Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Números Complejos

4º Año

Cód. 1403-19

Mirta Rosito
Verónica Filotti
Juan Carlos Bue
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

Los Números Complejos.
Una ampliación más en el campo numérico

La necesidad de crear nuevos conjuntos numéricos (enteros, racionales, irracionales), fue surgiendo a medida que se presentaban situaciones que no tenían solución dentro de los conjuntos numéricos ya conocidos.

Problema

1) Resuelve las siguientes ecuaciones, indicando a qué conjunto numérico pertenecen sus soluciones N(naturales) : Z(enteros) : Q(racionales) ; I(irracionales) .

a) $3x+5=11$ b) $\frac{1}{x}=\frac{-3}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{5}-x=\frac{6}{5}$

d) $\sqrt{3}+x=1$ e) $x^2=\frac{25}{4}$ f) $\frac{x-\frac{1}{7}}{-2}=\frac{1}{3}$

Un desafío:

Encuentra los valores de "x" que hacen cierta la ecuación:

$$x^2 + 1=0.$$

¿Es posible encontrar en los conjuntos numéricos que conoces algún número "x" que verifique la ecuación? ¿Por qué?

En el siglo XVIII, el matemático Euler introdujo el símbolo **i** (inicial de la palabra latina imaginarius) para nombrar un número cuyo cuadrado es igual a -1

Se define entonces el número i, al que llamamos ***unidad imaginaria***, como aquel cuyo cuadrado es (-1).

Es decir: $\boldsymbol{i^2=-1}$

Luego las soluciones de la ecuación $x^2 = -1$ son:

$\boldsymbol{x= i}$ pues $i^2 = -1$ o $\boldsymbol{x = - i}$ pues $(- i)^2 = (- i).(- i) = -1$

Más desafíos

Resolvamos la siguiente ecuación:

$$x^2 + c=0$$

$$x^2 = -c$$

- ✓ Si $c \leq 0$ $\quad x = \pm\sqrt{-c}$
- ✓ Si $c>0$ $\quad x^2= -\left(\sqrt{c}\right)^2$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 = -1$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) = \pm i \qquad \text{Luego} \qquad x_{1;2}=\pm\sqrt{c}\, i$$

Problema

2) Determina las soluciones de :

a) $x^2 +25 = 0$
b) $x^2+5 = 4x$

Una ampliación más del campo numérico: ***Los números complejos***

Llamamos números complejos a los números de la forma **a + bi** donde **a** y **b** son números reales e **i** la ***unidad imaginaria.***
Si Z es un número complejo resulta: Z = a + bi

es la componente real Re(Z) — es la componente imaginaria Im(Z)

Definimos al conjunto de los números complejos:

$$\boxed{C = \{Z \,/\, Z = a + bi \text{ , } a \in R \text{ ; } b \in R \text{ ; } i^2=-1\}}$$

Un complejo expresado de la forma Z = a + bi se la conoce con el nombre de ***forma binómica*** del complejo Z

Por ejemplo, el número complejo: Z = -3 + 0,4i tiene Re(Z)=-3 e Im(Z)=0,4

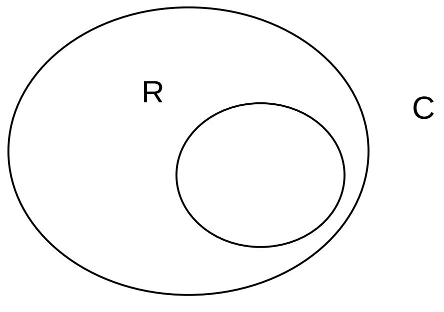
Problema

3) Completa el siguiente cuadro

Z_i	Forma binómica del Z_i	Re(Z_i)	Im(Z_i)
Z_1	$5-\frac{1}{2}i$		
Z_2		-1	π
Z_3		0	$\frac{3}{4}$
Z_4		11	0

Observaciones

- Si Z=a+bi y a=0 Z= bi recibe el nombre de ***imaginario puro***
- Si Z=a+bi y b=0 Z=a . En este caso el número complejo, cuya componente imaginaria es nula es **un número real.** Notemos entonces que el conjunto de los números reales es un subconjunto del de los números complejos



- Dos números complejos son ***iguales*** si son respectivamente iguales sus componentes reales e imaginarias

$$a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

Problema

4) Determina x e y pertenecientes al conjunto de los números reales de modo que $Z_1=Z_2$

siendo $Z_1=x+y-(2x+y)i$ $\quad$ $Z_2= -x+(1+y)i+3$

Operaciones con números complejos.Propiedades

Propuesta de trabajo: Resuelve la adición y multiplicación de los siguientes números complejos teniendo en cuenta que se expresan como binomios y tú ya sabes operar con ellos .

