

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO QUINTO - FASC. 1



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1945

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

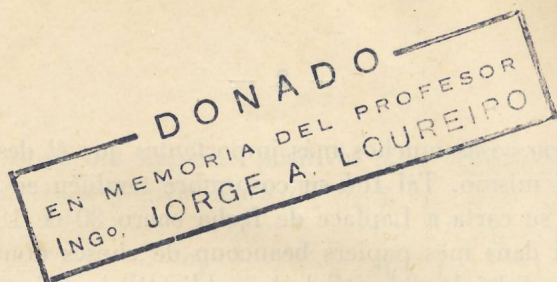
Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	PÁG.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (parte primera) (J. V. USPENSKY)	1
Un teorema sobre representación conforme (LUIS A. SANTALÓ) . . .	29
Acerca de la sucesión $\{\cos n_k x\}$, $n_k \rightarrow \infty$ (RALPH P. BOAS, Jr.) . . .	41
Breve nota bibliográfica sobre el problema nº 50 (PEDRO E. ZADUNAISKY)	42
Ejercicios y problemas (Soluciones)	47
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	55
Cuestiones	56



SOBRE LAS MEDIAS ARITMETICO-GEOMETRICAS DE GAUSS

POR

J. V. USPENSKY

1.-En tiempos ya bastante lejanos de nuestra época y precisamente entre 1795 y 1801 el gran matemático alemán Gauss, saliendo de un algoritmo simple y muy natural, desarrolló una extensa teoría que liga dicho algoritmo con las funciones elípticas y modulares descubiertas por el mismo Gauss casi en el mismo tiempo, adelantándose así en muchas décadas al desarrollo histórico de la ciencia matemática. Mas, lo que puede parecernos muy curioso a nosotros acostumbrados a la publicación rápida tan común en nuestros tiempos, Gauss nada hizo conocer de sus hondas indagaciones, tanto sobre funciones elípticas como sobre el algoritmo de las medias aritmético-geométricas y funciones modulares, fuera de la aplicación de dichas medias al cálculo aproximado de las integrales elípticas, argumento que no había sido desconocido antes a Lagrange y a Legendre. Todo lo que nos queda de las investigaciones de Gauss sobre las medias aritmético-geométricas son fragmentos contenidos en sus papeles póstumos, algunos bastante largos y con deducción completa, otros noticias cortas con enunciación de resultados, pero sin indicación de la vía que pudiera conducir a ellos. Que lástima! Y cuánto habría adelantado la ciencia matemática si Gauss hubiera publicado sus investigaciones sin demora, y cuanto nosotros, sus descendientes y admiradores, gozaríamos de su propia exposición maestra!

No podemos adivinar porqué Gauss dejó de publicar descubrimientos tan importantes y lo único que podemos sospechar es que él mismo veía claramente la vinculación de lo que era

conocido con cosas muchos más importantes que él deseaba aclarar para sí mismo. Tal fué su costumbre también en otras ocasiones. En su carta a Laplace de fecha enero 30 de 1812, Gauss dice: «J'ai dans mes papiers beaucoup de choses dont peut-être je pourrai perdre la priorité de la publication: mais soit, j'aime mieux de faire mûrir les choses». A pesar de que nos falta la completa exposición, es posible con la ayuda de los fragmentos que se hallan en los papeles de Gauss, desarrollar una teoría más o menos completa de las medias aritmético-geométricas, lo que será el objeto del presente estudio.

No reclamamos nada para nosotros y lo único que deseamos es presentar, siguiendo fielmente a Gauss y supliendo lo que hace falta en sus apuntes, una teoría no muy conocida, útil y hermosísima, a los jóvenes matemáticos de los países hispano-americanos para que vean que verdaderas joyas han salido de las manos de los clásicos y cuanto ellas contrastan con cosas estériles tan en boga en nuestros tiempos.

La presente memoria está dividida en tres partes. En la primera trataremos de las medias aritmético-geométricas sólo para números reales positivos, luego en la segunda consideraremos el mismo algoritmo para los números complejos y en la tercera veremos la relación que tiene este algoritmo con las funciones modulares.

Hay que advertir que en la literatura existen exposiciones semejantes. Ver por ejemplo una memoria de von David⁽¹⁾ donde el lector hallará otras referencias. Pero creemos que nuestra exposición es más conforme al espíritu de los fragmentos dejados por Gauss.

PARTE PRIMERA

2. - Sean a y b dos números positivos. Tomando sus medias aritmética y geométrica

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad , \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

(¹) L. VON DAVID. *Arithmetisch-geometrische Mittel und Modulfunktionen* Journ. für die reine und angewandte Mathematik, 159 (1928), p. 154-170.

tendremos otros dos números positivos a_1 y b_1 . Luego, tomando medias aritmética y geométrica de a_1 y b_1

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

tendremos un nuevo par de números positivos a_2 y b_2 y continuando así indefinidamente formaremos dos sucesiones de números positivos

$$a, a_1, a_2, \dots \quad (1)$$

$$b, b_1, b_2, \dots \quad (2)$$

los términos de las cuales obedecen a la ley general

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \quad (3)$$

Como el algoritmo es simétrico respecto a los números a y b podemos, sin restricción alguna de la generalidad, suponer $a \geq b$. Entonces las sucesiones (1) y (2) serán decreciente y creciente respectivamente y tendremos además $a_n \geq b_n$. En efecto, de (3) sigue inmediatamente

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geq 0 \quad (4)$$

de modo que $a_{n+1} \geq b_{n+1}$ cualquiera que sea n . Además

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0; \quad b_{n+1} - b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \sqrt{b_n} \geq 0,$$

que demuestra lo enunciado. De (4) se deduce

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} < \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \frac{a_n - b_n}{2} < \frac{a_n - b_n}{2},$$

de donde concluimos que

$$a_n - b_n < \frac{a - b}{2^n}$$

y así la diferencia $a_n - b_n$ tiende a cero al crecer n indefinidamente. Se sigue que las sucesiones (1) y (2) tienden al mismo límite al cual llamamos la *media aritmético-geométrica* de a y b ; la designaremos con el signo $M(a, b)$ de manera que

$$M(a, b) = \lim a_n = \lim b_n \quad (n \rightarrow \infty).$$

De la definición misma se percibe inmediatamente que

$$1^\circ \quad M(b, a) = M(a, b)$$

$$2^\circ \quad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$$

cualquiera que sea el número positivo λ .

$$3^\circ \quad M(a, b) = M(a_1, b_1) = M(a_2, b_2) = \dots$$

$$4^\circ \quad a_n > M(a, b) > b_n.$$

Esta última desigualdad nos permite juzgar con qué aproximación podemos calcular $M(a, b)$ deteniéndonos en los términos a_n y b_n .

Conviene introducir también las cantidades auxiliares positivas c, c_1, c_2 , poniendo en general

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2.$$

De las fórmulas (3) resulta

$$c_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

para $n \geq 1$ y como

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

tendremos

$$4 a_n c_n = c_{n-1}^2, \quad (5)$$

donde se ve que la convergencia del algoritmo es rapidísima a menos que la razón $b : a$ sea demasiado pequeña. Sean por

ejemplo $a=10$, $b=1$. Entonces ayudándonos de la máquina para calcular hallamos con muy poca labor reteniendo sólo doce cifras decimales

$$\begin{aligned} a_1 &= 5,5 & b_1 &= 3,162277660168 \\ a_2 &= 4,331138830084 & b_2 &= 4,170434885108 \\ a_3 &= 4,250786857596 & b_3 &= 4,250027349232 \\ a_4 &= 4,250407103414 & b_4 &= 4,250407086449 \\ a_5 &= 4,250407094932 = b_5. \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor aproximado de $M(10,1)$ con doce cifras decimales es

$$M(10,1) = 4,25040709432.$$

Para las cantidades $c_1, c_2, c_3, \dots$ que necesitaremos a continuación encontramos los valores siguientes

$$\begin{aligned} c_1 &= 4,5 \\ c_2 &= 1,168861169916 \\ c_3 &= 0,080351972488 \\ c_4 &= 0,000379754182 \\ c_5 &= 0,000000008482. \end{aligned}$$

3. - Considerando a y b como variables positivas su media aritmético-geométrica $M(a,b)$ será una función definida para valores positivos de a y b . Pero podemos extender la definición al caso en que una u otra variable (o ambas) toman el valor cero. En efecto en caso que $b=0$ hallamos inmediatamente

$$a_n = \frac{a}{2^n}, \quad b = 0,$$

y por consiguiente

$$M(a,0) = M(0,a) = 0.$$

Así la función $M(a,b)$ puede considerarse definida para todos los $a \geq 0$, $b \geq 0$. Sean a y b acotadas superiormente por

un número positivo ρ . Entonces de las desigualdades del párrafo precedente sigue que

$$|a_n - M(a, b)| < \frac{\rho}{2^n}, \quad |b_n - M(a, b)| < \frac{\rho}{2^n},$$

donde se ve que a_n y b_n tienden uniformemente al límite $M(a, b)$ en tanto que $0 \leq a < \rho$, $0 \leq b < \rho$, y, como a_n y b_n para un valor dado de n son funciones continuas de a y b , será $M(a, b)$ una función continua de a y b en el dominio de su definición. Siguiendo a Gauss vamos a demostrar que ella es también diferenciable.

En tanto que a y b sean positivos serán a_n y b_n evidentemente diferenciables cualquiera que sea n . Tomando diferenciales logarítmicas de ambos miembros, de las relaciones

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

resulta

$$\frac{da_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{da_n + db_n}{2a_{n+1}}, \quad \frac{db_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{da_n}{a_n} + \frac{db_n}{b_n} \right),$$

de donde, poniendo por brevedad,

$$\frac{da_n}{a_n} + \frac{db_n}{b_n} = f_n, \quad \frac{da_n}{a_n} - \frac{db_n}{b_n} = g_n,$$

resulta

$$g_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2a_{n+1}} g_n \quad (6)$$

$$f_{n+1} = f_n + g_{n+1}. \quad (7)$$

Tomando en (6) sucesivamente $n=0, 1, 2, \dots$, se deduce fácilmente

$$g_n = k_n \frac{g_0}{2^n}$$

donde

$$k_n = \frac{a-a_1}{a_1} \cdot \frac{a_1-a_2}{a_2} \dots \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}.$$

Por ser

$$0 < \frac{a_i-a_{i+1}}{a_{i+1}} = \frac{a_i-b_i}{a_i+b_i} < 1,$$

para $i=1, 2, 3, \dots$, se sigue que la cantidad k_n será siempre < 1 positiva.

Ahora con ayuda de (7) hallamos

$$f_n = f_0 + g_0 \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \dots + \frac{k_n}{2^n} \right)$$

de donde y de la expresión precedente para g_n , teniendo en cuenta el significado de f_n, g_n, f_0, g_0 logramos por fin

$$\frac{da_n}{a_n} = P_n \frac{da}{a} + Q_n \frac{db}{b}, \quad (8)$$

poniendo

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{k_1}{2^2} + \frac{k_2}{2^3} + \dots + \frac{k_n}{2^{n+1}} + \frac{k_n}{2^{n+1}}$$

$$Q_n = \frac{1}{2} - \frac{k_1}{2^2} - \frac{k_2}{2^3} - \dots - \frac{k_n}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^{n+1}}.$$

Por ser $0 < |k_i| < 1$ para $a > 0, b > 0$ es claro que P_n y Q_n convergen uniformemente a límites

$$P = \frac{1}{2} + \frac{k_1}{2^2} + \frac{k_2}{2^3} + \dots$$

$$Q = \frac{1}{2} - \frac{k_1}{2^2} - \frac{k_2}{2^3} + \dots$$

que serán funciones continuas de a y b siempre que $a > 0, b > 0$.

