

TIRADA APARTE

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPLO LEVI

AÑO SEGUNDO - FASC. 3



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1942

EL POSTULADO DE ARQUIMEDES

DE EUCLIDES A GALILEO: CONCEPTOS MODERNOS

1. — La discusión del quinto día en el Diálogo de GALILEO « *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno alle due nuove scienze appartenenti alla meccanica e ai movimenti locali* » trata la resolución de unas dificultades que el autor finge hayan encontrado los interlocutores reflexionando sobre los razonamientos hechos en los días anteriores, aplicando la teoría euclidiana de las proporciones. Queremos nosotros también tomar la misma oportunidad para desarrollar, sobre la misma teoría, algunas reflexiones históricas y conceptuales.

Empezamos con recordar algo sobre la evolución del significado de las palabras « número » y « magnitud ». Los griegos llamaron *número* solamente al *número natural* (y aún > 1); para ellos los números servían para contar y no para medir; la medición de las magnitudes estaba sustituida por la comparación bajo el concepto de *razón* (*logos*) a la cual se asignaba, cuando la necesidad se presentaba, una representación segmentaria; esta representación se extendía también a los números cuando se los consideraba bajo el concepto de la razón. La prueba más inmediata de este orden conceptual se encuentra en la sucesión de los argumentos de los libros de los *Elementos de geometría* de EUCLIDES; el libro V trata la teoría de las proporciones entre magnitudes; el VI da las aplicaciones geométricas de esa teoría y solo con el libro VII empiezan los llamados libros aritméticos (VII, VIII, IX).

Nuestras presentes concepciones sobre los números derivan del mayor interés que, a partir de la edad media y después por el desarrollo de las ciencias físicas, tuvieron las cuestiones de medición sobre las cuestiones más abstractamente conceptuales y geo-

métricas ⁽¹⁾. El mismo desarrollo del álgebra como sistema formal de operaciones llevó en el siglo XVII a considerar los números irracionales como algo sobre los cuales era permitido razonar por analogía con lo que rigurosamente estaba demostrado para los racionales. La teoría rigurosa de los números reales es solo obra de fines del siglo XIX ⁽²⁾.

La didáctica moderna ha intentado regularizar la evolución del concepto del número con el método de las sucesivas *extensiones*: números enteros, racionales, reales...; reglamentando estas extensiones con el principio llamado de *conservación de las propiedades formales*. Considerada la cosa desde el punto de vista de la lógica pura, puede observarse que extender un concepto no tiene sentido lógico, porque ese extender significa cambiar; tampoco los números enteros siguen siendo los números enteros cuando se los piensa como números racionales, porque pierden las características que les resultaban de la limitada divisibilidad. No es pues exagerado decir que, desde el punto de vista estrictamente lógico, EUCLIDES y ARQUÍMEDES resultan en este campo mucho más rigurosos que

(1) PAUL TANNERY concluye un muy curioso estudio sobre ciertos manuscritos medievales (*Une correspondance d'écolâtre du XI siècle* - París - 1900), notando que «...en thèse générale l'avance de l'arithmétique sur la géométrie subsistara pendant le moyen-âge et même pendant la Renaissance, jusqu'au moment où les mathématiciens auront enfin le moyen d'étudier, dans des traductions intelligibles, les travaux d'Archimède et d'Apollinius. C'est en cela que le génie grec apparaît, dans l'humanité, comme une exception qui n'a point d'analogue».

Para darse una idea de esa diferente actitud puede ser útil notar que ARQUÍMEDES, ya mucho más interesado por cuestiones numéricas que EUCLIDES, nos dejó, como razón aproximada de la circunferencia al diámetro 22:7; sin cambiar esencialmente el método de cálculo, METIUS (1571-1635) calcula la misma razón en la forma 335:113, en decimales exacta hasta la sexta cifra; LUDOLF (1649-1711) calcula la misma razón con 36 cifras decimales.

(2) NEWTON expresa en su *Arithmetica universalis*: «Entendemos por número, no tanto un grupo de unidades, sino la razón abstracta de una magnitud cualquiera a otra del mismo género que consideramos como unidad»; pero, con diferencia de lo que ocurre en la teoría de las razones y de las proporciones desde EUCLIDES hasta GALILEO, para nada se preocupa de definir lo que debe entenderse por esa palabra «razón» y los razonamientos de la *Arithmetica universalis* se desarrollan solamente sobre números racionales o sobre transformaciones algebraicas formales. EULER, cerca de un siglo después, no se conduce diferentemente.

nosotros. GALILEO es posiblemente el último matemático que se esfuerza en conservar el mismo espíritu.

2. — Define EUCLIDES la proporcionalidad entre magnitudes: « Se dice que dos pares de magnitudes homogéneas tienen la misma razón cuando, comparando equimúltiplos cualesquiera de los primeros elementos de los dos pares, con equimúltiplos cualesquiera de los segundos elementos, resultan siempre los primeros equimúltiplos conjuntamente mayores o conjuntamente menores o conjuntamente iguales a los segundos. La igualdad de razones se llama proporción ⁽¹⁾. En fórmulas, la proporción ⁽²⁾

$$A \div B = C \div D$$

significa que, si m y n representan números naturales cualesquiera, según sea

$$mA > nB \quad , \quad mA = nB \quad , \quad mA < nB$$

(1) In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aequae multiplices, secundae et quartae aequae multiplices, juxta quamvis multiplicacionem, utraque utramque vel una superant, vel una aequales sunt, vel una deficiunt comparate inter se. Ipsae autem eadem rationem habentes magnitudines proportionales vocentur.

Nótese que los términos griegos aparecen más inmediatamente expresivos: *logos* — razón; *analogía* — proporción; TARTAGLIA, en su traducción italiana de EUCLIDES, se esfuerza en mantener la forma etimológica griega llamando « proporción » a la razón y « proporcionalidad » a la proporción.

(2) Para representar la razón entre dos magnitudes he elegido el signo $\div$ en vez de $:$ con el objeto de atraer la atención del lector sobre el hecho que no queremos pensar en una división, sino que hay que estar exactamente al sentido declarado en el texto. El uso de signos para representar operaciones no se encuentra en los antiguos, y particularmente para operaciones que no sean algebraicas es relativamente reciente. En tratar de operaciones sobre magnitudes se usa ordinariamente un simbolismo que se deja entender como si se obrara sobre números; el hecho no es casual porque la interpretación numérica es a menudo subrepticamente admitida cuando no es explícitamente enunciada; eso queríamos evitar. A la verdad el signo $\div$ no es mejor que $:$ a este respecto; pero tiene la ventaja de ser en el día de hoy casi completamente olvidado como signo de división.

Al contrario usamos el signo $=$ y no $::$ como ocurre muchas veces para representar la proporción, porque EUCLIDES habla efectivamente de *igualdad entre razones*.

es también, correspondientemente,

$$mC > nD \quad , \quad mC = nD \quad , \quad mC < nD \quad .$$

GALILEO define el movimiento uniforme (ecuábile): « Llamo movimiento uniforme aquel para el cual en tiempos iguales cualesquiera los segmentos recorridos por el cuerpo son iguales », y hace notar como aclaración la importancia de la cláusula « en tiempos iguales cualesquiera », muy análoga en efecto a la condición de arriba « si m y n representan números naturales cualesquiera ». De la definición de GALILEO resulta inmediatamente la proporcionalidad de los espacios a los tiempos según la definición euclidiana.

Examinando los comentarios en varias de las ediciones de los *Elementos de Euclides* por los sabios del Renacimiento resulta evidente lo difícil que resultaba eso de tener que considerar múltiplos según números cualesquiera ⁽¹⁾; y se explica este estado de ánimo en cuanto se tenga en cuenta lo arriba observado que, consciente o inconscientemente, el método euclidiano apareciera como una inútil traba mientras la medición por números parecía resolverlo todo.

Al principio del quinto día de los *Discorsi* los interlocutores se reencuentran después de varios años desde que habían oído las demostraciones geométricas de GALILEO sobre los principios de la mecánica, y durante este tiempo cada uno por su cuenta había tenido

⁽¹⁾ La publicación de ediciones de los *Elementos* de EUCLIDES empieza a fines del siglo XV con la edición latina (traducida del árabe) de CAMPANO, publicada en Venecia en 1482, y con otra traducida del griego por BARTOLOMÉ ZAMBERTI, veneciano, publicada en París en 1516. Sobre estas ediciones fué redactada la traducción italiana de NICOLÓ TARTAGLIA (*Euclide Megarense philosopho... diligentemente rassettato et alla integrità ridotto* - in Venetia 1565). (Nótese la equivocación de TARTAGLIA en cambiar EUCLIDES, matemático, con otro filósofo cerca de un siglo anterior). Para nuestras comparaciones hemos podido utilizar esta edición y la edición latina de CLAVIO, de poco posterior. (*Euclidis Elementorum libri XV etc., autore Christophoro Clavio, Bambergensi* - Romae 1575). Por respecto a la definición de « proporción » TARTAGLIA reprocha a CAMPANO de no haber entendido la definición de EUCLIDES. CLAVIO se extiende en explicaciones con muchos ejemplos numéricos, que, por lo dicho, están propiamente en contra del espíritu euclidiano. En ningún caso los AA. ponen en evidencia la importancia fundamental de la condición que deban considerarse todos los múltiplos.

oportunidad de reflexionar sobre el argumento; y precisamente plantean la cuestión:

« SAGREDO. — ... ¿Quién tendrá ingenio tan feliz como para tener la certeza de que cuando las magnitudes son proporcionales, los equimúltiplos concordarán siempre? ... Ya EUCLIDES en las definiciones anteriores había expresado que la proporción (razón) entre magnitudes era tal relación o comportamiento entre ellas por cuanto se refiere a la cantidad. Si luego el lector ya tiene concepto de qué es la proporción entre dos magnitudes, le resultará muy difícil de entender que esa relación o comportamiento que tiene la primera magnitud a la segunda sea semejante a la relación o comportamiento entre la tercera y la cuarta, cuando aquellos equimúltiplos de la primera y de la tercera se concuerdan siempre en dicha manera con los equimúltiplos de la segunda y de la cuarta en ser siempre mayores, o menores, o iguales ⁽¹⁾ ».

