

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPO LEVI

AÑO CUARTO - FASC. 2



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1944

A U T O R I D A D E S D E L A F A C U L T A D

Delegado Interventor
Arquitecto ERMETE DE LORENZI

Secretario
Ingeniero LUIS AYMÍ

I N D I C E

	Pág.
Algunas noticias elementales de teoría de los números (B. LEVI)	65
Una nueva demostración del teorema de Jacobi (J. V. USPENSKY)	80
Algunos teoremas sobre las series de términos positivos con aplicación a la generalización de un teorema de Fatou sobre la convergen- cia absoluta de las series trigonométricas (LEOPOLDO NACHBIN) . .	90
Solución de la cuestión N° 8 (LUIS A. SANTALÓ)	105
Ejercicios y Problemas (Resueltos)	112
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	128

DONADO
EN MEMORIA DEL PROFESOR
INGO. JORGE A. LOUREIRO

ALGUNAS NOTICIAS ELEMENTALES DE TEORIA DE LOS NUMEROS

1. -Damos a continuación algunas noticias elementales sobre un argumento muy conocido, pero no particularmente por nuestros alumnos, por no entrar en los programas de curso. La oportunidad nos viene ofrecida por el deseo de que puedan ellos aprovechar plenamente la lectura del artículo que sigue del Prof. Uspensky; pero el interés cultural es mucho más amplio.

«Teoría de los números» no expresa, por el significado de las palabras, nada diferente de «aritmética»; y en efecto, mientras Legendre, al publicar en 1798 su célebre *Essai sur la Théorie des Nombres*, forjaba el nombre que muy pronto fué generalmente aceptado por esa rama de la matemática, casi contemporáneamente, en 1801, Gauss publicaba otro tratado fundamental sobre los mismos argumentos con el título aparentemente más modesto *Disquisitiones arithmeticae*. La diferencia entre *aritmética* y *teoría de los números*, que puede justificar la necesidad de un nombre nuevo, está en que esta segunda poco se ocupa de la práctica de los cálculos, sino que, considerando los números por sus mutuas dependencias, estudia sus propiedades de cierta manera con el mismo espíritu que la geometría estudia las propiedades de las figuras.

Y, como la geometría, en cuanto ciencia abstracta, se funda esencialmente sobre ciertas propiedades elementales atribuidas a las figuras geométricas por medio de los postulados, se sigue que en la teoría de los números estos últimos, más bien que como los instrumentos para contar o para medir, aparecen como un sistema de entes realizando ciertos postulados. Y no siempre estos postulados son los mismos para diferentes capítulos; como regla general, puede decirse que lo esencial es que dichos postulados y los teoremas que de ellos se derivan puedan inter-

pretarse en propiedades de los números enteros, tal como los estudia la aritmética ⁽¹⁾.

2. - Sabemos, p. ej. que los números enteros, de cualquier manera que quieran pensarse definidos ⁽²⁾, constituyen un sistema dentro del cual están definidas dos operaciones: *adición* y *multiplicación*; en los elementos de aritmética se define la segunda por la primera; despreciemos por un momento esta derivación: quedan todavía ciertas propiedades que de por sí permiten adelantar mucho en las deducciones; tales por ej. las *propiedades formales* o *algebraicas* que sirven de fundamento al álgebra literal. Todavía más arraigada en la naturaleza numérica (y sin embargo, como vamos a ver, no estrictamente vinculada a la formación de los números por acumulación de unidades) es la posibilidad de clasificar los números por múltiplos y submúltiplos, números primos entre sí y números primos absolutos. Hay todo un amplio capítulo de propiedades multiplicativas de los números que se fundan esencialmente sobre la descomposición única en factores primos.

Es fácil ver, recorriendo un tratado de aritmética, que el fundamento del cual se origina esta descomposición es el llamado procedimiento de Euclides (o de las divisiones sucesivas) para la determinación del máximo común divisor de dos números; y este procedimiento supone únicamente las propiedades siguientes:

1º. Los números están clasificados en «niveles» de manera que dos tienen el mismo nivel o uno de ellos tiene nivel inferior al otro (para los números enteros el nivel es la relación de ma-

⁽¹⁾ El punto de vista aquí adoptado, reflejando el desarrollo histórico, es intermedio entre el más antiguo, cuando la teoría empezó a desenvolverse de la simple curiosidad por las propiedades de los números enteros, muchas observadas, en un principio, experimentalmente y de maravillosa belleza; y el más moderno en el cual el natural interés para los números, como nos los da el uso cotidiano, parece desaparecer, concentrándose en cambio sobre las propiedades de abstractas generalizaciones definidas únicamente por un grupo de hipótesis. En el mismo sentido puede verse: B. LEVI. *Introduzione all'analisi matematica*. — Parma, 1916.

⁽²⁾ Es decir sea que sus propiedades elementales se piensen adquiridas por vía medio experimental como en los libros más antiguos, o bien que se quiera fundamentar la teoría sobre bases más estrictamente lógicas, como Grassmann, Dedekind, Peano, etc.

yor y menor entre números). Los niveles menores que uno cualquiera son en número finito.

2º. Está definida una operación de *división* (determinación de *cociente* y de *resto*) por la cual el resto tiene siempre nivel inferior que el divisor.

Hemos usado la palabra «nivel» para indicar el concepto en su máxima generalidad; en las aplicaciones tomará nombres diferentes, como *cota*, *módulo*, *norma*, etc.

He aquí la realización que nos interesa inmediatamente:

Consideremos el conjunto de los números complejos $a + ib$ con a y b enteros racionales (positivos o negativos) ⁽³⁾; los llamaremos *números enteros complejos* o *números enteros de Gauss*. Definamos como «nivel» la *norma* $a^2 + b^2$. Nótese que tienen en general la misma norma por lo menos 8 números que se obtienen dando a a y a b en todos los modos posibles los signos $+$ y $-$ y permutándolos entre sí (ese número puede disminuir sólo en casos particulares — igualdad de valores absolutos de a y b o valor 0 de ellos — por identificación de algunos de los nombrados); pero otros pueden tener la misma norma, al existir números c, d , distintos de a, b y tales que $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$; las soluciones posibles de esta ecuación son siempre en número finito; se sigue que los enteros complejos de determinada norma son en número finito. Además las normas posibles $< a^2 + b^2$ son en número finito; por tanto, asignado un número cualquiera, es finito el número de los enteros complejos de norma (nivel) menor o igual. El valor mínimo de la norma de números $\neq 0$ es 1 y pertenece a los 4 números

⁽³⁾ Para evitar confusiones conviene llamar “números enteros naturales” los números que nos da la primera intuición con la operación de “contar”; se incluye ordinariamente el 0; los números enteros con signo (positivos y negativos) se caracterizan ordinariamente con el adjetivo de *racionales* o *reales*. Conforme con las observaciones preliminares que anteceden, habrá que considerar otros *enteros*, según las nociones que se quieren desarrollar, y que se puntualizaran en su oportunidad.

Débase notar que la teoría elemental del máximo común divisor a la cual hemos anteriormente hecho referencia, se desarrolla ordinariamente, en los tratados, para los números naturales. Pero el lector puede darse cuenta en seguida que ella puede repetirse para los enteros racionales palabra por palabra; la sola diferencia está en la definición del resto que será conveniente determinar según lo dicho en la nota siguiente.

$$1 \quad -1 \quad i \quad -i. \quad (1)$$

que, por las razones que se dirán, se llaman *unidades*.

De lo dicho resulta en seguida que las condiciones enunciadas en 1º. están realizadas.

Definamos ahora una operación de *división* como sigue:

Dados dos números $a+ib$, $c+id$, formemos

$$m+in = (a+ib)(c-id);$$

sea

$$q = c^2 + d^2 = (c+id)(c-id)$$

y

$$m = eq + r, \quad n = fq + s,$$

donde e, f, r, s son enteros racionales (positivos o negativos) y $|r| \leq \frac{1}{2}q$, $|s| \leq \frac{1}{2}q$ (4). Pongamos finalmente

$$h+ik = (a+ib) - (e+if)(c+id). \quad (2)$$

Se verifica fácilmente que

$$(h+ik)(c-id) = (m+in) - (e+if)q = r+is;$$

luego, tomando las normas del primero y último miembro, se obtiene

$$(h^2+k^2)(c^2+d^2) = r^2+s^2 \leq \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{2}q^2,$$

$$h^2+k^2 \leq \frac{1}{2}q.$$

Se sigue que la igualdad (2) (que siempre se puede construir

(4) e, f, r, s corresponden a cocientes y restos de la división por q , con la variante solamente que, mientras en la definición elemental de la división, cociente y resto se suponen positivos y el resto menor que el divisor, al suponerlos, como aquí, de signo conveniente, puede siempre imponerse al resto la condición que su valor absoluto sea menor o igual que la mitad del divisor.

con valores unívocamente determinados de e, f, h, k) define bien una operación de división entre los números $a + ib$, $c + id$, en la cual el resto $h + ik$ tiene siempre nivel menor que el divisor $c + id$.

Los números enteros racionales pueden considerarse como casos particulares de los enteros complejos, cuando la parte imaginaria es 0. Si, poniendo

$$a = a + i0, \quad b = b + i0,$$

se aplica la anterior definición para formar el cociente y resto de $a/b = (a + i0)/(b + i0)$, se encuentra la definición ordinaria, con la sola diferencia, aludida ya en la nota (4), de tomar como resto el entero positivo o negativo que realiza las condiciones

$$a = bq + r, \quad |r| \leq \frac{|b|}{2}.$$

Por lo que dijimos, podemos ahora aplicar a los enteros de Gauss el procedimiento de las divisiones sucesivas; los sucesivos restos tienen normas decrecientes (cada una menor o igual que la mitad de la anterior); y pues estas normas son todas números enteros positivos, se llegará finalmente a un último resto 0. Un razonamiento conocido permite afirmar que el resto anterior es el *máximo divisor común de los números de partida*.

Debe aquí hacerse la observación siguiente: es posible que el penúltimo resto (último $\neq 0$) tenga norma $\neq 1$ o tenga norma $= 1$. En este segundo caso este resto es una de las unidades (1); pero se observa que

$$1 : 1 = 1, \quad 1 : -1 = -1, \quad 1 : i = -i, \quad 1 : -i = i;$$

se sigue que las unidades son divisores de todos los números (la división por una unidad reduciéndose a la multiplicación por la misma o por otra); decir que una unidad es divisor común de los números dados es enunciado vacío de sentido propio. Por lo contrario un número de norma $\neq 1$ no es divisor de cualquier número, porque puede ser divisor solamente de números cuya norma sea múltiplo de la suya. Resulta por tanto natural la definición siguiente: *decimos primos entre sí dos números enteros com-*

plejos cuyo máximo común divisor, determinado con el procedimiento de Euclides, sea una unidad: cualquier unidad es entonces divisor común y no hay otros. Si el máximo común divisor, determinado con el procedimiento de Euclides, no es una unidad, son divisores comunes de los dos números todos los divisores de ese máximo común divisor, salvo un multiplicador unidad arbitrario; en particular el m. c. d. obtenido directamente con las divisiones puede sustituirse por el producto del mismo por una unidad cualquiera.

3. - Una consecuencia inmediata de la posibilidad de aplicar el procedimiento de Euclides es la extensión de la teoría de las fracciones continuas; en particular se extiende igualmente el análisis indeterminado de primer grado con el teorema: *condición necesaria y suficiente para que tenga solución entera la ecuación indeterminada*

$$Ax + By = C$$

es que C sea divisible por el m. c. d. de A y B . (A, B, C, x, y son aquí números enteros complejos; podrían ser elementos de otro sistema cualquiera para el cual se realizaran las condiciones 1º. y 2º. del n. 2).

Que la condición sea necesaria es inmediato; para demostrar que es suficiente basta mostrar que, si D es el m. c. d. de A y B , existen números α y β tales que

$$A\alpha + B\beta = D. \quad (3)$$

Escribamos la sucesión de igualdades que expresan el procedimiento de Euclides:

$$\begin{aligned} A &= N_0, & B &= N_1 \\ N_0 &= N_1 Q_1 + N_2, & N_1 &= N_2 Q_2 + N_3, & \dots, \\ N_{p-2} &= N_{p-1} Q_{p-1} + N_p, & N_{p-1} &= N_p Q_p + D. \end{aligned} \quad (4)$$

Multiplicando la penúltima igualdad por Q_p y restando la última se obtiene

$$N_{p-2} Q_p = N_{p-1} (Q_p Q_{p-1} + 1) - D.$$

Si esta igualdad se sustituye al grupo de las dos últimas (4), se reduce en uno el número de esas igualdades sin cambiar la forma; las dos últimas igualdades del nuevo sistema serán

$$N_{p-3} = N_{p-2}Q_{p-2} + N_{p-1}, \quad N_{p-2}Q_p = N_{p-1}(Q_pQ_{p-1} + 1) - D$$

y se eliminará entre ellas N_{p-1} al multiplicar la primera por $(Q_pQ_{p-1} + 1)$ y restar la segunda. Resulta

$$N_{p-3}(Q_pQ_{p-1} + 1) = N_{p-2}(Q_pQ_{p-1}Q_{p-2} + Q_p + Q_{p-2}) + D.$$

Se ve ahora claramente cómo se aplica el procedimiento de reducciones sucesivas, quedando finalmente una relación de la forma

$$AM = BP \pm D;$$

bastará poner $\alpha = \pm M$, $\beta = \mp P$ (donde el signo $\pm$ es el mismo que figura delante de D) para realizar (3).

4. - Llamamos *número primo de Gauss* a cada número entero complejo que sea divisible únicamente por sí mismo y por las unidades; a continuación vamos a demostrar que existen infinitos números primos. De inmediato se nota lo siguiente: dado un número A , si no es primo, todos sus divisores, que no sean el mismo A multiplicado por una unidad, tienen norma inferior a la norma de A ; los números que realizan esta condición son en número finito; se puede luego imaginar de compararlos uno después de otro con A con el procedimiento del m. c. d. Si ninguno de estos números tiene divisores comunes con A (que no sean unidades), A es primo; si alguna vez se obtiene un m. c. d. que no sea unidad se puede repetir el procedimiento poniendo este m. c. d. en lugar de A ; no es posible que en este procedimiento de descenso se encuentren siempre nuevos divisores que no sean unidades, porque esto significaría una ilimitada descomposición de A en factores, y, de no ser estos unidades, el producto de sus normas debe dar la norma de A . Se infiere de esta observación que existen números primos y cada número que no sea unidad ni sea número primo es producto de números primos. Finalmente se aplica inalterado el razonamiento que se hace ordinariamente para los números enteros racionales para con-

cluir que la descomposición en factores primos es única — salvo factores unidades.