Dados $Z=a+bi$ $\quad$ $W= c+di$

¡Recuerda !
$i^2=-1$

Adición

$Z+W=(a+bi)+(c+di)=$…………

Multiplicación

$Z.W=(a+bi).(c+di)=$…………..

Propiedades

Adición		*Multiplicación*
	$Z \in C; W \in C; V \in C$	
$Z+W=W+Z$	*Conmutativa*	$Z \,.\, W = W \,.\, Z$
$(Z+W)+V = Z+(W+V)$	*Asociativa*	$(Z \,.\, W) \,.\, V = Z \,.\, (W \,.\, V)$
$\forall Z \in C \,;\, \exists 0 \in C / Z+0=Z$	*Existencia de elemento neutro*	$\forall Z \in C \,;\, \exists 1 \in C / Z.1=Z$
$\forall Z \in C; \exists(-Z) \in C / Z+(-Z)=0$ *-Z se denomina* **opuesto** *de z*	*Existencia de elemento inverso*	$\forall Z \neq 0 \in C; \exists Z^{-1} \in C / Z.Z^{-1}=1$ Z^{-1} *se denomina* **recíproco** *de z*

Distributiva del producto con respecto a la adición

$$(Z+W) \,.\, V = Z \,.\, V + W \,.\, V$$

Resta de números complejos

Dados $Z=a+bi$, $W=c+di$ definimos :

$$Z - W = Z + (-W) = (a+bi)+(-c-di)$$

Conjugado de un número complejo

Si Z = a + bi , llamamos conjugado de Z y lo notamos $\overline{Z}$ al complejo $\overline{Z} = a - bi$

Propiedades del conjugado de un número complejo

Sean Z=a+bi y W=c+di

- ❖ $\overline{\overline{Z}} = Z$
- ❖ $Z + \overline{Z} = 2a$
- ❖ $Z - \overline{Z} = 2bi$
- ❖ $Z \, . \, \overline{Z} = a^2 + b^2$ (Número real que recibe el nombre de ***norma*** del complejo Z)
- ❖ $\overline{Z \pm W} = \overline{Z} \pm \overline{W}$
- ❖ $\overline{Z \, . \, W} = \overline{Z} \, . \, \overline{W}$

Problemas

5) Demuestra las propiedades del conjugado de un número complejo

6) Dados los complejos: $Z_1 = 2 + 3i$; $Z_2 = -2 - \frac{1}{2}i$; $Z_3 = -9$

Calcula: a) $Z_1 + Z_2 =$ b) $Z_1 . Z_2 =$ c) $\overline{Z_1} + Z_2 \, . \, Z_3 =$

d) $Z_1^2 - Z_2 =$ e) $\left(-Z_1 + \overline{Z_3}\right) . \left(-Z_2\right) =$ f) $Z_2 - \sqrt{Z_3}\left(\frac{1}{2} - Z_1\right) =$

***Nota**: en operaciones combinadas con números complejos al resolver $\sqrt{a}$ con a<0 considera sólo la solución positiva*

7) Averigua que número complejo no nulo verifica que la suma entre el duplo de dicho número y el cuadrado de su conjugado da por resultado cero.

Para pensar

Dados Z=a+bi W= c+di

*¿Cómo resolver el **cociente de números complejos**?*

En símbolos :

$$\frac{Z}{W} = \frac{a+bi}{c+di} = ?$$

Te proponemos completar el siguiente procedimiento, teniendo en cuenta que el producto de un complejo por su conjugado (norma de un complejo) es un número real :

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \cdot \overbrace{\frac{\overline{W}}{\overline{W}}}^{\text{artificio}} = \frac{\text{.......... ......}}{\text{.......... ....}} \cdot \frac{\text{.......... ....}}{\text{.......... ....}} = \frac{}{\rule{4cm}{0.4pt}} =$$

