



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y  
AGRIMENSURA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA

---

## Notas de Clase

---

Cátedra de Cálculo IV

*Autoras*

Dra. Mariela OLGUIN

Lic. Mariana CISNEROS

Colabora: Prof. Lucía Schaefer

30 de agosto de 2023

# Contenidos

Resumen . . . . .	2
<b>1. Sucesiones y Series</b>	<b>3</b>
1.1. Sucesiones . . . . .	3
I. Definiciones . . . . .	3
II. Algunos resultados sobre convergencia . . . . .	10
III. Ejercicios sugeridos . . . . .	15
1.2. Series Numéricas . . . . .	21
I. Definiciones y ejemplos clásicos . . . . .	22
II. Resultados de convergencia . . . . .	29
III. Series alternantes . . . . .	33
IV. Ejercicios sugeridos . . . . .	36
1.3. Series de funciones . . . . .	43
I. Serie de potencias . . . . .	44
II. Serie de Taylor . . . . .	49
III. Serie de Fourier . . . . .	53
IV. Ejercicios sugeridos . . . . .	59
<b>2. Ec. Diferenciales Ordinarias (EDO's)</b>	<b>67</b>
2.1. Introducción . . . . .	67
2.2. Definiciones . . . . .	68
I. Ejercicios sugeridos . . . . .	71
2.3. Resolución gráfica . . . . .	73
I. Ejercicios sugeridos . . . . .	76

2.4. Problemas de Valores Iniciales . . . . .	78
I.    Ejercicios sugeridos . . . . .	81
2.5. EDO's de primer orden . . . . .	82
I.    Ecuaciones a variables separables . . . . .	82
II.   Ejercicios sugeridos . . . . .	85
III.  Ecuaciones Lineales de Primer Orden . . . . .	89
IV.   Ejercicios sugeridos . . . . .	93
2.6. EDO's de segundo orden a coeficientes constantes . . . . .	96
I.    EDO's de segundo orden a coeficientes constantes homogéneas . . . . .	97
II.   Ejercicios sugeridos . . . . .	100
III.  EDO's de segundo orden a coeficientes constantes NO homogéneas . . . . .	103
IV.   Ejercicios sugeridos . . . . .	111
<b>3. Ecuaciones en derivadas parciales</b>	<b>115</b>
3.1. Introducción . . . . .	115
3.2. Algunos tipos de EDP y su forma de resolución . . . . .	116
I.    EDP's que pueden resolverse aplicando integración sucesiva. . . . .	117
II.   Método de Separación de variables . . . . .	120
III.  Soluciones de problemas con condiciones de frontera utilizando Series de Fourier . . . . .	123
IV.   Ejercicios sugeridos . . . . .	127
<b>A. Herramientas gráficas</b>	<b>133</b>
<b>B. Descomposición en fracciones simples</b>	<b>137</b>
<b>C. Integrales impropias</b>	<b>143</b>
<b>D. Simetrías de media onda y cuarto de onda</b>	<b>147</b>

## Agradecimientos

Este trabajo nació con la simple idea de ordenar el material de estudio y hacer un poquito más cercanos los conceptos mediante el uso de un lenguaje sencillo, dentro de lo posible, sin perder rigurosidad matemática. Fue muy grato poder repensar nuestros puntos de vista para luego comunicar estos conceptos a nuestros estudiantes.

Debemos agradecer a Belén Célis, Inés Széliga, Julieta Recanzone y Luciana Talarn y a todos aquellos, que gentilmente a lo largo de estos años, han colaborado en la lectura y correcciones de las primeras versiones de este trabajo. También agradecemos sus sugerencias, claro. A lo largo de varios cuatrimestres hemos ido recibiendo aún más colaboraciones de otros docentes de la cátedra. En esta última versión, agradecemos a la Profesora Lucía Schaefer por su valioso aporte.

Aún queda mucho por delante.

Mariana y Mariela.

## Resumen

**Cálculo IV** es una materia en la que podremos acercarnos a la modelización de problemas de la física, ingeniería y diversas áreas que presentan un grado mayor de dificultad que los vistos en cursos anteriores de Cálculo.

Comenzaremos el recorrido con los conceptos de *Sucesiones y Series*. En esta unidad, desarrollaremos nociones básicas de Sucesiones y Series y aprenderemos a trabajar de modo más abstracto. Luego, a lo largo de la materia, veremos cómo utilizar estas nuevas y **poderosas** herramientas.

Seguimos con un capítulo dedicado a las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* o, más familiarmente, **EDO's**. Ustedes ya han utilizado estos conceptos en Física I. Ejemplo de esto es la segunda Ley de Newton que es la que utilizaron para obtener, de modo práctico, ecuaciones de movimiento. Aquí, desarrollaremos el marco teórico en el que se basaron para obtener sus resoluciones. En esta unidad aprenderemos a resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, primero en forma gráfica ...por lo tanto será útil el repaso de herramientas computacionales!!!! Luego, analizaremos diversos casos particulares de EDO's y obtendremos “soluciones clásicas”... ¿qué será eso de “soluciones clásicas”?

Finalmente, cerramos este recorrido con *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Estas ecuaciones son un poco más complejas pero el abanico de problemáticas que permiten modelar son más que interesantes: distribución de temperatura y masa, vibración de una cuerda o una viga, el problema del dique poroso, finanzas cuantitativas, crecimiento de una masa tumoral, etc.

A esta altura, es importante hacer énfasis en que el manejo conceptual se logrará paulatinamente. Cada unidad comenzará con simples ejercicios un poco mecánicos. A la par, se trabajará utilizando herramientas computacionales para terminar la materia con la modelización de un problema (será un trabajo de desarrollo en grupos) que se resolverá utilizando *TODOS* los conocimientos adquiridos en ésta y en las **materias ya cursadas**.

# Capítulo 1

## Sucesiones y Series

### 1.1. Sucesiones

#### I. Definiciones

Vamos a comenzar esta sección con un ejemplo. La resolución de problemas no siempre es factible a partir del Cálculo diferencial o del Cálculo integral, entonces aparece el poderoso Cálculo numérico. Consideremos la siguiente situación:

##### Ejemplo 1

El tamaño crítico de un reactor nuclear está determinado por una ecuación de “criticalidad” cuya versión, simplificada, es la ecuación no lineal:

$$\operatorname{tg}(0.1 x) = 9.2 e^{-x}$$

La solución que tiene significado físico es la raíz positiva más pequeña y que pertenece al intervalo  $(3, 4)$ .

Como vemos, no es factible “despejar” la variable independiente. Entonces, una vez hecho un gráfico (que es siempre una primera opción para ver que tiene sentido el problema planteado), el esquema a seguir para hallar el **valor aproximado** de la raíz de la ecuación sería acercarnos poco a poco. El procedimiento se describe mediante el siguiente

algoritmo:

Paso 1: Establecemos la función auxiliar  $f(x) = \operatorname{tg}(0.1 x) - 9.2 e^{-x}$  y damos un intervalo  $[a, b]$  contenido en el dominio de la ecuación tal que

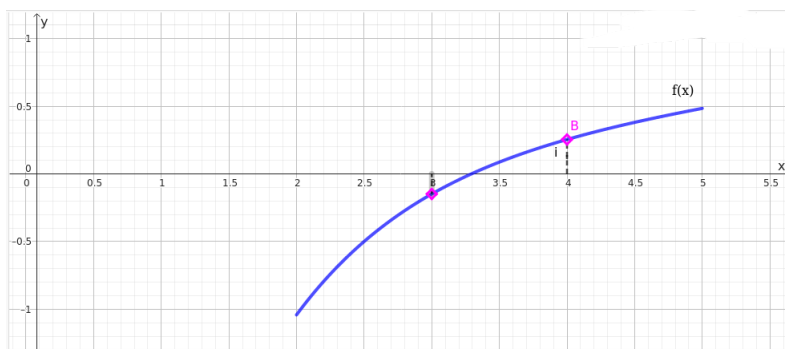
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

En este caso, el intervalo sería el  $[3, 4]$ . En efecto:  $f(3) = -0.1487$ ,  $f(4) = 0.2543$ .

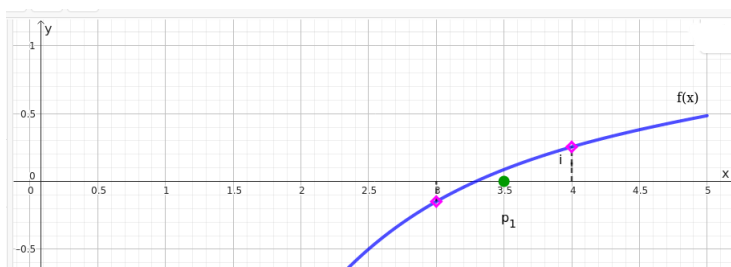
Luego, sabemos por

**el Teorema de Bolzano, que existe una raíz de esta función en  $[3, 4]$  [1]**

¿Por qué podemos afirmar esto <sup>1</sup>? Verificamos gráficamente esta afirmación:



Paso 2: Establecemos  $p_1 = \frac{a+b}{2}$



Paso 3: Evaluamos  $f(p_1)$ . ¿Vale 0?

Si la respuesta es **SI**, terminamos...problema resuelto.

Si la respuesta es **NO**, analizamos dónde hay un cambio de signo: ¿en  $[a, p_1]$  o en  $[p_1, b]$ ?

Si repetimos el proceso,

---

<sup>1</sup>Responder todas estas preguntas que veas a lo largo del Apunte es **esencial**.

¿la intuición qué nos dice?  
¿hallaremos el valor del cero de la ecuación dada?

Este método es muy conocido, tiene nombre y se llama **Método de Bisección**. Antes de ahondar en detalles, nombres y definiciones, trabajemos en el ejemplo propuesto:

### Ejercicio 1

Considerando el ejemplo anterior:

1. Continúa el procedimiento y repítelo 6 veces.
2. Haz un gráfico ubicando los puntos obtenidos  $(1, p_1)$ , etc.

Un ejemplo de script, realizado con Scilab, para obtener las sucesivas aproximaciones numéricas de la raíz buscada es el que sigue:

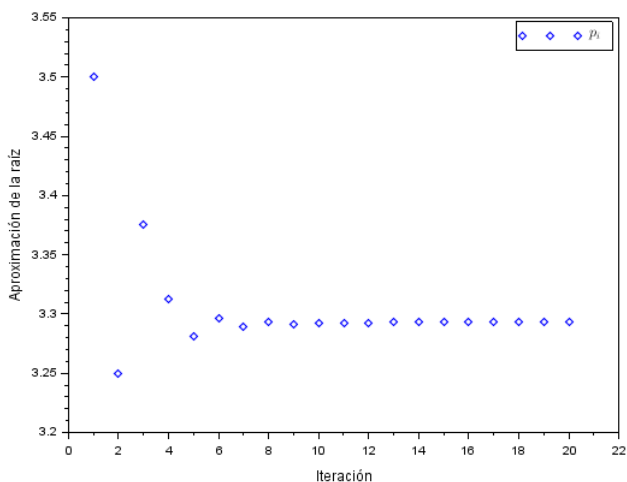
```
//Método de Bisección
//Intervalo de búsqueda [a,b]
a=3; b=4;
//definición de la función:
function y=f(x)
  y=tan(x/10)-9.2*exp(-x)
endfunction

for i=1:20
  p(i)=(a+b)/2;
  aux=f(a)*f(p(i))
  if (aux<0) then, b=p(i);
  end
  aux=f(b)*f(p(i))
  if (aux<0) then, a=p(i);
  end
end//for
//listado de las soluciones aproximadas:
p
//valor de la fc en estas soluciones aproximadas:
f(p)
plot(p, '.')
xlabel("Iteración")
ylabel("Aproximación de la raíz")
legend('$p_i$');
```

Notan que le hemos puesto que realice 20 iteraciones, podría continuar y continuar...usualmente, se termina cuando se logra una **tolerancia** o margen de error. A continuación, se muestran la salida gráfica y un listado donde figura, en la primera columna, la lista de **sucesivas aproximaciones**, y en la segunda, el correspondiente valor que asume la función.

```
->Salida=[p,f(p)]
Salida =

    3.5      0.0872126
    3.25     -0.019775
    3.375     0.0361198
    3.3125    0.0088121
    3.28125   -0.0053163
    3.296875  0.0017886
    3.2890625 -0.0017536
    3.2929688 0.00002
    3.2910156 -0.0008662
    3.2919922 -0.0004229
    3.2924805 -0.0002014
    3.2927246 -0.0000907
    3.2928467 -0.0000353
    3.2929077 -0.0000077
    3.2929382  0.0000062
    3.292923  -0.0000007
    3.2929306  0.0000027
    3.2929268  0.000001
    3.2929249  0.0000001
    3.2929239 -0.0000003
```



Si quisiéramos más exactitud, tendríamos que seguir **iterando**, es decir, repetir el algoritmo dado hasta lograr la precisión deseada.<sup>2</sup>

Ahora, notamos que esto que hemos hecho es parte de algo más...pasemos a formalizar estos descubrimientos<sup>3</sup>.

*Observación 1.* Recuerda que este “gráfico” formará un conjunto de **puntos en el plano** y **NO UNA CURVA!!!!**

**¿Qué observas en los gráficos? ¿Cómo se comportan los puntos graficados?  
¿Parecen tener un patrón?**

<sup>2</sup>Es buen momento para comenzar a utilizar herramientas gráficas como GeoGebra o cualquier otra virtual. También comenzar a implementar tus **PROPIAS rutinas** en **Scilab, MatLab, Octave** u otras (Ver sección **Anexo - A**).

<sup>3</sup>Para mayor información, podés hallarla en [1-3] entre otros libros

**Definición 1.** Si a cada número natural  $n$  se le asocia un número real  $a_n$  entonces se dice que el conjunto **ordenado**

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

define una **sucesión infinita** o simplemente **sucesión**.

*Nota.* Una sucesión puede notarse de cualquiera de las siguientes formas:

1.  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ ,
2.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{A}}$ , donde  $a_n$  es el **elemento genérico** y  $\mathbb{A}$  puede ser  $\mathbb{N}$  o un subconjunto infinito del conjunto de los naturales (por ejemplo  $A = \{9, 10, 11, \dots\}$ ) o los naturales inclusive el 0 ( $\mathbb{N}_0$ ),
3. o simplemente  $\{a_n\}_n$  o  $\{a_n\}$  cuando no necesitamos explicitar el conjunto de los subíndices. Esta notación es la que utilizaremos en los teoremas por comodidad.

## Ejemplo 2

Veamos algunos ejemplos sencillos de sucesión y el uso de la notación:

1. ¿Cuál sería la expresión para el elemento genérico?

$$\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$$

2. Aquí el elemento genérico es  $a_n = 2^n, n \in \mathbb{N}_0$ , entonces la sucesión es:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots\}$$

3. Dada la sucesión  $\left\{ \frac{1}{n-5} \right\}_{n=6}^{\infty}$

¿cuáles serían los primeros 4 elementos de esta sucesión?

4. Una sucesión, se dice **alternada o alternante**, cuando el signo de sus elementos alterna entre positivo y negativo. Por ejemplo:

$$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \right\}$$

5.  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$  esta sucesión es llamada de Fibonacci (Matemático italiano, nació en 1179). ¿Cuál sería la expresión para el elemento genérico  $a_n$ ? La expresión que obtenemos se dice que está definida “por recurrencia”.

*Observación 2.* Para profundizar el ejemplo anterior, es interesante ver el video del Dr. Eduardo Saenz Cabezón para ver en dónde aparece naturalmente una sucesión de Fibonacci y además, la relación entre los elementos de la sucesión de Fibonacci y la llamada razón áurea (<https://www.youtube.com/watch?v=yDyMSliKsxI>).



*Observación 3.* Ahora revisemos un detalle **importantísimo** en la definición de sucesiones.

¿Cuál te parece que es la diferencia entre los siguientes conjuntos?

$$\{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 0, \dots\} \quad \{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 0\}.$$

Efectivamente, uno es una sucesión y el otro no. ¿Por qué?

Podemos pensar a los elementos de una sucesión  $\{a_n\}_n$ , como el conjunto imagen de una **función**  $f$  definida como:

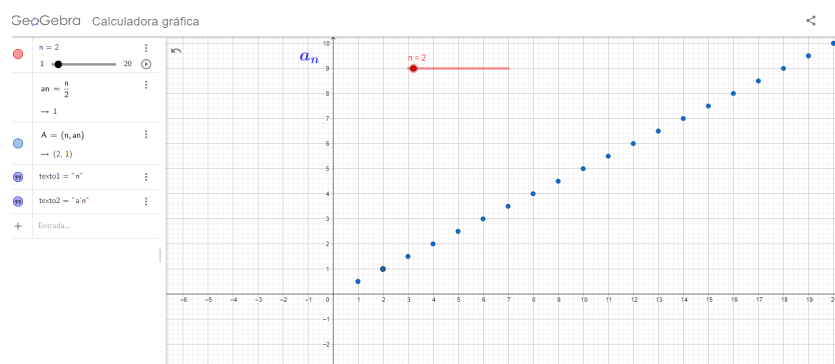
$$f : A \subset \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n) = a_n.$$

### Ejemplo 3

Veamos cómo es esto de pensar a una sucesión como imagen de una función de **variable natural** (Ver en la sección **Anexo - A** más herramientas). En este caso, usamos GeoGebra pero antes vimos las líneas de código para hacerlo con Scilab.

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 n &\rightarrow f(n) = \frac{n}{2} \\
 n = 1 &\rightarrow a_1 = 1/2; \\
 n = 2 &\rightarrow a_2 = 1; \\
 n = 3 &\rightarrow a_3 = 3/2; \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$



**Observación 4. A tener en cuenta**

A partir de ver a una sucesión como una función, es que obtendremos importantes resultados sobre las sucesiones. *Este es un buen momento para recordar (antes de continuar) lo visto en Cálculo I y II sobre límites y sus propiedades. En especial cuando pretendamos utilizar la regla de L' Hôpital. ¿Por qué? ¿Cuáles son las hipótesis que se necesitan para poder usar esta regla?*

**Definición 2.** Diremos que una sucesión  $\{a_n\}$  es **convergente** si existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Más aún, diremos que **la sucesión converge a  $L$** . En cambio, si  $L = \infty$ ,  $L = -\infty$  o no existe, diremos que la sucesión es **divergente**.

**Ejemplo 4**

Veamos cómo aplicar la definición anterior:

1.  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente y converge a 0 pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.  $\{e^n\}$  es divergente pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty.$$

3.  $\{0, 1, 0, 1, \dots\}$  es divergente. ¿Cómo lo demostrarías con lo visto hasta acá?

Por otro lado, ¿cuál sería la ley para el elemento genérico? Una forma es:

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

De paso...hay otras formas de escribir al elemento  $a_n$ , ¿verdad?

4. Veamos el Ejemplo 2-(4), ¿esta sucesión es convergente? Sí...¿por qué?

## II. Algunos resultados sobre convergencia

**Lema 1.** Sea  $f$  una función a variable real tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Entonces la sucesión  $\{a_n\}$ , con  $a_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , es convergente y converge a  $L$ .

### Ejercicio 2

Consideremos la sucesión cuyo elemento genérico es  $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Esta sucesión es convergente o no?

**Resolución:** Como vemos, estamos ante el caso de una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Y no podemos eliminarla mediante trabajo algebraico...¿entonces? Utilizo el Lema anterior: defino la **función auxiliar**  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  y ahora podré aplicar con tranquilidad la regla de L' Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Luego, podemos afirmar que la sucesión  $\left\{ \frac{\ln(n)}{n} \right\}_n$  es convergente y converge a 0. ■

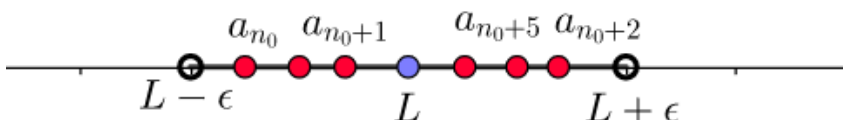
Si ahora recordamos la **definición formal de límite** de una función  $f$  cuando  $x$  tiende a infinito, podemos reformularla para el caso de **sucesiones**.

**Definición 3.** Dada una sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  convergente a un número  $L$ , podemos escribir de manera formal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \quad (1)$$

Es decir que: Para cualquier  $\varepsilon > 0$  (por muy pequeño que sea), existe un número natural  $n_0$  tal que todos los elementos de la sucesión a partir de  $a_{n_0}$  en adelante deben pertenecer al intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Veamos gráficamente esta definición:



En otras palabras podemos decir que, si la sucesión es convergente, los elementos de la misma se “*acumulan*” alrededor del valor  $L$ . Además, por la propiedad de desigualdad triangular y la expresión (1), resulta que:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - L| + |a_n - L| < 2\varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Luego tenemos, que a partir de cierto  $n_0$ , la distancia entre dos elementos sucesivos de una sucesión convergente es tan pequeña como se desee, por lo tanto queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 2.** Dada una sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  convergente entonces vale que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

### Ejercicio 3

Consideremos la sucesión cuyo elemento genérico es  $a_n = (-2)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Esta sucesión es convergente o no lo es?

**Resolución:** NO, no lo es pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(-2)^{n+1} - (-2)^n| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty \neq 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.** *Álgebra de los límites para sucesiones*

Sean las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  ambas convergentes y tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1 \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2,$$

entonces vale que:

1.  $\{a_n + b_n\}$  es una sucesión convergente y converge a  $L_1 + L_2$ ,
2.  $\{a_n - b_n\}$  es una sucesión convergente y converge a  $L_1 - L_2$ ,
3.  $\{c \cdot a_n\}$  es una sucesión convergente y converge a  $c \cdot L_1$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,
4.  $\{a_n \cdot b_n\}$  es una sucesión convergente y converge a  $L_1 \cdot L_2$ ,
5.  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  es una sucesión convergente y converge a  $\frac{L_1}{L_2}$ , si  $L_2 \neq 0$ ,
6.  $\{a_n^p\}$  es una sucesión convergente y converge a  $L_1^p$ , si  $p > 0$  y  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 4.** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  y  $f$  es una función continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(L).$$

¿En qué teorema se basaría la demostración de este teorema (4)?

**Teorema 5.** *De compresión*

Sean las sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$ , tales que verifican:

1.  $a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y \quad n \geq n_0$  (para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ .)
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

Entonces, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Aplicando el teorema anterior y la siguiente propiedad del valor absoluto

$$\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$$

se obtiene el resultado que figura a continuación:

**Teorema 6.** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

#### Ejercicio 4

Consideremos la sucesión cuyo elemento genérico es  $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Esta sucesión es convergente o no lo es?

**Resolución:** Sabemos que

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{¿por qué?})$$

Entonces

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{¿es así?})$$

y como  $\frac{1}{n}$  tiende a 0 cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

Es decir que, de acuerdo al Teorema (5), la sucesión es convergente. ■

**Definición 4.** Sea una sucesión  $\{a_n\}$ .

1. Diremos que es una sucesión **creciente** si

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n.$$

2. Diremos que es una sucesión **decreciente** si

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n.$$

3. Diremos que es una sucesión  $a_n$  es **acotada superiormente** si existen  $M \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$a_n \leq M \quad \forall n, \quad n \geq n_0.$$

4. Análogamente, diremos que es una sucesión **acotada inferiormente** si existen  $m \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$a_n \geq m \quad \forall n, \quad n \geq n_0.$$

*Observación 5.* Cuando hablemos del **carácter** de una sucesión, nos referiremos al hecho de que sea **convergente o divergente**.

Si bien no lo demostramos, es sencillo visualizar el siguiente teorema que utiliza estos nuevos conceptos:

**Teorema 7.** *Sea una sucesión  $\{a_n\}$ .*

1. *Si la sucesión es creciente y acotada superiormente, es convergente.*
2. *Si la sucesión es decreciente y acotada inferiormente, es convergente.*

Basados en este teorema (7), podemos formalizar los resultados que obtendremos en el ejercicio que sigue. En Cálculo II, se trabajó con Sumas de Riemann y asumimos que si  $f$  era una función continua o seccionalmente continua, esta suma tenía límite cuando  $n$  tendía a infinito. Y, más aún, sabíamos a qué era convergente. Veamos ahora cómo usar las nuevas herramientas de análisis:

### Ejercicio 5

Otro ejemplo de sucesiones que conocimos en **Cálculo II**, son las **Sumas de Riemann**(en ese momento no les dimos nombre de **sucesión** pero lo son).

Consideremos nuevamente la función  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [1, 3]$ . Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $h = \frac{3-1}{n}$ , entonces definimos los puntos  $x_i = 1 + i \cdot h$ ,  $i = 0, \dots, n$  que establecen una partición del  $[1, 3]$ . Sean las sucesiones cuyos elementos genéricos se establecen como:

$$a_n = h[f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})] \quad \text{y} \quad b_n = h[f(x_1) + \dots + f(x_n)]$$

¿Te acordás qué significado dabas a las sucesiones definidas con estos elementos genéricos?

Grafica los primeros 500 elementos de ambas sucesiones. ¿Qué podés adelantar sobre el carácter de ellas? Compara con el valor del área bajo la curva de  $f$  para  $x \in [1, 3]$ .