Hagamos todavía las observaciones siguientes: si un número entero $a+ib$ se descompone en factores, el número conjugado $a-ib$ es el producto de los factores conjugados; en particular un número entero racional tiene como factores enteros complejos conjugados dos a dos.

Se sigue que un número entero racional primo p , o bien es también primo como entero complejo, o bien se descompone en dos factores primos conjugados entre sí; en efecto la norma de p es p^2 y, si p se descompone en factores, debe ser p^2 el producto de las normas de éstos. En el caso que $p=p+i0$, considerado como entero de Gauss, fuese producto de dos factores, cada uno de estos tendría pues por norma p ; y no puede haber ulterior descomposición.

Recíprocamente un número primo complejo π tiene necesariamente por norma un número primo racional; en efecto esta norma se expresa por $\pi\bar{\pi}$ (indicando con el guión arriba la relación de conjugado); si ella se expresara como producto de dos números racionales, determinando los divisores comunes a π y a cada uno de éstos se obtendría una descomposición de ambos números en factores, no unidades; análogamente operando con $\bar{\pi}$.

Sea $\pi=a+ib$; y sea p la norma; se tiene

$$\pi\bar{\pi}=a^2+b^2=p,$$

y resulta p descompuesto en la suma de dos cuadrados; recíprocamente, si un número p puede expresarse como suma de dos cuadrados, se descompone por eso en el producto de dos enteros complejos conjugados. Por tanto los números primos complejos son únicamente: 1º los números primos racionales (si existen) no descomponibles en suma de dos cuadrados; 2º los dos factores (conjugados entre sí) de los primos racionales (si existen) descomponibles en la suma de dos cuadrados.

Existen efectivamente los dos tipos, porque, por ej.:

$$2=1+1=(1+i)(1-i), \quad 5=1+4=(1+2i)(1-2i),$$

pero 3 no es suma de dos cuadrados.

Se observa, en general, que un número impar, si es suma de dos cuadrados, éstos deben ser respectivamente par e impar; el primer cuadrado será múltiplo de 4; el segundo será de la forma $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$; por tanto el número considerado será de la forma $4m+1$ (m entero positivo); se sigue *serán números primos complejos todos los números primos racionales de la forma $4m+3$:*

3, 7, 11, 19, 23, ...

5. - Para demostrar que recíprocamente *ningún número impar de la forma $4m+1$ puede ser primo complejo*, hagamos la observación siguiente: es fácil ver que, si p es un número primo racional, el polinomio

$$(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1))$$

tiene todos sus coeficientes múltiplos de p , salvo el primero que es 1 y el último que es $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (teorema de Wilson); la proposición equivale al teorema de Fermat que afirma que, si x es entero, no múltiplo de p , $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ⁽⁵⁾. Vale luego (para cualquier x entero racional o complejo) la igualdad

$$x^{p-1} - 1 + \text{mult. } p = (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)).$$

Pongamos $x=i$; si $p=4m+1$, $i^{p-1} = (i^4)^m = 1$; por tanto, en esta hipótesis, se tiene

$$(i-1)(i-2)\dots(i-(p-1)) = Kp \quad (5)$$

⁽⁵⁾ En efecto, desarrollando el producto, sea

$$(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) = x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \dots + (p-1)!;$$

por el teorema de Fermat, se tiene

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ para } x = 1, 2, \dots, p-1;$$

se sigue

$$a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \dots + [(p-1)! + 1] \equiv 0 \pmod{p}$$

para los mismos $p-1$ valores de x . Se aplica entonces el razonamiento mismo por el cual, en álgebra se demuestra que un polinomio de grado $p-2$ no puede ser 0 para $p-1$ valores de la variable si no son 0 todos los coeficientes, para inferir que todos los coeficientes tendrán el factor p .

donde K es un número entero complejo. Si p fuese primo, en cuanto entero de Gauss, tendría que ser divisor de alguno de los factores del primer miembro; pero así no ocurre⁽⁶⁾; por lo tanto la hipótesis es absurda.

Nótese que la demostración, a pesar de ser, en la forma expuesta, simplemente existencial, se cambia en constructiva por un pequeño complemento. En efecto, si p , número primo racional, considerado como complejo de Gauss, deja de ser primo, ya observamos que sólo puede componerse de dos factores conjugados; y éstos deberán ser divisores cada uno de un (distinto) factor del primer miembro de (5); hay por tanto, entre estos factores, dos cuyo módulo es múltiplo de p . Estos módulos son los números de la forma

$$l^2 + 1 \quad (1 \leq l \leq p-1); \quad (6)$$

hay luego entre estos números dos (y no más) de la forma ξp ; el coeficiente ξ es necesariamente $\leq p-1$.

Se infiere luego la proposición: *si p es número primo racional de la forma $4m+1$, entre los números de la forma $\xi p-1$ ($1 \leq \xi \leq p-1$) hay dos que son cuadrados*; lo cual se enuncia también en la forma: *-1 es resto cuadrático de p* (es decir, resto de la división de un cuadrado por p).

Si l es la base de uno cualquiera de estos dos cuadrados, el máximo común divisor entre p y $l-i$ es uno de los factores primos de p .

6. - Consideremos finalmente un número entero racional cualquiera: supongámoslo descompuesto en sus factores primos racionales; podrá haber un factor de la forma 2^k , un cierto número de factores primos de la forma $4m+1$, un cierto número de factores primos de la forma $4m+3$. Supongamos primero que estos últimos se presentan todos con exponente par; reuniendo todos estos factores, el número considerado tomará la forma

$$N^2 2^\varepsilon p_1 p_2 \dots$$

($\varepsilon \geq 0$, p_i números primos de la forma $4m+1$);

(⁶) Porque deberían ser múltiplos de p la parte real y el coeficiente de i ; o, más simplemente porque la norma de tal factor debería ser múltiplo de p^2 .

cada uno de los factores p_i , por el teorema anterior se expresa como suma de dos cuadrados; lo mismo, si $\varepsilon > 0$, puede ponerse $2=1+1$. Notemos además que un producto de sumas de dos cuadrados se expresa a su vez en la misma forma, porque

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\ = (ac \pm bd)^2 + (bc \mp ad)^2;$$

se sigue que el producto $2^\varepsilon p_1 p_2 \dots$ se expresa (generalmente de varias maneras) como suma de cuadrados. Bastará multiplicar por N^2 los dos términos de la suma para obtener análoga descomposición del número $N^2 2^\varepsilon p_1 p_2 \dots$.

Las conclusiones serían opuestas si, en la descomposición del número propuesto en sus factores primos racionales, se presentaran factores de la forma $4m+3$ con exponente impar, porque si se supusiera que un número tal pudiera expresarse como suma de dos cuadrados, después de eliminación de los factores cuadráticos racionales comunes a los dos términos se obtendría una expresión de la forma

$$A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB) \quad (A, B \text{ primos entre sí});$$

y, en la descomposición en factores primos complejos de cada uno de los factores del segundo miembro, no podría obtenerse ningún factor primo racional.

De todo lo que precede se resume la conclusión siguiente:

Los números enteros se dividen en dos clases infinitas: los que pueden expresarse como suma de dos cuadrados (es decir para los cuales existen soluciones de la ecuación indeterminada

$$x^2 + y^2 = n \tag{7}$$

y los para los cuales tal expresión no existe. La descomposición del número en sus factores primos (rationales) nos permite distinguir, por una regla simple, a cual de las dos clases pertenece; un pequeño refinamiento del razonamiento anterior permite también determinar, para cada número dado, el número de las posibles expresiones en suma de dos cuadrados, teniendo en cuenta que esta expresión es única (cuando posible) para los números primos.

Queremos notar que estas propiedades se demuestran también, con procedimientos clásicos aunque posiblemente más largos de lo elegido en las páginas anteriores, sin salir del campo de los puros números naturales. Además, con razonamientos más o menos análogos, pueden estudiarse representaciones con otras formas (por ej. la $x^2 + 2y^2$).

7.-¿Qué puede decirse si en la ecuación indeterminada (7) agregáramos más términos, y consideráramos una de la forma, por ej.,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \dots = n?$$

Esta pregunta ha tenido contestaciones muy interesantes. Un teorema clásico y cuya primera demostración definitiva pertenece a Lagrange, afirma que *todo número entero puede expresarse como la suma de 4 cuadrados*; es de esta representación que trata el artículo que sigue del Prof. Uspensky, por lo que se refiere al número de las representaciones posibles. De la posibilidad de la representación, después de Lagrange se han dado del teorema muchas demostraciones; a continuación vamos a exponer una muy simple debida a Landau⁽⁷⁾.

Notemos primero que basta demostrar el teorema para los números primos, porque un simple cálculo algebraico debido a Euler permite afirmar que, si dos números p, q son expresables como sumas de 4 cuadrados, lo mismo ocurre para su producto. Se tiene en efecto

$$\begin{aligned} p \cdot q = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \\ (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

como se verifica simplemente desarrollando los cálculos algebraicos.

Si ahora p es un número primo, vamos a demostrar que existe un multiplicador $m < p$ tal que mp es la suma de cuatro cuadrados. Luego, aplicando la misma igualdad anterior, demos-

(7) EDMUND LANDAU (1874-1937), *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Hirzel, Leipzig, 1927), 1er. vol., p. 107.

tramos que, del conocimiento de un tal m , se puede determinar otro $n < m$ tal que np es la suma de cuatro cuadrados. Aplicando repetidamente el procedimiento se llegará finalmente al multiplicador 1 y quedará demostrado que el mismo p es la suma de cuatro cuadrados.

Para encontrar el primer multiplicador m , hace Landau la simple observación que si p es primo, entre $p+1$ números cualesquiera hay siempre dos cuya diferencia es múltiplo de p (o, brevemente, congruentes respecto el módulo p). Los $(p+1)/2$ números $\alpha + x^2$ para $0 \leq x \leq \frac{p-1}{2}$ son incongruentes entre sí, cualquiera que sea α ; se sigue que los dos grupos de números x^2 y $-(1+y^2)$ para $0 \leq x, y \leq \frac{p-1}{2}$ forman en total $p+1$ números entre los cuales hay por lo menos dos congruentes mod p , necesariamente pertenecientes a grupos distintos; si se siguen llamando x e y los valores correspondientes de las variables, resulta

$$x^2 + y^2 + 1^2 = mp;$$

pero $|x| \leq (p-1)/2, \quad |y| \leq (p-1)/2;$
 luego $x^2 + y^2 + 1 \leq (p-1)^2/2 + 1 < p^2;$
 por lo tanto $m < p$.

(Se nota que los términos de la suma son tres solamente; el cuarto será 0^2 ; por otra parte, habría podido elegirse diferentemente el valor de α , con tal solamente que fuese < 7 para realizar la última desigualdad; poniendo $\alpha=2$ se habría obtenido $x^2 + y^2 + 1^2 + 1^2$; poniendo $\alpha=5$ se habría obtenido $x^2 + y^2 + 1^2 + 2^2$).

Sea pues

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \quad (9)$$

puede suponerse m impar, porque, si fuese m par, deberían los valores x_i agruparse en cuplas de la misma paridad; podría por lo tanto suponerse que son enteros

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{x_3 - x_4}{2}, \quad y_4 = \frac{x_3 + x_4}{2},$$

y resulta

$$\frac{m}{2} p = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

Si m es impar, cualquiera que sea x_k puede determinarse un y_k congruente a x_k respecto el mod m y de valor absoluto $< \frac{m}{2}$. Se tiene entonces

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < m^2;$$

luego

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = mn \quad (n < m). \quad (10)$$

Multiplicando (9) por (10) y teniendo en cuenta (8) se obtiene

$$m^2 np = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$

donde las z_k se forman con las x_k y las y_k como los términos del segundo miembro de (8) se forman con las a_k y b_k . Pero, en consecuencia de $x_k \equiv y_k \pmod{m}$, cada una de estas z_k es múltiplo de m ⁽⁸⁾; pueden luego dividirse los dos miembros por m^2 , y, poniendo $z_k = mt_k$, resulta

$$np = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2,$$

obteniéndose el resultado que se había anunciado.

8. - El teorema demostrado se extiende, como anteriormente lo hemos aludido en forma de pregunta, a otras representaciones de

(*) En efecto se tiene

$$x_h y_k - x_k y_h = (x_h - y_h) y_k - (x_k - y_k) y_h;$$

se sigue que son divisibles por m cada uno de los cuadrinomios de la forma $x_h y_k - x_k y_h + x_i y_j - x_i y_j$, que forman los tres últimos z ; por ser la suma de los 4 cuadrados divisible por m^2 , debe pues ser todavía divisible por m^2 el primero.

los números por formas con coeficientes no todos 1⁽⁹⁾; se extiende también a la representación por formas de todos los grados. Se considera probable que el problema no fuese desconocido a Diofantos (principios del siglo IV): de cualquier modo reaparece en el siglo XVII (Descartes, Fermat) y en el siglo XVIII, al principio con simples afirmaciones de carácter más o menos experimental, luego con demostraciones parciales; la primera demostración completa para la suma de 4 cuadrados es, como dijimos, de Lagrange (1736—1813), pero precedida por la relación (8) de Euler (1707—1783) y seguida por otra demostración del mismo Euler que, un poco menos simple, no se aleja de la que hemos referido de Landau. En el siglo XIX las demostraciones han sido muchas y por caminos distintos.

Todavía en el siglo XVIII fué Waring⁽¹⁰⁾ principalmente que enunció varias proposiciones análogas y, en particular, afirmó que para cada exponente n existe un número finito $N(n)$ tal que cualquier número entero positivo se puede expresar como suma de $N(n)$ n -mas potencias positivas o menos. La primera demostración del teorema con tal generalidad se debe a Hilbert⁽¹¹⁾ sin embargo sólo en forma existencial, sin la concreta determinación del número $N(n)$; con la demostración de existencia no resulta difícil la determinación de una cota para ese número; difícil es por lo contrario la determinación de un valor certero, tal que no pueda ser ulteriormente rebajado.

B. Levi

INSTITUTO DE MATEMÁTICA (ROSARIO).