Ejemplo:

$$\frac{1-3i}{2+2i} = \frac{1-3i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{(1-3i).(2-2i)}{(2+2i).(2-2i)} = \frac{\text{..................................}}{\text{..................}} = \frac{\text{.......................}}{\text{............}} =$$

Problema

8) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2i}{x} = 3 - i$

b) $1 + \frac{i}{1+i} = \sqrt{-16}.x$

c) $\frac{-i}{\frac{1}{2} - x} = (1+i)^2$

d) 5 – (-3 +2i) = $\frac{x}{4i}$

<u>La unidad imaginaria y un producto que genera un ciclo</u>

$i^0 = 1$ (por definición)

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$

$i^4 = ...$

$i^5 = ...$

$i^6 = ...$

$i^7 = ...$

…………………………………

…………………………………..

…………………………………..

$i^n = ?$ n $\in N_0$

Para resolver este problema recordemos que por aplicación del algoritmo de una división entera resulta:

$$i^n = i^{4c+r} \overset{(1)}{=} i^{4c} i^r \overset{(2)}{=} \left(i^4\right)^c . i^r \overset{(3)}{=} 1^c . i^r = i^r$$

(1) producto de potencias de igual base
(2)potencia de otra potencia
(3)potencia de la unidad imaginaria

Luego:

$i^n = i^r$ con $0 < r < 4 \wedge r \in N_0$

$$\begin{array}{l|l} n & \underline{4} \\ r & c \end{array}$$

$0 < r < 4 \wedge r \in N_0$

n=4c+r

De donde
Si llamamos P al conjunto de todas las potencias de i es:

$$P=\{1;i;-1;-i\}$$

Problemas

9) Calcula: a) $i^{431}=$ b) $i^{1224}=$ c) $i^{779}=$

10) Determina:
   a) el conjugado de X / $i^{421}+\frac{1}{2X}=i.\sqrt{-25}$
   b) (-W) si $W+(i-2)^{-3}+i^{1231}=0$
   c) X si $\frac{3-i}{X}=i^{421}$

11) El producto entre un complejo y su conjugado es 80. Si la componente real es 4. ¿Cuál es la otra componente?

12) La suma de dos complejos conjugados es 10 y el producto es 34. ¿Cuáles son los complejos?

13) Calcula: $\frac{1}{i};\frac{1}{i^2};i^{-9}$

14) Determina el valor de x real para que el producto:

$$(2-5i).(3+xi)$$

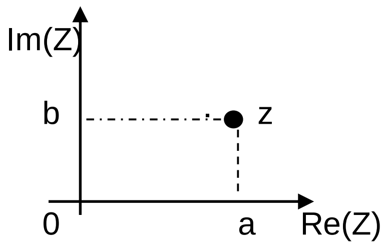
   a) sea imaginario puro
   b) sea un número real

15) Escribe un número complejo tal que:
   i) su parte real sea el doble de su parte imaginaria
   ii) su parte real sea la cuarta parte que su parte imaginaria
   iii) sea un imaginario puro y su parte imaginaria sea un número irracional comprendido entre 5 y 6

Representación gráfica de los números complejos.

Vimos que la recta quedó completa con los números reales, entonces, para representar números complejos, deberemos recurrir al plano.
El número complejo Z=a + bi se representa en el plano mediante el punto de coordenadas (a; b). El eje de las abscisas se llama eje real y el de las ordenadas, eje imaginario. De

esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.



Problema

16) Representa los siguientes números complejos:

$Z_1 = 3 + 2i$ $\quad Z_2 = -2 + 4i$ $\quad Z_3 = \frac{1}{2} - i$

$Z_4 = -3i$ $\quad Z_5 = -3 - 2i$ $\quad Z_6 = 3$

<u>Observación</u>: cada punto del plano P (a; b) determina un vector posición $\overrightarrow{OP} = (a;b)$,a partir de allí establecemos que a cada complejo de la forma a + bi le corresponde un vector posición de extremo P. Entonces, llamamos módulo de un complejo al módulo del vector que lo representa

Problemas

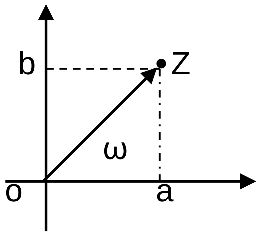
17) Siendo: W = 2 – i
   a) Calcula su módulo. ¿Qué relación vincula al módulo de un complejo con su norma?
   b) Representa en el plano complejo W ; (-W) ; $\overline{W}$;2W

18) Siendo: $z = \dfrac{3k - ki}{1 - 3i}$, determina $k \in R$ para que $|z| = 10$

19) La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números complejos?