### III. Ejercicios sugeridos

1. Si una pelota es lanzada desde una altura  $h$ , en medio segundo llega al suelo y rebota llegando, en otro medio segundo, hasta las tres cuartas partes de la altura anterior, y este proceso se repite indefinidamente:
  - a) Escribe la altura que alcanzará luego de  $1s, 2s, 3s, \dots, ns$ .
  - b) ¿Qué ocurre a largo plazo? Es decir si  $n$  tiende a  $\infty$ . ¿Podés escribir ahora TODO el conjunto que describen las alturas alcanzadas?
2. Pensando en la posición de la aguja de un reloj que marca las horas:
  - a) Escribe la posición (en radianes) que marca la misma luego de  $1h, 2h, 3h, \dots, nh$ . (horas)
  - b) ¿Qué ocurre a largo plazo?
3. Escribe los 5 primeros elementos de la sucesión cuyos elementos genéricos se describen a continuación. ¿A partir de qué  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  tiene sentido cada uno de ellos?

$$a) a_n = \frac{\text{sen}(n \frac{\pi}{2})}{1 + \sqrt{n-1}},$$

$$b) b_n = e^{\frac{2n}{n+2}},$$

$$c) c_n = \ln(n) - \ln(n-3),$$

$$d) d_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

e)  $a_1 = 2; a_2 = 1; a_{n+1} = a_n - a_{n-1}, n = 2, \dots$  (Esta sucesión está dada por **recurrencia.**)

4. Halla la ley del elemento genérico  $a_n$  en cada caso y grafica los primeros 20 elementos:

$$a) \{5, 8, 11, 14, 17, \dots\}$$

$$b) \{1, -1/2, 1/4, -1/8, \dots\}$$

$$c) \{0, 2, 0, 2, \dots\}$$

5. Determina el carácter de la sucesión  $\{a_n\}$  según la definición de su elemento genérico  $a_n$  en cada caso. De ser convergente, di a qué converge.

$$a) a_n = \frac{n^7}{n^5 - 1}, \quad \forall n \geq 2,$$

$$g) a_n = \text{sen}(n \frac{\pi}{2}), \quad \forall n \geq 0,$$

$$b) a_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}, \quad \forall n \geq 0,$$

$$h) a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}, \quad \forall n \geq 1,$$

$$c) a_n = e^{\frac{2n}{n-2}}, \quad \forall n \geq 3,$$

$$i) a_n = \frac{n+1}{e^n}, \quad \forall n \geq 0,$$

$$d) a_n = n \cos(\frac{2}{n}), \quad \forall n \geq 1,$$

$$j) a_n = \frac{6n^2 + 4n}{e^n + 2}, \quad \forall n \geq 0,$$

$$e) a_n = \ln(n+1) - \ln(n), \quad \forall n \geq 1,$$

$$f) a_n = 2^{-n} \cos(n \pi), \quad \forall n \geq 0, \quad k) a_n = \frac{n^5 + 4}{\ln(n^2 + 2)}, \quad \forall n \geq 0.$$

6. Sea la sucesión definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad n = 1, 2, \dots$$

Dibuja mediante algún graficador los 100 primeros elementos de esta sucesión.

- a) ¿Podrías decir, mirando el gráfico, que esta sucesión es creciente? <sup>4</sup>
- b) ¿Se verifica que  $a_n < 3 \quad \forall n \geq 1$ ? Demuéstralo formalmente utilizando inecuaciones.
- c) Ahora demuestra que la sucesión es convergente y halla el valor al cual converge.
7. Anualmente se mide el tamaño de una población de peces que vive en un medioambiente sin alteraciones externas. Se ha notado que esta medición puede modelarse mediante la siguiente expresión:

$$p_{n+1} = b \frac{p_n}{a + p_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2)$$

donde  $p_n$  es la población de peces después de  $n$  años,  $a$  y  $b$  constantes positivas ( $b > a$ ) que dependen de las especies y el medio ambiente. Supongamos que la población al inicio (año 0) es  $p_0 > 0$ .

- a) Demuestra que si  $p_n$  es convergente a  $L$  puede ocurrir que  $L = 0$  (es decir que la población se extingue), o que  $L = b - a$ .
- b) Demuestra que  $p_{n+1} < \frac{b}{a} p_n$ .
- c) Utilizando el ítem anterior prueba que si  $a > b$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ .
- d) Si  $a < b$  y  $p_0 < b - a$  realiza con un software una gráfica de la sucesión para distintos valores de  $p_0, a, b$  y responde las siguientes preguntas:
- 1) ¿Crece o decrece la sucesión?
  - 2) ¿Es acotada superiormente o/y inferiormente? ¿Cuál es **la** cota? Es decir, cuál es la cota más ajustada?
  - 3) ¿Podés determinar si converge o diverge?
  - 4) ¿El carácter de la sucesión depende los valores elegidos para  $p_0, a$  y  $b$ ?
- e) Repite lo realizado en el ítem anterior pero ahora  $b - a < p_0$ .
- f) Con lo visto anteriormente concluye  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = b - a$  si  $a < b$ .

---

<sup>4</sup>La demostración formal del ejercicio 6 implica la utilización del Principio de inducción matemática que no se estudia en la actualidad en las carreras de Ingeniería.

g) Ahora, observa con atención todo el ejercicio y analiza en conjunto todo el trabajo hecho. Podés entonces corroborar los resultados y hacer un análisis de cómo afectan las condiciones de la especie y su medioambiente (esto significan los parámetros  $a$  y  $b$ ) para su subsistencia.

8. a) Estudia la monotonía de las siguientes sucesiones trabajando algebraicamente o mediante funciones auxiliares a variable real:

$$\begin{array}{ll}
 1) a_n = 2n, & \forall n \in \mathbb{N}_0. \\
 2) a_n = 1 + \frac{3}{n}, & \forall n \in \mathbb{N}. \\
 3) a_n = 1 - \frac{3}{n}, & \forall n \in \mathbb{N}. \\
 4) a_n = \frac{2n-1}{n}, & \forall n \in \mathbb{N}. \\
 5) b_n = \frac{8n}{1+2n}, & \forall n \in \mathbb{N}_0. \\
 6) c_n = \frac{3n}{n+1}, & \forall n \in \mathbb{N}_0. \\
 7) d_n = \frac{1}{n^3}, & \forall n \in \mathbb{N}. \\
 8) a_n = \frac{n+2}{2n-1}, & \forall n \in \mathbb{N}. \\
 9) a_n = \frac{n}{n^2+1}, & \forall n \in \mathbb{N}. \\
 10) a_n = \frac{7^n}{n!}, & \forall n \in \mathbb{N}_0.
 \end{array}$$

b) Con la ayuda de un graficador, determina si las sucesiones anteriores son acotadas superiormente (inferiormente) o ambas.

c) Utiliza el Teorema (7) del apunte de clases para determinar cuáles de las sucesiones del ejercicio (8a) son convergentes.

Ejercicios **extras** sugeridos de la sección 11.1, 7<sup>ma</sup>ed. Stewart [3]: 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 34, 35, 37, 38, 45, 47, 53, 65, 71.

## Repaso Conceptual

1. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En ambos casos, justifica.

a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = L$ .

b) Si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son divergentes, entonces  $\{a_n + b_n\}$  es divergente.

c) Si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son divergentes, entonces  $\{a_n \cdot b_n\}$  es divergente.



□□

Normalmente no obtenemos toda la sucesión sino una cantidad suficiente de elementos de ella. Decimos que la aproximación es suficientemente buena si se satisface que:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq tol$$

ó

$$|f(x_{n+1})| \leq tol$$

Entonces, detenemos el proceso y el programa retorna el valor de  $x_{n+1}$  como respuesta. Esto es pues al utilizar la computadora intervienen procesos de truncamiento y errores de representación interna de la computadora...¿y por qué más? ▽▽

**Ahora...generamos una sucesión con este método...**

**¿esta sería convergente?**

**¿Y a qué sería convergente? ¿Dependería del punto de arranque  $x_0$ ?**

### **Teorema 8. Convergencia Local del Método de Newton**

Sea  $f$  una función  $C^2[a, b]$  y sea  $p \in (a, b)$  tal que  $f(p) = 0$  y  $f'(p) \neq 0$ .

Entonces existe un intervalo  $J \subset (a, b)$  tal que si  $x_0 \in J$  y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p.$$

Si definimos  $E_n = p - x_n$  (error en el paso  $n$ -ésimo), entonces el **orden de convergencia del método** es **cuadrático** pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^2} = -\frac{f''(p)}{2 f'(p)}.$$

### Ejercicio 6. Laboratorio para de resolución numérica

Redactar el script y comparar sus resultados con el obtenido para el Ejercicio 1 de esta sección. ¿Qué diferencia notas? ¿Hay uno que te parezca más veloz en cuanto a convergencia?

¿Se verifica el teorema para este ejemplo? La sucesión generada con este método tan conocido, ¿es convergente? ¿Y converge a la raíz de la ecuación en cuestión?

## 1.2. Series Numéricas

Comenzaremos conociendo acerca de la *Paradoja de Zenón*

El tema principal de esta sección tuvo su inicio hace más de 2400 años, cuando el filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. C.) precipitó una **crisis** en las matemáticas antiguas al establecer una serie de ingeniosas paradojas. Una de ellas, a menudo llamada la paradoja del hipódromo, se puede describir de la siguiente manera:

*Un corredor de carreras nunca llega al final del trayecto en un hipódromo, porque debe recorrer la mitad de la distancia antes de cubrir el todo.* Es decir, habiendo cubierto la primera mitad del trayecto, todavía tiene la segunda mitad ante él. Cuando se cubre la mitad de esto, aún queda un cuarto. Cuando se cubre la mitad de esta cuarta parte, queda una octava parte y así sucesivamente, hasta el final.

Zenón se refería, por supuesto, a una situación idealizada en la que el corredor debe considerarse como una partícula o punto que se mueve desde un extremo de un segmento de línea al otro.

Formulemos la paradoja de otra manera: Supongamos que el corredor comienza en el punto  $x = 0$  y corre hacia la meta marcada  $x = L$ . Si al corredor le lleva  $T$  unidades de tiempo llegar a la mitad de la distancia, le llevaría  $T/2$  correr la mitad de la distancia que le falta (es decir  $L/2$ ),  $T/4$  la mitad de la mitad restante ( $L/4$ ) y así sucesivamente. Como entre dos números reales SIEMPRE existe otro número real...SIEMPRE podremos pensar

en recorrer la mitad del tramo restante de camino. O sea que debería darse la siguiente igualdad:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots = 2T$$

o al menos eso es lo que pensaríamos que debe darse pues en toda carrera sabemos que hay un corredor que la gana llegando a la meta...¿no? Según Zenón, esto sería imposible, al menos en un tiempo finito pues tenemos infinitos subintervalos del hipódromo que recorrer.

## Veremos como sigue esta historia....

### I. Definiciones y ejemplos clásicos

Consideremos la sucesión  $\{a_n\}$  y pensemos en una **nueva** sucesión definida como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2, \\ \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Es decir:  $\{s_n\}$  es una sucesión para la cual, el elemento genérico es

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k .$$

**Definición 5.** A la sucesión recién definida  $\{s_n\}$ , la llamamos “sucesión de **sumas parciales**”. El elemento genérico  $s_n$  es la suma parcial n-ésima de los elementos de la sucesión  $\{a_n\}$ .

### Ejemplo 5

Dada la sucesión  $\{\frac{2}{n!}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , halla los 5 primeros elementos de la sucesión de sumas parciales.

**Resolución:** Comenzamos viendo los elementos que conforman esta sucesión:

$$\left\{ \frac{2}{n!} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \left\{ \frac{2}{0!}, \frac{2}{1!}, \frac{2}{2!}, \frac{2}{3!}, \frac{2}{4!}, \frac{2}{5!}, \dots \right\}$$

Entonces, los elementos de la sucesión de sumas parciales pedidos son:

$$\begin{cases} s_1 = a_0 = \frac{2}{0!} = \frac{2}{1} = 2, \\ s_2 = a_0 + a_1 = 2 + \frac{2}{1!} = 4, \\ s_3 = a_0 + a_1 + a_2 = 4 + 1 = 5, \\ s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}, \\ s_5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{16}{3} + \frac{1}{12} = \frac{65}{12}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Observación 6.* Notar que  $s_1$  es el **primer** elemento de la sucesión (en este caso,  $a_0$ ),  $s_2$  es la suma de los 2 primeros elementos (en este caso,  $a_0$  y  $a_1$ ) y así seguimos.

**Definición 6.** Dada la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , llamamos **Serie** al símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*Observación 7.* Si queremos ser más rigurosos con la definición, deberíamos escribirla así:

Dada la sucesión  $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ , llamamos **Serie** al símbolo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Es decir que sería la forma abreviada de escribir

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$$

Esto significa que tanto las sucesiones como las series no están obligadas a que el subíndice comience en 1, sino que el elemento en la **posición 1**, puede ocurrir para un valor de subíndice natural **cualquiera**. El mismo comentario, aplica a toda la unidad. La sumatoria puede comenzar con el primer elemento de la sucesión  $\{a_n\}$  o comenzar por el elemento en la posición 500...lo importante es que tiene infinitos términos.

### Ejemplo 6

#### Serie armónica

Como su nombre lo indica, se origina en la sucesión armónica  $\{\frac{1}{k}\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

**Definición 7.** Sea una sucesión  $\{a_n\}$ . Diremos que:

1. la **serie**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **converge** si existe  $S \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ .

En este caso, decimos además que la serie converge a  $S$ , por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

2. la **serie**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es **divergente** si la sucesión  $\{s_n\}$  es divergente.

*Observación 8.* En adelante, cuando se hable de “**carácter de una serie**”, se hablará sobre si ésta es convergente o divergente.

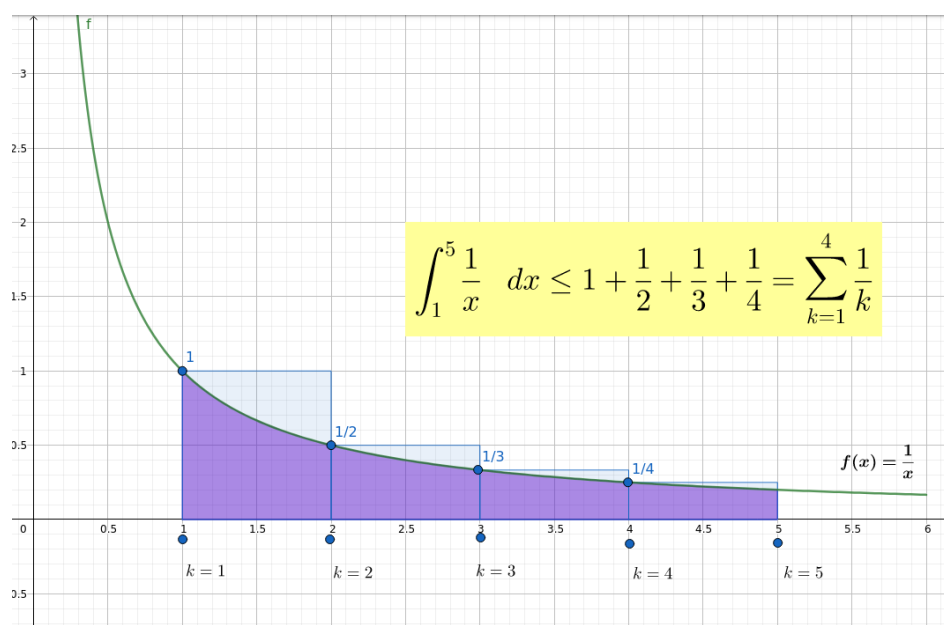
A modo de ejemplo, consideremos algunas **series famosas y su carácter**:

### Ejemplo 7

Serie armónica:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Esta serie es divergente, ¿por qué? Veamos:

**Resolución:** Consideremos la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ , si  $x \geq 1$  se tiene que  $f(x) > 0$  y recordando el concepto de área bajo una curva y las Sumas de Riemann, supongamos que  $n = 4$  (para fijar ideas). Resulta que el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$ , para  $x \in [1, 5]$ , puede acotarse de la siguiente manera:



Entonces, si  $n$  es un natural cualquiera, podemos generalizar lo anterior obteniendo:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

Entonces, aplicando límite en ambos miembros de la inecuación, resulta que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Luego, como la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}$  es **divergente**, resulta que la serie armónica  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  es **divergente**. ■

### Ejemplo 8

Serie geométrica: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$$

Aquí  $a$  y  $r$  son constantes en  $\mathbb{R}$ . Además  $r \in \mathbb{R}$  se llama **razón** de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + a r + a r^2 + \dots + a r^n + \dots$$

### Ejercicio 7

¿Cuándo podemos decir que una serie geométrica es convergente? Y si lo es ... ¿a qué converge?

Si ya resolviste el ejercicio anterior, ahora podemos resolver el ejercicio siguiente.

### Ejercicio 8

Consideremos la serie geométrica:

$$\sum_{n=4}^{\infty} 3 \frac{1}{5^n}$$

¿Es convergente?

**Resolución:** la respuesta es sí pues la razón  $r$  es  $\frac{1}{5}$  y es menor que 1 en valor absoluto.

¿A qué converge esta serie?

$$\sum_{n=4}^{\infty} 3 \frac{1}{5^n} = \sum_{n=4}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-4+4} \underset{n-4=k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{3}_{\mathbf{a}} \frac{1}{5^4} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{3}{5^4} \frac{1}{1 - 1/5} = \frac{3}{500} \quad \blacksquare$$

### Ejercicio 9

Muestra que el corredor, en la paradoja de Zenón, efectivamente demoraría  $2T$  unidades de tiempo en terminar la carrera.

### Ejemplo 9

Serie telescópica: Es de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$  donde  $\{b_n\}$  es una sucesión.

En el siguiente ejemplo vemos una serie que, si bien no luce como telescópica, con unos pocos pasos algebraicos, podemos re-escribirla como una serie telescópica (será útil ir a leer sobre este tema en Anexo-B y resolver los ejercicios propuestos). También veremos que es factible conocer su carácter y tal vez...¿su suma? A ver...

### Ejercicio 10

Muestra que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  es telescópica, además analiza su carácter.

**Resolución:** Resulta que sí es una serie telescópica pues podemos re-escribirla con el formato dado en la definición aplicando el método de descomposición en fracciones simples (ver Anexo - (B)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \underbrace{=}_{\text{fr. simples}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Entonces, la sucesión de sumas parciales será:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}, \\ s_2 = s_1 + a_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}) = (1 - \cancel{\frac{1}{2}}) + (\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}, \\ s_3 = s_2 + a_3 = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3+1}) = (1 - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}, \\ s_4 = s_3 + a_4 = (1 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4+1}) = (1 - \cancel{\frac{1}{4}}) + (\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}) = 1 - \frac{1}{5}, \\ \vdots \\ s_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Como  $s_n \rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que la serie es convergente y podemos escribir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \quad \blacksquare$$

Este procedimiento puede generalizarse y con ello obtener un teorema mediante el cual es posible establecer el carácter de una serie telescópica y en caso de ser convergente, hallar su **suma**.

**Teorema 9.** Si existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que la sucesión  $\{b_n\}$  converge a  $L$ , entonces la serie telescópica converge y converge a  $b_1 - L$ .

### Ejercicio 11

Muestra la afirmación anterior.

### Ejercicio 12

¿Es convergente la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ?

Recordar que  $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$ .

Si bien el Teorema (9) anterior es muy cómodo, su demostración es sencilla **yyyyy** nos provee una forma de demostrar el carácter de series telescópicas **generalizadas**. Veamos

el procedimiento mediante un ejemplo:

### Ejercicio 13

¿Qué ocurre con la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ ?

Siguiendo el procedimiento realizado en el ejercicio anterior es que podremos demostrar su carácter. **Esta es una generalización del concepto de serie telescópica.**

## II. Resultados de convergencia

**Teorema 10.** Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  dos series convergentes. Entonces vale la propiedad de **Linealidad**.

$$\checkmark \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

$$\checkmark \sum (c a_n) = c \sum a_n \quad \text{donde } c \in \mathbb{R} \text{ es una constante cualquiera.}$$

¿Qué ocurre cuando las hipótesis del teorema no valen? Veamos el siguiente ejercicio.

### Ejercicio 14

Muestra que la suma de una serie convergente y otra divergente es divergente.

¿Y qué sucede con la suma de dos series divergentes?

**Teorema 11.** Si  $\sum a_n$  converge, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

*Observación 9.* El recíproco del Teorema 11 no siempre vale. Considerar la serie armónica como ejemplo. En efecto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \text{sin embargo, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ es divergente.}$$

*Observación 10.* Sí es muy útil, en cambio, el contrareciproco del Teorema 11, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente.}$$

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

Antes de continuar, debemos hacer un alto y definir el concepto de **Integrales Impropias**. Esto se desarrolla en Anexo - C.

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

**Teorema 12.** Sea  $f$  una función seccionalmente continua, positiva y decreciente sobre el intervalo  $[1, \infty)$  y sea  $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces

1.  $\sum a_n$  es convergente  $\iff \int_1^\infty f(x) dx$  es convergente.
2.  $\sum a_n$  es divergente  $\iff \int_1^\infty f(x) dx$  es divergente.

Consideremos otra serie famosa: la **p-serie**.

**Definición 8.** Una **p-serie** es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Obviamente,  $p \neq 1$ , pues en ese caso **ya** sabemos que la serie es la **serie armónica**.

### Ejercicio 15

Muestra cuándo una **p-serie** es convergente y cuándo es divergente utilizando el Teorema 12 y también el concepto de integrales impropias.

**Resolución:** Veamos algunos pasos a seguir...ustedes lo completan.

1. Utilizaremos en el Teorema 12 la función  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ . Esta función es **continua** en su dominio (por ser una función potencia), es **positiva** pues  $x > 0$  y es **decreciente** pues

$$f'(x) = -p x^{p-1} \text{ es una función negativa para todo } x > 0.$$

2. Evaluamos la integral definida:

$$\int_1^r \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^r, \quad r > 1, \quad p \neq 1!!$$

3. Una vez aplicado Barrow, debemos aplicar **límite** en el extremo superior **r** para obtener el carácter de la integral impropia:

$$\int_1^r \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} [r^{1-p} - 1] \underbrace{\rightarrow}_{r \rightarrow \infty} ?? \quad (*)$$

Claro...esto depende del valor de **p**.

a) Si **p < 0**,  $\{\frac{1}{n^p}\} = \{n^{-p}\}$  es una sucesión positiva y estrictamente creciente,

∴ la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  **diverge**.

Otra forma de concluir lo mismo, utilizando el Teorema 11, sería:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} \neq 0.$$

b) Si **p = 0**,  $\{\frac{1}{n^p}\} = \{1\}$ , ¿qué podemos decir de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ ? **Diverge**, ¿por qué?

Ahora veamos si podemos utilizar el criterio de la integral para los restantes casos: ¿ $f(x) = \frac{1}{x^p}$  satisface las hipótesis del teorema?

c) Si **0 < p < 1** →  $1 - p > 0 \Rightarrow r^{1-p} \underbrace{\rightarrow}_{r \rightarrow \infty} \infty$ ,

Y mirando (\*), se tiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

es divergente. Luego, la serie diverge.

d) Si **p > 1** →  $1 - p < 0 \Rightarrow r^{1-p} \underbrace{\rightarrow}_{r \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ es convergente y converge a } \frac{1}{p-1},$$

$\therefore$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  **converge** si  $p > 1$ . ■

Ahora que ya conocemos algunas series y su **carácter**, es decir, si son convergentes o no y cuándo, las utilizaremos para poder analizar el carácter de otras series.

**Importante: no siempre podremos saber a qué converge una serie...a veces nos contentaremos con sólo conocer su carácter.**

**Teorema 13.** Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  dos series. Supongamos que  $a_n > 0$  y  $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**1. criterio de comparación:**

a)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{y } \sum b_n \text{ es convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ también es convergente.}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{y } \sum a_n \text{ es divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum b_n \text{ también es divergente.}$$

**2. criterio de comparación del límite:**

a) Si existe  $c \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

entonces ambas series convergen o ambas divergen.

b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \\ \text{y } \sum b_n \text{ es convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ también es convergente.}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \\ \text{y } \sum b_n \text{ es divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ también es divergente.}$$

*Observación 11.* En el teorema T13 – 2a se tiene que  $c$  no puede ser 0 o  $\infty$ . ¿Por qué te parece que no podemos afirmar nada?

### Ejercicio 16

Analiza el carácter de las siguientes series utilizando el teorema anterior.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n + 1}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{n} \right)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4^n}{n + 6^n}$$

**Resolución ítem (1)** Notemos que  $2^n + 1 > 2^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, si llamamos  $a_n = \frac{3}{2^n + 1}$  y  $b_n = \frac{3}{2^n}$ , vemos que:

$$0 < a_n = \frac{3}{2^n + 1} < \frac{3}{2^n} = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además,  $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{1}{2^n}$  es una serie geométrica con razón  $r = \frac{1}{2}$  y como  $|r| < 1$  resulta convergente. De donde, por el Teorema 13 (1i), la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n + 1}$  es convergente ■

A ver, ustedes solos ahora...

### III. Series alternantes

Otra familia importante de series es la de las **series alternantes**. Tan importante es esta familia, que necesita herramientas propias.

**Definición 9.** Una serie se dice **alternante**, si sus términos son alternadamente positivos y negativos.

### Ejemplo 10

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (\text{Serie armónica alternante}), \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

**Teorema 14** (Prueba de la serie alternante). *Si se considera la serie alternante*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

donde la sucesión  $\{b_n\}$  satisface que

$$i) b_n > 0 \quad \forall n, \quad ii) b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \quad y \quad iii) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

entonces la serie **es convergente**.

Un ejemplo muy interesante es que, mediante esta prueba, mostramos que la serie armónica alternada es convergente. Es decir:

la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  **es convergente**.

### Ejercicio 17

Muestra que la afirmación anterior es verdadera.

*Observación 12.* Notar que no es necesaria esta herramienta para analizar el carácter de una serie geométrica con razón negativa, por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \quad r = -\frac{1}{3}, \quad a = -\frac{1}{3}$$

ya sabemos que es una serie convergente y ... converge a  $\left(-\frac{1}{4}\right)$ , ¿verdad?