Sea ahora b constante y solo a variable. Integrando (8) entre límites a_0 y a donde a_0 es un número positivo fijo y a

otro número positivo cualquiera tenemos

$$\log a_n - (\log a_n)_0 = \int_{a_0}^a P_n \frac{da}{a}.$$

Aquí al crecer n indefinidamente el primer miembro tiende al límite

$$\log M(a, b) - \log M(a_0, b)$$

mientras el segundo miembro, dado que P_n tiende uniformemente a P , tiene por límite

$$\int_{a_0}^a P \frac{da}{a},$$

de modo que

$$\log M(a, b) - \log M(a_0, b) = \int_{a_0}^a P \frac{da}{a}.$$

Como la derivada respecto la variable a de la integral del segundo miembro existe y vale P/a , la derivada de $\log M(a, b)$ existirá también y valdrá

$$\frac{\partial \log M(a, b)}{\partial a} = \frac{P}{a}.$$

De la misma manera se halla

$$\frac{\partial \log M(a, b)}{\partial b} = \frac{Q}{b}.$$

y por fin

$$\frac{dM(a, b)}{M(a, b)} = P \frac{da}{a} + Q \frac{db}{b}. \quad (9)$$

Las series que expresan P y Q pueden presentarse bajo

una forma más sencilla. Como

$$\frac{a_i - a_{i+1}}{a_{i+1}} = \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i^2 - b_i^2} = 4 \frac{c_{i+1}^2}{c_i^2},$$

resulta para k_n una expresión muy sencilla

$$k_n = 4^n \frac{c_1^2}{c^2} \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2} \dots \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} = 4^n \frac{c_n^2}{c^2}$$

y por lo tanto tendremos las series elegantes y de convergencia rapidísima

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2c^2} (c^2 + 2c_1^2 + 4c_2^2 + 8c_3^2 + \dots) \\ Q &= \frac{1}{2c^2} (c^2 - 2c_1^2 - 4c_2^2 - 8c_3^2 - \dots) \end{aligned} \quad (10)$$

pero podemos hacer uso de ellas sólo cuando $a \neq b$.

4. - Llegamos al punto capital de la teoría: a la deducción de la ecuación diferencial de segundo orden cuyas soluciones dependen de las medias aritmético-geométricas.

El procedimiento de Gauss para establecer esta ecuación es algo complicado pero ingeniosísimo. Aprovechando la expresión simplificada para k_n tenemos

$$g_n = 2^n \frac{c_n^2}{c^2} g_0$$

o bien

$$\frac{da_n}{a_n} - \frac{db_n}{b_n} = 2^n \frac{c_n^2}{c^2} \left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b} \right),$$

lo que se escribe también así

$$\frac{1}{2^n c_n^2} d \log \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{c^2} d \log \frac{a}{b} = \Delta.$$

Siendo

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2,$$

hallamos fácilmente

$$d \log \frac{c_n}{a_n} = \frac{b_n^2 da_n - a_n b_n db_n}{a_n c_n^2}$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{b_n^2} d \log \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{c_n^2} d \log \frac{a_n}{b_n}.$$

De la misma manera se obtiene

$$\frac{1}{a_n^2} d \log \frac{c_n}{b_n} = \frac{1}{c_n^2} d \log \frac{a_n}{b_n}$$

y por consiguiente

$$\Lambda = \frac{1}{2^n a_n^2} d \log \frac{c_n}{b_n} = \frac{1}{2^n b_n^2} d \log \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{2^n c_n^2} d \log \frac{a_n}{b_n}.$$

Tomando ahora la diferencial logarítmica de Λ resulta

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda} = -2 d \log c_n + \frac{d d \log \frac{a_n}{b_n}}{d \log \frac{a_n}{b_n}}$$

y esto equivale a

$$\frac{1}{\Lambda} d \log \frac{a_n}{b_n} d \log c_n = \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log \frac{a_n}{b_n} \right). \quad (11)$$

Un cálculo en todo análogo conduce a otras dos ecuaciones semejantes

$$\frac{1}{\Lambda} d \log \frac{c_n}{b_n} d \log a_n = \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log \frac{c_n}{b_n} \right) \quad (12)$$

$$\frac{1}{\Lambda} d \log \frac{c_n}{a_n} d \log b_n = \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log \frac{c_n}{a_n} \right). \quad (13)$$

De las ecuaciones (11) y (12) se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log c_n - \frac{1}{\Lambda} d \log b_n d \log c_n &= \\ &= \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n c_n \right) - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log b_n c_n \right) \\ \frac{1}{\Lambda} d \log c_n d \log a_n - \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log b_n &= \\ &= \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n c_n \right) - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n b_n \right) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log c_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n c_n \right) &= \\ &= \frac{1}{\Lambda} d \log b_n d \log c_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log b_n c_n \right) \\ \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log c_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n c_n \right) &= \\ &= \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log b_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n b_n \right) \end{aligned}$$

de modo que poniendo

$$D_n = \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log c_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n c_n \right) \quad (14)$$

tendremos también

$$D_n = \frac{1}{\Lambda} d \log b_n d \log c_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log b_n c_n \right) \quad (15)$$

$$D_n = \frac{1}{\Lambda} d \log a_n d \log b_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Lambda} d \log a_n b_n \right). \quad (16)$$

Ahora vamos a demostrar que D_n no cambia su valor cambiando n en $n+1$ y por tanto es independiente de n . Tomando

la suma de (14) y (15) y teniendo en cuenta que

$$b_{n+1}^2 = a_n b_n$$

hallamos

$$D_n = \frac{1}{\Delta} d \log b_{n+1} d \log c_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Delta} d \log b_{n+1} c_n \right).$$

Pero como (ver (5), § 2)

$$c_n^2 = 4 a_{n+1} c_{n+1}$$

tenemos

$$d \log c_n = \frac{1}{2} d \log a_{n+1} + \frac{1}{2} d \log c_{n+1}$$

lo que, sustituido en la expresión precedente de D_n y teniendo en cuenta (15), (16) donde n se cambia en $n+1$, nos dará

$$D_n = D_{n+1}.$$

De tal manera logramos en fin la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} d \log a_n d \log b_n - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Delta} d \log a_n b_n \right) = \\ = \frac{1}{\Delta} d \log a d \log b - \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\Delta} d \log ab \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Hasta este punto el razonamiento era puramente formal. Ahora supongamos que a_n y b_n sean funciones positivas de una variable x y que no se verifique $a=b$ para ningún valor de x que consideramos. Supongamos también que

$$\Delta = \frac{1}{c^2} d \log \frac{a}{b} = \frac{dx}{\Omega}$$

no se anula. Entonces integrando (17) entre los límites x_0 y x , siendo x_0 un número fijo, se encuentra

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \Omega \frac{d \log a_n}{dx} \frac{d \log b_n}{dx} dx - \frac{1}{2} \Omega \frac{d \log a_n b_n}{dx} + \frac{1}{2} \left(\Omega \frac{d \log a_n b_n}{dx} \right)_0 = \\ = \int_{x_0}^x \Omega \frac{d \log a}{dx} \frac{d \log b}{dx} dx - \frac{1}{2} \Omega \frac{d \log ab}{dx} + \frac{1}{2} \left(\Omega \frac{d \log ab}{dx} \right)_0. \end{aligned}$$

Por lo que ha sido demostrado en el párrafo 3,

$$\frac{d \log a_n}{dx} = \frac{P_n}{a} \frac{da}{dx} + \frac{Q_n}{b} \frac{db}{dx}$$

tiende al límite

$$\frac{P}{a} \frac{da}{dx} + \frac{Q}{b} \frac{db}{dx} = \frac{d \log M(a,b)}{dx}$$

uniformemente en x y lo mismo vale para

$$\frac{d \log b_n}{dx}$$

de modo que tendremos en el límite

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \Omega \left(\frac{d \log M(a,b)}{dx} \right)^2 dx - \Omega \frac{d \log M(a,b)}{dx} + \left(\Omega \frac{d \log M(a,b)}{dx} \right)_0 = \\ = \int_{x_0}^x \Omega \frac{d \log a}{dx} \frac{d \log b}{dx} dx - \frac{1}{2} \Omega \frac{d \log ab}{dx} + \frac{1}{2} \left(\Omega \frac{d \log ab}{dx} \right)_0. \end{aligned}$$

Ahora basta tomar la derivada con respecto a x para hallar la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \Omega \left(\frac{d \log M(a,b)}{dx} \right)^2 - \frac{d}{dx} \left(\Omega \frac{d \log M(a,b)}{dx} \right) = \\ = \Omega \frac{d \log a}{dx} \frac{d \log b}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\Omega \frac{d \log ab}{dx} \right) = A \end{aligned}$$

la que se reduce a la ecuación lineal

$$\Omega \frac{d^2\mu}{dx^2} + \Omega' \frac{d\mu}{dx} - A\mu = 0.$$

poniendo

$$\mu = \frac{1}{M(a,b)}.$$

Sea primero $a=1$, $b=x$ y supongamos $0 < x < 1$. Entonces

$$\Omega = -x(1-x^2), \quad A = -x$$

de modo que

$$\mu = \frac{1}{M(1,x)}.$$

es una solución particular de la ecuación lineal

$$(x-x^3) \frac{d^2\mu}{dx^2} + (1-3x^2) \frac{d\mu}{dx} - x\mu = 0. \quad (18)$$

Sea después $a=1+x$, $b=1-x$ siendo $0 < x < 1$. Entonces

$$\Omega = 2x(1-x^2), \quad A = 2x$$

y la función

$$\mu = \frac{1}{M(1+x, 1-x)}.$$

satisface la misma ecuación (18). Por cuanto $M(1,1)=1$, $M(1,0)=0$ las dos soluciones

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} \quad \frac{1}{M(1,x)}$$

no pueden ser proporcionales; por tanto son independiente y cualquier otra solución continua en el intervalo $0 < x < 1$ será de la forma

$$\frac{C}{M(1+x, 1-x)} + \frac{C'}{M(1, x)}$$

con convenientes valores de las constantes C y C' .

5. - Sustituyendo en (18)

$$\mu = \sum a_n x^n$$

e igualando a cero los coeficientes de las distintas potencias de x se encuentra

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$a_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 a_n \quad \text{para } n \text{ par;}$$

es decir que, poniendo $a_0 = 1$, la serie

$$\mu = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^6 + \dots,$$

convergente para $x^2 < 1$, representa una solución continua de (18) en el intervalo $0 < x < 1$.

Por lo dicho

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^6 + \dots = \frac{C}{M(1+x, 1-x)} + \frac{C'}{M(1, x)}$$

con ciertas constantes C y C' . Pero, tendiendo x a cero,

$$\frac{1}{M(1, x)}$$

crece indefinidamente mientras μ tiende a 1; por consiguiente debe ser $C' = 0$; y, como $M(1+x, 1-x) = 1$, para $x = 0$, debe ser además $C = 1$. De tal manera logramos el desarrollo elegantísimo

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \\ + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^6 + \dots$$

que tiene lugar para $-1 < x < 1$. Por la importancia que tiene este desarrollo daremos una segunda deducción, o más bien una verificación también debida a Gauss.