<u>Argumento de un complejo</u>: se llama argumento del complejo Z a la medida del ángulo ω, formado por el semieje positivo de las abscisas y la semirrecta de origen o que contiene al punto que representa el complejo.

En símbolos
arg(z) = ω



Como ω puede tomar infinitos valores, consideraremos como ***argumento principal*** a aquel que verifique $0 \leq \omega < 360º$

Para determinar el argumento de z = a + bi, debe tenerse en cuenta que

$$\text{Si } a \neq 0;\ \text{tg } \omega = \frac{b}{a}$$

$$\text{Si } a = 0;\ \begin{cases} b > 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{\lambda}{2} \\ b < 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{3\lambda}{2} \end{cases}$$

Problemas

20) Determina el argumento principal de los siguientes complejos:

Z = 1 + i W = -1,5 V = 0,5 – 3i

21) Representa gráficamente los números complejos z tal que: $z - \bar{z} = i$.

22) Si A = $\left\{ z \in C / \operatorname{Re}[z] \leq 1 \wedge 0 < \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$, decide si los siguientes complejos pertenecen a A. Justifica tu respuesta:

a) z = 1 + i
b) v = 0,5
c) w = 0,5i

<u>Forma polar de un número complejo</u>

Si Z = a + bi = $|Z|_{\omega}$ $0º \leq \omega < 360º$

Forma polar del complejo Z

Problema

23) Escribe en forma polar los complejos del problema 19

Forma trigonométrica de un complejo

Sabiendo que: senω = $\frac{b}{|z|}$ $\Rightarrow$ b = |z| . senω

cos ω= $\frac{a}{|z|}$ $\Rightarrow$ a = |z|. cosω

resulta que: Z = a + bi = | Z |.cos ω+ | Z |. senω i = | Z |.(cosω+i.senω)
Esta última expresión se conviene en escribir, por razones de simplicidad:

| Z | cisω

Resumiendo

Tres formas de expresar a un número complejo Z

$$Z = \underbrace{a+bi}_{\text{forma binómica}} = \underbrace{|Z|_{\omega}}_{\text{forma polar}} = \underbrace{|Z|(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)}_{\text{forma trigonométrica}} = \overbrace{|Z|\mathrm{cis}\,\omega}^{\text{forma trigonométrica}}$$

El producto y el cociente de números complejos en forma trigonométrica y en polar

Desafío:

Demuestra que dados $z_1 = \rho_1\omega_1$ y $z_2 = \rho_2\omega_2$ resulta:

a) $(\rho_1\omega_1)(\rho_2\omega_2) = (\rho_1.\rho_2)_{(\omega_1+\omega_2)} = \rho_1\rho_2\mathrm{cis}(\omega_1+\omega_2)$

b) $(\rho_1\omega_1)^n = {\rho_1^n}_{n\omega_1} = \rho_1^n\mathrm{cis}(n\omega_1)$

c) $\frac{\rho_1\omega_1}{\rho_2\omega_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}_{\omega_1-\omega_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{cis}(\omega_1-\omega_2)$ con $\rho_2\omega_2 \neq 0$

Problemas

24) Expresa en forma polar y trigonométrica:
   a) el opuesto de (–1 – i)
   b) el conjugado de (2 – i)

25) Expresa en forma binómica los complejos

a) $3_{\frac{1}{7}\pi}$ b) $1_{\frac{1}{6}\pi}$

26) Dados los complejos: Z = 1 – 3i W = $5_{\frac{1}{2}\pi}$ V = 3 cis 180º

Expresa previamente en forma binómica y luego, calcula:

- Z . W – V (escribe el resultado en forma polar)
- W : V
- W – Z + 2V (escribe el resultado en forma trigonométrica)

27) Dado el complejo: Z = $2_{\frac{1}{3}\pi}$

Escribe el conjugado de Z en forma binómica y representa gráficamente el opuesto de Z