Veamos algunos criterios más que nos ayuden a determinar el carácter de otros tipos de series. A estas alturas, ya habrá notado el lector que no es tan sencillo y necesita disponer de un buen conjunto de herramientas a la hora de trabajar con series.

**Definición 10.** Una serie  $\sum a_n$  es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos  $\sum |a_n|$  es convergente.

### Ejemplo 11

Uso de la definición anterior:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Es absolutamente convergente pues  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente por ser una p-serie con  $p = 2$ .

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ no es una serie absolutamente convergente pues } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ es la serie armónica y sabemos que NO es convergente.}$$

**Teorema 15.** *Si una serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

Este criterio es muy útil, por ejemplo, para series de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$$

¿Cómo utilizaría el Teorema (15) precedente para mostrar que la serie anterior es convergente?

**Teorema 16** (Prueba de la razón). *Sea la serie  $\sum a_n$  y supongamos que vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

*Resulta que:*

1. *Si  $L < 1$ , entonces la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente y luego, por el teorema anterior, la serie es además convergente.*
2. *Si  $L > 1$  o  $L = \infty$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.*
3. *Si  $L = 1$  no podemos decir nada sobre el carácter de la serie.*

**Teorema 17** (Prueba de la raíz ). Sea la serie  $\sum a_n$  y supongamos que vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L.$$

1. Si  $L < 1$ , entonces la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente y entonces, por el teorema anterior (15), es convergente.
2. Si  $L > 1$  o  $L = \infty$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.
3. Si  $L = 1$  no podemos decir nada sobre el carácter de la serie.

*Observación 13.* Notemos que si  $L = 1$ , en los dos criterios enunciados antes, el criterio **no decide**. Veamos por qué sucede esto para el caso de la **Prueba de la razón** por ejemplo. Consideremos la serie armónica y la p-serie con  $p = 2$ , es decir

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Aplicando la Prueba de la razón a cada ejemplo, vemos que  $L = 1$ . ¿Y qué sabemos de cada una de estas series?

Sabemos que la primera es una serie convergente por ser una p-serie con  $p > 1$  y que la segunda es una serie divergente por ser la serie armónica. Estos son ejemplos de por qué el criterio no concluye nada si  $L = 1$ . **Te proponemos que busques vos otros ejemplos.**

## IV. Ejercicios sugeridos

### Sumas parciales

1. Dada la serie  $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{n-4}$ , escribe los 6 primeros elementos de la sucesión de sumas parciales asociada (no es necesario hacer cuentas, sólo escribir los términos que correspondan).
2. Repite el ejercicio anterior para la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ .

3. Sea  $s_n$  el elemento genérico de la sucesión de sumas parciales correspondientes a la serie  $\sum a_n$ . Calcula la suma de la serie cuyas respectivas sumas parciales se definen a continuación:

$$i) s_n = 2 - 3(0,8)^n, n \in \mathbb{N}; \quad ii) s_n = \frac{n^2 - 1}{4n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}.$$

### Ejercitando con Series numéricas Famosas

4. Considera el ejercicio (1) de la práctica anterior sobre sucesiones.
- Escribe una sucesión que te permita calcular la distancia total recorrida por la pelota en cada segundo que va transcurriendo. ¿Es convergente la sucesión?
  - ¿Qué ocurre si en cada rebote la pelota alcanza la misma altura que en el rebote anterior?
  - ¿Y si dispone de un sistema de propulsión que hace que en cada rebote duplique la altura anterior?
5. En el curso de ingreso, se vio que  $0.\hat{9} = 1$ . Muestra este resultado mediante la utilización de una adecuada serie.
6. Muestra el carácter de la serie definida en cada ítem. Si es convergente, halla su suma cuando sea factible.

$$a) 4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \dots$$

$$e) 2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$$

$$c) \pi + \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \dots$$

$$g) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{3^n}{e^{n-2}}$$

$$d) \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

## Resultados de Convergencia

7. Determina en cada caso el carácter de la serie, y de ser posible, calcula el valor de su suma.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n),$$

$$b) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2},$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} (5^{-n} - 7^{2-n}),$$

$$d) \sum_{n=10}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right),$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+3^n}{5^{n-1}},$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{e^n} - \frac{2}{n(n+1)} \right].$$

8. Determina si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentra su suma.

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2},$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n},$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left( (0.8)^{n-1} - (0.3)^n \right),$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n},$$

$$e) \sum_{k=7}^{\infty} \left[ \cos(1) \right]^k,$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right),$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2},$$

$$h) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1},$$

$$i) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n+1},$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)},$$

$$k) \sum_{n=3}^{\infty} \left[ \cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2} \right],$$

$$l) \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right),$$

$$m) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}.$$

9. Utiliza el Teorema (12) para determinar el carácter de las series que figuran a continuación.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/5}},$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2},$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3},$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4},$$

$$c) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1},$$

$$g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}.$$

$$d) 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots,$$

10. ¿Es factible afirmar, mediante el Teorema (12), algo sobre el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}?$$

11. Determina los valores de  $p > 0$ , para los cuales la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$  es convergente.

### Criterio de Comparación

12. Suponiendo que  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  son series con términos positivos. Responde las siguientes preguntas justificando su respuesta.

a) Si  $a_n > b_n$  para toda  $n$  y  $\sum b_n$  es convergente ¿qué puedes decir respecto al carácter de  $\sum a_n$ ?

b) Si  $a_n < b_n$  para toda  $n$  y  $\sum b_n$  es convergente ¿qué puedes decir respecto al carácter de  $\sum a_n$ ?

c) Si  $a_n > b_n$  para toda  $n$  y  $\sum b_n$  es divergente ¿qué puedes decir respecto al carácter de  $\sum a_n$ ?

d) Si  $a_n < b_n$  para toda  $n$  y  $\sum b_n$  es divergente ¿qué puedes decir respecto al carácter de  $\sum a_n$ ?

13. Determina el carácter de las siguientes series, utilizando el criterio de comparación.

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1},$$

$$f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)^3},$$

$$b) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}},$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4^n},$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}},$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n},$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n - 1},$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^3 + n + 1}.$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5}},$$

14. a) Utilizando los ítems 2 del teorema (13) determina el carácter de las siguientes series.

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3},$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)},$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n} e^n},$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

b) Da un ejemplo de un par de series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  con términos positivos donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  y  $\sum b_n$  diverge pero  $\sum a_n$  converge.

15. Si  $\sum a_n$  es una serie convergente con términos positivos, ¿puedes asegurar que  $\sum \operatorname{sen}(a_n)$  también es convergente?

### Serie Alternante

16. Determina si las siguientes series son convergentes o divergentes.

$$a) -\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \dots$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n},$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1},$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arctan(n),$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n},$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{2^n}.$$

17. Determina para qué valores de  $p \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$  es convergente.

### Criterios de Convergencia absoluta

18. Determina el carácter de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , si es posible, en cada ítem sabiendo que:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0,8,$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

19. Determina si las siguientes series son absolutamente convergentes, convergentes o divergentes.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3},$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!},$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 5},$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n,$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}},$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n!}.$$

20. Dada una sucesión  $\{b_n\}$  de elementos positivos convergente a  $\frac{1}{2}$ , analiza si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos(n\pi)}{n}$$

es absolutamente convergente.

21. Demuestra que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$  es convergente para todo  $r \in \mathbb{R}$ . A partir de esto se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} = 0$$

22. En la sección 11.7 de [3] podrás encontrar una variedad de ejercicios de series numéricas, elije los que consideres para poder repasar los conceptos vistos.

## MISCELÁNEA

1. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente respuesta.

a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces  $\sum a_n$  converge.

b) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen}(1)}$  es convergente.

c) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 6^n$  es convergente con  $c_n > 0 \quad \forall n$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-6)^n$  es convergente.

d) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es divergente, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  es divergente.

2. **Problema de Basilea** (Euler lo resolvió en el año 1735): si bien no se conoce muy bien su origen, lo cierto es que muchos fueron los interesados en resolverlo en esa época.

*El problema de Basilea consiste en determinar cuál es el valor exacto de la suma de los cuadrados de los inversos de todos los números naturales, es decir, calcular la suma de la siguiente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Este problema fue propuesto por primera vez por el matemático Pietro Mengoli en 1644 y fue popularizado por Jakob Bernoulli en 1689, pero ninguno de los dos lo resolvieron. Otros grandes matemáticos de la época, como Johann Bernoulli, Leibnitz y Wallis tampoco pudieron encontrar la solución (aunque este último calculó su valor con 3 decimales). Este hecho le dio al problema aún más importancia. Al final fue*

el genial Leonhard Euler quien le puso el cascabel al gato, como en muchas otras ocasiones. De hecho este problema se acabó denominando así porque tanto Euler como los Bernoulli residían allí, aunque hoy Basilea se conozca por ser cuna de Roger Federer. Dato extra: Euler, nacido en 1707, era además: ingeniero + físico + astrónomo + filósofo + arquitecto + músico + teólogo a veces...

Sabemos que la  $p$ -serie con  $p = 2$  es convergente. Pero... ¿a qué converge???

Euler demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

¿Podrías corroborar que este resultado es factible mediante el uso de algún software?

¿Cuántos términos sería adecuado utilizar para tener un error en la aproximación del orden de  $10^{-10}$ ?

Utilizando esta información, halla la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}. \\ b) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}, & \end{array}$$

3. Dada una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $L > 1$ .

a) Realiza un gráfico que represente esta situación.

b) ¿Qué puedes decir de la convergencia de las siguientes series?

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|)^{-n}.$$

### 1.3. Series de funciones

En la sección anterior, tratamos con series cuyos términos eran números reales. Ahora vamos a trabajar con series cuyos términos nacen en una sucesión de la forma  $\{f_n(x)\}_n$

donde  $x$  pertenece a algún subconjunto de los números reales (también podría considerarse el conjunto de los complejos...pero no es ahora el caso).

## I. Serie de potencias

**Definición 11.** Llamamos **Serie de potencias** centrada en  $x_0$  a una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + \dots + c_n (x - x_0)^n + \dots$$

donde los coeficientes  $c_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

*Observación 14.* Notemos que si en la serie anterior,  $x = x_0$ , resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0.$$

*Observación 15.* Si  $c_n = c \quad \forall n$ , y considero  $x$  **fijo**, la serie se transforma en una serie geométrica de razón

$$r = x - x_0$$

y por lo tanto, si  $|r| = |x - x_0| < 1$ , la serie es convergente y converge a

$$\frac{c}{1 - (x - x_0)}.$$

### Ejemplo 12

Dada la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} 5(x - 3)^n$ , encuentra en qué intervalo converge y cuál sería la función suma de la serie.

**Resolución:** Si  $|x - 3| < 1$ , es decir,

$$2 < x < 4,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5(x - 3)^n = \frac{5}{4 - x}, \quad \forall x \in (2, 4).$$

La función suma sería  $S(x) = \frac{5}{4-x}$ ,  $\forall x \in (2, 4)$  ■

Observación 16. Notemos que en el ejemplo anterior, obtuvimos una **función suma**, pues

para cada valor de  $x$ , la serie converge a un número que depende de  $x$ .

Como consecuencia de lo anterior, **es muy interesante el proceso inverso**. Es decir, dada una función  $f(x)$ , ¿podemos hallar una serie de potencias tal que su función suma sea  $f$ ? La importancia de este hecho radica en que a veces la función  $f$  original es de difícil manejo y no así una serie de potencias o una suma parcial, como veremos en la resolución de algunas ecuaciones en derivadas parciales en la tercera unidad.

### Ejercicio 18

Halla una serie que represente a la función  $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ . Además, indica en qué intervalo real la representa.

**Resolución:** Trabajando algebraicamente, resulta:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2x-1} = 3 \frac{-1}{-2x+1} = -3 \frac{1}{1-2x} \stackrel{\underbrace{\quad}}{=}_{|2x|<1} \\ &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = -3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \forall |x| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es decir que la serie anterior representa a la función  $f$  en el intervalo  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Entonces:

1. ¿qué ocurre en los bordes de éste intervalo? Si  $x = -\frac{1}{2}$ , ¿de qué serie geométrica hablamos? Ya sabemos qué carácter tiene, ¿verdad? Es divergente. ¿Por qué?
2. ¿tiene sentido pensar qué ocurre en  $x = \frac{1}{2}$ ?
3. la última expresión en la serie anterior, nos muestra que es una serie de potencias con coeficiente  $c_n = (-3) 2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$  ■

**Notar que en para este tipo de series de potencias a coeficientes constantes, el intervalo de convergencia es simétrico con respecto a  $x_0$ .**

Ahora, retornando al caso general donde los coeficientes  $c_n$  son variables que dependen de  $n$ , veamos cómo trabajar.

¿Por qué necesitamos las series de potencias?

El uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química.

Por ejemplo, la **función de Bessel**, llamada así en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846). Esta función surgió cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol.

Entonces, Bessel obtuvo esta serie como solución:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2}, \quad c_{2n-1} = 0 \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, sin olvidar la distribución de temperaturas en una lámina circular y las vibraciones de una membrana de un tambor.

Ahora sí,

**¿cómo saber si una serie de potencias en general converge?  
¿Dónde converge?**

Para responder a esta pregunta, podemos seguir utilizando el criterio de la razón.

### Ejemplo 13

Considera la serie de Bessel de orden 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

Entonces,  $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$  y

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2}$$

Luego, aplicando límite en ambos miembros:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la serie de Bessel converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ , es decir que queda definida una función, llamada  $J_0$ , con dominio en  $\mathbb{R}$  como figura en página anterior.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

### Teorema 18. Convergencia y radio de convergencia.

Sea la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

sólo hay 3 posibilidades:

- 1) La serie converge sólo cuando  $x = x_0$ , es decir que el radio de convergencia es  $R = 0$ .
- 2) La serie converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ , es decir el radio de convergencia es infinito.
- 3) Existe  $R > 0$  tal que la serie converge si  $|x - x_0| < R$  y diverge si  $|x - x_0| > R$ .

Observación 17. Notar que:

1) en el ítem (3) del teorema anterior la función suma de la serie está definida en el intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ,

2) en este mismo ítem, para **cada** serie, habrá que chequear qué ocurre con  $x = x_0 - R$  y con  $x = x_0 + R$ .

Si bien no justificaremos esto pero, dentro del intervalo de convergencia, a la serie podemos tratarla como si fuese una simple suma. Entonces, podemos derivarla e integrarla término a término. Y no sólo eso, sino que ...

la serie obtenida sigue siendo **convergente**.

¿Para  $x$  en qué intervalo converge?

Lo anterior se formaliza en el siguiente teorema.

**Teorema 19.** *Sea la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

*Suponiendo que tiene radio de convergencia  $R > 0$ , entonces resulta que la función suma  $f(x)$  es derivable e integrable en el intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . Mas aún:*

1.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}$$

2.

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n + 1}.$$

*En ambos casos, las series resultantes son convergentes y conservan el radio de convergencia.*

### Ejercicio 19

Halla la serie que representa a la función  $f(x) = -\ln(4 - x)^5$ .

Sugerencia: usa de modo conveniente lo que ves en la resolución del ejemplo (12) de página 44.

## II. Serie de Taylor

En otros cursos de cálculo hemos estudiado la linealización de una función derivable en un punto  $x = a$  mediante un polinomio de primer grado, de ecuación

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \quad (\text{para algún } \delta > 0).$$

Esta linealización era utilizada para aproximar el valor numérico de la función en valores cercanos a  $x = a$ .

Si la función  $f$  tiene derivadas de mayor orden, por ejemplo hasta orden  $n$ , en un entorno de  $x = a$  y estas no se anulan en  $x = a$ , podemos obtener **mejores** aproximaciones de  $f$  con polinomios de mayor grado. Estos polinomios se denominan **polinomios de Taylor de grado  $n$  generado por  $f$  en  $x = a$** .

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Veamos un ejemplo clásico.

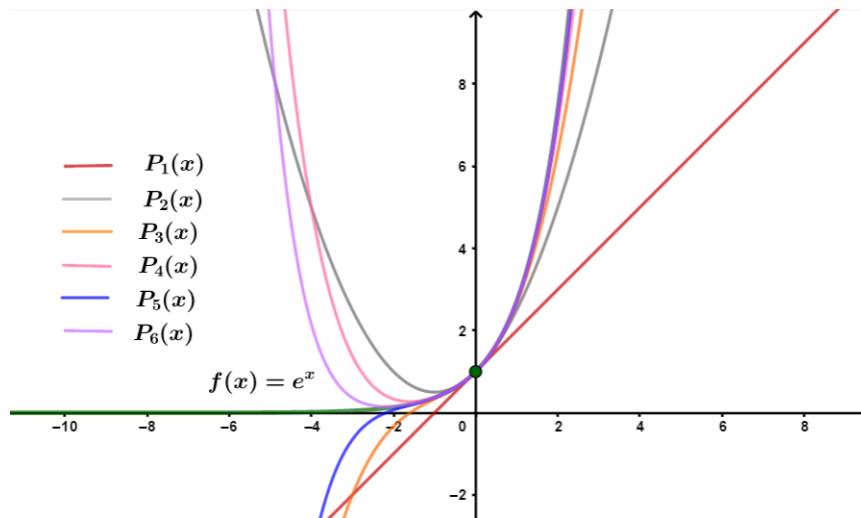
### Ejemplo 14

Dada  $f(x) = e^x$  encontremos el polinomio de Taylor de grado  $n$  alrededor del origen.

**Resolución:** Es claro que  $f^{(k)}(0) = 1$  para todo  $k$  luego tenemos que:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Observemos las gráficas:



Como la función exponencial tiene derivadas de todos los órdenes alrededor del origen, podríamos generar la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

que converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Esta serie, ¿converge a la función exponencial?**

Y en general...

**¿Para qué funciones será posible generar la serie**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n?$$

**¿Esta serie converge a  $f(x)$ ?**

**¿Para qué valores de  $x$ ?**

Comencemos respondiendo la segunda pregunta, definiendo serie de Taylor de una función.

**Definición 12.** Sea  $f$  una función infinitamente derivable en algún intervalo abierto que contiene a  $x = a$ . Entonces llamaremos **Serie de Taylor generada por  $f$  en  $x = a$**  a

la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

Si  $a = 0$  la serie también recibe el nombre de **Serie de Maclaurin generada por  $f$** .

La serie de Taylor converge siempre para  $x = a$  al valor  $f(a)$ . Nos preguntábamos si la serie converge a  $f(x)$ . En general la respuesta no es afirmativa para  $x \neq a$ , veamos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 15

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  es infinitamente derivable en un entorno del origen y  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$ .

Luego la serie de Maclaurin  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  converge a la función nula para todo  $x$  real, pero converge a  $f(x)$  solamente en  $x = 0$ .

Por lo tanto el siguiente teorema nos proporciona una condición suficiente para la convergencia de una serie de Taylor a la función que la generó.

**Teorema 20.** Si  $f$  tiene derivadas de todo orden y continuas en un intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  y

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

entonces la serie de Taylor generada por  $f$  alrededor de  $x = a$  converge a  $f$  en  $(a - \delta, a + \delta)$ .

Es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(x), \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Respondamos ahora la pregunta que nos planteamos, ¿a qué función converge la serie de Maclaurin generada por  $e^x$ ?

Si  $|x| < \delta$  tenemos entonces que  $f^{(n)}(x) = e^x < e^\delta$ , luego si tomamos  $M = e^\delta$  tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

en  $(-\delta, \delta)$ . Pero como este argumento es válido para todo  $\delta$  real entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

De manera análoga verifiquemos que valen los siguientes desarrollos para las funciones *seno* y *coseno*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que si  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  con radio de convergencia  $R > 0$  entonces aplicando lo visto en la sección anterior tenemos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n.$$

Ahora bien, hasta el momento hemos trabajado con funciones “buenitas” y fue sencillo obtener una ley genérica para los coeficientes  $c_n$  de la serie de Maclaurin....pero no siempre es factible. A veces, podemos pensar como en el ejercicio (19) de página 49, es decir, trabajar algebraicamente y utilizar propiedades y operaciones conocidas entre funciones. Por ejemplo, consideremos las siguientes series de Maclaurin y la correspondiente función suma:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1.$$

La segunda serie puede obtenerse a partir de la primera considerando una composición de funciones. ¿Cómo sería esto?

Ya hemos dado **varias** razones para motivar el estudio del tema **series**...veamos una razón más: las series nos permiten **integrar** funciones que antes no podíamos. Por ejemplo, una antiderivada de la función  $e^{-x^2}$  no puede expresarse mediante una función elemental. Utilizando una serie de Maclaurin para representar a  $e^{-x^2}$ , podemos encontrar un desarrollo en serie de potencias que represente a  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ .

### III. Serie de Fourier

Comenzaremos aquí recordando conceptos y propiedades de funciones e integrales. Recuerdos básicos para trabajar con comodidad con esta nueva clase de series tan útil para representar algunas funciones, y más adelante, resolver ecuaciones en derivadas parciales sujetas a ciertas condiciones.

**Lema 21.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones.

1. Si  $f$  y  $g$  son dos funciones periódicas de período  $P$ , la combinación lineal  $(a f + b g)$  también será una función periódica de período  $P$  para cualquier par de constantes reales  $a$  y  $b$ .
2. a) Si  $f$  y  $g$  son ambas funciones pares o impares,  $f \cdot g$  será una función par.  
b) Si  $f$  es par y  $g$  es impar, el producto será una función impar.
3. Si  $f$  es una función par e integrable en  $[-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .
4. Si  $f$  es una función impar e integrable en  $[-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**Definición 13.** Llamaremos serie de **Fourier** a una serie **trigonométrica** de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w x) + b_n \operatorname{sen}(n w x)$$

donde  $a_0, a_n$  y  $b_n$  son números reales y son los “coeficientes” de la serie.

Ahora...si quisiéramos poder escribir a una función  $f$  mediante una serie de Fourier...¿cómo tendrían que ser los coeficientes  $a_0, a_n$  y  $b_n$ ?

A partir de acá, y **sólo por comodidad**, consideramos  $2P$  en lugar de  $P$  como período principal. Las definiciones son más sencillas y podemos usar mejor los resultados anteriores.

Consideremos  $f$  una función periódica de período  $2P$  e integrable en dicho período y definamos:

$$w = \frac{2\pi}{2P} = \frac{\pi}{P}$$

y los “coeficientes de Fourier” como:

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(x) \cos(nwx) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(x) \operatorname{sen}(nwx) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora, hemos de considerar las siguientes preguntas:

**La serie obtenida con estos coeficientes, ¿es convergente?,  
¿dónde converge?,  
¿a qué converge?**

Antes de continuar resolvamos los siguientes ejercicios.

### Ejercicio 20

Ante todo, y con fines prácticos, **mostrar** que:

1. si  $f$  es impar,

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

2. si  $f$  es par, entonces

$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Ejercicio 21

Muestra que si  $f$  es una función periódica de período  $2P$ , entonces

$$\int_0^{2P} f(x) dx = \int_{-P}^P f(x) dx.$$

Estos ejercicios anteriores son importantísimos pues permiten simplificar cuentas en el caso de que la función  $f$  sea par o impar.

*Observación 18.* Del ejercicio anterior, concluimos que:

1. Si una función es impar, la serie generada constará sólo de senos.
2. Si, en cambio, la función es par, la serie generada será sólo de cosenos.

### Ejercicio 22

Considerando la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

una función periódica de período  $2\pi$ , verifica que los coeficientes de Fourier asociados a esta función son: para  $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k (k = 1, \dots) \\ \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1 (k = 1, \dots) \end{cases} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

No olvidar **dibujar** la función, aunque no se indique.

## Teorema 22. Convergencia de la Serie de Fourier

Sea  $f$  una función periódica, de período  $2P$ .

1. Si  $f$  y  $f'$  son ambas seccionalmente continuas en el intervalo  $[-P, P]$  (con esto decimos que si tienen discontinuidades, son un número finito, y si tienen saltos, estos serán acotados en este período), la **Serie de Fourier es convergente**. Es decir que existe una función suma a la que llamaremos  $S(x)$ .

2. Si  $f$  es continua en  $x_0 \in [-P, P]$ , entonces

$$S(x_0) = f(x_0)$$

3. Si  $f$  es discontinua en  $x_0 \in [-P, P]$ , entonces

$$S(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

### Ejercicio 23

Con los coeficientes obtenidos en el ejercicio (22), aplica este teorema (22) y da la función suma de la serie. Además, grafica la función  $f$  y la función suma  $S(x)$  en el intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ . ¿Cuál es el valor de  $(10^5\pi)$ ? ¿Y el de  $(15009\pi)$ ?

### Resolución:

1. Recordemos que la serie asociada a la función periódica  $f$  definida en el ejercicio (22) será de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w x) + b_n \operatorname{sen}(n w x) \quad (3)$$

donde los coeficientes vimos que eran

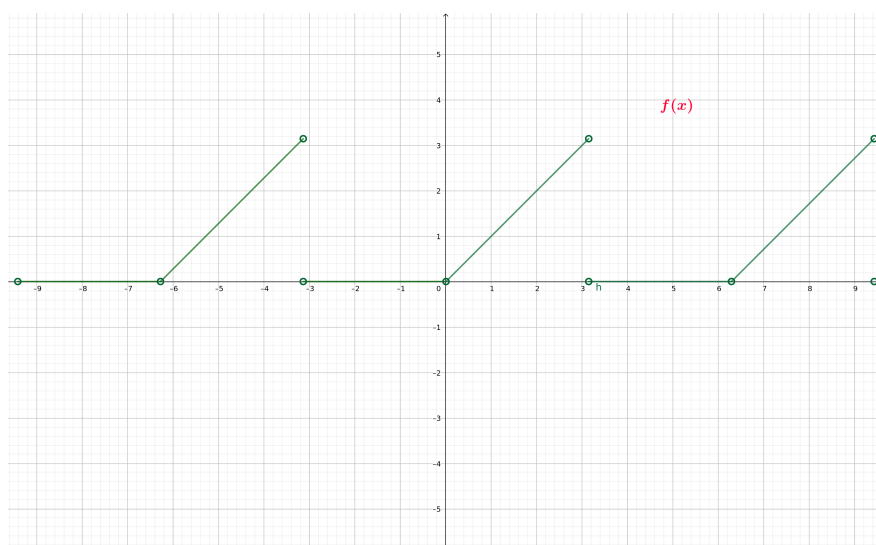
$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k (k = 1, \dots) \\ \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1 (k = 1, \dots) \end{cases} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \forall n$$

y reemplazando en (3), obtenemos

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)wx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kwx).$$

Según el teorema (22), dado que  $f$  y  $f'$  son seccionalmente continuas (¿por qué?), esta serie es convergente, por ende existe la función suma a la que llamamos  $S(x)$ .