SALVIATI. — Como quiera que eso sea, me parece este de Euclides más bien un teorema por demostrar que una definición de anteponer. Mas, como me encontré con tantas personas de ingenio que han encallado en este lugar, me esforzaré en secundar con la definición de las proporciones (razones) el concepto general de los hombres aún no eruditos en geometría, y me explicaré como sigue: ... ».

Como se ve en estas palabras, el obstáculo estaba precisamente en poner de acuerdo la definición de EUCLIDES con lo que se creía ser un concepto universalmente adquirido; esto es, la razón entre dos magnitudes como algo identificable intuitivamente. Es, como dijimos, el concepto de número real sobre el cual han trabajado sin mayor recelo los algebristas de los siglos XVII hasta el XIX.

3. — Está aquí la superioridad del espíritu lógico griego a la cual se refiere TANNERY con las palabras citadas. Para EUCLIDES la razón (logos) entre dos magnitudes es bien una *idea primitiva* ⁽²⁾:

⁽¹⁾ Nótese esa insistencia sobre la dificultad que constituye la palabra « siempre ».

⁽²⁾ Ratio est duorum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem inter se quedam habitudo.

«La razón es una cierta manera de ser ⁽¹⁾ de dos magnitudes homogéneas la una con respecto a la otra, según la cantidad», y de esta manera de ser se tenía una representación típica en la manera de ser de dos segmentos; pero solo por un criterio bien definido puede asignarse a un determinado par de magnitudes una razón perfectamente determinada abstractamente, sin que haga falta de una regla para identificarla en dicha representación. (En nuestra actual teoría de los números reales dicha regla se encuentra en la representación aproximada por racionales; volveremos a continuación sobre esta observación).

No nos parece fácil decidir con certeza hasta qué punto GALILEO participara en la corriente ambigüedad acerca del concepto de proporcionalidad y hasta qué punto sólo concediera una seudointuición por objeto didáctico; sin embargo queremos anotar lo siguiente:

Entre las magnitudes que se presentan necesariamente a GALILEO y que están fuera del campo geométrico hay la *velocidad*; para nosotros es un número real que no puede determinarse sino por medio de una división efectuada entre números, medidas de espacio y de tiempo. Desde el principio del tercer día, GALILEO habla de la velocidad en el movimiento uniforme como de una magnitud que él representa por medio de un segmento sin una definición precisa, y no puede caber duda de que la determinación práctica de velocidades se hiciera al tiempo de GALILEO por división, como hemos dicho, entre medidas de tiempo y de espacio. Sin embargo, en el cuarto día, después de haber estudiado el movimiento uniformemente acelerado, propone GALILEO claramente el problema de darle a la velocidad una representación objetiva y tangible:

«SALVIATI:...No podemos hablar en modo determinado acerca de los movimientos y sus velocidades o ímpetus, ya sean ecuábiles o naturalmente acelerados, sin determinar antes la medida que queremos usar para medir esas velocidades, como también la medida

(1) Puede ser curioso notar que TARTAGLIA, equivocando sobre la palabra «cierta» dice: «La proportione (razón) è la convenientia certa de due quantità...», con lo cual le cambia el sentido de «alguna» en «segura», «firme», y se esfuerza en explicar que con eso quiere EUCLIDES significar que la razón entre dos magnitudes está determinada, aun cuando no sea conocida por nosotros. Evidentemente TARTAGLIA pensaba por ej. en la razón entre el diámetro y la circunferencia que no se conoce numéricamente.

del tiempo. En cuanto a la medida del tiempo tenemos la comúnmente aceptada dondequiera, de las horas minutos y segundos, etc., y pues para la medición del tiempo tenemos esa admitida por todos, solo nos falta establecer una para las velocidades que sea entendida y aceptada por todos; es decir que sea la misma para todos. Conveniente para este objeto ha juzgado el autor, según lo ha expresado, ser la velocidad de los cuerpos que caen naturalmente, cuyas velocidades, en todas las partes del mundo crecen en la misma medida. De manera que el grado de velocidad que (por ej.) adquiere una bola de plomo de una libra al bajar verticalmente, partiendo del reposo, un segmento igual a la altura de una pica, siempre es el mismo en todos los lugares, y por tanto es en todo adaptado para señalar la cantidad del ímpetu derivante de la caída natural... Para determinar y representar cada ímpetu y velocidad particular, no encontró el autor ninguna manera más acomodada que de servirse del ímpetu que va adquiriendo el móvil en el movimiento naturalmente acelerado, del cual cada momento adquirido, convirtiéndose en ecuabil conserva la velocidad inalterada...». Sigue GALILEO explicando, al aplicar las leyes del movimiento naturalmente variado, que la precisa representación de las velocidades se obtendrá con fijar sobre una recta vertical un segmento unidad y elegir como representación de cada velocidad particular el segmento medio proporcional entre el dicho y el segmento de la caída de un cuerpo a la cual corresponde, como velocidad terminal la velocidad que se trata de representar.

La historia nos dice que nunca se adoptó prácticamente la representación de las velocidades como aquí la propone GALILEO, ni tampoco es suponible que él mismo lo entendiera en decir que no encontraba ninguna manera más acomodada. Lo que vemos en el pensamiento explicado aquí por GALILEO es que ninguna magnitud es definitivamente entendida y representada sino cuando está representada por un segmento, el cual segmento tiene precisamente el mismo lugar de nuestro número real, sin pasar por el artificio de la ilimitada aproximación por números racionales ⁽¹⁾.

(1) Véanse a este respecto las consideraciones lógicas acerca de la noción de « número real » que expresé, además que en otras oportunidades, en *La noción de dominio deductivo, etc.* (Publicaciones del Instituto de Matemáticas de Rosario, Vol. II, Fasc. 9).

4.— En la misma discusión del quinto día, GALILEO enfrenta otra cuestión crítica. En las ediciones de los Elementos de EUCLIDES que circulaban entre los estudiosos se encontraba, en el sexto libro, una definición en la cual se habla del producto de dos razones. Nunca EUCLIDES definió este producto; ni aplica EUCLIDES esa definición. Resulta fácil sospechar tratarse de una interpolación; así lo observa GALILEO y no puede dársele prioridad a ese respecto, porque la observación se encuentra igualmente en CLAVIO. Los comentarios de TARTAGLIA y de CLAVIO indican tratarse, aun en este lugar, de una extensión arbitraria de hechos conocidos para los números racionales a las razones consideradas implícitamente como los « números reales todavía no definidos ». Cierra GALILEO el discurso con lo que podría muy bien ser el principio de una teoría geométrica de los números reales: « Si los términos de una razón no son segmentos, imaginémoslos representados por segmentos proporcionales » el producto de dos razones entre segmentos es la razón entre los rectángulos cuyos lados son los antecedentes y cuyos lados son los consecuentes de las dos razones: « pero la formación de los rectángulos con segmentos en Geometría corresponde precisamente a la multiplicación de los números en Aritmética, etc ».

Lo que falta todavía en esta teoría euclidiana de las razones es el postulado de continuidad que podemos enunciar en la forma: Dada una sucesión creciente (o decreciente) de magnitudes pertenecientes a una determinada clase de magnitudes homogéneas, si existe una magnitud de la clase que supera a todas (es inferior a todas), existe una mínima (máxima) entre las magnitudes que no son menores (mayores) de ninguna magnitud de la sucesión.

Sin este postulado tampoco se puede demostrar generalmente que dadas tres magnitudes existe la cuarta proporcional; y esta proposición no se encuentra en efecto en el V libro de EUCLIDES ⁽¹⁾.

