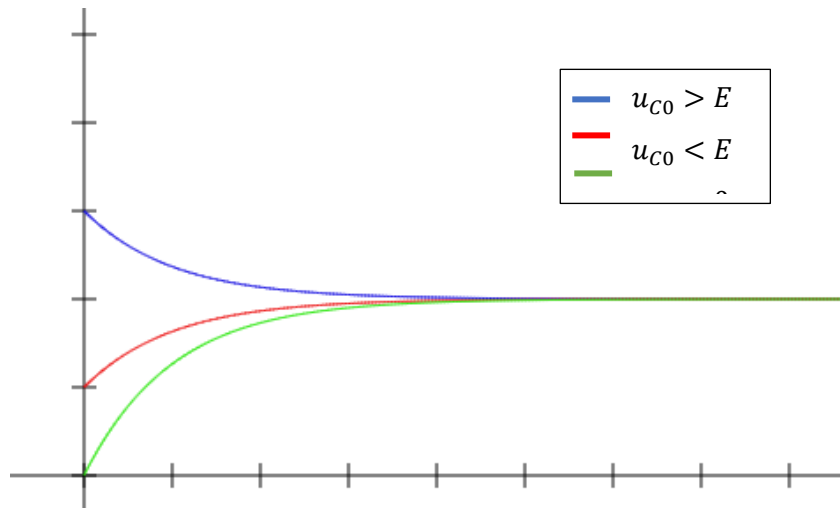
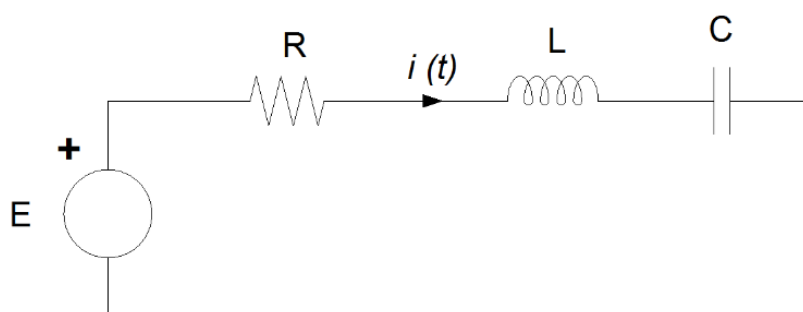


Figura 12-5 Respuesta cualitativa de la tensión del capacitor en un circuito RC

Según se observa la tensión en bornes del capacitor tiende siempre al mismo valor, que no es otro que la tensión de la fuente E , es decir que el capacitor se carga siempre a la tensión de la fuente. Para justificar este fenómeno, se puede analizar la ecuación diferencial donde se observa que la tensión en bornes de la resistencia depende de la derivada de la tensión en el capacitor. Entonces a medida que esta última tiende a su valor final, la magnitud en la resistencia tiende indefinidamente a cero. Podría decirse entonces que el capacitor tiende a comportarse como un circuito abierto, que impide la circulación de corriente y que por ende adopta entre sus bornes la tensión de la fuente.

12.5. Circuitos con dos almacenadores de energía

En este caso se realiza un análisis similar al anterior pero sobre circuitos RLC serie alimentados por una fuente de tensión de corriente continua.



$$i(t) * R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E$$

Dada la presencia de la bobina y capacitor dentro del mismo circuito la ecuación que representa el comportamiento de la corriente en el mismo es tipo Integro-diferencial (es decir cuenta con derivadas e integrales). Ya se ha comentado anteriormente que las ecuaciones con presencia de integrales resultan más dificultosas para su resolución por lo que se propone derivar la misma a fin de simplificarla.

$$\frac{di(t)}{dt} * R + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

Tras derivar la ecuación, ésta es completamente diferencial y en particular de segundo orden. Su resolución se lleva adelante mediante su ecuación característica, la cual presenta la siguiente estructura.

$$\lambda^2 * L + \lambda * R + \frac{1}{C} = 0$$

Encontrar el valor de λ requiere resolver una ecuación cuadrática, pudiendo la misma contar con las siguientes opciones.

$$\lambda_{1;2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 - \frac{4L}{C}}{4L^2}}$$

Si	Valores de $\lambda_{1;2}$	Ecuación $i(t)$
$R^2 - \frac{4L}{C} > 0$	$\lambda_{1;2}$ reales distintos	$Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$R^2 - \frac{4L}{C} < 0$	$\lambda_{1;2}$ complejos conjugados	$e^{\Re(\lambda)t} [A \sen(\Im(\lambda) * t) + B \cos(\Im(\lambda) * t)]$
$R^2 - \frac{4L}{C} = 0$	$\lambda_{1;2}$ reales iguales	$Ae^{\lambda t} + B t e^{\lambda t}$

En cualquiera de las tres opciones las únicas incógnitas son las constantes A o B, las cuales dependen de las condiciones iniciales del circuito. En este caso al contar con 2 almacenadores de energía se deben aplicar simultáneamente el estado inicial de la bobina (valor de la corriente) y del capacitor (valor de la tensión en sus bornes).

Se presenta a continuación el valor de las constantes A y B para cada caso según las condiciones iniciales del circuito.

Valores de $\lambda_{1;2}$	Cálculo A y B
$\lambda_{1;2}$ reales distintos	$A + B = I_0$ $\lambda_1 A + \lambda_2 B = E - v_{C0} - I_0 R$
$\lambda_{1;2}$ complejos conjugados	$B = I_0$ $A = \frac{E - v_{C0} - I_0 R - B \Re(\lambda)}{\Im(\lambda) * L}$
$\lambda_{1;2}$ reales iguales	$A = I_0$ $B = E - v_{C0} - I_0 R - \lambda A$

En función de lo presentado hasta aquí la respuesta de la corriente en un circuito RLC puede tener comportamientos totalmente diferentes según la combinación de sus componentes y sus condiciones iniciales.