2. La gráfica de la función  $f$  en el intervalo pedido sería



¿Cuál sería la gráfica de la función  $S(x)$ ?

3. Por último el ejercicio nos pregunta: ¿Cuál es el valor de  $S(10^5\pi)$ ? ¿Y el de  $S(15009\pi)$ ?

Nuevamente apelamos al Teorema (22):

1. en los múltiplos pares de  $\pi$ , el valor del salto es  $0$  (¿por qué?). Luego

$$S(10^5\pi) = 0,$$

2. en los múltiplos impares de  $\pi$ , el valor del salto es  $\pi$  (¿por qué?). Luego

$$S(15009\pi) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Ahora, veamos otro tipo de situación a resolver... ¿qué sucede si sólo tengo información de una función en un intervalo  $[0, b]$ ? Es decir, que la función NO es periódica pero aún

así quisiera aprovechar la posibilidad de escribir a la función mediante una combinación lineal de términos trigonométricos.

**¿Podría representar a esa función mediante una Serie de Fourier?**

TODO lo anterior, dice que **NO** pues no tenemos una función periódica. Pero, mediante la definición de una **función auxiliar**, lo podremos hacer. Veamos el siguiente algoritmo.

**Algoritmo**

✓ Realizar una extensión periódica de la función a  $\mathbb{R}$  dependiendo de la situación que sea necesaria satisfacer. **Por ejemplo**, supongamos que necesitamos establecer la representación de  $f$  mediante una serie de Fourier que sea sólo de cosenos. Entonces realizamos lo que se llama una **extensión par**. La llamamos  $g$ , por ejemplo. Entonces:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, b] \\ f(-x), & x \in [-b, 0). \end{cases}$$

✓ Hallar los coeficientes de Fourier asociados a  $g$ .

✓ A esta serie de Fourier, restringirla al intervalo  $[0, b]$ . Es la representación que buscábamos de nuestra función  $f$  original.

**Ejercicio 24**

Halla una serie que sólo contenga senos (serie de senos) y que represente a la función  $f(x) = x$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

**Ejercicio 25**

Halla una serie que sólo contenga cosenos (serie de cosenos) y que represente a la función  $f(x) = x$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

*Observación 19.* Puede encontrar una generalización de esta situación en Anexo - **D**. Para profundizar este tema puede leer en [6] cómo trabajar con problemas en los que aparecen

señales más complejas, por ejemplo, aquellas con **simetrías de media onda y cuarto de onda**.

#### IV. Ejercicios sugeridos

1. ¿Cuál(es) de las siguientes son series de potencias?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} n(\operatorname{sen}(3) - x)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^n}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(n) (x - \pi)^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen}(x))^n}{\sqrt{n}}$$

#### Representación de funciones mediante Series de Potencias (Primera Parte)

2. Considerando que la función  $\frac{1}{1-x}$  puede representarse mediante la Serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

en el intervalo  $(-1, 1)$ , determina en qué dominio y mediante qué Serie se puede representar a las siguientes funciones.

$$a) \frac{1}{1+x},$$

$$c) \frac{x}{2-x},$$

$$b) \frac{1}{1+x^2},$$

$$d) \frac{5}{1-3x^2}.$$

3. a) Demuestra que  $\frac{1}{x-3} = \frac{-1}{1-(x-2)} \quad \forall x \neq 3.$

- b) Encuentra un desarrollo en serie de potencias con centro  $x_0 = 2$  de la función  $\frac{1}{x-3}.$

## Intervalo y Radio de Convergencia de una serie de potencias

4. Determina el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} (x+3)^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} x^n$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} (x-2)^n$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$$

5. Encuentra el valor de  $b < 0$  para que la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x+1)^n$$

tenga radio de convergencia  $R = 5$ . Analiza el intervalo de convergencia para los valores encontrados.

6. Supón que  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$  converge cuando  $x = -4$  y diverge cuando  $x = 6$ . Determina el carácter de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-8)^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-3)^n$$

7. Dadas las series de potencias  $\sum a_n x^n$  y  $\sum b_n x^n$  con radio de convergencia  $R = 2$  y  $R = 3$  respectivamente, responde las siguientes preguntas. Justifica tus respuestas.

a) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie  $\sum (a_n + b_n) x^n$ ?

b) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie  $\sum a_n x^{2n}$ ?

8. ¿Puede una serie de potencias ser convergente en el intervalo  $(-\infty, 3]$ ?

### Representación de funciones mediante Series de Potencias (Segunda Parte)

9. Encuentra una representación como serie de potencias para la función y determina el radio de convergencia.

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$

e)  $f(x) = \ln(5 - x)$

b)  $f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 2}$

f)  $f(x) = x^2 \arctan(x^3)$

c)  $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$

g)  $f(t) = \int_0^t \frac{x}{x^2 + 2} dx$

d)  $f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)^3}$

h)  $f(t) = \int_0^t x^2 \ln(1 + x) dx$

10. Utiliza el ítem 3b) para encontrar el desarrollo en series de potencias con centro en  $x_0 = 2$  de la función  $\frac{x - 2}{(x - 3)^2}$ .

11. Sea  $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ . Demuestra que la serie

$$\sum f_n(x)$$

es convergente para todos los valores de  $x$ , pero la serie de derivadas

$$\sum f'_n(x)$$

es divergente cuando  $x = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

12. En el siguiente desarrollo demostramos que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

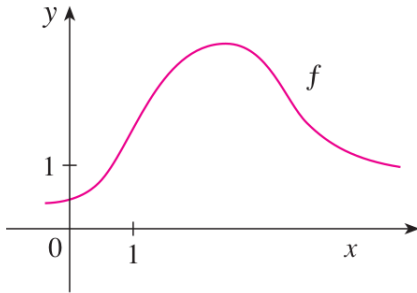
converge a 6, utilizando propiedades de series numéricas y series de potencias. Lee atentamente el desarrollo y explicita que propiedad (y/o teorema) fue utilizada en

cada paso.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad ; & |x| < 1 \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad ; & |x| < 1 \\ \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad ; & |x| < 1 \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad ; & |x| < 1 \\ \frac{x+1}{(1-x)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \quad ; & |x| < 1 \\ \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \quad ; & |x| < 1 \\ 6 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Series de Taylor:**

13. Dada la función cuyo gráfico se presenta:



a) Explica porqué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \dots$$

**no** es la serie de Taylor de  $f$  centrada en 1.

b) Explica porqué la serie

$$2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \dots$$

**no** es la serie de Taylor de  $f$  centrada en 2.

14. Encuentra la serie de Taylor para  $f$  centrada en  $x = 4$  si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)} \quad \forall n$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

15. Utiliza la serie de Maclaurin para dar una representación de la función dada:

a)  $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ ,

c)  $f(x) = x \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ ,

b)  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ ,

d)  $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ .

En el ítem (d), es conveniente considerar la identidad  $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ .

16. Determina la serie de Maclaurin asociada a la función  $f$ . Grafica  $f$  y las 10 primeras sumas parciales en la misma pantalla. ¿Qué observas? (Si utiliza Geogebra, el comando es: PolinomioTaylor(f,a,nro orden))

a)  $f(x) = \cos(x^2)$ ,

b)  $f(x) = x e^{-x}$ .

17. En ambos casos, mediante el uso de sucesivas sumas parciales (con la herramienta o software que prefiera utilizar), halla el valor aproximado solicitado con 5 decimales exactos.

a)  $\cos 5^\circ$ ,

b)  $\frac{1}{e^{0.1}}$ .

18. Evalúa la integral indefinida mediante el uso de una adecuada serie de funciones.

a)  $\int x \cos(x^3) dx$ ,

b)  $\int \frac{\cos(x) - 1}{x} dx$ .

19. Mediante el uso de una adecuada serie, evalúa el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} - e^{x^2} + \cos(x) - 1}{x^2}.$$

20. Calcula la suma de la serie:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!},$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1} (2n+1)!}.$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n} n!},$$

21. Un vehículo se desplaza a una velocidad de  $20 \text{ m/s}$  y con una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  en un instante dado. Mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, estime qué tanto se desplazará el automóvil en el siguiente segundo. ¿Sería razonable utilizar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el minuto siguiente?

### Series de Fourier

22. Dada la función  $f$  periódica de período  $2\pi$  encuentra los coeficientes de la serie de Fourier asociada.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos(x), & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$b) f(x) = x \text{ con } x \in [-\pi, \pi)$$

23. Utilizando un software, grafica las sumas parciales  $S_2(x)$ ,  $S_4(x)$  y  $S_6(x)$  de la serie de Fourier de las funciones del ejercicio anterior.

24. Encuentra la serie de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & 1 \leq |x| < 2 \end{cases}$$

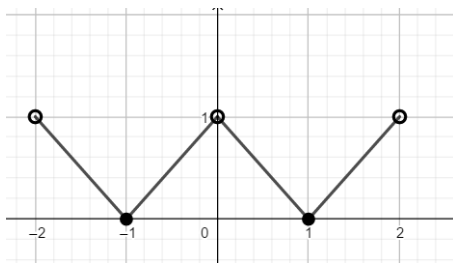
con  $f(x+4) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Grafica  $f$  y  $S$  en el intervalo  $[-8, 8]$ . Justifica.

25. El voltaje  $V(t) = E \text{ sen}(\omega t)$ , donde  $t$  representa el tiempo, se pasa a través de un rectificador que recorta la parte negativa de la onda, definiendo la siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0 \\ E \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \leq t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases} ; \quad f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(t).$$

Encuentra la serie de Fourier de  $f$  recordando que  $w = \frac{2\pi}{P}$ , con  $2P$  período fundamental de  $f$ . Halla la función suma justificando su respuesta.

26. Dada la función periódica de período 2 definida por la gráfica, determine si las siguientes proposiciones son verdaderas:



- a) La serie de Fourier de  $f$  contiene sólo senos.  
 b) La serie converge a una función definida en  $\mathbb{R}$ .  
 c) La serie converge a una función continua.

27. a) Muestra que si  $-1 \leq x \leq 1$  entonces

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x)$$

- b) Sustituyendo  $x$  por un valor conveniente, muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

El anterior es el llamado Problema de Basilea que describimos en la Miscelánea de la sección correspondiente a Series numéricas. Notar que estamos mostrando que  $\pi^2 = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , es decir que tenemos una forma de conocer las cifras de  $\pi$ .

28. a) Encuentra la serie de Fourier asociada a la función

$$f(x) = |x| \quad \text{si} \quad |x| \leq 1 \quad \text{y} \quad f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- b) Utiliza el ítem anterior para probar que

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

29. a) Encuentra el desarrollo en serie de Fourier asociado a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} ; f(x + 2\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}.$$

- b) Utiliza el ítem anterior para probar que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n-1} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

30. Encuentra la serie de Fourier que contenga sólo senos y que represente a cada función en el intervalo dado:

a)  $f(x) = -1, \quad 0 < x < 1.$

b)  $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \pi.$

c)  $f(x) = x^2, \quad 0 < x < \pi.$

31. Encuentra la serie de Fourier que contenga sólo cosenos y que represente a cada función en el intervalo dado:

a)  $f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi.$

b)  $f(x) = 1 + x, \quad 0 < x < \pi.$

c)  $f(x) = x - x^2, \quad 0 < x < 1.$

32. Sea la función definida en el intervalo  $(0, T)$  mediante la ley  $f(t) = t$ . Halla el desarrollo de Fourier de período mínimo, que represente a  $f$  en el intervalo  $(0, T)$  tal que:

a) contenga sólo términos en senos.

b) contenga sólo términos en cosenos.

c) contenga sólo términos armónicos impares [4].

d) contenga sólo cosenos y únicamente armónicos impares [4].

e) contenga sólo senos y únicamente armónicos impares [4].

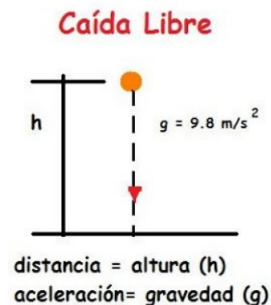
En cada caso determina el período y dibuja la gráfica de la función suma de la serie obtenida.

# Capítulo 2

## Ec. Diferenciales Ordinarias (EDO's)

### 2.1. Introducción

Recordando el sencillo problema de “caída libre”, en el que simplemente se tiene un objeto de masa  $m$  a una altura  $h$  y se lo deja caer



¿Qué fuerzas actúan sobre el cuerpo?

Observemos que solamente actúa el peso del cuerpo (movimiento en el eje vertical), es decir que de acuerdo a la segunda ley de Newton, se tiene que la ecuación que modela el proceso de caída libre es

$$m a = -m g.$$

Y si suponemos que  $y(t)$  es la función que describe la posición del cuerpo al caer,  $a(t) = y''(t)$  será la aceleración del cuerpo. Es decir, que la ecuación anterior se reescribe como:

$$y'' = -g.$$

¿Cuál es la incógnita en este problema?

El objetivo de resolver este problema es encontrar la posición del cuerpo en cada momento, es decir, la incógnita es la **función**  $y(t)$ . Entonces, descubramos cómo resolver este tipo de modelos y otros más que irán apareciendo ([5, 6]).

## 2.2. Definiciones

**Definición 14.** Una **ecuación diferencial ordinaria**, que notaremos **EDO**, es una expresión de la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde

- $x$  es la variable independiente,
- $y$  es una función incógnita que depende de la variable independiente  $x$ ,
- $F$  es una función que relaciona a  $x$ ,  $y(x)$  y sus derivadas.

### Ejemplo 16

1.  $x y'' = e^{xy}$ , donde  $F(x, y, y'') = x y'' - e^{xy}$ ;
2.  $y' - k y = 0$ , donde  $F(x, y, y') = y' - ky$ ;
3.  $y^{(4)} - 2 y''' = \text{sen}(x)$ , donde  $F(x, y, \dots, y^{(4)}) = y^{(4)} - 2y''' - \text{sen}(x)$ .

**Definición 15.** El **orden de una ecuación diferencial** es el orden máximo de derivación que aparece en la ecuación.

Siguiendo el ejemplo 16 tenemos que:

1.  $x y'' = e^{xy} \leftrightarrow$  EDO de segundo orden.
2.  $y' - k y = 0 \leftrightarrow$  EDO de primer orden.
3.  $y^{(4)} - 2y''' = \sin(x) \leftrightarrow$  EDO de cuarto orden.

*Observación 20.* Una EDO también puede escribirse de forma **explícita** y **normalizada** como sigue:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Observemos que **el coeficiente principal** de la EDO es 1.

Por ejemplo, consideremos la ecuación:

$$x y'' = e^{xy}, \quad x \neq 0.$$

Es equivalente a

$$y'' = \frac{e^{xy}}{x}, \quad x \neq 0$$

donde ahora la EDO está expresada en forma explícita y normalizada.

**Definición 16.** Una EDO es **lineal** si es de la forma

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = G(x)$$

donde los  $a_i(x)$  son funciones que dependen de  $x$  llamados **coeficientes de la EDO**. Si  $G(x)$  es la función nula, diremos que la **EDO** es **homogénea**.

### Ejemplo 17

1.  $\cos(x) y'' + 2 x y = \tan(x) \rightsquigarrow$  EDO lineal no homogénea de orden 2.
2.  $x y^2 - \frac{x}{1+x^2} y' = 0 \rightsquigarrow$  EDO no lineal de primer orden.

**Definición 17.** Una **solución de una EDO**

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

en un intervalo abierto  $I$  es una **función**  $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $\tilde{y}$  es  $n$  veces derivable en  $I$ ,
- $\tilde{y}$  satisface la EDO (1) para todo  $x \in I$ ,

es decir:

$$\tilde{y}^{(n)} = F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}'', \dots, \tilde{y}^{(n-1)}) \quad \forall x \in I.$$

### Ejercicio 26

Determina si la función  $\tilde{y}(x) = x^2 - \frac{1}{x}$  es solución de la EDO

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 0, \quad x > 0.$$

Una solución de una EDO, puede ser expresada de **forma explícita**, es decir, definida por una expresión  $y = \tilde{y}(x)$  como en el ejercicio anterior o de **forma implícita** definida por una expresión  $G(x, y) = k$ , como puede verse en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 18

La función  $y$  definida de forma implícita por la ecuación

$$4x^2 - y^2 = 1 \quad (2)$$

es solución de la EDO  $yy' - 4x = 0$ .

**Resolución:** Recordemos que una expresión de la forma (2) define una función en un cierto dominio, por lo tanto consideremos que  $y = y(x)$ :

$$4x^2 - y^2(x) = 1$$

y derivamos implícitamente:

$$8x - 2y(x)y'(x) = 0$$

$$4x - y(x)y'(x) = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$yy' - 4x = 0$$

Por lo tanto la función definida implícitamente es solución de la EDO. ■

**Definición 18.** La **solución general de la EDO de orden  $n$**  definida por (1) es una familia de funciones de la forma:

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x, c_1, \dots, c_n)$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

### Ejercicio 27

Determina la solución general de la EDO

$$y''(t) = g$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

## I. Ejercicios sugeridos

1. En las siguientes ecuaciones diferenciales, en las cuales se indica el campo o área en la que se originan, determina: el orden y decide si es lineal o no, además indica la variable independiente.

a)  $3\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 9x = 2\cos(3t)$ , (Vib mecánicas, circuitos eléctricos, sismología)

b)  $\sqrt{1-y}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$ , (Ec. de Kidder, flujo de un gas a través de un medio poroso)

c)  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ , (Ec. de Hermite, mecánica cuántica, oscilador armónico)

d)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$ , (Competencia entre dos especies)

e)  $8 \frac{d^4y}{dx^4} = x(1-x)$ , (Deflexión de vigas)

2. Escribe una ecuación diferencial que se ajuste a la descripción física.

a) La razón de cambio en la temperatura  $T$  del café en el instante  $t$  es proporcional a la diferencia entre la temperatura  $M$  del aire en el instante  $t$  y la temperatura del café en el instante  $t$ .

b) La razón de cambio de la masa  $A$  de sal en el instante  $t$  es proporcional al cuadrado de la masa de sal presente en el instante  $t$ .

3. Determina si la función dada es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

a)  $y(x) = e^{-x} + x - 1$ ,  $y'' + y = x$ .

b)  $\theta(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \theta \frac{d\theta}{dt} + 3\theta = -2e^{2t}$ .

c)  $s(t) = 8 \cos(3t) + 6 \operatorname{sen}(3t)$ ,  $\frac{d^2s}{dt^2} = -9s$ .

4. Determina si la expresión dada es solución implícita de la ecuación diferencial correspondiente.

a)  $x^2 + y^2 = 6$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ .

b)  $y^2 - xy = c$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y-x}$ .

c)  $e^{xy} - y = x - 1$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$ .

5. Halla los valores de  $m$  para los cuales la función  $\phi(x) = e^{mx}$  es solución de la ecuación diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ .

6. Verifica que la función  $y = \tan(x) - x$ , definida para todo  $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$  con  $n \in \mathbb{Z}$  es una solución explícita para la ecuación diferencial  $y' = (x+y)^2$ . Ahora, responde las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el dominio de definición de esta ecuación?

- b) ¿Qué relación tiene con el dominio de la solución?
- c) ¿Qué conclusiones puedes obtener respecto al dominio de definición de una ecuación diferencial y el de una solución de la misma?

## 2.3. Resolución gráfica

Antes de aprender a **resolver una EDO** en forma clásica (es decir hallar una  $y(t)$  que satisfaga la EDO), podemos tener una idea de la forma que tendrá una solución (*si es que existe*) realizando un gráfico. Con esto, podríamos obtener características de una solución, como: intervalos de crecimiento o el valor de la solución en algún intervalo, etc.

Observemos que una ecuación

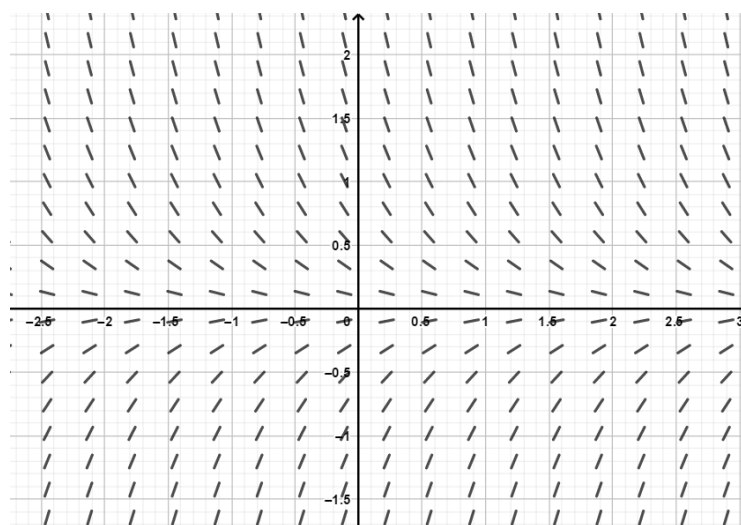
$$y' = F(x, y)$$

especifica la **pendiente** de la recta tangente a una solución de la EDO en cada punto  $(x, y)$  donde está definida  $F$  (*recordar interpretación geométrica de  $y'(x)$* ).

Consideremos la ecuación

$$y' = -2y.$$

Según el comentario anterior, podemos graficar un **campo de direcciones** como el siguiente:



### ¿Cómo lo construimos?

- Por ejemplo, tomamos el punto de coordenadas  $(0, 1)$ , entonces tenemos que

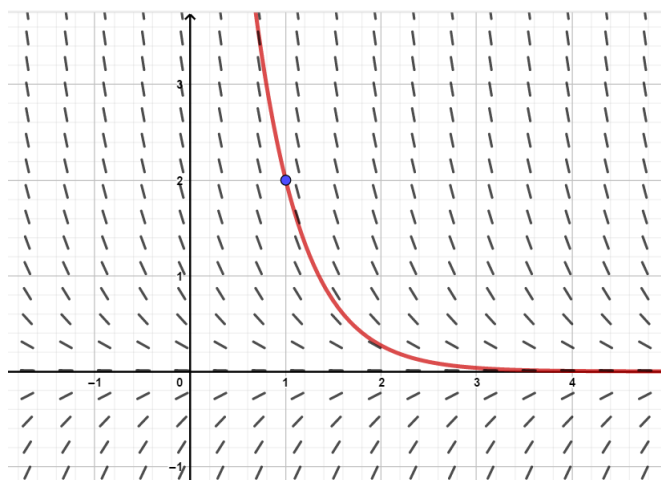
$$y' = -2 \cdot 1 = -2$$

y luego graficamos un segmento de recta con pendiente  $-2$  que contenga al punto  $(0, 1)$ .

- Observemos que en este ejemplo  $y'$  no depende de  $x$ , en efecto, en todos los puntos de la forma  $(x, 1)$  la pendiente es  $y' = -2$ .
- Si consideramos distintos valores de  $y$  y repetimos el paso anterior, tendremos la gráfica del campo buscado.

Ahora... ¿cómo usamos esta información?

En el punto  $(0, 1)$ , por ejemplo, sabemos que la curva  $y = y(x)$  que **resuelva** la ecuación, tendrá una recta tangente con *pendiente*  $-2$  en ese punto. Entonces, repitiendo el proceso en otros puntos, podemos deducir que la curva marcada en el gráfico que figura a continuación es una “solución” a la ecuación  $y' = -2y$  que **contiene al punto de coordenadas**  $(1, 2)$ . Notar cómo la pendiente de la curva señalada va disminuyendo cuando la coordenada  $y$  tiende a cero... entre otras observaciones que podemos realizar.



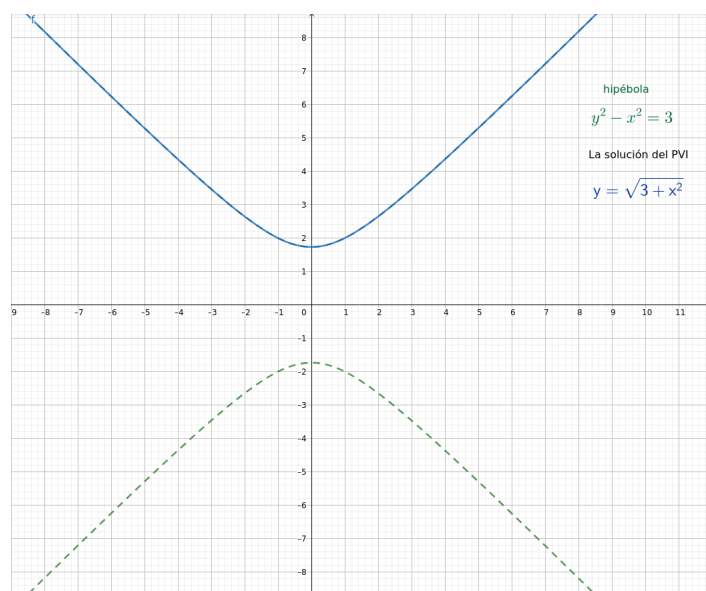
A partir del campo de direcciones de una **EDO**, podríamos graficar soluciones aproximadas de un **Problema**. Es decir, encontrar solución a un modelo matemático que incluye una ecuación diferencial de primer orden y una **condición inicial** (o dato) del problema, sin tener que obtener una expresión de la solución y poder así analizar sus diferentes características, permitiendo realizar predicciones a largo plazo. Si este problema modela un proceso (o algún problema físico que depende del tiempo) entonces hemos encontrado una solución que asume cierto valor en el punto de **arranque** del proceso (o momento inicial).

