



Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática  
Profesorado en Matemática  
Proyectos Innovadores en Educación Matemática

## Proyecto

Situaciones problemáticas para favorecer un abordaje  
mediante Resolución de Problemas del contenido  
Sistemas de Ecuaciones Lineales en el Profesorado en  
Matemática de la Universidad Nacional de Rosario

Denise Rudi

Diciembre 2021

# Situaciones problemáticas para favorecer un abordaje mediante Resolución de Problemas del contenido Sistemas de Ecuaciones Lineales en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario

## Problematic situations to favor an approach through Problem Solving of the content Systems of Linear Equations in the Mathematics Teachers career at the National University of Rosario

*Denise Rudi*

deniserudi1999@gmail.com

### **Resumen**

Este proyecto de innovación en Educación Matemática se propone identificar problemas que pueden introducirse para favorecer un abordaje mediante la resolución de problemas del contenido sistemas de ecuaciones lineales en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario y sugerir consecuentemente algunas líneas de acción para su tratamiento. El interés en hacer una investigación como esta es que las experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor en Matemática son determinantes para su desempeño profesional. En este sentido, se procura describir las heurísticas que se ponen en juego en tales problemas, reconocer posibles dudas o preguntas que puedan surgir en su resolución y aportar intervenciones docentes, a la hora de atender tales dudas o responder preguntas, que puedan resultar pertinentes. Este trabajo tiene un enfoque cualitativo y alcance principalmente descriptivo-interpretativo. La investigación adquiere rasgos de tipo cuasiexperimental dado que, a partir de la identificación de potenciales problemas, se habla de su re-diseño de manera intencional para un grupo de estudiantes. Se aplica la técnica de análisis documental para la recolección de la información. Se involucran como actores del estudio a tres libros digitalizados sobre Álgebra y Geometría Analítica. Las categorías de análisis están delimitadas por las consideraciones teóricas de la metodología de interés. Finalmente, se proponen algunas líneas de acción para el fortalecimiento de un abordaje de los sistemas de ecuaciones lineales mediante resolución de problemas en la carrera de interés.

### **Palabras clave**

Resolución de problemas. Sistemas de ecuaciones lineales. Formación de profesores.

### **Abstract**

This innovation project in Mathematics Education aims to identify problems that can be introduced to favor an approach by solving problems of the content systems of linear equations in the Mathematics Teachers career at the National University of Rosario and consequently suggest some lines of action for its implementation. The interest in doing research like this is that the training experiences that a future Mathematics teacher goes through are decisive for their professional performance. In this sense, it seeks to describe the heuristics that are put into play in such problems, recognize possible doubts or questions that may arise in their resolution and provide teaching interventions, when addressing such doubts or answering questions, that may be relevant. This work has a qualitative approach and a mainly descriptive-interpretative scope. The research acquires quasi-experimental type features since, from the identification of potential problems, these are intentionally re-designed for a group of students. The documentary analysis technique is applied to collect the information. Three digitized books on Algebra and Analytic Geometry are involved as actors in the study. The categories of analysis are delimited by the theoretical considerations of the methodology of interest. Finally, some lines of action are proposed to strengthen an approach to systems of linear equations through problem solving in the career of interest.

### **Keywords**

Problem solving. Systems of linear equations. Teacher training.

## 1. Presentación

En los cuatro apartados que componen la sección se perfilan los ejes de interés del proyecto de innovación en Educación Matemática. Inicialmente se presenta la problemática del estudio, junto a las preguntas de la investigación. A continuación, se dan a conocer los objetivos del estudio en conexión con los interrogantes planteados. Seguidamente se realiza un recorrido por el estado del conocimiento en el que se abordan cuestiones relativas al accionar del docente al enseñar Matemática mediante la resolución de problemas, así como experiencias de enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en Profesorados en Matemática y las heurísticas que emergen cuando estudiantes de dicha carrera vivencian la metodología de interés para este trabajo.

### 1.1. Problemática

En Argentina, como en muchos países del mundo, se comparte el problema de lograr que los estudiantes de los primeros niveles educativos alcancen aprendizajes matemáticos que resulten valiosos, duraderos y flexibles (Rodríguez, 2019).

Particularmente, la enseñanza de la Matemática para carreras profesionales plantea grandes desafíos en los profesores y las universidades desde hace años, pues las tendencias marcan una enseñanza de manera contextualizada y a través de la resolución de problemas (Herrera et al, 2016).

En este sentido, el ambiente universitario es un lugar donde se está rodeado de tantas certezas que la pregunta “¿para qué más pueden servir los contenidos matemáticos aprendidos además de aplicaciones estrictamente matemáticas?” suele estar un tanto ausente, especialmente en los primeros años de cursado.

Por su parte, la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria de Argentina establece que el plan de estudios de cada carrera esté adecuadamente integrado, con el propósito de lograr el desarrollo de las competencias necesarias para la identificación y solución de problemas abiertos.

No obstante, la problemática sobre el tipo de actividades y problemas para proponer a los estudiantes en la formación matemática universitaria pareciera ser aún una dificultad por superar (Herrera et al, 2016). Durante varias décadas lo más importante era saber Matemática y, para que el docente pudiera enseñar esta ciencia, resultaba suficiente contar solo con

conocimientos disciplinares. Sin embargo, actualmente, según lo expresan Pochulu y Rodríguez (2012):

Al profesor de Matemática se le pide o exige un nuevo comportamiento profesional, una nueva actitud hacia los alumnos; un conocimiento y habilidades pedagógicas flexibles según las distintas situaciones y contextos educativos; un conocimiento de la disciplina en sí y el conocimiento didáctico asociado a ella. Asimismo, se espera y pretende que: logre impulsar y motivar el trabajo de los alumnos conduciéndolos a la reflexión; domine aspectos sociales y emotivos de los alumnos; sea hábil en la generación de entornos de aprendizajes matemáticamente ricos y enriquecedores; diseñe modelos que se adapten a las inciertas y cambiantes condiciones de aprendizaje que se dan en las clases de Matemática, y sepa preparar a sus alumnos, ya sea para una integración y participación en el mundo del trabajo, o para la continuidad de estudios superiores (p.9).

De acuerdo a la problemática planteada, se propuso trascender las clases de Matemática en la carrera de Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Atender a esta cuestión reviste un carácter de urgencia, en tanto el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional (Ciccioli, 2019). En este sentido, un espacio propicio para la contextualización del proyecto innovador lo constituye la formación inicial de profesores en Matemática.

En particular, en este proyecto se procura hacerlo con el contenido Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) correspondiente a la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II del primer año de la carrera de PM y se decidió trabajar con el enfoque Resolución de Problemas (RP), dado que en esta metodología de trabajo entran en juego estrategias y habilidades cognitivas y metacognitivas de reflexión sobre lo realizado, en pos a propiciar aprendizajes significativos. La elección del contenido SEL radica en que es rico en sí mismo, ya que permite resolver problemas de diversa índole con un tratamiento algebraico, así como modelizar fenómenos de distinta naturaleza mediante diferentes registros de representación semiótica tales como tablas, gráficos y la representación analítica. Fomentan el uso de diferentes procedimientos matemáticos en su resolución y, además, ponen de relieve diversos conceptos matemáticos como incógnita, ecuación, dependencia, solución, conjunto solución, entre otros.

En Santa Fe, los SEL forman parte de los contenidos que constituyen el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) de la educación secundaria y también figuran en los planes de estudio de instituciones formadoras correspondientes (Consejo Superior de la Universidad Nacional de Rosario, 2018). Se trata, entonces, de un tema relevante para la formación inicial y el desempeño laboral de profesores en Matemática.

## 1.2. Interrogantes

Este estudio se propone dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué problemas pueden introducirse para favorecer un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR?
- ¿Qué heurísticas se ponen en juego en tales problemas?
- ¿Qué intervenciones docentes, a la hora de atender dudas o responder preguntas, pueden ser pertinentes?

## 1.3. Objetivos

Este proyecto se propone identificar problemas que pueden introducirse para favorecer un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR. Específicamente interesa:

- Describir las heurísticas que se ponen en juego en tales problemas.
- Reconocer posibles dudas o preguntas que puedan surgir en su resolución.
- Aportar intervenciones docentes, a la hora de atender tales dudas o responder preguntas, que puedan resultar pertinentes.

## 1.4. Estado de conocimiento

En este apartado se procura presentar una panorámica acerca de lo señalado al momento por producciones afines a la temática de interés en la problemática (1.1). Se incluyen, primeramente, estudios relativos al accionar del docente al enseñar matemática mediante RP. Seguidamente se focaliza en la descripción de heurísticas y, posteriormente, en experiencias de enseñanza de SEL en Profesorados en Matemática.

### 1.4.1. El accionar del docente al enseñar Matemática mediante RP

Con el correr de los años diversos autores han estudiado y trabajado en la línea de la Didáctica de la Matemática que suele denominarse RP. En aquellos trabajos que involucran directamente a la enseñanza de la Matemática mediante RP, en particular los que tratan sobre la selección de problemas para favorecer un abordaje RP, se enfatiza en que esta tarea requiere, por parte del docente, de un buen conocimiento de sus estudiantes en términos de lo que ellos pueden/saben hacer.

En relación con esta idea, Rodríguez (2012) remarca que el primer paso es describir qué procedimientos pueden aplicar sus estudiantes y qué conocimientos disponen. A continuación, propone redactar la consigna de un modo familiar, con la intención de que el

estudiante imagine inmediatamente el camino de solución y, previamente a la presentación de la actividad al grupo-clase, sugiere corroborar que la resolución de la actividad admita variedad de heurísticas.

En esta misma dirección de escribir el enunciado del problema con un vocabulario conocido para los estudiantes, pero focalizándose en ofrecer una posible forma de abordar la enseñanza del tema “razones trigonométricas” para el Nivel Secundario, Petrone et al (2010) señalan que conviene que cada problema que se proponga sea viable para los estudiantes, en el sentido de que puedan, casi autónomamente, imaginar la situación planteada, trabajarla a partir de conocimientos previos o desde la intuición, para elaborar una estrategia de resolución y tratar de comunicarla.

Dentro de esta misma línea de estudio, Barreiro et al (2019) en su interés por mejorar la inserción de los estudiantes en el Nivel Superior, realizan un estudio en el que se propusieron diseñar, fundamentar y aplicar un dispositivo didáctico para la enseñanza de alguna de las heurísticas menos presentes en las resoluciones de los estudiantes de la Universidad Nacional General Sarmiento (Argentina) y de la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional (Argentina), y que son las más valoradas por los matemáticos. En la tarea de conformar un “banco” de problemas para proponer a los estudiantes, en una primera instancia seleccionaron consignas de actividades disponibles en la web y/o en el material de trabajo del ingreso. Los investigadores comentan que muy pocas consignas catalogadas como problemas se ajustaban como tales para su trabajo, por lo que tomaron la decisión de diseñar problemas, dado que buscar consignas y adaptarlas no era suficiente. Para garantizar que las consignas constituyan potenciales problemas, ofrecen algunos criterios a tener en cuenta: que planteen un objetivo claramente definido; que, potencialmente, ofrezcan un bloqueo inicial; que tengan una redacción diferente al estilo de lo que habitualmente se trabajaba en el curso; y que el potencial problema admita el uso de variedad de heurísticas para abordar su resolución.