La siguiente figura presenta los tres casos típicos al considerar condiciones iniciales nulas, $I_0 = 0$ y $v_{C0} = 0$

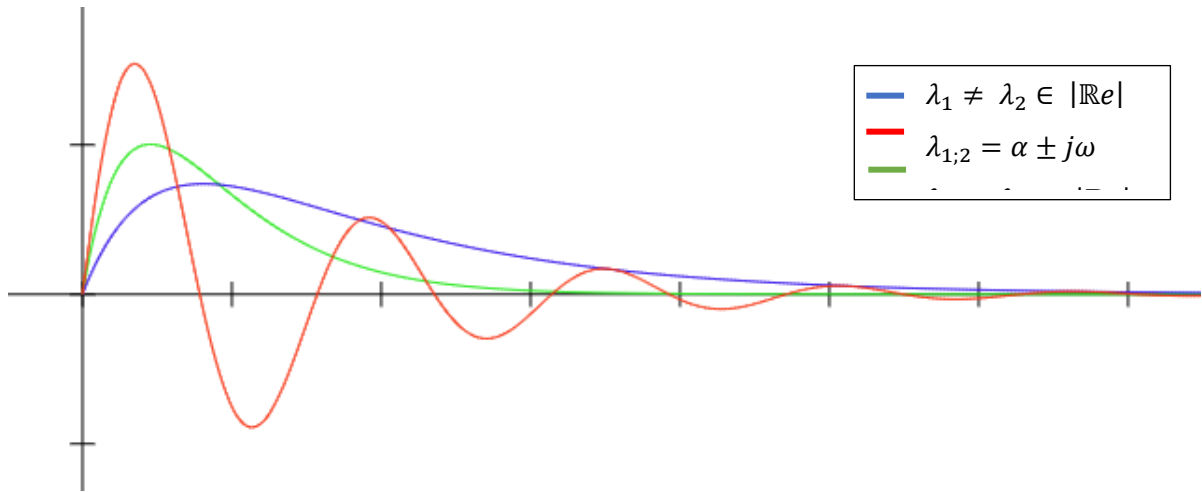


Figura 12-6: Respuesta cualitativa de la corriente en un circuito RLC – Condiciones iniciales nulas

Al analizar la figura anterior se observa que independientemente del transitorio la corriente tiende siempre a cero, esto se debe a la presencia del capacitor el cual se carga hasta alcanzar la tensión de la fuente lo cual impide la circulación de corriente. Los comportamientos transitorios pueden clasificarse en tres:

- Subamortiguado (rojo) la respuesta es oscilatoria y se debe a la interacción entre bobina y capacitor.
- Sobreamortiguado (azul) la respuesta es no oscilatoria
- Crítico (verde) igual al anterior pero con un amortiguamiento tal que reduce el tiempo del transitorio al mínimo. Esta es la respuesta que permite llegar más rápido desde el estado inicial al final.

Características de comportamiento

Independientemente del tipo de respuesta que surja, es posible identificar aspectos característicos que permiten comparar las respuestas entre sí. Estos factores son:

- Sobrevalor: Es la máxima diferencia entre el valor de la variable monitoreada y su estado final.
- Porcentaje de rebase: es el sobrevalor escrito en términos porcentuales respecto del valor final
- Tiempo de respuesta: es el tiempo necesario para que la variable ingrese sin volver a salir en un rango cercano al valor final, tanto exceso como por defecto. El rango queda definido en función de las necesidades.
- Tiempo de crecimiento: es el tiempo que le toma a la variable crecer desde el 10% hasta el 90% del valor final. Puede sin embargo luego caer por debajo del 90%.

Las características anteriores se presentan en la siguiente figura

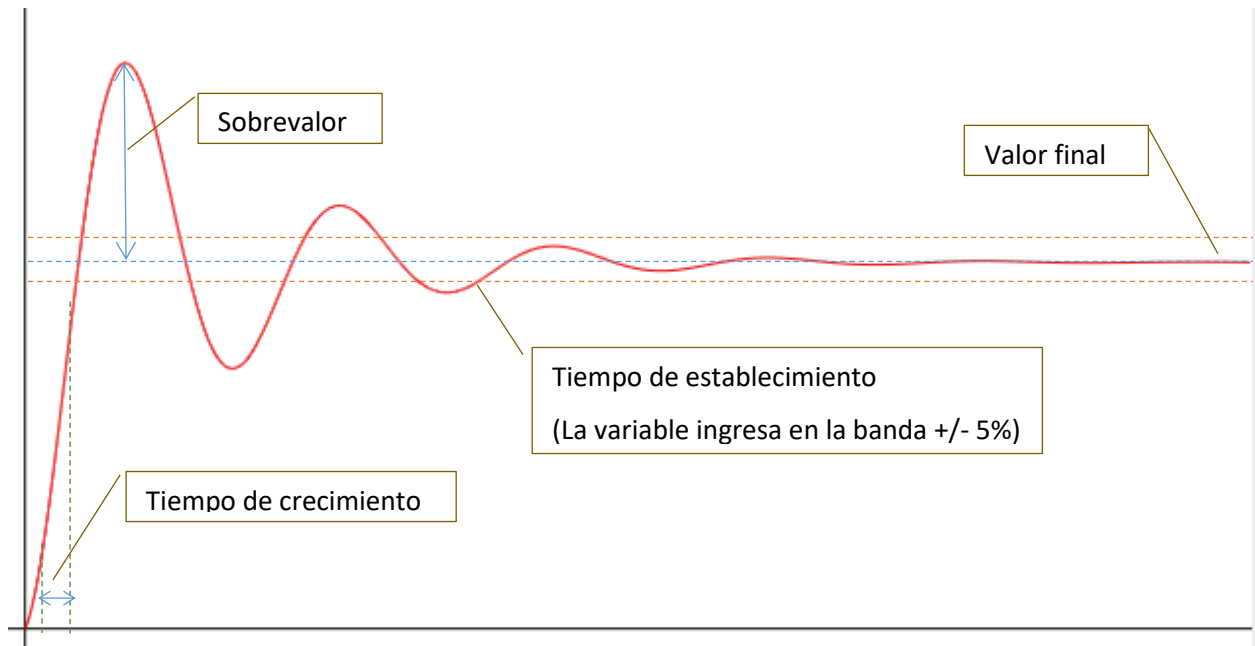


Figura 12-7: Factores característicos de una curva

12.6. Circuitos alimentados por fuentes de corriente alterna

Hasta aquí el análisis de los fenómenos transitorios se ha desarrollado sobre circuitos cuya alimentación es de tipo constante. Sin embargo, existe también la posibilidad de realizar un análisis similar para sistemas de corriente alternar y en particular en aquellos donde la alimentación es de tipo senoidal.

