Instituto Politécnico

niversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Funciones

3º Año

Cód. 1305-19

Prof. Verónica Filotti
Prof. María del Luján Martínez
Prof. Mónica Napolitano
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

1. Introducción

¿Qué es una función?

El término función fue utilizado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia x^n de la variable x. En 1694 el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz empleó el término para referirse a un aspecto de una curva (su pendiente - inclinación). Recientemente, su uso más generalizado ha sido el definido en 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune - Dirichlet (1805 - 1859), quien utilizó el concepto como una correspondencia entre dos variables.

Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria. Generalmente en todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. En problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables se hacen presente las funciones.
En el presente curso profundizaremos lo desarrollado en primer año.

Son ejemplos de algunos de los problemas mencionados:

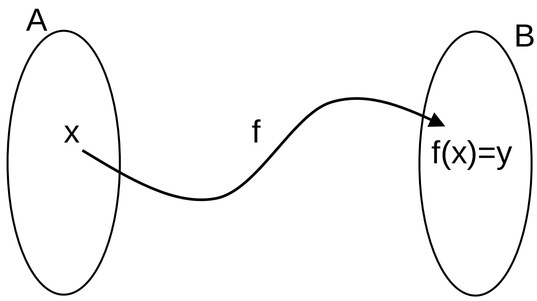
- El área $A = \pi r^2$ de un círculo depende del radio r del mismo.
- El volumen **v** de cierta cantidad de gas depende de la presión **p**, si se supone fija la temperatura (Ley de Boyle – Mariotte).
- Si un cultivo de bacterias se inicia con 5.000 de ellas y la población se duplica cada hora, el número **n** de bacterias depende del tiempo **t**, y la expresión que relaciona a **n** con **t** es **n** = 5000.2^{t}. Por cada valor de **t** hay uno de **n**.
- El precio de cierto artículo depende de la demanda del mismo.

En los ejemplos anteriores, se describe la forma en la que se relacionan un número con otro o una variable con otra. En dichos casos, diremos que la segunda variable es función de la primera.

2. Función real de variable real

Definición:

Dados dos conjuntos A; B y una ley o regla, se llama función a la terna (A; B; ley o regla), tal que la ley asigne a **cada** elemento de A un **único** elemento de B, llamado imagen.



Nota: En este curso sólo estudiaremos las funciones en las cuales los conjuntos A y B son subconjuntos del conjunto de los números reales

Simbología y definiciones

- A un elemento genérico del conjunto A, se lo indica con la letra x (en general) y es la **variable independiente**.
- A un elemento genérico del conjunto B, se lo indica con la letra y (en general) y es la **variable dependiente**.
- A cada resultado obtenido de aplicar a x la ley f, es decir f(x) = y, se lo llama **imagen**.
- A la regla o ley, se la designa con letras, por ejemplo f; g; h; etc. y viene dada por una expresión matemática (ejemplos: $f(x) = x + 28$; $g(x) = x^2$; $h(x) = 2$; etc.)
- Con $f: A \rightarrow B / f(x) = y$ o $A \xrightarrow{f} B / f(x) = y$ expresamos la función f y se lee la función f que aplica A en B tal que f(x) = y.
- Al conjunto A se lo llama **conjunto de partida o dominio** y se lo simboliza **Dom(nombre de la función).** Es el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales la ley tiene sentido o significado. Es decir, $Dom(f) = \{x /\ f(x)\ \text{exista}\}$
- Al conjunto B se lo llama **conjunto de llegada o codominio**.
- Al conjunto de todas las imágenes, se lo denomina **conjunto imagen, rango o recorrido** y se lo simboliza **Im(nombre de la función)**

Observación:
Por practicidad se suele considerar el conjunto de llegada coincidente con el de las imágenes o rango .

Ejemplos:

1) Dada f(x) = $\sqrt{x-2}$, su dominio serán los valores de x para los cuales $\sqrt{x-2}$ existe.
   Es decir:
   $Dom(f) = \{x/\ f(x)\ \text{exista}\} = \{x/\ \sqrt{x-2}\ \text{exista}\} = \{x/\ \ x-2 \geq 0\} \Rightarrow Dom(f) = [2\,;+\infty)$
   Entonces la función dada en forma completa nos queda:
   $f: [2;+\infty) \rightarrow R \,/\, f(x) = \sqrt{x-2}$

Observación:
Es preciso destacar que en el conjunto $[4\,;+\infty)$, por ejemplo, la ley también tiene sentido. Sin embargo convenimos en usar la expresión Dom() para referirnos al máximo conjunto de valores que puede asumir la variable para que la ley tenga sentido, lo que no invalida el poder dar una función en un subconjunto (con una restricción) de su dominio.

2) Dada $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$,

- el dominio estará determinado por los valores de x tales que $\dfrac{1}{x^2-2x}$ exista. Esto ocurre si $x^2-2x\neq 0$. Por lo tanto $Dom(f)=R-\{0;2\}$ pues $x^2-2x=x\left(x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$
- $f(3)=\dfrac{1}{3^2-2.3}=\dfrac{1}{3}$
- $f(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2-2.(-1)}=\dfrac{1}{3}$
- $f(a)=\dfrac{1}{a^2-2a}$, siempre que $a\neq 0 \wedge a\neq 2$
- $f(a+h)=\dfrac{1}{(a+h)^2-2(a+h)}$, siempre que $a+h\neq 0 \wedge a+h\neq 2$

Actividades

1) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F(falsas). Justifica
   a) Dada $f(x)=x^4-x^2$ resulta $f\left(-\sqrt{2}\right)=6$
   b) $g(x)=x^3-1\Rightarrow\{x/g(x)=-9\}=\{-2\}$
   c) $t(x)=x^3-x\Rightarrow t(-2)<0$
   d) g: $\left[-1;2\right]\rightarrow R/\ g(x)=x+1$ entonces Im(g) = $\left(0;3\right)$
   e) Dadas $f(x)=x^3$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$ resulta $f(-1)+g(2)=-\dfrac{1}{2}$
   f) Si $f(x)=2x^2+3x-1$ entonces $f(-a)=-2a^2-3a-1$
   g) $h(x)=x^2+1\Rightarrow\{x/h(x)=5\}=\{\,2\,\}$

2) Determina el dominio de las siguientes funciones
   a) $f_1(x)=\sqrt{3x-2}$
   b) $f_2(x)=\sqrt[4]{x^2-9}$
   c) $f_3(t)=\sqrt[3]{t-1}$
   d) $f_4(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t-10}}$
   e) $f_5(x)=\sqrt{x^2+1}$
   f) $f_6(x)=\dfrac{x+1}{\left(x-3\right).\left(x-2\right)}$
   g) $f_7(x)=\dfrac{3}{x^3-4x}$
   h) $f_8(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
   i) $f_9(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

Definición:

Llamamos **ceros** o **raíces** de una función a todos los valores de la variable independiente pertenecientes al dominio tales que su imagen sea 0

En símbolos:
$\mathbf{x = a}$ **es cero o raíz de la función** $f(x) \Leftrightarrow \mathbf{f(a) = 0}$ con $a \in \mathrm{Dom}(f)$

Actividad

3) Determina los ceros o raíces, si poseen, de las funciones del problema 2.

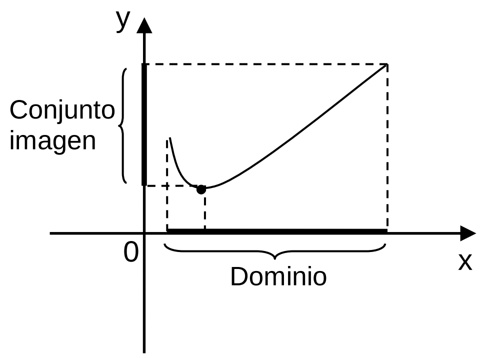
3. Gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la ordenada sea la imagen de la abscisa y ésta pertenezca al dominio de f.

En símbolos:

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y) / \ x \in A \wedge y = f(x)\}$$

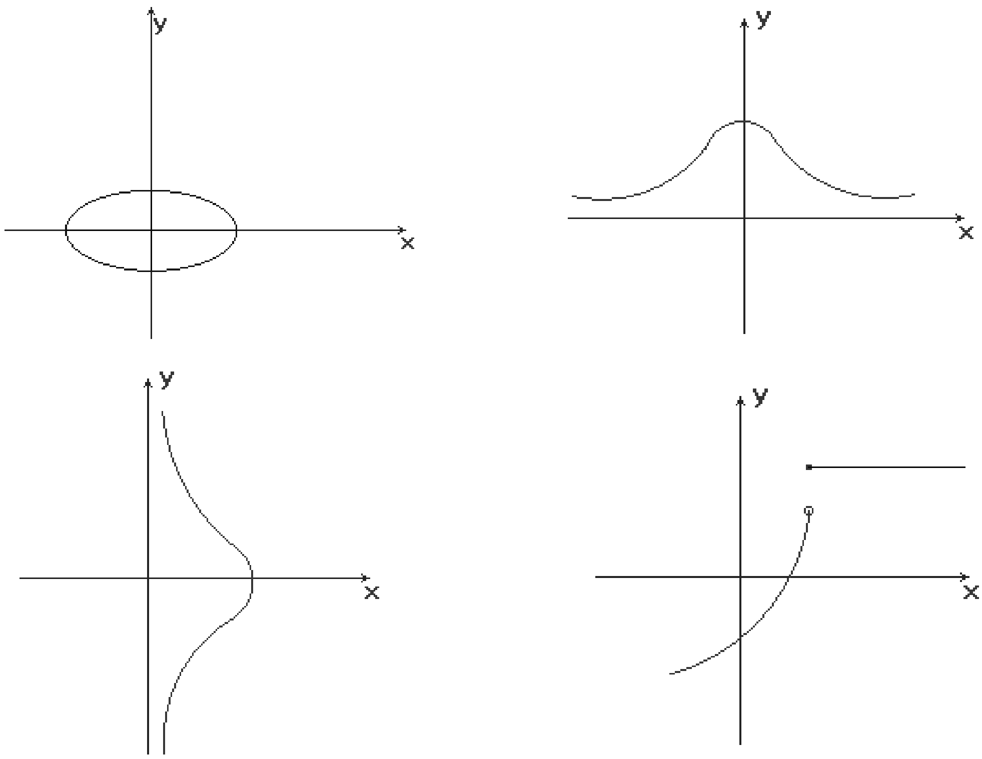
Es decir, la gráfica de una función f está formada por todos los puntos (x, y) del plano, tales que $y = f(x)$ y x pertenece al dominio de f. Dicha gráfica proporciona una "idea de su comportamiento". También nos permite representar el dominio y el conjunto de imágenes sobre los ejes x e y respectivamente como muestra la figura.