(⁹) Véase por ej. L. E. DICKSON - *Modern elementary Theory of numbers* (Chicago - University Press - 1939).

(¹⁰) *Meditationes Algebrae* (1782).

(¹¹) DAVID HILBERT - (1862-1943). — *Ver Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n -ten Potenzen.* — *Göttinger Nachrichten* — 1909 y *Mathematische Annalen*. Vol. 67 - 1909.

UNA NUEVA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE JACOBI

1. Cada número positivo entero puede representarse como suma de cuatro cuadrados enteros, es decir, la ecuación diófan-tica

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

cualquiera que sea el número entero positivo n queda satisfecha por números enteros x, y, z, t . Al contar el número de las solu-ciones admitimos para x, y, z, t valores positivos, negativos y nulos, y además consideramos dos soluciones x, y, z, t y x', y', z', t' como distintas siempre que no se verifique

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Convenido esto, tenemos el célebre teorema descubierto por Jacobi: Llamando $\sigma(n)$ a la suma de los divisores del nú-mero n , y N al número de todas las soluciones de dicha ecua-ción, será

$$N = 8\sigma(n)$$

si n es impar, y

$$N = 24\sigma(m)$$

si $n = 2^\alpha m$, siendo $\alpha > 0$ y m impar.

Para el número de las soluciones primitivas, donde los va-lores de las incógnitas son primos entre sí, tenemos las elegantes fórmulas de Eisenstein. Indicando con M este número y llamando generalmente por p a los divisores primos de n , se tiene, si n es impar,

$$M = 8n\Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

donde el producto se extiende sobre todos los divisores primos de n . Hay fórmulas análogas para n par.

Las fórmulas de Eisenstein se deducen fácilmente del teorema de Jacobi, y recíprocamente, éste aparece como un corolario fácil de aquéllas. Hay muchas demostraciones del teorema de Jacobi, algunas enteramente elementales y bastante sencillas. La nueva demostración, sencilla también, que vamos a exponer en esta Nota, es muy curiosa por cuanto ella establece una afinidad íntima entre el teorema de Jacobi y las representaciones del cuadrado de un número por la suma de tres cuadrados.

2. Consideremos la ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 = uv$$

con cuatro números enteros incógnitos, x, y, u, v . Como

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$$

se descompone en dos factores complejos enteros $x + iy$ y $x - iy$, es muy natural hacer uso, en la discusión que sigue, de los números enteros complejos de Gauss.

De la ecuación

$$(x + iy)(x - iy) = uv$$

se deduce

$$\frac{x + iy}{u} = \frac{v}{x - iy} = \frac{\alpha}{\beta}$$

donde α y β son enteros complejos sin otros divisores comunes que unidades complejas $\pm 1, \pm i$. Por ello existirán otros dos números complejos enteros γ y δ tales que

$$x + iy = \alpha\gamma, \quad x - iy = \beta\delta$$

$$u = \beta\gamma, \quad v = \alpha\delta.$$

Por ser x, y números enteros reales, tendremos, llamando generalmente a_0 al número complejo conjugado de a ,

$$\alpha\gamma = \beta_0\delta_0$$

de donde, llamando $\varepsilon = (\alpha, \beta_0)$ el máximo común divisor complejo de α y β_0 , sigue

$$\begin{aligned}\alpha &= \varepsilon A, & \gamma &= \eta B \\ \beta_0 &= \varepsilon B, & \delta_0 &= \eta A,\end{aligned}$$

siendo todavía ε, η, A, B números complejos enteros. Como u debe ser un número real, tendremos que satisfacer la condición

$$\beta\gamma = \beta_0\gamma_0$$

que se reduce a

$$\varepsilon_0\eta = \varepsilon\eta_0.$$

Pero, siendo α y β números primos entre sí, lo mismo será para ε y ε_0 , y, por consiguiente, η será divisible por ε , es decir

$$\eta = \varepsilon k, \quad \eta_0 = \varepsilon_0 k.$$

Como también

$$\eta_0 = \varepsilon_0 k_0,$$

tendremos

$$k_0 = k$$

es decir que k debe ser un número entero real.

De ese modo tenemos, finalmente,

$$x + iy = k\alpha\beta_0, \quad u = k\beta\beta_0, \quad v = k\alpha\alpha_0$$

con α y β enteros complejos primos entre sí, mientras que k es un número entero real. Es fácil ver que para una solución dada x, y, u, v , los correspondientes números α y β serán determinados salvo unidades complejas y k será determinado completamente.

En efecto, de las ecuaciones

$$k\alpha\beta_0 = k'\alpha'\beta'_0, \quad k\beta\beta_0 = k'\beta'\beta'_0$$

sigue en seguida

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

y como α' y β' , lo mismo que α y β , no tienen divisores comunes, es preciso que sea

$$\alpha' = e\alpha, \quad \beta' = e\beta$$

siendo e una unidad compleja; pero entonces es $k=k'$. De tal manera vemos que todas las soluciones de la ecuación

$$x^2 + y^2 = uv$$

se hallarán, cada una exactamente cuatro veces, mediante las fórmulas

$$x + iy = k\alpha_0\beta, \quad u = k\beta\beta_0, \quad v = k\alpha\alpha_0,$$

tomando para α y β todos los pares de enteros complejos primos entre sí, y para k un número real entero arbitrario. Buscando soluciones primitivas donde x, y, u, v no tienen divisores comunes, es preciso tomar $k = \pm 1$. En efecto, el máximo común divisor de los números

$$\frac{\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta}{2}, \quad \frac{\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta}{2}, \quad \beta\beta_0, \quad \alpha\alpha_0$$

es el mismo que el de los números

$$\alpha\beta_0, \quad \frac{\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta}{2}, \quad \beta\beta_0, \quad \alpha\alpha_0$$

y este último divide al máximo común divisor de los números

$$\alpha\beta_0, \quad \alpha_0\beta, \quad \beta\beta_0, \quad \alpha\alpha_0$$

que es la unidad, como se halla fácilmente. Por ello el máximo común divisor de los números x, y, u, v hallados por las fórmulas precedentes es igual a k .

Consideremos ahora la otra ecuación diofántica

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = t^2,$$

y busquemos todas sus soluciones con t positivo. Como z y t tienen la misma paridad, la sustitución

$$u = \frac{t+z}{2}, \quad v = \frac{t-z}{2}$$

transformará dicha ecuación en

$$x^2 + y^2 = uv$$

que ya hemos discutido completamente. Según dicha discusión, tendremos necesariamente

$$x + iy = k\alpha\beta_0, \quad u = k\beta\beta_0 \quad v = k\alpha\alpha_0,$$

de donde

$$x + iy = k\alpha\beta_0, \quad t = k(\beta\beta_0 + \alpha\alpha_0), \quad z = k(\beta\beta_0 - \alpha\alpha_0)$$

con α y β enteros complejos primos entre sí, y k entero real positivo. De este modo cada solución se hallará precisamente cuatro veces. Es preciso tomar $k=1$ cuando deseemos soluciones primitivas, es decir, aquellas en que x, y, z no tienen divisores comunes.

3. Sea t , impar y positivo, un número dado. Según lo dicho, todas las soluciones primitivas de la ecuación

$$t^2 = 4x^2 + 4y^2 + z^2,$$

y cada una cuatro veces, serán halladas con la ayuda de las fórmulas precedentes tomando $k=1$ y buscando todas las soluciones de la ecuación

$$t = \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0$$

en números complejos enteros α y β primos entre sí, que es lo mismo que buscar todas las soluciones de la ecuación

$$t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

en números enteros ordinarios, tales que los números complejos $a + bi$ y $c + di$ sean sin divisores comunes. Sea $P(t)$ el número de tales soluciones, y $Q(t)$ el número de todas las representaciones primitivas del cuadrado impar t^2 por la forma ternaria $4x^2 + 4y^2 + z^2$. Según lo dicho

$$P(t) = 4Q(t).$$

En el párrafo siguiente vamos a demostrar de una manera bastante sencilla que

$$Q(t) = 2t \prod \left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} \right) = 2R(t),$$

donde el producto se extiende a todos los divisores primos de t . Tenemos por tanto finalmente

$$P(t) = 8R(t).$$

Ahora vamos a buscar una expresión explícita para el número $M(t)$ de todas las representaciones primitivas de t como suma de cuatro cuadrados.

Sea

$$t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

una representación tal y sea ε el máximo común divisor de $a + bi$ y $c + di$, determinado salvo una unidad compleja. Entonces t es divisible por $\varepsilon\varepsilon_0$ mientras que ε no es divisible por ningún número entero real, excepto la unidad. Poniendo

$$a + bi = \varepsilon(a' + b'i), \quad c + di = \varepsilon(c' + d'i)$$

logramos una representación del número $t/\varepsilon\varepsilon_0$,

$$\frac{t}{\varepsilon\varepsilon_0} = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$$

con $a' + b'i$ y $c' + d'i$ primos entre si. Recíprocamente, de una representación parecida, poniendo

$$a + bi = \varepsilon(a' + b'i), \quad c + di = \varepsilon(c' + d'i)$$

se deduce una representación

$$t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

donde $a + bi$ y $c + di$ tienen el máximo común divisor ε y además a, b, c, d no tienen divisor común. En efecto, supuesto que a, b, c, d sean divisibles por un número real $g > 1$, tendremos

$$\varepsilon(a' + b'i) \equiv 0, \quad \varepsilon(c' + d'i) \equiv 0 \pmod{g},$$

de donde

$$\varepsilon[a' + b'i]\xi + \varepsilon[c' + d'i]\eta \equiv 0 \pmod{g},$$

cualesquiera que sean los números enteros complejos ξ, η . Pero, como $a' + b'i$ y $c' + d'i$ son primos entre sí, se pueden tomar ξ y η de tal modo que

$$(a' + b'i)\xi + (c' + d'i)\eta = 1;$$

se sigue entonces

$$\varepsilon \equiv 0 \pmod{g},$$

en contra de la hipótesis.

Se deduce de las observaciones precedentes que el número de todas las representaciones primitivas de t por una suma de cuatro cuadrados vale

$$M(t) = \sum_{\varepsilon \in \varepsilon_0} P\left(\frac{t}{\varepsilon \varepsilon_0}\right) = 8 \sum_{\varepsilon \in \varepsilon_0} R\left(\frac{t}{\varepsilon \varepsilon_0}\right)$$

donde la sumatoria se extiende a números complejos ε no asociados, sin divisores reales y cuyas normas dividen t .

La función numérica $R(t)$, pudiéndose descomponer en factores, en cuanto, siempre que τ y τ' (enteros impares) sean primos entre sí,

$$R(\tau\tau') = R(\tau) \cdot R(\tau'),$$

es fácil ver que

$$\sum R\left(\frac{t}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)$$

también se podrá descomponer en factores de la misma forma, de modo que bastará valuarla cuando t sea una potencia de un número primo, o sea, $t = p^\alpha$. El número primo $p \equiv 3 \pmod{4}$ queda primo en la teoría de los números complejos. Entonces la suma precedente se reduce a un término, correspondiente a $\varepsilon = 1$, y vale

$$R(p^\alpha) = p^\alpha \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Al contrario, el número primo $p \equiv 1 \pmod{4}$ se descompone en dos factores complejos primos

$$p = \pi \cdot \pi'$$

y ε podrá tomar los valores siguientes

$$\varepsilon = 1, \pi, \pi^2, \dots, \pi^\alpha, \pi', \pi'^2, \dots, \pi'^\alpha$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum R\left(\frac{p^\alpha}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) &= R(p^\alpha) + 2R(p^{\alpha-1}) + \dots + 2R(1) = \\ &= p^\alpha - p^{\alpha-1} + 2(p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2}) + \dots + 2 = p^\alpha \left(1 + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

es decir la misma expresión que en el caso $p \equiv 3 \pmod{4}$.

De este modo logramos por fin la fórmula de Eisenstein

$$M(t) = 8t \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

donde el producto se extiende a todos los divisores primos de t .

4. Nos queda por mostrar cómo puede lograrse la expresión precedente de $Q(t)$.

A este objeto vamos a utilizar un teorema de Liouville según el cual la suma

$$G(t) = \sum (-1)^x$$

extendida a todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$t^2 = 4x^2 + 4y^2 + z^2 \quad (a)$$

con z impar y positivo, vale

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} t.$$

Este teorema es un corolario fácil de la fórmula bien conocida de la teoría de las funciones elípticas

$$\vartheta'_1 = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$$

pero puede ser también obtenido de una manera enteramente elemental por medio de otras identidades aritméticas de más sencilla demostración descubiertas por el mismo Liouville⁽¹⁾.

Para nuestro propósito es preciso introducir también la suma

$$g(t) = \sum (-1)^x$$

extendida solamente a soluciones primitivas de la ecuación (a). Es claro que

$$G(t) = \sum g\left(\frac{t}{d}\right)$$

llamando d a todos los divisores de t . Recíprocamente, de la fórmula bien conocida de inversión de Möbius⁽²⁾ resulta

⁽¹⁾ Acerca de las identidades de Liouville y de unas cuantas aplicaciones de ellas, véase "*Elementary Number Theory*" por J. V. USPENSKY y M. A. HEASLET, New York, 1939.

⁽²⁾ La función aritmética $\mu(d)$ de Möbius es definida por ser $\mu(d) = 0$ si d es divisible por un cuadrado; en caso contrario vale $+1$ ó -1 según el número de los factores primos de d es par o impar (en particular para $d=1$ $\mu(1)=1$).

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum \mu(d) G\left(\frac{t}{d}\right) = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \frac{\mu(d)}{d} = \\ &= (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \prod \left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right), \end{aligned}$$

donde el producto se extiende a todos los divisores primos de t .
Ahora digo que en la ecuación

$$t^2 = 4x^2 + 4y^2 + z^2$$

siendo x, y, z números sin divisores comunes, x será par o impar según sea $t \equiv 1 \pmod{4}$ o $t \equiv 3 \pmod{4}$. Supongamos que con $t \equiv 1 \pmod{4}$ sea x impar. Entonces el número positivo $t - 2x$ de la forma $4n + 3$ será divisible por una potencia con exponente impar de un número primo $r \equiv 3 \pmod{4}$. Como

$$(t - 2x)(t + 2x) = 4y^2 + z^2$$

serán y y z ambos divisibles por r , y por consiguiente también $t + 2x$. Pero entonces x contendrá el factor r , lo que es imposible. De la misma manera se demuestra que con $t \equiv 3 \pmod{4}$, x será impar.