28) Describe dónde se localizan en el plano complejo todos los números que poseen:

a) parte real igual a 1 b) parte imaginaria igual a 1
c) módulo igual a 3 d) argumento igual a 180º

29) Contesta Verdadero o Falso. Justifica tu respuesta.

a) ningún número complejo es igual a su conjugado

b) ningún número complejo es igual a su opuesto

c) los complejos: z = - 6 + 6i y w= $6\sqrt{2}_{315°}$ son opuestos

d) el producto de dos números complejos imaginarios puros es un número complejo imaginario puro.

e) $(-2\sqrt{2}i)$ es solución de la ecuación $x^3 + 8x = 0$

<u>Y más problemas!!!!</u>

30) Determina los números complejos z, que verifican las siguientes condiciones:

$$a)\ \left(z+\frac{1}{z}\right)\in R$$
$$b)\ z+\bar{z}.\mathrm{Im}[z]=1$$
$$c)\ z - z.\mathrm{Re}[z]=-i$$
$$d)\ z.\mathrm{Re}[z]=z.\mathrm{Im}[z]$$
$$e)\ \frac{\mathrm{Im}[z]}{z}=\sqrt{z.\bar{z}}$$

31) Resuelve los siguientes sistemas en los que z y w son números complejos.

a) $\begin{cases} zi+(1+i).w=2i \\ (1+i).z+(5-i).w=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+i).z+(3-i).w=5i \\ z-wi=2+3i \end{cases}$

32) Determina el $z+\dfrac{1+i}{2-2i}=\sqrt{2}_{45°}$

33) El cociente de dos números complejos es $5_{20°}$ y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos.

34) Dados: $z_1=2(\cos 60°+i\,\mathrm{sen}\,60°)$; $z_2=-\sqrt{3}i$; $z_3=5_{\frac{\pi}{6}\mathrm{rad}}$,Calcula:

a. en forma polar: $z_1.z_2$

b. en forma trigonométrica: $\dfrac{z_1}{z_3}$

c. en forma binómico: $(z_1+z_2).z_3$

d. el argumento de w si $w=\dfrac{\frac{1}{2}z_1+\sqrt{2}}{z_2}$

35) Expresa en forma trigonométrica

a) $z_1/z_1^{-1}=\dfrac{1}{-2+i}$

b) $-z_2/z_2-1=2+i$

36) Representa en el plano complejo:

$$A=\{z\,/\,z\in C\wedge |z|=7\}$$

$$B=\left\{x\,/\,x\in C,\arg x=\frac{\pi}{6}\wedge |x|=5\right\}$$

$$C=\{y\,/\,y\in C\wedge 2\le |y|<5\}$$

$$D=\left\{y\,/\,y\in C;\frac{\pi}{4}\le \arg y<\frac{3}{4}\pi\wedge 1\le |y|<4\right\}$$

37) Determina el complejo Z en las siguientes ecuaciones .

a) $\left[3(Z+i)-4\bar{Z}+i\right](2+3i)=47-40i$

b) $Z(2+3i)-\bar{Z}(4+2i)=Z-(5+5i)$

c) $\dfrac{\bar{Z}+(2+3i)^2+Z}{3+3i}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i$

38) ¿Se verifica la siguiente igualdad?

$$Z^{-1}=\frac{2\bar{Z}}{Z^2+\left(\bar{Z}\right)^2-(Z-\bar{Z})^2}$$

39)Demuestra que :

a) $\left.\begin{array}{l}W=4_{30^o}\\ Q=3_{60^o}\\ Z=2_{-50^o}\end{array}\right\}\Rightarrow \left(Z^{-1}.\bar{Q}\right)^{-1}.3\bar{Z}=4_{60^o}$

b) $\left.\begin{array}{l}W=4_{30^o}\\ Q=3_{60^o}\\ Z=2_{-50^o}\end{array}\right\}\Rightarrow \bar{W}:\left(.\bar{Q}:Z^{-2}\right)^2:(Q^2.Z^3)^{-1}=2_{260^o}$

40)Determina el ángulo que forman el conjugado de un número complejo con su recíproco.