La fecha de publicación del diálogo de GALILEO sobre la mecánica es 1638; en 1642 falleció GALILEO; en 1658 un discípulo de GALILEO, ALFONSO BORELLI, publicaba un nuevo libro de Geometría con el título: *Euclides restitutus, sive prisca geometria elementa, brevius et facilius contexta, in quibus precipue proportionum theo-*

⁽¹⁾ Solamente en el sexto, tratándose de la proporcionalidad entre segmentos, esa existencia resulta probada por la efectiva construcción.

riae nova, firmiorique methodo promuntur, es decir « EUCLIDES reconstruido, o primeros elementos de geometría, compuestos en forma más breve y fácil, en los cuales principalmente se presenta la teoría de las proporciones con método nuevo y más firme ». La novedad de Borelli consiste precisamente en el abandono de la arquitectura lógica de EUCLIDES, para dar paso a la supuesta intuición. En cuanto a la teoría de las proporciones, que en la obra de BORELLI forma el libro III, el A. vierte largos comentarios para demostrar una incongruencia de EUCLIDES al no haber respetado, en el análisis del concepto de razón, el orden natural: entero, parte (alicuota), partes (quebrado), irracional; el irracional es todavía algo intuído, pero la comparación de los irracionales se hace a través de racionales mayores y menores; la existencia de la cuarta proporcional en el caso de razones irracionales está postulada ⁽¹⁾. Esta tendencia aritmetizadora está, como decíamos, en el espíritu del tiempo y la encontramos, por ejemplo, en el mismo BORELLI desde el principio del libro en cuanto acepta como intuitiva la noción de longitud de una línea y como definición de la recta la de tener, entre dos puntos cualesquiera, mínima longitud; el ejemplo le llega en verdad de ARQUÍMEDES; pero los libros de ARQUÍMEDES no tenían miras elementales y didácticas. El tratado de geometría de LEGENDRE (1ª edición 1794 - 12ª 1823) que dominó en las escuelas durante la máxima parte del siglo XIX, sigue los mismos conceptos. Puede ser interesante reproducir algunas palabras escritas por DE-

⁽¹⁾ En los comentarios de CLAVIO se aprende que la inserción de este axioma dentro del sistema de EUCLIDES debe remontarse más o menos al mismo tiempo de la propia introducción de los Elementos en la cultura europea sin que pueda establecerse el autor. Dice en efecto CLAVIO al concluir los comentarios a las Definiciones del libro V: « Unos intérpretes de EUCLIDES se sirven en este libro y en otros, donde se trata de proporciones entre magnitudes, de un cierto axioma que, como lo expresamos a continuación, hemos juzgado no ser inútil. Ello es como sigue: Si cierta proporción (razón) tiene una magnitud con respecto a otra, e igual tendrá alguna otra magnitud con respecto a cualquier otra magnitud propuesta ». Igualmente se reencuentra enunciado el axioma en las varias ediciones de un rehacimiento de EUCLIDES muy difundido en el siglo XVIII, por TACQUET, hasta que se llega con LEGENDRE a estimar inútil enunciarlo, por considerarse la teoría de las proporciones exclusivamente aritmética.

LAMBRE en 1814 a propósito de una nueva edición de las obras de EUCLIDES ⁽¹⁾ :

« Le mérite principal est dans la marche rigoureuse qu'il a suivie dans toute ses démonstrations; on pourrait dire cependant que cette méthode même a trouvé plus de prôneurs que d'imitateurs... Mais sans nous déclarer exclusivement les admirateurs d'une manière passée de mode, nous dirons que cette manière a des avantages précieux, en même temps qu'elle a des inconvénients graves; qu'elle forme un langage aujourd'hui peu connu et qui mérite de l'être davantage;... On ne serait écouté de personne aujourd'hui ⁽²⁾ si l'on proposait de commencer l'étude des mathématiques dans EUCLIDE; mais on dira une chose vraie en assurant que tous géomètre fera très-bien de lire une fois en sa vie EUCLIDE en entier, pour avoir une idée nette de ce genre de démonstrations, et se mettre en état de l'employer dans l'occasion. »

*
* *

5. — Damos a continuación un resumen del contenido esencial de la teoría de las proporciones según EUCLIDES, con algunos comentarios.

(1) *Rapport de MM. Delambre et Prony, sur une édition grecque, latine et française des quinze livres des Eléments et du livre des Données d'Euclide, par M. Peyrard.* París, le 21 février 1814. Esta relación está insertada al principio de dicha edición (*Les Oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*, par F. PEYRARD - París 1814); ver pág. XXXV-XXXVI. — Esta edición es todavía una de las más apreciadas y a ella se refieren principalmente nuestras citaciones de EUCLIDES anteriores y siguientes que damos en latín; la razón es que la traducción es literal, casi interlineal, y por lo tanto más próxima al texto en tanto que no podemos usar el griego. Otra edición más reciente y considerada de mayor autoridad, de la cual no disponemos directamente en la presente redacción fué publicada por HEIBERG y MENGE (Teubner - Leipzig - 1883-1896). Sobre esta otra edición está redactada la traducción italiana en « *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, editi da FEDERIGO ENRIQUES col concorso di diversi collaboratori, (Bologna - ZANICHELLI - 1925-1936 - libros I a XIII) a la cual nos referiremos también cuando se presentará el caso.

(2) EUCLIDES — o mejor dicho el riguroso espíritu euclidiano — volvió de moda, tal vez en modo pasajero, a final del mismo siglo XIX; y, posiblemente, le correspondió un período de brillo científico.

Ya hemos recordado las definiciones euclidianas de *razón* (*logos*) (n. 3) y de *proporción* (*analogía*) (n. 2), y decimos que la definición de razón no significa en verdad nada o casi nada; sólo dice que la palabra razón representa cierta *idea primitiva*; nada se puede concluir sobre una idea primitiva si no se la caracteriza por medio de ciertos postulados. Estos postulados están presentados por EUCLIDES como « definiciones »; las más evidentes son las que establecen relaciones entre razones (igualdad y desigualdad); la igualdad es la proporción que ya hemos recordado; la desigualdad se define análogamente: « Cuando entre los equimúltiplos (de la primera y tercera magnitud y de la segunda y cuarta) alguno es tal que el de la primera sobrepasa al de la segunda mientras el de la tercera no sobrepasa al de la cuarta, decimos que la razón de la primera magnitud a la segunda es mayor que la razón de la tercera a la cuarta ». En símbolos, decimos que

$$A \div B > C \div D$$

cuando existen enteros m, n tales que se realizan las desigualdades

$$mA > nB, \quad mC \leq nD,$$

Pero EUCLIDES antepone otro postulado que caracteriza las magnitudes para las cuales está permitido hablar de razón:

« Se dice que unas magnitudes tienen razón entre sí, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar cualquier otra ». Es necesario notar que no se habla aquí de dos magnitudes, sino indeterminadamente de « magnitudes » ⁽¹⁾, lo que hemos intentado manifestar con el artículo *unas*; debe entenderse por tanto, todas las magnitudes de una clase de homogéneas. Es, este postulado, el que se acostumbra llamar *postulado de Arquímedes*; pero que, según el mismo ARQUÍMEDES, debe remontarse a tiempo más antiguo del mismo EUCLIDES, atribuyéndolo a EUDOXIO, contemporáneo de ARISTÓTELES. Las noticias que tenemos de EUDOXIO son todas de segunda mano, pero nos dicen que deriva de él la teoría de las proporciones de EUCLIDES y el método de exhaustión. En cuanto a la forma exacta

(1) Rationem habere inter se magnitudines dicantur, quae possunt multiplicatae sese superare.

del enunciado no podemos separar el mérito que pueda haber tenido EUCLIDES. Importa al contrario notar que, leyendo los comentarios del Renacimiento, debemos concluir que aquellos comentaristas tal vez no hubieran entendido su exacto sentido. Parece redescubrirlo GALILEO al principio del quinto día que anteriormente hemos recordado; y precisamente, para explicar el descubrimiento, también él se refiere a ARQUÍMEDES: « Superai finalmente la difficoltà quando, nello studiare le maravigliose Spirali di ARCHIMEDE, incontrai nel bel principio del libro una dimostrazione simile alla predetta del nostro Autore ». Lo cual demuestra que más influye sobre el pensamiento un ejemplo o una analogía que un preciso enunciado. Para nuestros razonamientos futuros nos conviene reproducir el enunciado de ARQUÍMEDES; dice ARQUÍMEDES en el tratado *De lineis spirali-bus* ⁽¹⁾:

« Pero anteponemos, como ocurre en otras obras geométricas aquellas cosas que tienen alguna utilidad para las demostraciones: Admito luego, como proposiciones establecidas, unas que ya se encuentran en otros libros divulgados, es decir:

LEMA I. — *El exceso de líneas desiguales y de espacios desiguales, del cual la mayor magnitud excede a la menor, añadido a sí mismo repetidamente, puede exceder a cualquiera de las dos cantidades que se quieren comparar entre ellas ».*

Como se ve, ARQUÍMEDES declara explícitamente que la proposición era adquirida al dominio de los geómetras; pero una diferencia esencial con el enunciado de EUCLIDES está en que éste habla de magnitudes en general y pone el postulado como condición para que dentro de determinada clase de magnitudes homogéneas pueda hablarse de razón; en vez ARQUÍMEDES se refiere a determinadas clases de magnitudes (longitudes y áreas) y reconoce que a ellas se aplica el postulado ⁽²⁾. Desde el punto de vista redaccional

⁽¹⁾ Traduzco de la edición latina: *Archimedis Opera quae extant per Davide Rivaltum a Flurantia* - Parisiis 1615.