12.6.1. Circuito RL

Al igual que para los sistemas ya analizados, la respuesta de todo circuito eléctrico se encuentra compuesta de dos componentes, una de carácter libre y otra de tipo forzada.

$$\text{Respuesta}(t) = \text{Respuesta libre}(t) + \text{Respuesta forzada}(t)$$

En todo circuito la respuesta libre se extingue con el transcurso del tiempo por lo que luego un cierto tiempo puede considerarse que sólo queda la respuesta forzada. En un circuito alimentado por una fuente de tensión senoidal del tipo $v(t) = V \text{ sen}(\omega t + \alpha)$, la respuesta forzada no es otra que las magnitudes de tensión y corriente vistas durante el desarrollo del módulo “Circuitos de Corriente Alterna” dentro de esta misma cátedra. En particular para la corriente, dicha respuesta presenta la siguiente expresión:

$$i_f(t) = I \text{ sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Dónde: $I = \frac{V}{|Z|}$; $\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$ siendo Z la impedancia total del circuito

La respuesta libre por su parte depende de los elementos pasivos del circuito. En sistemas que cuentan con un único almacenador de energía esta respuesta presenta una expresión del tipo exponencial descendente amplificada un por una constante tal como ha sido presentado anteriormente.

En función de lo anterior, la evolución temporal de la corriente en el sistema bajo análisis toma la siguiente forma:

$$i(t) = A * e^{\lambda t} + I \operatorname{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Los valores concretos que componen la expresión anterior quedan supeditados a la constitución propia del circuito.

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

$$A = I_0 - \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} * \operatorname{sen} \left(\alpha - \arctan \frac{\omega L}{R} \right)$$

Nota: Siendo que se trata de un análisis temporal la corriente inicial I_0 es un valor instantáneo.

Según se observa en las fórmulas anteriores la presencia del transitorio, el cual depende de la existencia de la respuesta natural y ésta del valor de la constante **A**, la cual puede adoptar un valor nulo eliminando el transitorio. En cuyo caso la transición entre el estado inicial y el final es inmediata. Anular la constante **A** requiere una combinación particular entre el valor inicial I_0 y los parámetros del circuito. A continuación, se expone un ejemplo de dicha condición.

Se supone el caso de un circuito RL donde la condición inicial de la corriente es nula. Por ende anular la constante A requiere hacer cero el argumento de la función trigonométrica senoidal, es decir.

$$\text{Si } I_0 = 0 \mid A = 0 \Leftrightarrow \alpha = \arctan \frac{\omega L}{R} = \varphi$$

La expresión anterior implica que definido el circuito, la presencia del transitorio depende del ángulo de desfase de la tensión de alimentación.

En un circuito que posee un interruptor que permite o no el paso de la corriente, el ángulo de la tensión puede ser controlado modificando el instante de tiempo en el cual se cierra el interruptor. La siguiente figura contiene la comparación cualitativa entre dos casos con y sin transitorio.

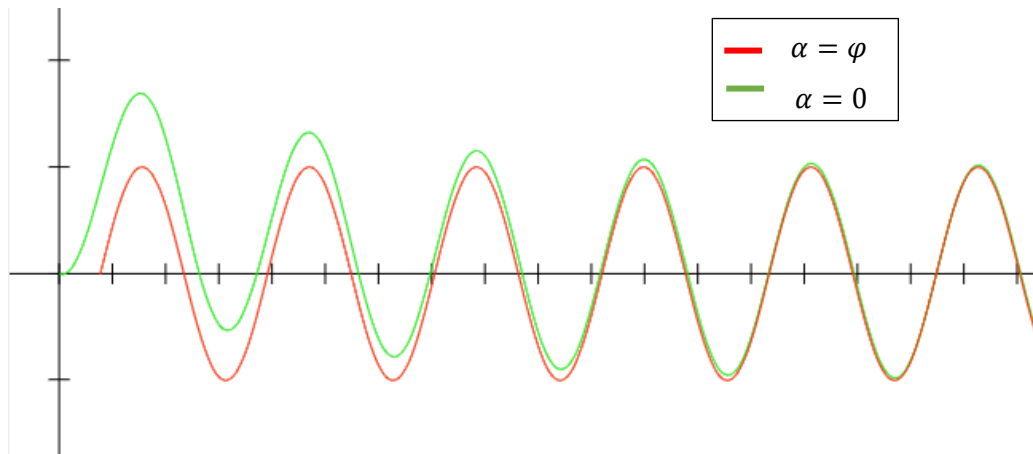


Figura 12-8: Evolución de la corriente en un circuito RL al modificar el instante de cierre del interruptor.

12.6.2. Circuito RC

En el punto anterior se ha desarrollado la expresión de la corriente en un circuito RL. En caso de circuitos RC resulta más adecuado trabajar sobre la tensión en el capacitor ya que esta es la variable que no puede modificarse a saltos y cuyo valor inicial determina el comportamiento del sistema.

Nuevamente se adopta una fuente de alimentación senoidal del tipo $v(t) = V \text{sen}(\omega t + \alpha)$. Para un circuito RC la corriente final en el mismo será $i_f(t) = I \text{sen}(\omega t + \alpha + \varphi)$ (notar que adelanta a la tensión de alimentación)

Considerando la expresión de la corriente se calcula la correspondiente a la tensión sobre el capacitor la cual atrasa 90° respecto de la corriente.

$$v_c(t) = I * |X_c| \text{sen}\left(\omega t + \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Al igual para la corriente en el circuito RL, la tensión en el capacitor también posee una respuesta natural que se extingue en el tiempo y que se suma a la respuesta forzada para determinar la expresión completa de la tensión.

$$v_c(t) = A * e^{\lambda t} + I * |X_c| \text{sen}\left(\omega t + \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Donde:

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$A = v_{c0} - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} * \frac{1}{\omega C} * \text{sen}\left(\alpha + \arctan\frac{1}{\omega CR} - \frac{\pi}{2}\right)$$

12.7. Ejercicios resueltos

Problema 1

Un circuito **RL** con **R = 30 Ω** y **L = 10 hy** es alimentado por una fuente de **90 V** de tensión continua a través de una llave **S**, que se cierra en un tiempo al que designamos como “cero” (Considerar a la inductancia sin energía previa).