Podemos concluir que la gráfica de una función f es una curva en el plano xy. Pero, ¿toda curva en el plano xy será la gráfica de una función? Para responder a esta pregunta, analiza la siguiente propuesta.

Propuesta

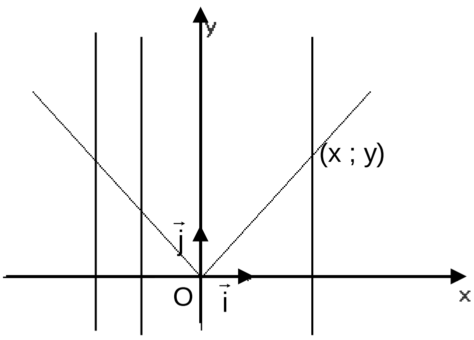
Observa las siguientes curvas y responde:
¿Pueden todas estas curvas ser la representación gráfica de alguna función? Justifica



En algunos de estos gráficos existen puntos que poseen la misma abscisa y distinta ordenada. Esto significa que para un mismo valor de x corresponden distintos valores de y, lo cual contradice la definición de función. Por lo tanto las curvas que posean esta característica no podrán ser la gráfica de una función.

En conclusión:

Una curva en el plano xy representa la gráfica de una función f sí y sólo si al trazar rectas verticales ninguna de ellas interseca a la curva en más de un punto.



Observación:

Algunas gráficas de funciones se obtiene uniendo puntos del plano tratando de “intuir” la forma que puede llegar a tener. La desventaja práctica de este método es la necesidad de tener que determinar “muchos” puntos para obtener sólo una idea aproximada de la forma de la misma. Más adelante veremos algunas herramientas que facilitarán la confección de las gráficas de funciones.

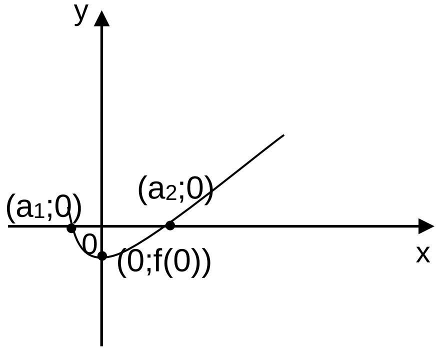
Actividades

4) ¿Puede la gráfica de una función ser simétrica respecto del eje de las abscisas? ¿Por qué?

5) Confecciona el gráfico de una función que tenga como dominio e imagen los que se indican en cada caso:
   a) $Dom(f) = [-1; 2]$; $Im(f) = [-2; 5]$
   b) $Dom(f) = [0; +\infty)$; $Im(f) = R$

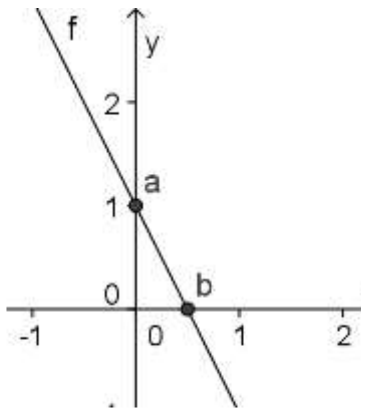
4. Intersección con los ejes coordenados

El punto (0;f(0)) , si existe, es la intersección de la gráfica de la función f con el eje de las ordenadas y el o los puntos (a;0) con a perteneciente al dominio de la función , cuando existen , es o son los puntos de intersección de la misma con el eje de las abscisas. Recordemos que los valores de a son los ceros de la función



Ejemplo:

Dada la función f(x)=-2x+1 .



Siendo f(0)=(-2).0+1=1 resulta a(0;1) el punto de intersección de la gráfica de la función con el eje de las ordenadas.

Y resulta $b\left(\frac{1}{2};0\right)$ el punto de intersección de f con el eje de las abscisas puesto que :

$-2x+1=0 \Rightarrow -2x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

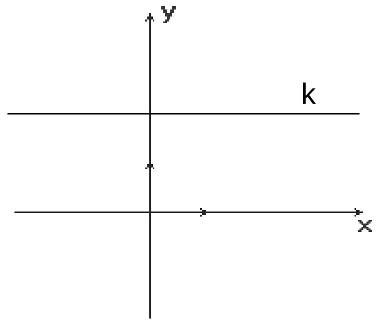
5. Algunas funciones particulares

Algunas consideraciones nos permiten establecer la forma que tiene la gráfica de algunas funciones.

a) FUNCION CONSTANTE

$$f: R \to R \,/\, f(x) = k, \qquad k \in R$$

Todos los puntos de la gráfica de esta función corresponden a pares del tipo $(x\,;k);\ \forall\, x \in R$. Es decir, dichos puntos se encuentran a una "distancia constante $|k|$ del eje x". Al unir todos estos puntos obtenemos una recta horizontal, como muestra el siguiente gráfico (considerando $k > 0$).



Dom(f) = R
Im(f) = $\{k\}$

<u>Observación:</u>

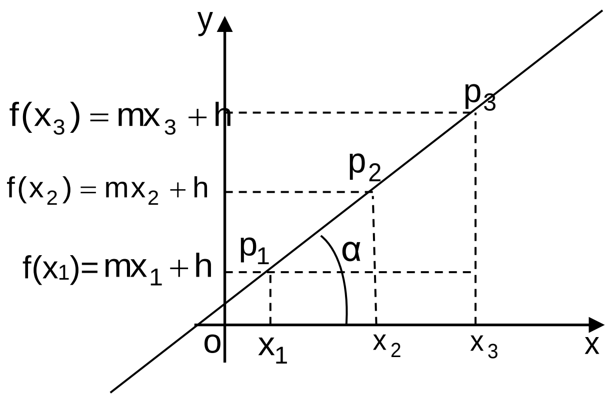
La gráfica obtenida resulta "simétrica" respecto del eje y, ya que $\forall\, x \in R$ resultan los pares (x ; k) y los (-x ; k) pertenecientes a la gráfica de dicha función.

b) FUNCION LINEAL

$$f:\ R \to R \,/\, f(x) = mx + h, \forall m \in R - \{0\}\, y\ \ \forall\, h \in R$$

Denominamos al número m **pendiente** y al h **ordenada al origen**.

Todos los puntos de la gráfica de esta función están alineados y corresponden a pares de la forma $(x; mx + h)$



Observación:

En el caso particular que $h = 0$, la recta pasa por el origen de coordenadas.

Interpretación geométrica del número h (ordenada al origen)

Si x = 0 resulta que f(0) = h, es decir, el punto (0; h) pertenece a la gráfica de f(x) y es el punto donde la gráfica de la función interseca al eje de las ordenadas. Por tal razón a h se denomina ordenada al origen.

Interpretación geométrica del número m (pendiente)

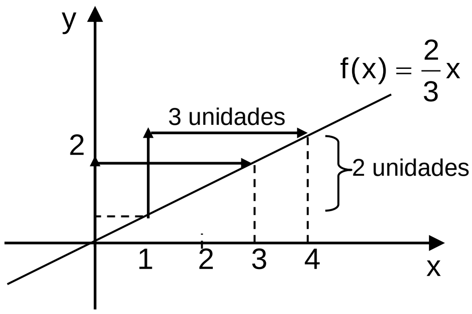
Observando la gráfica, teniendo en cuenta lo estudiado en trigonometría para ángulos agudos (la demostración es válida para ángulos obtusos y se desarrollará en estudios posteriores), resulta:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)\,(\text{incremento de } f(x))}{\Delta x\,(\text{incremento de } x)}$$

Gráficamente, podemos afirmar que la pendiente de la recta representa al número de unidades de un cambio vertical por cada número de unidades de un cambio horizontal.

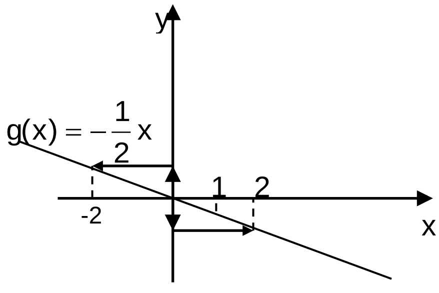
Ejemplos:

a) Dada $f(x) = \frac{2}{3}x$, su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Su pendiente es $\frac{2}{3}$, es decir, cada 3 unidades de variación de la variable x hay 2 unidades de cambio en la imagen de la función.

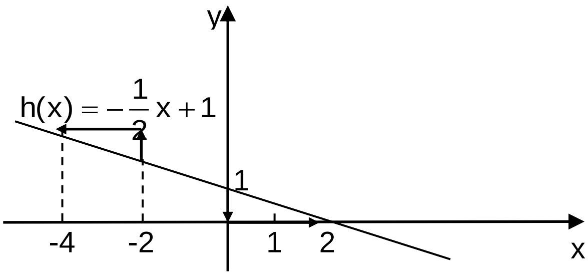


La **gráfica** de cualquier función f(x) = mx es **simétrica** respecto **al origen**.