Consideremos la función

$$y = \varphi(x) = x^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^{-5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^{-7} + \dots$$

definida por una serie convergente para $x > 1$. Es fácil verificar que ella satisface a la ecuación diferencial

$$x(x^2 - 1) y'' + (3x^2 - 1) y' + xy = 0.$$

Ahora pongamos

$$x = \frac{t+t^{-1}}{2}, \quad t > 1$$

y consideremos $\varphi(x)$ como una función de t . Entonces ella puede desarrollarse en serie de potencias decrecientes de t , empezando por el término $2t^{-1}$ y por cierto convergente para valores de t bastante grandes. Ella satisface a la ecuación diferencial

$$t^2(t^4 - 1) \frac{d^2 y}{dt^2} + t(3t^4 + 1) \frac{dy}{dt} + (t^4 - 1)y = 0.$$

Buscando como antes soluciones de ésta ecuación en serie de potencias decrecientes de t hallamos que todas ellas son de la forma

$$C(t^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 t^{-5} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 t^{-9} + \dots)$$

con C constante. Para la solución particular que consideramos

debe ser $C=2$ ⁽¹⁾ y como la serie converge para $t>1$ es preciso que

$$\varphi\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = 2(t^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 t^{-5} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 t^{-9} + \dots).$$

Comparando con la anterior expresión de $\varphi(x)$ donde se ponga $x=t^2$, resulta

$$2\varphi(t^2) = t^{-1} \varphi\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right),$$

cualquiera que sea $t>1$. Consideremos ahora la función

$$f(t) = \frac{1}{M(t+1, t-1)};$$

tenemos

$$f\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{M\left(\frac{\left(\frac{1}{2}t + t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}, \frac{\left(\frac{1}{2}t - t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}\right)}$$

y

$$f(t^2) = \frac{1}{M(t^2+1, t^2-1)} = \frac{1}{2tM\left(\frac{t+t^{-1}}{2}, \frac{t-t^{-1}}{2}\right)};$$

pero con

$$a = \frac{\left(\frac{1}{2}t + t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}, \quad b = \frac{\left(\frac{1}{2}t - t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}$$

se obtiene

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{t+t^{-1}}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab} = \frac{t-t^{-1}}{2}$$

⁽¹⁾ Como resulta observando que

$$x\varphi(x) = \mu(x^{-1}) \rightarrow 1 \text{ por } x \rightarrow \infty$$

y, por otro lado,

$$x\varphi(x) = \frac{t+t^{-1}}{2} \varphi\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{t^{-3}}{2} + \dots$$

y por tanto

$$M\left(\frac{t+t^{-1}}{2}, \frac{t-t^{-1}}{2}\right) = M\left(\frac{\left(\frac{1}{t^2}+t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}, \frac{\left(\frac{1}{t^2}-t^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}\right)$$

de donde se ve que

$$2f(t^2) = t^{-1}f\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right)$$

que es la misma ecuación funcional que acabamos de establecer para $\varphi(t)$.

Sea

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = F(x).$$

Entonces

$$F\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = F(t^2)$$

para cada t mayor que 1. Sea ahora

$$t^2 = \frac{t_1+t_1^{-1}}{2}, \quad t_1 = t^2 + \sqrt{t^4 - 1}$$

$$t_1^2 = \frac{t_2+t_2^{-1}}{2}, \quad t_2 = t_1^2 + \sqrt{t_1^4 - 1}$$

$$t_2^2 = \frac{t_3+t_3^{-1}}{2}, \quad t_3 = t_2^2 + \sqrt{t_2^4 - 1};$$

$t_1 > t^2, t_2 > t_1^2 > t^4, t_3 > t_2^2 > t^8$ son números crecientes indefinidamente. Por otro lado

$$F(x) = F\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = F(t^2) = F\left(\frac{t_1+t_1^{-1}}{2}\right) = F(t_1^2) = \dots = F(t_n^2);$$

Pero, como

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(\xi)} &= \varphi(\xi) \frac{1}{f(\xi)} \\ &= M\left(1 + \frac{1}{\xi}, 1 - \frac{1}{\xi}\right) \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xi^{-2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \xi^{-4} + \dots\right) \end{aligned}$$

tiende al límite 1 creciendo ξ indefinidamente, se ve que

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n^2) = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(x+1, x-1)} &= f(x) = F(x) \varphi(x) \\ &= x^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^{-5} + \dots \end{aligned}$$

para $x > 1$; poniendo $x = y^{-1}$ se deduce

$$\frac{1}{M(1+y, 1-y)} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 y^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 y^4 + \dots$$

para $0 < y < 1$ lo cual queríamos hallar.

6.-Del desarrollo que hemos obtenido se deduce sin dificultad ninguna la famosa expresión debida a Gauss de una integral elíptica completa de la primera especie. Por medio de la integral definida bien conocida

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n},$$

la serie

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \dots = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})}$$

se escribe

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} x^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} x^4 \sin^4 \varphi + \dots\right) d\varphi.$$

Pero

$$1 + \frac{1}{2} x^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} x^4 \sin^4 \varphi + \dots = \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}}$$

y por eso

$$\frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-x^2})} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Tendremos una fórmula más simétrica y elegante poniendo

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{a}{b}, \quad x^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

resulta

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2M(a, b)}. \quad (19)$$

Se ve que el cálculo aproximado de tales integrales que se encuentran a menudo en las aplicaciones se reduce a un cálculo aritmético sencillo y de rápida convergencia.

La integral elíptica completa de segunda especie

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

expresa la longitud de una cuarta parte de la elipse con semiejes a y b . Su cálculo numérico depende de las derivadas de la media aritmético-geométrica y todavía es cómodo aunque un poco más complicado. Tomando la derivada de F respecto a b se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -b \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Pero, puesto por brevedad

$$R = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi,$$

se tiene

$$\int \frac{\sin \varphi \, d \cos \varphi}{R^{3/2}} = \frac{1}{b^2} \int \sin \varphi \, d \frac{\cos \varphi}{R^{1/2}} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{b^2 R^{1/2}} - \frac{1}{b^2} \int \frac{\cos^2 \varphi}{R^{1/2}} \, d \varphi.$$

Por tanto

$$b \frac{\partial F}{\partial b} = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{R^{1/2}} d\varphi = \frac{1}{a^2 - b^2} \int_0^{\pi/2} \frac{b^2 - R}{R^{1/2}} d\varphi,$$

es decir

$$b(a^2 - b^2) \frac{\partial F}{\partial b} = b^2 F - E$$

y

$$E = b^2 F - b(a^2 - b^2) \frac{\partial F}{\partial b}$$

De la fórmula (19) resulta

$$\frac{\partial F}{\partial b} = - \frac{\pi}{2M(a,b)} \frac{\partial \log M(a,b)}{\partial b},$$

lo que, sustituido en la expresión de E , nos da

$$E = \frac{\pi}{2M(a,b)} \left[b^2 + (a^2 - b^2) b \frac{\partial \log M(a,b)}{\partial b} \right]. \quad (20)$$

Ahora, teniendo en cuenta las fórmulas (9) y (10) (ver § 3) donde se sustituye

$$c_1 = \frac{a-b}{2},$$

hallamos la expresión final para E :

$$E = \frac{\pi}{2M(a,b)} \left[\frac{(a+b)^2}{4} - 2c_2^2 - 4c_3^2 - 8c_4^2 - \dots \right] \quad (21)$$

muy provechosa para el cálculo numérico. Por ejemplo, si queremos calcular la longitud de una cuarta parte de la elipse de semiejes $a=10$, $b=1$ (elipse muy aplastada) basta, usando los números del párrafo 2, calcular con la máquina

$$\begin{array}{r} 2c_2^2 = 2,732472 \ 869075 \\ 4c_3^2 = \quad 25825 \ 757931 \\ 8c_4^2 = \quad \quad 1 \ 153706 \\ \hline 2c_2^2 + 4c_3^2 + 8c_4^2 = 2,758299 \ 780712 \end{array}$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} = 30,25$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} - 2c_2^2 - 4c_3^2 - \dots = 27,491700 \ 219288$$

$$\frac{\pi}{2M(10,1)} = 0,369563 \ 736299$$

$$E = 10,15993 \ 54503$$

reteniendo diez cifras decimales.

7. - Sea $E(\varepsilon)$ la longitud del cuarto de la elipse con semi-ejes 1, ε . A consecuencia de (20) tenemos

$$E(\varepsilon) = \left\{ \frac{\pi}{2M(1,\varepsilon)} \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \varepsilon \frac{d \log M(1,\varepsilon)}{d \varepsilon} \right\}$$

o bien

$$(1 - \varepsilon^2) \frac{d}{d \varepsilon} \frac{1}{M(1,\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{M(1,\varepsilon)} - \frac{2E}{\pi \varepsilon}$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden para $\frac{1}{M(1,\varepsilon)}$. Integrándola hallamos

$$\frac{1}{M(1,\varepsilon)} = \frac{C}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{2}{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{E(x) - \sqrt{1-x^2}}{x \sqrt{1-x^2}} dx$$

con cierta constante C . Haciendo aproximar ε a 1 se ve fácilmente que todos los términos salvo el primero tienden a límites finitos, mientras éste crecería indefinidamente si no fuera $C=0$. Por lo tanto

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{M(1,\varepsilon)} = \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^1 \frac{E(x) - \sqrt{1-x^2}}{x \sqrt{1-x^2}} dx.$$

Pero geoméricamente es claro que

$$1 < E(x) < 1 + x$$

y ello significa que la integral

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{E(x) - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

al aproximarse ε a cero tiende al límite finito

$$\int_0^1 \frac{E(x) - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} dx = A.$$

Luego podemos escribir

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{M(1,\varepsilon)} = \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2A}{\pi} + h(\varepsilon)$$

con $h(\varepsilon)$ infinitésimo para ε infinitésimo, y de aquí se deduce fácilmente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(1, \varepsilon) \log \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$$

lo que será de gran provecho en el párrafo que sigue.