Bibliografía

Apunte IPS "Números Complejos". Código 1252
Matemática. Polimodal. Números y Sucesiones de Silvia Altmar, Claudia R Comparatore y Liliana Kurzrock. Editorial Longseller.Libro 3

Resolución de los problemas propuestos: **Prof.Juan Carlos Bue.**

Respuesta a los problemas presentados

1) a) x=2 pertenece a: N; Z; Q. b) x=$-\frac{\sqrt{2}}{3}$ pertenece a : I

c) x=-1 pertenece a: Z; Q d) x=$1-\sqrt{3}$ pertenece a: I

e) x=$\pm\frac{5}{2}$ pertenece a: Q. f) x= $-\frac{11}{21}$ pertenece a: Q

2) a) x=$\pm 5i$ b) x_1=2+i x_2=2-i

3)

Z_i	Forma binómica del Z_i	$Re(Z_i)$	$Im(Z_i)$
Z_1	$5-\frac{1}{2}i$	5	$-\frac{1}{2}$
Z_2	$-1+\pi i$	-1	π
Z_3	$\frac{3}{4}i$	0	$\frac{3}{4}$
Z_4	11	11	0

4) x=$\frac{7}{2}$ y=-4

5) A cargo del alumno

6) a) $\frac{5}{2}i$ b) $-\frac{5}{2}-7i$ c) $20+\frac{3}{2}i$ d) $-3+\frac{25}{2}i$ e) $-\frac{41}{2}-\frac{23}{2}i$ f) $-11+4i$

7) $Z=1+\sqrt{3}\,i \vee Z=1-\sqrt{3}\,i$

8) a) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ b) $\frac{1}{8}-\frac{3}{8}i$ c) 1 d) 8+32i

9) a) - i b)1 c) - i

10) a) $\overline{X}=-\frac{5}{52}-\frac{1}{52}i$ b)-W=$-\frac{2}{125}-\frac{136}{125}i$ c) X = - 1 – 3i

11) b = ± 8

12) z = 5 + 3i ; t = 5 – 3i

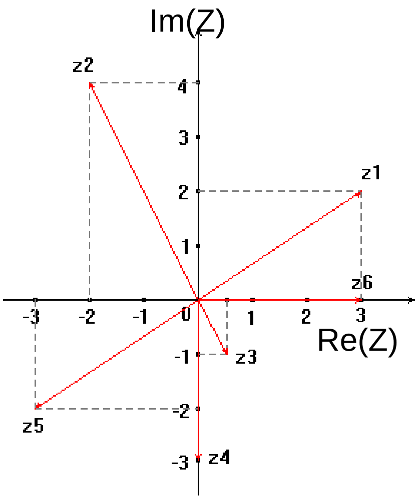
13) a) – i b) –1 c) – i

14) a) x = $-\frac{6}{5}$ b) x = $\frac{15}{2}$

15) i) 2 + i ; 4 + 2i entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

ii) 2 + 8i ; 3 + 12i entre otros. (Existen infinitas posibilidades)
iii) $\sqrt{29}$ i ; ai donde a = 5,12122122212222... entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

16)



17)a) $|W|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

El módulo al cuadrado de un complejo es igual a su norma.

b)

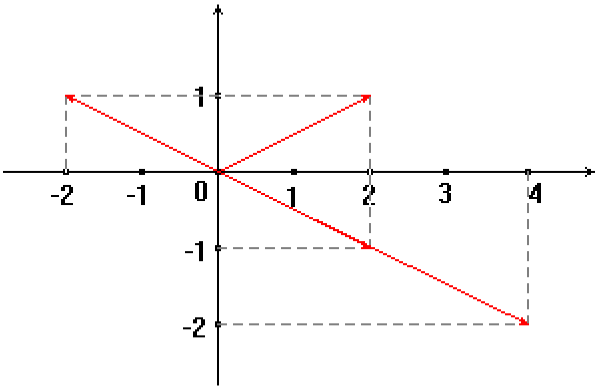
Im(Z)

$-W$ $\overline{W}$

Re(Z)

W

2W



18) $k = \pm 10$

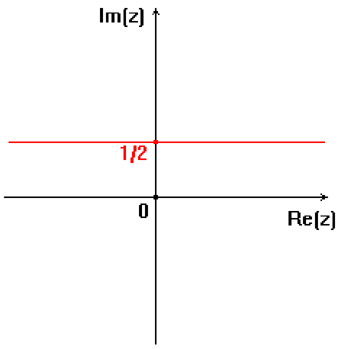
19) $z = 4 + 3i \quad \vee \quad z = 4 - 3i$