Petrone et al (2014) también realizan un aporte referido a la selección de problemas para propiciar un enfoque de RP. En el marco de un Curso de Posgrado y Capacitación Docente denominado “Enseñar Matemática mediante Problemas en la Escuela Secundaria”, analizaron 45 enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria que fueron propuestos por los 38 asistentes del curso. Dentro de sus resultados, y particularmente en cuanto a la vinculación con la realidad, reconocen que la quinta parte de los problemas propuestos pertenece al ámbito intra-matemático. El resto (la gran mayoría) involucra personas y objetos

concretos en alguna situación relativamente cotidiana. En cuanto al registro de representación predominante, fue el coloquial. La quinta parte incluye, además, al registro gráfico, en el que se realizan bocetos de dibujos matemáticos que portan información. Aclaran que solo dos casos incluyen al registro tabular entre sus datos y el simbólico algebraico está ausente. Cabe destacar que, de los 45 problemas recolectados, solo cuatro aluden al contenido ecuaciones. Resultan de interés para este estudio las reflexiones de las autoras a partir del trabajo realizado. Señalan que es deseable que los docentes seleccionen situaciones problemáticas que constituyan un desafío para los estudiantes con un carácter motivador y que, a su vez, puedan ser abordadas a partir de sus conocimientos previos para que no se constituyan en promotoras del desánimo. Sugieren, además, anticipar posibles dificultades y preguntas que surjan durante la resolución y organizar sugerencias para orientar a los estudiantes y proponer problemas de complejidad gradualmente creciente, con atención al momento del proceso para el que son más adecuados.

En aquellas investigaciones que abordan la gestión de la clase mediante RP, lo que se destaca es que esta forma de trabajo en el aula demanda una fuerte intervención docente que estimule la curiosidad y participación de los estudiantes, y que contemple la incorporación de aciertos y errores como vía para adquirir procesos válidos y heurísticas propias, en conjunción con la intuición y reflexión del grupo-clase.

Barreiro et al (2019) señalan que la clave en esta línea es tener presente que las intervenciones docentes procuren no destrabar el bloqueo del estudiante porque, de hacerlo, el problema se habrá transformado en ejercicio. Con esta idea, presentan un par de lineamientos generales sobre intervenciones docentes mediante la perspectiva de la RP: A) Atención a dudas, preguntas, imposibilidad de avanzar, necesidad de confirmar que la respuesta es correcta durante la resolución de problemas; B) Generación de momentos de reflexión metacognitiva. Respecto del primer tipo de intervenciones, de interés para el presente trabajo, señalan que las preguntas que Poyla (1989) asoció a cada una de las etapas de la resolución de problemas, son pertinentes para que el docente intervenga adecuadamente a través de alguna/s de ellas. Petrone et al (2014) afianzan la conclusión sobre el carácter estratégico de la actuación docente mediante este enfoque. En su interés por estudiar sobre la RP en la formación de profesores en Matemática, realizan una investigación en la que recogen datos relativos a las concepciones de profesores en Matemática y estudiantes de Profesorado, de diferentes institutos formadores, sobre acciones docentes que consideraron tanto adecuadas como inapropiadas para la planificación e implementación de actividades de enseñanza basadas en

la metodología a través de la RP. En dicho trabajo, las autoras sugieren procurar que los estudiantes se interesen en la RP planteados, que se sientan capaces de abordarlos, de preguntar sus dudas y de reorientar sus estrategias en función de dosificadas intervenciones docentes, para ir descubriendo estructuras o regularidades que avanzarán, con la guía adecuada, hacia las formalizaciones que constituyen nuevos conceptos y teorías. En este sentido, advierten que es fundamental cuidar el trato dispensado a cada intervención estudiantil, donde el error se percibe como vía para comprender mejor, se valoran explícitamente sus aciertos espontáneos, se motiva la participación y se orienta ante las dudas.

#### **1.4.2. Descripción de heurísticas**

Dentro de esta misma línea de trabajo, con la mirada puesta en los alcances, posibilidades y limitaciones de una formación mediante el enfoque de RP, Solarte y Palacios (2013) se detienen en las estrategias heurísticas que emergen cuando estudiantes del Profesorado en Matemática de la Universidad del Valle se involucran en la RP matemáticos no rutinarios, uno de ellos referido al contenido sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Dentro de los hallazgos, señalan que los estudiantes al no poder asociar el problema a un contenido matemático específico, utilizaron principalmente operaciones aritméticas para abordarlo. Adicionalmente observaron que no elaboraron un plan para resolver el problema; inmediatamente iniciaron un conjunto de operaciones con los datos que se les provee. Asimismo, expresan que emplearon más tiempo de lo esperado y además como estrategia potente en el proceso de resolución del problema utilizaron la estrategia heurística “realizar un gráfico”, la cual es relativamente efectiva; aunque advierten que no es suficiente, dado que garantiza la comprensión, pero para dar solución al problema se hace necesario conectar los datos con un sistema de ecuaciones. Además, aluden a la poca flexibilidad para cambiar de estrategia una vez comenzada la RP. En efecto destacan que, aunque los estudiantes observaron que no les produjo ningún resultado, continuaron con la misma estrategia, lo que lleva a las autoras a advertir sobre la poca destreza en el manejo de heurísticas en profesores en formación.

#### **1.4.3. Experiencias de enseñanza de SEL en Profesorados en Matemática**

Del Valle et al (2019), en su interés por determinar el grado de coherencia de las construcciones y mecanismos mentales para hallar el conjunto solución de un SEL  $2 \times 2$  mediante el tránsito de sistemas lineales homogéneos a no homogéneos, diseñaron un cuestionario que les permitió indagar en las concepciones de estudiantes de formación inicial del Profesorado en Matemática para Educación Secundaria de una universidad chilena

respecto de los conceptos solución y conjunto solución de un SEL. Los resultados evidencian cierta incompreensión de lo que es una solución para un sistema, dificultades para articular los aspectos geométricos con los algebraicos y la conveniencia de utilizar una estrategia alternativa para el caso de un sistema de tres o más ecuaciones lineales. Señalan que la desencapsulación del objeto plano cartesiano y objeto recta vectorial son claves para que un estudiante acceda a los procesos que articulan la matemática escolar y los aspectos geométricos que sugieren las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas. Además, indican que la manipulación de SEL homogéneos evoca en los estudiantes relaciones entre los coeficientes de sus ecuaciones y propicia la construcción del proceso de coeficientes proporcionales que podría ayudar a la construcción del concepto de rango, cuando se piensa en el método de eliminación gaussiana.

En esta misma línea de la enseñanza del contenido SEL, Gracia (2010) diseñó y aplicó una propuesta en el curso de Introducción al Álgebra Lineal para la enseñanza de matrices y SEL, con base en la RP reales para estudiantes de Profesorado en Matemática del Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez. El trabajo constó de dos etapas. En la primera se implementaron cuatro problemas con el objetivo de que los estudiantes reconozcan el uso de matrices, operaciones elementales por filas, método de reducción por filas de Gauss-Jordán y resolución de SEL, además de que identifiquen conexiones entre la geometría, el cálculo y el álgebra. En una segunda etapa se propuso a los estudiantes la formulación de un problema de programación lineal a partir de un contexto real. Entre las conclusiones del estudio se destaca que los estudiantes antes de la implementación de la propuesta veían al álgebra como la rama de la matemática que permite demostrar teoremas o propiedades; al respecto, la autora invita a ampliar la mirada de esta rama de la matemática en futuros profesores a partir del trabajo con contextos reales.

#### **1.4.4. Síntesis del estado de conocimiento**

Las distintas investigaciones consultadas en 1.4.1 rescatan ejes fundamentales relativos a la selección y diseño de problemas para favorecer un abordaje RP y a las intervenciones docentes mediante este enfoque a la hora de atender dudas de los estudiantes. Entre ellos se destacan, por un lado, el problema como fuente para adquirir variedad de estrategias heurísticas de resolución y pensamiento matemático, a partir de intentar superar un bloqueo inicial, con un objetivo claramente definido y una presentación “no familiar”. Por el otro, el accionar del docente como guía en la validación o refutación de las resoluciones de los

estudiantes, con un equilibrio entre no vislumbrar la herramienta matemática que permita resolverlos y la inmediatez en hallar la respuesta al problema propuesto.

Sin embargo, estas cuestiones no son abordadas en profundidad desde el contenido SEL, particularmente en el contexto del PM de la UNR. En este sentido, un espacio propicio de indagación lo constituye la identificación y posterior (re) diseño de problemas que favorezcan un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR. Se habla de (re) diseño a partir de los resultados de investigaciones desarrollados en 1.4.1 sobre la escasa cantidad de problemas sobre ecuaciones y las dificultades atravesadas al crear un “banco” de potenciales problemas. En 1.4.3 se resalta el trabajo con contextos reales en la formación de futuros profesores en Matemática. Mediante esta línea de pensamiento, pero con nuevos horizontes, resulta de interés proponer problemas vinculados a algunas de Orientaciones Curriculares del Nivel Secundario (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) con el ánimo de ampliar las concepciones del docente en formación acerca de la relación entre la Matemática y otras áreas del conocimiento.

Otro aspecto logrado que amerita ser destacado dentro de este apartado es el tratamiento del conjunto solución de un SEL a partir de la desencapsulación del objeto plano cartesiano y objeto recta vectorial como medio para articular la matemática escolar y los aspectos geométricos de las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas.

En esta misma sección se habla de la dificultad para comprender el concepto de solución para un SEL y para articular los métodos de resolución de un sistema. Al respecto, amerita realizar una propuesta innovadora que procure, a partir de intervenciones docentes pertinentes, guiar a los estudiantes a superar estas posibles dificultades y que, además, integre diferentes registros de representación como el coloquial, gráfico y simbólico; esto último en consideración de los resultados de una de las investigaciones recuperadas en 1.4.1.

Si bien a partir del estudio reportado en 1.4.2 se ha indagado en torno a la descripción de heurísticas a partir de la resolución de un problema vinculado a SEL  $2 \times 2$  por estudiantes del Profesorado de Matemática, el desafío persiste en cuanto a que no se cuenta con la descripción anticipada de posibles heurísticas puestas en juego durante las distintas etapas de resolución. Es por ello que, en este estudio, se intenta realizar un aporte que atienda a este aspecto.

## 2. Marco teórico-referencial

En esta sección se presentan los conceptos teóricos que orientan el abordaje del problema de investigación y que permiten delimitar las categorías de análisis. En efecto, se desmenuzan las nociones de *problema* y de *gama de problemas*. A continuación, se proporciona el concepto de *heurística* junto a una organización de acuerdo con descriptores generales. Además, se focaliza en el proceso de resolver un problema y en la RP como metodología de enseñanza. Finalmente, se comparten las delimitaciones conceptuales de algunos términos de interés para esta investigación relativos a los sistemas de ecuaciones lineales y su enseñanza.

### 2.1. Sobre la noción de problema

Podría decirse que la línea de la Didáctica de la Matemática denominada RP tiene su origen con los desarrollos de Polya (1954, 1965, 1981). No obstante, diversos autores propusieron sus propias definiciones del concepto de *problema*, en sintonía con la investigación que deseaban encarar, a través de características que consideraban relevante resaltar. Es así que Polya (1981) definió la noción de problema de la siguiente manera: “tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata” (p.117).

Según Krulik y Rudnik (1987; citado en Rodríguez, 2012) un problema “es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”.

Labarrere (1996; citado en Rodríguez, 2012) enunció: “un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (...) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar”.

Resulta interesante recuperar el aporte de Rodríguez (2012), quien mencionó características comunes a las diferentes conceptualizaciones o reformulaciones de problema: “existe una persona que ha de resolver la actividad (un resolutor), existe un punto de partida y una meta a alcanzar, y existe un cierto bloqueo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente” (p.155).

En el marco de este trabajo, se adopta la noción de *problema para un sujeto* propuesta por Colombano et al (2009; citado en Barreiro et al, 2019): “es una situación que requiere

solución y, este, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato”.