### Ejercicio 28

Dado

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

1. Verifica que la expresión  $y^2 - x^2 = 3$  es una solución implícita de la EDO.
2. Dada la gráfica de esta hipérbola. ¿Qué observas?



3. ¿Por qué sólo la rama superior corresponde a la gráfica de la solución del problema?
4. ¿Cuál sería el dominio de la solución del problema planteado?

## Ejercicio 29

Realiza un bosquejo del campo de direcciones de la EDO

$$y' = 1$$

### I. Ejercicios sugeridos

1. Dada la **EDO**  $y' = -\frac{y}{x}$

a) Grafica el campo de direcciones.

Sugerencia: Puedes utilizar cualquier software:

↔ en Geogebra el comando es **CampoDirecciones(F(x,y))**,

↔ en la app **Calculus Tools**, en “Gráficas→ Campo de pendiente”.

b) Encuentra el bosquejo de la o las soluciones del problema.

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

para distintas condiciones iniciales.

c) Mediante el análisis realizado, ¿puedes asegurar la existencia de solución para cualquier condición inicial?

2. Dados los siguientes campos de direcciones, analiza a cuál EDO corresponde. (Se recomienda **no** hacer este ejercicio con un software).

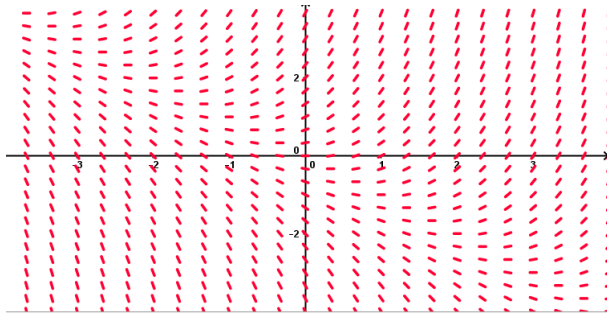


Fig I

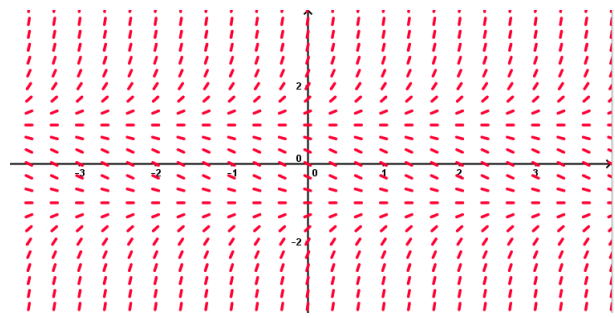


Fig II

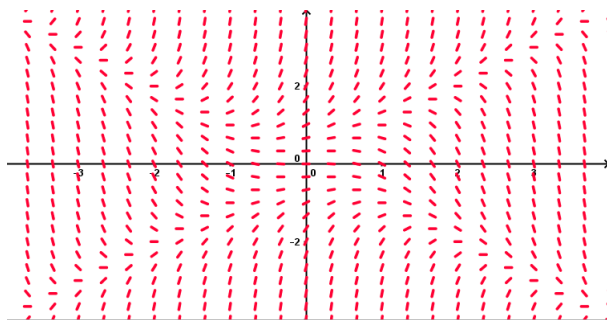


Fig III

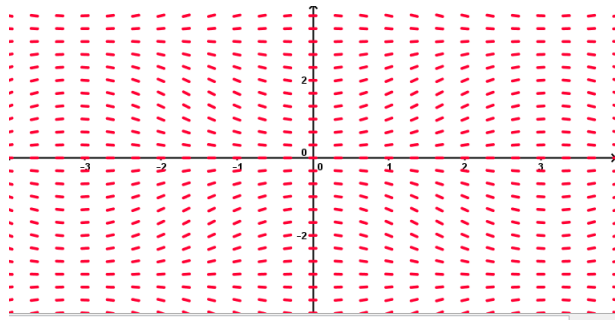


Fig IV

- i)  $y' = \text{sen}x \text{sen}y$                       iii)  $y' = y^2 - x^2$   
 ii)  $y' = x + y$                               iv)  $y' = (y - 1)(y + 1)$

3. Dada la ecuación diferencial  $\frac{dp}{dt} = p(p - 2)$ , que modela matemáticamente el desarrollo de la población  $p$  (en miles) de cierta especie en el instante  $t$ :

- a) bosqueja el campo de direcciones utilizando algún software;  
 b) si la población inicial fuera 5000, ¿qué puedes afirmar sobre la población límite cuando  $t \rightarrow \infty$ ?  
 c) si la población inicial fuera 1500, ¿cuál sería el valor de la población límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ ?

4. El movimiento de un conjunto de partículas que se mueve a lo largo del eje  $x$  está determinado por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = t^3 - x^3$$

donde  $x(t)$  denota la posición de la partícula en el instante  $t$ .

a) Si una partícula se encuentra en  $x = 1$  cuando  $t = 2$ , ¿cuál es su velocidad en ese instante?

b) Demuestra que la aceleración está dada por la ecuación  $\frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2 - 3t^3x^2 + 3x^5$ .

c) Si una partícula está en la posición  $x = 2$  en el instante  $t = 2,5$ , ¿podrá llegar a la posición  $x = 1$  en algún momento? ¿Cuál es su velocidad terminal? Sugerencia: analiza el campo de direcciones.

5. A partir de un bosquejo del campo de direcciones, ¿qué se puede decir acerca del comportamiento de  $y(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  de una solución a la siguiente EDO?

$$\frac{dy}{dx} = 3 - y + \frac{1}{x}$$

6. A partir de un bosquejo del campo de direcciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

¿qué se puede decir acerca del comportamiento de una solución  $y(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ?

## 2.4. Problemas de Valores Iniciales

**Definición 19.** Una EDO acompañada de condiciones iniciales se denomina **Problema de Valores Iniciales (PVI) asociado a una EDO** y lo expresamos del siguiente modo:

$$PVI \left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{array} \right.$$

Veamos distintas posibilidades de problemas con que podemos encontrarnos:

### Ejemplo 19

En la introducción estuvimos trabajando con el siguiente PVI:

$$PVI \begin{cases} y'' = -g, & t > 0 \\ y(0) = h \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

cuya solución es  $y(t) = h - \frac{1}{2}g t^2$ .

**Resolución:** Este es un problema sencillo de resolver, basta utilizar adecuadamente la fórmula de Barrow

$$y'(t) = -g t + c \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{como} \quad y'(0) = 0 \quad \text{entonces} \quad \boxed{c=0},$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + d \quad d \in \mathbb{R} \quad \text{como} \quad y(0) = h \quad \text{entonces} \quad \boxed{d=h}$$

$$\therefore y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h, \quad t \geq 0.$$

■

### Ejemplo 20

Las funciones  $y_1(x) = (x - 2)^3$  e  $y_2(x) = 0$ , son soluciones del siguiente PVI

$$PVI \begin{cases} \frac{1}{3} y' = y^{2/3} \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

**¿Se animan a verificarlo?**

### Ejemplo 21

Podremos comprobar más adelante que el siguiente problema **no tiene solución**:

$$PVI \begin{cases} y^2 + x^2 y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Como vimos en los ejemplos un PVI puede tener única solución, varias soluciones o no tener ninguna.

¿Cuándo un PVI tendrá solución?

Más aún: ¿cuándo será única?

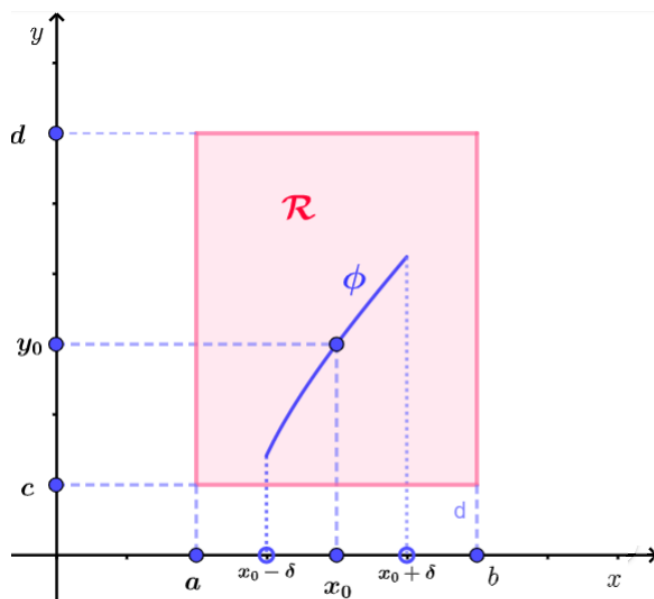
**Teorema 23. Teorema de Picard (de existencia y unicidad local para EDO's de 1er orden)**

Sea el problema de valores iniciales

$$PVI \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde  $(x_0, y_0) \in \mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ .

Si  $F$  y  $F_y$  son funciones continuas sobre el rectángulo  $\mathcal{R}$ , se tiene que existe un intervalo  $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$  y una única función  $\phi$  definida en  $I$  que es solución del PVI.



Observación 21. Más aún, este teorema se extiende a

$$\Omega = I_a \times B_b$$

donde  $I_a = \{t : |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$ , donde  $(x_0, t_0)$  es el punto que indica las condiciones iniciales del PVI.

## I. Ejercicios sugeridos

1. Sin resolver el PVI, decide en cada caso si es posible asegurar la existencia y unicidad de solución del PVI dado. Justifica.

a)  $\frac{dy}{dx} = x^3 - y^3, \quad y(0) = 6,$

b)  $x \frac{dx}{dt} + 4t = 0, \quad x(2) = 0,$

c)  $\frac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}, \quad y(2) = 1,$

d)  $\frac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}, \quad y(2) = 5,$

e)  $\frac{dy}{d\theta} - \theta y = \text{sen}^2\theta, \quad y(\pi) = 5.$

2. Sea el problema

$$PVI \begin{cases} e^y y' + 2x = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Identifica la región del plano donde se cumplen las condiciones del Teorema de Picard.
- b) Verifica que  $\tilde{y}(x) = \ln(1 - x^2)$  es solución del PVI. ¿Sería posible hallar otra solución? Sí o No y por qué?

3. Sea el problema

$$PVI \begin{cases} (x-1)y' = x^2 \ln(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

- a) Para este PVI, identifica la o las regiones del plano donde se cumplan las condiciones del Teorema de Picard para así poder asegurar que la solución existe y es única.
- b) Selecciona una de estas regiones y un adecuado  $(x_0, y_0)$  en donde se pueda asegurar existencia y unicidad de la solución del problema.

## 2.5. EDO's de primer orden

### I. Ecuaciones a variables separables

**Definición 20.** Se dice que una EDO es **separable** o **a variables separables** si es una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y)$$

donde la expresión  $h(x, y)$  resulta de multiplicar una función que depende sólo de la variable  $x$  por una función que depende sólo de la variable  $y$ . Es decir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad (3)$$

*Observación 22.* Al poder factorar la expresión  $h(x, y)$  en dos factores, uno que depende de  $x$  y otro que depende de  $y$  resulta natural que esta ecuación reciba el nombre de *separable*.

Si  $g(y) \neq 0$ , vale que :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx. \quad (4)$$

Notemos que, en ambos miembros, las expresiones dependen de **UNA** sola variable. Entonces podemos antiderivar con respecto a la variable correspondiente:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c \quad (5)$$

con  $c \in \mathbb{R}$ , llamada constante de integración.

La expresión (5) **no siempre** es la solución general de (3), ya que al imponer la condición  $g(y) \neq 0$  podemos **perder** soluciones en la resolución anterior. Veamos un ejemplo para ilustrar el procedimiento que acabamos de describir.

### Ejemplo 22

$$y' = \frac{x y \operatorname{sen}(x)}{y + 1} \quad (6)$$

**Resolución:** Observemos que la EDO resulta a variables separables y entonces podemos *separar* a estas variables como en (4)

$$\frac{(y + 1) dy}{y} = x \operatorname{sen}(x) dx, \quad y \neq 0. \quad (7)$$

Integrando en ambos miembros, obtenemos:

$$y + \ln|y| = \operatorname{sen} x - x \cos x + c \quad c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare \quad (8)$$

**Pero... ¿aquí están TODAS las soluciones que necesitamos?**

Antes de responder a esta pregunta analicemos la solución que acabamos de obtener.

- ✓ Notemos que la solución queda expresada con el valor absoluto. **NO** separamos en  $y > 0$  o  $y < 0$ .
- ✓ Si  $y \equiv -1$  no está definida en (6).
- ✓ Si  $y \equiv 0$  es una solución de (6), llamada **solución trivial** pues  $y' \equiv 0$ . Observemos además que esta no se puede expresar a partir de (8).

**Ahora si... podemos decir que** la solución general de (6) es:

$$y + \ln|y| = \operatorname{sen} x - x \cos x + c \quad \text{e} \quad y \equiv 0 \quad c \in \mathbb{R}.$$

### Ejemplo 23

$y' = ky$ , donde  $k$  es una constante real.

**Resolución:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= k y, \\ \frac{dy}{y} &= k, \quad y \neq 0\end{aligned}$$

Integrando ambos miembros y trabajando algebraicamente, resulta:

$$\begin{aligned}|y| &= e^{C_1+kx}, \\ y &= C_2 e^{kx}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ahora veamos un par de ejemplos de problemas que pueden modelizarse a partir de EDO's a variables separables.

#### **Ejemplo 24. Modelo de crecimiento/decrecimiento Poblacional**

Si  $P(t)$  representa la población de un sitio en el tiempo  $t$ , el modelo de **crecimiento** poblacional se puede dar mediante la EDO:

$$P' = kP,$$

donde  $k$  es una constante real positiva (si  $k < 0$  representa **decrecimiento poblacional**, ¿por qué?).

Notar que

\*  $P \equiv 0$  es una solución trivial pues  $P' \equiv 0$ .

\* La solución general y que engloba a la solución trivial es

$$P(t) = C e^{kt}, \quad C \geq 0.$$

#### **Ejemplo 25. Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton**

Según este modelo la temperatura  $T$  de un cuerpo (en función del tiempo) que se introduce en un medio con temperatura constante  $M$ , verifica que la razón de cambio

de  $T$  es directamente proporcional a la diferencia de temperatura  $M - T$ , es decir

$$\frac{dT}{dt} = k (M - T)$$

La constante  $k$  es un número real no nulo que recibe el nombre de *constante de proporcionalidad*. Si es negativa la EDO modelará el enfriamiento del cuerpo y si no el calentamiento. ¿Por qué?. La función  $T(t)$  recibe el nombre de **distribución de temperatura** del cuerpo.

### Ejercicio 30

Encuentra la solución general de la EDO

$$\frac{dT}{dt} = k (M - T)$$

### Ejercicio 31

Dado el PVI

$$\begin{cases} y^2 + x^2 y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Demuestra que no tiene solución.
2. Utilizando el teorema de existencia y unicidad determina para qué condición inicial es posible encontrar solución.

## II. Ejercicios sugeridos

1. Determina, en cada caso, si la EDO es separable. Justifica.

a)  $\frac{dy}{dx} = \text{sen}(x + y),$

d)  $(x^2 + 2) \frac{dy}{dx} = -y e^{x+y},$

b)  $\frac{dy}{dx} = e^{x-3y},$

e)  $\frac{dx}{dt} = t \ln(x^{2t}),$

c)  $(x^2 + 2) \frac{dx}{dy} = y e^{x+y},$

f)  $\frac{dx}{dt} = \frac{t + t^2}{x^2 + 1}.$

**Observación:** ¿qué puedes notar en los ejercicios 1c y 1d?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales o PVI, según el caso:

a)  $\frac{dy}{dx} - 3x^2(1+y^2) = 0,$

b)  $\frac{dy}{dx} = y(2 + \operatorname{sen}x),$

c)  $x^3 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t},$

d)  $\frac{dy}{dx} - yx^3 = y,$

e)  $y' = 2\sqrt{y+1} \cos x, \quad y(\pi) = 0,$

f)  $\frac{dx}{dt} = 2t \cos^2 x, \quad x(0) = \frac{\pi}{4},$

g)  $x^2y' - 3xy - 2y = 0, \quad y(1) = 1.$

3. a) Sea el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con  $g$  no nula en un intervalo que contenga a  $y_0$ . Aplica el teorema de existencia y unicidad para probar que este PVI tiene solución única siempre que se verifiquen los siguientes requisitos:

- $f$  sea continua en un intervalo que contenga a  $x_0$ ,
- $g'$  sea continua en un intervalo que contenga a  $y_0$ .

b) Dado el PVI

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y}, \\ y(4) = 3. \end{cases}$$

- 1) Comprueba que el PVI tiene única solución, utilizando el ítem anterior.
- 2) Halla esta solución.
- 3) Grafica dicha solución.

4. El crecimiento de la población de cierta especie de salmones de la costa de Alaska está modelizado por la ecuación  $P'(t) = 0,003P(t)$ , siendo  $[t] = \text{min}$  y  $P(t)$  la población del salmón en el tiempo  $t$ .
- a) Suponiendo que al momento  $t = 0$  hay un millón de salmones, determina la función  $P(t)$  para la población en cualquier momento  $t$ . ¿Cuál es el valor límite de la población?
- b) En el momento  $t = 0$  un grupo de tiburones se establece en el lugar donde crecen los salmones y se alimentan de ellos. La razón a la que los tiburones consumen los salmones es de  $0,001P^2(t)$ . Por esta presencia, además, los salmones comienzan a abandonar al costa a razón de  $0,002$  salmones por minuto. ¿Cómo se modificaría la ecuación diferencial para poder modelizar esta situación?
5. Si un termómetro que marca  $37^\circ\text{C}$  se introduce en un vaso con agua a  $21^\circ\text{C}$ , y después de 6 minutos el termómetro marca  $26^\circ\text{C}$ , ¿cuánto marcará después de 20 minutos?
6. Un recipiente con agua se calienta hasta que hace ebullición y en ese instante se retira de la cocina y se coloca a enfriar. Al cabo de 15 minutos la temperatura es de  $70^\circ\text{C}$  y 30 minutos más tarde es  $40^\circ\text{C}$ . Determina la temperatura del ambiente donde se enfría el agua y la temperatura del agua luego de 1 hora de enfriamiento.
7. Se sabe que el Carbono 14 tiene una semivida de 5600 años. Es decir, su cantidad se reduce a la mitad por desintegración radioactiva en ese lapso de tiempo. Si en una roca sedimentaria había al formarse un 40% de Carbono 14 y ahora hay un 2%, ¿cuánto tiempo pasó desde que se depositaron los sedimentos?

**Observación:** para el Carbono 14, la tasa de cambio en cada instante es proporcional a la cantidad de Carbono presente en ese momento.

8. **Cuestiones de unicidad.** La mayor parte de los problemas con valor inicial tendrán una **solución única**. De hecho, la existencia de soluciones únicas era tan importante que establecimos un teorema. El método para ecuaciones separables nos puede dar

una solución, pero podría no darnos todas las soluciones. Para ilustrar esto, considera la ecuación  $\frac{dy}{dx} = y^{1/3}$ .

a) Usa el método de separación de variables para mostrar que

$$y = \left(\frac{2x}{3} + C\right)^{3/2}$$

es una solución.

b) Muestra que la función  $y(x) = \left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2}$ , con  $x \geq 0$ , es solución del PVI

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

c) Muestra ahora que la función constante  $y \equiv 0$  también satisface el problema con valor inicial dado en la parte (b). Por lo tanto, este problema con valor inicial no tiene una única solución.

d) Por último, muestra que las condiciones del teorema de Picard no se satisfacen y en consecuencia es factible que el problema no tenga solución única.

e) ¿Por qué crees que se perdió la solución trivial  $y \equiv 0$  en el ítem (a)?

9. **Revisemos el concepto de intervalo de definición.** Al analizar un PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

no siempre es posible determinar el dominio de la solución  $y(x)$  o el intervalo donde la función  $y(x)$  satisface la ecuación diferencial.

a) Resuelve la ecuación  $y' = xy^3$ .

b) Proporciona en forma explícita las soluciones de los PVI obtenidos al considerar las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y(0) = 1/2$  e  $y(0) = 2$ .

c) Determina los dominios de las soluciones del ítem anterior.

d) Como se vio en la parte (c), los dominios de las soluciones dependen de las condiciones iniciales. Ahora, considerando el problema

$$\begin{cases} y' = xy^3, \\ y(0) = a, \quad a > 0, \end{cases}$$

muestre que cuando  $a$  tiende a cero por derecha, el dominio tiende a ser todo  $\mathbb{R}$  y cuando  $a$  tiende a  $\infty$ , el dominio se reduce a un solo punto.

e) Bosqueja las soluciones del problema con condiciones iniciales

$$y(0) = a, \text{ para } a = \pm 1/2, \pm 1, \pm 2.$$

10. **Caída libre.** Al comienzo de la unidad, analizamos un modelo para un objeto que cae hacia la Tierra. Si sobre el objeto ahora se considera que actúan la resistencia del aire y la gravedad, se observa que la velocidad  $v$  debe satisfacer la ecuación

$$m \frac{dv}{dt} = m g - bv$$

donde  $m$  es la masa,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $b > 0$  es una constante. Si  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $b = 5 \text{ kg/s}$  y  $v(0) = 10 \text{ m/s}$ , encuentre  $v(t)$ . ¿Cuál es la velocidad límite (es decir, terminal) del objeto?

### III. Ecuaciones Lineales de Primer Orden

**Definición 21.** Una EDO lineal de primer orden se expresa de la siguiente forma:

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = G(x), \quad a_1(x) \neq 0.$$

Veamos primero un ejemplo fácil de resolver.

#### Ejemplo 26. Caso simple

$$a(x) y' + a'(x) y = G(x)$$

**Resolución:** Notemos que el lado izquierdo de la EDO resulta de la derivada del producto de funciones  $a(x)y(x)$  por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} a(x) y' + a'(x) y &= G(x) \\ \frac{d}{dx} [a(x)y(x)] &= G(x) \end{aligned}$$

por lo tanto podemos integrar ambos miembros

$$\begin{aligned} a(x)y(x) &= \int G(x) dx + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \frac{1}{a(x)} \left[ \int G(x) dx + c \right] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejercicio 32

Encuentra las solución de

$$t x'(t) + x(t) = e^t.$$

Vamos ahora al caso más general. Dada una EDO lineal

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = G(x)$$

comenzaremos, para simplificar los cálculos, expresando la EDO en su forma **normalizada**:

$$y' + P(x) y = Q(x) \tag{9}$$

donde  $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$  y  $Q(x) = \frac{G(x)}{a_1(x)}$ .

Antes de continuar notemos que la solución trivial  $y \equiv 0$  **no** es solución de (9) si  $Q(x) \neq 0$  ¿Por qué? ¿Qué sucede si  $Q(x) = 0 \quad \forall x$ ?

Toda EDO lineal de primer orden se puede resolver de modo *similar* a como lo hicimos en el caso simple. Para ello vamos a multiplicar ambos miembros de (9) por una función  $v \neq 0$  que llamaremos **factor integrante**

$$v(x) y' + v(x) P(x) y = v(x) Q(x)$$

**¿Para qué hacemos esto?**

Estamos intentando hallar una función  $v$  tal que al multiplicar ambos miembros de la ecuación (9) por  $v$ , el lado izquierdo de la EDO resulte la derivada de  $v(x)y(x)$ , es decir

$$v(x) y' + v(x) P(x) y = \frac{d}{dx} [v(x) y]$$

Para encontrar  $v$ , desarrollemos la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} v(x) y' + v(x) P(x) y &= v(x) y' + v'(x) y \\ \cancel{v(x) y'} + v(x) P(x) y &= \cancel{v(x) y'} + v'(x) y \\ v(x) P(x) y &= v'(x) y \\ v(x) P(x) y &= v'(x) y \quad (\text{pues } y \neq 0) \\ v(x) P(x) &= v'(x) \end{aligned}$$

Entonces  $v$  es una solución de esta EDO a variables separables. Luego tenemos:

$$v(x) = e^{\int P(x) dx}$$

*Observación 23.* No ponemos constante de integración pues buscamos **UN** factor integrante.

Para encontrar la solución general de (9) utilizamos el factor integrante encontrado.

$$\underbrace{v(x) y' + v(x) P(x) y}_{v(x) y' + v'(x) y} = v(x) Q(x)$$

$$\frac{d}{dx} [v(x)y(x)] = v(x) Q(x)$$

$$v(x)y(x) = \int v(x) Q(x) dx + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} \left[ \int v(x) Q(x) dx + c \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} \int v(x) Q(x) dx + \frac{c}{v(x)} \quad \blacksquare$$

*Observación 24.* La **solución general** de una EDO de 1er orden tiene **UNA** constante de integración.