A causa de la definición misma de $g(t)$, ello significa que

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} g(t)$$

representa el número de las soluciones primitivas de la ecuación (a) con z positivo, es decir la mitad del número total de esas soluciones, que hemos designado con $Q(t)$.

Por consiguiente

$$Q(t) = 2t \prod \left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right),$$

como habíamos anunciado.

J. V. Uspensky

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LAS SERIES DE TERMINOS POSITIVOS CON APLICACION A LA GENERALIZACION DE UN TEOREMA DE FATOU SOBRE LA CONVERGENCIA ABSOLUTA DE LAS SERIES TRIGONOMETRICAS

INTRODUCCIÓN

Consideremos una serie trigonométrica

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

Un teorema elemental dice que, si las dos series de coeficientes, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes, la serie trigonométrica (1) converge absolutamente cualquiera que sea x . Todavía, la serie trigonométrica (1) puede converger absolutamente para un cierto valor x_0 de x , o para una infinidad (no muy complicada) de valores de x , sin que las dos series de coeficientes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ sean absolutamente convergentes. Un ejemplo, indicado por Riemann, es el de la serie trigonométrica de senos $\sum \sin n!x$ que converge absolutamente en los puntos $x = \frac{p}{q} \pi$, (p y q números enteros cualesquiera) que forman un conjunto numerable denso. Cuando, empero, los coeficientes de la serie trigonométrica satisfacen una oportuna condición suplementaria, esa serie no puede converger absolutamente en un punto sin converger absolutamente en todos los puntos. Un teorema de este género es debido a Fatou⁽¹⁾; este teorema dice que, si una serie trigonométrica de cosenos $\sum a_n \cos nx$ converge absolutamente en un cierto punto x_0 y si sus coeficientes satisfacen la condición suplementaria: $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_n| \geq \dots$ en-

⁽¹⁾ Ver FATOU [1] o TONELLI [2], p. 26 y ZYGMUND [3], p. 134.

tonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, lo que implica la convergencia absoluta de la serie $\sum a_n \cos nx$ para todos los valores de x . Para las series trigonométricas de senos $\sum b_n \sin bx$ existe un teorema análogo, con la restricción de que x_0 no sea congruente con cero, módulo π . Este teorema de Fatoú puede ser obtenido como caso particular de los teoremas I_a o I_b del presente artículo. Un teorema más general que el de Fatoú⁽²⁾ dice que, si una serie trigonométrica de cosenos $\sum a_n \cos nx$ converge absolutamente en un cierto punto x_0 y si la sucesión $(|a_n|)$ de los valores absolutos de sus coeficientes es de variación acotada (§ 7), entonces la serie $\sum a_n$ converge absolutamente y, consecuentemente, la serie trigonométrica converge absolutamente para todos los valores de x . Este teorema puede ser obtenido como caso particular del teorema II del presente artículo.

§ 1. Comenzaremos demostrando el siguiente lema:

Lema I. Sea $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ una sucesión fijada de números reales ≥ 0 . La condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer la sucesión (s_n) para que la convergencia de la serie $\sum A_n s_n$ implique, sin otras condiciones para la sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de números reales ≥ 0 , la convergencia de $\sum A_n$, es que

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf s_n > 0.$$

Demostración: Para demostrar que la condición es suficiente, supongamos satisfecha (2); de ahí resulta que existe un número $\delta > 0$ y un entero $N > 0$ tales que $s_n \geq \delta$ para $n = N, N+1, \dots$. Entonces, como

$$\sum_N^{N+p} A_n \leq \frac{1}{\delta} \sum_N^{N+p} A_n s_n \leq \frac{1}{\delta} \sum_1^{\infty} A_n s_n$$

siendo p un entero ≥ 0 arbitrario, de la convergencia supuesta de la serie $\sum A_n s_n$ resulta la convergencia de la serie $\sum A_n$.

Para demostrar que la condición (2) es necesaria, supongamos que (2) no sea satisfecha, esto es, que

⁽²⁾ Este teorema más general no está enunciado en ZYGMUND, *loc. cit.*, pero la misma demostración, debida a SAKS, que ZYGMUND da del teorema de FATOÚ sirve para justificarlo.

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf s_n = 0$$

y mostremos que, entonces, es posible construir una serie particular $\sum \bar{A}_n$ de términos ≥ 0 , divergente, tal que $\sum \bar{A}_n s_n$ sea convergente. Sea $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$ una serie particular de términos > 0 convergente (por ejemplo, sea $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$). De (3) resulta que podemos construir una sucesión conveniente $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$, creciente de enteros positivos tales que

$$s_{n_p} \leq \varepsilon_p \quad (p=1, 2, \dots).$$

Construída esta sucesión (n_p) , pongamos $\bar{A}_n = 1$ para $n = n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ y $\bar{A}_n = 0$ para los valores enteros positivos eventualmente restantes de n . Es claro que la serie $\sum \bar{A}_n$ de términos ≥ 0 así construída es divergente y que la serie $\sum \bar{A}_n s_n$ es convergente; ello muestra la necesidad de (2).

El lema que acaba de ser demostrado es un caso particular del lema siguiente, que se demuestra de manera análoga y que nos limitaremos a enunciar:

Lema I₀. Sean $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ y $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ dos sucesiones fijadas de números reales ≥ 0 . La condición necesaria y suficiente a que deben satisfacer las sucesiones (s_n) y (r_n) para que la convergencia de la serie $\sum A_n s_n$ implique, para $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ números reales ≥ 0 , la convergencia de la serie $\sum A_n r_n$ es que:

(I) Los valores enteros positivos del índice n que anulan r_n anulan también, excepto eventualmente un número finito de ellos, s_n .

(II) En caso de existir una infinidad de valores enteros positivos del índice n que no anulan r_n , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{s_n}{r_n} > 0,$$

n variando según la sucesión de valores para los cuales $r_n > 0$ ⁽³⁾.

⁽³⁾ El lema I es caso particular de I₀, pero, recíprocamente, I₀ puede ser inmediatamente demostrado como caso particular de I.

§ 2. Demostraremos ahora el siguiente lema:

Lema II. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ una sucesión fijada de números reales ≥ 0 tal que la serie $\sum \lambda_n$ sea divergente. Sea también $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ otra sucesión fijada, monótona no creciente de números reales. Para que la serie $\sum a_n \lambda_n$ sea convergente es necesario y suficiente que:

(I) La serie de términos no-negativos

$$\sum (a_n - a_{n+1}) \sigma_n$$

sea convergente, donde $\sigma_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración. Para demostrar que la condición es suficiente, supongamos (I) y (II) satisfechas y mostremos que $\sum a_n \lambda_n$ converge. Consideremos, para ello, la identidad

$$(4) \quad \sum_1^N a_n \lambda_n = \sum_1^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \sigma_n + a_N \sigma_N,$$

donde N es un entero positivo cualquiera, obtenida aplicando la transformación de Abel a la suma que figura en el primer miembro. El primer término del segundo miembro tiende a un límite finito cuando $N \rightarrow \infty$, en virtud de (I); en cuanto al segundo término, observemos que

$$a_N \sigma_N = (a_N - a_{N+1}) \sigma_N + (a_{N+1} - a_{N+2}) \sigma_N + \dots$$

en virtud de (II), de donde

$$a_N \sigma_N \leq \sum_N^{\infty} (a_p - a_{p+1}) \sigma_p;$$

siendo convergente la serie del segundo miembro en virtud de (I), y, por la misma razón tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Lo mismo sucede pues para el primer miembro. Luego, en virtud de (4), la serie $\sum a_n \lambda_n$ es convergente. De (4) concluimos, además, que:

$$\sum_1^{\infty} a_n \lambda_n = \sum_1^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \sigma_n.$$

Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos $\sum a_n \lambda_n$ convergente. Primeramente es necesario que todos los a_n sean ≥ 0 , pues en caso contrario, existiría un número $\delta > 0$ y un entero positivo N tal que $a_n \leq -\delta$ para $n = N, N+1, \dots$. Luego, de la divergencia de la serie $\sum \lambda_n$, resultaría, contrariamente a lo supuesto, la divergencia de la serie $\sum a_n \lambda_n$. De (4) obtenemos ahora:

$$\sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \sigma_n \leq \sum_{n=1}^N a_n \lambda_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n, \quad a_N \sigma_N \leq \sum_{n=1}^N a_n \lambda_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n.$$

La primera de estas relaciones muestra la necesidad de (I) y la segunda, una vez que $\sigma_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, la necesidad de (II).

§ 3. Habiendo demostrado los lemas precedentes, podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema:

Teorema Ia. *Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ una sucesión fijada de números reales ≥ 0 tal que la serie $\sum \lambda_n$ sea divergente. La condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer la sucesión (λ_n) para que la convergencia de la serie $\sum a_n \lambda_n$ implique, para la sucesión monótona no creciente $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ de números reales ≥ 0 , la convergencia de la serie $\sum a_n$, es que*

$$(5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} > 0 \quad (4).$$

Demostración. Para demostrar que la condición es suficiente, supongamos (5) satisfecha y $\sum a_n \lambda_n$ convergente y mostremos que $\sum a_n$ converge. De la convergencia de $\sum a_n \lambda_n$ resulta, por el lema II, la convergencia de la serie $\sum A_n \sigma_n / n$ y $a_n \rightarrow 0$, donde $A_n = n(a_n - a_{n+1})$ y $\sigma_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Teniendo en cuenta (5) y aplicando el lema I, resulta la convergencia de la serie $\sum A_n$, esto es, de la serie $\sum n(a_n - a_{n+1})$. Este hecho, reunido a $a_n \rightarrow 0$, implica, nuevamente por aplicación del lema II, la convergencia de $\sum a_n$.

(4) Dada una sucesión (λ_n) , los límites de indeterminación de la sucesión $((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)/n)$ se denominan límites de indeterminación de CESARO de la sucesión dada. El teorema exige pues que el límite inferior de CESARO de la sucesión (λ_n) sea > 0 . Así enunciado, el teorema es semejante al lema I.

Para demostrar que la condición (5) es necesaria, designemos con $\sum A_n$ una serie arbitraria de términos ≥ 0 . Si $\sum A_n \sigma_n/n$ fuese convergente, como $\sigma_n \rightarrow \infty$, la serie $\sum A_n/n$, por el lema I, será convergente. Poniendo:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + \frac{A_{n+1}}{n+1} + \dots$$

evidentemente $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ y $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces la convergencia supuesta de $\sum A_n \sigma_n/n$, esto es, de $\sum (a_n - a_{n+1}) \sigma_n$ y el hecho de $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ implica, en virtud de lema II, la convergencia de la serie $\sum a_n \lambda_n$; esta convergencia, por hipótesis, implica la convergencia de $\sum a_n$; nuevamente por el lema II podemos afirmar que la serie $\sum n(a_n - a_{n+1})$, esto es, la serie $\sum A_n$ es convergente. En resumen, la convergencia de $\sum A_n \sigma_n/n$ involucra, cualquiera que sea la sucesión (A_n) de términos ≥ 0 , la convergencia de $\sum A_n$; esto muestra, en virtud del lema I, la necesidad de la condición (5).

El teorema que acaba de ser demostrado es un caso particular del teorema siguiente, que se demuestra a partir de los lemas I₀ y II, y que nos limitaremos a enunciar:

Teorema Ia₀. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ y $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ dos sucesiones dadas de números reales ≥ 0 , tales que $\sum \lambda_n$ y $\sum \zeta_n$ sean divergentes. La condición necesaria y suficiente a que deben satisfacer las sucesiones (λ_n) y (ζ_n) para que la convergencia de la serie $\sum a_n \lambda_n$, cuyos coeficientes son números reales positivos no crecientes ($a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0$), involucre la convergencia de la serie $\sum a_n \zeta_n$, es que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n} > 0.$$

§ 4. Con el objeto de dar una aplicación interesante del teorema Ia, demosremos la proposición que sigue:

Lema III. Sea $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ una sucesión dada monótona creciente de números enteros positivos. La condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer la sucesión (n_p) para que la convergencia de la serie $\sum a_{n_p}$ implique, cualquiera que sea la sucesión $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ monótona no-decreciente de números reales ≥ 0 , la convergencia de la serie $\sum a_n$, es que

$$(6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n_p}{p} < +\infty.$$

Demostración. Consideremos la sucesión (λ_n) definida por: $\lambda_n = 1$ para $n = n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ y $\lambda_n = 0$ para los valores enteros positivos de n eventualmente restantes. Estamos evidentemente en un caso de aplicación del teorema Ia. La condición necesaria y suficiente buscada es:

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{n_{p+1} - 1} > 0$$

de donde inmediatamente sigue (6).

§ 5. Para dar al teorema Ia una forma equivalente, tal vez más natural en este género de cuestiones, demostremos ahora el lema que sigue:

Lema IV. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, una sucesión dada de números reales ≥ 0 . Si esta sucesión es acotada superiormente, para que

$$(7) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} > 0,$$

es necesario y suficiente que exista una sucesión $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ monótona creciente de enteros positivos tal que se realicen conjuntamente

$$(8) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n_p}{p} < +\infty$$

y

$$(9) \quad \liminf_{p \rightarrow \infty} \lambda_{n_p} > 0.$$

Demostración. Para demostrar que la condición es suficiente, supongamos que exista una sucesión (n_p) que verifique (8) y (9). De (9) resulta que existe un número $\delta > 0$ y un entero $P > 0$ tales que $\lambda_{n_p} \geq \delta$ para $p = P, P+1, \dots$. Podemos entonces escribir:

$$(10) \quad \sum_1^n \lambda_k \geq \sum_P^p \lambda_{n_k} \geq (p - P + 1)\delta \quad \text{para } n \geq n_p,$$

donde p designa el mayor valor entero positivo de k para el cual $n_k \leq n$; por tanto

$$n_p \leq n < n_{p+1}.$$

De (8) resulta que existe una constante conveniente $A > 0$ tal que $n_k \leq Ak$ para $k=1, 2, \dots$; será luego

$$n < A(p+1);$$

y de (10) resulta

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \lambda_k > \frac{(p-P+1)\delta}{A(p+1)} \geq \frac{\delta}{A(P+1)} \quad \text{para } n \geq n_p.$$

de donde sigue (7) ⁽⁵⁾.

Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos (7) satisfecha. Resulta que existe un número $\Delta > 0$ y un entero $N > 0$ tales que

$$(11) \quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} \geq \Delta \quad \text{para } n = N, N+1, \dots$$

Determinado este Δ , sea $\delta > 0$ un número fijo $< \Delta$ (por ej., sea $\delta = \frac{\Delta}{2}$). Como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} \geq \Delta > \delta,$$

resulta

$$(12) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > \delta.$$

Indiquemos con n_1 el menor valor entero positivo de n tal que $\lambda_n \geq \delta$; este valor n_1 existe en virtud de (12) y $\lambda_n < \delta$ para $n < n_1$. Indiquemos con n_2 el menor valor entero de $n > n_1$ tal que $\lambda_n \geq \delta$; este valor n_2 existe en virtud de (12) y $\lambda_n < \delta$ para

⁽⁵⁾ En la demostración de que la condición es suficiente no entra la hipótesis de ser acotada superiormente la sucesión (λ_n) .

$n_1 < n < n_2$. Prosiguiendo así indefinidamente, lo que es posible en virtud de (12), llegamos a construir una sucesión (n_p) monótona creciente de enteros positivos tales que $\lambda_{n_p} \geq \delta$ y $\lambda_n < \delta$ para $n_p < n < n_{p+1}$. Podemos escribir

$$\sum_1^{n_p} \lambda_n - \sum_1^p \lambda_{n_k} \leq \delta(n_p - p) < \delta n_p$$

donde p es un entero positivo arbitrario; sea L un número mayor que todos los λ_n ; se sigue

$$\frac{1}{n_p} \sum_1^{n_p} \lambda_n < \delta + \frac{1}{n_p} \sum_1^p \lambda_{n_k} \leq \delta + \frac{pL}{n_p}.$$

Por otro lado, si P designa un entero positivo tal que $n_p \geq N$ para $p = P, P+1, \dots$, aplicando (11) será

$$\Delta < \delta + \frac{pL}{n_p} \quad \text{para } p \geq P,$$

de donde

$$\frac{n_p}{p} < \frac{L}{\Delta - \delta} \quad \text{para } p \geq P.$$

Como, por la definición de los n_p , $\lambda_{n_p} \geq \delta$, queda demostrado que se realizan conjuntamente (8) y (9) ⁽⁶⁾.

Observemos que, si en el enunciado del lema suprimimos la condición de ser la sucesión (λ_n) acotada superiormente, la existencia de la sucesión (n_p) es solamente suficiente (ver ⁽⁵⁾) pero, en general, no es necesaria. Un ejemplo es el de la sucesión (λ_n) definida así: $\lambda_n = 2n + 1$ si n es un cuadrado perfecto y $\lambda_n = 0$ en caso contrario; esta sucesión satisface la condición (7), pero es imposible determinar una sucesión (n_p) que verifique (8) y (9).

§ 6. Habiendo demostrado el lema anterior, podemos darle, en el caso en que la sucesión (λ_n) es acotada superiormente, una forma equivalente al teorema Ia:

⁽⁶⁾ En la demostración de que la condición es necesaria no entra la hipótesis de ser ≥ 0 los λ_n .

Teorema Ib. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ una sucesión dada de números reales ≥ 0 tal que la serie $\sum \lambda_n$ sea divergente. Si esta sucesión es acotada superiormente, la condición necesaria y suficiente a que ella debe satisfacer para que la convergencia de la serie $\sum a_n \lambda_n$ involucre, cualquiera que sea la sucesión $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ monótona no-creciente de números reales ≥ 0 , la convergencia de la serie $\sum a_n$, es que exista una sucesión $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ monótona creciente de enteros positivos tal que

$$(13) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sup. \frac{n_p}{p} < +\infty$$

y también

$$(14) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \inf. \lambda_{n_p} > 0.$$

Demostración. Es suficiente comparar los enunciados del teorema Ia y del lema IV para justificar el teorema anterior. La demostración de la suficiencia de la condición puede también ser hecha de la siguiente manera: supongamos que exista la sucesión (n_p) citada y que la serie $\sum a_n \lambda_n$ sea convergente; la serie $\sum a_{n_p} \lambda_{n_p}$ es también convergente; en virtud de (14) y aplicando el lema I, podemos afirmar que la serie $\sum a_{n_p}$ es convergente; finalmente, en virtud de (13) y aplicando el lema III, inferimos que la serie $\sum a_n$ es convergente, lo que demuestra la suficiencia de la condición. Antes de concluir este párrafo, observaremos que existe un lema análogo al lema IV y un teorema análogo al teorema Ib tales como el lema I₀ es análogo al lema I y el teorema Ia₀ análogo al teorema Ia; por ello, dejaremos de lado sus enunciados.

§ 7. Diremos, como es usual, que una sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de números reales es *de variación acotada* todas las veces que la serie $\sum (a_n - a_{n+1})$, formada con las diferencias de dos términos consecutivos, sea absolutamente convergente.

Demostremos, previamente, el siguiente lema:

Lema V. Sea $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ una sucesión dada de números reales ≥ 0 . La condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer la sucesión (c_n) para que, cualquiera que sea la serie

convergente $\sum A_n$ de términos ≥ 0 , la serie $\sum c_n A_n$ sea también convergente, es que

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup. c_n < +\infty.$$

Demostración. Para demostrar que la condición es suficiente. supongamos (15) satisfecha y $\sum A_n$ convergente. De (15) resulta que existe un conveniente número $C \geq 0$ tal que $c_n \leq C$ para $n=1, 2, \dots$; de la desigualdad $c_n A_n \leq C A_n$ válida para $n=1, 2, \dots$, concluimos la convergencia de $\sum c_n A_n$.

Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que (15) no es satisfecha, esto es, que

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup. c_n = +\infty,$$

y mostremos que entonces es posible construir una serie convergente $\sum \bar{A}_n$ de términos ≥ 0 tal que $\sum c_n \bar{A}_n$ sea divergente. De (16) resulta que podemos elegir una sucesión creciente $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$ de enteros positivos, tales que

$$c_{n_p} \geq p \quad (p=1, 2, \dots).$$

Construida esta sucesión (n_p) , pongamos $\bar{A}_{n_p} = 1/p^2$ para $p=1, 2, \dots$ y $\bar{A}_n = 0$ para los valores enteros positivos de n eventualmente restantes. Es claro que la serie $\sum \bar{A}_n$ de términos ≥ 0 así construida es convergente y que la serie $\sum c_n \bar{A}_n$ es divergente; esto muestra la necesidad de la condición (15).

Demostremos ahora el siguiente lema:

Lema VI. Sea $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ una sucesión dada monótona creciente de enteros positivos. La condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer la sucesión (n_p) para que la convergencia de la serie $\sum a_{n_p}$ implique, cualquiera que sea la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de variación acotada y de términos reales ≥ 0 , la convergencia de la serie $\sum a_n$, es que

$$(17) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sup. (n_{p+1} - n_p) < +\infty.$$

Demostración. Para demostrar que la condición es suficiente,

supongamos (17) satisfecha y $\sum a_{n_p}$ convergente. Sea $H > 0$ un número tal que $n_{p+1} - n_p \leq H$ para $p = 1, 2, \dots$. Podemos escribir, aplicando la transformación de Abel

$$\sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} a_n = (n_{p+1} - n_p) a_{n_p} + \sum_{n_p}^{n_{p+1}-2} (n_{p+1} - k - 1) (a_{k+1} - a_k),$$

donde p designa un entero positivo arbitrario; de ahí

$$\sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} a_n \leq H a_{n_p} + H \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} |a_{k+1} - a_k|,$$

de donde

$$\sum_{n_1}^{n_{p+1}-1} a_n \leq H \sum_{n_1}^{\infty} a_{n_p} + H \sum_{n_1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|,$$

relación que demuestra la convergencia de la serie $\sum a_n$.

Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que (17) no es satisfecha, esto es, que

$$(18) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sup (n_{p+1} - n_p) = +\infty,$$

y mostremos que entonces es posible construir una serie particular $\sum \bar{a}_n$ de términos ≥ 0 , divergente, tal que la serie $\sum a_{n_p}$ y la sucesión $(\bar{a}_n)$ sean, respectivamente, convergente y de variación acotada. Teniendo en cuenta la relación (18) y aplicando el lema V, podemos construir una serie particular $\sum A_n$ de términos ≥ 0 , convergente, y tal que $\sum (n_{p+1} - n_p) A_p$ sea divergente. Construida esta serie, definamos la sucesión $(\bar{a}_n)$ de la siguiente manera: $\bar{a}_n = 0$ para $n = n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ y $\bar{a}_n = A_p$ para $n_p < n < n_{p+1}$, $p = 1, 2, \dots$ (para $n < n_1$ pondremos también $\bar{a}_n = 0$).

Es claro que la sucesión $(\bar{a}_n)$ así definida es de variación acotada, pues $\sum |a_n - a_{n+1}| = 2 \sum A_n$, y que sus términos son ≥ 0 ; que la serie $\sum a_{n_p}$ es convergente, pues sus términos son nulos; finalmente que la serie $\sum a_n$ es divergente, pues $\sum (n_{p+1} - n_p - 1) A_p$ también es divergente. Esto muestra la necesidad de la condición (17).

Este lema es, para las sucesiones de variación acotada, el

análogo del lema III para las sucesiones monótonas no-crecientes.

§ 8. Habiendo demostrado los lemas precedentes podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema:

Teorema II. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ una sucesión dada de números reales ≥ 0 tal que la serie $\sum \lambda_n$ sea divergente. La condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer la sucesión (λ_n) para que la convergencia de la serie $\sum a_n \lambda_n$ involucre, cualquiera que sea la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de variación acotada y de términos reales ≥ 0 , la convergencia de la serie $\sum a_n$, es que exista una sucesión $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ monótona creciente de enteros positivos tal que

$$(19) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sup. (n_{p+1} - n_p) < +\infty$$

y

$$(20) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \inf. \lambda_{n_p} > 0.$$

Demostración. Para demostrar que la condición es suficiente, supongamos que exista una sucesión (n_p) que verifique (19) y (20) y que $\sum a_{n_p} \lambda_{n_p}$ sea convergente. La serie $\sum a_{n_p} \lambda_{n_p}$ es también convergente. Teniendo en cuenta (20) y aplicando el lema I, podemos afirmar que $\sum a_{n_p}$ es convergente; finalmente, en virtud de (19) y aplicando el lema VI, podemos concluir que la serie $\sum a_n$ es convergente, lo que demuestra la suficiencia de la condición.

Para demostrar la necesidad de la condición, supongamos que no existe una sucesión (n_p) que verifique (19) y (20), y mostremos que entonces, es posible construir una serie particular $\sum \bar{a}_n$ de términos ≥ 0 , divergente, tal que la serie $\sum \bar{a}_n \lambda_n$ y la sucesión $(\bar{a}_n)$ sean, respectivamente, convergente y de variación acotada.

Antes, para ello, demostremos que, dados arbitrariamente un número $\delta > 0$, un entero $L > 0$ y un entero $K > 0$, existen dos enteros M y N tales que:

$$(I) \ L < M < N, \quad (II) \ N - M > K, \quad (III) \ \lambda_n < \delta \text{ para } M < n < N.$$

En efecto, consideremos los valores enteros positivos del índice n para los cuales $\lambda_n \geq \delta$. Se pueden presentar dos casos:

1º) Para valores suficientemente grandes del índice n , esto es para $n > n_0$, la desigualdad $\lambda_n \geq \delta$ no se satisface; en este caso basta tomar $M = L + n_0$ y $N = L + n_0 + K + 1$. 2º) Existe una infinidad de valores enteros positivos de n para los cuales $\lambda_n \geq \delta$; en este caso indiquemos con $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ esos valores de n ordenados de manera creciente. Como, por hipótesis no existe una sucesión (n_p) que verifique simultáneamente (19) y (20), y la sucesión (n_p) que acaba de ser considerada evidentemente satisface (20), podemos afirmar que ella no satisface (19), esto es, que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup. (n_{p+1} - n_p) = +\infty.$$

De esta relación resulta que existe un valor de p , sea π , tal que $n_\pi > L$ y $n_{\pi+1} - n_\pi > K$. Como $\lambda_n < \delta$ para $n_p < n < n_{p+1}$, basta tomar $M = n_\pi$ y $N = n_{\pi+1}$.

Demostrado esto, asociemos a cada entero positivo p dos enteros positivos M_p y N_p tales que:

$$(I) \ M_p > N_{p-1}, \quad (II) \ N_p - M_p > p, \quad (III) \ \lambda_n < \frac{1}{p} \text{ para } M_p < n < N_p,$$

para $p = 1, 2, \dots$ (donde $N_0 = 0$), lo que es posible en virtud de lo que acabamos de verificar. Definamos la sucesión $(\bar{a}_n)$ de la siguiente manera: $\bar{a}_n = \frac{1}{p(N_p - M_p - 1)}$ para $M_p < n < N_p$ y $p = 1, 2, \dots$; y $\bar{a}_n = 0$ para los restantes valores enteros positivos del índice n . Es claro que la serie $\sum \bar{a}_n$ de términos ≥ 0 así construída es divergente, pues la contribución de sus términos $\bar{a}_n$, cuyos índices n verifican $M_p < n < N_p$, vale

$$(N_p - M_p - 1) \frac{1}{p(N_p - M_p - 1)} = \frac{1}{p} \quad \text{para } p = 1, 2, \dots;$$

es claro también que la serie $\sum \bar{a}_n \lambda_n$ es convergente pues los únicos términos que contribuyen en esa serie son aquellos cuyos índices n verifican la desigualdad $M_p < n < N_p$ para $p = 1, 2, \dots$ y esas contribuciones, en virtud de (III), son $< 1/p^2$; finalmente, la sucesión $(\bar{a}_n)$ es de variación limitada, pues los únicos términos que contribuyen en la serie $\sum |\bar{a}_n - \bar{a}_{n+1}|$ son los que corresponden a los valores de $n = M_p$ o $n = N_p - 1$ para $p = 1, 2, \dots$ y

esas contribuciones, en virtud de (II) son $\leq 1/p^2$. Esto muestra la necesidad de la condición.

Es interesante observar que el teorema II es semejante al teorema Ib, salvo en el detalle de que en este último es esencial suponer que la sucesión (λ_n) es acotada superiormente. Aquí también cabe una observación idéntica a la hecha al final del § 6.