⁽²⁾ En este sentido se justifica el nombre de postulado de ARQUÍMEDES con respecto a las teorías geométricas. (Ver a continuación, N° 8). La denominación fué usada primeramente por O. STOLZ en la memoria *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* (Math. Ann. 22 - 1883).

podría observarse que el enunciado de ARQUÍMEDES es menos completo que aquel de EUCLIDES porque en lugar de referirse a todas las magnitudes de una clase homogénea, se refiere a cierto exceso de líneas desiguales, etc., vale decir que el enunciado está preventivamente preparado para cierta determinada aplicación.

6. — Establecida la definición de la proporcionalidad o igualdad de razones, los problemas que se presentan consisten en mostrar: 1º que el cuarto proporcional respecto de tres magnitudes dadas, en cuanto exista, es único; 2º que las relaciones de igual y mayor definidas arriba para las razones realizan las propiedades que por costumbre reconocemos a los signos $=$ y $>$ (en particular, que si dos razones no son iguales, siempre una es mayor de la otra). EUCLIDES resuelve estos problemas con la demostración de las proposiciones siguientes:

(*Prop. VII*). — Magnitudes iguales tienen la misma razón respecto a una misma magnitud, y una dada magnitud tiene la misma razón respecto a magnitudes iguales.

(*Prop. VIII*). — Dadas dos magnitudes desiguales, la mayor tiene, respecto a una dada magnitud, razón mayor y una dada magnitud tiene, respecto a la menor, razón mayor.

(*Prop. IX*). — Las magnitudes que tienen respecto a una misma magnitud la misma razón, son iguales entre ellas y las magnitudes respecto a las cuales una misma magnitud tiene la misma razón, son iguales.

(*Prop. X*). — Si dos magnitudes tienen razones diferentes respecto a una misma, la que tiene razón mayor es mayor; y si una dada magnitud tiene razones diferentes respecto a otras dos, aquella que corresponde a la razón mayor es menor.

La primera (VII) es inmediatamente evidente, porque, si $A = B$, se realizan conjuntamente las relaciones homólogas en

$$mA \gtrless nC \quad , \quad mB \gtrless nC \quad .$$

Sea ahora $A > B$; y sea C otra magnitud homogénea con las anteriores; formamos $D = A - B$; existe un número entero m tal que

$$mB > C \quad , \quad mD > C \quad ;$$

existe igualmente un número entero n tal que

$$nC > mB, \quad (n-1)C \leq mB.$$

Se tiene entonces

$$mA = m(B + D) = mB + mD > mB + C \geq nC,$$

es decir

$$mA > nC > mB,$$

lo cual demuestra la prop. VIII.

Las proposiciones IX y X son las inversas de las anteriores y siguen de ellas por una muy conocida proposición de lógica. De la demostración de la prop. VIII resulta incidentalmente que la definición de la razón mayor, en la cual se pedía solo que, siendo el múltiplo de la primera magnitud mayor que el múltiplo de la segunda, fuese el equimúltiplo de la tercera $\leq$ del correspondiente múltiplo de la cuarta, se puede ahora precisar pidiendo que en lugar de $\leq$ sea precisamente $<$, con lo cual se adquiere la completa simetría entre las relaciones $>$ y $<$, aplicadas a las razones.

Las demás proposiciones del libro V de Euclides establecen las conocidas propiedades de las proporciones, de inversión, componendo, diviendo, permutación (en el caso de magnitudes todas homogéneas), etc... Sería perder tiempo detenerse en considerarlas separadamente; el lector deseoso puede dirigirse a los textos citados. Nos contentaremos con unos ejemplos y algunas observaciones.

(*Prop XIV*). — Si cuatro magnitudes homogéneas son proporcionales y la primera es mayor de la tercera, la segunda es mayor de la cuarta; si iguales, iguales, si menor, menor.

En efecto, por la prop. VIII, de $A > C$ sigue

$$A \div B > C \div B;$$

luego, si $A \div B = C \div D$,

$$C \div D > C \div B,$$

y, por la prop. X, $B > D$.

Análogamente para los demás casos.

Se sigue fácilmente la permutabilidad de los términos medios de una proporción (prop. XVI); en efecto, se tiene primero ⁽¹⁾

$$A \div B = mA \div mB \quad , \quad C \div D = nC \div nD \quad ;$$

si pues $A \div B = C \div D \quad ,$

sigue $mA \div mB = nC \div nD \quad ,$

por lo cual, aplicando la prop. XIV, se realizan en cada caso conjuntamente las relaciones homólogas

$$mA \gtrless nC \quad , \quad mB \gtrless nD \quad .$$

Siendo m y n enteros arbitrarios, resulta la proporción

$$A \div C = B \div D$$

(*Prop. XX*). — Si dos magnitudes tienen respecto a una misma, respectivamente, razones iguales a las de otras dos magnitudes a una misma, la primera es mayor, igual o menor a la segunda según es la cuarta mayor, igual o menor a la quinta ⁽²⁾. En símbolos, si

$$A \div B = C \div D \quad , \quad E \div B = F \div D \quad ,$$

se realizan conjuntamente las relaciones homólogas

$$A \gtrless E \quad , \quad C \gtrless F \quad ,$$

En efecto, por la prop. VIII, se realizan conjuntamente las relaciones homólogas

$$A \gtrless E \quad , \quad A \div B \gtrless E \div B \quad ;$$

⁽¹⁾ Observe el lector que en los pasajes siguientes muchas cosas admitimos cuya demostración resultará indudablemente fácil imitando los demás razonamientos que expresamos más completamente. EUCLIDES proporciona estas demostraciones en las proposiciones intermedias que aquí no se exponen porque no es objeto nuestro dar por completo la teoría euclidiana de las proposiciones, sino señalar la marcha fundamental del razonamiento.

⁽²⁾ Hemos alterado un poco la traducción de este enunciado para hacerlo un poco más rápido, en cuanto no interesa acá la versión literal.

por lo tanto también

$$C \div D \gtrless F \div D$$

de donde, por la prop. X, sigue la tesis.

(*Prop. XXII*). — Si varias magnitudes tienen, respecto a una misma, razones iguales a las de otras magnitudes en igual número respecto a una otra, las primeras magnitudes son ordenadamente proporcionales a las otras. En símbolos, si las magnitudes A , B , C , D , E , F realizan la hipótesis de la prop. XX, sigue

$$A \div E = C \div F .$$

En efecto, indicando con m , n , p números enteros cualesquiera, de las proporciones de la hipótesis siguen las otras:

$$mA \div nB = mC \div nD \quad , \quad pE \div nB = pF \div nD \quad ;$$

por la XX, se realizan luego conjuntamente las relaciones homólogas

$$mA \gtrless pE \quad , \quad mC \gtrless pF \quad ,$$

de donde la proporción enunciada.

Es necesario detenerse un momento en admirar la elegancia y la sencillez, juntas al rigor lógico de estas deducciones de EUCLIDES. La prop. XX es solo una preparación para la XXII. Pero esta, en cuanto para las magnitudes se admita una representación numérica o segmentaria (en cualquier caso una representación sobre una única clase de magnitudes homogéneas) resulta inmediatamente de la XVI, porque, admitiendo que todas las magnitudes consideradas fuesen homogéneas, la hipótesis de las prop. XX, XXII se escribe, por XVI,

$$A \div C = B \div D \quad , \quad E \div F = B \div D .$$

luego

$$A \div C = E \div F ,$$

y, nuevamente por XVI,

$$A \div E = C \div F .$$

Teniendo que evitar la representación numérica o equivalente, resultaba necesario seguir un camino que entrara más profundamente en la esencia de la definición.

No todas las demostraciones en las ediciones de los *Elementos* que por razones bibliográficas, por derivar de manuscritos más antiguos, se consideran como más autorizadas, satisfacen a estas condiciones de rigor, y lo que es más singular se trata de irregularidades aisladas y discordantes de las proposiciones vecinas y fácilmente reducibles a la pureza del texto restante. La suposición que se trate de alteraciones — puesto que no se conoce algún texto contemporáneo de EUCLIDES — es más que justificada. Por ejemplo la redacción aceptada como clásica de la demostración de la proposición XVIII, la que enuncia la propiedad del « componendo », pide subrepticamente de admitir la existencia de la cuarta proporcional respecto de tres magnitudes dadas ⁽¹⁾, mientras que esto puede evitarse con solo imitar la demostración de la proposición anterior (prop. XVII), que enuncia la propiedad del « dividendo ». Una observación semejante se debe hacer para la prop. V (que tratando solo de una propiedad de múltiplos creemos inútil enunciar) donde se hace una división en partes iguales de una magnitud, mientras en todos los demás casos (como anteriormente hemos visto) se procede únicamente por multiplicación.