### Ejemplo 27

Encuentra la solución general de la EDO

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$$

**Resolución:** Aquí se tiene que:

$$P(x) = -1, \quad Q(x) = e^{3x}$$

Luego:  $v(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$

$$y = \frac{1}{e^{-x}} \left[ \int e^{3x} e^{-x} dx + c \right]$$

$$y = e^x \left[ \int e^{2x} dx + c \right] = e^x \left[ \frac{1}{2} e^{2x} + c \right]$$

La solución general es

$$y = e^x \left[ \frac{1}{2} e^{2x} + c \right], \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

#### IV. Ejercicios sugeridos

1. Decide cuáles de las siguientes EDO's son lineales. Justifica.

a)  $(t^2 + 1) \frac{dx}{dt} = xt - x,$

b)  $y^2 \frac{dy}{dx} - xy = 0,$

c)  $3x = \frac{dy}{dx} - x^3 \sqrt[3]{x+1},$

d)  $\sqrt{x} \frac{dy}{dx} + \cos x = y.$

2. Encuentra la solución general de las siguientes EDO lineales:

a)  $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x},$

b)  $x \frac{dy}{dx} + 2y = 5x^3,$

c)  $x' = \frac{x}{t} + 2t + 1,$

d)  $y' = (1 - y) \cos x,$

e)  $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + xy = x,$

3. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial.

a)  $y' - y = e^{3x} \quad y(0) = 0,$

b)  $x \frac{dy}{dx} + 2y = 5x^3, \quad y(1) = 5,$

c)  $y' = (1 - y) \cos x, \quad y(0) = 1,$

d)  $t^3 \frac{dx}{dt} + 3t^2 x = t, \quad x(2) = 0,$

e)  $\operatorname{sen}(x) y' + y \cos(x) = x \cos(x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

4. Dado el PVI

$$\begin{cases} y' = -P(x)y + Q(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Bajo qué hipótesis sobre las funciones  $P$  y  $Q$  podemos afirmar que este problema tiene solución y que además es única.

5. Según la *Ley de Ohm*, en cada resistencia  $R$  la caída de potencial es proporcional a la resistencia y a la corriente ( $\Delta V_R = RI$ ), mientras que la caída en el inductor es proporcional tanto a la inductancia como a la variación de corriente en él ( $\Delta V_L = L \frac{dI}{dt}$ ). Una de las **leyes de Kirchoff** establece que el voltaje que proporciona la fuente  $E(t)$  es equivalente a la suma de las caídas de potencial en el circuito, debido a la resistencia y a la inductancia. Con lo cual

$$E(t) = \Delta V_L + \Delta V_R = L \frac{dI}{dt} + IR$$

o bien,

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E(t)}{L}$$

a) ¿Qué tipo de EDO es la obtenida?

b) Encuentra la corriente  $I(t)$  si se tiene una fuente de 12 V, una resistencia de  $2\Omega$  y una inductancia de  $1H$ . Se sabe, además, que la corriente en el instante inicial es 0. ¿Cuál es la corriente después de 0,1 segundos?

6. Una roca contiene dos isótopos radiactivos,  $RA1$  y  $RA2$ , que pertenecen a la misma serie radiactiva, es decir,  $RA1$  decae en  $RA2$ , quien luego decae en átomos estables. Suponga que la tasa con la que  $RA1$  decae en  $RA2$  es  $50 e^{-10t}$  kg/s. Como la razón de decaimiento de  $RA2$  es proporcional a la masa presente  $y(t)$  de  $RA2$ , la razón de cambio de  $RA2$  es

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \text{razón de creación} - \text{razón de decaimiento} \\ \frac{dy}{dt} &= 50 e^{-10t} - ky \end{aligned}$$

donde  $k > 0$  es la constante de decaimiento.

- a) Si  $k = 2$  e inicialmente  $y(0) = 40$  kg, determine la masa  $y(t)$  de RA2 para  $t \geq 0$ .

En la solución obtenida en el ítem anterior el término semejante a  $e^{-2t}$  *domina* a partir de cierto momento, es decir, tiene mayor magnitud para valores de  $t$  grandes.

- (b) Vuelva a resolver el problema considerando  $k = 20$ . En este caso, ¿cuál término de la solución domina a partir de cierto momento?
- (c) Interprete los resultados obtenidos.

7. La ecuación

$$y' + 2y = xy^{-2} \quad (10)$$

es un ejemplo de una **ecuación de Bernoulli**.<sup>1</sup>

- a) Muestre que la sustitución  $v = y^3$  reduce la ecuación (10) a la ecuación

$$v' + 6v = 3x \quad (11)$$

- b) Resuelva (11) para obtener  $v$ .
- c) Encuentre la solución  $y$  de (10).

8. Con frecuencia, la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se secreta en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar mediante el PVI

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - kx \quad ; \quad x(0) = x_0$$

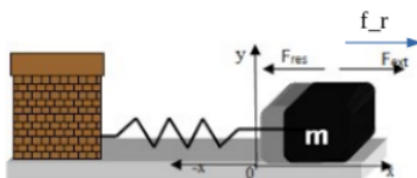
donde  $x(t)$  es la cantidad de la hormona en la sangre en el instante  $t$ ,  $\alpha$  es la razón promedio de secreción,  $\beta$  es la cantidad de variación diaria en la secreción y  $k$  es una constante positiva que refleja la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre. Si  $\alpha = \beta = 1$ ,  $k = 2$  y  $x_0 = 10$ , halla la función  $x(t)$ .

---

<sup>1</sup>Para profundizar sobre este tipo de ecuaciones se recomienda leer la sección 2.6 de [3].

## 2.6. EDO's de segundo orden a coeficientes constantes

Comenzamos estudiando un sistema masa-resorte que figura más abajo, donde se observa un cuerpo de masa  $m$  sujeto a un resorte. Al aplicar una fuerza externa a partir de una posición de equilibrio, comienza el movimiento y debemos considerar una fuerza de rozamiento que también interviene. Demás está decir que, ¡tratamos con un sistema en condiciones ideales!



Entonces, la ecuación que gobierna o determina el comportamiento del sistema es:

$$m y'' + k y + b y' = F_{ext}, \quad (12)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $k$  es la constante del resorte ( $k > 0$ ) y  $b \geq 0$  es la constante de fricción.

### ¿Cómo se resuelve una EDO de este tipo?

Consideremos algunas generalidades y luego podremos retomar ejemplos clásicos que se modelizan con este tipo de EDO's.

**Definición 22.** De acuerdo a las condiciones que se impongan sobre la función incógnita, se definen los siguientes problemas:

1. Problema de valores iniciales (PVI): los datos se dan sobre un mismo punto  $x_0$  (se presentó para EDO's de orden  $n$  en la Definición (19) de página 78).

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = r(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

2. Problema de valores en la frontera: los datos se dan para  $y$  o  $y'$  sobre dos puntos distintos  $t_0$  e  $t_1$ .

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = r(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y(t_1) = y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = r(t), \\ y'(t_0) = y_0, \\ y(t_1) = y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = r(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_1) = y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = r(t), \\ y'(t_0) = y_0, \\ y'(t_1) = y_1. \end{cases}$$

*Observación 25.* Es usual en la práctica, considerar el problema en este dominio  $[t_0, t_1]$ , de ahí que el nombre "frontera" suene natural.

Consideremos ante todo un teorema que nos asegura que, bajo ciertas hipótesis, estos problemas, tienen solución y más aún, que esta solución es única.

## I. EDO's de segundo orden a coeficientes constantes homogéneas

La expresión general para una EDO de este tipo es:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{13}$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  son los coeficientes de la EDO, y además  $a \neq 0$ .

Se puede demostrar el siguiente teorema que da un marco de certeza en la búsqueda de solución para situaciones cuya modelización matemática implica una EDO homogénea de 2do orden a coeficientes constantes.

**Teorema 24. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD de un PVI**

Dados  $a, b, c, x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ , el PVI

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \end{cases}$$

tiene única solución para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

¿Cómo hallamos la tal solución? Comenzamos buscando la solución general, tal como trabajamos con EDO's de primer orden.

Recordando que  $y = e^{rt}$  es una función que, salvo constante, es igual a sus sucesivas derivadas,

**¿existe  $r$  tal que  $y(t)$  sea solución de (13)? Veamos...**

Reemplazando  $y, y'$  e  $y''$  en (13), resulta:

$$a(r^2 e^{rt}) + b(r e^{rt}) + c(e^{rt}) = 0$$

como  $e^{rt} > 0$ , debe darse que

$$a r^2 + b r + c = 0.$$

A esta ecuación la llamamos **ecuación polinómica o ecuación característica asociada** a la EDO homogénea (13). La resolvemos y obtenemos dos valores para  $r$ .

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sabemos que pueden darse tres posibles situaciones para estas raíces según cómo sea el discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- a) Si  $\Delta > 0$ , ambas raíces serán reales y distintas ( $r_1 \neq r_2$ ), entonces **proponemos** una solución general de la forma

$$y_H(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dado que  $y_1(t) = e^{r_1 t}$  e  $y_2(t) = e^{r_2 t}$  son, ambas, soluciones de (13).

¡Notar que  $y \equiv 0$  es una solución trivial de (13)! Y se obtiene con  $c_1 = c_2 = 0$ .

- b) Si  $\Delta = 0$  ambas raíces serán reales e iguales ( $r_1 = r_2 = r$ ), entonces **proponemos** una solución general de la forma

$$y_H(t) = c_1 e^{r t} + c_2 t e^{r t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dado que  $y_1(t) = e^{r t}$  e  $y_2(t) = t e^{r t}$  son, ambas, soluciones de (13)

- c) Si  $\Delta < 0$  las raíces son complejas,  $r_1 = \alpha + i\beta$  con  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ , la otra raíz debe ser su conjugada  $r_2 = \alpha - i\beta$  (*¿por qué?*) Entonces, **proponemos** como solución general

$$y_H(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sen(\beta t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dado que  $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  e  $y_2(t) = e^{\alpha t} \sen(\beta t)$  son, ambas, soluciones de (13).

Veamos en el siguiente ejercicio la forma de utilizar el método que acabamos de describir.

### Ejercicio 33

En cada caso, resuelve el PVI:

1)

$$\begin{cases} y'' + 2y' - y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(\pi) = 1, \\ y'(\pi) = 1. \end{cases}$$

## II. Ejercicios sugeridos

1. Si en la ecuación (12) que gobierna o describe el sistema masa-resorte se considera  $F_{ext}(t) = 0$ , se tiene la **ecuación homogénea asociada a (12)**:

$$m y'' + k y + b y' = 0. \quad (14)$$

Para esta ecuación, verifica lo siguiente:

Si  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  son dos soluciones de (14) entonces también lo es la **combinación lineal**

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Demuestra que si en la ecuación (14) se consideran  $m = 1$ ,  $k = 25$  y  $b = 10$ ,

entonces  $y_1(t) = e^{-5t}$  y  $y_2(t) = te^{-5t}$  son soluciones, llamadas *sobreamortiguadas* de la ecuación (14). ¿Cuál es el límite de estas soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

3. Se aplica una fuerza externa  $F_{ext}(t) = 2 \cos(2t)$  a un sistema masa-resorte con  $m = 1$ ,  $k = 4$  y  $b = 0$ . El sistema está inicialmente en reposo, con lo cual,  $y(0) = y'(0) = 0$ . Verifica que  $y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen}(2t)$  representa el movimiento de tal resorte. ¿Qué ocurrirá a largo plazo con el resorte?
4. Verifica que  $y = 2 \operatorname{sen}(3t) + \cos(3t)$  es una solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} 2y'' + 18y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 6. \end{cases}$$

Luego, determina el máximo de la función  $|y(t)|$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

5. Encuentra una solución general de cada EDO homogénea.

a)  $4w'' + 20w' + 25w = 0$ ,

b)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ,

c)  $y'' - 4y' + 7y = 0$ ,

d)  $y'' + y = 0$ ,

e)  $y'' - y' - 2y = 0$ ,

f)  $2w'' - 4w = 0$ ,

g)  $y'' - 2\sqrt{2} y' + 2y = 0$ ,

h)  $y'' - 4y' - 5y = 0$ ,

i)  $y'' - 2y' + 26y = 0$ .

6. Utilizando el mismo método visto para resolver EDO's lineales de 2do orden a coeficientes constantes, encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones a coeficientes constantes de orden superior a 2:

a)  $y''' - 6y'' - y' + 6y = 0$ ,

$$b) \quad y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0,$$

$$c) \quad y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$

7. En cada caso, resuelva el PVI:

$$a) \quad \begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -2. \end{cases} \quad c) \quad \begin{cases} y'' - y' - 2y = 0, \\ y(0) = -2, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(\pi) = -2, \\ y'(\pi) = 1. \end{cases} \quad d) \quad \begin{cases} y''' - 6y'' - y' + 6y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

### 8. Problemas con valores en la frontera.

Dado que la solución de  $y'' + y = 0$  es de la forma  $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ , con  $c_1$  y  $c_2$  constantes arbitrarias, demuestra que:

- a) Existe una única solución de la ecuación anterior que satisface las condiciones en la frontera  $y(0) = 2$  y  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ .
- b) No existe una solución para la ecuación anterior que satisfaga  $y(0) = 2$  y  $y(\pi) = 0$ .
- c) Existe una infinidad de soluciones de la ecuación que satisfacen  $y(0) = 2$  y  $y(\pi) = -2$ .

9. Resuelve los siguientes PVI y utilizando la analogía masa-resorte, analiza el comportamiento de la solución al problema con valores iniciales dado, cuando  $t \rightarrow \infty$ .

$$a) \quad \begin{cases} y'' + 16y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} y'' + 6y' + 8y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

10. Una masa de 3 kg está unida a un resorte con constante de rigidez  $k = 48 \frac{N}{m}$ . La masa se desplaza 0,5 m a la izquierda del punto de equilibrio y se le imprime una velocidad de  $2 \frac{m}{seg}$  hacia la derecha. La fuerza de amortiguamiento es despreciable.

a) Determina la ecuación de movimiento de la masa.

b) ¿Cuánto tiempo después de su liberación pasa la masa por la posición de equilibrio?

11. Una masa de 2 kg está unida a un resorte con constante de rigidez  $k = 50 \frac{N}{m}$ . La masa se desplaza 0,25 m a la izquierda del punto de equilibrio y se le imprime una velocidad de  $1 \frac{m}{seg}$  hacia la derecha. La fuerza de amortiguamiento es despreciable.

a) Determina la ecuación de movimiento de la masa.

b) ¿Cuánto tiempo después de su liberación pasa la masa por la posición de equilibrio?

12. El movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento queda descrito por

$$\begin{cases} y'' + by' + 16y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Determina la ecuación del movimiento y bosqueja su gráfica para  $b = 0, 6, 8$  y  $10$ .  
¿Qué conclusiones puedes obtener?

### III. EDO's de segundo orden a coeficientes constantes NO homogéneas

La expresión genérica para una EDO de segundo orden a coeficientes constantes no homogénea es:

$$a y'' + b y' + c y = f(t) \tag{15}$$

donde, como antes,  $a, b, c$  son los coeficientes de la EDO, con  $a \neq 0$ , y la función  $f$  es el término independiente tal que  $f(t) \neq 0$ .

**Teorema 25** (Principio de superposición). Sean  $y_1$  e  $y_2$  dos funciones solución, respectivamente, de la EDO no homogénea

$$a y'' + b y' + c y = f_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Entonces, la combinación lineal  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  es solución de

$$a y'' + b y' + c y = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t).$$

**Definición 23.** Si consideramos a  $y_p(t)$  la solución particular de la EDO no homogénea (15) y a  $y_H(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  la solución general de la EDO homogénea asociada, la suma

$$y_p + y_H \quad (17)$$

resulta la **solución general** de (15).

En base a la definición anterior, se puede demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 26. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD de un PVI: caso no homogéneo**

Dados  $a, b, c, t_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ , existen únicos  $c_1$  y  $c_2$  en (17), tal que se satisface el siguiente PVI

$$\begin{cases} a y'' + b y' + c y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Veamos un ejemplo de cómo trabajar:

### Ejercicio 34

$$y'' + 3y' + 2y = 3t \quad (18)$$

**Resolución** Considerando el Teorema 25, comencemos estableciendo que:

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 3t$$

Por lo tanto hemos de resolver:

a)  $y'' + 3y' + 2y = 0$  (**EDO homogénea asociada**)

b)  $y'' + 3y' + 2y = 3t$ .

Veamos cómo hacemos.

a) Sabemos que la solución general de la EDO homogénea asociada es de la forma:  $y_H = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ , donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , pues la ec. polinómica asociada es:  $r^2 + 3r + 2 = 0$  y sus raíces son:  $r_1 = -1$  y  $r_2 = -2$ .

b) Ahora, vamos encontrar **una** solución **particular** de

$$y'' + 3y' + 2y = 3t$$

**PROPONGO**  $y_P(t) = A + Bt$ . Debemos entonces determinar qué valores tomarían **AyB**

$$y'_P(t) = B, \quad y''_P(t) = 0$$

Reemplazando, obtengo:

$$1,0 + 3,0B + 2(A + Bt) = 3t, \quad \forall t,$$

$$(3,0B + 2,0A) + 2Bt = 3t, \quad \forall t$$

de donde  $A = -\frac{9}{4}$  y  $B = \frac{3}{2}$ , por ende

$$y_P(t) = -\frac{9}{4} + \frac{3}{2}t.$$

Entonces, del principio de superposición, obtenemos que

$$Y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = \left( c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \right) + \left( -\frac{9}{4} + \frac{3}{2}t \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es solución de la EDO no homogénea (18). Se puede ver que éstas son **todas** las soluciones y por lo tanto la llamaremos **solución general** de la ecuación (18) ■

Ahora veremos cómo resolver EDO's NO homogéneas de segundo orden a coeficientes constantes, para **algunos casos**, es decir, nos enfocamos en aquellos casos en que el **término independiente** en la ecuación (15) es de **cierta** forma. El procedimiento a seguir es el mismo que el utilizado en el ejemplo anterior.

**Recordemos que  $y_H$  sabemos encontrarla, lo único que necesitamos es poder hallar UNA solución particular**

Consideremos las distintas formas que puede asumir  $f(t)$ :

a) Si  $f(t)$  es una **función polinómica**. Como en el caso del ejemplo anterior:

$$f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

entonces **propongo** una solución particular de la forma:

$$y_P(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$$

es decir un polinomio completo y de igual grado que el de  $f$ .

b) Si  $f(t)$  es una **función exponencial**

$$f(t) = A e^{Bt}$$

entonces **propongo** una solución de la forma:

$$y_P(t) = C e^{Bt}$$

c) Si  $f(t)$  es una **función trigonométrica**

$$f(t) = A \operatorname{sen}(t) \quad \text{o} \quad f(t) = A \operatorname{cos}(t)$$

entonces **propongo** una solución de la forma:

$$y_P(t) = B \operatorname{sen}(t) + C \operatorname{cos}(t).$$

Este método para encontrar una solución particular de una EDO no homogénea se denomina **método de los coeficientes indeterminados**. Halladas las correspondientes constantes, habremos hallado una **solución particular** de la EDO no homogénea.

### Ejemplo 28

Encontrar la solución general de

$$y'' + 3y' + 2y = 5 + e^t$$

Para resolverla, seguimos el siguiente “**algoritmo**”:

✓ Hallar la solución de la EDO homogénea asociada.

$$y_H(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

✓ Proponer como solución particular

$$y_P(t) = A + B e^t$$

✓ Reemplazar y hacer las cuentas, para obtener  $A = \frac{5}{2}$  y  $B = \frac{1}{6}$ , entonces

$$Y_G(t) = Y_H + Y_P = \left( c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \right) + \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{6} e^t \right)$$

### Ejercicio 35

Encontrar la solución general de

$$y'' + 3y' + 2y = 5 + e^{-t} \quad (19)$$

**Resolución:** Procedamos como en los ejemplos anteriores.

✓ **Propongo** como solución particular de la EDO  $y_P(t) = A + B e^{-t}$

$$y'_P(t) = -B e^{-t}, \quad y''_P(t) = B e^{-t}$$

✓ Reemplazo en la EDO

$$\begin{aligned} y''_P + 3y'_P + 2y_P &= 5 + e^{-t} \\ B e^{-t} + 3(-B e^{-t}) + 2(A + B e^{-t}) &= 5 + e^{-t} \\ 2A + (B - 3B + 2B)e^{-t} &= 5 + e^{-t} \\ 2A + 0 \cdot e^{-t} &= 5 + e^{-t} \end{aligned} \quad (20)$$

Obtenemos (20) y vemos que es absurda pues **no es posible** encontrar constantes  $A$  y  $B$  reales tales que valga esta ecuación. Es decir que no podemos obtener una  $y_P$  solución de la EDO (19).

**¿Por qué sucede esto?**  
**¿Cuáles son las soluciones de la EDO**  
**homogénea asociada a (19)?**

✓ Cuando sucede esto **debemos proponer otra solución particular** de manera que no sea solución de la EDO homogénea asociada. Proponemos entonces  $y_P(t) = A + B t e^{-t}$  y reemplazando obtenemos que  $A = \frac{5}{2}$  y  $B = 1$ .

✓ Luego la solución general de (19) es

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{5}{2} + t e^{-t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

**Ejercicio 36**

Encuentra la solución general de la ecuación diferencial  $y'' + y = \cos(x)$ .

Otro método para hallar una solución particular de la EDO No homogénea (15) es el **método de Lagrange o de Variación de parámetros**. Este método generaliza al anterior pues sirve también para el caso de EDO's a coeficientes variables y término independiente **cualquiera**. En este curso, ¡sólo trabajaremos con EDO's a coeficientes constantes!

Sea la EDO

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad \text{con } a \neq 0 \quad \text{y} \quad f(t) \neq 0$$

entonces, buscamos una solución particular de la forma

$$y_P(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

con  $y_1$  e  $y_2$  las soluciones de la EDO homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

halladas como hemos visto anteriormente ( $y_1 \neq \alpha y_2$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

La pregunta es:

$$c_1(t) =? \quad \text{y} \quad c_2(t) =?$$

Comenzamos calculando  $y'_P(t)$

$$y'_P(t) = c'_1(t) y_1(t) + c_1(t) y'_1(t) + c'_2(t) y_2(t) + c_2(t) y'_2(t)$$

Para simplificar los cálculos vamos a imponer

$$c'_1(t) y_1(t) + c'_2(t) y_2(t) = 0$$

Tenemos entonces

$$y'_P(t) = c_1(t) y'_1(t) + c_2(t) y'_2(t)$$

$$y''_P(t) = c_1(t) y''_1(t) + c_1'(t) y'_1(t) + c_2(t) y''_2(t) + c_2'(t) y'_2(t)$$

Reemplazando en la EDO obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
 a y''_P(t) & = & c_1(t) ay''_1(t) + c_2(t) ay''_2(t) + a c'_1(t) y'_1(t) + a c'_2(t) y'_2(t) \\
 + & & \\
 b y'_P(t) & = & c_1(t) by'_1(t) + c_2(t) by'_2(t) \\
 + & & \\
 c y_P(t) & = & c_1(t) cy_1(t) + c_2(t) cy_2(t) \\
 \hline
 f(t) & = & \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 0 + 0 + a c'_1(t) y'_1(t) + a c'_2(t) y'_2(t) \end{array}
 \end{array}$$

por lo tanto

$$c_1(t) y'_1(t) + c_2(t) y'_2(t) = \frac{f(t)}{a}$$

En resumen, si es posible encontrar  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  que satisfagan el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) = 0 \\ c_1(t) y'_1(t) + c_2(t) y'_2(t) = \frac{f(t)}{a} \end{cases} \quad (21)$$

entonces  $y_P$  será una solución particular de la EDO no homogénea.

Repasemos el procedimiento:

- ✓ Hallar las soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la EDO homogénea asociada.
- ✓ Resolver el sistema (21) y hallar  $c_1'(t)$  y  $c_2'(t)$ .
- ✓ Determinar  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  integrando las funciones halladas en el ítem anterior.
- ✓ Sustituir  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  en la expresión de  $y_P$ .

*Observación 26.* Se puede demostrar que el sistema (21) tiene solución si y sólo si  $y_1 \neq \alpha y_2$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Ejemplo 29

Encuentra la solución general de la EDO  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \ln(t)$ .

**Resolución:** Comenzamos resolviendo la EDO homogénea asociada y obtenemos que la solución es

$$y_H(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Utilizando el método de variación de parámetros para obtener una solución particular de la EDO, proponemos:

$$y_P(t) = c_1(t) e^{-2t} + c_2(t) t e^{-2t}.$$

Ahora, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} c_1(t) e^{-2t} + c_2(t) t e^{-2t} = 0, \\ c_1'(t) (-2e^{-2t}) + c_2'(t) (1 - 2t) e^{-2t} = e^{-2t} \ln(t). \end{cases}$$

Observemos que podemos simplificar el sistema, ya que  $e^{-2t} \neq 0$  es un factor en cada uno de los términos

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t) t = 0, \\ c_1'(t)(-2) + c_2'(t) (1 - 2t) = \ln(t). \end{cases}$$

Se puede utilizar cualquier método de resolución, pero es práctico en estos casos utilizar la **Regla de Cramer** si  $\Delta \neq 0$ . Donde

$$c_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad c_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & t \\ -2 & 1-2t \end{vmatrix} = (1-2t) - (-2)t = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & t \\ \ln(t) & 1-2t \end{vmatrix} = -t \ln(t), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \ln(t) \end{vmatrix} = \ln(t)$$

tenemos entonces

$$c_1'(t) = -t \ln(t) \Rightarrow c_1(t) = -\frac{t^2}{2} \ln(t) + \frac{t^2}{4}$$

$$c_2'(t) = \ln(t) \Rightarrow c_2(t) = t(\ln(t) - 1)$$

reemplazando en la expresión de  $y_P$  obtenemos

$$y_P(t) = \left(-\frac{t^2}{2} \ln(t) + \frac{t^2}{4}\right) e^{-2t} + t^2(\ln(t) - 1)e^{-2t} = \left(\frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{3}{4}t^2\right) e^{-2t}$$

La **solución general de la EDO** es

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{3}{4}t^2\right) e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

#### IV. Ejercicios sugeridos

1. Sabiendo que  $y_1(t) = \cos(t)$  es solución de  $y'' - y' + y = \text{sen}(t)$  y que  $y_2(t) = \frac{1}{3} e^{2t}$  es solución de  $y'' - y' + y = e^{2t}$ , determina una solución de la ecuación

$$y'' - y' + y = \text{sen}(t) - 3e^{2t}.$$

2. Dada la EDO No homogénea y una solución particular, determina la solución general para la ecuación.

$$a) \quad y'' - y = t, \quad y_p(t) = -t.$$

b)  $y'' = 2y' - y + 2 e^x$ ,  $y_p(x) = x^2 e^x$ .