Al presentar una consigna que ya se considera que podría resultar rebuscada o alejada para el grupo-clase, puede suceder que genere un bloqueo total a los estudiantes, lo que impide que pongan en juego estrategias de resolución o que adviertan que hay algo por resolver. También puede ocurrir que la situación se transforme en un ejercicio para ellos debido a que les resulte accesible su resolución. Frente a estas posibilidades, Barreiro et al (2019) hablan de una *gama de problemas*, que alude a una familia de, al menos, tres problemas: un *problema base* (PB), aquel por el cual el docente tiene altas expectativas de que resulta un problema para la mayoría de los estudiantes; un *problema de complejidad menor*, se trata de un nuevo problema que versa sobre la misma temática que el PB y admite el uso de las mismas heurísticas (o de un grupo importante de ellas) con alguna simplificación; un *problema de complejidad mayor*, otro nuevo problema con la misma temática, que también es cercano al PB, habilita el uso de las mismas heurísticas -o de la mayoría- que el PB, pero de un nivel superior de dificultad. Una forma de pensar en la gama es concebir el PB y que los otros dos resulten de la manipulación de variables didácticas (Brousseau, 1994; citado en Barreiro et al, 2019) que habilitan o inhabilitan modos de resolución.

## **2.2. Sobre la noción de heurísticas**

Los términos *heurísticas* o *estrategias heurísticas* hacen referencia a lo que Polya (1981) definió como “el estudio de medios y métodos de la resolución de problemas” (p.10). Se toman en consideración, además, los aportes de Verschaffel (1999; citado en Barreiro et al, 2019), quien asumió a las heurísticas como estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y la transformación de un problema que le ayudan significativamente al resolutor -aunque no se lo garanticen- a aproximarse a hallar una solución apropiada.

Por otra parte, Marino y Rodríguez (2009), con el objetivo de caracterizar las heurísticas puestas en juego espontáneamente al resolver problemas matemáticos sobre funciones exponenciales, logarítmicas, polinómicas e inecuaciones exponenciales por estudiantes de un curso de nivel pre-universitario, realizaron una adaptación de la organización de heurísticas propuesta por Koichu et al (2003). En la primera columna de la Tabla 1 se indican los descriptores generales bajo los cuales se agrupan las heurísticas por características comunes.

En la segunda columna se disponen algunas estrategias que se encuentran usualmente en la bibliografía y en la última se ofrece una breve descripción de cada una de ellas.

Tabla 1. Organización de heurísticas (Marino y Rodríguez, 2009)

Descriptor	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia delante	Abordar el problema a partir de las condiciones y los datos dados
	Trabajar empezando por el final	Suponer que se tiene una solución y analizar sus características
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución
	Razonar por analogía	Recordar problemas resueltos anteriormente, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Realizar una descripción gráfica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje del simbólico al coloquial o al numérico, etc.
Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos	Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido
	Reducir a un problema más sencillo	Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original
	Dividir el problema en subproblemas	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y, luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución
	Introducir un elemento auxiliar	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.)
Examinar casos particulares	Analizar sistemáticamente casos (inducción)	Asignar valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución
	Analizar casos límites o especiales	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades
	Analizar ejemplos	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema
Examinar la solución obtenida	Verificar mediante distintos registros de representación	Comprobar la respuesta a través de un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta
	Verificar con casos particulares	Constatar la respuesta en casos puntuales

### 2.3. El proceso de resolver un problema

Polya (1973) modelizó el proceso de resolución de problemas a través de cuatro etapas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar la solución obtenida. Su planteo está acompañado por una serie de preguntas que permiten entender a qué se refiere con cada etapa. La Tabla 2 muestra esta relación entre las etapas y las preguntas.

Tabla 2. Etapas del proceso de resolución de problemas de Poyla (1973) (Rodríguez, 2012)

Etapas	Preguntas
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante / contradictoria para determinar la incógnita?
Concebir un plan	¿Es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar?, ¿podría imaginarse un problema análogo más simple / general / particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, etc.
Ejecutar el plan	¿Puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede usted demostrarlo?
Examinar la solución obtenida	¿Puede usted demostrarlo?, ¿puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verlo de golpe?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Por otro lado, Schoenfeld (1985; citado en García Cruz, 1999) planteó la existencia de cuatro aspectos que intervienen en este proceso. En su obra habla de los *recursos cognitivos*, en alusión a un conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, y de las *heurísticas*, que comprenden reglas para progresar en situaciones difíciles. Introdujo, además, las nociones de *control* durante la RP, es decir, aquello que permite un uso adecuado de los recursos disponibles, y de *sistema de creencias*, entendiéndolo como la perspectiva de un sujeto con respecto a la naturaleza de la Matemática y cómo trabajar en ella.

Más adelante, Schoenfeld (1992) incorporó un aspecto que considera central y propio de esta tarea: el *aspecto metacognitivo*. Según él, el pensamiento metacognitivo puede monitorear, controlar y dirigir el propio proceso cognitivo. Se debe analizar qué camino se ha elegido y cuál no, qué y por qué se ha hecho (Schoenfeld, 1992; citado en Rodríguez, 2012).

De Guzmán (2007) se basó en las ideas de Polya, Mason et al (Cruz, 1999) y en los trabajos de Schoenfeld, y expuso una forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la RP: Propuesta de la situación problema de la que surge el tema → Manipulación autónoma por los estudiantes → Familiarización con la situación y sus dificultades → Elaboración de estrategias posibles → Ensayos diversos por los estudiantes → Herramientas elaboradas a lo largo de la historia → Elección de estrategias → Abordaje y resolución de los problemas → Recorrido crítico → Afianzamiento formalizado (si conviene) → Generalización → Nuevos problemas → Posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas.

De Guzmán (2007) señala que en todo el proceso el eje principal es la propia actividad desarrollada con tino por el profesor, quien coloca al estudiante en situación de participar y fomenta el gusto de descubrir por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con

tanto esfuerzo. En este sentido, para De Guzmán (2007) se trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran, la componente heurística, es decir la atención a los procesos de pensamiento, y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

#### **2.4. La RP como metodología de enseñanza de la Matemática**

Según De Guzmán (2007), la enseñanza de la Matemática mediante RP pone énfasis en los procesos de pensamiento y de aprendizaje. Se procura que el estudiante manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, adquiera confianza en sí mismo y se prepare para otros problemas de la ciencia. De Guzmán (2007) señaló razones de la importancia de la utilización de la RP en la enseñanza de la Matemática, entre las que cabe destacar: los jóvenes desarrollan autonomía para resolver sus propios problemas; el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo; muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de la Matemática; aplicable a todas las edades.

Polya y Szegő (1976; citado en Petrone et al, 2014) expresaron que, cuando se implementa esta metodología de trabajo, trasciende el plano intelectual, al vincularse con aspectos emocionales de los estudiantes, que también conciernen a lo educativo, ya que los problemas pueden estimular la curiosidad y motivación, mediante procesos sostenidos con esfuerzo. En sintonía con esta misma idea, Aebli (2002; citado en Petrone et al, 2014) reflexionó que el profesor, al facilitar que el estudiante tome conciencia de que sus aportaciones tienen valor, demuestra que aprecia no solo lo que aporta, sino toda su persona, lo ayuda a desarrollar la confianza en sí mismo, así como la seguridad necesaria para avanzar en nuevos campos del saber y del conocimiento.

Gaulin (2001) también entiende que la RP cobró importancia dentro de la Educación Matemática. No obstante, advirtió que no se implementa frecuentemente en las clases de Matemática. Entre las causas de este fenómeno se destacan la escasa formación de los profesores en la enseñanza de la Matemática mediante problemas, así como la inseguridad en sus capacidades desarrolladas para implementarla, una falta de visión sistémica sobre la RP y una tendencia a tratar este enfoque como un contenido a enseñar. Sostiene que habría que trabajar la RP según distintas perspectivas:

- *A TRAVÉS de la RP*: los problemas se utilizan como herramienta para introducir un nuevo concepto matemático.
- *PARA la RP*: los problemas se presentan como espacios de aplicación de conceptos matemáticos ya aprendidos.
- *SOBRE la RP*: se enseñan estrategias de resolución.

Cabe resaltar que estas ideas se condicen con los lineamientos curriculares vigentes en nuestro país que conceden una gran importancia a los procesos mentales y a las actitudes implicadas en la RP. En el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) se plantea que la clase de Matemática en el Nivel Secundario, ámbito laboral del graduado del PM de la UNR, es un espacio propicio para asumir los desafíos de la sociedad actual, que exigen sujetos involucrados en la RP, que buscan alternativas y desarrollan estrategias flexibles y adaptables a contextos diversos. Ante este lineamiento metodológico, resulta convocante que los futuros profesores en Matemática vivencien desde su formación inicial experiencias de aula basadas en la RP. Es por ello que se procura proponer y diseñar problemas en vinculación con las Orientaciones Curriculares del Nivel Secundario (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013): Ciencias Naturales y Economía y Administración - Turismo.

## 2.5. SEL: encuadre matemático y enseñanza

Un *sistema lineal de m ecuaciones y n variables* (o incógnitas)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es un conjunto de  $m$  ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Los números reales  $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$  son los *coeficientes* del sistema y  $b_1, \dots, b_m$  son los *términos constantes* del sistema. Una *solución* del sistema lineal (1) es una  $n$ -upla  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  tal que cuando se reemplazan los valores de  $x_i$  por  $\bar{x}_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  en (1), todas las ecuaciones se satisfacen. El conjunto de todas las soluciones posibles se llama *conjunto solución*.

Dentro del plan de estudios del PM, el contenido SEL es parte del Campo de Formación Disciplinar Específica, cuyo objetivo es brindar una sólida formación científica y técnica en el campo de la Matemática, así como en las áreas estrechamente relacionadas con el mismo

(Consejo Superior de la UNR, 2018). Particularmente, se aborda en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II, cuyos bloques temáticos son: análisis combinatorio, matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales  $\mathfrak{R}^n$  y  $\mathfrak{C}^n$ , geometría analítica del plano y del espacio. Debido a que se procura que los potenciales problemas integren diferentes registros de representación de un SEL, se consideran propicios para implementarlos durante las últimas dos unidades mencionadas, ya que los estudiantes contarán con nociones de recta en el plano y en el espacio, y de plano en el espacio.

La Geometría Analítica constituye una potente vía de RP geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales. Podría considerarse, entonces, que se trata de una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría, que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas, y vincula las relaciones y operaciones entre los elementos del Álgebra y la Geometría (González Urbaneja, 2007).

Ciccioli y Sgreccia (2017) señalan que, al consultar estudios referidos a la didáctica de la Geometría Analítica, prevalecen aquellos que tratan acerca de dificultades cognitivas al aprender esta rama de la Matemática, sobre aquellos que se enfocan en su enseñanza en la formación de profesores. Así, por ejemplo, se encuentra el trabajo de Arellano y Oktaç (2009; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) quienes aluden a una falta de relación entre los registros gráfico y algebraico, al realizar conversiones entre ellos, en el tratamiento de SEL por parte de alumnos que están finalizando la escuela secundaria. Al respecto, Ciccioli y Sgreccia (2017) remarcan que realizar representaciones gráficas en abundancia, apoyadas en varias ocasiones con explicaciones en lenguaje coloquial o simbólico, se constituye en un elemento clave en una formación de profesores en Matemática, que intenta superar lo que Arellano y Oktaç (2009; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) señalan en cuanto a una falta de comunicación entre los distintos registros semióticos en la enseñanza.