7. — En el libro VI EUCLIDES trata la teoría de la proporcionalidad de las magnitudes geométricas, (segmentos y sectores de círculo). Esta teoría, basada esencialmente sobre el llamado teorema de THALES ⁽²⁾ difiere solo en detalles secundarios de la que es corriente en los tratados modernos de geometría elemental, si no es propiamente en la demostración de esta primera proposición. En los tratados modernos se demuestra en efecto, como lema preliminar, que segmentos iguales sobre una recta son proyectados paralelamente a una dirección fija sobre otra recta cualquiera en segmentos iguales. La demostración se consigue con la sola teoría de la igualdad de los triángulos y el teorema directo de THALES se

⁽¹⁾ Y ya anotamos que dicha existencia no está afirmada en las postulaciones de EUCLIDES.

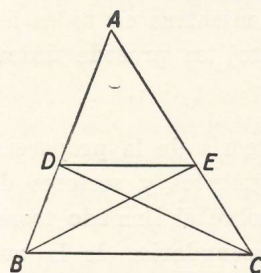
⁽²⁾ Nótese que toda la terminología que atribuye nombres a los teoremas es absolutamente moderna y fundada sobre bases muy poco seguras.

sigue inmediatamente por la definición de la proporcionalidad. Para demostrar el teorema inverso hay que aplicar la unicidad de la cuarta proporcional y luego el postulado de ARQUÍMEDES.

EUCLIDES se refiere a la equivalencia de los triángulos. Demuestra como lema preliminar que triángulos o paralelogramos de igual altura son proporcionales a las bases, como directa aplicación de la definición de proporcionalidad, en cuanto se sabe que triángulos (o paralelogramos) de igual altura, si son equivalentes, tienen también igual base; y demuestra luego el teorema siguiente, en todo equivalente al teorema de THALES:

Si en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, ella corta proporcionalmente los demás lados; y si dos lados de un triángulo están cortados proporcionalmente, la recta que une a los puntos de división es paralela al tercer lado.

La demostración de la primera parte se desarrolla como sigue: Sea ABC el triángulo y DE paralela al lado BC (D y E internos respectivamente a los lados AB , AC); unamos BE y CD y consideremos los pares de triángulos ADE , DEB y ADE , DEC . Por el lema recordado,



$$ADE : DEB = AD : DB$$

$$ADE : DEC = AE : EC ;$$

pero por ser paralelas BC y DE ,

$$DEB = DEC ;$$

luego $AD : DB = AE : EC .$

Para la demostración de la segunda parte, se razona inversamente; de la hipótesis de la proporcionalidad entre los segmentos, mediante las proporciones anteriores se concluye que

$$ADE : DEB = ADE : DEC .$$

EUCLIDES concluye que $DEB = DEC$ y luego DE paralela a BC . En el texto griego no se dice porqué de la última proporción deba seguir la igualdad (equivalencia) de los triángulos; pero la prop. IX del libro V enseña que si una proporción tiene los antecedentes iguales, también los consecuentes son iguales. Esta proposición depende del postulado de ARQUÍMEDES. Tanto en la teoría moderna

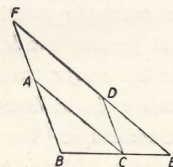
como en la euclidiana se puede reducir a este único punto la aplicación del postulado de ARQUÍMEDES en cuanto se refiere a la proporcionalidad de los segmentos y la semejanza de los polígonos ⁽¹⁾.

Cuando encontramos demostraciones diferentes, no hay razón a priori para preguntarnos porqué el autor haya adoptado una determinada. Sin embargo, en el caso presente la pregunta está justificada no solamente por la consideración que el método hoy día más en uso aparece más elemental por apoyarse sobre el solo fundamento geométrico de la teoría de la igualdad sin intervención de la noción de equivalencia, y que tenemos otros ejemplos en los cuales EUCLIDES ha dado la preferencia a un camino más largo para evitar el uso de conceptos más adelantados; debemos notar además que ese razonamiento más elemental debía de presentarse naturalmente al propio EUCLIDES en cuanto, en el mismo libro VI encontramos, para otro objeto, figuras que sugieren claramente las que sirven para la demostración del lema preliminar según el camino moderno ⁽²⁾. Nos parece justificada la hipótesis que la demostración elegida apareciera a EUCLIDES verdaderamente más acabada. Notamos en efecto que: 1º La noción de equivalencia aparece en la obra de EUCLIDES como algo de primordial ⁽³⁾ siendo usada desde el Libro I. 2º EUCLIDES, en la consideración de la equivalencia de los triángulos, no hace caso del postulado de ARQUÍMEDES, donde nosotros vemos la necesidad (ver más adelante n. 10). 3º Después de haber enunciado en el libro V el postulado de ARQUÍMEDES, no como una *reconocida propiedad* general de las magnitudes, sino como una *condición* para que ciertas magnitudes tengan razón, EUCLIDES no enuncia explícitamente que esta condición se cumpla para los segmentos; y notamos arriba que, posiblemente, lo que debe re-

(1) Hay otros lugares en los libros siguientes de los *Elementos* de EUCLIDES, en donde el postulado vuelve a ser necesario.

(2) Por ej., en la demostración de la prop. IV del libro VI (que afirma la proporcionalidad de los lados homólogos en triángulos equiángulos) se presenta la figura de al lado, cuyo parentesco con la que sirve para la demostración del lema resulta evidente, cuando tan solo los segmentos *BC*, *CE*, allí arbitrarios, se hagan iguales.

(3) Se sabe que EUCLIDES llama *igualdad* a la equivalencia y las figuras iguales, según la igualdad geométrica, son, para él, *iguales y semejantes*, iguales y de igual forma.



conocerse a ARQUÍMIDES es esta explícita enunciación en forma de admisión.

Debemos concluir que hay aquí, en el procedimiento de EUCLIDES, una verdadera laguna, debida probablemente a cierto carácter de mayor intuición que él juntara a la noción de área, que lo llevara a ser menos cuidadoso en los razonamientos con ella relacionados. En este caso el camino elegido por EUCLIDES se explicaría por el deseo de reducir las postulaciones axiomáticas.

Nótese además que el método de EUCLIDES, en rigor, no se completa tampoco con admitir, como lo dijimos arriba, la unicidad de la cuarta proporcional, para las áreas (consideradas como magnitudes). Aun cuando, siguiendo el razonamiento euclidiano, se haya concluído que las áreas de los triángulos *DEB*, *DEC* son iguales, para deducir, con el mismo EUCLIDES y con todos sus comentaristas e intérpretes, que las rectas *DE*, *BC* son paralelas, hay todavía que salvar la distancia entre el concepto de área como *magnitud* y como *figura geométrica*. Por todos se demuestra en efecto ese paralelismo por reducción al absurdo, en cuanto, de no realizarse, se llegaría a la conclusión que un triángulo puede ser equivalente a una parte del mismo. Admitir que esa conclusión deba declararse absurda por un hecho de intuición no es laguna menor que aquellas anteriormente señaladas (ver n. 10) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La duda que aquí se manifiesta consiste en lo siguiente: Al considerar las áreas como *magnitudes*, se admite sin más que sumas de áreas iguales son iguales y que un área es mayor que otra cuando es suma de ésta y de un área más; pero ¿no podría ocurrir que componiendo varias áreas en orden diferente se llegara a formar figuras contenidas una en la otra como parte? La experiencia nos dice que no es; pero, si no se llega a demostrarlo, habrá por lo menos que enunciarlo como postulado. Lo cierto es que la demostración se consigue efectivamente, como veremos; pero ella está condicionada al hecho del preciso sentido geométrico que se da a la palabra « parte ». En la teoría de los conjuntos se demuestra que ya bastaría generalizar convenientemente la noción de la descomposición de un área en partes para que el absurdo aludido se realizara. (Ver por ej. F. HAUSDORFF - *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen* - Math. Annalen. Bd 79-1914).

Por cuanto se refiere propiamente a la geometría, pertenece a A. DE ZOLT haber primero puesto de relieve esta laguna en todas las teorías de la equivalencia de hasta entonces, (*Principii della eguaglianza di poligoni, preceduti da*

8.—Podemos encarar bajo otro punto de vista el deseo de reducir las postulaciones que hemos atribuído a EUCLIDES. El preciso estudio de la estructuración del libro VI de EUCLIDES (o, para quien no quiera referirse al texto euclidiano, tan solo un examen somero de la teoría de la semejanza geométrica en cualquier libro elemental) deja ver que la aplicación a los segmentos de la definición general de la proporcionalidad por múltiplos (o por múltiplos y submúltiplos en las trataciones posteriores) tiene un papel del todo secundario. Bastaría por ejemplo admitir que, existiendo una conveniente teoría preliminar de la equivalencia entre triángulos, a reparo de las críticas expresadas últimamente acerca de la teoría euclidiana, se aceptara como definición de la proporción $a : b = c : d$ entre segmentos que « existen dos triángulos de igual altura y de bases a y b tales que otros dos triángulos respectivamente equivalentes y de igual altura (diferente si es necesario de la anterior) tienen por bases c y d ». En este caso la demostración euclidiana del teorema inverso de THALES resultaría innecesaria, y podría « restituirse » sin alteraciones todo el sexto libro de EUCLIDES.