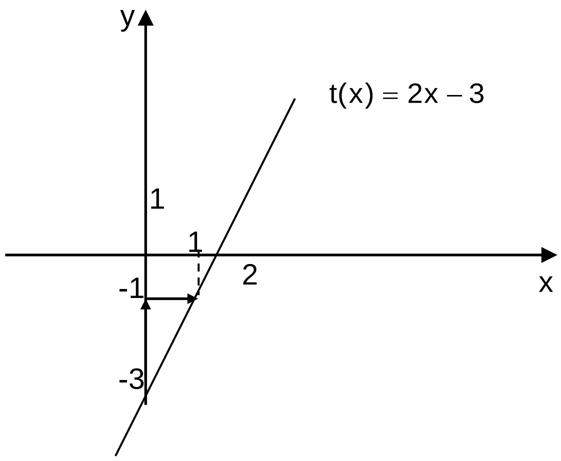
b) Dada $g(x) = -\frac{1}{2}x$, su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Su pendiente es $-\frac{1}{2}$, es decir, cada 2 unidades de variación de la variable x hay 1 unidad de cambio en la imagen de la función.



c) Dada $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, su gráfica es una recta que interseca al eje y en el punto $(0;1)$. Su pendiente es $-\frac{1}{2}$, es decir, cada 2 unidades de variación de la variable x hay 1 unidad de cambio en la imagen de la función.



d) Dada $t(x) = 2x - 3$, su gráfica es una recta que interseca al eje y en el punto $(0;-3)$. Su pendiente es 2, es decir, cada 1 unidad de variación de la variable x hay 2 unidades de cambio en la imagen de la función.

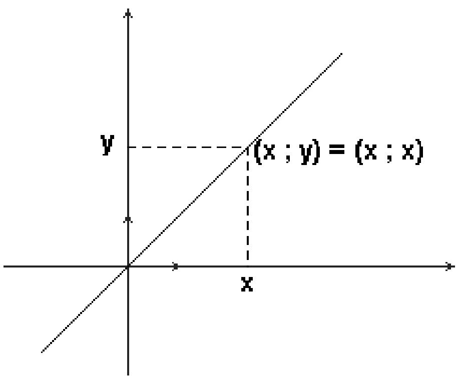


La función Identidad.

Entre las funciones lineales del tipo f(x)=mx resulta particular, por sus aplicaciones, la de pendiente igual a 1.

$$f(x) = x \quad \forall\, x \in \Re .$$

Tal función recibe el nombre de "**función identidad".**



La gráfica de la función identidad resulta una recta a 45º que pasa por el origen de coordenadas

Actividades

6) El consumo de nafta según los kilómetros recorridos por un vehículo están dados en la siguiente tabla:

Distancia (km)	0	50	100	150	200	250
Consumo (litros)	0	3.5	7	10.5	14	17.5

a) Si el consumo de nafta C(d) depende linealmente de la distancia recorrida, escribe la expresión de C(d).
b) Calcula C(200) y C(350).

7) Una empresa abona a sus vendedores $40 diarios por alojamiento y alimentación más $10 por cada 10 kilómetros de viaje realizado con el vehículo del vendedor. Escribe la función lineal que represente el gasto g(x) diario en función de los kilómetros recorridos. Grafica g(x) y calcula g(300) y g(600)

8) Prueba si p(-2; 1) pertenece a la gráfica de la función lineal que pasa por los puntos (-1; 0) y (0; 4).

9) Una persona adquiere una P.C. a $2500. Al cabo de 5 años quedará obsoleta y sin valor alguno. Escribe la función lineal que da el costo de la P.C. durante esos 5 años. Confecciona su gráfica.

10) Las funciones $p_A(t)$ y $p_B(t)$ representan la posición (en km) de los móviles A y B en función del tiempo (en hs.) . Determina al cabo de cuánto tiempo se encuentran los móviles, si $p_A(t) = 30t$ y $p_B(t) = 20t + 10$ y ambos parten simultáneamente .Grafica la situación.

Nota: el tiempo transcurrido hasta el encuentro estará dado cuando las posiciones se igualen

11) Dos empresas de transporte interurbano promocionan las ventas de tarjetas magnéticas pre-pagas con el costo que indica el cuadro, la función costo es una función lineal.

Empresa	Costo de la tarjeta	Costo de un pasaje (no incluye el costo de la tarjeta)
A	$ 5	$ 12
B	$ 15	$ 10

a) ¿Cuál es el número de pasajes para el que cuesta lo mismo adquirir tarjetas de cualquiera de las empresas?
b) Si un usuario necesita comprar una tarjeta para realizar 8 viajes ¿Qué empresa le conviene más?

6. Funciones patrones o básicas

Por ahora para realizar la gráfica de funciones utilizaremos una tabla de valores, la cual consiste en la determinación y organización de algunos puntos de la gráfica que deseamos realizar. La cantidad de puntos a determinar dependerá de la exactitud que deseemos para la gráfica.

Existen algunas funciones, que llamaremos patrones o básicas cuyas gráficas servirán de base para realizar la gráfica de otras un poco más complejas. Estas son:

Ley	**Nombre**
$f(x) = x^2$	x al cuadrado
$f(x) = x^3$	x al cubo
$f(x) = \sqrt{x}$	Raíz cuadrada de x
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	Raíz cúbica de x
$f(x) = \frac{1}{x}$	Recíproco de x

Actividades

12) Confecciona patrones de las gráficas de las funciones presentadas en el cuadro anterior, en hojas milimetradas y material de radiografía. Indicando dominio y conjunto imagen para cada una.

A modo de ejemplo realizaremos la gráfica de $y = \frac{1}{x}$

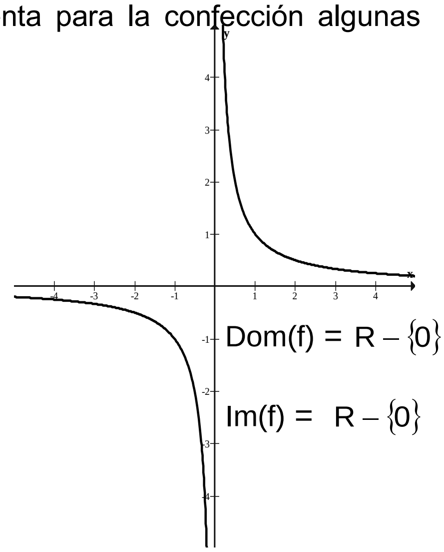
x	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{3}$
y	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	3	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{3}$	-3

Para obtener la gráfica de esta función, marcamos los puntos obtenidos en la tabla y los unimos con "una curva suave". Podemos tener en cuenta para la confección algunas propiedades de esta ley, alguna de ellas pueden ser:

- La variable x nunca es 0 (el recíproco de 0 no existe), es decir, la gráfica nunca corta al eje de las ordenadas

- La variable y nunca es 0 (nunca da 0 el recíproco de un número), es decir, la gráfica nunca corta al eje de las abscisa.

- A medida que x se hace cada vez más grande, el recíproco se hace cada vez más chico, es decir, si $x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0$.



Esta actividad la puedes realizar utilizando el software GEOGEBRA, en el cuadro te mostramos los comandos correspondientes

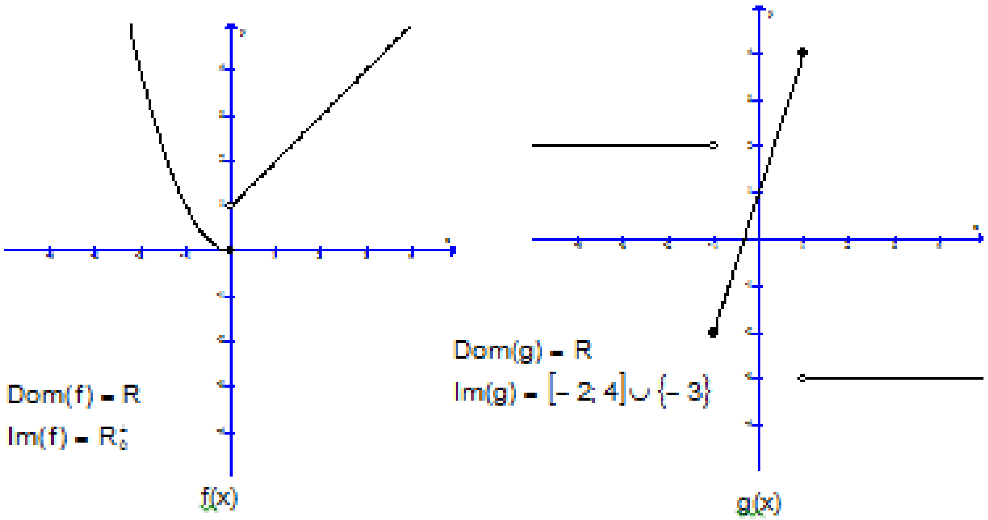
Ley	Comando
$f(x) = x^2$	x^2
$f(x) = x^3$	x^3
$f(x) = \sqrt{x}$	sqrt(x)
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	x^(1/3)
$f(x) = \frac{1}{x}$	1/x

7. Funciones por tramos o definidas por secciones

Diremos que una función está definida por secciones o por tramos si está expresada por diferentes fórmulas en distintos subconjuntos de su dominio. Para realizar su gráfica, tendremos en cuenta en qué subconjunto del dominio está definido cada tramo.