Por otro lado, entre los problemas de la enseñanza de la Geometría Analítica, Alves et al (2010; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) expresan que en el nivel secundario no se explica la transición del marco geométrico al algebraico y que en el nivel superior se avanza rápidamente hacia el estudio de espacios más abstractos, donde se pierde el eslabón esencial para la comprensión de la Geometría Analítica. Acerca de los libros de texto utilizados en carreras de Ciencias Exactas, Karrer y Navas (2013; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) consideran que están fuertemente orientados al uso de registros monofuncionales discursivos

(como el algebraico). Las autoras avanzan hacia una propuesta de enseñanza y concluyen que un estudiante que desarrolla la habilidad de visualización, trasciende las fases sintético-geométrica y analítico-aritmética, y logra posicionarse en un modo de pensamiento más analítico-estructural; resultado que coincide con lo expuesto por Bonilla y Parraguez (2013; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017). Por ello, estas últimas insisten en propuestas de enseñanza en las que se promueva dicho modo de pensamiento. En efecto, se pondera una constante vinculación geometría-álgebra (con articulación de los registros gráfico, simbólico y coloquial) por medio de la cual se le otorga sentido geométrico a las ecuaciones que se obtienen sin priorizar las técnicas analíticas.

### **3. Encuadre metodológico**

En esta parte se muestra el abordaje metodológico adoptado en el proyecto innovador. Primeramente, se precisan los sujetos de la investigación. En un segundo apartado se presenta el enfoque, alcance y tipo de investigación. A continuación, en un tercer apartado, se explicitan las categorías de análisis definidas en función del marco teórico adoptado. Y, por último, se detallan las técnicas de recolección y procesamiento de la información.

#### **3.1. Sujetos**

Para proponer y diseñar problemas que respondan a la metodología RP y cuya resolución involucre SEL, se ha focalizado la mirada en dos libros digitalizados sobre Álgebra y Geometría Analítica: Grossman (2008) y Lay (2007).

El interés en consultar esta bibliografía radica en que el libro de texto es uno de los recursos más utilizados en la enseñanza y tiene una gran influencia al momento de decidir qué y cómo enseñar, convirtiéndose así en un vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades. Puntualmente, el criterio de selección contempló dos aspectos: que formen parte de la bibliografía básica de la asignatura de interés para este proyecto y/o se encuentren digitalizados y en acceso abierto.

#### **3.2. Enfoque, alcance y tipo de investigación**

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo y alcance descriptivo-interpretativo. Se procura proponer y diseñar problemas sobre SEL que respondan a la metodología RP en el contexto del PM de la UNR.

Develar problemas que puedan introducirse para favorecer un abordaje RP de los SEL, es la intencionalidad central que se buscará atender mediante el proyecto innovador. Es por ello que se adopta un enfoque cualitativo, sin ánimos de generalización (Hernández Sampieri et al, 2014). En acuerdo con lo que plantean Bravin y Pievi (2008), este tipo de enfoque resulta adecuado para investigaciones como esta porque se propone estudiar aspectos vinculados a los procesos de producción y apropiación del conocimiento.

El alcance de la investigación es principalmente descriptivo, ya que busca especificar las heurísticas puestas en juego en problemas que pueden introducirse para favorecer un abordaje mediante la RP de los SEL, así como inquietudes estudiantiles que puedan surgir en su resolución y aportar intervenciones docentes frente a estas. Además, se producen algunas posibles interpretaciones con el ánimo de reflexionar sobre el proceso de enseñanza de los SEL.

Los estudios descriptivos suelen ser muy recurridos en el campo de la Educación, ya que producen un tipo de información de relevancia respecto de cuáles aspectos del problema son significativos y qué dimensiones del mismo tienen relación entre sí (Bravin y Pievi, 2008). La investigación adquiere rasgos de tipo cuasiexperimental dado que, a partir de la identificación de potenciales problemas, se habla de su re-diseño de manera intencional para un grupo de estudiantes.

### **3.3. Categorías de análisis**

En función de las consideraciones teóricas que se presentaron en la parte 2 del trabajo, la investigación se organizó sobre la base de tres categorías de análisis:

- Heurísticas (*He*)
- Anticipación de interrogantes estudiantiles (*A/E*)
- Intervenciones docentes (*ID*)

Para la categoría *He*, se considera de especial interés si la RP permite el uso de los distintos registros de representación escrita (gráfico, simbólico y coloquial) y sus correspondientes conversiones. Se adopta la organización de heurísticas propuesta por Marino y Rodríguez (2009), con la distinción de procesos de resolución donde amerite *Planificar*, esto es, abordar la actividad desde los datos dados o suponer que existe una solución para el SEL planteado y estudiar sus propiedades; *Activar experiencia previa*, que alude al establecimiento de conexiones con lo previo (problemas resueltos y/o teoría sobre ecuaciones lineales, recta en el plano, recta y plano en el espacio); *Seleccionar una representación adecuada para el*

*problema*, que suponen el uso de representaciones externas tales como símbolos, trazos, dibujos y construcciones con los cuales se puede dar idea del camino de resolución; *Modificar el problema*, mediante su reducción a un problema ya resuelto previamente o más sencillo o la incorporación de elementos auxiliares; *Examinar casos particulares*, es decir, analizar la situación planteada asignándole valores particulares a las incógnitas del SEL; y *Examinar la solución obtenida*, a partir de diferentes registros de representación de un SEL o de casos particulares.

En la *AIE* se incluyen interrogantes que pueden surgir en las diferentes etapas del modelo de RP de Poyla (1973). Se especifican preguntas sobre la Comprensión del problema (*CP*), que alude a la identificación de los datos del mismo y su traducción en las incógnitas del SEL que se empleará en su resolución; la Concepción de un plan de resolución (*CPR*), que refiere al reconocimiento del camino de resolución óptimo del problema (esto es, sobre el método de resolución conveniente); la Ejecución del problema (*EP*), que comprende interrogantes sobre la aplicación de métodos de resolución de SEL o sobre el pasaje de un registro de representación a otro; y la Verificación de la solución obtenida (*VS*), que trata sobre la coherencia de la solución (si es que existe) con respecto al contexto del problema o sobre la inexistencia de esta.

Con respecto a la categoría *ID*, está constituida por la guía del docente frente a las preguntas previstas en la categoría *AIE*.

### **3.4. Técnicas e instrumentos de recolección y procesamiento de la información**

La técnica de recolección de datos es el análisis documental de los libros mencionados en 3.1. Para el procesamiento de la información recopilada, se emplea la técnica de análisis del contenido (Cabrera, 2009) en dos fases:

*Fase 1.* Identificación de dos potenciales problemas (uno por cada orientación curricular) a la luz de las categorías de interés. En efecto, en consideración de los criterios brindados por Barreiro et al (2019) (1.4.1) se procura que cada problema:

- a) plantee un objetivo claramente definido;
- b) plantee un bloqueo entre los estudiantes y la situación, ni muy cercano ni muy lejano, en tanto que abordan temas cuyo contenido está entre los conocimientos previos a SEL;
- c) admita el uso de al menos dos heurísticas.

Se especifica en una matriz de Excel (Tabla 3) el objetivo del problema, la orientación curricular (*OC*) (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) y las *He* puestas en juego.

Tabla 3. Matriz de datos empleada para el procesamiento de la Fase 1

Problema	Objetivo	OC	He
----------	----------	----	----

*Fase 2.* Diseño de una gama de problemas para cada problema seleccionado en la fase 1. Al considerar la diversidad cognitiva de los estudiantes de una misma clase, es razonable esperar que una tarea propuesta resulte un problema para algunos y no para otros. En efecto, se parte de un *PB* (cada problema seleccionado en la fase 1), y se diseñan dos nuevos problemas a partir de la identificación de la/s dificultad/es del *PB*: un problema de complejidad menor (*PCm*) y un problema de complejidad mayor (*PCM*). De este modo, el *PCm* y *PCM* son problemas asociados al *PB* y, para que conformen la gama, son tales que versan sobre la misma temática del *PB* y admiten el uso de varias de las heurísticas que el *PB* posibilita. De esta manera, se dispone de consignas que procuran atender a la diversidad cognitiva en el aula. Se especifica en una matriz de Excel (Tabla 4) el objetivo de la gama de problemas, las *He* empleadas en la gama de problemas, la *AIE* por etapa y las *ID*.

Tabla 4. Matriz de datos empleada para el procesamiento de la Fase 2

Problema	Objetivo	He	AIE				ID
			CP	CPR	EP	VS	

## 4. Resultados

En esta parte se detallan los resultados de la investigación los cuales son estructurados en dos apartados que se corresponden respectivamente con cada uno de los objetivos específicos presentados en 1.3 y que se denominan, en alusión al núcleo conceptual de los mismos, *Heurísticas en los potenciales problemas* y *Diseño de la gama de problemas: interrogantes estudiantiles e intervenciones docentes*. En estos apartados se detectan elementos propios de un enfoque de enseñanza de la Matemática mediante RP, en clave del sistema de categorías presentado oportunamente en 3.3. En el primer apartado, el análisis se centra en el reconocimiento de las heurísticas puestas en juego en los *PB*, a partir de la descripción de posibles resoluciones. En el segundo apartado, el foco de interés se ubica en el diseño de la gama de problemas para cada *PB* y el reconocimiento de interrogantes estudiantiles junto con una descripción de intervenciones docentes correspondientes.

## 4.1. Heurísticas en los potenciales problemas

En esta oportunidad se socializan las heurísticas identificadas en los problemas seleccionados para las dos Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) de interés para este trabajo, a partir de una anticipación de posibles resoluciones.

### 4.1.1. Potenciales problemas para Economía y Administración

Se seleccionaron dos potenciales problemas para la Orientación Curricular Economía y Administración (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013).

#### *Primer potencial problema para Economía y Administración*

El primer potencial problema seleccionado (*PPI*) se visualiza en la Figura 1.

**EJEMPLO 1** Suponga que una economía consiste en los sectores de carbón, electricidad y acero, y que el rendimiento de cada sector se distribuye entre los diferentes sectores como en la tabla 1, donde las entradas de una columna representan fracciones de la producción total de un sector.

La segunda columna de la tabla 1, por ejemplo, muestra que la producción total de electricidad se divide como sigue: un 40% de carbón, un 50% de acero, y el restante 10% de electricidad. (El sector eléctrico trata este 10% como un gasto en que incurre para hacer funcionar su negocio.) Ya que debe tomarse en cuenta la producción total, las fracciones decimales de cada columna deben sumar 1.

Los precios (es decir, valores en moneda) de la producción total de los sectores de carbón, electricidad y acero se denotarán como  $p_C$ ,  $p_E$  y  $p_S$ , respectivamente. Si es posible, encuentre los precios de equilibrio que permiten a los ingresos de cada sector igualar sus gastos.

**TABLA 1** Una economía sencilla

Distribución del rendimiento de:			
Carbón	Electricidad	Acero	Comprado por:
.0	.4	.6	Carbón
.6	.1	.2	Electricidad
.4	.5	.2	Acero

Figura 1. Primer potencial problema para Orientación Curricular Economía y Administración (Lay, 2007, p.58)

#### *Fundamentación*

A partir de los criterios establecidos para la Fase 1 en 3.4, se explica por qué *PPI* los atiende.

- *Planteo de un objetivo claramente definido.* Se considera que se cumple. La intención que expresa la consigna es encontrar la producción de cada industria de manera que los ingresos de cada una de ellas sean iguales a sus gastos.
- *Planteo de un bloqueo inicial.* Identificación de los coeficientes del SEL que permite hallar la producción de cada industria.
- *Heurísticas.* A continuación, se comparten posibles resoluciones del *PPI*. En primer término, se identificación los datos del problema.