3. Encuentra una solución particular de la EDO dada, utilizando el método de los coeficientes indeterminados

a)  $y'' + 3y = -9$ ,

b)  $y'' + 2y' - y = 10$ ,

c)  $2z'' + z = 9 e^{2t}$ ,

d)  $y'' - y' + 9y = 3 \operatorname{sen}(3t)$ ,

e)  $y'' - 2y' + y = 8 e^t$ ,

f)  $y'' - y = 2t + 4$ .

4. Encuentra una solución particular de la EDO dada, utilizando el método de variación de parámetros.

a)  $y'' + 4y = \tan(2t)$ ,

b)  $2y'' - 4y' + 2y = t^{-1} e^t$ ,

c)  $-y'' - 4y' - 4y = e^{-2t} \ln(t)$ ,

d)  $-y'' - y = \sec^3(t)$ .

5. Dada la EDO

$$\theta''(t) - \theta(t) = t \operatorname{sen}(t)$$

encuentra una solución particular utilizando primero el método de los coeficientes indeterminados y luego variación de parámetros. ¿Cuál resultó más apropiado? Escribe la solución general.

6. Encuentra la solución general de la EDO. Sugerencia: cuando sea posible, para ahorrar cálculos, utiliza resultados de los ejercicios anteriores.

a)  $y'' + 4y = \tan(2t)$ ,

b)  $y'' - y = 2t + 4$ ,

$$c) y'' - 2y' + y = t^{-1}e^t,$$

$$d) y'' - 6y' + 9y = t^{-3}e^{3t},$$

$$e) y'' - 2y' - 3y = 3t^2 - 5,$$

$$f) y'' + 4y = \text{sen}(\theta) - \text{cos}(\theta).$$

7. Utiliza el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular de la siguiente ecuación de orden superior:  $y''' + y'' - 2y = e^t$

8. Encuentra la solución del PVI.

$$a) \begin{cases} y'' - y = 1, \\ y(0) = 0 = y'(0). \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2y'' - 4y = 1, \\ y(0) = \frac{3}{4}, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y'' - y = \text{sen}(\theta) - e^{2\theta}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

9. Un sistema masa-resorte recibe una fuerza externa  $g(t) = 2 \text{sen}(3t) + 10 \text{cos}(3t)$ . La masa es igual a 1, la constante del resorte igual a 5 y el coeficiente de amortiguamiento es 2. Si la masa se coloca inicialmente en la posición  $y(0) = -1$ , con velocidad inicial  $y'(0) = 5$ , ¿cuál es su ecuación del movimiento?

10. En este ejercicio, veremos que, aunque los coeficientes de la EDO **no** sean constantes, aún podemos utilizar alguno de los métodos descritos en esta sección para resolver una EDO como la siguiente:

$$t y'' - (t + 1) y' + y = t^2.$$

Sabiendo que  $y_1(t) = e^t$  e  $y_2(t) = t + 1$  son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación homogénea asociada, determina una solución particular de la EDO correspondiente para  $t > 0$ .

11. La *ecuación de Bessel* de orden un medio

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y(x) = 0$$

tiene dos soluciones linealmente independientes:

$$y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x.$$

Determina una solución general de la ecuación no homogénea

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = x^{\frac{5}{2}}, \text{ con } x > 0.$$

# Capítulo 3

## Ecuaciones en derivadas parciales

### 3.1. Introducción

La formulación matemática de problemas que involucran dos (2) o más variables independientes, a veces conducen a ecuaciones en las que intervienen una función incógnita  $U$  y sus derivadas parciales. A estas ecuaciones las llamamos “**Ecuaciones en Derivadas Parciales**”(EDP)<sup>1</sup>. Esto tuvo origen en los descubrimientos de Isaac Newton.

Vale la pena señalar que las ecuaciones en derivadas parciales que surgen en aplicaciones de la física (mecánica cuántica, relatividad, electromagnetismo, superconductores, etc.), biología, medicina (neurociencia), economía, ingeniería y dentro de la matemática, son de primer o de segundo orden, siendo este último el más frecuente. Ecuaciones de tercer orden surgen al modelar ondas en medios dispersivos, por ejemplo, ondas de agua u ondas de plasma. Las ecuaciones de cuarto orden se muestran en problemas de elasticidad, particularmente en la mecánica de placas y vigas y en procesamiento de imágenes. Las ecuaciones de orden mayor o igual que 5 son poco frecuentes.

El reto es que, aunque estas ecuaciones nacen de modelos físicos, clásicos, cuánticos y relativistas bien definidos, la mayoría de las ecuaciones en derivadas parciales resultantes son notoriamente difíciles de resolver. Sólo un pequeño puñado puede considerarse completamente resuelto. En muchos casos, la única forma de calcular y comprender sus

---

<sup>1</sup>Para profundizar los temas, podés recurrir a [7, 8]

soluciones es mediante el diseño de esquemas de aproximación numérica. Sin embargo, no se puede avanzar seriamente en sus aspectos numéricos sin un profundo conocimiento de las propiedades analíticas subyacentes, por lo que los enfoques analíticos y numéricos están irremediabilmente entrelazados.

Por lo antes dicho, sólo veremos algunos casos particulares que corresponden a modelos adecuadamente simplificados para los cuales obtendremos soluciones clásicas o “formales” mediante Series de Fourier según sea el caso.

## 3.2. Algunos tipos de EDP y su forma de resolución

En el capítulo anterior vimos que la solución general de una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  depende de  $n$  constantes arbitrarias. Veremos que las soluciones a las ecuaciones diferenciales parciales dependen de funciones arbitrarias. A grandes rasgos, podemos esperar que la solución de una EDP de orden  $n$  que involucra (2) variables independientes dependa de  $n$  funciones arbitrarias de una variable. Pero esto debe tomarse con cuidado, sólo en algunos casos especiales, seremos capaces de expresar la solución en términos de funciones arbitrarias.

En general, establezcamos algunos conceptos antes de continuar:

**Definición 24.** Dada una **EDP**, se dice que es de **orden**  $n$ , si éste es el máximo orden de las derivadas parciales que aparecen en la EDP.

Al igual que en la unidad anterior, cuando trabajamos con EDO's, surgen las siguientes preguntas sobre la resolución de estos problemas. En general:

- todo problema que involucre una EDP tiene solución?
- si ésta existe, ¿es única?
- ¿cómo se obtiene esta solución?

Ahora, en esta unidad, nos dedicaremos a resolver los problemas **asumiendo** que tienen solución. Antes de continuar, veamos algunos comentarios.

1. Trabajaremos con **EDP lineales**, que son las más útiles en la práctica.
2. Para fijar ideas, una EDP lineal de primer orden es de la forma:

$$c_1 \frac{\partial U}{\partial x} + c_2 \frac{\partial U}{\partial y} + c_3 U = G(x, y) \quad (1)$$

y una EDP lineal de segundo orden es de la forma:

$$c_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c_4 \frac{\partial U}{\partial x} + c_5 \frac{\partial U}{\partial y} + c_6 U = G(x, y) \quad (2)$$

donde los coeficientes  $c_i$  son funciones continuas  $c_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

### Ejemplo 30

1.  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$  (EDP de primer orden)
2.  $U - \frac{\partial U}{\partial x} = 0$  (EDP de primer orden)
3.  $3U_{xy} - xU_y + xyU = 0$  (EDP de segundo orden)

En forma totalmente análoga a las EDO's, tenemos que:

**Definición 25.** La **solución general** de una EDP (1) o (2) será de la forma

$$U_H + U_P$$

donde  $U_H$  es solución de la ecuación homogénea asociada ( $G(x, y) \equiv 0$ ) y  $U_P$  es una solución particular de la EDP no homogénea.

## I. EDP's que pueden resolverse aplicando integración sucesiva.

Algunas EDP's sencillas se pueden resolver integrando de manera sucesiva, veamos el procedimiento con un ejemplo.

### Ejemplo 31

Halla la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 6x + 12y^2, \quad \text{donde la función incógnita es } U = U(x, y).$$

**Resolución.-** En este caso seguiremos los siguientes pasos:

1. Supongo la variable  $y$  como una constante e integro ambos miembros con respecto a la variable  $x$ , de donde obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 + 12xy^2 + F(y).$$

2. Nuevamente integro ambos miembros, ahora con respecto a la variable independiente  $y$ :

$$U(x, y) = 3x^2y + 4xy^3 + H(y) + G(x), \quad H(y) = \int F(y) dy \quad \blacksquare$$

En analogía a las **EDO's**, ésta sería la **solución general** pues aparecen dos funciones arbitrarias y una vez fijadas para satisfacer las condiciones que se impongan, obtenemos una **solución particular**.

### Ejemplo 32

Resuelva el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 6x + 12y^2, \\ U(1, y) = y^2 - 2y, \\ U(x, 2) = 5x - 5. \end{cases}$$

**Resolución:** Aquí la **EDP** es de orden 2 ¿Por qué? La solución general, vimos antes que era:

$$U(x, y) = 3x^2y + 4xy^3 + H(y) + G(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ahora, veamos la solución particular que satisface las condiciones del problema:

$$U(1, y) = 3y + 4y^3 + H(y) + G(1) = y^2 - 2y, \quad \forall y$$

Entonces

$$H(y) = -4y^3 + y^2 - 5y - G(1),$$

Por lo tanto

$$U(x, y) = 3x^2y + 4xy^3 + [-4y^3 + y^2 - 5y - G(1)] + G(x), \quad (3)$$

$$U(x, 2) = 6x^2 + 32x - 38 - G(1) + G(x) = 5x - 5, \quad (4)$$

Despejando  $G(x)$  de la ecuación 4 y reemplazando en 3, resulta:

$$U_P(x, y) = 3x^2y + 4xy^3 - 4y^3 + y^2 - 5y - 6x^2 - 27x + 33, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \blacksquare$$

Consideremos el siguiente problema:

### Ejemplo 33

$$\begin{cases} U_{yx} = U_x + 2, & x > 0, y > 0, \\ U(0, y) = 0, & y > 0, \\ U_x(x, 0) = x^2, & x > 0. \end{cases}$$

**Resolución:** Volvamos al problema del ejemplo. La EDP es:

$$U_{yx} - U_x = 2$$

Integrando en la variable  $x$ , se tiene:

$$U_y - U = 2x + F(y)$$

Esta es una **EDO lineal** (suponiendo  $x$  constante). Entonces, sabemos resolverla, el factor integrante es

$$\mu(y) = e^{\int (-1) dy} = e^{-y}$$

Luego

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{e^{-y}} \left[ \int e^{-y} (2x + F(y)) dy + G(x) \right] \\ &= -2x + \left[ e^y \int e^{-y} F(y) dy \right] + e^y G(x) \\ &= -2x + H(y) + e^y G(x) \end{aligned}$$

De la primera condición en el borde  $x = 0$

$$U(0, y) = H(y) + e^y G(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(y) = -G(0) e^y$$

además, de la segunda condición

$$U_x(x, 0) = -2 + G'(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad G'(x) = x^2 + 2$$

luego  $G(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + c$ , con lo cual:

$$G(0) = c \quad \text{y} \quad H(y) = -c e^y$$

reemplazando en la expresión de  $U(x, y)$  se tiene la solución del problema es:

$$U(x, y) = -2x + e^y \left( \frac{x^3}{3} + 2x \right) \quad \blacksquare$$

## II. Método de Separación de variables

El método de separación de variables es uno de los métodos más importantes para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales. En este método, la estructura de la EDP en particular nos permite buscar soluciones separables, es decir, soluciones de la forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

Esto nos permite transformar el problema original en problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias, que resolveremos utilizando los conceptos aprendidos en la Unidad anterior.

En general, no existe en la actualidad un método que nos permita decidir si una EDP dada admite soluciones separables o no, pero para la resolución de algunos casos particulares de estas ecuaciones, como por ejemplo las que tienen coeficientes constantes, este método resulta una herramienta eficaz.

Estudiemos los pasos a seguir mediante la resolución de un ejemplo.

### Ejemplo 34

Resuelve el siguiente problema.

$$(P) \begin{cases} U_x + 3U_y = 0, \\ U(0, y) = 4e^{-2y} + 3e^{-6y}. \end{cases}$$

**Resolución:** Proponiendo  $U(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  resulta: (¿por qué?)

$$\begin{cases} U_x = X'(x) Y(y), \\ U_y = X(x) Y'(y) \end{cases}$$

y reemplazando en  $U_x + 3U_y = 0$ , se tiene

$$X' Y = -3X Y' \quad \forall (x, y)$$

Si  $X(x) \equiv 0 \Rightarrow U(x, y) \equiv 0$ , y no se satisface la condición del problema. Por la misma razón,  $Y(y)$  no puede ser una función idénticamente nula. Por lo tanto, tenemos, donde sea factible:

$$\frac{X'}{3X} = \frac{-Y'}{Y}, \quad \forall (x, y) / X(x) \neq 0 \text{ y } Y(y) \neq 0 \quad (5)$$

luego, resulta que debe existir  $k \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\frac{X'(x)}{3X(x)} = k = \frac{-Y'(y)}{Y(y)}, \quad \forall (x, y) / X(x) \neq 0 \text{ y } Y(y) \neq 0 \quad (6)$$

donde  $k$  es alguna constante real. Veremos cuál debería ser esta constante.

Notemos que en 6, hay **dos** EDO's de 1<sup>er</sup> orden:

i)

$$\frac{X'(x)}{3X(x)} = k \Rightarrow X(x) = a_1 e^{3kx} \quad (7)$$

ii)

$$\frac{-Y'(y)}{Y(y)} = k \Rightarrow Y(y) = a_2 e^{-ky} \quad (8)$$

O sea:

$$U(x, y) = X(x).Y(y) = a_1 e^{3kx} . a_2 e^{-ky} = B e^{k(3x-y)}$$

donde  $B = a_1 . a_2$

El problema es cuando queremos utilizar la condición en  $(0, y) \dots$

Acá, apelamos al principio de superposición: si  $U_1$  y  $U_2$  son dos soluciones de una EDP homogénea, entonces

$$c_1 U_1 + c_2 U_2$$

es también solución de ella, con lo cual se propone:

$$U(x, y) = c_1 e^{k_1(3x-y)} + c_2 e^{k_2(3x-y)}$$

$$U(0, y) = c_1 e^{-k_1 y} + c_2 e^{-k_2 y} = 4e^{-2y} + 3e^{-6y}$$

Con lo que  $c_1 = 4; k_1 = 2; c_2 = 3; k_2 = 6$ .

Ahora sí, una solución de  $(P)$  es :

$$U(x, y) = 4 e^{2(3x-y)} + 3 e^{6(3x-y)} \quad \blacksquare$$

### Ejercicio 37

Resuelve el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} U_t = 2U_{x,x}, \\ U(0, t) = 0, \\ U(10, t) = 0, \\ U(x, 0) = 50 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 20 \operatorname{sen}(2\pi x) - 10 \operatorname{sen}(4\pi x). \end{cases}$$

*Observación 27.* La EDP del ejemplo anterior es la **ecuación del calor**. Por supuesto, una versión simplificada. La trabajaremos un poco mejor en lo que sigue.

### III. Soluciones de problemas con condiciones de frontera utilizando Series de Fourier

Visualizaremos este caso mediante un ejemplo. Trabajaremos con la **Ecuación del calor**.

#### Ejemplo 35

Se considera una barra aislada de longitud  $L$ , que inicialmente se encuentra a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  (temperatura constante). De algún modo, resulta que podemos mantener los extremos de esta barra a temperatura constante e igual a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Esto hará que la distribución de temperatura en la barra vaya cambiando a medida que transcurre el tiempo. Si suponemos que la barra es mucho más larga que ancha ( $L \gg a$ ), estamos ante un **problema unidimensional**, es decir en **una** variable espacial. Esto es pues, no habrá mucha diferencia térmica en el ancho de la barra, mientras que sí se notará cambio de temperatura a lo largo de ella.



Entonces, el planteo matemático, será: Halla la distribución de temperatura a lo largo de la barra tal que se satisfaga

$$\begin{cases} U_t = \alpha U_{x,x}, & 0 < x < L, t > 0, \\ U(0, t) = 0, & t > 0, \\ U(L, t) = 0, & t > 0, \\ U(x, 0) = 100, & 0 < x < L, \end{cases}$$

donde  $U(x, t)$  representa la distribución de temperatura en la barra,  $x$  es la variable espacial y  $t$  es la variable temporal.

*Observación 28.* Comentarios varios:

1) No nos preocuparemos de lo que ocurre en los puntos  $(0, 0)$  y  $(L, 0)$  pues son “**puntos problemáticos**”. ¿Notaron que en ellos la temperatura no sabría bien qué hacer?

2) La constante  $\alpha$ , se llama coeficiente de difusividad térmica del material con que está elaborada la barra. Se define como  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ , donde:  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica,  $\rho$  es la densidad de masa y  $c$  es el calor específico. Estas son “**propiedades térmicas**” del material.

Volvamos ahora al proceso de resolución del problema de conducción de calor planteado. Proponiendo que  $U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , resulta que debe existir  $k \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = k = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \forall (x, t) \quad (9)$$

de donde resultan, como en el **Caso 2** dos problemas auxiliares en una variable:

(1)

$$(P1) \begin{cases} X''(x) - k X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases}$$

¿Por qué queda así definido? Por otro lado, obviamente, no estamos interesados en la solución trivial, por lo tanto debe darse que  $k < 0$  ¿por qué? Entonces,

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k} x) + c_2 \sen(\sqrt{-k} x)$$

y como  $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ . Además,  $X(L) = 0 \Rightarrow \sen(\sqrt{-k} L) = 0$

$$\sqrt{-k} L = n \pi \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos una solución de (P1) de la forma:

$$X_n(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

pues  $c_2$  podría depender de  $n$ .

(2)

$$\frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad t > 0.$$

La EDO es ordinaria y sabemos resolverla:

$$T(t) = b_n e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

Es decir, que por el momento, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tendríamos una solución de la ecuación del calor que verifica las condiciones en los bordes de la barra:

$$u_n(x, t) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot b_n e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

pero llamando  $c_n = a_n \cdot b_n$ , resulta

$$u_n(x, t) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}. \quad (10)$$

**¿Alguna de estas  $u_n$  satisface la condición inicial?**

Respuesta

**NO**

**¿Entonces?**

Entonces, sólo me queda un camino..pues tampoco resultaría proponer una combinación lineal de estas funciones...el camino es proponer

**una serie!!!**

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \underbrace{c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}_{u_n(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

donde, para no cambiar tanto nombre,  $c_n = d_n \cdot c_n$ . Suponiendo que esta serie es convergente . . . **yyyy** . . . que converge cuando  $t \rightarrow 0$  y que converge a donde queremos, debería darse que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 100, \quad \forall x \in (0, L)$$

¿ $c_n$ ?

Veamos, mirando la serie, es una serie de senos y podemos pensar en una serie de Fourier con

$$w = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L}$$

y también podemos pensar en que esta serie representa a una función impar de período  $2L$  y que en su período principal se define como:

$$f(x) = \begin{cases} -100, & -L < x < 0, \\ 100, & 0 < x < L \end{cases}$$

que no es otra cosa que una extensión de la función  $U(x, 0) = 100$ ,  $x \in (0, L)$ . Entonces, tendríamos que:

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 2k (k \in \mathbb{N}), \\ \frac{400}{n\pi}, & n = 2k - 1 (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

es decir que la solución final del problema inicial de transferencia de calor sería:

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{400}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\alpha t \left(\frac{(2k-1)\pi}{L}\right)^2}.$$

Hasta acá, hemos obtenido “**formalmente**” una función tal que:

1. cada término satisface la ecuación del calor.
2. cada término satisface las condiciones establecidas en los bordes de la barra.

Preguntas pendientes:

1. ¿la serie, satisface la ecuación del calor?
2.  $U(x, t) \rightarrow 100$  si  $t \rightarrow 0$
3.  $U(x, t) \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow 0$  y si  $x \rightarrow L$ ?

Nos contentaremos con investigar numéricamente (es decir construyendo e implementando rutinas en la compu) estas cuestiones.

#### IV. Ejercicios sugeridos

1. Halla las soluciones de los siguientes problemas:

$$\begin{array}{ll}
 a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = \text{sen}(y), \\ U(0, y) = 0; \end{array} \right. & d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 4xy + e^x, \\ \frac{\partial U}{\partial y}(0, y) = y, \\ U(x, 0) = 2; \end{array} \right. \\
 b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 \cos(y), \\ U(x, 0) = U(x, \frac{\pi}{2}) = 0; \end{array} \right. & e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 3 \frac{\partial U}{\partial y} + 2y, \\ \frac{\partial U}{\partial y}(0, y) = y^2 - 2y, \\ U(x, 0) = x + 3e^{-x}. \end{array} \right. \\
 c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x, 1) = x^2, \\ U(0, y) = 3 \text{sen}(y); \end{array} \right. & 
 \end{array}$$

2. Obtén una ecuación diferencial en derivadas parciales (del menor orden posible) tal que la familia de funciones

$$U(x, y) = x^2 F(y) + 3 x y$$

sea la solución general (sugerencia: eliminar la función arbitraria).

3. Muestra que  $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , es solución de la EDP:

$$x F_x + y F_y = F.$$

4. a) Si  $z = F\left(\frac{y}{x}\right) + x G\left(\frac{y}{x}\right)$  Muestra que

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

b) Obtén una solución a la EDP anterior que satisfaga las condiciones

$$z(1, y) = \cos(y) \quad ; \quad z\left(\frac{1}{2}, y\right) = e^{-2y}.$$

5. La ecuación tri-dimensional de **Laplace** es la ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

A las funciones que satisfacen esta ecuación se las denomina **funciones armónicas**. El descubrimiento de sus numerosas y notables propiedades constituye uno de los capítulos más célebres de la literatura científica.

Muestra que la función  $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  satisface la **ecuación de Laplace**.

6. Si el dominio sobre el cual se trabaja fuera circular en dos dimensiones, sería conveniente considerar la ecuación de Laplace bi-dimensional pero ahora utilizando coordenadas polares.

Dada la EDP  $U_{xx} + U_{yy} = 0$ , realiza el cambio de variables de coordenadas rectangulares  $(x, y)$  a coordenadas polares  $(r, \theta)$  de acuerdo a la transformación  $x = r \cos(\theta)$  ;  $y = r \sin(\theta)$  y muestra que:

a)  $U_{xx} + U_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$

b) la EDP en coordenadas polares es  $\Delta U = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0.$

7. Utiliza el método de separación de variables para obtener soluciones de los siguientes problemas de valor de frontera:

a) 
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ U(0, y) = e^{2y}; \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 4\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 3Y, \\ Y(x, 0) = 4e^{-x} - e^{-5x}; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + U = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ U(x, 0) = 4e^{-3x}; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = U, \\ U(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}; \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ U(0, t) = U(10, t) = 0, \\ U(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(2\pi x); \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
f) \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ U(0, t) = U(\pi, t) = 0, \\ U(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(3x) + 4 \sin(4x); \end{array} \right. \\
g) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}; \\ Y(0, t) = Y(20, t) = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ Y(x, 0) = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right); \end{array} \right. \\
h) \left\{ \begin{array}{l} 9 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \\ Y(0, t) = Y(\pi, t) = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(x) - 3 \operatorname{sen}(2x), \\ Y(x, 0) = 0; \end{array} \right. \\
i) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U, \\ U(0, t) = U(10, t) = 0, \\ U(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(2\pi x) - \operatorname{sen}(4\pi x). \end{array} \right.
\end{array}$$

8. Encuentra una solución formal de cada uno de los siguientes problemas:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} U_t = 5 U_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad t > 0, \\ U(x, 0) = (1 - x)x \quad 0 < x < 1. \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} U_t = 3 U_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ U_x(0, t) = U_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = x, \quad 0 < x < \pi. \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} U_t = 4 U_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ U_x(0, t) = U(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = \cos\left(\frac{5}{2}x\right), \quad 0 < x < \pi. \end{array} \right.$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} U_{tt} = U_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = (1 - x)x, \quad 0 < x < 1, \\ U_t(x, 0) = \operatorname{sen}(7\pi x) \quad 0 < x < 1. \end{array} \right.$$

$$e) \left\{ \begin{array}{l} U_{tt} = 4 U_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ U(0, t) = U(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = (\pi - x)x, \quad 0 < x < \pi, \\ U_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \end{array} \right.$$

$$f) \begin{cases} U_{tt} = 9 U_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ U(0, t) = U(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ U(x, 0) = \text{sen}(4x) + 7 \text{sen}(5x), & 0 < x < \pi, \\ U_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{con } g(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

# Bibliografía

- [1] T. Apostol. *One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, VI. 1967 (vid. págs. 4, 6).
- [2] M. Spivak. *Cálculo infinitesimal, 2da Ed.*, Editorial Reverté. 1996 (vid. pág. 6).
- [3] J. Stewart. *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7ma. Edición*. 2012 (vid. págs. 6, 18, 42).
- [4] J. Calcagno. *Simetrías de media onda y cuarto de onda*, Cátedra de Matemática avanzada, Facultad de Ingeniería, Univ. Nacional de Mar del Plata. (Vid. págs. 66, 147).
- [5] Saff Nagle y Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, Cuarta Ed.*, Pearson Educación, México. 2005 (vid. pág. 68).
- [6] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura y Aplicada. 1979 (vid. pág. 68).
- [7] M. Spiegel. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Prentice-Hall Ihipanoamerica, S.A. 1983 (vid. pág. 115).
- [8] P. Olver. *Introduction to partial differential equations*, Springer International Publishing Switzerland 2014, Corrected at 2nd printing 2016. 2014 (vid. pág. 115).