Ejemplos:

1. Las funciones $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ son funciones definidas por tramos y sus gráficas son las siguientes

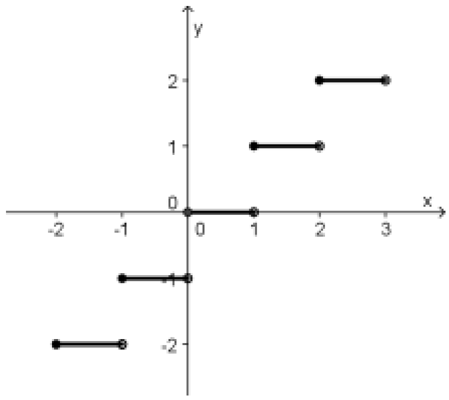


2. En la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x>0 \\ 4 & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$, $\quad f(2)=2^2+1=5$; $\quad f(-5)=4$ y $\quad f(0)=4$

7.1 Función Parte Entera

$$\boxed{f(x)=[x] \qquad \forall x\in R}$$

Se llama parte entera de un número real al mayor entero que no supera al número dado. Teniendo en cuenta esta definición, la grafica resulta:



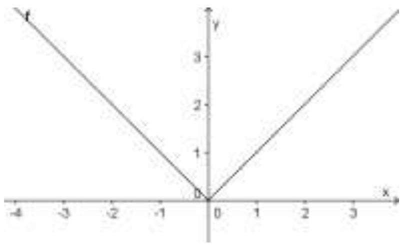
$\operatorname{Im}(f)=Z$

7.2 Función Valor Absoluto

$$\boxed{f(x)=|x| \qquad \forall x\in R}$$

Recuerda:

$|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\ge 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$



$\operatorname{Im}(f)=R_0^+$

Actividades

13) Realiza la gráfica de las siguientes funciones, indicando dominio y conjunto imagen para cada una.

a) $u(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \\ 3 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ $\qquad$ c) $g(x)=\begin{cases} [x] & \text{si} \quad x<0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ x^3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

$$d)\ h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<-1 \\ |x| & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \qquad e)\ t(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ x+1 & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ -2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

14) Utilizando la definición de valor absoluto, realiza las gráficas de las siguientes funciones

a) $f(x)=|x+1|$ c) $h(x)=|-2x+4|$

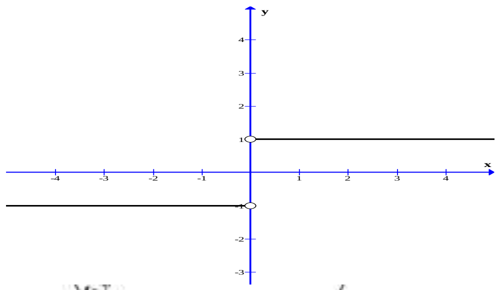
b) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ d) $f(x)=\left|-\dfrac{1}{2}x\right|$

A modo de ejemplo realizaremos la gráfica de los apartados b) y c)

Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, podemos expresar a:

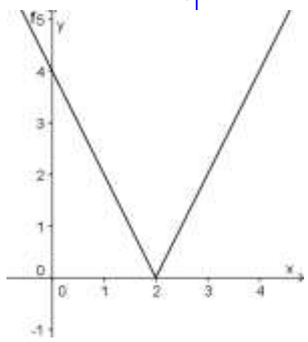
$$b)\ g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ \frac{-x}{x} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

y su gráfica resulta



$$c)\ h(x)=|-2x+4|=\begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x\le 2 \\ -(-2x+4) & \text{si} \quad x>2 \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \qquad \text{y su gráfica resulta:}$$



8. Clasificación de funciones

a. Función inyectiva

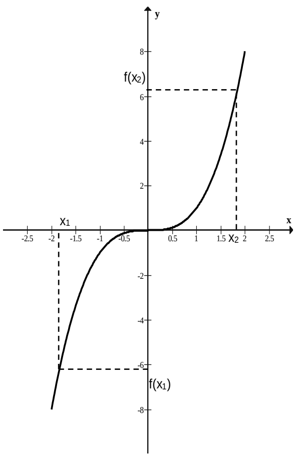
Dada la función $f:A\to B$, diremos que es inyectiva si a valores distintos de la variable independiente corresponden valores distintos de la variable dependiente o imagen.

En símbolos:

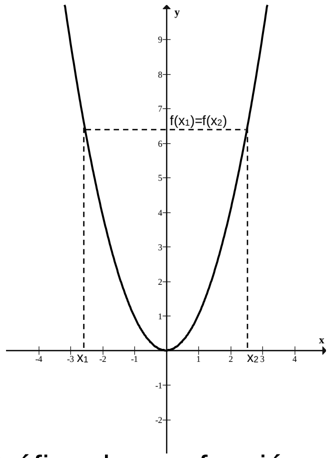
$$\boxed{f:A\to B \text{ es inyectiva si } \forall x_1\ne x_2;\ x_1\in A.;\ x_2\in A.\Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)}$$

Teniendo en cuenta la definición podemos deducir que en la gráfica de una función inyectiva resulta que no existirán dos puntos de la misma con la misma ordenada. Entonces, podemos identificar gráficamente si una función es inyectiva si al trazar rectas paralelas al eje de las abscisas, éstas intersecan una vez a la gráfica de la misma.

Ejemplos:



Gráfica de una función inyectiva



Gráfica de una función no inyectiva

b. Función suryectiva o sobreyectiva

Dada la función $f : A \rightarrow B$, diremos que es suryectiva o sobre si todo elemento del segundo conjunto es imagen de algún elemento del primer conjunto

En símbolos:

$$\boxed{f : A \rightarrow B \text{ es suryectiva si } \forall y \in B\ \exists\, x \in A / \ y = f(x)}$$

Analizando la definición podemos concluir que:

$$\boxed{f : A \rightarrow B \text{ es suryectiva si } B = \operatorname{Im}(f)}$$

c. Función biyectiva

$$\boxed{\text{Una función } f : A \rightarrow B \text{ es biyectiva } \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva y suryectiva simultáneamente}}$$

Ejemplos:

1. La función $f : R_0^+ \rightarrow R$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ no es biyectiva pues

$$\left.\begin{array}{r} B = R \\ \operatorname{Im}(f) = R_0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow B \neq \operatorname{Im}(f) \quad \Rightarrow \text{ f no es suryectiva}$$

2. La función $f: R_0^+ \to R_0^+$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es suryectiva pues $R_0^+ = Im(f)$; además es inyectiva pues al trazar rectas paralelas al eje de las abscisas, éstas intersecan una vez a la gráfica de la misma . Entonces es biyectiva.

3. La función $f: R \to [1; +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 + 1$ no es biyectiva pues
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = f(2) = 5 \\ x_2 = -2 \Rightarrow f(x_2) = f(-2) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 5 \Rightarrow \text{ f no es inyectiva } \Rightarrow \text{ f no es biyectiva}$$

4. La función $f: R_0^+ \to [1; +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 + 1$ es biyectiva pues
   - es inyectiva ya que al trazar rectas paralelas al eje de las abscisas, éstas intersecan una vez a la gráfica de la misma y
   - es suryectiva dado que B= $[1;+\infty) = Im(f)$

Actividades

15) Analiza la inyectividad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 - 2x^2$

b) $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$

c) $f(x) = 2x + 6$

d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

16) Coloca verdadero o falso. Justifica la respuesta

a) La función $f: R \to [-1; +\infty)$ tal que $f(x) = 2x^2 - 1$ no es biyectiva

b) La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = -2.|x|$ es inyectiva

c) La función $f: R \to R_0^-$ tal que $f(x) = -2|x+1|$ es suryectiva

d. Función par

Dada la función $f: A \to B$, diremos que es par si su dominio es simétrico respecto al origen y si se cumple que para valores opuestos de la variable independiente corresponden valores iguales de la variable dependiente o imagen.

En símbolos:

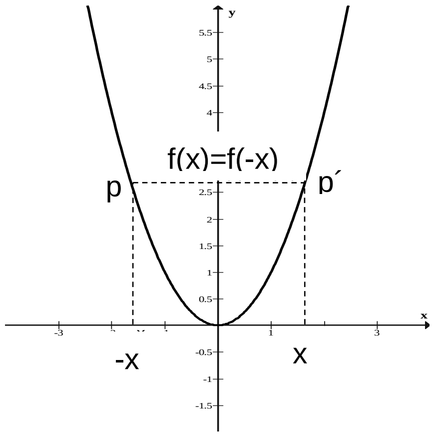
$f: A \to B$ es par $\Leftrightarrow$ se cumplen simultáneamente:

a) A es simétrico respecto al origen

b) $f(x) = f(-x) \ \forall \ x \in A$

De acuerdo a la definición, si $f: A \to B$ es par, resulta que si el punto $p(x; f(x))$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $p'(-x; f(-x)) = (-x; f(x))$ también pertenece a la misma. Como p' y p son simétricos respecto del eje de las ordenadas, entonces podemos concluir que:

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de las ordenadas.



Ejemplos:

1. La función $f: R_0^+ \to R$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ no es par pues su dominio no es simétrico respecto al origen

2. La función $f: R - \{-2\} \to R$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ no es par pues su dominio no es simétrico respecto al origen

3. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^3 + 2$ no es par pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\} f(-1) \neq f(1)$

4. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = |x| - 4$ es par pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $f(-x) = |-x| - 4 = |x| - 4 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ f es par

e. Función impar

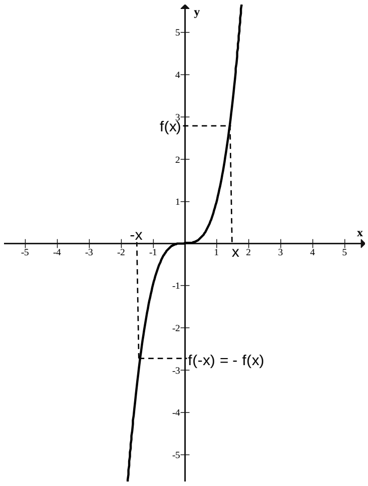
Dada la función $f: A \to B$, diremos que es impar si su dominio es simétrico respecto al origen y si se cumple que para valores opuestos de la variable independiente corresponden valores opuestos de la variable dependiente o imagen.

En símbolos:

> $f: A \to B$ es impar $\Leftrightarrow$ se cumplen simultáneamente:
> a) A es simétrico respecto al origen
> b) $f(x) = -f(-x) \; \forall \; x \in A$

De acuerdo a la definición, si $f: A \to B$ es impar, resulta que si el punto $p(x; f(x))$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $p'(-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$ también pertenece a la misma. Como p' y p son simétricos respecto del origen de coordenadas, entonces podemos concluir que:

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.