Encontrar:

1. Las ecuaciones de **i(t)** y **v_L(t)**
2. La corriente **i(t)** para **t = 0,2 s**
3. El tiempo para el cual **v_R(t) = v_L(t)**

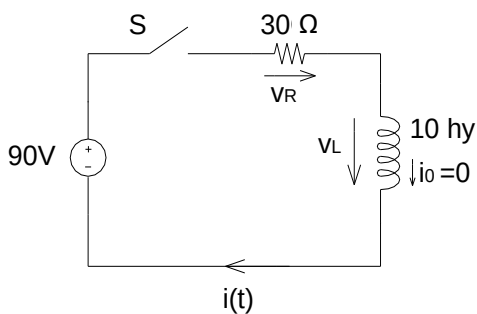


Figura 1

1 – La ecuación diferencial para el circuito dado y que se representa en figura 1 es:

$$(1) \quad L \frac{di}{dt} + R i = U$$

$$10 \frac{di}{dt} + 30 i = 90$$

O utilizando un operado $D = d/dt$ y dividiendo por 10.

$$(D + 3) i = 9$$

La solución completa es $i = i_N + i_F = A e^{\lambda t} + k$ (2)

Para $t = 0$ $i = i_0 = 0$

Luego: $A = -k$

Ecuación característica: $L \lambda + R = 10\lambda + 30 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$

Termino independiente: supongo que k es solución de la ecuación diferencial $i(t) = k$

$$10 \frac{d}{dt}(k) + 30 k = 90 \Rightarrow 30 k = 90 \Rightarrow k = 3$$

Finalmente la expresión de la corriente es:

$$i = 3 (1 - e^{-3t}) \quad (3)$$

La tensión en la inductancia se calcula mediante la expresión

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

Resultando $v_L = 90 e^{-3t}$ (4)

2- Reemplazando en (3) al tiempo por 0,2 s se obtiene el valor de la corriente en el tiempo pedido.

$$i = 1,35 \text{ A}$$

3 – la expresión de la tensión en la resistencia es

$$v_R(t) = R i = 90 (1 - e^{-3t}) \quad (5)$$

Igualando (4) y (5) se tiene

$$v_L = v_R$$

$$90 e^{-3t} = 90 (1 - e^{-3t})$$

$$t = 0,23 \text{ s}$$

Problema 2

Para el circuito del problema 1, graficar las siguientes funciones:

- Corriente en el circuito **i(t)**
- La potencia en la resistencia **R**
- La potencia en la inductancia **L**

Mostrar que la energía almacenada en el campo magnético de la inductancia es igual a la integral de la potencia en la inductancia desde 0 a infinito.

La corriente es la indicada en la Fig. 2, realizada a partir de la expresión (2) $i(t) = 3 (1 - e^{-3t})$, cuya gráfica resulta:

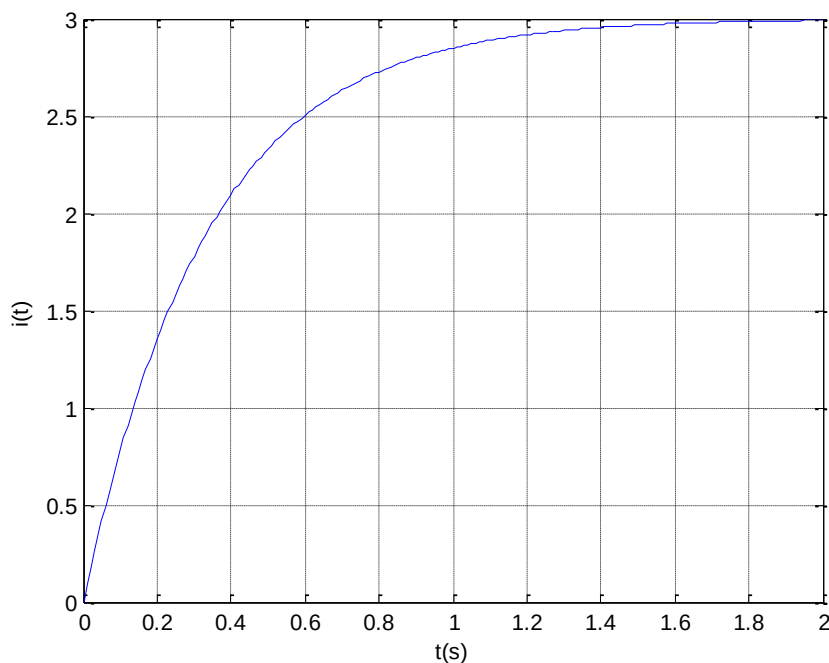


Figura 2

La potencia instantánea se define **p = v i**, siendo para cada elemento:

$$p_R = v_R i = 270 (1 - e^{-3t})^2$$

$$p_L = v_L i = 270 (1 - e^{-3t})e^{-3t}$$

Y sus gráficas son las indicadas en la Figura 3

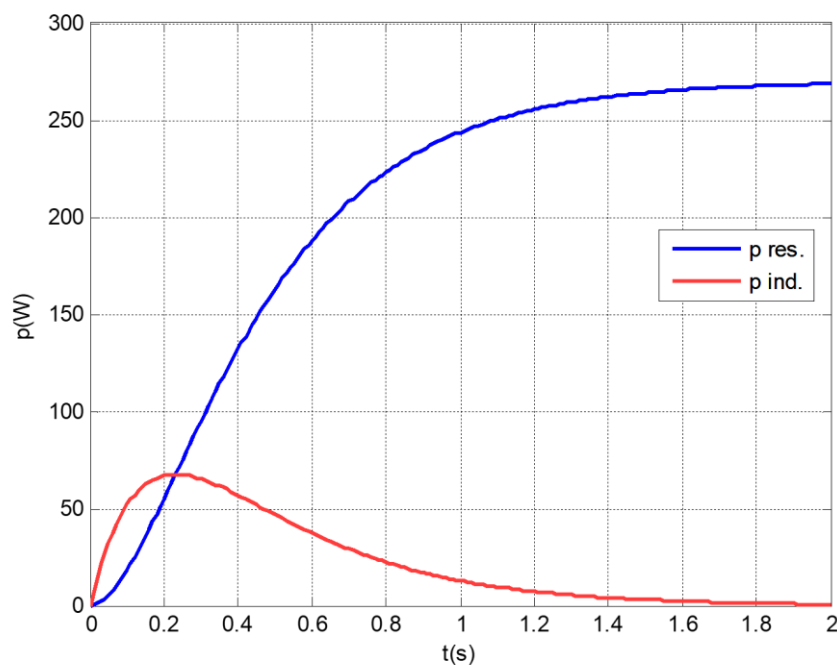


Figura 3

La potencia final disipada en el circuito es de 270 W.