§ 9. Para aplicar los teoremas Ia, Ib, II a la demostración de los teoremas sobre series trigonométricas recordados en la introducción, es necesario verificar la condición

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\cos x| + |\cos 2x| + \dots + |\cos nx|}{n} > 0,$$

para el teorema Ia; o que existe un número $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que la sucesión (n_p) de los valores enteros positivos de n que verifican $|\cos nx| > \delta$, para cada x fijado, satisfaga (13) o (19) para el teorema Ib o II, respectivamente (y hechos semejantes sustituyendo coseno por seno y excluyendo los valores de x congruentes con cero, módulo π). Todas estas condiciones son fácilmente verificadas. Comparando las demostraciones del teorema de Fatou dadas en Tonelli, loc. cit., y en Zygmund, loc. cit., vemos que la primera se relaciona con los teoremas dados aquí, mientras que la segunda, debida a Saks aunque simple, es completamente de otro tipo.

Las proposiciones aquí enunciadas sobre series de términos positivos también pueden ser dadas como relativas a convergencia absolutas de series cualesquiera. Ellas pueden ser generalizadas para integrales tomadas en intervalos infinitos.

REFERENCIAS

- [1] FATOU P., *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XLI, p. 47-53, 1913.
- [2] TONELLI L., *Serie trigonometriche*, Bologna, 1928.
- [3] ZYGMUND A., *Trigonometrical series*, Monografie Matematyczne Tom V, Warszawa - Lwow, 1935.

Leopoldo Nachbin

ESCOLA NACIONAL DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO BRASIL, RIO DE JANEIRO

SOLUCION A LA CUESTION N^o. 8

La cuestión N^o. 8, propuesta en el Año III, pág. 122, decía:

Sea un triángulo ABC y E, F, G tres puntos situados respectivamente sobre los lados AB, AC, BC . Entre todas las homografías planas que tienen como puntos unidos los vértices A, B, C y transforman en si mismo el interior del triángulo, determinar la que transforma el triángulo EFG en otro de área máxima y calcular esta área.

SOLUCIÓN. Sea L el punto en que la recta determinada por E, F corta al lado BC . Pongamos, para abreviar

$$(B C G L) = -k \quad (1)$$

habiendo puesto el signo menos para que k , dato del problema, sea positivo. Se observa que si en lugar de considerar la recta EF se hubiera considerado la GE y se indicase con M el punto en que corta a la prolongación de AC (no dibujado en la figura).

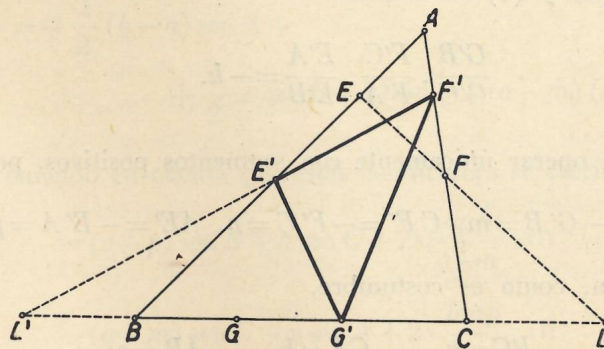


Fig. 1.

sería también $(C A F M) = -k$; en efecto, proyectando la cuaterna $(B C G L)$ desde E sobre AC se obtiene $(A C M F)$, que es igual a $(C A F M)$ y por tanto, puesto que las razones anarmóni-

cas se conservan por proyección es $(CAFM) = (BCGL) = -k$. Lo mismo si se considerase la cuaterna formada por A, B, E y el punto en que FG corta a AB .

Una homografía que cumpla las condiciones del problema queda determinada, dando sobre los segmentos AB y AC los puntos E' y F' respectivamente homólogos de E y F . Estos puntos son, pues, las incógnitas del problema, que hay que determinar por la condición de que el área del triángulo $E'F'G'$ sea máxima.

El punto G' queda determinado si se conocen E' y F' , puesto que, llamando L' al punto en que la recta $E'F'$ corta a BC , debe ser (puesto que B, C son puntos unidos de la homografía)

$$(BCG'L') = (BCGL) = -k$$

o sea

$$\frac{G'B}{G'C} = -k \frac{L'B}{L'C} \quad (2)$$

condición que determina G' .

El teorema de Menelao aplicado al triángulo ABC cortado por la transversal $E'F'$ da

$$\frac{L'B}{L'C} \cdot \frac{F'C}{F'A} \cdot \frac{E'A}{E'B} = 1. \quad (3)$$

De (2) y (3) se deduce

$$\frac{G'B}{G'C} \cdot \frac{F'C}{F'A} \cdot \frac{E'A}{E'B} = -k. \quad (4)$$

Para operar únicamente con segmentos positivos, pongamos

$$BG' = -G'B = m, \quad CF' = -F'C = n, \quad AE' = -E'A = p \quad (5)$$

y también, como es costumbre,

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c; \quad (6)$$

m, n, p, a, b, c son todos números positivos.

Con estas notaciones, la expresión (4) se puede escribir

$$mnp - k(a-m)(b-n)(c-p) = 0. \quad (7)$$

Llamando T al área del triángulo ABC , el área del triángulo $E'F'G'$ vale

$$\tau = T - \frac{1}{2}[p(b-n)\operatorname{sen} A + m(c-p)\operatorname{sen} B + n(a-m)\operatorname{sen} C]. \quad (8)$$

El problema se reduce a buscar el máximo de τ , considerada como función de las variables m, n, p las cuales están ligadas por la relación (7). Podemos seguir el método clásico llamado de los multiplicadores de Lagrange (*), que da como condiciones necesarias para que τ sea máximo o mínimo que las derivadas parciales de la expresión

$$\varphi = \tau + \lambda[mnp - k(a-m)(b-n)(c-p)]$$

sean nulas, o sea,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = -\frac{1}{2}(c-p)\operatorname{sen} B + \quad (9)$$

$$+\frac{1}{2}n\operatorname{sen} C + \lambda[np + k(b-n)(c-p)] = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{2}(a-m)\operatorname{sen} C +$$

$$+\frac{1}{2}p\operatorname{sen} A + \lambda[mp + k(a-m)(c-p)] = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -\frac{1}{2}(b-n)\operatorname{sen} A +$$

$$+\frac{1}{2}m\operatorname{sen} B + \lambda[mn + k(a-m)(b-n)] = 0.$$

Teniendo en cuenta (7) estas condiciones se escriben

$$-(c-p)\operatorname{sen} B + n\operatorname{sen} C + 2\lambda \frac{anp}{a-m} = 0$$

$$-(a-m)\operatorname{sen} C + p\operatorname{sen} A + 2\lambda \frac{bmp}{b-n} = 0 \quad (10)$$

$$-(b-n)\operatorname{sen} A + m\operatorname{sen} B + 2\lambda \frac{cmn}{c-p} = 0.$$

(*) Ver por ej. B. LEVI. *Analisi Matematica algebrica ed infinitesimale*, Bologna, 1937, pág. 463.

Dividiendo estas ecuaciones por abc y poniendo

$$\frac{m}{a}=x, \frac{n}{b}=y, \frac{p}{c}=z, \quad (11)$$

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} = \rho, \quad \frac{2\lambda}{\rho} = \alpha,$$

el sistema (10), junto con la ecuación (7) se escriben

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y(1-x) - (1-x)(1-z) + \alpha yz = 0 \\ \text{(II)} \quad & z(1-y) - (1-y)(1-x) + \alpha xz = 0 \\ \text{(III)} \quad & x(1-z) - (1-z)(1-y) + \alpha xy = 0 \\ \text{(IV)} \quad & xyz - k(1-x)(1-y)(1-z) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Entre las soluciones de este sistema, con las incógnitas x, y, z, α , deben encontrarse las que resuelven el problema.

Con las notaciones (11) y según (8), el área del triángulo $E'F'G'$ se escribe

$$\tau = T - \frac{1}{2}abc\rho [z(1-y) + x(1-z) + y(1-x)]. \quad (13)$$

En el sistema (12) se observa que la hipótesis $x=1$ (y análogamente las $y=1, z=1$) lleva consigo, por la (IV), $y=0$ o $z=0$. Pero $x=1, y=0$ o $z=0$, dan en (13) $\tau = T - \frac{1}{2}bc \text{sen } A = 0$ o sea corresponden a un *mínimo* de τ .

Podemos por tanto suponer $x \neq 0, 1$ y por simetría $y \neq 0, 1, z \neq 0, 1$. Entonces, multiplicando la ecuación (I) de (12) por x y dividiendo por $1-x$ queda, aplicando (IV),

$$xy - x(1-z) + k\alpha(1-y)(1-z) = 0.$$

Teniendo en cuenta (III) esta ecuación equivale a

$$(\alpha k - 1)(1-z) + (\alpha^2 k + 1)y = 0, \quad (14)$$

que es lineal en y, z . Procediendo análogamente se obtienen otras dos ecuaciones que son iguales a la (14) por permutación circular de las x, y, z , o sea,

$$\begin{aligned} (ak-1)(1-x) + (a^2k+1)z &= 0 \\ (ak-1)(1-y) + (a^2k+1)x &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales (14), (15) respecto x, y, z por la regla de Cramer, se observa que resulta $x=y=z$ y por tanto la ecuación (IV) de (12) da

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = k$$

de donde

$$x = \frac{\sqrt[3]{k}}{1+\sqrt[3]{k}}. \quad (16)$$

Este es el valor de x que resuelve el problema. Es decir, la homografía que, cumpliendo las condiciones del enunciado, transforma el triángulo EFG en otro de área máxima, es la determinada por los puntos E', F', G' tales que

$$\frac{BG'}{BC} = \frac{CF'}{CA} = \frac{AE'}{AB} = \frac{\sqrt[3]{k}}{1+\sqrt[3]{k}}. \quad (17)$$

El hecho de que al valor de x dado por (16) corresponde efectivamente un *máximo* del área de $E'F'G'$ se deduce observando que, puesto que el área de los triángulos $E'F'G'$ no puede superar a la del triángulo total ABC , un máximo existe ciertamente, el cual, por tanto, debe corresponder a una solución del sistema (12); pero para las demás soluciones hemos visto que el área es cero.

El área máxima del triángulo transformado valdrá, según (13),

$$\tau = T - \frac{3}{2} abcp x(1-x) = T \left[1 - 3 \frac{\sqrt[3]{k}}{(1+\sqrt[3]{k})^2} \right]. \quad (18)$$

Observemos que cualquiera que sea el valor positivo ξ se verifica

$$\frac{\xi}{(1+\xi)^2} \leq \frac{1}{4} \quad (19)$$

puesto que esta desigualdad equivale a $(\xi-1)^2 \geq 0$ y por tanto en (19) el signo de igualdad vale únicamente para $\xi=1$.

Por tanto de (18) se deduce

$$\tau \geq \frac{1}{4} T,$$

es decir: *Cualquiera que sea el triángulo EFG , siempre existe una homografía, en las condiciones del enunciado del problema, que lo transforma en otro de área igual o mayor que $T/4$, siendo T el área del triángulo ABC .*

El mínimo de estos máximos valdrá $1/4 T$, el cual corresponde al caso de valer en (19) el signo de igualdad, o sea, al caso de ser $k=1$; según el significado (1) de k , esto quiere decir que las rectas AG , BF , CE son concurrentes. En tal caso, todos los triángulos $E'F'G'$ transformados, cualquiera que sea la homografía, gozan de la misma propiedad

de que las rectas AG' , BF' , CE' son concurrentes y el triángulo de área máxima será el formado uniendo los pies de las medianas, cuyo área es efectivamente $1/4 T$.

Se observa que la solución $x=y=z$, dado el significado (11) y (5) de x, y, z , tiene la siguiente interpretación geométrica (fig. 2):

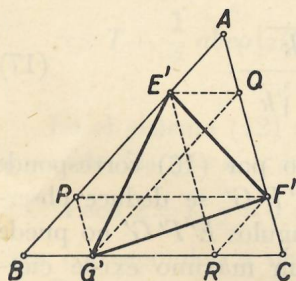


Fig. 2.

Siendo $x = BG' : BC$, trazando por G' la paralela al lado AC hasta que corte en P al lado BA , será $BP : BA = BG' : BC = x$. Por otra parte, trazando por F' la paralela a BC hasta cortar al lado AB , el punto P_1 de intersección debe ser tal que $BP_1 : BA = CF' : CA = y$. Por tanto, si $x=y$, debe ser $P \equiv P_1$. Esto significa que si $E'F'G'$ es un triángulo solución, las rectas trazadas por cada dos vértices paralelamente al lado del triángulo

ABC que contiene al otro, concurren sobre el tercer lado del triángulo ABC .

De otra manera: Los vértices E', F', G' del triángulo transformado de área máxima son vértices no consecutivos de un hexágono de Pascal (E', Q, G', P, F', R) inscrito en el triángulo dado ABC y cuyo eje es la recta del infinito.

Además, con las notaciones de la fig. 2, tomemos un sistema de ejes oblicuos cuyo origen sea B y los ejes ξ, η los lados BC y BA respectivamente. Las coordenadas del baricentro de un triángulo cualquiera se obtienen tomando la media aritmética de las coordenadas homólogas de sus vértices. Por tanto las coordenadas del baricentro del triángulo ABC de vértices $A(0, c)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$ son

$$\xi = \frac{a}{3}, \quad \eta = \frac{c}{3}. \quad (19)$$

Para hallar las coordenadas del baricentro del triángulo transformado de área máxima $E'F'G'$, observemos que por ser los triángulos BPG' y $RF'C$ iguales, es $BG' = RC$ y de la misma manera $BP = E'A$. Por consiguiente las coordenadas de F' son $\xi_1 = BR = a - RC = a - BG'$, $\eta_1 = BP$; las de E' son $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = c - BP$ y las de G' son $\xi_3 = BG'$, $\eta_3 = 0$. Luego las coordenadas del baricentro del triángulo $E'F'G'$ serán

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3} = \frac{a}{3}, \quad \eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{3} = \frac{c}{3}$$

o sea, las mismas del triángulo ABC .

Por tanto: *El triángulo transformado de área máxima tiene el mismo centro de gravedad que el triángulo ABC .*

Esto viene a ser la generalización al caso del plano, del resultado obtenido para el problema análogo considerado sobre la recta (Ver *Mathematicae Notae*, Año Tercero, pág. 107, Ejercicio N.º 16).