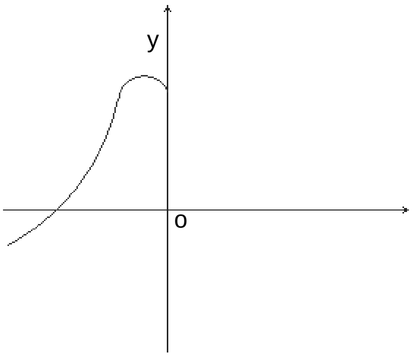
Ejemplos:

1. La función $f: R_0^+ \to R$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ no es impar pues su dominio no es simétrico respecto al origen
2. La función $f: R - \{3\} \to R$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ no es impar pues su dominio no es simétrico respecto al origen
3. La función $f: R - \{0\} \to R$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x} - 5$ no es impar pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $\left.\begin{array}{r} f(2) = \dfrac{1}{2} - 5 = -\dfrac{9}{2} \\ -f(-2) = -\left(\dfrac{1}{-2} - 5\right) = \dfrac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) \neq -f(-2) \Rightarrow$ f no es impar
4. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^3 + 5x$ es impar pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $-f(-x) = -\left[(-x)^3 + 5(-x)\right] = -\left[-x^3 - 5x\right] = x^3 + 5x = f(x) \Rightarrow -f(-x) = f(x) \Rightarrow$ f es impar

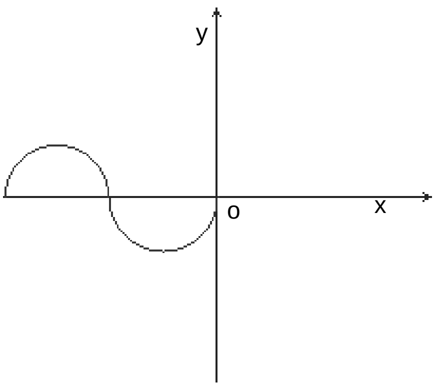
Actividades

17) Completa la gráfica de una función f si se sabe que

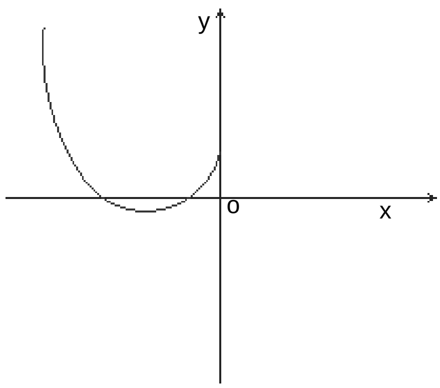
f es par



f es impar



f no es par ni impar



18) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F(falsas). Justifica la respuesta.

a) Si g(2) = -g(-2) $\Rightarrow$ g es impar

b) Si $t(x) = x^2;\ \forall x \in [-6;2] \Rightarrow$ t es par

19) Analiza la paridad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 4 - x^2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = x.(4 - x^2)$ d) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

20) Dadas $f_1(x) = x^3 - 1;\ f_2(x) = |x| + 4$ y $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$. Para cada una de ellas:

a) analiza su paridad.

b) determina la intersección de su gráfica con los ejes coordenados, si existe.

c) confecciona la gráfica de $f_2(x)$

f. Función creciente - decreciente

Diremos que una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 de dicho intervalo, se verifica que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

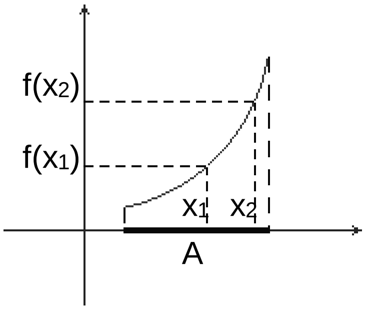
En símbolos:

$$f: A \to B \text{ es creciente } \Leftrightarrow \forall x_1 \in A \wedge \forall x_2 \in A:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

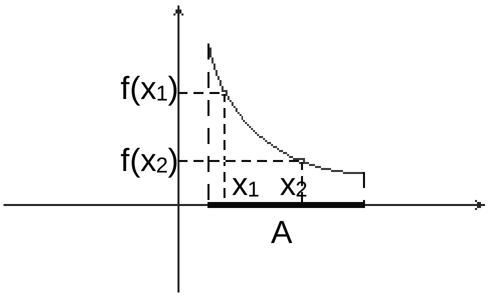
Diremos que una función f es decreciente en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 de dicho intervalo, se verifica que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

En símbolos:

$$f: A \to B \text{ es decreciente } \Leftrightarrow \forall x_1 \in A \wedge \forall x_2 \in A:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



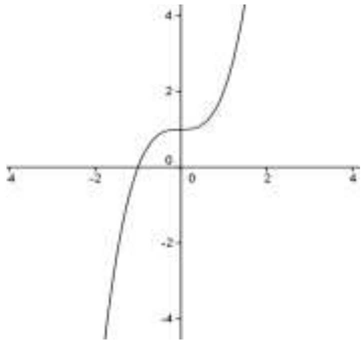
La función es creciente en A



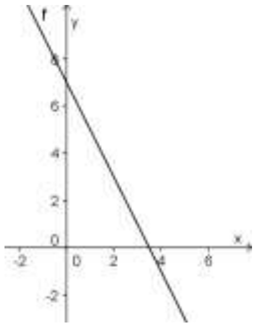
La función es decreciente en A

Ejemplos:

1. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^3 + 1$ es creciente en R

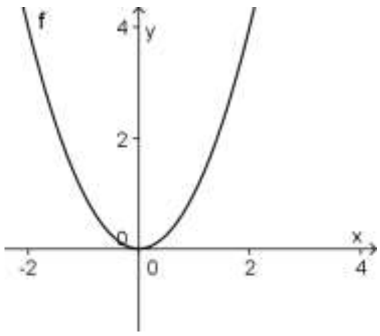


2. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = -2x + 7$ es decreciente en R

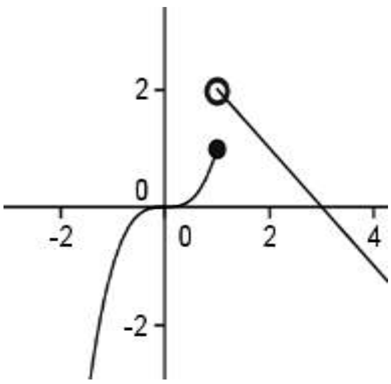


En los ejemplos anteriores vimos funciones que eran crecientes o decrecientes en todo su dominio. En otras funciones el crecimiento se debe estudiar por intervalos. Veamos los siguientes ejemplos.

3. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^2$ es:
   - creciente en $[0; +\infty)$:
   - decreciente en $(-\infty; 0]$:



4. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x > 1 \\ x^3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$ es:
   - creciente en $(-\infty; 1]$
   - decreciente en $(1; +\infty)$



Actividad

21) Confecciona la gráfica de una función

a) $f:[-4;4]\to R$ que no tenga paridad y que sea creciente en $[-4;1]$ y decreciente en $(1;3]$

b) $g:[-4;4]\to R$ decreciente en todo su dominio e impar

22) Contesta:

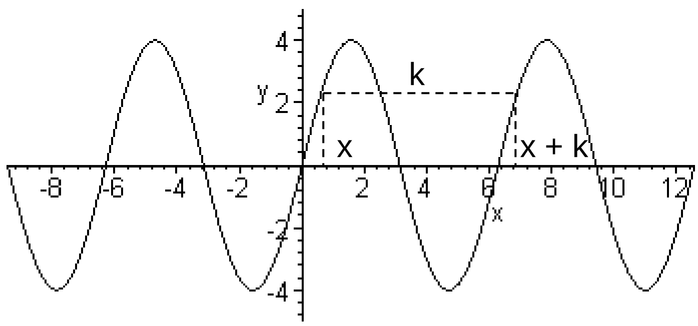
a) Si una función es creciente en A, ¿qué signo tiene $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\forall x_2;x_1\in A; x_1\neq x_2$?

b) Si una función es decreciente en A, ¿qué signo tiene $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\forall x_2;x_1\in A; x_1\neq x_2$?

g. Función periódica

> Dada $f:A\to B$ diremos que es periódica $\Leftrightarrow$ existe un número $k\neq 0$ tal que $f(x)=f(x+k)$, $\forall x,\ x+k\in A$

De la definición podemos observar que si $\forall x\in A$ y siempre que $x+k$; $x+2k$; ...; $x+nk\in A\ \wedge \forall n\in Z$, se cumple que como $f(x)=f(x+k)$ entonces $f(x)=f(x+k)=f[(x+k)+k]=f(x+2k)\Rightarrow ....\Rightarrow f[x+(n-1)k]=f(x+nk)$



El menor de los valores positivos k para los que f(x) = f(x + k), $\forall\ x,\ x+k\in A$, se denomina período de la función.