De las columnas de la Tabla 1 (Figura 1), se obtiene que:

La producción total de electricidad se divide en un 40% de carbón, un 50% de acero y el 10% restante de electricidad.

La producción total de carbón se divide en un 0% de carbón, un 60% de electricidad y un 40% de acero.

La producción total de acero se divide en un 60% de carbón, un 20% de electricidad y un 20% de acero.

De las filas de la Tabla 1 (Figura 1), se obtiene que:

La primera fila indica que el sector carbón utiliza (y paga por usar) un 40% de la producción del sector eléctrico y el 60% de la producción de acero.

La segunda fila indica que el sector eléctrico utiliza (y paga por usar) un 60% de la producción del sector del carbón, un 10% del sector eléctrico y un 20% de la producción de acero.

La tercera fila indica que el sector acero utiliza (y paga por usar) un 40% de la producción del sector del carbón, un 50% de la producción de electricidad y un 20% de la producción de acero.

Se pretende que para cada sector los ingresos del servicio ofrecido (es decir, el precio del producto ofrecido por cada industria) sean iguales a los gastos de producción (es decir, los gastos de utilizar un porcentaje de los diferentes sectores). En consecuencia, las incógnitas son  $p_C$ ,  $p_E$  y  $p_S$  y son tales que:

$$\begin{cases} p_C = 0,4 p_E + 0,6 p_S & (1) \\ p_E = 0,6 p_C + 0,1 p_E + 0,2 p_S & (2) \\ p_S = 0,4 p_C + 0,5 p_E + 0,2 p_S & (3) \end{cases}$$

Se plantea, así, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. A partir de aquí se desprenden, al menos, dos caminos de resolución posibles. En el primero de ellos se resuelve el SEL mediante el método de sustitución.

*Posible resolución 1 para el SEL*

Si se sustituye la ecuación (1) en la (2) se obtiene  $p_E = \frac{24}{33} p_S$  (4). Al reemplazar la expresión obtenida en (4) y la expresión (1) en (3) se obtiene  $p_S = \frac{140}{33} p_S + 0,2 p_S$ .

Al observar esta última igualdad, se deduce que  $p_S$  es libre.

La solución de este SEL es  $p_E = \frac{24}{33} p_S$  y  $p_C = \frac{31}{33} p_S$  con  $p_S$  libre.

En la otra forma se obtienen las soluciones del SEL por medio de reducción por filas. Para ello se plantea el sistema homogéneo asociado al SEL dado por (1), (2) y (3).

*Posible resolución 2 para el SEL*

Al trasladar todas las incógnitas al lado izquierdo de las ecuaciones, queda:

$$\begin{cases} p_C - 0,4 p_E - 0,6 p_S = 0 \\ -0,6 p_C + 0,9 p_E - 0,2 p_S = 0 \\ -0,4 p_C - 0,5 p_E + 0,8 p_S = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el SEL mediante reducción por filas. Los decimales se redondean a dos posiciones.

La solución de este SEL es  $p_E = \frac{24}{33} p_S$  y  $p_C = \frac{31}{33} p_S$  con  $p_S$  libre.

Para cualquiera de los dos caminos propuestos se analiza si los precios de equilibrio hallados permiten a los ingresos de cada sector igualar sus gastos mediante casos particulares; como, por ejemplo:

Si  $p_S = 100$ , entonces  $p_E = 85$  y  $p_C = 94$ . Así,

$$\begin{cases} 94 = 0,4 \cdot 85 + 0,6 \cdot 100 \\ 85 = 0,6 \cdot 94 + 0,1 \cdot 85 + 0,2 \cdot 100 \\ 100 = 0,4 \cdot 94 + 0,5 \cdot 85 + 0,2 \cdot 100 \end{cases}$$

Se observa que con estos valores los ingresos de cada sector son iguales a sus gastos.

A continuación, se identifican las heurísticas puestas en juego. Se encuentra que las resoluciones muestran el uso de las heurísticas que se mencionan en la Tabla 5. Adicionalmente, se observa que la RP permite el uso de los registros de representación simbólica y coloquial, y sus correspondientes conversiones.

Tabla 5. Heurísticas para PPI

Descriptor	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia adelante	Al plantear las ecuaciones (1), (2) y (3) a partir de las condiciones y los datos dados
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con métodos de resolución de un SEL 3x3 (camino 1 y 2)
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Al traducir la información brindada por la tabla en las ecuaciones (1), (2) y (3)
Examinar la solución obtenida	Verificar con casos particulares	Verificar la respuesta asignándole valores a la variable libre

*Segundo potencial problema para Economía y Administración*

El segundo potencial problema seleccionado (PP2) se visualiza en la Figura 2.

**EJEMPLO 8****Un problema de administración de recursos**

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3.

Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento 1, 20 000 unidades del alimento 2 y 55 000 del 3. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Figura 2. Segundo potencial problema para Orientación Curricular Economía y Administración (Grossman, 2008, p.16)

*Fundamentación*

A partir de los criterios establecidos para la Fase 1 en 3.4, se explica por qué *PP2* los atiende.

- *Planteo de un objetivo claramente definido.* Se considera que se cumple. La intención que expresa la consigna es hallar la cantidad de peces de cada especie que pueden coexistir en el lago.
- *Planteo de un bloqueo inicial.* Traducción de la información en lenguaje coloquial al simbólico. Identificación del objeto matemático que permite su resolución.
- *Heurísticas.* A continuación, se comparten posibles resoluciones del *PP2*. Para empezar, se contempla la traducción de los datos en lenguaje coloquial al lenguaje simbólico.

Sean  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. De aquí,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3 > 0$ . Si se utiliza la información del problema, se observa que  $x_1$  peces de la especie 1 consumen  $x_1$  unidades del alimento 1,  $x_2$  peces de la especie 2 consumen  $3x_2$  unidades del alimento 1 y  $x_3$  peces de la especie 3 consumen  $2x_3$  unidades del alimento 1. Entonces,  $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25000 =$  suministro total por semana de alimento 1. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente SEL:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 20000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 55000 \end{cases}$$

Al resolver el SEL mediante reducción por filas o mediante el método de sustitución o de igualación, su solución es  $x_1 = 40000 - 5x_3$ ,  $x_2 = x_3 - 5000$  y  $x_3$  libre. Ahora bien, como  $x_1$  es mayor que 0, entonces  $x_3$  es menor que 8000. Similarmente, como  $x_2$  es mayor que 0, entonces  $x_3$  es mayor que 5000. Puede verificarse la solución como se muestra en este ejemplo de caso particular:

Si  $x_3 = 6000$  entonces  $x_1 = 10000$  y  $x_2 = 1000$ . En consecuencia:

$$\begin{cases} 10000 + 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 6000 = 25000 \\ 10000 + 4 \cdot 1000 + 6000 = 20000 \\ 2 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 5 \cdot 6000 = 55000 \end{cases}$$

Con estas cantidades de cada tipo de especie de peces no se requiere de mayor suministro de alimento, por lo que pueden coexistir en el lago.

Posteriormente se identifican las heurísticas puestas en juego. Se encuentra que las resoluciones anteriores muestran el uso de las heurísticas que se mencionan en la Tabla 6.

Adicionalmente, se observa que la RP permite el uso de los registros de representación simbólica y coloquial.

Tabla 6. Heurísticas para PP2

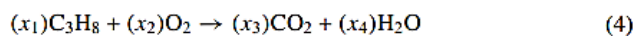
Descriptor	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia adelante	Al plantear el SEL a partir de las condiciones y los datos dados
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relativa a métodos de resolución de un SEL 3x3
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Al traducir la información brindada por el enunciado en las ecuaciones lineales
Examinar la solución obtenida	Verificar con casos particulares	Constatar la respuesta a través de la asignación de valores a la variable libre

#### 4.1.2. Potencial problema para Ciencias Naturales

El potencial problema seleccionado *PP3* se visualiza en la Figura 3.

##### Balaceo de ecuaciones químicas

Las ecuaciones químicas describen las cantidades de sustancias consumidas y producidas por las reacciones químicas. Por ejemplo, cuando se quema gas propano ( $C_3H_8$ ), éste se combina con oxígeno ( $O_2$ ) para formar dióxido de carbono ( $CO_2$ ) y agua ( $H_2O$ ), de acuerdo con una ecuación de la forma



Para “balancear” esta ecuación, un químico debe encontrar números enteros  $x_1, \dots, x_4$  tales que el número total de átomos de carbono (C), hidrógeno (H) y oxígeno (O) situados a la izquierda sea igual al número correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción).

Figura 3. Potencial problema para Orientación Curricular Ciencias Naturales (Lay, 2007, p.59)

Ya que se trata de un ejemplo, se formula la consigna correspondiente como sigue: Cuando se quema gas propano ( $C_3H_8$ ), este se combina con oxígeno ( $O_2$ ) para formar dióxido de carbono ( $CO_2$ ) y agua ( $H_2O$ ). Esta reacción química puede describirse a partir de la ecuación química  $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ . El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en  $C_3H_8$  hay tres átomos de carbono y ocho átomos de hidrógeno. Se observa que el número total de átomos de carbono situados a la izquierda (lado de los reactivos) es diferente al de la derecha (lado del producto). Lo mismo ocurre con los de hidrógeno y de oxígeno. Con el propósito de cumplir la ley de conservación de la masa de Lavoisier, los químicos “balancean” las ecuaciones químicas de manera que el número total

de átomos situados a la izquierda sea igual al número total correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción). Se solicita balancear la ecuación química descrita anteriormente.

### Fundamentación

A partir de los criterios establecidos para la Fase 1 en 3.4, se explica por qué *PP3* los atiende.

- *Planteo de un objetivo claramente definido.* Se considera que se cumple. La intención que expresa la consigna es conseguir igualar el número total de átomos de carbono/hidrógeno/oxígeno situados a la izquierda con los de la derecha.
- *Planteo de un bloqueo inicial.* Deducción del concepto “balancear una ecuación química”.
- *Heurísticas.* A continuación, se comparten posibles resoluciones del *PP3*. La ecuación dada involucra tres tipos de átomo (carbono (C), hidrógeno (H) y oxígeno (O)). Para interpretarla, se desprenden al menos dos caminos posibles. En lo que sigue se traduce en vectores la información brindada por la ecuación química.

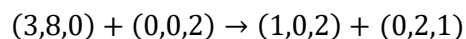
Del lado izquierdo de la ecuación se obtiene la siguiente información:

- $C_3H_8$  significa que hay tres átomos de C, ocho de H y ninguno de O: (3,8,0)
- $O_2$  significa que hay dos átomos de O y ninguno de C y de H: (0,0,2)

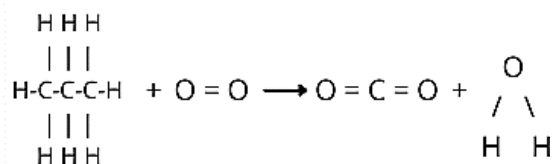
Del lado derecho de la ecuación se obtiene la siguiente información:

- $CO_2$  significa que hay un átomo de C, dos de O y ninguno de H: (1,0,2)
- $H_2O$  significa que hay dos átomos de H, uno de O y ninguno de C: (0,2,1)

En función de los vectores obtenidos, la ecuación química dada queda como:



En la resolución que sigue se opta por interpretar la ecuación química dada a partir de la representación gráfica de los elementos químicos en juego.