Luis A. Santaló

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 27 — Se considera la ecuación

$$x^3 + (\alpha a + \beta)x + (\gamma a + \delta)^2 = 0$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números reales y a un parámetro. Se pide caracterizar los valores de a para los cuales la ecuación tiene las tres raíces reales. Presentándose una distinción de casos según los valores de los números $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dar ejemplos numéricos.

SOLUCIÓN. — Si las tres raíces son reales, los coeficientes de la ecuación son también reales; por lo tanto deberá ser real el valor de a .

Recordamos ahora que, dada una ecuación de tercer grado $x^3 + px + q = 0$, la condición para que sus tres raíces sean reales es

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0.$$

En la ecuación propuesta q tiene la forma de un cubo; por lo tanto esta condición se simplifica en

$$(\gamma a + \delta)^2 \leq -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}(\alpha a + \beta), \quad (1)$$

es decir

$$3\gamma^2 a^2 + (6\gamma\delta + \sqrt[3]{4}\alpha)a + 3\delta^2 + \sqrt[3]{4}\beta \leq 0. \quad (2)$$

Hay que buscar los valores de a para los cuales el trinomio

$$T(a) = 3\gamma^2 a^2 + (6\gamma\delta + \sqrt[3]{4}\alpha)a + 3\delta^2 + \sqrt[3]{4}\beta \quad (3)$$

toma valores negativos. Para ello hay que ver el signo del discriminante, que salvo un factor numérico positivo, se escribe

$$\Delta = \alpha^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\gamma(\delta\alpha - \gamma\beta).$$

Si $\Delta > 0$, la ecuación $T(a) = 0$ tiene dos raíces reales a_1, a_2 . Como para $a \rightarrow \infty$, según (3), es $T(a) > 0$, resulta que el intervalo de valores de a para los cuales es $T(a) \leq 0$, es el $a_1 \leq a \leq a_2$.

Si $\Delta = 0$, la ecuación $T(a) = 0$ tiene una raíz doble $a = a_0$ y para otro valor cualquiera de a es $T(a) > 0$. Si $\Delta < 0$ las raíces de $T(a)$ son imaginarias y para todo valor de a es $T(a) > 0$.

En resumen: *Para que la ecuación del enunciado pueda tener las tres raíces reales debe ser $\Delta \geq 0$. En este caso, si las raíces de $T(a) = 0$ son a_1, a_2 (puede ser $a_1 = a_2$) el intervalo de valores de a para los cuales las tres raíces son reales es $a_1 \leq a \leq a_2$.*

Se pueden observar algunos casos particulares. Para $\alpha = 0$, el signo de Δ es el opuesto al de β y por tanto existirá un intervalo de valores de a al que corresponden raíces reales de la ecuación dada solamente en el caso de ser $\beta \leq 0$.

Para $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, es $\Delta = \alpha^2 > 0$. La ecuación $T(a) = 0$ se reduce a primer grado con una sola raíz a_1 ; por otra parte, en este caso se puede razonar directamente sobre (1) que se reduce a

$$3\delta^2 \leq -\sqrt[3]{4}(\alpha a + \beta)$$

de donde resulta inmediatamente

$$a_1 = -\frac{3\delta^2 + \sqrt[3]{4}\beta}{\sqrt[3]{4}\alpha}.$$

La gráfica de valores T, a es una recta y se ve que es $T \leq 0$ para todos los valores $a \leq a_1$.

Si $\gamma = 0$, $\alpha = 0$ las tres raíces de la ecuación cúbica dada serán reales si $3\delta^2 + \sqrt[3]{4}\beta \leq 0$, como se deduce de (2). El parámetro a desaparece de la ecuación.

Esta solución es debida al Agrim. GUIDO O. G. LISERRE, de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N.º 57 — Demostrar que siempre se pueden trazar n rectas que corten a una figura convexa del plano de manera que la dividan en

$$\frac{n^2 + n + 2}{2}$$

regiones.

SOLUCIÓN.— Dada un área cualquiera siempre pueden trazarse n rectas que se cortan dos a dos dentro de esa área. Basta trazar primero en el plano n rectas cualesquiera que se corten dos a dos en puntos distintos; existe entonces un círculo bastante grande como para contener todos los $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos de intersección. Nótese después que dentro de una área dada se puede siempre colocar un círculo de radio suficientemente pequeño; hágase entonces la figura transformada de las primeras n rectas por la homotecia que transforma el primer círculo en el segundo. Se obtendrán nuevas n rectas que se cortan dos a dos en puntos distintos dentro del círculo pequeño, y por tanto dentro de la área dada.

Sentado esto, demostraremos por inducción el teorema propuesto en el ejercicio: si una figura convexa K se corta con ninguna recta ($n=0$) resulta una región solamente; luego para $n=0$ el teorema está realizado. Supongamos ahora trazadas n rectas que se corten dos a dos dentro de K ; suprimiendo una que llamaremos a quedan $n-1$ rectas en las mismas condiciones; supongamos demostrado que K resulta dividida por ellas en

$$\frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

regiones. Colocando entonces nuevamente la recta a , notamos que cada vez que ella corta una de las $n-1$ rectas precedentes, pasa de travesar una región a travesar a una siguiente; la recta a atraviesa luego n regiones, dividiendo cada una en dos. El número total de las regiones resulta por lo tanto

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

El razonamiento demuestra también que este número es el

máximo posible por cuanto la figura K es convexa, porque la recta a no puede cortar a los contornos de las regiones preexistentes en más que $n-1$ puntos sobre las rectas precedentes más 2 sobre el contorno de K .

Una resolución algo incompleta de este problema fué enviada por el señor Agr. GUIDO O. LISERRE de Rosario.

N.º 58 — Se supone dado un cono circular recto y una cuerda del círculo base. Por esta cuerda se trazan los dos únicos planos que son paralelos a algún plano tangente del cono. Sean α_1, α_2 estos planos. Se pide:

1º Expresar en función de la distancia x de la cuerda al centro del círculo de la base, las áreas Σ_1, Σ_2 de las secciones (segmentos de parábolas) del cono por los planos α_1, α_2 .

2º Determinar x de manera que el valor absoluto de la diferencia $\Sigma_1 - \Sigma_2$ tenga un valor dado S .

3º Encontrar el valor de x para el cual el área de la sección mayor deviene máxima.

SOLUCIÓN.—Se supone el cono del problema representado en proyección apoyado por su base en el plano horizontal de proyección y de tal manera que la cuerda AB del círculo base sea perpendicular al plano vertical de proyección ⁽¹⁾.

Sea V el vértice del cono y O el centro del círculo base. La proyección vertical de la cuerda AB es un punto E ; por este punto trazamos las paralelas a las dos generatrices del contorno aparente del cono en proyección vertical; sean EF y EG estas dos paralelas, que llamaremos respectivamente b_1 y b_2 . La proyección vertical del cono en las condiciones tomadas es un triángulo CVD . La altura VO del cono la llamaremos h ; al radio OB del círculo de la base lo llamaremos R y a la generatriz VD la llamaremos g . La perpendicular OH bajada desde el punto O a la cuerda AB es x ; a la semicuerda BH la llamaremos a .

Con estas notaciones, del triángulo rectángulo BOH se deduce

$$a = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

⁽¹⁾ Una representación en forma de proyección de Monge no tiene en realidad importancia para el problema y el lector puede trazarla a su gusto. Por lo tanto se omite la figura. N. DE LA R.

Los triángulos CEF y CVD son semejantes, luego

$$\frac{b_1}{R-x} = \frac{g}{2R} \text{ de donde } b_1 = \frac{g}{2R} (R-x).$$

Análogamente, considerando los triángulos semejantes DGE y DVC resulta

$$b_2 = \frac{g}{2R} (R+x).$$

De los dos segmentos de parábola formados por los dos planos que pasan por AB y son paralelos a CV y DV conocemos los ejes b_1 , b_2 y la semibase a . El área del segmento de parábola de eje b y semibase a se sabe que vale $\frac{4}{3} ba$. Por tanto

$$\Sigma_1 = \frac{4}{3} b_1 a = \frac{2}{3} \frac{g}{R} (R-x) \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{4}{3} b_2 a = \frac{2}{3} \frac{g}{R} (R+x) \sqrt{R^2 - x^2}.$$

2º. Para determinar x de manera que el valor absoluto de la diferencia $\Sigma_1 - \Sigma_2$ tenga un valor dado S , como $\Sigma_2 > \Sigma_1$, tenemos

$$S = \Sigma_2 - \Sigma_1 = \frac{4}{3} \frac{g}{R} x \sqrt{R^2 - x^2}$$

de donde, elevando al cuadrado y poniendo por brevedad $c = \frac{9S^2 R^2}{16g^2}$, resulta la ecuación bicuadrada

$$x^4 - R^2 x^2 + c = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x = \pm \sqrt{\frac{R^2 \pm \sqrt{R^4 - 4c}}{2}}.$$

Prescindiendo de las soluciones negativas, resulta que el problema tiene dos o ninguna solución, según sea $4c < R^4$ o $4c > R^4$ es decir $3S < 0$ o $> 2gR$.

3º. Para encontrar el valor de x para el cual el área de la sección mayor, que es la Σ_2 , sea máxima, observemos que dicha área será máxima cuando lo sea $(R+x)^2(R^2-x^2) = (R+x)^3(R-x)$. Escribiendo que la derivada debe ser nula, se tiene

$$3(R+x)^2(R-x) - (R+x)^3 = 0.$$

Dividiendo por $(R+x)^2$, puesto que sólo interesan soluciones positivas, resulta $R-2x=0$, o sea

$$x = \frac{R}{2}.$$

Por la naturaleza del problema se ve que a este valor de x corresponde efectivamente un máximo, lo cual se puede ver también hallando la derivada segunda de $(R+x)^3(R-x)$ que es

$$4(R+x)(R-2x) + 4(R+x)^2$$

y para $x=R/2$ toma el valor $9R^2 > 0$.

Esta solución es debida al Agrim. GUIDO O. G. LISERRE, de Rosario.

N.º 64 — Se considera un sólido homogéneo constituido por un hemisferio terminado por un cono recto construido sobre el círculo máximo. Se pide la altura que debe tener el cono para que el cuerpo puesto en plano horizontal apoyado sobre su parte esférica quede en equilibrio indiferente.

Resolver el mismo problema suponiendo que la parte no esférica sea un semielipsoide de rotación y que en esta parte la densidad varíe con la distancia a la base según una ley determinada (por ejemplo disminuyendo proporcionalmente a esa distancia).

Para que el sistema quede en equilibrio indiferente es fácil ver que el centro de gravedad del mismo deberá coincidir con el centro de la esfera cuya mitad estamos considerando.

Además es evidente que el baricentro del sistema y los de la semiesfera y del cono (o semielipsoide) están alineados precisamente sobre el eje de simetría común. Podemos entonces definir el baricentro del sistema como el punto respecto al cual, supuestas concentradas las masas de la semiesfera y del cono (o

semielipsoide) en sus respectivos baricentros, sus momentos estáticos son iguales y de signo contrario.

Caso del cono

Ponemos

radio de la semiesfera $= r$,

altura del cono $= h$.

La densidad no interesa por suponerse la misma en todo el cuerpo.

Sabemos que el baricentro del cono se encuentra a una distancia de la base igual a $1/4 h$; el baricentro de la semiesfera se halla a $3/8 r$ del plano diametral coincidente con la base del cono. Podemos entonces escribir

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r$$

y se obtiene

$$h = r \sqrt[3]{3}.$$

Caso del semielipsoide

En este caso llamamos h a la longitud del semieje mayor.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (x, y) tales que el eje y coincida con el eje de simetría del cuerpo y el origen de coordenadas coincida con el centro del hemisferio.

Si designamos con ρ_y la densidad de un estrato elemental situado a la altura y respecto al baricentro, con ρ_1 la densidad en el extremo superior del semielipsoide y con ρ_e la densidad uniforme de la semiesfera, se tendrá, puesto que la densidad disminuye linealmente con y

$$\rho_y = \rho_1 - \frac{\rho_e - \rho_1}{h} y = \rho_e - ky,$$

habiendo puesto

$$k = \frac{\rho_e - \rho_1}{h}.$$

La masa de dicho estrato vale pues

$$dm = \pi x^2 \cdot dy \cdot \rho_y = \pi x^2 (\rho_e - ky) dy$$

donde x e y están ligados por la ecuación de la sección meridiana del elipsoide

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$$

de donde

$$x^2 = r^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right).$$

Además el baricentro del estrato se halla evidentemente sobre el eje de simetría del cuerpo; concentrando en él la masa del estrato la expresión del momento respecto al origen será

$$y dm = y \pi r^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) (\rho_e - ky) dy$$

y el momento total del semielipsoide es

$$M = \pi r^2 \int_0^h y \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) (\rho_e - ky) dy.$$

La integración se efectúa fácilmente desarrollando el producto bajo el signo de integración; teniendo en cuenta entonces el valor de $k = \frac{\rho_e - \rho_1}{h}$ se obtiene

$$M = \frac{\pi r^2 h^2}{60} (7\rho_e + 8\rho_1)$$

Igualando finalmente al momento estático de la semiesfera, que es

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r \rho_e = \frac{\pi r^4 \rho_e}{4},$$

se obtiene

$$h = r \sqrt{\frac{15\rho_e}{7\rho_e + 8\rho_1}}.$$

Esta solución pertenece al señor ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de la Nación, Rosario.

El mismo problema puede evidentemente estudiarse suponiendo otras distribuciones de densidad; vamos a tratar el caso en que se suponga una disminución de densidad proporcional al cuadrado de la distancia al baricentro, el cual nos ha conducido a una discusión interesante.

Si indicamos con ρ la densidad del semielipsoide en el baricentro, la densidad de un elemento situado a la distancia d del centro de gravedad será

$$\rho_d = \rho(1 - kd^2) = \rho(1 - k(x^2 + y^2))$$

donde k es una cierta constante dada.

La densidad ya no es ahora uniforme en cada estrato horizontal; consideramos entonces como masa elemental genérica la de un anillo de radio x situado en un plano horizontal a la altura y con respecto al baricentro del cuerpo. En cada uno de estos anillos la densidad es uniforme y todos tienen su respectivo baricentro sobre el eje de simetría del cuerpo.