Actividades

23) Realiza la gráfica de $f:[-8;8]\to R$ sabiendo que cumple simultáneamente con:

- la gráfica de f coincide con la de $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1<x\le 2\end{cases}$ en el intervalo $[0;2]$

- f es par y periódica de período k = 4

24) Realiza la gráfica de $g:[-4;5]\to R$ sabiendo que cumple simultáneamente con:

- la gráfica de g coincide con la de $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ -2x+3 & \text{si} \quad 1<x\le 2\end{cases}$ en el intervalo $[-1;2]$

- g es periódica de período k = 3

9. Operaciones con funciones

a. Función Suma

Definición:
Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función suma y se simboliza $(f+g)(x)$ a:

$$\boxed{(f+g)(x)=f(x)+g(x)}$$

Dominio de la función suma

El dominio de $(f+g)(x)$ serán los valores de x para los cuales $(f+g)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de suma serán los valores de x tales que $f(x)+g(x)$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x. En conclusión:

$$Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$, entonces $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\sqrt{x-1}$ cuyo dominio será $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)=R\cap[1;+\infty)=[1;+\infty)$,

b. Función Resta

Definición:
Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función resta y se simboliza $(f-g)(x)$ a:

$$\boxed{(f-g)(x)=f(x)-g(x)}$$

Dominio de la función resta

El dominio de $(f-g)(x)$ serán los valores de x para los cuales $(f-g)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de resta serán los valores de x tales que $f(x)-g(x)$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x. En conclusión:

$$Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=\dfrac{x-1}{2x}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, entonces $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x-1}{2x}-\sqrt{x}$ cuyo dominio será $Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)=R-\{0\}\cap R_0^+ = R^+$,

c. Función Multiplicación

Definición:
Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función producto y se simboliza $(f\,g)(x)$ a:

$$\boxed{(f\,g)(x)=f(x)g(x)}$$

Dominio de la función multiplicación

El dominio de $(f\,g)(x)$ serán los valores de x para los cuales $(f\,g)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de producto serán los valores de x tales que $f(x)\,g(x)$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x. En conclusión:

$$Dom(f.g)=Dom(f)\cap Dom(g)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=4x+5$ y $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$, entonces $(f\,g)(x)=f(x)\,g(x)=(4x+5).\dfrac{1}{|x|}$ cuyo dominio será $Dom(f.g)=Dom(f)\cap Dom(g)=R\cap R-\{0\}=R-\{0\}$,

d. Función División

Definición:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función división y se simboliza $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ a:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad g(x)\neq 0}$$

Dominio de la función división

El dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ serán los valores de x para los cuales $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de división serán los valores de x tales que $\frac{f(x)}{g(x)}$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x y deberá ser $g(x)\neq 0$. En conclusión:

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=\mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)-\{x\,/\,g(x)=0\}$$

Ejemplo:

Si $f(x)=\sqrt{x}-2$ y $g(x)=x^2-4$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4}$ cuyo dominio será $\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=\mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)-\{x\,/\,g(x)=0\}=R_0^+\cap R-\{-2;2\}=R_0^+-\{2\}$,

Actividades

25) Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x-5}$; $g(x)=-2x+5$ y $h(x)=\sqrt{-x+4}$, determina ley y dominio de cada una de las siguientes funciones.

a) $(f+g)(x)$ b) $(f-h)(x)$ c) $(g\,h)(x)$ d) $\left(\frac{h}{g}\right)(x)$

e. Composición de funciones

Ya hemos visto anteriormente algunas operaciones entre funciones. Definiremos ahora otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva.

Definición:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, llamamos función compuesta de g y f y la simbolizamos $(gof)(x)$, a la que se obtiene de aplicar a la variable x la función f y a ese resultado, es decir a la imagen $f(x)$, le aplicamos la función g, obteniendo entonces la función $g[f(x)]$.

Gráficamente:

$g\,o\,f$ se lee:
g compuesta con f

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x) \arrow[r, bend left, "g"] & g[f(x)] = gof(x) \end{tikzcd}$$

Como esta nueva operación es una función tendremos que definir correctamente su dominio de definición.

Dominio de la composición de funciones

Teniendo en cuenta la definición anterior resulta que el dominio de $(gof)(x)$ serán todos los valores de x tales que $(gof)(x)$ exista. Entonces como $(gof)(x)$ se obtiene aplicando a la variable x la función f y a ese resultado, es decir a $f(x)$, le aplicamos la función g, resulta que x debe pertenecer al dominio de f (asegura que se pueda aplicar la función f), luego a los valores de $f(x)$ le debemos aplicar g, por lo tanto los valores de $f(x)$ deben pertenecer al dominio de g.

Gráficamente resulta:

$$x \xrightarrow{f} \underbrace{f(\underbrace{x}_{\in \mathrm{Dom}(f)}) \xrightarrow{g} g[\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Dom}(g)}]}$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(fog) = \{x /\ x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}}$$

Ejemplo:

Dadas: $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces el dominio y la ley de y de $(fog)(x)$ resultan:

- $h(x) = (gof)(x)$
  - Ley

    $h(x) = (gof)(x) = g[f(x)] = g\left(x^3 + 1\right) = \sqrt{x^3 + 1}$ con $x \geq -1$ pues

  - Dominio

    $\mathrm{Dom}(h) = \{x /\ x \in R \wedge x^3 + 1 \geq 0\} = \{x /\ x \in R \wedge x^3 \geq -1\} = [-1; +\infty)$

- $t(x) = (fog)(x)$
  - Ley
    $t(x) = (fog)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) \overset{x \geq 0}{=} (\sqrt{x})^3 + 1$ con $x \geq 0$
  - Dominio
    $Dom(t) = \{x/\ x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)\} = \{x/\ x \in R_0^+ \wedge \sqrt{x} \in R\} = \{x/\ x \in R_0^+\} = R_0^+$

Observación:
Teniendo en cuenta el ejemplo anterior podemos concluir que la composición de funciones **no es conmutativa**

Actividad

26) Determina en cada caso una $f(x)$ y una $g(x)$ tal que $h(x) = f \circ g$

a) $h(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$

b) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

27) Determina la ley y el dominio de gof y de fog, en cada caso:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = x + 1$ y $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x+4}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$

Las transformaciones en las funciones

Es posible mediante el uso de algunas transformaciones obtener la gráfica de una función a partir de las funciones patrones o básicas. Por ejemplo para graficar $g(x) = x^2 + 3$ es necesario realizar una transformación a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$

La utilización de un software matemático interactivo como un recurso para construir conocimientos y resolver problemas es una estrategia atractiva y “poderosa” que debemos considerar (se sugiere el software GEOGEBRA) para realizar la gráfica de una función a partir de transformaciones aplicadas a la gráfica de una función básica

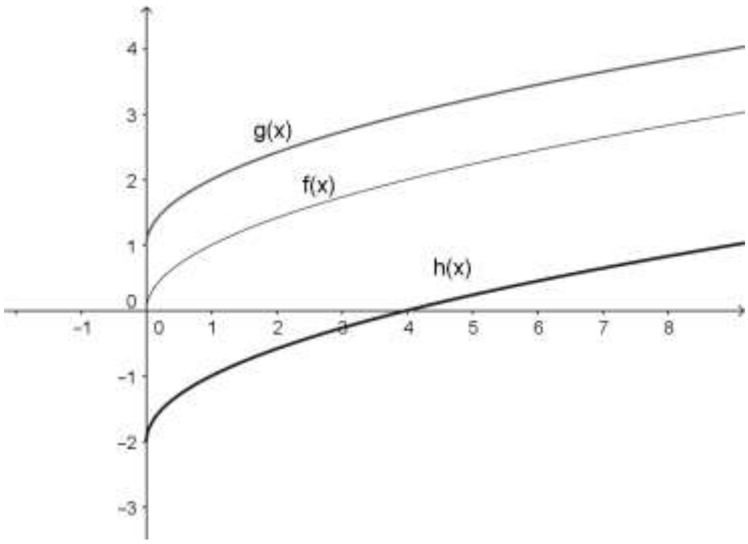
a) Desplazamientos verticales de las gráficas

Dada la gráfica de la función f(x)
¿Cómo obtenemos a partir de ella la gráfica de g(x)=f(x)+k, $k \in R$ y $k \neq 0$?

- Si k>0 la ordenada de cada punto de la gráfica de g(x) se obtiene sumando k unidades a la ordenada de cada punto de la gráfica de f(x). La gráfica de la función patrón se desplaza k unidades hacia arriba. (***desplazamiento vertical hacia arriba***).

- Si k<0 la ordenada de cada punto de la gráfica de g(x) se obtiene restando $|k|$ unidades a la ordenada de cada punto de la gráfica de f(x). La gráfica de la función patrón se desplaza k unidades hacia abajo.(***desplazamiento vertical hacia abajo***)

Ejemplo:
Dada $f(x) = \sqrt{x}$ obtenemos a partir de su gráfica las gráfica de $g(x) = \sqrt{x} + 1$ y $h(x) = \sqrt{x} - 2$



¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de estas funciones en relación al dominio y conjunto imagen de f?

b) Desplazamientos horizontales de las gráficas

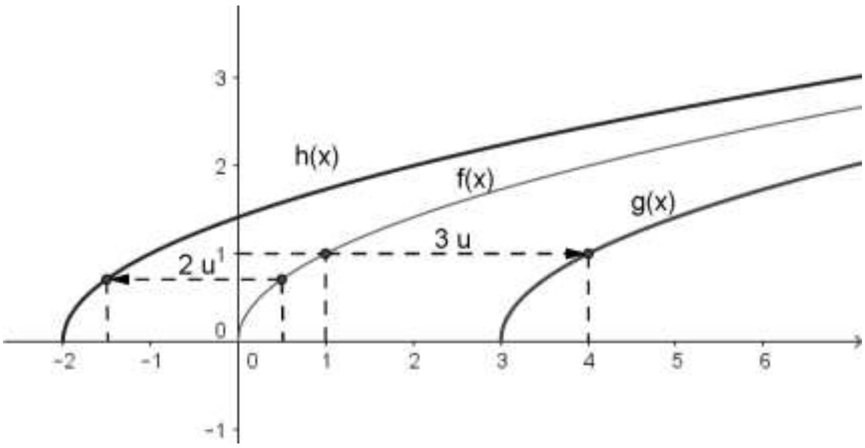
Dada la gráfica de la función f(x)
¿Cómo obtenemos a partir de ella la gráfica de g(x)=f(x+k), $k \in R$ y $k \neq 0$?

- Si $k>0$ la abscisa de cada punto de la gráfica de g(x) se le suma k unidades a la abscisa de cada punto de la gráfica de f(x). La gráfica de la función patrón se desplaza k unidades hacia la izquierda.(***desplazamiento horizontal hacia la izquierda***)

- Si $k<0$ la abscisa de cada punto de la gráfica de g(x) se le resta $|k|$ unidades a la abscisa de cada punto de la gráfica de f(x).). La gráfica de la función patrón se desplaza k unidades hacia la derecha. (***desplazamiento horizontal hacia la derecha***)

Ejemplo:

Dada $f(x)=\sqrt{x}$ obtenemos a partir de su gráfica las gráfica de $g(x)=\sqrt{x-3}$ y $h(x)=\sqrt{x+2}$



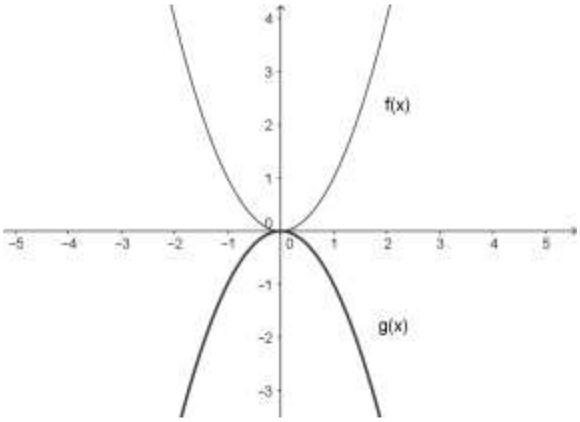
¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de estas funciones en relación al dominio y conjunto imagen de f(x)?

c) Gráficas reflejadas

Dada la gráfica de la función f(x)
¿Cómo obtenemos a partir de ella la gráfica de $g(x)=-f(x)$?