Como se pretende que el número total de átomos de C situados a la izquierda (3) sea igual al número total correspondiente de átomos de C ubicados a la derecha (1), se buscan números  $x_1$  y  $x_3$  tales que  $3x_1 = x_3$ . Similarmente con los restantes átomos, se buscan números  $x_2$  y  $x_4$  tales que  $8x_1 = 2x_4$ ,  $2x_2 = 2x_3 + x_4$ . De esta manera, se obtiene el siguiente SEL:

$$\begin{cases} 3x_1 = x_3 & (1) \\ 8x_1 = 2x_4 & (2) \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 & (3) \end{cases}$$

Se plantea, así, un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. A partir de aquí se desprenden, al menos, dos caminos de resolución posibles. En lo que sigue se resuelve el SEL mediante una combinación de los métodos de igualación y de sustitución.

De (1) y de (2) se obtiene  $x_1 = \frac{1}{3}x_3$  y  $x_1 = \frac{1}{4}x_4$ . Luego:  $x_3 = \frac{3}{4}x_4$  (4). Al sustituir (4) en (3) se halla  $x_2 = \frac{5}{4}x_4$ . La solución del sistema es  $x_1 = \frac{1}{4}x_4$ ,  $x_2 = \frac{5}{4}x_4$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}x_4$  y  $x_4$  libre.

Otra vía es llegar al sistema homogéneo asociado al SEL dado por (1), (2) y (3), y resolverlo mediante reducción por filas.

Al trasladar todas las incógnitas al lado izquierdo de las ecuaciones, queda:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Para cualquiera de los dos caminos propuestos se analiza si bajo las condiciones explicitadas para las incógnitas del sistema, el número total de átomos situados a la izquierda es igual al número total correspondiente de átomos ubicados a la derecha, asignándole valores a  $x_4$ . Por ejemplo, si  $x_4 = 4$  entonces  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$  y  $x_3 = 3$ . De aquí se despliegan, al menos, dos maneras para corroborar lo solicitado. En la primera se reemplazan los valores de las incógnitas en el sistema planteado y se verifica que se den las igualdades:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 = 3 \\ 8 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 + 4 \end{cases}$$

Con  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 3$  y  $x_4 = 4$  la ecuación química dada se encuentra balanceada.

La segunda opción es la que sigue, donde se interpreta la solución particular a partir de la representación gráfica de la ecuación balanceada.

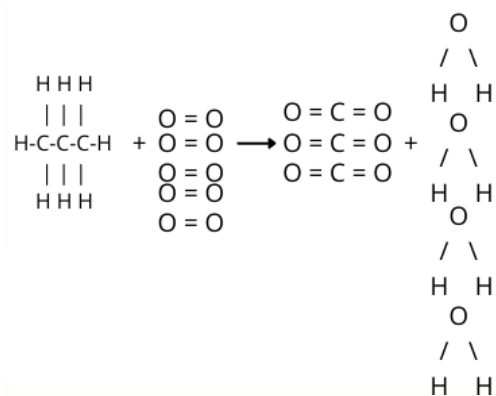


Tabla 7. Heurísticas para PP3

Descriptor	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia adelante	Al plantear las ecuaciones (1), (2) y (3) a partir de las condiciones y los datos dados
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con métodos de resolución de un SEL 3x3
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Al realizar la representación gráfica de la ecuación química
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Al traducir coloquialmente la información brindada por la ecuación química
Examinar la solución obtenida	Verificar mediante distintos registros de representación	Cuando, luego de la resolución, mediante los métodos de igualación/sustitución o reducción por filas, se verifica con la representación gráfica de la ecuación química balanceada
	Verificar con casos particulares	Constatar la respuesta asignándole valores a la variable libre

Se identifican las heurísticas puestas en juego. Se encuentra que las resoluciones anteriores muestran el uso de las heurísticas que se mencionan en la Tabla 7. Adicionalmente, se observa que la resolución del problema permite el uso de los registros de representación simbólica y coloquial, y sus correspondientes conversiones (traducción de la ecuación química en lenguaje coloquial o mediante la representación gráfica de los elementos que intervienen).

## 4.2. Diseño de la gama de problemas: interrogantes estudiantiles e intervenciones docentes

En esta instancia se socializa lo relativo a la Fase 2 descrita en 3.4. En efecto, en una serie de tres apartados se exponen el *PCm* y el *PCM* para los problemas sobre Economía y Administración - Turismo y sobre Ciencias Naturales (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) junto a lo referido a las categorías *AIE* y las respectivas *ID*.

### 4.2.1. Gama de problemas para PPI

Las principales dificultades del *PPI* son la *identificación del contenido matemático a utilizar para su resolución* y la *identificación de los coeficientes del SEL*.

#### *Problema de complejidad menor*

Se propone un *PCm* asociado al *PPI* para aquellos estudiantes en los que el bloqueo es total y no les permite avanzar. La menor complejidad de este problema radica en la traducción de los datos de la tabla a un objeto matemático que permita resolver el *PPI*. El objetivo general continúa siendo el mismo que el del *PPI* con la diferencia que se incorporan objetivos parciales: a través de cinco preguntas se guía al estudiante con la intención de que pueda

interpretar la información que se brinda en la tabla dada, para finalmente plantear el SEL. De esta manera se mantienen las heurísticas que el PB admitía.

*PCM para PPI*

Suponga que una economía consiste en los sectores carbón, electricidad y acero, y que el rendimiento (producción total) de cada sector se distribuye entre los diferentes sectores como sigue:

Distribución del rendimiento de:			
Carbón	Electricidad	Acero	Comprado por:
.0	.4	.6	Carbón
.6	.1	.2	Electricidad
.4	.5	.2	Acero

- a) ¿Qué porcentaje del total de la producción del carbón consume el sector eléctrico?
- b) En economía, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema se conoce como demanda interna. Por ejemplo, en Argentina la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero. ¿Cuántas unidades de cada sector se demanda para producir  $p_C$  unidades de carbón? ¿Cuántas unidades de cada sector se demanda para producir  $p_E$  unidades de electricidad? ¿Cuántas unidades de cada sector se demanda para producir  $p_S$  unidades de acero?
- c) Si se quiere que no haya sobreproducción, ¿cuántas unidades debe producir cada sector para satisfacer cada demanda interna?

*Problema de complejidad mayor*

Se socializa el PCM asociado a PPI para aquellos estudiantes en los que PPI resultó ser un ejercicio porque supieron rápidamente lo que tenían que plantear. Este último muestra un problema en la misma temática, pero con una variación que habilita el uso de una nueva heurística, razonar por analogía. La complejidad de la situación radica en el tipo de pregunta, que implica pensar sobre las condiciones que se necesitan agregar al SEL planteado para PPI.

*PCM para PPI*

Suponga ahora que un consumidor de los tres sectores económicos demanda 100 unidades para el sector carbón, 50 para el eléctrico y 100 para el acero. ¿Cuántas unidades de cada sector se deben producir para asegurar que la demanda del consumidor está satisfecha?

*Anticipación de interrogantes estudiantiles e Intervenciones docentes*

Esta parte se focaliza en los resultados referidos a las categorías AIE e ID para la gama de problemas para PPI. En la Tabla 8 se comparten posibles preguntas que pueden surgirles a los estudiantes junto con intervenciones docentes, en sintonía con lo expuesto en 1.4.1.

Tabla 8. AIE e ID para la gama de problemas para PP1

Etapa	Heurísticas	Descripción
CP	¿Cómo se lee la tabla?	Dar un ejemplo
	¿Cuáles son los ingresos de cada sector? ¿Cuáles son los gastos de producción de cada sector? ¿Cuál es la oferta de cada sector?	¿Qué entendés por ingreso, gasto, oferta, sobreproducción?
	¿Cuándo sé que no hay sobreproducción?	¿Qué necesita cada sector para producir su servicio?
CPI	¿Qué método de resolución conviene más?	¿Qué información obtenés con cada método de resolución?
EP	A partir de los datos y las condiciones obtuve un sistema compatible indeterminado, ¿tiene sentido?	¿Podés comprobar cada uno de los pasos al ejecutar tu plan de resolución? ¿Podés corroborar que cada paso es correcto?
VS	¿Cómo verifico que los ingresos de cada sector sean iguales a sus gastos?	¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

#### 4.2.2. Gama de problemas para PP2

La principal dificultad del *PP2* es la *identificación del contenido matemático a utilizar para su resolución*.

##### *Problema de complejidad menor*

En lo que sigue se muestra el *PCm* asociado al *PP2*. La menor complejidad de este problema radica en la traducción de los datos del enunciado a un objeto matemático que permita resolver el *PP2*. El objetivo general continúa siendo el mismo que el del *PP2*, con la diferencia que se incorporan objetivos parciales: a través de tres preguntas se guía al estudiante con la intención de que pueda interpretar la información que se brinda en el enunciado, para finalmente plantear el SEL. De esta manera se mantienen las heurísticas que el PB admitía.

##### *PCm para PP2*

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 del 3.

a) ¿Cuántas unidades del alimento 1 consumen 100 peces de la especie 1? ¿Cuántas unidades del alimento 2 consumen 200 peces de la especie 2? ¿Cuántas unidades del alimento 3 consumen  $x$  peces de la especie 3?

b) Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿qué condiciones sobre las cantidades de unidades de cada tipo de alimento se deben imponer para que las tres especies puedan coexistir en el lago?

c) En base a su respuesta en b), ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

#### *Problema de complejidad mayor*

Se comparte el *PCM* asociado al *PP2*. Se trata de una pregunta en la misma temática que el *PP2* que habilita el uso de una nueva heurística, trabajar empezando por el final. La complejidad de la misma radica en la interpretación del tipo de sistema obtenido a partir de los datos y las condiciones impuestas (compatible indeterminado, es decir, infinitas soluciones) en el contexto del problema (cantidad finita de peces).

#### *PCM para PP2*

¿Cuántas soluciones tiene el problema de administración de recursos?

#### *Anticipación de interrogantes estudiantiles e Intervenciones docentes*

Este apartado se focaliza en los resultados referidos a las categorías *AIE* e *ID* para la gama de problemas para *PP2*. En la Tabla 9 se comparten posibles preguntas que pueden surgirle a los estudiantes junto con intervenciones docentes, en sintonía con lo expuesto en 1.4.1.

Tabla 9. AIE e ID para la gama de problemas para PP2

Etapa	Heurísticas	Descripción
CP	¿Cómo traduzco los datos en expresiones matemáticas?	¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones que se imponen y sobre qué? ¿Qué se quiere averiguar?
CPI	¿Qué método de resolución conviene más?	¿Qué información obtenés con cada método de resolución?
EP	A partir de los datos y las condiciones obtuve un sistema compatible indeterminado, ¿tiene sentido? Porque me piden una cantidad exacta de peces	¿Podés comprobar cada uno de los pasos al ejecutar tu plan de resolución? ¿Podés corroborar que cada paso es correcto?
VS	A partir de los datos y las condiciones obtuve un sistema compatible indeterminado pero me piden decir una cantidad exacta de peces, ¿qué hago?	¿Qué significa que un sistema sea compatible indeterminado?
	¿Cómo verifico que con estas cantidades de peces, pueden coexistir?	¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

#### **4.2.3. Gama de problemas para PP3**

Las principales dificultades del *PP3* es la *deducción del concepto “balancear”*, la *identificación del contenido matemático a utilizar para su resolución* y la *identificación de los coeficientes del SEL*.

### *Problema de complejidad menor*

A continuación, se muestra el *PCm* asociado al *PP3* para aquellos estudiantes en los que el bloqueo es total y no les permite avanzar. La menor complejidad de este problema radica en la deducción del concepto “balancear”. El objetivo general continúa siendo el mismo que el del *PP3*, con la diferencia que se incorporan objetivos parciales: a través de cinco preguntas se guía al estudiante con la intención de que pueda interpretar la información que se brinda en la tabla dada, para finalmente plantear el SEL. De esta manera se mantienen las heurísticas que el PB admitía.