La energía de estado estacionario en el campo magnético es:

$$W_L = L \frac{I^2}{2} = 45 \text{ W}$$

Y la energía total entregada a la bobina, deberá ser igual al valor calculado previamente, que resulta de integrar la potencia entregada a la bobina desde "0" á " ∞ ".

$$W = \int_0^{\infty} p_L dt = \int_0^{\infty} 270 (e^{-3t} - e^{-6t}) dt = 45 \text{ W}$$

Problema 3

En el circuito de la Figura 4, en el que la inductancia no posee energía almacenada en forma previa, la llave pasa a la posición 1 en un tiempo que designaremos como "0". Luego de 500 μ s pasa a la posición 2. Encontrar la expresión de la corriente para ambos intervalos y graficar la función.

$$L=0.4\text{Hy}$$

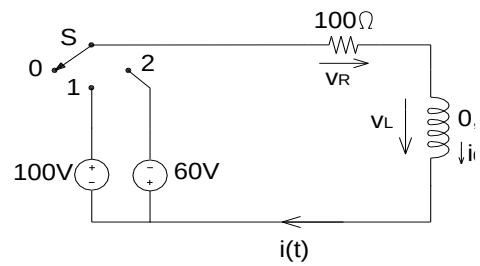


Figura 4

Al pasar la llave en la posición "1" la ecuación resulta:

$$100 i + 0,4 \frac{di}{dt} = 100$$

La solución completa es.

$$i = C_1 e^{-250 t} + 1,0$$

La condición inicial está dada por la corriente en $t = 0$ que es $i_{(0)} = 0$, luego la corriente es:

$$\boxed{i = 1,0 (1 - e^{-250 t})} \quad \text{válida para } 0 \leq t \leq 500 \mu\text{s} \quad (5)$$

A los 500 μ s la llave pasa a la posición "2" donde la tensión aplicada es 60V con la polaridad inversa, la ecuación que rige el comportamiento del circuito es:

$$100 i + 0,4 \frac{di}{dt^*} = -60$$

Obteniéndose
$$i = C_2 e^{-250 t^*} - 0,6$$

Donde $t^* = t - t'$, con $t' = 500 \mu\text{s}$.

Se puede escribir
$$i = C_2 e^{-250(t-t')} - 0,6 \quad (6)$$

La condición inicial está dada el valor que toma la corriente a los 500 μ s de la ecuación (5).

$$i_{(500\mu\text{s})} = 0,1175 \text{ A}$$

Siendo este el valor empleado para encontrar la constante C_2 en (6), obteniéndose:

$$i = -0,6 + 0,7175 e^{-250(t-t')} \quad \text{para } t > 500\mu\text{s}, \quad t' = 500\mu\text{s} \quad (7)$$

La gráfica de evolución de la corriente es la indicada en la figura 5.

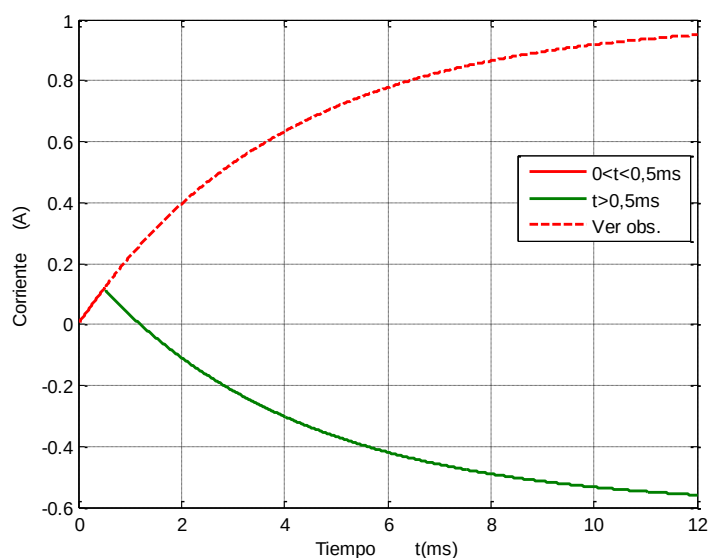


Figura 5

Obs.: Es la evolución de la corriente si “S” no hubiera pasado de “1” a “2”.

Problema 4

En el circuito de Figura 6 en $t=0$ se cierra la llave encontrar la evolución de la corriente, siendo la inicial del condensador 1000 microcoulombs.

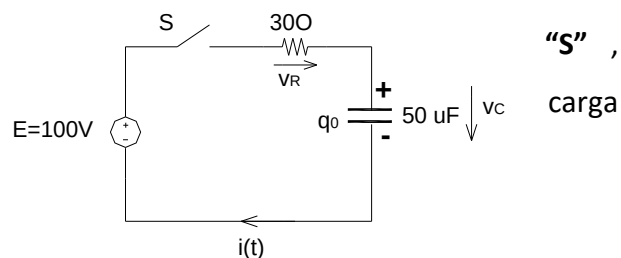


Figura 6

El problema puede ser resuelto mediante tres alternativas:

Alternativa 1

Se plantea la ecuación integro diferencial en función de la corriente

$$300 i + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \int i dt = 100 \quad (8)$$

Al derivar la Ec. 8 se transforma en una expresión diferencial clásica.

$$300 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} i = 0 \quad \text{ó} \quad \left(300D + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \right) i = 0$$

La solución completa resulta:

$$i(t) = C_1 e^{-66.67t} \quad (9)$$

La carga inicial del condensador q_0 nos permite determinar la condición inicial en tensión

$$V_{c0} = q_0/C = 20V$$

La que participa juntamente con la fuente externa para hacer circular la corriente en el sentido indicado en la figura.