# Anexo A

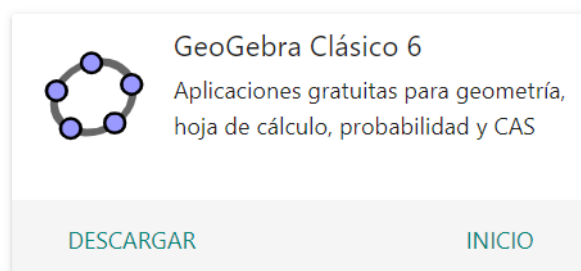
## Herramientas gráficas

Herramientas hay muchas, veremos algunas de ellas para ayudarnos a comprender un poco más, pero recordá que es imprescindible que también puedas esquematizar y trabajar sólo pues en las evaluaciones no podrás utilizar celulares ni computadoras.

1. Una herramienta útil para graficar sucesiones es **Geogebra**, que podés descargar o utilizar online. Recomiendo utilizar **Geogebra Clásico 6**, para utilizar esta versión online debes seguir los siguientes pasos.

★ Entrás al sitio <https://www.geogebra.org/download>

★ Buscás la cajita



★ Apretando Inicio vas a poder utilizar esa versión online.

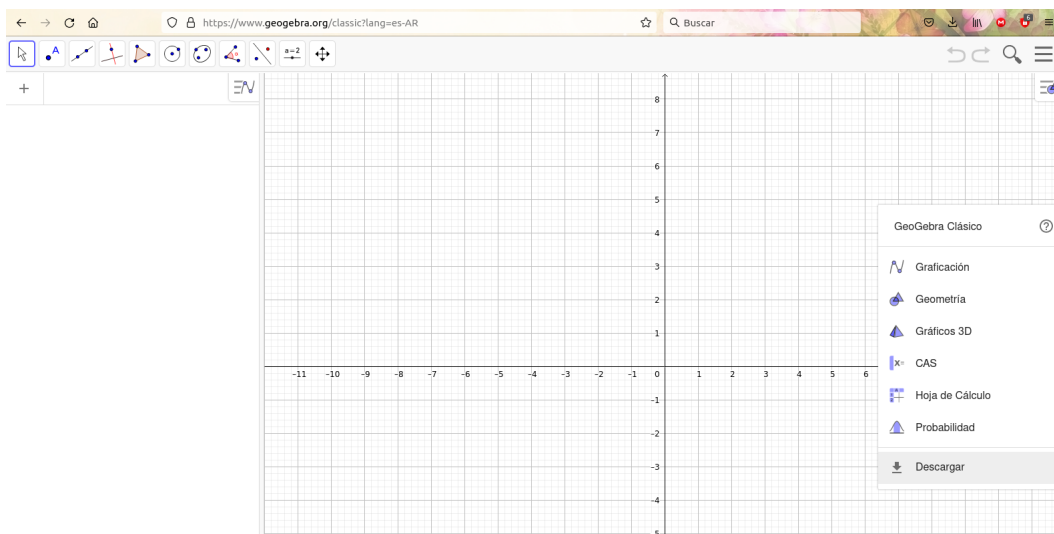
Para graficar una sucesión se utiliza el comando **ListaPuntos( Lista de listas de pares de coordenadas que quieres graficar )**, por ejemplo si queremos graficar

algunos puntos de la sucesión  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

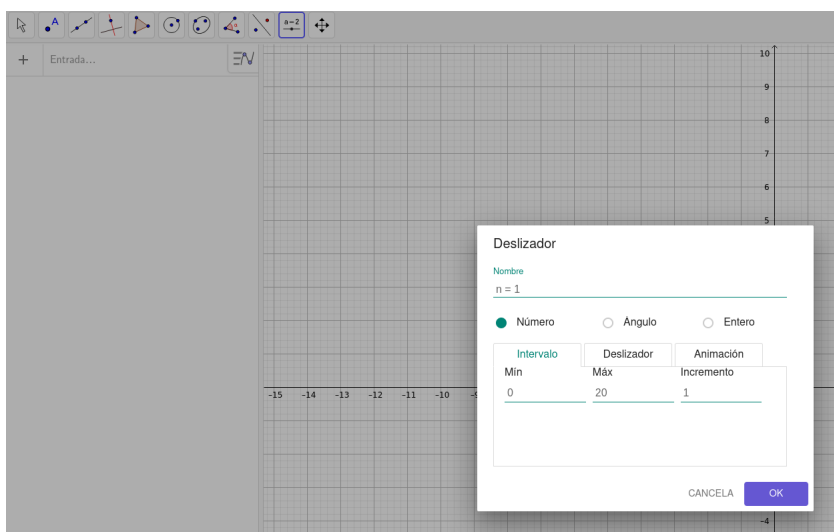
$$\text{ListaPuntos}((1, 1), (2, 0,5), (3, 0,33), (4, 0,25), (5, 0,2))$$

Aquí te dejo un link con un video para poder realizarlo un poco más fácil: <https://youtu.be/nBXf2qXPm2w>.

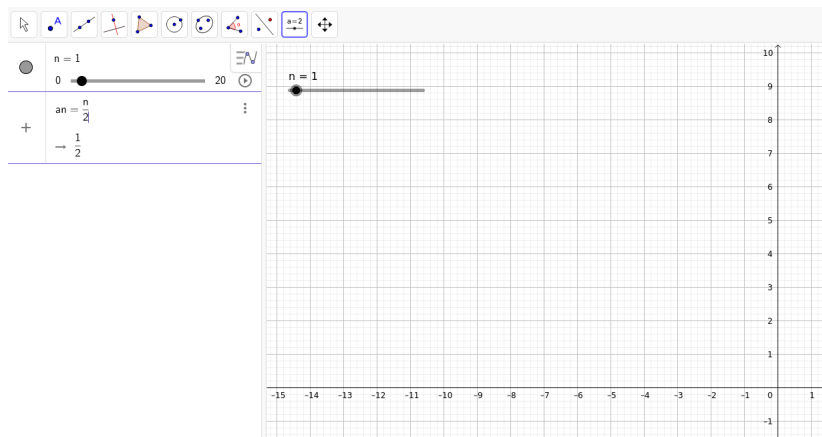
2. Otra forma de graficar es la siguiente: nuevamente, utilizando la página <https://www.geogebra.org/cls> se abre la ventana:



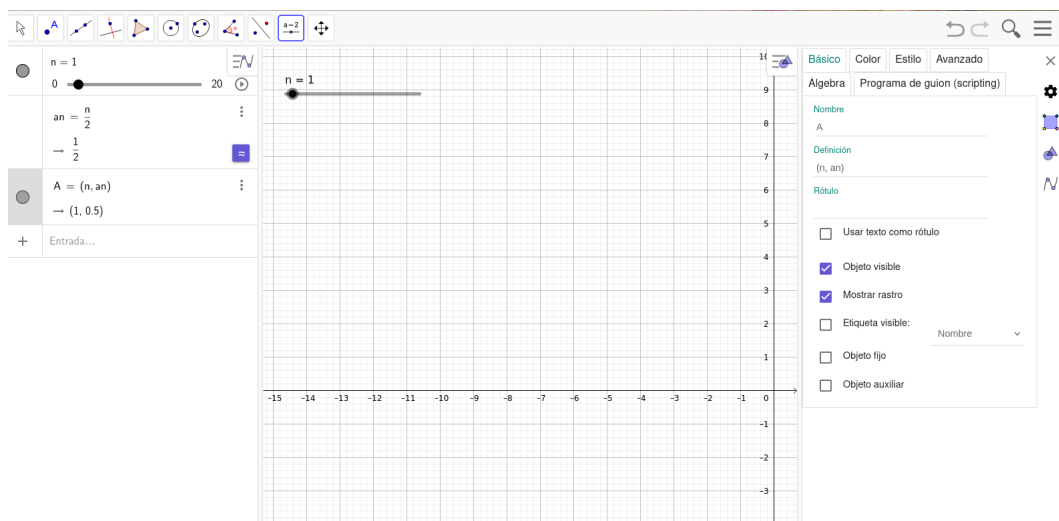
Una vez allí, definimos el deslizador  $n$  y establecemos su rango de variación y modo de incremento:



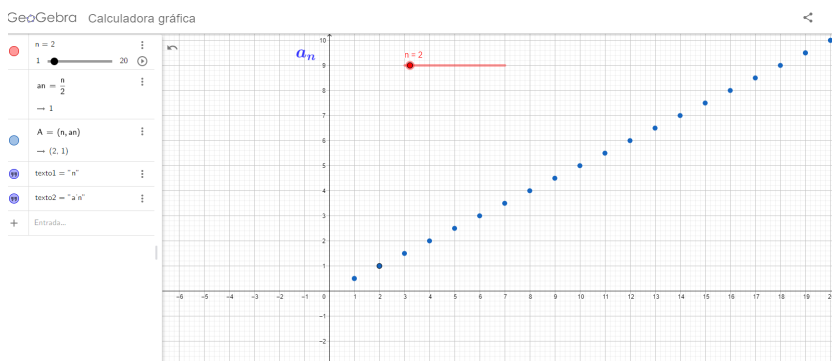
Luego damos la ley del elemento genérico de la sucesión  $a_n$



Finalmente, definimos los puntos de coordenadas  $(n, a_n)$ , cuya gráfica nos mostrará la sucesión a medida que avanza el subíndice  $n$ :



para terminar, hemos de incluir el nombre de cada eje, ed decir **qué veremos en cada eje**



- Una tercera forma, es escribiendo unas pocas líneas de códigos, ya sea utilizando Scilab, Octave o el software que gustes. En la página 5, luego del Ejercicio (1) podés

ver una idea de script para dibujar elementos de una sucesión. Ahí se utilizó para graficar los primeros elementos de la sucesión generada por el método de Bisección para aproximar el valor de la raíz de una ecuación no lineal.

Ahora te compartimos una idea de script, fácil de implementar en cualquier otro software con los cambios necesarios para poder compilar bien, bastante completito en el que verás como redactar una función que incluso la variable utilizada puede ser vectorial. Y también ves un ejemplo de cómo podés graficar varias funciones en el **mismo** sistema, cosa que es **mu**y necesario al momento querer hacer comparaciones y poder hacer un análisis de la información obtenida.

```
function EFE=F(x) //x=Y(:,cont) vector Y en el instante t_cont.
    EFE(:)=[s-k*x(4)*x(1)-mu*x(1)+c1*x(2); k*x(4)*x(1)-c2*x(2); c3*x(2)-delta*x(3);
c4*x(3)-c*x(4)]
endfunction
```

Este es un ejemplo de cómo se redacta una función. Acá EFE es un vector de 4 componentes (separadas por un punto y coma). La variable independiente x (x(1), indica la primer componente de x), también es un vector.

El símbolo // es indica un comentario, es decir algo que el software no compila.

Ahora, para graficar:

Suponiendo quiero graficar las funciones f(t), g(t),h(t), con t en [0,1]  
dt=0.1; (sería delta t, el paso en la variable espacial)

```
t=0:dt:1; (acá estoy creando el vector que representa a la variable independiente)
plot2d(t,[f(t),g(t),h(t)],[1,2,3]) (acá dibujo 3 gráficas en el mismo sistema y he elegido el color)
legends(['f(t)', 'g(t)', 'h(t)'],[1,2,3])
xlabel('días') (cartel que dice q dibujo en cada eje)
title('L para alfa entre .9 y .99') (cartel que dice q dibujo este sistema)
```

Te proponemos seguir investigando cómo podrías desarrollar un script que devuelva como salida el gráfico de una sucesión.

## Anexo B

# Descomposición en fracciones simples

Recordemos que una función racional es aquella que se presenta como cociente de dos funciones polinomiales. La técnica de **descomponer** a una expresión racional en suma de otras expresiones racionales más simples, es una herramienta muy útil. Podemos utilizarla para integrar funciones racionales complejas o en nuestro caso para re-escribir una serie de modo tal que resulte una serie telescópica. Pero veamos cómo llevar adelante esta descomposición.

El **Método de Fracciones Simples** consistirá, entonces, dada una función racional, en descomponerla como suma de fracciones simples o parciales. Para ello deberemos analizar diferentes situaciones.

Dada la función racional  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , con  $P(x)$  y  $Q(x)$  funciones polinomiales.

1. Si  $gr(P) < gr(Q) = n$ , vemos distintos casos:

a)  $Q(x)$  **tiene  $n$  raíces reales distintas**. Es decir que todas las raíces tienen multiplicidad 1.

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Se puede demostrar que existen únicos coeficientes  $A_1, \dots, A_n$  tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

### Ejemplo 36

Halla la descomposición en fracciones simples de  $\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$

**Resolución:** como las raíces de  $2x^3 + 3x^2 - 2x$  son:  $-2, 0$  y  $\frac{1}{2}$ , buscamos los coeficientes  $A_1, A_2, A_3$  tales que:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2} = \\ &= \frac{A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)}{x(2x - 1)(x + 2)}\end{aligned}$$

Mirando la primera y la última expresión, vemos que los numeradores deben ser iguales,

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Es una igualdad entre polinomio, por ende, obtenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{5}$  y  $C = -\frac{1}{10}$ .

Entonces,

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/5}{2x - 1} + \frac{-1/10}{x + 2}.$$

b)  $Q(x)$  tiene raíces reales no todas con multiplicidad 1

Supongamos que el factor lineal  $(x - x_1)$  se repite  $r$  veces en la descomposición de  $Q(x)$ , entonces, en vez del término  $\frac{A_1}{x - x_1}$  que planteamos en el caso 1, acá tendremos  $r$  términos:

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}.$$

### Ejemplo 37

Por ejemplo, halla la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2 (x - 1)}$$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2 (x - 1)} &= \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x - 1} \\ &= \frac{A_1(x + 1)(x - 1) + A_2(x - 1) + B(x + 1)^2}{(x + 1)^2 (x - 1)} \end{aligned}$$

Planteando que los numeradores sean iguales,

$$x^2 + 2x + 3 = A_1(x + 1)(x - 1) + A_2(x - 1) + B(x + 1)^2$$

$$x^2 + 2x + 3 = (A_1 + B)x^2 + (A_2 + 2B)x + (-A_1 - A_2 + B)$$

$$\begin{cases} A_1 + \quad + B = 1 \\ \quad A_2 + 2B = 2 \\ -A_1 - A_2 + B = 3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema obtenemos  $A_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $A_2 = -1$  y  $B = \frac{3}{2}$

Entonces resulta:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2 (x - 1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1}.$$

c)  $Q(x)$  **tiene raíces complejas de multiplicidad 1**

Supongamos que el polinomio  $Q(x)$  tiene una raíz compleja simple y veamos un ejemplo para explicar el procedimiento.

### Ejemplo 38

Reescribe esta expresión racional en función de fracciones simples:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$$

**Resolución:**

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 4)}$$

$$\frac{(A + B)x^2 + Cx + 4A}{x(x^2 + 4)} \left\{ \begin{array}{l} A + B = 2 \\ C = -1 \\ 4A = 4 \end{array} \right.$$

Al resolver el sistema tenemos  $A = 1$ ,  $B = 1$  y  $C = -1$ .

Entonces,

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$



d)  $Q(x)$  **tiene raíces complejas de multiplicidad mayor a 1** Se procede en modo similar a lo antes descrito en los ítems b y c. Pero excede a lo que necesitamos en este curso razón por la cual los invitamos a ir a la bibliografía si gustan seguir con este tema.

2. Si  $gr(P) \geq gr(Q)$ , comenzamos dividiendo  $P(x)$  por  $Q(x)$  y de acuerdo al Algoritmo de la División para polinomios, tenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde  $C(x)$  es el polinomio cociente y  $R(x)$  el resto, con grado menor a  $Q(x)$ . Entonces, trabajamos para descomponer en fracciones simples la expresión  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  utilizando lo visto antes.

### Ejercicio 38

Halla la descomposición en fracciones simples de las siguientes funciones.

1.  $\frac{3}{x^2 - 1}$

2.  $\frac{x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 3x^2 - 2x}$

3.  $\frac{10}{5x^2 - 2x^3}$

4.  $\frac{n}{(n + 4)(2n - 1)}$

5.  $\frac{4}{(n - 1)(n^2 + 9)}$

*Observación 29.* En este apunte, utilizamos este método para poder mostrar que algunas series son telescópicas. Otra utilidad del método de descomposición en fracciones simples de una expresión racional es para integrar una tal expresión.



# Anexo C

## Integrales impropias

Hasta ahora hemos aprendido a integrar funciones continuas o seccionalmente continuas sobre intervalos cerrados y acotados...pero **¿y si alguna de estas cosas falla?**

★ **Tipo I (o primera especie):** El intervalo de integración no es acotado.

Si  $\int_a^t f(x) dx$  existe para todo  $t \geq a$  entonces podemos plantearnos evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

- Si **el límite existe y es finito**, decimos que la integral impropia notada como  $\int_a^\infty f(x) dx$  es **convergente** y vale:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

- Si el límite no existe o es  $\pm\infty$ , la integral impropia  $\int_a^\infty f(x) dx$  **diverge**.

Análogamente se define la integral impropia cuando la integral es sobre el intervalo  $(-\infty, b]$ , con  $b$  un número real finito.

*Observación 30.* Dado que  $\int_a^t f(x) dx$  existe para todo  $t \geq a$ , podemos definir la función

$$I(t) = \int_a^t f(x) dx$$

El valor numérico  $I(t)$  juega el rol de la suma parcial, por eso suele llamarse “integral parcial.”

★ **Tipo II (o segunda especie):** La función no está definida o no está acotada en un extremo del intervalo de integración.

Dada  $f$  definida en  $(a, b]$  tal que existe  $\int_t^b f(x) dx$  para  $a < t \leq b$ , entonces si

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

existe y es finito, se define:

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

a) En este caso decimos que  $\int_{a^+}^b f(x) dx$  **converge** al límite.

b) Si el límite no existe, la integral impropia  $\int_{a^+}^b f(x) dx$  **diverge**.

En modo análogo se define la integral impropia cuando  $f$  no está acotada en  $a$  o no es acotada en  $b$  o no está definida sobre  $b$ .

A los efectos de lo necesario para Cálculo IV, estudiaremos únicamente las integrales impropias de **Tipo I**.

### Ejemplo 39

Veamos el carácter de la integral impropia  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ .

**Resolución:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty$$

Por lo tanto, la integral impropia  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  es **divergente** ■

### Ejercicio 39

Averigua el carácter de la integral impropia  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

### Ejemplo 40

Veamos ahora el carácter de la integral impropia  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ .

**Resolución:** Sea  $t > 0$ .

$$\int_0^t x e^{-x} dx = 1 - e^{-t}(t + 1).$$

Evaluamos el límite de ésta expresión cuando  $t$  tiende a infinito, resultando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - e^{-t}(t + 1)] = 1.$$

Por lo tanto,  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$  y decimos que la integral impropia  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$  es **convergente** y **converge a 1** ■

*Observación 31.* Como en el caso de las series, no siempre podremos determinar la convergencia de la integral calculando el límite. Para esto, existen algunos criterios de convergencia similares a los vistos para series.

### Ejercicio 40. Investigar el carácter de las siguientes integrales impropias

$$[i] \int_0^{\infty} e^x dx, \quad [ii] \int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad [iii] \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}, \quad [iv] \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

En éste caso, sugiero no utilizar la descomposición en fracciones simples sino que primero muestres que para  $x$  suficientemente grande, vale que:

$$\frac{1}{x^3 + 1} \approx \frac{1}{x^3}$$

Retomando lo que nos motivó estudiar las integrales impropias, vemos cómo utilizamos integrales impropias.

### Ejemplo 41

Halla el carácter de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ .

**Resolución:** Para ello, utilizaremos la *Prueba de la Integral*.

Sea la función  $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$  definida en el intervalo  $[1, \infty)$ .

- $f(x) > 0$  para todo  $x \in [1, \infty)$  ¿por qué?
- $f$  es una función continua en su dominio por ser función racional.
- $f$  es una función decreciente en el intervalo dado pues  $f'(x) = -\frac{6}{(2x+1)^4} < 0$  para todo  $x \in [1, \infty)$

Por otro lado,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{(2x+1)^2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{4(2t+1)^2} + \frac{1}{36} \right) = \frac{1}{36}.$$

Con lo cual,  $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{36}$  y decimos que  $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$  converge y por la

Prueba de la Integral, concluimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$  también **converge** ■

## Anexo D

# Simetrías de media onda y cuarto de onda

En la Unidad 1, estudiamos Series de Fourier correspondientes a funciones periódicas de período  $2P$ . En particular, si estas funciones tienen la propiedad de ser **pares o impares**, la Serie de Fourier asociada a ellas resultaba de ser de la siguiente forma:

$f$ <b>par</b>	$b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{P} n x\right)$
$f$ <b>impar</b>	$a_0 = 0; a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{P} n x\right)$

Es decir, si miramos los términos, vemos que la serie **mantiene** la propiedad de paridad o imparidad de la función a la que representa. Pero pueden ocurrir otras situaciones, otro tipo de simetrías. Las describimos a continuación [4].

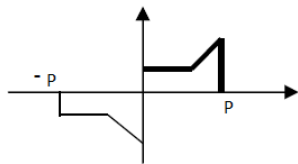
### 1. Simetría de Media Onda:

Una función periódica  $f$  con período  $2P$ , se dice que tiene **simetría de media onda** si

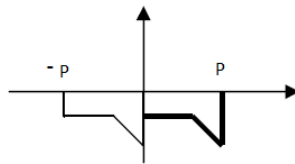
$$f(x) = -f(x + P) \quad \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$$

Para darnos cuenta gráficamente si una función tiene simetría de media onda, haremos lo siguiente (cuidado que el siguiente es sólo un esquema pues la gráfica no

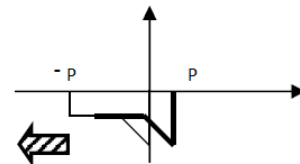
correspondería a una función):



1) Seleccione medio período de la señal, puede ser en cualquier lugar



2) Multiplique el tramo seleccionado por -1



3) Desplace el tramo seleccionado medio período a la izquierda o a la derecha. Si coincide con lo que está dibujado entonces tiene simetría de media onda.

¿Cómo resultan los coeficientes en la Serie de Fourier para funciones con este tipo de simetría?

### Ejercicio 41

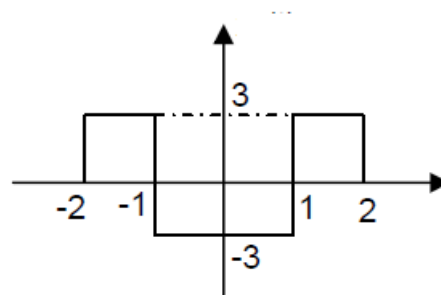
Muestra que para una función  $f$  con simetría de media onda, los coeficientes en la Serie de Fourier asociada son:

$$a_0 = 0, \quad a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{2}{P} \int_0^P f(u) \cos(n\omega u) du, & n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{2}{P} \int_0^P f(u) \sen(n\omega u) du, & n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

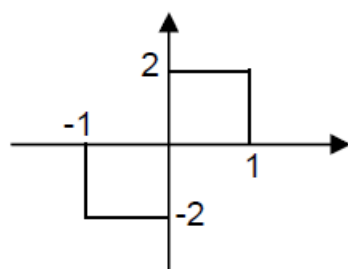
**Atención con esto:** Para las funciones con simetría de media onda, los coeficientes de Fourier asociados  $a_n$  y  $b_n$  son **nulos para valores de  $n$  pares**.

2. Simetría de Cuarto de Onda Par: Una función con simetría de media onda que además sea **par**, se dice que tiene **simetría de cuarto de onda par**.



$f$  con simetría de  
cuarto de onda par  $P=2$

3. Simetría de Cuarto de Onda Impar: Una función con simetría de media onda que además sea **impar** se dice que tiene **simetría de cuarto de onda impar**.



$f$  con simetría de  
cuarto de onda impar  $P=1$

Los coeficientes de la Serie de Fourier asociada a una función  $f$  con simetría de cuarto de onda par o impar son los descriptos en la tabla que figura a continuación:

$f$ con simetría de cuarto de onda par	$a_{2n} = 0; \quad b_n = 0$	$a_{2n-1} = \frac{4}{P} \int_0^{P/2} f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{P}x\right) dx$
$f$ con simetría de cuarto de onda impar	$a_n = 0; \quad b_{2n} = 0$	$b_{2n-1} = \frac{4}{P} \int_0^{P/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{P}x\right) dx$

Con lo cual las correspondientes series tendrán la forma:

$$f \text{ sim de cuarto onda par: } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{P}x\right)$$

$$f \text{ sim de cuarto de onda impar: } \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{P}x\right)$$

A modo de cierre del tema Series de Fourier, es menester contarles que éstas se extienden necesariamente al campo de los números complejos. También se plantea la versión continua utilizando el concepto de integral y pasamos a lo que se llama "Transformada de Fourier". Si bien todo esto es tema de otra/s materia/s, les queremos compartir el siguiente video que pueden observar en el link: <https://youtu.be/h4PTucW3Rm0>