20)a) $\mathrm{tg}\,\omega = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \omega = 45^{o}$

b) $\mathrm{tg}\,\omega = \dfrac{0}{-1{,}5} = 0 \Rightarrow \omega = 180^{o}$ pues $a < 0$

c) $\mathrm{tg}\,\omega = \dfrac{-3}{\frac{1}{2}} = -6 \Rightarrow \omega = 279^{o}\,27'\,44'',3$

21) Son $Z = a + \dfrac{1}{2}i \;;\; \forall a \in R$



22)

a) $Z \in A$

b) $V \notin A$

c) $W \in A$

23) a) $Z = \sqrt{2}_{\,45^{o}}$ b) $W = 1{,}5_{\,180^{o}}$ c) $V = \dfrac{\sqrt{37}}{2}_{\,279^{o}\,27'\,44'',3}$

24) a) Forma Polar: $Z = \sqrt{2}_{\,45^{o}}$ Forma Trigonométrica: $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^{o}$

b) Forma Polar: $Z = \sqrt{5}_{\,26^{o}\,33'\,54'',18}$ Forma Trigonométrica: $\sqrt{5}\,\mathrm{cis}\,26^{o}\,33'\,54'',18$

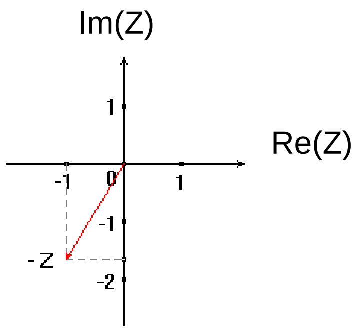
25) a) Z = 2,7 + 1,3i b) $Z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

26) $Z.W - V = \sqrt{349}_{\,15^{o}\,31'\,26'',8}$

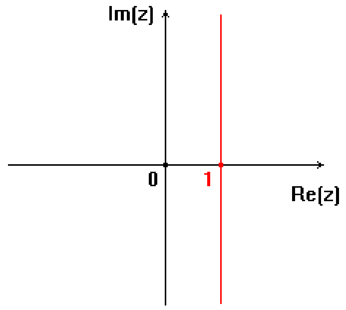
$W : V = -\dfrac{5}{3}i$

$W - Z + 2V = \sqrt{113}\ \text{cis}131^{o}11'9'',33$

27) $\overline{Z} = 1-\sqrt{3}i$

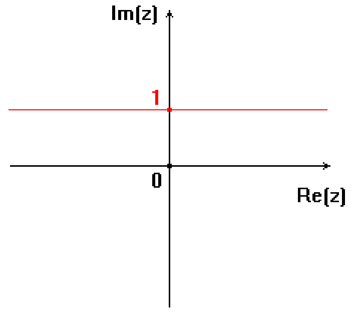


28) a)Z = 1 + bi



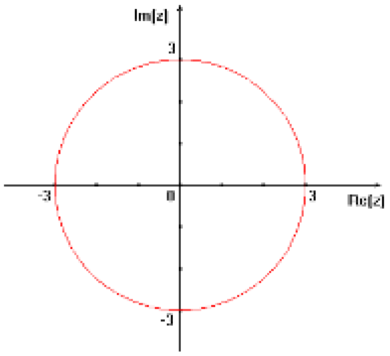
Recta paralela al eje imaginario que corta al eje real en 1

b) Z = a + i



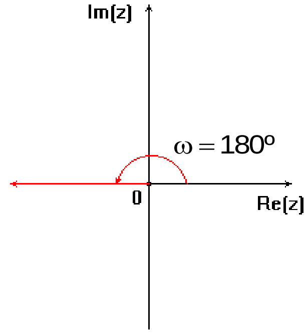
Recta paralela al eje real que corta al eje imaginario en 1

c) $|Z| = 3$



Sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio 3 unidades

d) $Z = |Z|_{180°}$



Sobre el semieje real negativo

29) a)Falso, Ej. Z=2=$\overline{Z}$ b)Falso ,Ej Z=0 c)Verdadero
f) Falso, Ej (2i) (3i)= -6 no es un imaginario puro e)Verdadero