8. - Para terminar la primera parte de este estudio vamos a deducir una fórmula que tendrá mucha importancia en lo sucesivo y que tiene puntos de contacto con los cálculos anteriores. Empecemos por demostrar que

$$M(a_n, c_n) = \frac{1}{2^n} M(a, c).$$

En efecto, si aplicamos el algoritmo de las medias aritmético-geométricas empezando con los términos

$$a' = a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b' = c_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2},$$

los términos siguientes serán

$$a'_1 = \frac{a_{n-1}}{2}, b'_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2} = \frac{c_{n-1}}{2};$$

luego

$$M(a_n, c_n) = \frac{1}{2} M(a_{n-1}, c_{n-1})$$

de donde la fórmula mencionada sigue inmediatamente por inducción. De la ecuación

$$c_i^2 = 4 a_{i+1} c_{i+1}$$

se deduce

$$\frac{c_i}{c_{i+1}} = \sqrt{\frac{4a_{i+1}}{c_{i+1}}}, \quad \frac{c_i a_i}{c_{i+1} a_{i+1}} = \frac{4a_i}{c_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}} \sqrt{\frac{4a_{i+1}}{c_{i+1}}}$$

y, tomando logaritmos,

$$\log \frac{4a_i}{c_i} = \log \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{1}{2} \log \frac{4a_{i+1}}{c_{i+1}}$$

Ahora basta multiplicar ambos miembros por

$$\frac{M(a_i, c_i)}{M(a_i, b_i)} = 2 \frac{M(a_{i+1}, c_{i+1})}{M(a_{i+1}, b_{i+1})} = \frac{1}{2^i} \frac{M(a, c)}{M(a, b)}$$

para hallar

$$\frac{M(a_i, c_i)}{M(a_i, b_i)} \log \frac{4a_i}{c_i} = \frac{M(a, c)}{2^i M(a, b)} \log \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{M(a_{i+1}, c_{i+1})}{M(a_{i+1}, b_{i+1})} \log \frac{4a_{i+1}}{c_{i+1}}$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{M(a_{i+1}, c_{i+1})}{M(a_{i+1}, b_{i+1})} \log \frac{4a_{i+1}}{c_{i+1}} - \frac{M(a_i, c_i)}{M(a_i, b_i)} \log \frac{4a_i}{c_i} \\ = - \frac{M(a, c)}{M(a, b)} \frac{1}{2^i} \log \frac{a_i}{a_{i+1}} \end{aligned}$$

y sumando para los valores de i entre un i fijado y $m-1$ ($m > i$)

$$\frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)} \log \frac{4a_m}{c_m} = \frac{M(a, c)}{M(a, b)} \left[\frac{1}{2^i} \log \frac{4a_i}{c_i} - \frac{1}{2^i} \log \frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{1}{2^{i+1}} \log \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} - \dots - \frac{1}{2^{m-1}} \log \frac{a_{m-1}}{a_m} \right].$$

Suponiendo que m crezca indefinidamente y teniendo en cuenta que

$$\lim M(1, \frac{c_m}{a_m}) \log \frac{4a_m}{c_m} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim a_m = M(a, b)$$

mientras $M(a_m, b_m) = M(a, b)$ resultará

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a, c)}{M(a, b)} = \frac{1}{2^i} \log \frac{4a_i}{c_i} - \frac{1}{2^i} \log \frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{1}{2^{i+1}} \log \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} - \dots$$

para i número entero positivo cualquiera. En particular tomando $i=0$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{M(a, b)}{M(a, c)} = \log \frac{4a}{c} - \log \frac{a}{a_1} - \frac{1}{2} \log \frac{a_1}{a_2} - \\ - \frac{1}{4} \log \frac{a_2}{a_3} - \frac{1}{8} \log \frac{a_3}{a_4} - \dots \quad (22) \end{aligned}$$

Por otro lado haciendo crecer i indefinidamente resulta

$$\lim \frac{1}{2^i} \log \frac{4a_i}{c_i} = \frac{\pi}{2} \frac{M(a, b)}{M(a, c)}. \quad (23)$$

Estas son fórmulas importantísimas de las cuales haremos mucho uso en adelante.

Tomando en (22) $a=1$, $b=\sqrt{1-\varepsilon^2}$, $c=\varepsilon$ y haciendo aproximar ε a cero se vé fácilmente que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{M(1, \sqrt{1-\varepsilon^2})}{M(1, \varepsilon)} - \frac{\pi}{2} \log \frac{4}{\varepsilon} \right\} = 0.$$

Teniendo en cuenta que, por una relación anterior se tiene también

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{M(1,\varepsilon)} - \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + A \right) \right\} = 0$$

resulta para la constante A introducida en el párrafo precedente el valor siguiente

$$A = \int_1^0 \frac{E(x) - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \log 4.$$

9.- Cuando la razón $b:a$ es muy pequeña la convergencia del algoritmo aplicado a los números a, b no será bastante rápida y al contrario será rapidísima la del algoritmo aplicado a los números a, c . Sean

$$\begin{aligned} A &= a, \quad B = c, \quad C = b \\ A_1 &, \quad B_1, \quad C_1 = \sqrt{A_1^2 - B_1^2} \\ A_2 &, \quad B_2, \quad C_2 = \sqrt{A_2^2 - B_2^2} \end{aligned}$$

términos del nuevo algoritmo. Cambiando b y c se deduce de la fórmula (22)

$$\frac{\pi}{2M(a,b)} = \frac{1}{M(a,c)} \left[\log \frac{4A}{b} - \frac{1}{2} \log \frac{A_1}{A_2} - \frac{1}{4} \log \frac{A_2}{A_3} - \dots \right] \quad (24)$$

lo que proporciona un medio excelente para calcular la integral elíptica completa de primera especie, puesto que la serie en corchetes converge rápidamente para pequeños valores de la razón $b:a$ y bastan muy pocos términos para alcanzar gran aproximación.

Podemos también transformar la fórmula (21) que sirve para calcular la integral elíptica completa de segunda especie haciendo uso de un teorema que Gauss transcribe repetidas veces y al cual él llama *Theorema elegantissimum*.

En el párrafo 4 hemos obtenido la fórmula

$$\frac{1}{2^n b_n^2} d \log \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{c^2} d \log \frac{a}{b}.$$

Poniendo

$$\omega_n = M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right) \log \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{a_n} M(a_n, c_n) \log \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{2^n a_n} M(a, c) \log \frac{a_n}{c_n}.$$

la podemos escribir

$$d\left(\frac{a_n}{M(a, c)} \omega_n\right) = -\frac{b_n^2}{c^2} d \log \frac{a}{b}.$$

Sean solo b y c variables pero

$$b^2 + c^2 = a^2$$

constante. Integrando la fórmula precedente entre los límites b_0 y b tenemos

$$\frac{a_n}{M(a, c)} \omega_n - \left(\frac{a_n}{M(a, c)} \omega_n\right)_0 = - \int_{b_0}^b \frac{b_n^2}{c^2} d \log \frac{a}{b}$$

donde, haciendo crecer n indefinidamente y recordando que

$$\lim \omega_n = \frac{\pi}{2}$$

hallamos

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a, b)}{M(a, c)} + \text{const.} = - \int_{b_0}^b \frac{M(a, b)^2}{c^2} d \log \frac{a}{b}$$

y después de diferenciar respecto a b

$$\frac{\pi}{2} d \frac{M(a, b)}{M(a, c)} = - \frac{M(a, b)^2}{c^2} d \log \frac{a}{b}$$

o bien

$$d \log \frac{M(a, b)}{M(a, c)} = - \frac{2}{\pi c^2} M(a, b) M(a, c) d \log \frac{a}{b}.$$

Teniendo en cuenta que

$$b \, d b + c \, d c = 0$$

podemos efectuar las derivaciones y obtenemos el «Theorema elegantissimum» :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial \log M(a, b)}{\partial b} + \frac{1}{c} \frac{\partial \log M(a, c)}{\partial c} = \frac{2}{\pi b^2 c^2} M(a, b) M(a, c)$$

del cual se deduce por medio de las fórmulas (10)

$$\begin{aligned} c_1^2 + 2 c_2^2 + 4 c_3^2 + \dots + C_1^2 + 2 C_2^2 + 4 C_3^2 + \dots \\ = \frac{a^2}{2} - \frac{2}{\pi} M(a, b) M(a, c) . \end{aligned}$$

Ahora eliminando la suma

$$c_2^2 + 2 c_3^2 + 4 c_4^2 + \dots$$

de la fórmula (21) logramos por fin la expresión deseada de E :

$$E = M(a, c) + \frac{\pi}{2M(a, b)} \left[\frac{(a-c)^2 + 2b^2}{4} + 2 C_2^2 + 4 C_3^2 + \dots \right] \quad (25)$$

de convergencia rapidísima en el caso de que sea pequeña la razón $b : a$. Aplicando las fórmulas (24) y (25) al caso $a=10$, $b=1$ hallamos los mismos números que antes pero con mucho menos trabajo.

STANFORD UNIVERSITY (CALIFORNIA, U. S. A.).

(siguen las partes II y III)

UN TEOREMA SOBRE REPRESENTACION CONFORME

Por

LUIS A. SANTALÓ

1. *Introducción.* — Supongamos una correspondencia entre los puntos del plano x,y y los del plano X,Y definida por las ecuaciones

$$X=X(x,y), \quad Y=Y(x,y) \quad (1.1)$$

donde las x,y y las X,Y son coordenadas cartesianas rectangulares.

Las ecuaciones (1.1) definen una transformación del plano x,y en el X,Y . Supondremos que las funciones $X(x,y)$, $Y(x,y)$, que definen la transformación, admiten las derivadas parciales de primero y segundo orden, siendo estas últimas continuas. De esta manera, a una curva del plano x,y que tenga radio de curvatura determinado en uno de sus puntos, le corresponderá otra curva también con radio de curvatura determinado en el punto homólogo.

Cuando el ángulo que forman entre sí dos direcciones cualesquiera del plano x,y es igual al que forman las direcciones transformadas en el plano X,Y se dice abreviadamente que la transformación «conserva los ángulos» o que es *conforme*.

Las condiciones necesarias y suficientes para que la transformación (1.1) sea conforme se sabe que son⁽¹⁾

$$X_x^2 + Y_x^2 = X_y^2 + Y_y^2, \quad X_x X_y + Y_x Y_y = 0. \quad (1.2)$$

⁽¹⁾ Ver por ej., E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, tomo I, (5ª Ed.), pág. 642.

De estas ecuaciones se deduce que se verifica

$$X_x = Y_y, \quad X_y = -Y_x \quad (1.3)$$

o bien

$$X_x = -Y_y, \quad X_y = Y_x. \quad (1.4)$$

Para que la correspondencia entre los puntos de los entornos de dos puntos homólogos P y P' sea biunívoca, el jacobiano de (1.1) para el punto P debe ser distinto de cero, lo cual, según (1.3) o (1.4) equivale a las condiciones

$$X_x^2 + X_y^2 \neq 0, \quad Y_x^2 + Y_y^2 \neq 0. \quad (1.5)$$

Como las ecuaciones (1.4) se deducen de las (1.3) con solo cambiar Y en $-Y$, en todo lo que sigue vamos a suponer que se cumplen las condiciones (1.3). El caso en que las ecuaciones que tuvieran lugar entre las funciones (1.1) que definen la transformación conforme, fueran las (1.4), se reduciría al anterior por una simetría del plano X, Y respecto el eje X y todas las conclusiones que vamos a obtener subsistirían igualmente.

De (1.2) y (1.3) se deducen las siguientes relaciones que más adelante utilizaremos

$$X_{xx} + X_{yy} = 0, \quad Y_{xx} + Y_{yy} = 0. \quad (1.6)$$

2. *Enunciado del teorema.* — Supongamos una transformación conforme definida por las ecuaciones (1.1) que cumplen las condiciones mencionadas en el n.º 1. Sea un punto P del plano x, y y sea P' el punto correspondiente del plano X, Y .

Consideremos una curva cualquiera γ del plano x, y que pase por P y tenga en este punto curvatura determinada; sea Q el centro de curvatura de γ en el punto P . La curva γ' transformada de γ por la transformación (1.1) tendrá un centro de curvatura Q' . El teorema principal que vamos a demostrar en esta nota es el siguiente:

La correspondencia entre los puntos Q , centros de curvatura correspondientes al punto P de las curvas γ del plano x, y que pasan por este punto, y los puntos Q' , centros de curvatura

de las curvas transformadas γ' del plano X,Y , correspondientes al punto P' transformado del P , es una proyectividad entre los planos x,y y X,Y .

Una vez demostrado este teorema, deduciremos de él algunas consecuencias.

3. *Demostración.* — Sin restringir la generalidad podemos suponer que el punto P es el origen ($x=0, y=0$) del plano x,y y que el punto transformado P' es el origen del plano X,Y .