La corriente para $t = 0$ se calcula mediante la expresión:

$$i_{(t=0)} = \left[\frac{E - v_c(t=0)}{R} \right] = 0,267 \text{ A} \quad (9)$$

$$\boxed{i(t) = 0.267 e^{-66.67t}} \quad (10)$$

Alternativa 2

Se plantea la ecuación 8 en términos de carga, para lo cual se considera:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Efectuando los remplazos correspondientes se tiene:

$$300 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} q = 100 \quad (11)$$

$$\text{ó} \quad \left(300 D + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \right) q = 100$$

La solución completa es:

$$q(t) = C_1 \cdot e^{-66.67t} + 5 \cdot 10^{-3}$$

La constante C_1 puede calcularse a partir del valor de la carga q_0 .

$$q(t) = -4 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-66.67t} + 5 \cdot 10^{-3} \quad (12)$$

Como verificación, si se deriva la expresión (12) respecto del tiempo, la misma debe coincidir con la expresión (10).

Alternativa 3

Consiste en plantear la ecuación diferencial de la figura 6 usando como variable la tensión en el capacitor.

$$v_R + v_C = E$$

Siendo $i = C dv_C / dt$ resulta

$$300 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \frac{dv_C}{dt} + v_C = 100 \quad \text{ó} \quad (300 \cdot 50 \cdot 10^{-6} D + 1)v_C = 100 \quad (13)$$

Resolviendo

$$v(t) = C_1 e^{-66.67t} + 100$$

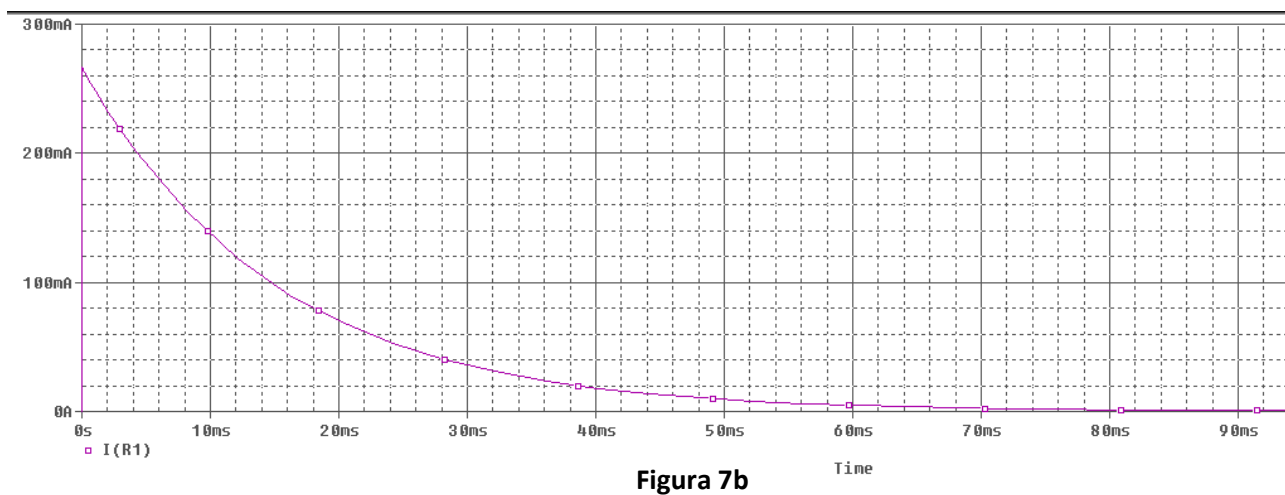
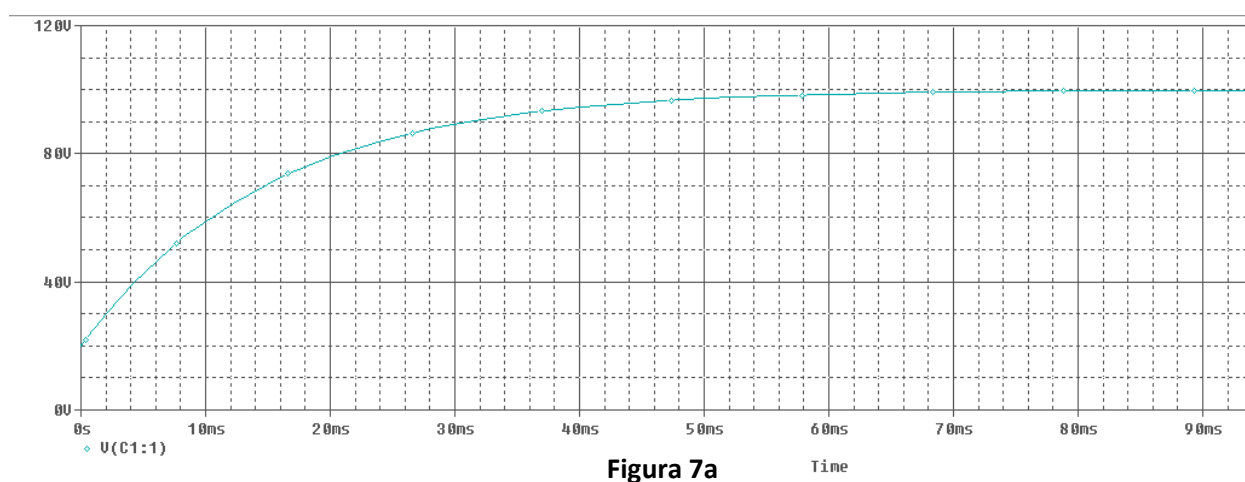
Siendo la condición inicial la calculada precedentemente $v_C(0) = 20 \text{ V}$, resulta

$$v_C(t) = -80 e^{-66.67t} + 100 \quad (14)$$

De la ecuación (14) pueden obtenerse la (10) y la (12), mediante:

$$i = C \frac{dv_C}{dt} \quad y \quad q = C v_C \quad (15)$$

Las gráficas de $i(t)$ y $v(t)$ se indican en figuras 7a , 7b.



Problema 5

En la figura 8 se representa un circuito serie **RLC**, con **C=100μF**, **L=0,1Hy**, **R=100Ω**, al que se le aplica una tensión continua de **50V** al cerrarse la llave **S** en un tiempo que designaremos como **t=0**. Encontrar la expresión de la corriente y la tensión en la inductancia en función del tiempo. La inductancia posee una energía de campo magnético inicial nula y la tensión en el capacitor es de **100V** con la polaridad indicada.