30) Siendo Z = a + bi

a) $(b=0 \wedge a \neq 0) \vee |Z| = 1$ b) $Z_1 = 1 \vee Z_2 = \frac{1}{2} + i$

c) $Z = -i$ d) $Z = a + ai \; ; \; \forall a \in R$ e) no existe z

31) a) $Z = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i \; ; \; W = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ b) $Z = 2 + \frac{7}{2}i \; ; \; W = \frac{1}{2}$

32) $Z = 1 + \frac{1}{2}i$

33) $|Z| = \left|W^2\right| = 25$ y $Arg(Z) = Arg(W^2) = 40º$; $|W| = 5$ y $Arg(W) = 20º$

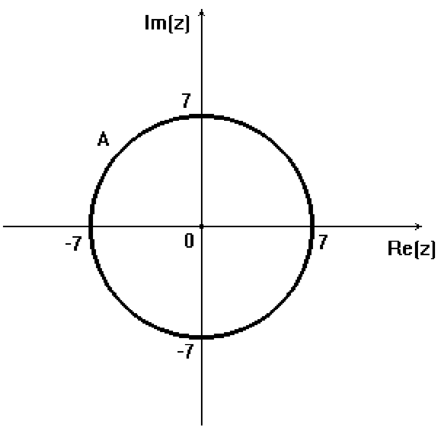
34) a) $z_1.z_2 = 2\sqrt{3}_{330º}$ b) 0,4.(cos30º + i.sen30º)

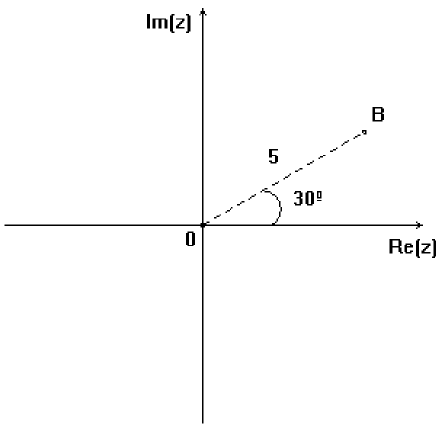
c) $\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i$ d) arg(w)=114º 20’ 34’’

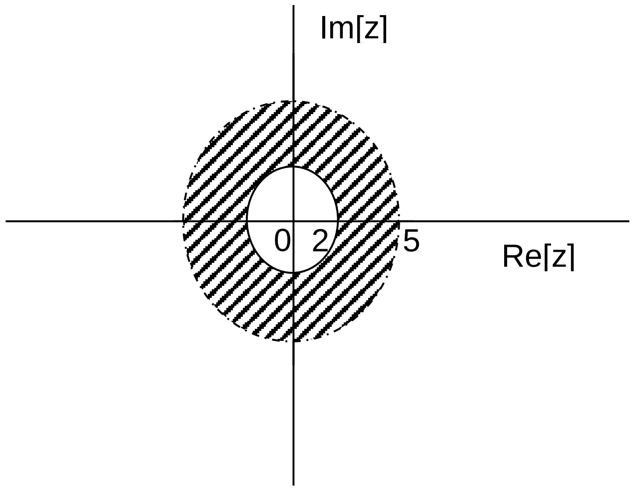
35)a)$Z_1 = \sqrt{5}(\cos 153º26´5´´ + i\,\mathrm{sen} 153º26´5´´)$

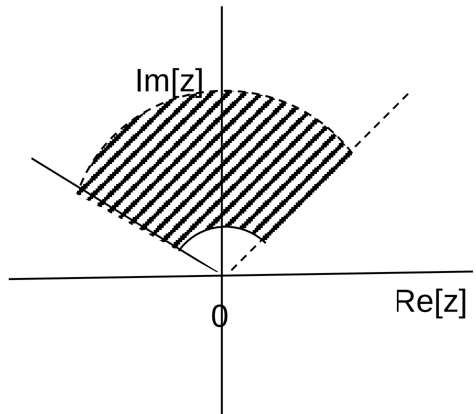
b)$-Z_2 = \sqrt{10}\left(\cos 198º26´5´´ + i\,\mathrm{sen} 198º26´5´´\right)$

36)









37) a) $Z = 2-3i$ b) $Z = 5-2i$ c) $Z=7+bi \quad \forall \ b$

38) sí, se verifica

40) 0º