Supongamos una curva γ definida por las ecuaciones paramétricas

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad (3.1)$$

que pase por el origen (es decir, para $t=0$, es $x=y=0$). Su curvatura en el origen vale

$$\frac{1}{r} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (3.2)$$

donde los acentos indican derivadas tomadas en el origen $t=0$.

Llamando ϑ al ángulo que forma la tangente a la curva en el origen con el eje x , se tiene

$$\tan \vartheta = \frac{y'}{x'} \quad (3.3)$$

y las coordenadas ξ, η del centro de curvatura de la curva (3.1) en el origen serán

$$\begin{aligned} \xi &= -r \sin \vartheta = -r \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ \eta &= r \cos \vartheta = r \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La curva transformada de la (3.1) tiene por ecuaciones paramétricas

$$X=X(x(t), y(t)), \quad Y=Y(x(t), y(t)) \quad (3.5)$$

siendo, por hipótesis $X=0$, $Y=0$ para $t=0$. Para hallar las coordenadas de su centro de curvatura correspondiente al origen $X=0$, $Y=0$, aplicaremos las fórmulas (3.4). Para ello se observa que

$$\begin{aligned} X' &= X_x x' + X_y y' \\ X'' &= X_{xx} x'^2 + 2X_{xy} x' y' + X_{yy} y'^2 + X_x x'' + X_y y'' \\ Y' &= Y_x x' + Y_y y' \\ Y'' &= Y_{xx} x'^2 + 2Y_{xy} x' y' + Y_{yy} y'^2 + Y_x x'' + Y_y y''. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De aquí se deduce, teniendo en cuenta (1.2)

$$X'^2 + Y'^2 = H(x'^2 + y'^2) \quad (3.7)$$

habiendo puesto, para abreviar,

$$H = X_x^2 + Y_x^2 = X_y^2 + Y_y^2. \quad (3.8)$$

y siendo, por tanto, según (1.5) y (1.3), $H \neq 0$.

Además, verificando operaciones y teniendo en cuenta las relaciones (1.3), se tiene

$$\begin{aligned} X'Y'' - X''Y' &= (X_{xx}X_y - X_xX_{xy})(x'^2 + y'^2)x' \\ &\quad + (X_yX_{xy} - X_xX_{yy})(x'^2 + y'^2)y' \\ &\quad + H(x'y'' - x''y'). \end{aligned} \quad (3.9)$$

De (3.7) y (3.9) aplicando (3.4) se obtiene que las coordenadas del centro de curvatura de la curva transformada de (3.1) son

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{Y'(X'^2 + Y'^2)}{X'Y'' - X''Y'} = \frac{m\xi - n\eta}{A\xi + B\eta + H} \\ \eta_1 &= \frac{X'(X'^2 + Y'^2)}{X'Y'' - X''Y'} = \frac{n\xi + m\eta}{A\xi + B\eta + H} \end{aligned} \quad (3.10)$$

habiendo puesto

$$m = HY_y = HX_x, \quad n = HY_x = -HX_y \quad (3.11)$$

$$A = X_y X_{xy} - X_x X_{yy}, \quad B = X_y X_{xx} - X_x X_{xy}.$$

Todos estos valores se refieren al punto $t=0$ ($x=0, y=0$).

Los coeficientes m, n, A, B, H son constantes que dependen de las funciones $X(x, y), Y(x, y)$ que definen la transformación (1.1) pero no de la curva particular $x=x(t), y=y(t)$ que se transforma. Fijado el punto $x=0, y=0$ la correspondencia entre los centros de curvatura ξ, η de las curvas que pasan por él y los centros de curvatura ξ_1, η_1 de las curvas transformadas en el punto homólogo, está definida por las ecuaciones (3.10). Como estas ecuaciones son las de una proyectividad, el teorema queda demostrado⁽²⁾.

La proyectividad (3.10) es de una forma particular. Para caracterizarla geométricamente supongamos por un momento superpuestos los planos ξ, η y ξ_1, η_1 . Llamando φ al ángulo que forman los radios vectores que unen el origen O con dos puntos correspondientes $Q(\xi, \eta)$ y $Q'(\xi_1, \eta_1)$ se tiene

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\eta_1}{\xi_1} - \frac{\eta}{\xi}}{1 + \frac{\eta_1}{\xi_1} \frac{\eta}{\xi}}$$

o bien, según (3.10),

$$\tan \varphi = \frac{n}{m} \quad (3.12)$$

⁽²⁾ La transformación conforme (1.1) se puede suponer representada por una función de variable compleja $w = f(z)$, siendo $z = x + iy, w = f(z) = X(x, y) + iY(x, y)$. Las condiciones (1.3) son entonces las clásicas condiciones de monogeneidad de Cauchy-Riemann. Entre los coeficientes que figuran en (3.10) y los módulos de las derivadas de $f(z)$ hay las siguientes relaciones

$$H = |f'(z)|^2, \quad A^2 + B^2 = |f''(z)|^2 |f'(z)|^2$$

las cuales se obtienen inmediatamente teniendo en cuenta (3.11) y recordando que es

$$f'(z) = X_x + iY_x = X_x - iX_y, \quad f''(z) = -X_{yy} - iX_{xy}$$

que nos dice que este ángulo de giro es constante, como debía ser por tratarse de una transformación conforme, y además nos da una interpretación geométrica del cociente n/m .

En cuanto a la distancia del punto Q' al origen, se tiene

$$R^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 = \frac{(m^2 + n^2)(\xi^2 + \eta^2)}{(A\xi + B\eta + H)^2}.$$

Pero la distancia del punto Q a la recta $A\xi + B\eta + H = 0$ es

$$\delta = \frac{|A\xi + B\eta + H|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

por consiguiente

$$R = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{A^2 + B^2}} \frac{r}{\delta} \quad (3.13)$$

siendo $r^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Es decir: *Para pasar del punto $Q(\xi, \eta)$ al correspondiente $Q'(\xi_1, \eta_1)$ definido por la proyectividad (3.10), hay que girar el radio vector OQ de un ángulo constante φ definido por (3.12) y multiplicar la longitud del radio vector $r = OQ$ por un factor dado en (3.13) que es inversamente proporcional a la distancia de Q a la recta fija $A\xi + B\eta + H = 0$.*

Según (3.11) y (3.8) se debe observar también la relación

$$m^2 + n^2 = H^3. \quad (3.14)$$

4. Unos invariantes conformes para curvas tangentes. —

a) Supongamos tres curvas tangentes en un punto P . Sean Q_1, Q_2, Q_3 sus centros de curvatura correspondientes al punto P , que suponemos distintos, y que estarán sobre la normal a las curvas en P . Según el teorema demostrado, para cualquier transformación conforme, los centros de curvatura Q'_1, Q'_2, Q'_3 de las curvas transformadas formarán con P' (correspondiente a P) una cuaterna cuya razón doble tiene el mismo valor que $(PQ_1 Q_2 Q_3)$.

Llamando $R_i = PQ_i$ a los radios de curvatura de las curvas

primitivas y $R'_i = P'Q'_i$ a los de las curvas transformadas, se tiene por tanto $(0, R_1, R_2, R_3) = (0, R'_1, R'_2, R'_3)$, o sea

$$\frac{R_2(R_3 - R_1)}{R_3(R_2 - R_1)} = \frac{R'_2(R'_3 - R'_1)}{R'_3(R'_2 - R'_1)}.$$

Introduciendo las curvaturas $\kappa_i = 1/R_i$ en lugar de los radios de curvatura, se tiene, más simplemente,

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_3}{\kappa_1 - \kappa_2} = \frac{\kappa'_1 - \kappa'_3}{\kappa'_1 - \kappa'_2}.$$

Por consiguiente:

Dadas tres curvas tangentes en un punto, y siendo κ_i los valores de sus curvaturas en el mismo, la expresión

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_3}{\kappa_1 - \kappa_2} \quad (4.1)$$

es invariante por transformaciones conformes.

b) Si en lugar de tres curvas tangentes se consideran cuatro que sean también tangentes en el punto P y representamos por $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ a sus curvaturas en este punto, según (4.1), también será invariante por transformaciones conformes la expresión

$$-\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_3} \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{\kappa_3 - \kappa_4} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_4}. \quad (4.2)$$

Esto quiere decir que si las curvaturas de las curvas transformadas se representan respectivamente por κ'_i ($i=1, 2, 3, 4$), se verifica

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_4} = \frac{\kappa'_1 - \kappa'_2}{\kappa'_3 - \kappa'_4}$$

o sea

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa'_1 - \kappa'_2} = \frac{\kappa_3 - \kappa_4}{\kappa'_3 - \kappa'_4}.$$

Por consiguiente: *Dada una transformación conforme cualquiera y un haz de curvas tangentes en un punto a una misma recta, la razón*

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa'_1 - \kappa'_2} \quad (4.3)$$

entre las diferencias de las curvaturas en el punto de contacto de dos curvas del haz, antes y después de la transformación, tiene el mismo valor cualquiera que sea el par de curvas del haz que se considere.

5. *Casos particulares.* — Como casos particulares del teorema general se pueden citar:

I. Considerando todas las rectas que pasan por un punto, sus centros de curvatura en el mismo están sobre la recta del infinito y como por una proyectividad las rectas se transforman en rectas, resulta:

Las curvas transformadas por una transformación conforme de todas las rectas que pasan por un punto, tienen sus centros de curvatura correspondientes al punto común sobre una recta.

II. Como la inversión es una transformación que conserva los ángulos y además transforma los círculos en círculos, se tiene

Dado un conjunto de círculos que pasan por un punto, al transformarlos por una inversión cuyo centro no sea el punto común, se obtiene otro conjunto de círculos cuyos centros resultan del conjunto de los centros primitivos por una proyectividad.

6. *Algunas consecuencias.* — Supongamos un conjunto de curvas que pasan por un punto que supondremos el origen de coordenadas del plano ξ, η . Siendo r el radio de curvatura de una curva general del conjunto, queremos hallar aquellas curvas para las cuales el radio de curvatura de la transformada por la transformación conforme (1.1) vale λr , siendo λ una constante dada. (Los radios de curvatura se sobrentiende que se consideran tomados en el origen y en su punto transformado).

Según (3.10) el cuadrado del radio de curvatura de la curva transformada vale

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \frac{(m^2 + n^2)(\xi^2 + \eta^2)}{(A\xi + B\eta + H)^2}$$

y si debe ser $\xi_1^2 + \eta_1^2 = \lambda^2 r^2 = \lambda^2(\xi^2 + \eta^2)$ se deduce

$$\lambda(A\xi + B\eta + H) - \sqrt{m^2 + n^2} = 0 \quad (6.1)$$

Es decir: *Las curvas del conjunto tales que, siendo r su radio de curvatura, el de la transformada vale λr , son aquellas cuyo centro de curvatura está sobre la recta (6.1).*

La recta (6.1) está determinada excepto en el caso de ser $A=B=0$. En este caso, según (3.14) y (6.1) si $\lambda=\sqrt{H}$, para cualquier curva del conjunto se cumple la condición de que la razón entre el radio de curvatura de su transformada y el suyo propio vale λ ; en cambio, si $\lambda \neq \sqrt{H}$, no hay ninguna curva del conjunto para la cual se cumpla dicha propiedad.