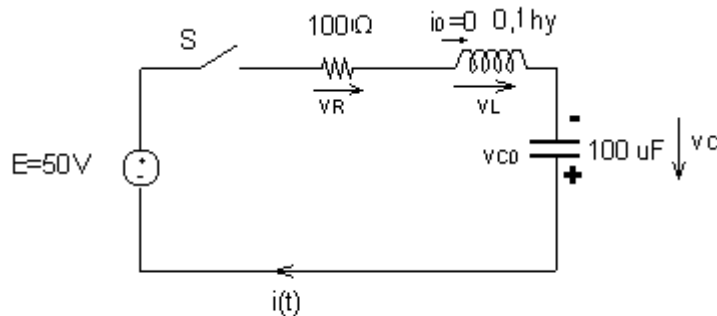


Figura 8

Al cerrar la llave **S**, se puede plantear la ecuación integro-diferencial

$$0,1 \frac{di}{dt} + 100 i + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} \int i dt = 50$$

Derivado se obtiene

$$0,1 \frac{d^2 i}{dt^2} + 100 \frac{di}{dt} + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} i = 0$$

ó

$$\left(0,1 D^2 + 100 D + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} \right) i = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$D_1 = -887 \quad \text{y} \quad D_2 = -113$$

Luego la corriente es

$$i = C_1 e^{-887t} + C_2 e^{-113t}$$

La determinación de las constantes se efectúa de acuerdo al siguiente procedimiento, se hace notar que nos harán falta dos ecuaciones para la determinación de las dos constantes **C₁** y **C₂**:

1º) Calcular el valor de la corriente en el tiempo en el que se da la condición inicial correspondiente a la inductancia.

$$i_{(0)} = 0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

2º) La segunda ecuación se obtiene de la condición inicial correspondiente a la tensión inicial del condensador en $t = 0$. Planteamos la ecuación de malla correspondiente.

$$v_{C(0)} + v_{L(0)} + v_{R(0)} = 50$$

$$\text{Resultando } v_{L(0)} = 50 - v_{R(0)} - v_{C(0)} = 150$$

$$v_{L(0)} = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0,1 (-887 \cdot C_1 e^0 - 113 \cdot C_2 e^0) = 150 \quad (16)$$

$$\text{De (15) y (16) se obtiene: } C_1 = -1,94 \quad \text{y} \quad C_2 = 1,94$$

La corriente en el circuito resulta:

$$i = -1,94 e^{-887t} + 1,94 e^{-113t} \quad (17)$$

Y la tensión en la inductancia

$$v_L = 1720 e^{-887t} - 220 e^{-113t} \quad (18)$$

Problema 6

En el circuito de la figura 9 la llave "S" permaneció en la posición "1" un tiempo suficientemente largo. En un tiempo que asignamos el valor $t = 0$ pasa a la posición "2". Encontrar la evolución temporal de la corriente para $t > 0$. El condensador de $50\mu\text{F}$ no posee carga inicial.

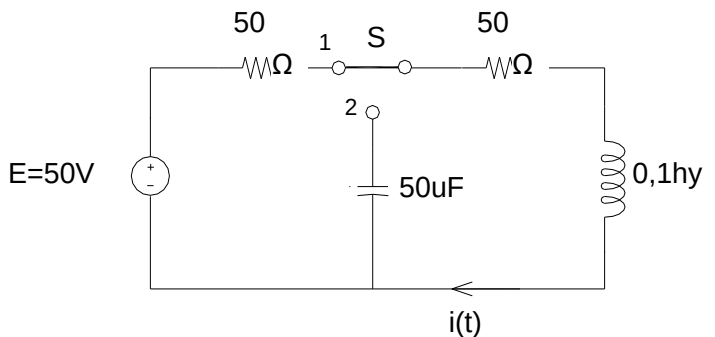


Figura 9

Con la llave en la posición "1" después de un tiempo suficientemente grande podemos considerar ya extinguido el transitorio y la corriente tendrá un valor constante de **0.5A** (la inductancia se considera un cortocircuito). Esta corriente será la condición inicial en la inductancia para la nueva configuración (la llave en la posición 2)

La ecuación diferencial es:

$$0,1 \frac{di}{dt} + 50 i + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \int i dt = 0$$

ó

$$0,1 \frac{d^2 i}{dt^2} + 50 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} i = 0$$

Siendo la ecuación característica

$$\left(0,1 D^2 + 50 D + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \right) i = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son: $D_1 = -250 + j371$ y $D_2 = -250 - j371$

Notar que la parte real de las raíces es negativa, esto asegura que la solución natural se extingue en el tiempo.

La corriente resulta:

$$i = e^{-250t} (C_1 \cos 371t + C_2 \sin 371t) \quad (19)$$

Cálculo de las constante de la ecuación (19)

Cálculo de la condición inicial para la inductancia

Para $t = 0$ $i_{(0)} = 0.5A$ luego $C_1 = 0.5$

Para la otra condición inicial, la tensión en el condensador $v_{C(0)} = 0$ nos permite encontrar el valor de C_2 , para ello se plantea la segunda ley de Kirchhoff con $t=0$.

$$v_{R(0)} + v_{L(0)} + v_{C(0)} = 0$$

$$v_{L(0)} = -v_{R(0)} = -R i_0 = -25V$$

Siendo $L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = v_{L(0)}$

Debemos calcular la derivada de i respecto de t y luego evaluarla en $t=0$

$$\frac{di}{dt} = -250 e^{-250t} (0.5 \cos 371t + C_2 \sin 371t) + e^{-250t} (-0.5 \cdot 371 \sin 371t + C_2 371 \cos 371t)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -250 e^0 (0.5 + 0) + e^0 (0 + 371 C_2) = -\frac{25}{0,1} = -250$$

$$C_2 = -0.34$$

La solución del problema resulta:

$$i = e^{-250t} (0.5 \cos 371t - 0.34 \sin 371t) \quad (20)$$

Problema 7

En el circuito de figura 10, calcular la evolución temporal de la tensión en el capacitor y su tiempo de respuesta al 1%. Asumir que las condiciones iniciales de **L** y **C** son nulas.