- La ordenada de cada punto sobre la gráfica de g(x) es simplemente la opuesta de la del punto correspondiente sobre la gráfica de f(x). Así la gráfica deseada se obtiene por rebatimiento (Simetría Axial) o la reflexión de la gráfica de f(x) respecto al eje x.

Ejemplo:



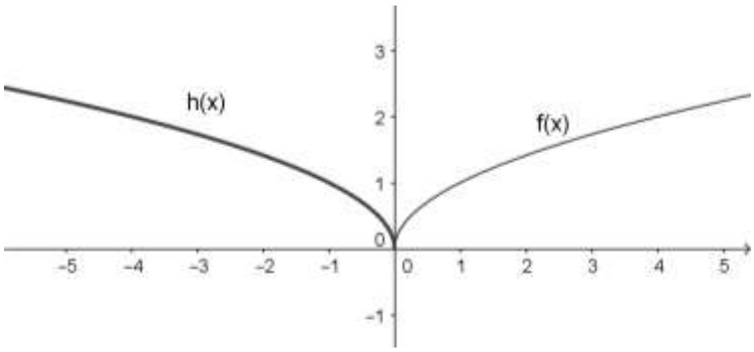
Dada $f(x) = x^2$ obtenemos a partir de su gráfica la gráfica de $g(x) = -x^2$

Dada la gráfica de la función f(x)
¿Cómo obtenemos a partir de ella la gráfica de $h(x) = f(-x)$?

- La abscisa de cada punto sobre la gráfica de h(x) es simplemente la opuesta de la del punto correspondiente sobre la gráfica de f(x). Así la gráfica deseada se obtiene por rebatimiento (simetría axial) o la reflexión de la gráfica de f(x) respecto al eje y.

Ejemplo:

Dada $f(x) = \sqrt{x}$ obtenemos a partir de su gráfica la gráfica de $h(x) = \sqrt{-x}$



¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de las funciones g(x) y h(x) en relación al dominio y conjunto imagen de f(x)?

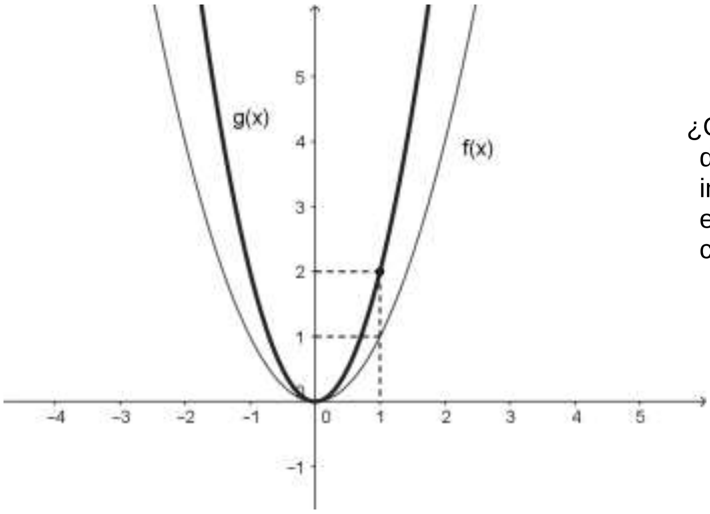
d) Dilatación o contracción vertical de las gráficas

Conocida la gráfica de f(x).
¿Cómo obtenemos a partir de ella la gráfica de $g(x) = k.f(x)$ con $k \neq 0$?

- Si $|k| > 1$, las **imágenes se dilatan.** Es decir la ordenada de cada punto sobre la gráfica de g(x) se obtiene multiplicando la ordenada de cada punto correspondiente a la gráfica de f(x).

Ejemplo:

Dada $f(x) = x^2$ obtenemos a partir de su gráfica la gráfica de $g(x) = 2x^2$

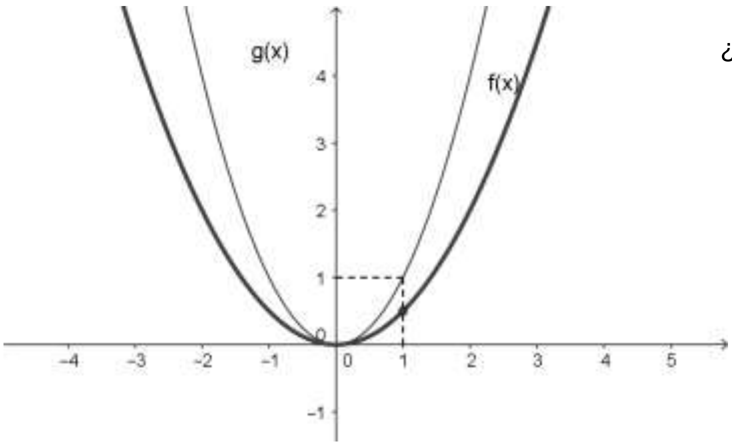


¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de las funciones g(x) en relación al dominio y conjunto imagen de f(x)?

- Si $0 < |k| < 1$, **las imágenes se contraen.** Es decir la ordenada de cada punto sobre la gráfica de g(x) se obtiene multiplicando la ordenada de cada punto correspondiente a la gráfica de f(x).

Ejemplo:

Dada $f(x) = x^2$ obtenemos a partir de su gráfica la gráfica de $g(x) = \frac{1}{2}x^2$



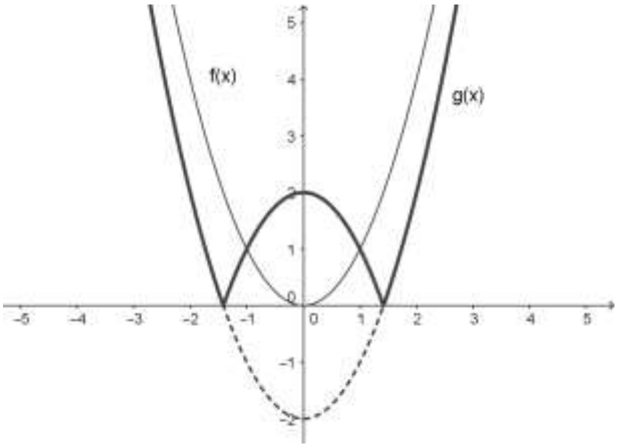
¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de las funciones g(x) en relación al dominio y conjunto imagen de f(x)?

e) Valor absoluto de la gráfica de una función

Conocida la gráfica de f(x).
¿Cómo obtenemos a partir de ella la gráfica de $g(x) = |f(x)|$?
Para ello debemos recurrir a la definición de valor absoluto conocida en R.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2 - 2$ obtenemos a partir de su gráfica $g(x) = |f(x)|$



¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de las funciones g(x) en relación al dominio y conjunto imagen de f(x)?

Actividades

28) Usando las gráficas de $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, realiza las gráficas de las siguientes funciones indicando dominio y recorrido de cada una.

a) $t_1(x) = f(x-1)$	f. $t_6(x) = \left\| \frac{1}{3} f(x) - 3 \right\| + 1$
b) $t_2(x) = g(x) + 3$	g. $t_7(x) = \|-h(x) + 1\|$
c) $t_3(x) = h(x+2) - 1$	h. $t_8(x) = h(\|x\|)$
d) $t_4(x) = -f(x) - 2$	i. $t_9(x) = g(\|x\|)$
e) $t_5(x) = 2g(x-3)$	j. $t_{10}(x) = \frac{1}{2}\|g(x+1) - 3\|$

29) Dada f(x) = $[x]$

a) grafica f(x), f(x – 1), f(x) - 1 y –f(x)
b) ¿qué puedes decir de los valores de la imagen de $f(x)$ cuando la variable independiente toma valores próximos pero menores que 2? (significa que me acerco a 2 por la izquierda y se simboliza 2^-)
c) ¿y cuando toma valores próximos pero mayores que 2? (significa que me acerco a 2 por la derecha y se simboliza 2^+)
d) De los apartados b y c podemos concluir que la función presenta un ______________ para $x_0 = 2$
e) Ídem b y c para $x_0 = 1{,}5$. ¿llegas a la misma conclusión? ¿por qué?

Observación:
Diremos que una función presenta un salto en x_0 cuando al acercarnos por derecha y por izquierda a ese valor, sus imágenes tienen valores distintos.

30) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \\ -x & \text{si } \ -1 \le x < 0 \end{cases}$

a. grafica f(x), f(x + 2), f(x) – 1, 2f(x)
b. calcula $f(0{,}5)$ y $f(-0{,}5)$

31) Estima, ayudándote con un software, los puntos (x;y) de intersección de las curvas generadas por las funciones $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = x^2$.