El inconveniente de un tal procedimiento está precisamente en el inciso *existiendo una conveniente teoría preliminar de la equivalencia entre triángulos*; como hemos advertido, nosotros tenemos, con la teoría de la equivalencia, escrúpulos que no afectaban a EUCLIDES; tales como la distinción entre equivalencia por sola suma (llamando equivalentes dos polígonos cuando pueden componerse como

alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica. Milano, 1881; para la resolución de la dificultad, remitimos a más adelante (n. 10-11).

Agregamos todavía una observación acerca del teorema de THALES.

En los comentarios (de M. T. ZAPPELLONI) en la edición italiana, por ENRIQUES, de los Elementos de EUCLIDES, se nota que la forma moderna de enunciar y demostrar ese teorema se encuentra por primera vez en el Tratado de Geometría Elemental de AMIOT que sucedió al de LEGENDRE y compartió con él la preferencia en las escuelas de Francia e Italia por mucha parte del siglo XIX (la 13ª ed. francesa es de 1865; la primera italiana — trad. por G. NOVI — es de 1868) y se admite que en ello haya influido una preferencia del A. hacia los conceptos de la geometría proyectiva. Si, como no sabríamos interpretar diferentemente, se ve esta influencia en el detalle de considerar la correspondencia entre dos puntuales establecida por proyección paralela, merece notar que el enunciado, en esta misma forma, ya se encuentra en los *Eléments de Géométrie* de LEGENDRE. Por lo que dijimos, el mérito conceptual de la nueva demostración es mucho mayor.

sumas de los mismos polígonos parciales, diferentemente ordenados) o por suma y diferencia; y como el interrogante de si, según una u otra definición, no pudieran una parte de un polígono y el polígono total resultar equivalentes.

Vamos a mostrar como es posible realizar, por otra vía, el programa propuesto de hacer la teoría de las proporciones entre segmentos y de la semejanza de los polígonos independiente de la teoría general de las proporciones y del postulado de ARQUÍMEDES ⁽¹⁾.

*
* *

9. — Aceptamos la definición euclidiana: *Dos triángulos se dicen semejantes cuando tienen los mismos ángulos* ⁽²⁾; los ángulos iguales se dicen *homólogos*; los lados y los vértices igualmente dispuestos respecto a los ángulos homólogos se dicen también *homólogos*.

Diremos que cuatro segmentos a, b, c, d están relacionados por la proporción

$$a : b = c : d$$

cuando los pares a, c y b, d son los catetos de dos triángulos rectángulos semejantes, siendo catetos homólogos a y b, c y d . La misma definición se puede evidentemente enunciar también diciendo que, si sobre dos rectas ortogonales OX, OY se llevan los segmentos $OA = a, OB = b$ (sobre OX), $OC = c, OD = d$ (sobre OY) las rectas AC y BD resultan paralelas.

Esta definición significa luego tomar por definición el propio teorema de THALES aplicado a un par de rectas ortogonales y a segmentos a partir del

⁽¹⁾ El n. que sigue es la reproducción de una breve Nota que publiqué en 1903 en un periódico matemático muy poco conocido (B. LEVI: *Teoría geometrica delle proporzioni fra segmenti, indipendente dal postulato d'Archimede*. Supplemento al Periodico di Matematica - Livorno, 1903). Pocos años antes (1898) D. HILBERT había publicado en sus *Grundlagen der Geometrie* una parecida, pero menos elemental.

⁽²⁾ En verdad EUCLIDES (Libro VI, Def. I) define *figuras rectilíneas semejantes*; entonces se encuentra obligado a pedir, además de la igualdad de los ángulos, la proporcionalidad de los lados. Esto no es necesario cuando se trata de triángulos, porque cada triángulo está determinado por sus ángulos y un lado. Y no hablar de proporcionalidad de los lados es necesario para nosotros, que todavía no la hemos definida.

punto de intersección; es importante notar que no sería posible aceptar por definición el teorema de THALES en su forma general porque nada permite por ahora afirmar que la condición de proporcionalidad no cambiaría al variar el ángulo de las dos rectas; la demostración de esta invariancia es nuestro principal asunto ⁽¹⁾.

A razón de la unicidad de la paralela a una recta a partir de un punto dado, sigue que *uno cualquiera de los cuatro términos de una proporción está determinado en los otros tres*.

Sigue también que *la proporción $a : b = c : d$ equivale a $b : a = d : c$ y a $c : d = a : b$, $d : c = b : a$.*

TEOREMA I. — *De $a : b = c : d$ y $a : e = c : f$ sigue $b : e = d : f$; porque si AC y BD son paralelas y AC , EF son paralelas, lo son también BD y EF .*

TEOREMA II (componendo). — *Si $a : b = c : d$, se sigue*

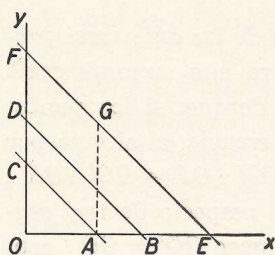
$$a + b : a = c + d : c.$$

En efecto, llévase sobre la recta OX los segmentos

$$OA = a, \quad OB = AE = b$$

y sobre la OY los segmentos

$$OC = c, \quad OD = CF = d.$$

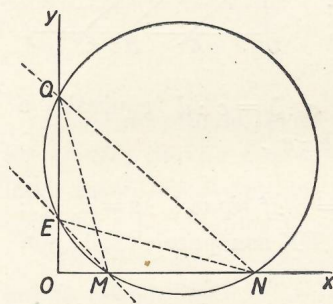


Por la hipótesis las rectas AC , BD son paralelas. Tracemos por A la paralela a OY , y por E la paralela a AC , BD ; sea G el punto de intersección. El triángulo AEG es igual a OBD ; luego $AG = OD = CF$ y $CAGF$ resulta un paralelogramo; es decir que la recta GF es la misma EG paralela a AC .

⁽¹⁾ Nótese que tratamos aquí de razonar exclusivamente en el plano. En el caso de admitir el recurso a razonamientos en el espacio, la independencia de la definición de la proporcionalidad del ángulo entre las rectas, en el caso de aceptar como definición el propio teorema de THALES, resulta fácilmente al cortar un triedro por medio de planos paralelos.

La misma demostración se puede leer en orden invertido, concluyendo que si $a + b : a = c + d : c$, se sigue $a : b = c : d$, es decir, si $m > a$, y $m : a = n : c$, sigue que $n > c$ y $m - a : a = n - c : c$ (dividendo).

TEOREMA III. — Si sobre los lados OX, OY de un ángulo recto, los puntos M, N y P, Q están sobre una circunferencia, se tienen las proporciones (*)



$$OM : OP = OQ : ON$$

$$OM : OQ = OP : ON .$$

En efecto, por las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia, se tienen las igualdades

$$\widehat{OQM} = \widehat{ONP} , \quad \widehat{OMP} = \widehat{OQN} ;$$

luego los triángulos OQM y ONP y los triángulos OMP, OQN son semejantes, estando escritos ordenadamente los vértices homólogos.

TEOREMA IV. — Inversamente, si vale una de las anteriores proporciones, los puntos M, N, P, Q están sobre una circunferencia y vale por consecuencia la otra proporción. Porque, si los puntos M, N, P, Q no estuvieran sobre una circunferencia, el círculo por MNP cortaría la OY en otro punto Q' y sería $OM : OP = OQ' : ON$; pero ya se observó que el cuarto proporcional respecto de tres segmentos dados está unívocamente determinado, luego $OQ' = OQ$, contra la hipótesis ⁽¹⁾. Este teorema IV nos da en seguida que en una proporción entre segmentos, se pueden permutar los términos medios.

TEOREMA V. — Si $a : b = c : d, e : f = c : d$, sigue $a : b = c : f$; basta en efecto permutar los medios en las proporciones de la hipótesis y, después de aplicar el teor. I, permutar los medios nuevamente.

⁽¹⁾ Por precisión hay que observar que Q' está sobre la misma semirrecta OY sobre la cual está P , porque, siendo MN una cuerda del círculo, O es punto exterior.

(*) En la figura leer P en lugar de E .

TEOREMA VI. — Si $a : b = c : d$, $e : f = c : d$, sigue

$$a \pm e : b \pm f = c : d .$$

Basta en efecto aplicar el componendo o el dividendo a la proporción $a : b = e : f$ y aplicar nuevamente el teorema anterior.

TEOREMA VII. — En triángulos semejantes dos lados homólogos y las alturas correspondientes forman una proporción. Supongamos en efecto, para fijar las ideas, que las alturas sean interiores a los triángulos; dividen los dos triángulos en dos pares de triángulos rectángulos semejantes (por igualdad de ángulos); se sigue que los segmentos en que los lados están cortados son proporcionales a las alturas; basta pues aplicar el teorema anterior.

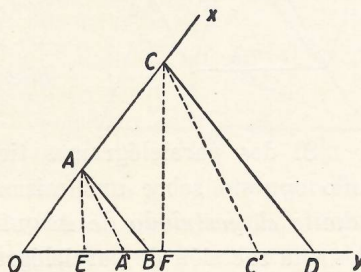
En el caso de que las alturas fuesen externas a los triángulos basta razonar por diferencia de segmentos, en vez que por suma.