La masa del anillo elemental será

$$\begin{aligned} dm &= \rho_d 2\pi x \, dx \, dy \\ &= 2\pi x \rho(1 - k(x^2 + y^2)) \, dx \, dy; \end{aligned}$$

y, supuesta concentrada la masa en su propio baricentro, el momento estático respecto al baricentro del cuerpo será

$$dM = 2\pi x \rho(1 - k(x^2 + y^2)) \, dx \cdot dy \cdot y$$

que podemos escribir

$$dM = \frac{1}{2} \pi \rho(1 - k(x^2 + y^2)) \, d(x^2) \, d(y^2),$$

y el momento total del semielipsoide será

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{h^2} \int_0^{r^2(1-\frac{y^2}{h^2})} \frac{1}{2} \pi \rho (1 - k(x^2 + y^2)) d(x^2) d(y^2), \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^{h^2} \left[r^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{k}{2} r^4 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)^2 - kr^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) y^2 \right] d(y^2) \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^{h^2} \left[\frac{r^2}{2} (2 - kr^2) - \frac{r^2(1+kh^2-kr^2)}{h^2} y^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{kr^2(r^2-2h^2)}{2h^4} y^4 \right] d(y^2) \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho \left[\frac{r^2(2-kr^2)}{2} h^2 - \frac{r^2(1+kh^2-kr^2)}{2} h^2 - \frac{kr^2(r^2-2h^2)}{6} h^2 \right] \\
 &= \frac{1}{12} \pi \rho r^2 [(3 - kr^2) h^2 - kh^4]
 \end{aligned}$$

Por otra parte recordamos que el momento estático de la semiesfera es

$$M = \frac{\pi \rho_e r^4}{4}.$$

Igualando finalmente se obtiene la ecuación bicuadrada

$$kh^4 - (3 - kr^2) h^2 + 3 \frac{\rho_e}{\rho} r^2 = 0,$$

que vamos a discutir.

Poniendo $h^2 = X$ se tiene

$$kX^2 - (3 - kr^2)X + 3 \frac{\rho_e}{\rho} r^2 = 0. \quad (1)$$

Recordemos ahora la expresión de la densidad

$$\rho_d = \rho(1 - kd^2);$$

si imponemos la condición de que en todos los puntos del cuerpo la densidad sea positiva debe verificarse que en todos los puntos del elipsoide sea $kd^2 < 1$, y para ello es necesario y suficiente que

$$kr^2 < 1 \quad (2)$$

$$kh^2 < 1 \quad \text{o sea} \quad X < \frac{1}{k}. \quad (3)$$

La desigualdad (2) nos asegura también que ambas raíces de la ecuación de segundo grado son positivas. Dichas raíces resultan ser

$$X = \frac{3 - kr^2 \pm \sqrt{(3 - kr^2)^2 - 12 \frac{\rho_e}{\rho} kr^2}}{2k}$$

y por lo tanto la condición (3) es

$$\frac{3 - kr^2 \pm \sqrt{(3 - kr^2)^2 - 12 \frac{\rho_e}{\rho} kr^2}}{2k} < \frac{1}{k}$$

o sea

$$1 - kr^2 \pm \sqrt{(3 - kr^2)^2 - 12 \frac{\rho_e}{\rho} kr^2} < 0.$$

Puesto que por la condición (2) es $1 - kr^2 > 0$ esta desigualdad es imposible en el caso de tomar el signo + o en otras palabras una de las raíces de (1) necesariamente no verifica la condición (3). La otra raíz correspondiente al signo —, verifica la condición (3) si

$$1 - kr^2 < \sqrt{(3 - kr^2)^2 - 12 \frac{\rho_e}{\rho} kr^2}$$

o sea

$$(1 - kr^2)^2 < (3 - kr^2)^2 - 12 \frac{\rho_e}{\rho} kr^2 \quad (4)$$

y efectuado operaciones resulta

$$kr^2 < \frac{2\rho}{\rho + 3\rho_e} \quad (5)$$

Esta desigualdad expresa no sólo la condición para que la raíz cumpla la condición (3) sino también que ella sea real, puesto que es sólo una simplificación de la (4) cuyo segundo miembro es el discriminante de (1) y el primero es un cuadrado, ciertamente positivo.

En resumen, por el hecho de imponer la condición de que el cuerpo tenga en todos sus puntos densidad o masa positiva, el problema admite una solución única y siempre que se verifique la desigualdad (5).

Observamos todavía que es susceptible de una cierta interpretación física la suposición de que el cuerpo pudiera tener una cierta parte de densidad o masa negativa. En efecto, basta imaginar el cuerpo sumergido en el seno de un fluido; el principio de Arquímedes expresa entonces que el cuerpo se comporta como si, no existiendo el fluido, su densidad fuese en cada punto igual a la diferencia entre la densidad efectiva y la del fluido. Esta diferencia resultará entonces negativa en los puntos donde la densidad real es menor que la del fluido en el mismo nivel.

En este caso el problema puede tener dos soluciones, debiendo verificarse solamente que las raíces X de (1) sean reales y positivas. Debe ser entonces

$$3 - kr^2 > 0, \quad (3 - kr^2)^2 - 12 \frac{\rho_e}{\rho} kr^2 > 0$$

Finalmente si se supone $\rho_e = \rho$ la (5) se transforma en

$$kr^2 < \frac{1}{2}.$$

Un caso límite es el de suponer además que en el vértice del semielipsoide la densidad es nula para lo cual debe ser $k = \frac{1}{h^2} = \frac{1}{X}$. La ecuación (1) se transforma en

$$-2h^2 + 4r^2 = 0$$

que tiene la solución única

$$h = r\sqrt{2}$$

verificándose entonces

$$kr^2 = \frac{1}{2}.$$

N.º 62— Supongamos una curva plana C con una asíntota α . Si se transforma la figura por inversión respecto de un punto O del plano, no contenido en la asíntota, ésta se transforma en un círculo y la curva en su inversa, la cual pasa por O . Demostrar que el círculo transformado de la asíntota es el círculo osculador a la curva transformada en el punto O . (Si el centro de inversión está sobre la asíntota la curva transformada tiene en O un punto de inflexión).

SOLUCIÓN.— El teorema que se ha propuesto demostrar no difiere esencialmente de las observaciones contenidas en los últimos párrafos (n. 13 a 16) del artículo: *Definición y condiciones de existencia de la tangente y el círculo osculador en un punto de una curva*, (Math. Notae, Año 11, p. 11 a 34); pero, precisamente en conexión con las consideraciones desarrolladas allí, es conveniente agregar un análisis más detallado.

Supongamos, según la hipótesis del enunciado, que una curva Γ sea la transformada de otra I' por inversión respecto un punto O ; y supongamos que Γ' posea un punto en el infinito que llamaremos I_∞ ; en esta condición Γ pasa por O y tiene por tangente en O la recta OI_∞ . Si, para definir el círculo osculador en O a Γ , aceptamos la definición que en el artículo citado se llamó III, es decir se llama círculo osculador al límite de un círculo variable, tangente en O a Γ , y que corta Γ en otro punto variable A , que se hace tender a O , podemos hacer las observaciones siguientes:

El haz de los círculos tangentes en O a Γ (o, lo que es lo mismo, a OI_∞) corresponde por la inversión al haz de rectas paralelas por el punto I_∞ . Por la inversión, al punto A variable sobre Γ corresponde el punto A' variable sobre I' , y mientras A tiende a O , A' tiende a I_∞ . Condición necesaria y suficiente

para que el círculo por A en el haz considerado tienda a un límite determinado es que la recta AI_{∞} tienda a un límite determinado; y este límite será precisamente la asíntota de Γ' correspondiente al punto I_{∞} .

Un razonamiento análogo habríase podido hacer eligiendo para el círculo osculador la definición llamada IV en el artículo citado, donde el círculo osculador es el límite de los círculos que pasan por O y por dos puntos de Γ que se hacen tender a O ; como caso particular podrían considerarse los círculos tangentes a Γ en un punto variable (tendiendo a O) y que pasan por O ; en todos estos casos la condición de existencia del círculo osculador en O a Γ equivale a la condición que las rectas que unen dos puntos arbitrarios de Γ' o las rectas tangentes a Γ' en un punto arbitrario tiendan a la asíntota cuando dichos puntos tienden a I_{∞} ; y el círculo osculador es siempre el transformado de la asíntota por la inversión.

Las cosas pasan en un modo un poco diferente cuando se eligiera para el círculo osculador la definición llamada V, es decir se considerara el límite de los círculos que pasan por tres puntos de Γ , haciendo luego tender estos tres puntos separadamente al punto O . En este caso, a dichos círculos corresponden por la inversión todavía círculos que cortan a Γ' en tres puntos que tienden a I_{∞} (y sólo excepcionalmente podrían estos círculos cambiarse en rectas por pasar por O el círculo correspondiente); no se puede entonces asegurar que estos círculos tengan por límite la asíntota. Por lo tanto, no se puede asegurar que, por existir la asíntota de Γ' en I_{∞} , la curva Γ tenga círculo osculador determinados en O según la definición V.

Para mostrar como este hecho pueda ocurrir, consideraremos un ejemplo.

Supongamos que la curva Γ' tenga por ecuación

$$y = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}} + 1; \quad (1)$$

ella tiene evidentemente por asíntota la recta $y=1$ y esta tiene por inverso el círculo $x^2 + y^2 - y = 0$ de radio $1/2$, tangente en el punto $(0,1)$ al círculo fundamental de la inversión, que suponemos de radio 1. Se podría escribir fácilmente la ecuación de la curva Γ , pero no tiene interés. Si en (1) ponemos

$$x = k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k\pi, \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

obtenemos 3 puntos para los cuales pasa un círculo cuyo radio R se calcula fácilmente de la ecuación

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(2R - \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^2 + 1}}\right) \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^2 + 1}}$$

esto es

$$R = \frac{\pi^2 \sqrt{k^2 \pi^2 + 1}}{8} + \frac{1}{2 \sqrt{k^2 \pi^2 + 1}}$$

y cuyo centro tiene por coordenadas

$$x_0 = k\pi, \quad y_0 = 1 + (-1)^k \left[\frac{\pi^2 \sqrt{k^2 \pi^2 + 1}}{8} - \frac{1}{2 \sqrt{k^2 \pi^2 + 1}} \right]$$

Este círculo corta luego la recta que une el centro al punto O en el punto más próximo a O a una distancia que, para grandes valores de k es de orden $> 0,28 k\pi$.

Si $k \rightarrow \infty$, los 3 puntos (2) tienden al ∞ , y también crece ilimitadamente el radio R ⁽¹⁾. Los 3 puntos correspondientes por la inversión tienden a O ; pero el círculo considerado, a partir de un cierto k , es todo exterior a la circunferencia de centro O y radio 1; y por tanto su inverso queda interior a esta circunferencia estrechándose siempre más hacia el punto O .

Si el punto O está sobre la asintota, los razonamientos subsisten, sólo que la inversa de la asintota no es más un círculo, sino la misma asintota, la cual por tanto tendrá comunes con la curva Γ por lo menos tres puntos confundidos en O , resultando luego en los casos ordinarios una inflexión.

Si las ecuaciones de las curvas consideradas tienen las derivadas necesarias, la proposición del problema se demuestra también fácilmente por cálculo analítico. Supongamos por comodidad coordenadas polares con polo el punto O y origen de los argumentos la dirección de la asintota. La ecuación de Γ sea $\rho = \rho(\omega)$ y llámese por generalidad h la constante de in-

(¹) Nótese que se tiene aquí un ejemplo de un círculo cuyo radio tiende a ∞ sin que la circunferencia tienda a una recta, porque de tal circunferencia entran en consideración puntos cuya distancia angular queda finita.

inversión; la ecuación de F será $r = \frac{h}{\rho}$. La expresión del radio del círculo osculador en coordenadas polares es

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

que para el punto O , $r=0$, se reduce a

$$R = \frac{r'}{2} = \frac{h\rho'}{2\rho^2}.$$

Es sabido que, llamando φ al ángulo que forma la tangente a una curva $\rho = \rho(\omega)$ dada en coordenadas polares con el radio vector correspondiente al punto considerado, vale

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Por tanto, considerando sólo el valor absoluto,

$$R = \frac{k}{2\rho \operatorname{tg} \varphi}. \quad (3)$$

Hay que hallar el límite de esta expresión cuando $\omega \rightarrow 0$, o sea, $\rho \rightarrow \infty$. En este caso el ángulo φ tiende al ángulo que forma el radio vector con la asíntota, que es igual a ω . Además, llamando b a la distancia de O a la asíntota α , tenemos

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\rho \operatorname{tg} \varphi) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (\rho \operatorname{tg} \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (\rho \operatorname{sen} \omega) = b.$$

Por tanto, sustituyendo en (3),

$$R_0 = \frac{k}{2b}.$$

Pero la inversa de la asíntota α es una circunferencia de diámetro $D = \frac{k}{b}$ y por tanto su radio es igual al del círculo osculador encontrado.

Si el punto O está sobre la asíntota, es $b=0$, y por tanto $R_0 = \infty$, lo cual prueba que el punto O es de inflexión para la curva transformada.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

76. Sea un determinante de orden n en el cual sea nulo el primer elemento de la fila de orden $h+1$ ($0 < h < n$), sean nulos los 3 primeros elementos de la fila de orden $h+2$; en general sean nulos los primeros $2r-1$ elementos de la fila de orden $h+r$ ($r \leq n-h$). Todos los demás elementos se suponen literales y no nulos. Determinar el número de términos no nulos del desarrollo.

77. Sea el determinante, llamado circulante,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

donde cada fila se obtiene como permutación circular de la anterior. Demostrar que sustituyendo todos los elementos de una fila cualquiera por una constante k , el valor del determinante obtenido es siempre el mismo cualquiera que sea la fila sustituida.

78. Siendo α, β, γ tres ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, demostrar que se cumple siempre la relación

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma \leq \frac{1}{8}.$$

79. Sea un triángulo ABC . Sobre la prolongación del lado BC se da un punto L . Trazando una recta variable por este punto L , sean E, G los puntos en que corta a los lados AC y AB respectivamente. Se pide determinar esta recta de manera que el triángulo determinado por los puntos E, G y otro punto M elegido sobre BC sea máximo.

80. Encontrar la ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales de las curvas que realizan la ecuación diferencial

$$\frac{3y^2 - x^2}{y} dy - \frac{3x^2 - y^2}{x} dx = 0.$$

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

—El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.

—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.

—Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).

—Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.

—Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

	m\$u.
Vol. I.	
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	
1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	
1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	
1 - L. A. SANTALÓ — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00