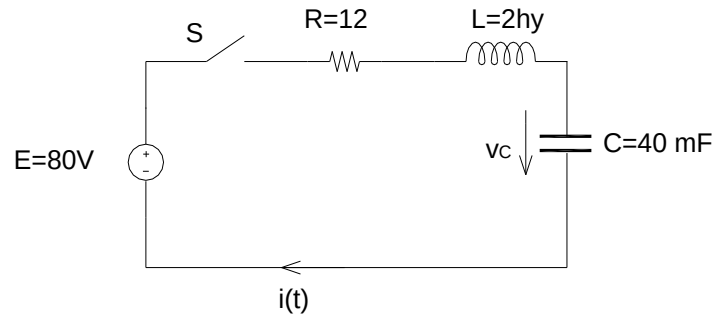


Figura 10

En este caso el planteo de la ecuación diferencial se hará en base a la tensión en el capacitor.

$$L \frac{di}{dt} + R i + v_c = 80V$$

Siendo $i = C \frac{dv_c}{dt}$ y $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2v_c}{dt^2}$

Se tiene

$$LC \frac{d^2v_c}{dt^2} + RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = 80V$$

Reemplazando numericamente se obtiene:

$$80 \cdot 10^{-3} \frac{d^2v_c}{dt^2} + 480 \cdot 10^{-3} \frac{dv_c}{dt} + v_c = 80$$

ó $(80 \cdot 10^{-3} D^2 + 480 \cdot 10^{-3} D + 1)v_c = 80$

Las raíces de la ecuación característica son: $D_1 = -3+j1,87$ y $D_2 = -3-j1,87$

La tensión $v_c(t)$ será

$$v_c = 80 + e^{-3t} (C_1 \cos 1,87 t + C_2 \sin 1,87 t)$$

Para el cálculo de las constantes C_1 y C_2 se recurre a las condiciones iniciales.

Para $t = 0$, $v_{c(0)} = 0$ obteniéndose $C_1 = -80$

Para la aplicación de la segunda condición inicial $i_{(0)} = 0$, se tiene:

$$i = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$i = 40 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-3t} [-3(C_1 \cos 1,87t + C_2 \sin 1,87t) + (-1,87 C_1 \sin 1,87t + 1,87 C_2 \cos 1,87t)]$$

$$i_{(0)} = 0 = 40 \cdot 10^{-3} [-3 \cdot (-80) + 1,87 \cdot C_2] \quad \rightarrow \quad C_2 = -128,34$$

Por lo tanto

$$v_c = 80 + e^{-3t} (-80 \cos 1,87t - 128,34 \sin 1,87t) \quad (21)$$

Tiempo de respuesta [Tr]

Es el tiempo necesario para que la respuesta permanezca dentro de un porcentaje determinado de su valor final. En este caso se pide el tiempo de respuesta para que la señal permanezca dentro de una banda de $\pm 1\%$ de su valor final, el cual es de 80V.

La función respuesta $v_c(t)$ puede ser acotada por la expresión:

$$v_c^* = 80 (1 \pm e^{-3t})$$

Bebiéndose buscar el tiempo para el cual

$$v_c^* < 80,8V \quad y \quad v_c^* > 79,2V$$

Resultando

$$Tr = 1,53 \text{ s}$$

12.8. Ejercicios propuestos

Problema 8

En el circuito de figura 11, calcular la evolución temporal de la corriente después de cerrarse la llave "S". Hallar el tiempo para el cual se produce el máximo en la corriente.

Rta.: $i(t) = 0,0167 e^{-1,67t} - 0,0167 e^{-7498t}$

$$t = 1,1ms$$

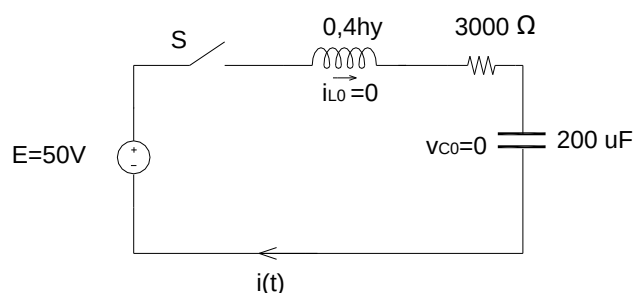
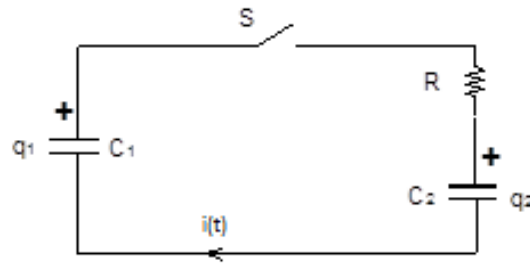


Figura 11

Problema 9

En la red de la figura, la llave "S" se cierra en $t=0$. Obtener la expresión de $i(t)$ y realizar su gráfica para la condición $C_2 = C_1$ y $q_2 = 3q_1$.



Rta.: $i(t) = \left(\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} \right) \frac{1}{R} e^{\lambda t}$ con $\lambda = -\frac{1}{R} \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}$

Para $C_1 = C_2$ y $q_2 = 3 q_1$ $i(t) = -\frac{2 q_1}{C_1 \cdot R} e^{-\frac{2}{R \cdot C_1} t}$

Problema 10

En el circuito de figura 13, la llave “S” permaneció en la posición “0” un tiempo prolongado, en un tiempo al que consideramos como $t = 0$ pasa la llave a la posición “1” y a los $500\mu s$ se lleva a la posición “2”. Obtener la evolución temporal de la corriente $i(t)$ y graficarla.

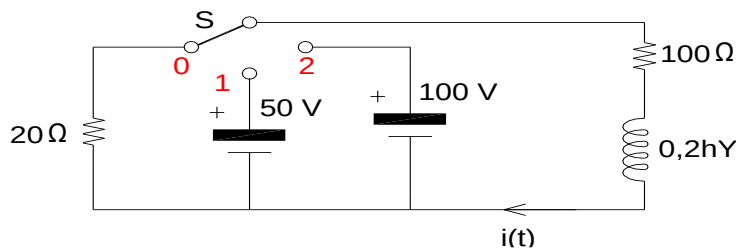


Figura 13

Rta.: $i(t) = 0,5 (1 - e^{-500t})$ $0 \leq t \leq 500\mu s$

$i(t) = 1 - 0,89 e^{-500(t-500)}$ $t \geq 500\mu s$

Problema 11

En el circuitomostrado en la figura 14, la llave “S” en la posición “1” un tiempo suficientemente grande y luego pasa a la “2”. Determinar para esta nueva condición:

1. La evolución temporal de la corriente
2. La energía disipada por cada resistencia

Figura 14

Rta.: $i(t) = -0,25 e^{-6,25t}$

$E = 1 \text{ w.s}$