TEOREMA VIII (el llamado de THALES). — Si los lados OX , OY de un ángulo cualquiera son cortados por dos rectas paralelas respectivamente en los puntos A y B , C y D , vale la proporción:

$$OA : OC = OB : OD .$$

En efecto los triángulos OAB , OCD son semejantes (igualdad de ángulos). Tracemos las alturas AE , CF ; por el teorema anterior tenemos

$$OB : OD = AE : CF .$$



Por otra parte, sea sobre OY , $OA' = OA$, $OC' = OC$; los triángulos OAA' , OCC' , isósceles y con el mismo ángulo en el vértice, son semejantes y todavía AE y CF son sus alturas; luego

$$OA' : OC' = AE : CF .$$

Por el teorema V y substituyendo a OA' , OC' sus iguales OA , OC , se obtiene la tesis.

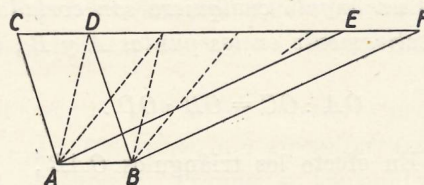
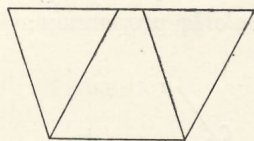
El teorema inverso de THALES sigue inmediatamente por la unicidad de la cuarta proporcional.

Queda al lector averiguar que con lo dicho toda la teoría de la semejanza geométrica puede seguir, aplicando solamente las nociones de la igualdad y sin apelar mayormente a la teoría general de las proporciones.

*
* *

10. — Concluimos con algunas observaciones sobre la teoría de la equivalencia de los polígonos. El teorema fundamental es el que afirma que triángulos (o paralelogramos) de igual base e igual altura son equivalentes.

Cuando se define la equivalencia exclusivamente por suma, la demostración se desarrolla en la manera siguiente: Si dos paralelogramos tienen un lado común y el lado opuesto con un punto común (a lo menos) tienen una parte (trapezio o triángulo) común; las partes no comunes son dos triángulos iguales. Luego los dos paralelogramos son equivalentes.



Si dos paralelogramos tienen un lado común y cada uno el lado opuesto sobre una misma recta paralela a dicho lado, si se admite el postulado de ARQUÍMEDES, se puede intercalar entre los dos una sucesión de paralelogramos, todos con el mismo lado común y los lados opuestos por lo menos con un punto común para cada dos paralelogramos sucesivos. Se agrega que, si dos polígonos son equivalentes (por suma) cada uno a un mismo tercero, las dos descomposiciones a las cuales está sujeto este tercero para averiguar las dos equivalencias, se superponen determinando una descomposición en partes menores las cuales, convenientemente ordenadas, forman los dos primeros. Resulta que los sucesivos paralelogramos son todos equivalentes y por tanto son equivalentes los paralelogramos dados, respectivamente, primero y último de la sucesión.

Como ya hemos señalado, EUCLIDES no sigue este camino, sino que dice: el paralelogramo $ABDC$ se obtiene de la figura $ABFC$

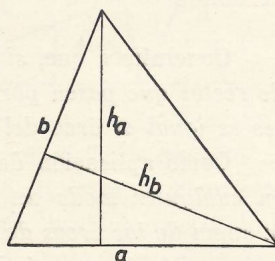
sustrayéndole el triángulo BDF ; el paralelógramo $ABFE$ se obtiene de la misma figura $ABFC$ sustrayéndole el triángulo AEC ; pero los dos triángulos son iguales, luego etc.

Con esta demostración se evita completamente el postulado de ARQUÍMEDES, pero se viene a admitir dos definiciones de la equivalencia, por suma y por diferencia. El inconveniente no es exclusivo para la demostración euclidiana, en cuanto él ya existe en la simple definición por suma, por no estar demostrado que dos polígonos que resulten equivalentes por cierta determinada regla de descomposición no puedan resultar no-equivalentes siguiendo otro procedimiento de división en partes.

La anterior teoría nos permite resolver ambas cuestiones; la solución es favorable, como se podía esperar, a la consistencia de la noción de área y al concepto euclidiano de la independencia de esa noción del postulado de ARQUÍMEDES. Pero el razonamiento que va a llevarnos a esa conclusión es una prueba más de que el problema existía y merecía ser considerado ⁽¹⁾.

Si en un triángulo se trazan dos alturas, los triángulos rectángulos que ellas forman con las bases correspondientes son semejantes; se sigue que, indicando con a, b estos dos lados y con h_a, h_b las correspondientes alturas, vale la proporción

$$a : b = h_b : h_a .$$



Fijamos una vez para siempre un segmento u . Dado un triángulo cualquiera del cual un lado y la altura correspondiente sean a y h_a , construyamos el segmento s tal que

$$a : u = s : h_a .$$

(¹) Salvo variantes insignificantes, que hacen sin embargo más ligera la exposición, lo que vamos a decir reproduce las ideas de G. VERONESE (*Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure*. Atti del R. Istituto Veneto, 1894-95), y de D. HILBERT (*Grundlagen der Geometrie*, 1899). Más o menos en el mismo tiempo de la demostración de VERONESE aparecieron otras en Alemania (SCHUR, 1892; RAUSENBERGER, 1893); en Francia (GÉRARD, 1895); en Italia (LAZZERI, 1895). El principio fundamental es siempre el mismo, variando los particulares de la realización. Véase por ej. también una Nota al final del T. I del tratado de Geometría elemental de HADAMARD (1903).

Por el teorema I del n. 9, si b y h_b son otro lado y la altura correspondiente del mismo triángulo, tendremos también

$$b : u = s : h_b .$$

Se sigue que el segmento s está determinado en cuanto está dado el triángulo, no dependiendo del lado que se elige para determinar la proporción; el segmento s podrá llamarse *área del triángulo*.

Dividiendo el lado a en la suma de dos segmentos: $a = m + n$ y uniendo el punto de división con el vértice opuesto, el triángulo se divide en dos, con la misma altura h_a ; llamando s_1 y s_2 sus áreas, se tiene

$$m : u = s_1 : h_a , \quad n : u = s_2 : h_a ;$$

luego por el teorema VI y IV,

$$a : u = s_1 + s_2 : h_a ,$$

de donde

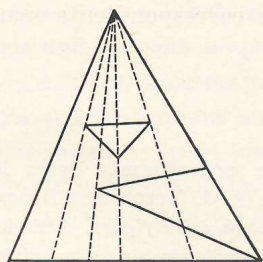
$$s_1 + s_2 = s .$$

Concluimos que, *si un triángulo se divide en partes por medio de rectas que pasen por un vértice, la suma de las áreas de las partes es igual al área del triángulo total.*

Como aplicación de esta observación vamos a demostrar que *si en cualquier modo un triángulo se divide en partes triangulares, la suma de las áreas de las partes iguala al área del triángulo*. Unamos en efecto un vértice del triángulo con todos los vértices de

los triángulos de la descomposición ⁽¹⁾; estas rectas determinan una división del triángulo dado en partes triangulares análogas a las consideradas arriba. El área del triángulo es igual a la suma de las áreas de estas partes.

Dentro de cada una de estas partes triangulares, los lados de los triángulos de la descomposición dada determinan una división en cuadrángulos (eventualmente trián-

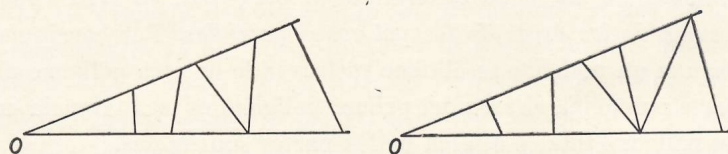


⁽¹⁾ En la figura están representados solamente dos triángulos de la supuesta descomposición, con el objeto de aclarar los casos que la construcción puede presentar.

gulos) cuyos vértices están todos sobre los dos lados constituidos por las transversales.

Por otra parte, para cada uno de los triángulos de la descomposición dada existe entre las transversales trazadas una que pasa por un vértice dividiendo en dos dicho triángulo; igualmente el área del triángulo resulta igual a la suma de las áreas de estas dos partes triangulares. Entre las demás transversales podrá haber algunas que entran dentro de uno u otro de los dos triángulos parciales, y estas lo dividen en partes cuadrangulares (eventualmente triangulares) cuyos vértices están todos sobre los dos lados que no pertenecen a dicha primera transversal.

Tanto por la consideración de la descomposición del triángulo principal, como por la consideración de la descomposición de los triángulos parciales, estamos pues conducidos a figuras como las siguientes:



Estas muestran dos posibilidades: o bien el lado opuesto al vértice O pertenece a un triángulo de la subdivisión, o bien pertenece a un cuadrángulo; pero, en este caso bastará trazar una (cualquiera) de las diagonales de ese cuadrángulo para reducirse al caso anterior. Separando aquel triángulo, viene a descomponerse la figura en dos triángulos y, por la proposición antes demostrada, su área es la suma de las áreas de estos dos. Aquel que contiene el vértice O puede todavía presentarse dividido por transversales, pero presentando exactamente la misma disposición anterior y podrá luego separársele un nuevo triángulo, y así siguiendo hasta haber considerado todas las transversales.