En particular, para $\lambda=\infty$, se tiene: *Las curvas del conjunto tales que sus transformadas tienen radio de curvatura infinito, son aquellas cuyo centro de curvatura se encuentra sobre la recta $A\xi+B\eta+H=0$.*

Supongamos, en particular, un conjunto simplemente infinito de curvas que pasan por un punto, que suponemos el origen de coordenadas del plano ξ, η . El lugar geométrico de los centros de curvatura de estas curvas en el origen será una curva K . Por una transformación conforme cualquiera, la curva lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas transformadas, será una curva K' , transformada proyectiva de K . El último teorema se puede enunciar entonces:

El número de puntos del infinito de la curva K' , lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas transformadas, es igual al número de puntos de intersección de la curva K con la recta $A\xi+B\eta+H=0$. En consecuencia, dicho número nunca puede superar al número máximo de puntos en que la curva K puede ser cortada por una recta.

7. *Caso particular considerado por Ringleb.* — El teorema principal del n.º 2 contiene como caso particular el siguiente teorema demostrado por F. Ringleb⁽³⁾:

Supongamos un haz de curvas que pasan por un punto P y tienen en él la misma curvatura. Las curvas transformadas de este haz por una transformación conforme tienen sus centros de curvatura correspondientes al punto común P' sobre una cónica, la cual tiene P' como foco.

⁽³⁾ F. RINGLEB, *Ueber das Verhalten der Krümmung ebener Kurven bei konformer Abbildung*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Vol. 45, 1935, pág. 57.

La primera parte de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema del n.º 2. En efecto, si las curvas tienen la misma curvatura en P , sus centros de curvatura en este punto estarán sobre una circunferencia K de centro P y, por tanto, los centros de curvatura de las curvas transformadas estarán sobre una curva K' transformada proyectiva de una circunferencia, o sea, sobre una cónica.

Para ver que esta cónica tiene por foco el punto P' transformado del P se puede proceder analíticamente del siguiente modo. Llamando, como en el n.º 2, ϑ al ángulo que forma la tangente a una curva general del haz con el eje x y siendo r el radio de la circunferencia K , se tiene, siendo P y P' los orígenes de coordenadas de los planos respectivos,

$$\xi = -r \operatorname{sen} \vartheta, \quad \eta = r \cos \vartheta.$$

Según esto, poniendo $R^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2$, de (3.10) se deduce

$$R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2} r}{(-A \operatorname{sen} \vartheta + B \cos \vartheta) r + H} \quad (7.1)$$

que será la ecuación en coordenadas polares de la curva K' . Introduciendo el ángulo auxiliar α tal que $A = -a \operatorname{sen} \alpha$, $B = a \cos \alpha$, $a^2 = A^2 + B^2$, la ecuación (7.1) se puede escribir

$$R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2} r}{H} \frac{1}{1 + \frac{ar}{H} \cos(\vartheta - \alpha)} \quad (7.2)$$

que pone de manifiesto que K' es una cónica con un foco en el origen, que es el punto P' , y excentricidad ar/H .

Para demostrar que P' es un foco de la cónica K' se puede proceder también sintéticamente⁽⁴⁾. En efecto, la proyectividad (3.10) conserva los ángulos entre las direcciones de vértice P . Por tanto si la involución de rectas conjugadas de vértice P respecto de K es la involución rectangular, lo mismo ocurrirá con la involución de rectas conjugadas de vértice P' respecto de K' . Como los focos de las cónicas están caracterizados por ser los únicos puntos del plano cuya involución de rectas conjugadas es la rectangular, se deduce, de manera

⁽⁴⁾ Esta elegante demostración sintética me ha sido indicada por el Dr. B. LEVI.

más general que en el caso considerado por Ringleb, que si K es una cónica con un foco en P , la curva K' es otra cónica con un foco en el punto P' .

Para ver si la cónica K' es una elipse, hipérbola o parábola, bastará ver el número de sus puntos del infinito. Por tanto, según el último teorema del n.º 6, habrá que ver el número de puntos de intersección del círculo $\xi^2 + \eta^2 = r^2$, que es la curva K , con la recta $A\xi + B\eta + H = 0$. Estos serán ninguno, uno o dos según que la distancia de la recta al origen sea mayor, igual o menor que r , o sea, según que sea ⁽⁵⁾

$$\frac{H}{\sqrt{A^2+B^2}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} r. \quad (7.3)$$

Al mismo resultado se llega observando que la cónica de ecuación (7.2) es elipse, parábola o hipérbola, según que su excentricidad $\frac{ar}{H}$ sea menor, igual o mayor que uno.

8. *Una aplicación a la cartografía.* — Supongamos en el espacio unos ejes coordenados ortogonales x_1, x_2, x_3 y referida a ellos una superficie de revolución cuyo eje sea el x_3 . Sus ecuaciones paramétricas serán de la forma

$$x_1 = g(x_3) \cos \varphi, \quad x_2 = g(x_3) \sin \varphi, \quad x_3 = x_3. \quad (8.1)$$

El cuadrado del elemento de arco de la superficie vale $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, o sea, según (8.1),

$$ds^2 = g^2 \left(\frac{1+g'^2}{g^2} dx_3^2 + d\varphi^2 \right) \quad (8.2)$$

indicando con un acento la derivada.

Consideremos la representación de la superficie sobre un plano x, y definida por las ecuaciones

⁽⁵⁾ Según lo dicho en la nota (2), las condiciones para que la curva K' sea elipse, parábola o hipérbola, cuando la transformación conforme está dada por una función analítica de variable compleja $w = f(z)$, equivalen respectivamente a

$$|f'(z)| > r |f''(z)|, \quad |f'(z)| = r |f''(z)|, \quad |f'(z)| < r |f''(z)|$$

entendiendo las derivadas tomadas en el origen $z = 0$.

$$x = \varphi, \quad y = \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{1+g'^2}}{g} dx_3. \quad (8.3)$$

Esta representación se sabe que es *conforme*, es decir, que conserva los ángulos. En efecto, el cociente entre los elementos de arco ds de la superficie y dS del plano ($dS^2 = dx^2 + dy^2$) es igual a $g(x_3)$, es decir, depende del punto, pero no de la dirección por él; por tanto, en el entorno del punto, los triángulos infinitesimales, por tener sus lados proporcionales, serán semejantes y por consiguiente tendrán los ángulos iguales. En el caso particular de ser la superficie una esfera ($g(x_3) = \sqrt{R^2 - x_3^2}$), la representación (8.3) es la conocida proyección de Mercator de la esfera sobre el plano.

La importancia de la representación (8.3) es que los meridianos de la superficie, $\varphi = \text{cte.}$, vienen representados por rectas paralelas al eje y y los paralelos, $x_3 = \text{cte.}$, por las rectas paralelas al eje x .

Se llaman curvas *loxodrómicas* de una superficie de revolución a las curvas que cortan a los meridianos bajo un ángulo constante. Siendo la representación (8.3) conforme y habiéndose los meridianos transformado en rectas paralelas, se deduce que en la representación (8.3) *las loxodrómicas se representan por rectas*.

Cualquier representación conforme de la superficie (8.1) sobre un plano, puede considerarse como obtenida mediante una nueva representación conforme de la primera representación (8.3) sobre otro plano. Por consiguiente, como las loxodrómicas que pasan por un punto, en la representación (8.3), son rectas y por tanto sus centros de curvatura están sobre una recta (la del infinito), aplicando el teorema fundamental del n.º 2, se tiene la propiedad:

En cualquier representación conforme de una superficie de revolución sobre el plano, las loxodrómicas que pasan por un punto están representadas por curvas cuyos centros de curvatura correspondientes al mismo punto están sobre una recta.

En particular, siendo la esfera una superficie de revolución, el teorema anterior es aplicable a cualquier mapa que represente la esfera sobre el plano conservando los ángulos.

ACERCA DE LA SUCESION $\{\cos n_k x\}$, $n_k \rightarrow \infty$

de una carta al Director por
RALPH P. BOAS, Jr.

Dear Dr. Levi:

I have been reading your note ⁽¹⁾ on a theorem of W. H. Young, in which you show that no sequence $\{\cos n_k x\}$ can converge uniformly in a set of positive measure. I observe that the word «uniformly» can be omitted. For, by a lemma of Steinhaus (see Zygmund, *Trigonometrical Series*, p. 268) we have almost everywhere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\cos n_k x| = 1.$$

If $\cos n_k x \rightarrow f(x)$ in E of positive measure $m(E)$, then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2 n_k x = [f(x)]^2 = 1$$

almost everywhere in E ; hence

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2 n_k x \, dx = m(E).$$

On the other hand,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2 n_k x \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2n_k x \right) dx = \frac{1}{2} m(E)$$

since $\int_E \cos 2n_k x \, dx$ is a Fourier coefficient of the characteristic function of E , so that its limit is zero.

Sincerely, yours
Ralph P. Boas, Jr.

Agradecemos al Sr. Boas la anterior observación particularmente interesante por el modo de su obtención y esperamos presentar en una nota sucesiva alguna generalización en la misma dirección. Desde otro punto de vista otra demostración de la posibilidad de omitir la palabra «uniformemente» en nuestro enunciado primitivo se obtiene aplicando un teorema de Egoroff según el cual si una sucesión de funciones converge en un conjunto de puntos de medida > 0 , converge uniformemente en algún conjunto parcial cuya medida difiere de la anterior tan poco como se quiera. (Cfr. p. ej. Titchmarsh — *Theory of Functions*).

C. y L.

⁽¹⁾ Ver COTLAR y LEVI, *Consideraciones sobre una proposición de W. H. Young*. Math. Notae. Año IV, p. 145.

BREVE NOTA BIBLIOGRAFICA SOBRE EL PROBLEMA N.º 50

por

PEDRO E. ZADUNAISKY

El enunciado del problema era:

Se sabe que son pocos los tipos de ecuaciones diferenciales que se saben integrar en términos finitos; a veces, sin embargo, una sustitución afortunada permite reducir una ecuación dada a un tipo conocido. Estudiar el resultado de una sustitución de la forma $\xi = f(x)$ en las ecuaciones lineales con coeficientes constantes y hacer aplicación a la integración de las ecuaciones del tipo

$$a_0(1 + \alpha x)^n y^{(n)} + a_1(1 + \alpha x)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(1 + \alpha x)y' + a_n y = 0$$

siendo los coeficientes a y α constantes,

1.- Esta cuestión ya está estudiada en varios tratados; el lector puede por ejemplo consultar:

B. Levi. — *Analisi matematica algebrica e infinitesimale*. (Zanichelli, 1937), p. 419.

C. Jordan. — *Cours d'Analyse*. (Gauthier-Villars, 1915), vol. 3, pág. 179.

E. Goursat. — *Cours d'Analyse*. (Gauthier-Villars, 1933), vol. 2, pág. 462.

J. Dienger. — *Die Differential- und Integralrechnung*. (Stuttgart, 1868), Vol. 2, pág. 100.

La sustitución indicada $\xi = f(x)$ permite escribir

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{f'(x)}, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{1}{f'(x)^2} - \frac{dy}{dx} \frac{f''(x)}{f'(x)^3}, \dots \quad (1)$$

Si en una ecuación diferencial, respecto la variable ξ , se hace pues esta sustitución se pasa a otra ecuación diferencial respecto a x que se sabrá resolver si se conoce la resolución de aquella y viceversa.