#### *PCm para PP3*

Cuando se quema gas propano ( $C_3H_8$ ), este se combina con oxígeno ( $O_2$ ) para formar dióxido de carbono ( $CO_2$ ), y agua ( $H_2O$ ). Esta reacción química puede describirse a partir de la ecuación química  $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ . El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en  $C_3H_8$  hay tres átomos de carbono y ocho átomos de hidrógeno. Se observa que el número total de átomos de carbono situados a la izquierda (lado de los reactivos) es diferente al de la derecha (lado del producto). Lo mismo ocurre con los de hidrógeno y de oxígeno. Con el propósito de cumplir la ley de conservación de la masa de Lavoisier, los químicos “balancean” las ecuaciones químicas de manera que el número total de átomos situados a la izquierda sea igual al número total correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción).

- a) Identificá la cantidad de átomos de carbono (C), oxígeno (O) e hidrógeno (H) a la izquierda y a la derecha de la ecuación dada.
- b) ¿Bajo qué condiciones el número total de átomos de C, O y de H situados a la izquierda es igual al número total de átomos de C, O y de H ubicados a la derecha, respectivamente?

### *Problema de complejidad mayor*

Se comparte el *PCM* asociado al *PP3*. Se trata de una pregunta en la misma temática que el *PP3* que habilita el uso de una nueva heurística, analizar casos límites o especiales. La complejidad de la misma radica en la optimización de las soluciones del sistema obtenido a partir de los datos y las condiciones impuestas (infinitas soluciones).

#### *PCM para PP3*

A partir de los datos y las condiciones del problema obtuviste un sistema de ecuaciones compatible indeterminado. ¿Cuál es la “mejor” solución dentro de todas las posibles? ¿Por qué?

### *Anticipación de interrogantes estudiantiles e Intervenciones docentes*

Esta parte se focaliza en los resultados referidos a las categorías *AIE* e *ID* para la gama de problemas para *PP3*. En la Tabla 10 se comparten posibles preguntas que pueden surgirle a los estudiantes junto con intervenciones docentes, en sintonía con lo expuesto en 1.4.1.

Tabla 10. AIE e ID para la gama de problemas para PP2

Etapa	Heurísticas	Descripción
CP	¿Cómo traduzco los datos en expresiones matemáticas?	¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones que se imponen y sobre qué? ¿Qué se quiere averiguar?
CPI	¿Qué método de resolución conviene más?	¿Qué información obtenes con cada método de resolución?
EP	¿Cómo puedo darme cuenta si el sistema que obtuve está bien?	¿Con qué condición se asocia cada ecuación?
VS	¿Cómo verifico que la ecuación está balanceada?	¿Qué tipo de sistema obtuviste? ¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

## 5. Conclusiones

En esta sección se presentan mediante cuatro apartados las conclusiones obtenidas a partir del estudio abordado en este proyecto innovador. En los tres primeros, se reinterpretan los resultados obtenidos de forma sintetizada y en clave con los constructos teóricos presentados oportunamente en la parte 2. Finalmente, en el cuarto y último apartado, se realiza un cierre que integra los principales hallazgos de la investigación en comunicación con los aportes de los trabajos presentados en la parte 1 y se plantean algunas posibles líneas de indagación en torno a la temática.

### 5.1. De los problemas para favorecer un abordaje RP de los SEL en el PM

Para poder indagar acerca de “¿Qué problemas pueden introducirse para favorecer un abordaje RP del contenido SEL en el PM de la UNR?” se dirigió la mirada, con especial interés, hacia dos libros digitalizados presentados en 3.1. A partir de ello, se diseñó una gama de tres problemas en la misma temática que atienden a los criterios establecidos en 3.4, uno por el cual se tienen altas expectativas de que resulte un *problema* (Colombano et al, 2009) para los estudiantes y otros dos de complejidades menor y mayor, respectivamente.

En la Figura 4 se comparte una síntesis que procura socializar posibles maneras de diseñar una gama de problemas para el contenido SEL, en sintonía con la metodología de interés para este estudio y en el contexto de un PM.

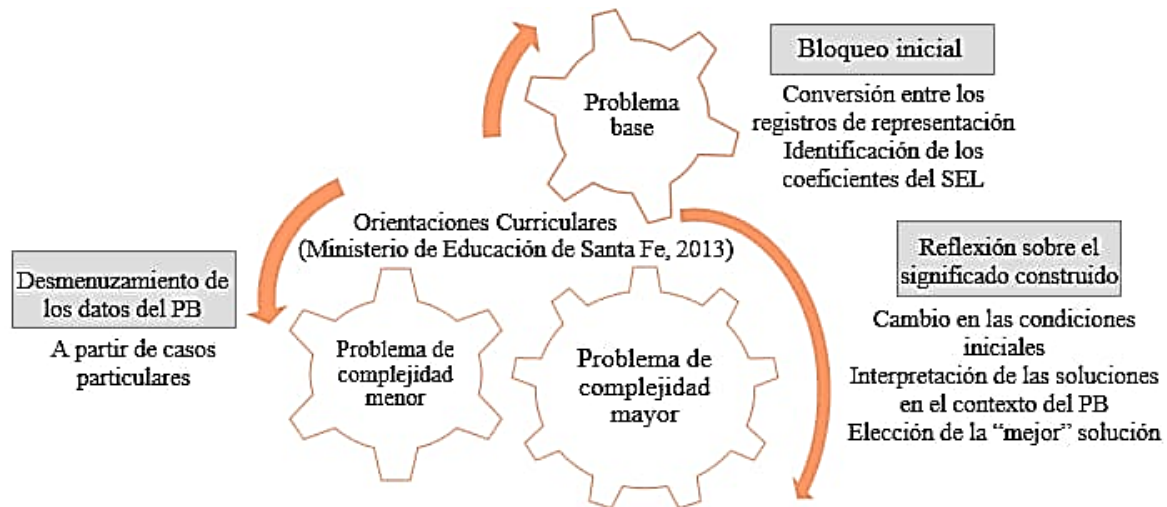


Figura 4. Esquema de síntesis de posibilidades para el diseño de la gama de problemas

Los tres problemas seleccionados en 4.1.1. y 4.1.2 responden al concepto de *problema* de Colombano et al (2009): al menos en lo inmediato, ofrecen un bloqueo que, como se vio en el análisis efectuado en 4.1, puede radicar en la traducción de los datos del problema en un lenguaje diferente al dado y/o en la identificación de los coeficientes del SEL que permite su resolución. Además, se caracterizan por tener un objetivo claramente definido y admitir variedad de heurísticas (se profundiza en 5.2).

Con el propósito de atender a las particularidades de cada estudiante, se recuperan los conceptos de *PCm* y de *PCM* de Barreiro et al (2019). Una posibilidad para el diseño del *PCm* es incorporar preguntas orientadas a desmenuzar los datos del *PB* a partir del análisis de casos particulares. En cuanto al diseño del *PCM*, se socializan tres posibilidades para este. Una posibilidad es a partir de un cambio en las condiciones iniciales impuestas sobre el SEL que permite la resolución del *PB*, ya sea sobre los coeficientes o sobre los términos constantes. Las otras siguientes consisten en la interpretación de las soluciones del SEL planteado para el *PB*, o en la optimización de las soluciones del SEL; en ambas ocasiones en el contexto de este.

De manera transversal a la gama de problemas, para propiciar un tratamiento del contenido SEL en el PM mediante la metodología de RP se propone la implementación de problemas vinculados con alguna de las Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013). Se destaca que el diseño de cada gama de problemas permite mostrar que existen otras maneras de trabajar y hacer Matemática en el aula universitaria, al incorporar desde la propia formación inicial instancias puntuales donde vivencien aquello que se sugiere desde los Documentos Ministeriales (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) que implementen en sus (futuras) aulas.

## 5.2. De las heurísticas puestas en juego

Para poder identificar “¿Qué heurísticas se ponen en juego en problemas que favorecen un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR?” (Figura 5), se comparten posibles resoluciones de los problemas seleccionados (4.1).

A partir del análisis efectuado en 4.1, se observa la presencia de heurísticas vinculadas con la planificación, puntualmente con abordar el problema desde los datos y condiciones. Se considera atinada su identificación debido a que es un tipo de razonamiento que usualmente se enseña en carreras de Ciencias Exactas y Naturales (por ejemplo, para la demostración de teoremas).

Por otra parte, resulta razonable la presencia de heurísticas vinculadas con la ejemplificación (tanto al examinar casos particulares como al examinar la solución) pues es un recurso muy comúnmente usado por los estudiantes y por los mismos docentes quienes, muchas veces, basan sus explicaciones en mostrar ejemplos y contraejemplos. Del mismo modo, se identifican las heurísticas relacionadas con activar experiencia previa y se considera razonable su presencia porque, de ser implementado el *PB*, se estima que los estudiantes ya contarían con conocimientos sobre métodos de resolución de SEL.

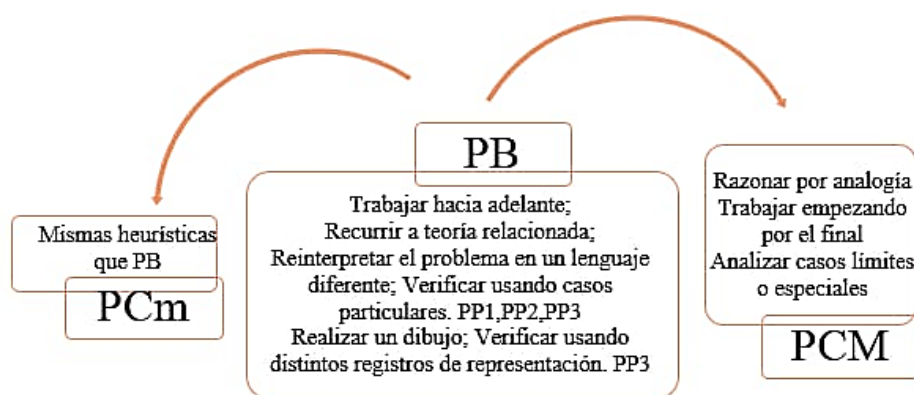


Figura 5. Esquema de síntesis de heurísticas puestas en juego

Con respecto a las heurísticas relacionadas con seleccionar una representación adecuada, de acuerdo a lo consignado en el programa de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II del PM de la UNR se pone énfasis en favorecer los cambios entre registros, con lo que resulta esperable que los estudiantes recurran a esta heurística.

## 5.3. De las intervenciones docentes

Para poder describir “¿Qué intervenciones docentes, a la hora de atender dudas o responder preguntas, pueden ser pertinentes?”, se reorienta la mirada hacia las posibles resoluciones

anticipadas en 4.1. Se identifican, así, tres grupos de posibles intervenciones ante interrogantes estudiantiles: *estimulación de la curiosidad, evocación de conocimientos previos y toma de conciencia.*

En el primer grupo se encuentran preguntas como “¿Cuáles son los datos? ¿Qué entendés por este concepto? ¿Cuáles son las condiciones que se imponen y sobre qué? ¿Qué se quiere averiguar?”. En cualquier caso, se procura intervenir con el propósito de que el estudiante reflexione mediante preguntas que no contuvieran información sobre datos y condiciones.