La construcción lleva pues a una descomposición del triángulo propuesto en cierto número de triángulos menores, los cuales, convenientemente agrupados constituyen los triángulos de la descomposición dada y en cada caso, la suma de las áreas de los triángulos componentes produce el área del triángulo compuesto. De aquí resulta la proposición enunciada.

Sea dado ahora un polígono cualquiera; siempre puede pen-

sárselo descompuesto en triángulos; la proposición demostrada nos da que *de cualquier modo se haga esta descomposición, la suma de las áreas de los triángulos componentes tiene siempre el mismo valor*. Basta observar que sobreponiendo dos distintas descomposiciones se obtiene una división del polígono dado en partes que, diferentemente agrupadas, constituyen las partes de la primera y de la segunda descomposición. La última división puede siempre suponerse compuesta por triángulos, bastando, cuando haga falta, subdividir los polígonos que la componen por medio de diagonales. Tanto el área del polígono total, como las áreas de sus partes se formarán entonces como sumas de las áreas de estos últimos triángulos ⁽¹⁾.

Está por tanto justificada la definición siguiente: *llamamos área de un polígono la suma de las áreas de un cualquier sistema de triángulos en que el polígono esté descompuesto*. Esta área es independiente del modo de la descomposición. *Si un polígono se descompone de un modo cualquiera en polígonos, su área es igual a la suma de las áreas de los polígonos parciales*. Por consiguiente también si un polígono se obtiene sustrayendo de otro polígono alguna parte poligonal, el área del primer polígono es la diferencia entre la del polígono total y el área de las partes suprimidas.

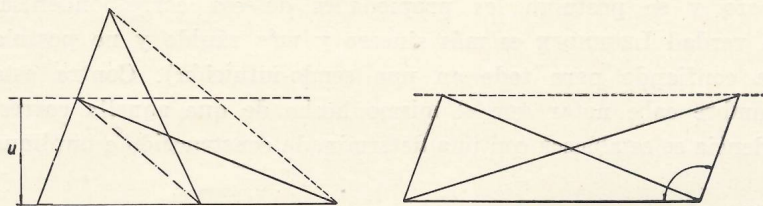
⁽¹⁾ Como aclaración, queremos ir en contra a una observación que el lector podría proponer; esto es que la crítica de DE ZOLT recordada al final del n. 7 y que, con la demostración anterior hemos dicho de descartar, solo parece haberse desplazado de las áreas a los segmentos. Así es efectivamente; pero, para los segmentos admitimos como uno de los postulados fundamentales de la geometría que la suma goza de la propiedad conmutativa y asociativa. Este postulado puede enunciarse de varios modos; por ej., admitiendo como idea primitiva la de los dos sentidos de un segmento, se enuncia frecuentemente que un segmento, cuando se lo considera en un sentido, es igual al mismo considerado en el sentido opuesto; se pueden entonces deducir por demostración las aludidas propiedades de la suma. En los 10 años entre la observación de DE ZOLT y las demostraciones de SCHUR y VERONESE se admitió análogamente, para la suma de las áreas un *postulado de DE ZOLT* (según otros de STOLZ) que se admite todavía casi siempre en los tratados elementales, por sencillez didáctica. La demostración reduce pues el postulado de DE ZOLT a otro que, por otras razones, ya se había admitido (y esto solo ya es una ventaja); y lo más importante es que el grado de intuición para la permutabilidad de los segmentos sobre la recta es mucho mayor que tratándose del desplazamiento y composición de figuras sobre el plano.

Tiene ahora sentido tomar como definición de la equivalencia de los polígonos: *Llamamos equivalentes dos polígonos cuando tienen la misma área.* De lo dicho resulta que *polígonos que sean sumas o restas de polígonos equivalentes son equivalentes.* En particular *polígonos que se obtengan por reunión y sustracción de polígonos iguales son equivalentes.*

Además, si dos polígonos son equivalentes, nunca podrá acontecer que por medio de una sucesión de operaciones de descomposición en partes, desplazamiento de estas, adjunción de otros polígonos y sustracción de los mismos, partiendo de uno de ellos se llegue a construir un nuevo polígono contenido como parte en el otro. Se contesta así en modo definitivo y con la negativa a la pregunta si, dando a la equivalencia el sentido ordinario de la geometría elemental (por suma o por suma y resta) pueda un polígono resultar equivalente a una parte del mismo.

11. — Vamos a demostrar qué recíprocamente, *si dos polígonos son equivalentes en el sentido de tener la misma área, se puede determinar una sucesión de un número finito de operaciones consistentes en descomposición en partes, adjunción de polígonos y sustracción de los mismos, reunión, la cual lleva de uno al otro polígono.*

Notamos en efecto primero que un triángulo dado se transforma, por medio de una sucesión de dichas operaciones en otro de altura fija u (y, necesariamente, la base correspondiente igual al área). Con una segunda operación análoga se obtiene que un ángulo de la base sea uno asignado como se ve inmediatamente en las figuras siguientes:



Si ahora consideramos un polígono cualquiera, descompóngaselo en triángulos; por medio de las operaciones indicadas, estos triángulos se transforman en otros de altura constante u y con ángulos de la base elegidos en modo de poderlos reunir en un triángulo único de la misma altura u ; la base de este triángulo será el área

misma del polígono. Si son dados dos polígonos equivalentes por tener, según la definición dada, igual área, se podrán luego disponer las cosas en modo que los dos triángulos obtenidos con esta construcción sean iguales. Para realizar la proposición enunciada bastará, partiendo de uno de los polígonos llegar hasta el triángulo correspondiente y luego recorrer en orden inverso las operaciones de la otra transformación.

Teniendo presente que, en el caso de que los segmentos realicen el postulado de ARQUÍMEDES, la construcción recordada en el n. 10 asegura que paralelógramos (y por consecuencia triángulos) ⁽¹⁾ equivalentes de igual base se transforman uno en otro por sola descomposición en partes (equivalencia por suma) resulta también de la anterior demostración que entonces polígonos equivalentes cualesquiera son equivalentes por sola suma.

Al contrario, al no realizarse para los segmentos el postulado de ARQUÍMEDES, es posible mostrar que polígonos (y tan solo paralelógramos) pueden tener igual área sin ser equivalentes por sola suma. No sería conveniente entrar aquí en tales particulares ⁽²⁾.

12. — Concluiremos con una observación de carácter didáctico.

El procedimiento consistente en hacer corresponder a cada polígono un segmento-área aún antes de haber acabado una teoría de la equivalencia geométrica podría hacer pensar en una forma de exposición de la teoría de la equivalencia que en la sustancia es la misma adoptada por LEGENDRE y que parece hoy encontrar nuevamente algún favor. Admitiendo la aritmética como anterior a la geometría, se *postula* que a cada polígono corresponda un número y se postulan las propiedades de esa correspondencia. (En verdad LEGENDRE es más sincero y más rápido y no postula nada confiando para todo en una pseudo-intuición). Contra esta costumbre cabe notar que el mismo hecho de que aquella correspondencia se establezca con una determinada construcción e implique

(1) Recuérdese que un triángulo se transforma en paralelogramo de altura mitad con un simple transporte del triángulo cortado en él por la recta que une los puntos medios de los lados.

(2) Ver por ej. los citados *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la Geometría) de HILBERT: citamos la primera edición de 1899; recordamos, por comodidad del lector, que además de esta primera edición, otras siete hizo el autor, y el libro fué traducido en varios idiomas.

una demostración de invariancia indica la inconveniencia del procedimiento, porque indica que las postulaciones podrían ser contradictorias, si no alcanzara dicha construcción y dicha demostración. La razón es aún más profunda; como hemos notado, los números reales constituyen un continuo lineal, idéntico en substancia con la propia recta o, si se quiere ser más preciso, con la abstracción de cierto grupo de propiedades axiomáticas de la recta. Si uno quisiera aplicar a las áreas un procedimiento análogo tendría que encontrarse delante de una nueva concepción que nada aseguraría a priori que fuese idéntica a la de los números reales.

El procedimiento de definir la equivalencia por propiedades geométricas de composición y de descomposición plantea el problema de asegurar que un polígono no puede resultar equivalente a una parte suya; la cosa es cierta, como resulta de los desarrollos de los n.ºs. 10-11, pero la demostración se considera ordinariamente demasiado escondida para que sea didácticamente conveniente. Creemos que, cuando la matemática no está en condición de resolver los problemas, ya hace mucho en proponerlos; siempre habrá ventaja sobre el engaño de la falsa intuición.

B. LEVI.

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS

DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$ñ
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y) ; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Año 1940 - Vol. II.	
1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — La noción de « dominio deductivo » como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas ...	1.50
Año 1941 - Vol. III.	
1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos ...	2.50
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremas de la torsión total y curvas-D ...	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota « Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.00
Año 1942 - Vol. IV.	
1 - M. COTLAR — Estudio de las funciones holomorfas univalentes sobre el contorno en un conjunto de medida positiva	2.00
2 - A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ — Algunas aplicaciones de la integral de Stieltejes al análisis y al Cálculo de Probabilidades	5.00