Se demuestra por ejemplo que en la ecuación lineal a coeficientes constantes

$$\sum_{r=0}^n C_r \frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}} = \varphi(\xi) \quad (2)$$

la sustitución

$$\xi = \log(x + K) \quad (K \text{ constante}) \quad (3)$$

conduce a la ecuación

$$\sum_{i=0}^n A_i (x + K)^{n-i} \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = \Phi(x) \quad (A_i \text{ constantes}). \quad (4)$$

Ahora bien, la ecuación propuesta puede evidentemente escribirse en la forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \alpha^{n-i} \left(\frac{1}{\alpha} + x \right)^{n-i} \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = 0 \quad (5)$$

y ésta no es sino la ecuación homogénea correspondiente a (4), si se pone

$$A_i = a_i \alpha^{n-i}, \quad K = \frac{1}{\alpha}.$$

Por lo tanto mediante la sustitución inversa de (3), es decir poniendo en nuestro caso

$$\left(\frac{1}{\alpha} + x \right) = e\xi, \quad (6)$$

nuestra ecuación se transforma en la homogénea correspondiente a (2) cuyos coeficientes C_r se pueden calcular.

Sin embargo, para la resolución de la ecuación propuesta, este cálculo no es necesario. En efecto, la ecuación transformada admite integrales de la forma $y = e^{r\xi}$. Por lo tanto (5) admitirá soluciones de la forma

$$y = \left(\frac{1}{\alpha} + x \right)^r. \quad (7)$$

Los exponentes r se obtienen observando que al sustituir

(7) en (5) resultará

$$\left(\frac{1}{a} + x\right)^r \left[a_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i a^{n-i} r(r-1)(r-2) \dots (r-n+i+1) \right] = 0.$$

La solución general de la ecuación propuesta es por lo tanto

$$y = \gamma_1 \left(\frac{1}{a} + x\right)^{r_1} + \gamma_2 \left(\frac{1}{a} + x\right)^{r_2} + \dots + \gamma_n \left(\frac{1}{a} + x\right)^{r_n}$$

donde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son constantes y los exponentes r son las raíces de la ecuación de grado n

$$a_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i a^{n-i} r(r-1)(r-2) \dots (r-n+i+1) = 0. \quad (8)$$

En el caso de haber raíces múltiples o bien imaginarias las consideraciones a hacer son análogas a las habituales en la teoría de las ecuaciones lineales. En el tratado de Dienger que hemos mencionado se consideran los distintos casos posibles.

2. - Hemos visto que no era necesario el cálculo de los coeficientes C_r de la ecuación homogénea correspondiente a (2) que resulta al efectuar en (5) la sustitución (6). Sin embargo, por presentar dicho cálculo un cierto interés vamos a efectuarlo.

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}} = \frac{dy}{d\xi} e^{-\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\xi} e^{-\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{d\xi} e^{-\xi} \right) e^{-\xi} = \left(\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{dy}{d\xi} \right) e^{-2\xi}.$$

Vamos a obtener una fórmula general para $\frac{d^p y}{dx^p}$ con el artificio siguiente: indiquemos con d el símbolo $\frac{d}{d\xi}$ con la convención de operar sobre polinomios en d con las reglas ordinarias del álgebra y que, después de efectuados los cálculos una potencia cualquiera d^p deberá sustituirse por $\frac{d^p y}{d\xi^p}$.

Las fórmulas precedentes se escriben entonces

$$\frac{dy}{dx} = d \cdot e^{-\xi} = P_1 e^{-\xi}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = (d^2 - d) e^{-2\xi} = P_2 e^{-2\xi},$$

donde P_1 y P_2 representan los polinomios

$$P_1 = d, \quad P_2 = d(d-1).$$

Vamos a demostrar por inducción que será en general

$$\frac{d^v y}{dx^v} = P_v e^{-v\xi}, \quad P_v = d(d-1) \dots (d-v+2)(d-v+1); \quad (9)$$

supongamos en efecto ya realizada la igualdad para $v-1$; tendremos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^v y}{dx^v} &= \frac{d}{dx} (P_{v-1} e^{-(v-1)\xi}) = \frac{d}{d\xi} (P_{v-1} e^{-(v-1)\xi}) e^{-\xi} \\ &= [d \cdot P_{v-1} e^{-(v-1)\xi} - (v-1) P_{v-1} e^{-(v-1)\xi}] e^{-\xi} \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d^v y}{dx^v} = (d-v+1) P_{v-1} e^{-v\xi}.$$

En esta fórmula según lo supuesto

$$P_{v-1} = d(d-1) \dots (d-v+2);$$

por lo tanto sustituyendo resulta (9).

El producto P_v se puede desarrollar según una fórmula muy conocida en los Elementos de Algebra (ver p. ej., B. Levi, loc. cit., pág. 5, o bien J. Rey Pastor. - *Elementos de Análisis Algebraico* (Madrid, 1939), pág. 150); se obtiene

$$P_v = d \sum_{k=0}^{v-1} (-1)^k S_{k,v-1} d^{v-1-k}$$

donde $S_{k,v-1}$ indica la suma de todos los productos de k factores que se pueden formar con los números $1, 2, 3, \dots (v-1)$, siendo $S_{0,v-1} = 1$.

Todavía podemos escribir

$$P_v = \sum_{k=0}^{v-1} (-1)^k S_{k,v-1} d^{v-k};$$

ahora

$$\frac{d^v y}{dx^v} = e^{-vx} \sum_{k=0}^{v-1} (-1)^k S_{k,v-1} d^{v-k}$$

y reemplazando en (5)

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} (-1)^k S_{k,n-i-1} d^{n-i-k} + a_n = 0.$$

Para pasar de esta forma a la del primer miembro de (2) hacemos el cambio de subíndices

$$i + k = r, \quad i = s,$$

con lo que obtenemos

$$\sum_{r=0}^{n-1} \left[\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} S_{r-s, n-s-1} a_s x^{n-s} \right] d^{n-r} + a_n = 0 \quad (10)$$

donde la expresión en corchetes es el coeficiente C_r que buscábamos.

Para obtener la ecuación característica de (10) basta, según una regla conocida, sustituir el símbolo d por una variable r ; el resultado será evidentemente el mismo que si, después de sustituir (9) en (5), sin efectuar cálculos, se cambiara formalmente d por r . Se obtiene entonces evidentemente la (8).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 53 — Dados n números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se hacen las medias aritméticas de los n grupos de $n-1$ números formados con ellos. Se repite la operación con estas n medias y así sucesivamente. Demostrar que los sucesivos grupos de n números tienden a la media aritmética de los números dados. Aplicar esta observación para demostrar que la media aritmética de n números positivos es mayor o igual que su media geométrica.

SOLUCIÓN.— Llámese A_i al grupo de $n-1$ números que se obtiene suprimiendo a_i en el grupo $a_1 a_2 \dots a_n$ y llámese M_i y G_i las medias respectivamente aritmética y geométrica de los grupos A_i ; llámense finalmente M y G las medias aritmética y geométrica de los números dados.

Se tiene

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= nM \\ (n-1)M_i &= nM - a_i \end{aligned} \quad (1)$$

luego

$$\begin{aligned} (n-1) \sum M_i &= n^2 M - \sum a_i = n^2 M - nM = n(n-1)M, \\ \sum M_i &= nM. \end{aligned}$$

Concluimos por tanto que *las medias aritméticas de los grupos A_i forman un nuevo grupo de n números cuya media aritmética es la misma M del grupo dado.*

Análogamente se demuestra que *las medias geométricas de los grupos A_i forman un nuevo grupo de números cuya media geométrica es la misma G del grupo dado.*

La (1) puede escribirse también

$$M_i - M = \frac{1}{n-1} (M - a_i);$$

llamando luego d a la máxima distancia de los a_i a la media M y Δ a la máxima distancia de los M_i a la misma media, será

$$\Delta = \frac{1}{n-1} d$$

Si ahora sobre los números M_i se repiten las mismas operaciones hechas sobre las a_i , a cada nueva operación la máxima distancia de los números obtenidos a la media M se reduce en la razón $1:(n-1)$ respecto la anterior. Para que el problema propuesto tenga sentido hay que suponer $n \geq 3$; las distancias dichas resultan luego sucesivamente menores o iguales que

$$\frac{1}{2}d, \frac{1}{4}d, \dots, \frac{1}{2^n}d, \dots,$$

y tienden a 0; lo cual demuestra la primera parte del enunciado.

Supongamos ahora todos los a_i positivos y, llamando $a_{i1} = M_i$, indicamos con $M_{i1} = a_{i2}$ las medias aritméticas formadas con los grupos de $n-1$ números a_{i1} , como las M_i con los a_i ; análogamente definimos las $M_{i2} = a_{i3}$, formadas por medio de las a_{i2} y así sucesivamente.

Finalmente indíquense con G_{ij} las medias geométricas de $n-1$ números a_{ij} análogas a las G_i definidas anteriormente respecto de las a_i ; nótese también que, tratándose aquí únicamente con números positivos, si dos grupos de n números son tales que cada término del primer grupo es mayor o igual que un correspondiente término del segundo, la media aritmética y la media geométrica del primer grupo son mayores o iguales respectivamente que las del segundo grupo.

Notamos ahora que si a_1, a_2 son dos números positivos

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

de donde

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

es decir que *la media aritmética de dos números positivos es mayor o igual que la media geométrica* y supongamos que la propiedad análoga se haya averiguado para las medias de $n-1$ números; se tendrá luego en general

$$G_{ij} \leq M_{ij} = a_{ij+1}$$

Llamemos G_j a la media geométrica de los a_{ij} ; sabemos por una observación anterior que es también la media geométrica de los G_{ij} ; de la última desigualdad se tiene luego, tomando medias geométricas de los primeros y últimos miembros,

$$G_j \leq G_{j+1}.$$

Las G_j forman luego una sucesión no decreciente; pero se ha mostrado que las a_{ij} tienden a M al crecer j ; luego también las G_j tienden a M *no decreciendo* es decir que será cierta la desigualdad

$$G \leq M$$

para n números positivos si lo es para $n-1$; puesto que se encontró que ella es cierta para $n=2$, se sigue por inducción que lo es para cada n .

En el razonamiento se nota que si una sola vez en la sucesión de las desigualdades se encontrara el signo $<$ (con exclusión de $=$) también en la conclusión final deberá ponerse ese signo. Volviendo al caso de dos números solamente, a_1 y a_2 se nota que el signo $=$ se presenta únicamente para $a_1 = a_2$; por la observación anterior, se sigue que en el caso de tres números a_1, a_2, a_3 podrá presentarse a la conclusión el signo $=$ solo cuando $a_1 = a_2$, $a_1 = a_3$, $a_2 = a_3$. Procediendo así por inducción matemática se completa todavía la proporción demostrada en la forma: *la media geométrica es menor que la aritmética excepto cuando todos los números son iguales.*

N.º 75 — Una losa plana homogénea de forma dada tiene trazada una línea cerrada (que podría ser el borde). Se quiere sostenerla por tres columnas en puntos de dicha línea; uno de estos puntos está asignado. Se pide determinar la posición de los otros dos de manera que las tres columnas resulten igualmente cargadas.

Desde luego, la resolución del problema solo puede ser gráfica en sentido amplio si no se especifica la forma geométrica de la losa y de la línea.

Se pide considerar y resolver geoméricamente el caso en que la losa es circular y la línea un paralelogramo con un vértice en el punto asignado.

Discusión.

SOLUCIÓN. — Sea K la línea cerrada, S el centro de gravedad de la losa y M el punto asignado.

Para que el equilibrio se verifique es necesario que la resultante de las reacciones de las columnas esté aplicada en el baricentro de la losa.