Con respecto al segundo grupo, se hallan preguntas para las etapas de *CP* y de *VS*, tales como “¿Qué información obtenés con cada método de resolución? ¿Qué tipo de sistema obtuviste? ¿Qué significa que un sistema sea compatible determinado/compatible indeterminado/incompatible? ¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un SEL  $3 \times 3$ ?”. Se busca que el estudiante analice los procedimientos realizados en dichas etapas. En este sentido, se intenta evitar decir directamente si la resolución es o no correcta, debido a que se estaría haciendo responsable el profesor de la resolución del problema. Por el contrario, al solicitarle recuperar conocimientos previos, se le “devuelve” la responsabilidad de resolución del problema al estudiante.

En cuanto al tercero, se refiere puntualmente a la etapa de *EP* con preguntas del estilo “¿Podés comprobar cada uno de los pasos? ¿Podés corroborar que cada paso es correcto?”. En este caso, tienen la intención de que el estudiante reconozca los procesos internos de pensamiento que él activa cuando intenta resolver el problema.

Se sugiere no dar todas las guías juntas, y por supuesto, no se espera que las interacciones se den tal cual se describen, aquí se indican posibilidades. En efecto, se pondera del análisis efectuado en la parte 4, la anticipación de caminos para procurar persuadir a los estudiantes para que reflexionen sobre sus respuestas y, consecuentemente, generen modelos matemáticos que describan más apropiadamente el problema planteado.

#### **5.4. A modo de cierre**

La información recabada a partir de este trabajo y el análisis efectuado en torno a la misma, muestra indicios de que para favorecer un abordaje RP de los SEL, conviene que cada problema que se proponga sea viable para los estudiantes, en los términos en que lo plantean Petrone et al (2010). Si bien cada problema socializado en 4.1 ofrece un bloqueo inicial, la situación puede abordarse a partir de conocimientos previos sobre ecuaciones lineales y SEL, para elaborar un plan de trabajo y tratar de comunicarlo.

En la misma dirección que los problemas implementados por Gracia (2010) para la resolución de los seleccionados en 4.1 se emplea, o bien el método de reducción por filas, o bien el método de igualación o de sustitución. No obstante, se identifica una diferencia en comparación con los propuestos por Gracia (2010): no se reconocen problemas que involucren conexiones entre la Geometría y el Álgebra, y que estén vinculados con alguna de las Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) de interés para este trabajo. Este asunto llama especialmente la atención a la autora del presente proyecto innovador, por lo que resulta convocante para próximos estudios atender a tal aspecto.

En cuanto a los registros de representación predominantes en los problemas seleccionados, fueron el coloquial y el simbólico algebraico. Puntualmente, esta última conclusión sobre el simbólico algebraico difiere de lo observado por Petrone et al (2014), quienes señalan que en los 45 enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria se encuentra ausente. El registro gráfico, en sintonía con lo observado por Petrone et al (2014), se manifiesta a partir de bocetos de dibujos matemáticos que portan información. Con respecto al registro tabular, solo un problema lo incluye entre sus datos (Figura 5.1), aspecto también que coincide con lo detectado por las autoras.

Al compartir la misma preocupación que Solarte y Palacios (2013) acerca de la poca destreza en el manejo de heurísticas en profesores en formación, se procuró que los problemas admitan al menos el uso de dos heurísticas. Adicionalmente se observa que el hecho de que un problema pueda resolverse con diferentes medios y métodos, habilita la comparación de caminos de resolución y el reconocimiento de la información que se obtiene con cada uno de ellos en una posterior instancia de socialización con el grupo-clase.

Por otro lado, se atiende a la observación de Del Valle et al (2019) sobre la incomprensión de lo que es una solución para un SEL, pero mediante un camino alternativo al tránsito de sistemas lineales homogéneos a no homogéneos: a partir del reconocimiento de las soluciones del SEL en el contexto del problema y de la “mejor” de todas.

En la obtención de resultados del estudio realizado adquieren un carácter innovador las gamas de problemas diseñadas. En efecto, se recuperan las definiciones propuestas por Barreiro et al (2019) sobre *PB*, *PCm* y *PCM*, y se los diseña de manera que su complejidad sea gradualmente creciente. Se destaca que, a partir de un problema inicial, puede diseñarse una *familia* de problemas (situaciones más generales o especiales o límites) como consecuencia de imponer restricciones o realizar adaptaciones a la pregunta base. Para cada gama de problemas pueden distinguirse distintos momentos de trabajo matemático en la clase (Petrone

et al, 2014): el de producir una respuesta (“¿Bajo qué condiciones...?”) y el de producir una explicación o justificación de esa respuesta (“¿Por qué...?”).

Finalmente, se sintetizan algunos aportes del estudio sobre problemas para favorecer un abordaje de RP de los SEL y se proponen algunas líneas de acción específicas en el contexto de la asignatura que se involucra. En este sentido, otro aporte concreto son las propuestas alternativas de intervención ante posibles consultas de los estudiantes durante la resolución de los problemas. Se focaliza la mirada en la posibilidad de abordar las dudas a través de preguntas basadas en las propuestas por Poyla (1973), con el acento en la vinculación con conocimientos previos y en la promoción de la curiosidad y toma de conciencia por parte de los estudiantes como un modo de fortalecer la autonomía en el trabajo matemático.

Como se menciona en 1.4.1 y en 2.3, uno de los pilares fundamentales de la línea RP es la reflexión metacognitiva. En la Tabla 11 se socializa una grilla que procura recuperar el trabajo realizado y que puede implementarse con cada gama de problemas.

Tabla 11. Reflexión metacognitiva

¿Qué problema se resolvió esta semana?
¿Qué contenidos matemáticos pusiste en juego en la resolución del problema? ¿Por qué recurriste a ellos?
¿Con qué dificultades te encontraste al ejecutar tu plan de resolución? ¿Cómo las superaste?
Aquí podés escribir observaciones sobre la resolución que consideres importantes

Lo concluido convoca a retomar con renovada intencionalidad las preocupaciones planteadas por Ciccio (2019) acerca de la formación inicial de profesores y el tipo de experiencias formativas por las cuales transita. Entre posibles líneas de trabajo a futuro se visionan el diseño de una gama de problemas que integre lo geométrico con lo algebraico y que esté vinculada a alguna de las Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) y la caracterización de heurísticas presentes en estudiantes del PM de Álgebra y Geometría Analítica II al resolver los problemas seleccionados con el propósito de diseñar un dispositivo didáctico para la enseñanza de heurísticas que se consideren poco desarrolladas en los futuros profesores en Matemática. Además, resulta de interés la articulación de dicha gama de problemas así como las diseñadas en este estudio con algún recurso tecnológico, al considerar que desde el Diseño Curricular (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) se sugiere incorporar las tecnologías de la información y de la comunicación en el aula de Matemática (futuro lugar de trabajo del graduado del PM) debido a que “permiten un cambio en las estrategias y el enfoque didáctico en la labor docente, enriquecen las posibilidades de enseñar

y permiten también centrarse en conceptos diferentes a los que se priorizaban en una clase de matemática tradicional” (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.50).

Como mencionan Cecchi et al (2013), la construcción de una universidad socialmente comprometida requiere de la conjunción articulada de diferentes procesos y actores. Entre ellos, se considera que se encuentra el *compromiso social docente*. Desde este proyecto innovador se contribuye con el crecimiento de una universidad atenta, comprometida y dispuesta a dar respuestas adecuadas a las cuestiones sociales emergentes. Se avanza, entonces, en “la configuración de una relación más activa de la universidad con sus contextos” (CRES, 2008; citado en Cecchi et al, 2013, p.163) y se colabora en detectar problemas para la agenda de investigación en Educación Matemática.

No tenemos oídos para escuchar aquello a lo cual no tenemos acceso desde la vivencia  
(Friedrich Nietzsche).

## Referencias bibliográficas

- Barreiro, P., Casetta, I., Chacón, M., González, V., Isla, D., Leonian, P., Marino, T. y Rodríguez, M. (2019). *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos*. UNGS. <https://repositorio.ungs.edu.ar/handle/UNGS/810>.
- Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Ministerio de Educación de Argentina. <http://www.bnm.me.gov.ar/gigal/documentos/EL002541.pdf>.
- Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. *Pedagogía Universitaria*, 14(3), 71-93.
- Cecchi, N., Pérez, D. y Sanlorenti, P. (2013). *Compromiso Social Universitario: De la Universidad posible a la Universidad necesaria*. IEC-CONADU. <http://beu.extension.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/170>.
- Ciccioli, V. (2019). *Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la geometría analítica. El caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario* [Tesis de Doctorado]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2302>.
- Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, 29(1), 141-170. <https://doi.org/10.24844/EM2901.06>.
- Cruz, J.A.G. (1999). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. *Red Telemática Educativa Europea*. <https://educrea.cl/la-didactica-de-las-matematicas-una-vision-general/>.
- Consejo Superior de la Universidad Nacional de Rosario (2018). *Plan de Estudios del Profesorado en Matemática*. [https://fceia.unr.edu.ar/images/PDF/carreras\\_de\\_grado/PM\\_plan2018/R0933-17CD\\_ANEXO-PM.pdf](https://fceia.unr.edu.ar/images/PDF/carreras_de_grado/PM_plan2018/R0933-17CD_ANEXO-PM.pdf).
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58. <https://doi.org/10.35362/rie430750>.
- Del Valle, M.E., Mena, A., Mena, J., Rodríguez, M.A. y Vásquez, P. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(1), 71-92. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194>.
- Gaulin, D. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 19, 51-63.
- González Urbaneja, P.M. (2007). Raíces históricos y trascendencia de la Geometría Analítica. *Sigma*, 30, 205-236.
- Gracia, M.G. (2010). Formando docentes de matemática para la enseñanza del álgebra lineal. *Integra Educativa*, 3(2), 235-262. <http://www.scielo.org.bo/pdf/rieiii/v3n2/a08.pdf>.
- Grossman, S. (2008). Sistemas de ecuaciones lineales y matrices. En *Álgebra lineal* (6ta. Ed.) (pp.1-164). Mc Graw Hill.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill.
- Herrera, N., Quiroga, V., Soto, S., Pochulu, M. y Puzella, A. (2016). Entre el diseño y la implementación de una actividad de geometría: el área de la pirámide recta. *Educación Matemática*, 28(1), 153-171. <https://doi.org/10.24844/EM2801.06>.
- Lay, D. (2007). Ecuaciones lineales en álgebra lineal. En *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (pp.1-102). Pearson Educación.

- Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma*, 30(2), 159-178. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/443>.
- Ministerio de Educación de Santa Fe. (2013). *Orientaciones Curriculares*. <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/191117/931874/file/C.OrientadoDic.2013.pdf>.
- Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular*. <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218362/1135160/file/Anexo/%20III/%20Resol/%202630-14.pdf>.
- Petrone, E., Cirelli, M., Contreras, N., Ferrari, N., Reynoso, E. y Sgreccia, N. (2014). El accionar del docente al enseñar matemática a través de la resolución de problemas. En D.C. Veiga (Ed.). *Actas de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp.418-427). Sociedad Argentina de Educación Matemática. <http://funes.uniandes.edu.co/18789/>.
- Petrone, E., Contreras, N., Mascó, P. y Sgreccia, N. (2010). No te quedes entre sombras: escapate por la tangente. *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp.463-474). Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Pampa.
- Petrone, E., Cirelli, M., Contreras, N., Ferrari, N. y Sgreccia, N. (2014). Análisis de enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.379-388). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <http://funes.uniandes.edu.co/5388/>.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. I). Princeton University Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. II). Princeton University Press.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. Wiley.
- Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.153-174). UNGS y EDUVIM. <https://ediciones.ungs.edu.ar/libro/educacion-matematica/>.
- Solarte, S.L. y Palacios, A.M. (2013). *Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: una aproximación a las estrategias heurísticas* [Tesina de Licenciatura]. Universidad del Valle. <http://funes.uniandes.edu.co/11266/>.