Si el peso de la losa se designa con P cada reacción vale $P : 3$. Una de ellas sabemos que está aplicada en M ; entonces las otras dos tienen por resultante una fuerza vertical de intensidad $2 \frac{P}{3}$ que pasa por un punto O situado en la prolonga-

ción de la recta MS y a una distancia $\frac{MS}{2}$ de S . Hallado O el problema se reduce a encontrar dos puntos sobre la línea dada K tales que estén alineados y sean simétricos respecto de O . En el caso general, en que no está dada alguna propiedad geométrica característica de la curva K , se puede proceder del modo siguiente:

Se traza la curva simétrica de K con respecto a O , lo cual se puede obtener en general por puntos.

Se observa que la curva K_1 así obtenida es igual a la K y se transforma en ésta mediante un giro de un ángulo π alrededor de O . Por lo tanto si la curva K fuese dada en coordenadas polares en la forma $\rho = f(\Theta)$ la ecuación de K_1 sería $\rho = f(\Theta + \pi)$.

Ahora bien, si K y K_1 se cortan en un punto F se cortarían también en el simétrico de F respecto a O . Por lo tanto las dos curvas se cortan en un número par de puntos asociados en pares de simétricos respecto a O ; cada uno de estos pares si existen proporcionan una solución del problema.

En particular si la curva K es convexa, para que existan tales intersecciones es condición necesaria y suficiente que el punto O haya resultado interior a K .

En efecto, si el punto O fuese externo a K , pasaría por O alguna recta r que no corta K ; la curva simétrica de K respecto O estaría toda, respecto de esta recta, en el semiplano opuesto

al que contiene K ; por lo tanto las dos curvas no podrían tener puntos comunes. Si O estuviera sobre K el mismo razonamiento podría repetirse eligiendo como r la tangente en O a K ; las dos curvas tendrían entonces común sólo el punto O , que contaría como doble en el número de las intersecciones, pero no podría corresponder a las condiciones mecánicas. Si al contrario O es interno a K , dos casos todavía pueden presentarse: o que O no sea centro de simetría de K o bien que se tal. En este segundo caso K_1 coincide con K y el problema tiene infinitas soluciones, pudiéndose elegir como otros puntos de apoyo de la losa dos puntos cualesquiera de K que sean simétricos respecto a O y ninguno coincida con M . En el primer caso pasa ciertamente por O alguna recta que corta K en dos puntos de partes opuestas y no equidistantes de O ; sea r la recta, A y B dichos puntos y $OA < OB$. Los puntos A' y B' , simétricos de estos respecto O estarán respectivamente A' interno al segmento OB y B' externo al segmento OA de la parte de A ; por tanto K_1 , que contiene A' y B' pasa del interior al exterior de K y corta K .

En el caso particular propuesto, es decir: losa de forma circular y línea K , un paralelogramo con un vértice en el punto asignado, se determina sin dificultad el punto O . Es fácil ver que la figura simétrica del paralelogramo dado K será otro paralelogramo K_1 igual y de lados respectivamente paralelos a los de K . Por lo tanto K y K_1 se cortarán solo en dos puntos; es decir que la solución si existe es única, salvo el caso excepcional de que O se superponga con el centro del paralelogramo dado en cuyo caso como ya hemos dicho en el caso general K y K_1 se superponen y el problema tiene infinitas soluciones. Notamos todavía que en este caso particular basta para que haya infinitas soluciones que el punto O pertenezca a uno de los segmentos cortados por el paralelogramo sobre las dos rectas paralelas a los lados del paralelogramo por el centro del mismo.

Finalmente notamos que dichas dos rectas dividen el paralelogramo en cuatro regiones y según que el punto O quede contenido en una de ellas, los dos puntos buscados se encontrarán sobre los lados del paralelogramo K a los cuales pertenece parcialmente el perímetro de dicha región.

Estas consideraciones así como la determinación de los dos puntos pedidos pueden hacerse en forma sencilla refiriendo la

figura a un sistema de ejes coordenados con origen en el punto asignado y dirigidos según los lados del paralelogramo.

Esta solución pertenece, salvo algunas modificaciones en la redacción, al Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de la Nación, Rosario; otra solución fué enviada por el Sr. M. GRILL, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N.º 78 — Siendo α, β, γ tres ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, demostrar que se cumple siempre la relación

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \leq \frac{1}{8}$$

SOLUCIÓN. — Se trata de hallar el máximo de la función $U(\alpha, \beta, \gamma) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma$ donde las variables están ligadas por la relación $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, o sea, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = 1$.

Por consiguiente hay que extremar

$$\varphi = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - \lambda [\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma) - 1]$$

cuyas derivadas parciales, igualadas a cero dan las ecuaciones:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \gamma - \lambda \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - \lambda \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma - \lambda \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0. \quad (3)$$

Notamos que el máximo buscado corresponde necesariamente a valores de $\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \beta, \operatorname{sen} \gamma$ no cero; con estas condiciones de (1) y (2) deducimos

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = 0$$

o sea $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0$, de donde $\alpha = \beta$.

De igual forma demostraríamos que $\alpha = \gamma$, lo que nos dice que el extremo de la función $U(\alpha, \beta, \gamma)$ se halla para $\alpha = \beta = \gamma$.

Falta demostrar que este extremo corresponde a un máxi-

mo. Llevemos sobre dos ejes de coordenadas rectangulares los valores de α y β como abscisas y ordenadas respectivamente. Haciendo el gráfico de la función $U = U(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)$ se obtiene: para el punto $O(\alpha=0, \beta=0)$, $U=0$, para $A(\alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=0)$, $U=0$ y para $B(\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2})$, también $U=0$. Además para todos los puntos del contorno del triángulo ABO es $U=0$, mientras que en el interior del triángulo la función U es positiva, pues los senos de ángulos menores que π son positivos. Con esto y observando que el sistema (1), (2), (3) tiene la solución única $\alpha=\beta=\gamma$ se deduce que el extremo hallado es un máximo. Como para $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$ es $U=\frac{1}{8}$, se deduce la desigualdad del enunciado.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. MILTON AGUSTÍN QUIROGA, alumno de la Escuela de Ingeniería de San Juan. Otra solución ha sido enviada por el Sr. MOISÉS GRILL, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N. de la R. — La discusión habría tenido que ser más larga si no se hubiera supuesto implícitamente α, β, γ positivos y por tanto comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. La propiedad enunciada es cierta sin esta condición y la demostración se logra con simples transformaciones trigonométricas; en efecto, se tiene

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \operatorname{sen} \gamma] \operatorname{sen} \gamma.$$

Suponiendo por un momento $\alpha - \beta$ constante y γ variable; $\operatorname{sen} \gamma = x$, se sabe que la expresión $[\cos(\alpha - \beta) - x]x$, donde la suma de los factores es constante, para valores reales de x , tiene por máximo $\frac{1}{4} \cos^2(\alpha - \beta)$.

Dejando ahora variar $\alpha - \beta$, se obtiene el máximo máxi-

morum para $\cos(\alpha - \beta) = 1$; se sigue que $\frac{1}{8}$ es el máximo de la expresión propuesta.

N.º 80 — Encontrar la familia de las trayectorias ortogonales de las curvas que realizan la ecuación diferencial

$$\frac{3y^2 - x^2}{y} dy - \frac{3x^2 - y^2}{x} dx = 0.$$

SOLUCIÓN. — Siendo las trayectorias ortogonales de una familia de curvas aquellas que cortan a las mismas en ángulo recto, resulta que las trayectorias ortogonales buscadas deben verificar la ecuación diferencial que se obtiene reemplazando en la propuesta $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$. Queda por tanto la ecuación diferencial

$$(3y^2 - x^2)x dx + (3x^2 - y^2)y dy = 0. \quad (1)$$

Es fácil comprobar que se trata de una expresión diferencial exacta. Por tanto, integrando desde un punto fijo x_0, y_0 a un punto general x, y , se obtiene

$$\int_{x_0}^x (3y_0^2 - x^2)x dx + \int_{y_0}^y (3x^2 - y^2)y dy = 0$$

o sea

$$(x_0^2 - y_0^2)^2 - 4x_0^2 y_0^2 - (x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = K.$$

Pasando todos los términos constantes a un mismo miembro e indicando con una sola letra λ el conjunto de todos ellos, la ecuación de la familia de trayectorias buscada se puede escribir

$$(x^2 - y^2)^2 - 4x^2 y^2 = \lambda.$$

También se puede llegar al mismo resultado mediante el paso a coordenadas polares. Poniendo $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, la ecuación (1) se reduce fácilmente a

$$\frac{d\rho}{\rho} = \tan 4\varphi d\varphi$$

de donde

$$\log \rho = -\frac{1}{4} \log \cos 4\varphi + \log C$$

o sea

$$\rho^4 = \frac{c}{\cos 4\varphi}$$

que es la ecuación, en coordenadas polares, de la familia de trayectorias pedida.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. HORACIO ERLIJMAN, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario. Otra solución se ha recibido del Sr. MOISÉS GRILL, alumno de la misma Facultad.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

91. - Demostrar que cualquier número entero ≤ 312 se puede expresar en la forma

$$c_0 + 5c_1 + 25c_2 + 125c_3$$

donde c_0, c_1, c_2, c_3 toman los valores $0, \pm 1, \pm 2$.

92. - Demostrar que si A y B realizan la igualdad

$$\sin(2A + B) = 5 \sin B$$

se verifica también

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{3}{2} \operatorname{tg} A.$$

93. - Siendo $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ ($p \leq 1$) demostrar que la sucesión

$$x_1 = \sqrt{1 - p\alpha}, \quad x_2 = \sqrt{1 - px_1}, \quad x_3 = \sqrt{1 - px_2}, \dots$$

converge y hallar el límite.

94. - Sea una esfera de radio R y una recta r cuya distancia al centro O de la esfera sea a . Sea Σ el plano determinado por r y el centro de la esfera. Por r se trazan planos que forman con Σ un ángulo variable Θ y se consideran los conos de vértice O y base las secciones de estos planos con la esfera. Se pide determinar Θ de manera que el volumen del cono correspondiente sea máximo.

95. - Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por cada cuerda paralela al semieje b como diámetro se describe una circunferencia y por el centro de la elipse se trazan las tangentes a la misma. Se pide hallar la ecuación de la curva lugar geométrico de los puntos de contacto y demostrar que el área que ella encierra vale

$$F = 2\pi b (\sqrt{a^2 + b^2} - b).$$

Se aconseja el cálculo en coordenadas polares.

CUESTIONES

13. - 1º. Cualquier transformación conforme se puede aproximar alrededor de un punto por una transformación cuadrática (conforme, no necesariamente birracional). En base a esta observación se invita a estudiar desde un punto de vista algebraico las proposiciones demostradas por L. A. Santaló con consideraciones de geometría diferencial en el artículo: *Un teorema sobre representación conforme* de este mismo fascículo.

2º. De las proposiciones de ese artículo se deduce fácilmente que si un sistema de curvas que pasan por un punto P tienen círculos osculadores en este punto que forman un haz, las curvas transformadas por una transformación conforme tienen igualmente por círculos osculadores en el punto P' , correspondiente a P , los círculos de un haz. Dada la transformación conforme y el punto P (y por tanto P') resulta definida entre los planos una nueva correspondencia puntual en la cual se corresponden los segundos puntos bases de los haces dichos.

Se pide estudiar tal correspondencia y su relación con la correspondencia proyectiva estudiada por Santaló.

- El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	(En preparación). Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	