Inversa de una función

Definición:

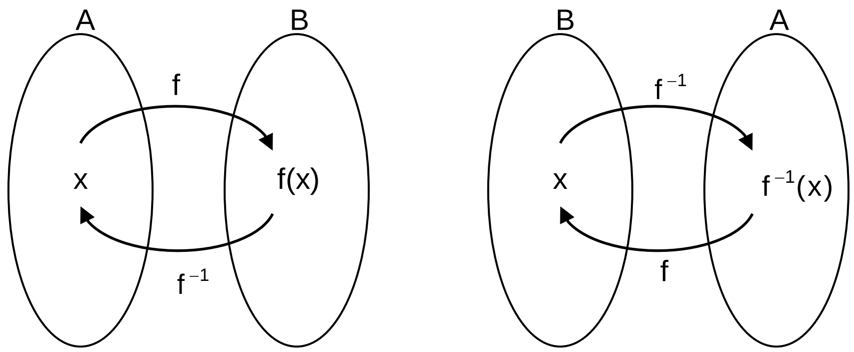
Dada la función biyectiva f con dominio A y conjunto imagen B, llamamos función inversa de f y la simbolizamos f^{-1}, a la función cuyo dominio es B, conjunto imagen A y cumple que si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) = x$

En símbolos resulta:
Dada $f : A \to B / f(x) = y$ entonces la inversa de f es $f^{-1} : B \to A / f^{-1}(y) = x$

Como consecuencia de la definición anterior resulta que si f^{-1} y f son funciones inversas cumplen con las siguientes condiciones:

- $\left(f^{-1} o f\right)(x) = f^{-1}[f(x)] = x \ , \ \forall x \in A$
- $\left(f o f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = x \ , \ \forall x \in B$

Gráficamente resulta:



$f^{-1}[f(x)] = x; \forall x \in A$ $\qquad$ $f[f^{-1}(x)] = x; \forall x \in B$

Mecanismos de obtención de la función inversa a una dada

Dada $f : A \to B / f(x) = y$, para obtener su inversa $f^{-1} : B \to A / f^{-1}(y) = x$ podemos seguir alguno de los siguientes procedimientos que se detallan a continuación :

❖ Procedimiento 1

1º) Analizamos la biyectividad de f(x)
2º) Determinamos fof^{-1}
3º) Despejamos $f^{-1}(x)$ de la ecuación $(fof^{-1})(x) = x$

Ejemplo:

Dada $f : R \to R / f(x) = x^3 - 1$ resulta :

f es biyectiva pues :

- es suryectiva ya que Im(f) =R y
- es inyectiva ya que toda paralela al eje de las abscisas interseca una vez a la gráfica de la función

Además, siendo $f : R \to R / f(x) = x^3 - 1$ es $f^{-1} : R \to R / f^{-1}(x) = y$

$$(fof^{-1})(x) = x \Rightarrow f[f^{-1}(x)] = x \Rightarrow [f^{-1}(x)]^3 - 1 = x \Rightarrow [f^{-1}(x)]^3 = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

De lo desarrollado resulta:

$$f^{-1} : R \to R / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

❖ Procedimiento 2

1º) Analizamos la biyectividad de f(x)

2º) Despejamos x de la ecuación $f(x) = y$

3º) Sustituimos en la ecuación obtenida en 2º la variable y por la variable x y recíprocamente teniendo en cuenta que ahora la variable y representa $f^{-1}(x)$

Ejemplo:

Dada $f : [3; +\infty) \to R \,/\, f(x) = 2\sqrt{x-3}$ no admite inversa por no ser biyectiva pues :

$$\left.\begin{array}{l} Im(f) \neq R \quad \text{entonces } f \text{ no es suryectiva} \\ \forall x_1, x_2 \in [3;+\infty); x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2\sqrt{x_1 - 3} \neq 2\sqrt{x_2 - 3} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ entonces } f \text{ es inyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ no es biyectiva}$$

Restringiendo el conjunto de llegada al de las imágenes la función así obtenida es biyectiva y podremos determinar su inversa, entonces:

Dada $f : [3; +\infty) \to R_0^+ \,/\, f(x) = 2\sqrt{x-3}$ resulta $f^{-1} : R_0^+ \to [3; +\infty) / f^{-1}(x) = y$ es:

$$2\sqrt{x-3} = y \Rightarrow \sqrt{x-3} = \frac{y}{2} \Rightarrow x - 3 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3$$

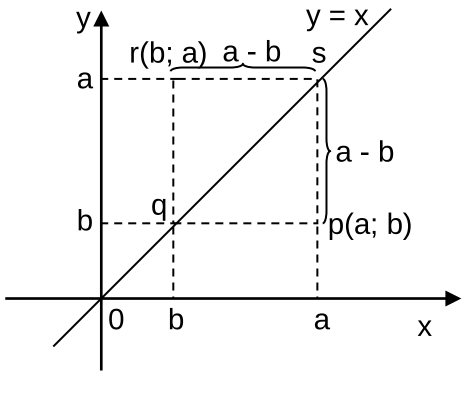
De lo desarrollado resulta:

$$f^{-1} : [3;+\infty) \to R_0^+ \,/\, f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3$$

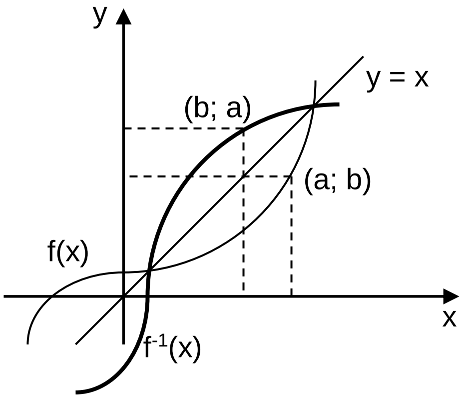
Gráfica de la función inversa de una función dada

Dada la función biyectiva $f : A \to B / f(x) = y$ y teniendo en cuenta la definición de función inversa, podemos afirmar que:

Si $f(a) = b$ entonces $f^{-1}(b) = a$, es decir,
si el punto $(a; b) \in Graf(f)$ resulta $(b; a) \in Graf\,(f^{-1}(x))$.
Ubicando los puntos $p(a; b)$; $q(b; b)$; $r(b; a)$ y $s(a; a)$ en un sistema coordenado, resulta que el cuadrilátero $pqrs$ es un cuadrado, en el cual la recta $\overleftrightarrow{qs}$ es eje de simetría, por lo que podemos concluir que los puntos $p(a; b)$ y $r(b; a)$ son simétricos respecto de ese eje.



Como el punto $p(a;b)$ es cualquier punto de la gráfica de f, podemos generalizar dicho análisis. Con lo cual resulta que la gráfica de la inversa de una función es la simétrica a la gráfica de la función original respecto de la recta $y = x$ (que es la gráfica de la función identidad).

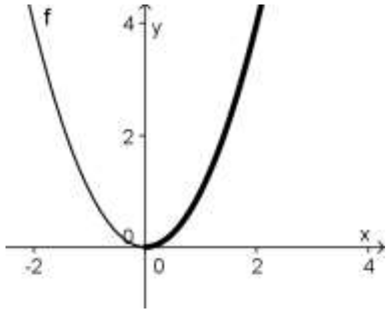


Observa el siguiente ejemplo:

Dada $f: R \to R_0^+ / f(x) = x^2$ **no admite inversa** por no ser biyectiva pues :

$\forall x \in R: \quad f(-x) = f(x) \Rightarrow$ f no es inyectiva $\Rightarrow$ f no es biyectiva

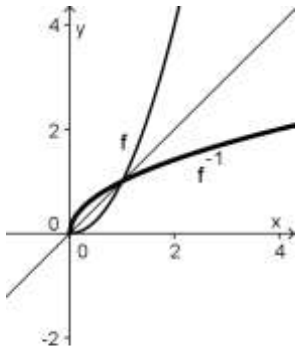
A pesar de que $Im(f) = R_0^+$



<u>**Restringiendo el dominio**</u> de la función al mayor intervalo posible de forma que dos variables independientes cualesquiera no posean la misma imagen podemos obtener una nueva función que sí resulte biyectiva.

Se conviene en tomar como dominio R_0^+ (observar que es donde la función f resulta creciente). Así entonces:

$f: R_0^+ \to R_0^+ / f(x) = x^2$ resulta ser una función biyectiva, es decir que tiene inversa: $f^{-1}: R_0^+ \to R_0^+ / f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



Actividades

32) Dadas las funciones $f(x) = 2x^3 + 1$; $g(x) = \sqrt{x+2}$; $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $t(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$

a) Justifica la existencia de la función inversa de cada una de ellas, si es posible ,de lo contrario restringe su dominio.
b) Determina ley; dominio; conjunto imagen y representación gráfica de cada una de las funciones inversas de las dadas.
c) Calcula el o los ceros de las funciones dadas

33) Justifica que las funciones $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 1$; $g(x) = \sqrt[3]{3(x+1)}$ son funciones inversas.

Respuestas

1. **a)**F **b)**V **c)**V **d)**F **e)**V **f)**F **g)**F
justificaciones a cargo del lector
2. **a)**Dom(f_1)= $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ **b)**Dom(f_2)= $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$ **c)**Dom(f_3)=R **d)**Dom(f_4)=$(10;+\infty)$
e)Dom(f_5)=R **f)**Dom(f_6)= $R-\{3;2\}$ **g)**Dom(f_7)= $R-\{0;2;-2\}$ **h)**Dom(f_8)=R
i)Dom(f_9)= $[-2;+\infty)-\{3\}$
3. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** -3 y 3 **c)**1 **d)**carece de ceros **e)** carece de ceros
f)-1 **g)** carece de ceros **h)** 0 **i)**-2
4. No, pues contradice la definición de función
5. a cargo del lector
6. **a)**c(d)=$\frac{7}{100}d$ **b)**c(200)=14 l y c(350)=24.5 l
7. g(x)=$\frac{1\$}{km}x+\$40$ .Gráfica a cargo del lector .g(300)=$340.g(600)=$640.
8. (-2;1) no pertenece .
.
9. f(x)=-500x+2500 $0\le x\le 5$
10. 1 hora
11. a)5 b)B
12. Gráficas a cargo del lector
13. Gráficas a cargo del lector

a)Dom(u)=R, Im(u)=$\{2;3\}$ **b)**Dom(f)=R,Im(f)=R **c)**Dom(g)=R,Im(g)=$R_0^+\cup Z^-$
d)Dom(h)=R,Im(h)=R_0^+ **e)**Dom(t)=R , Im(t)= $R^-\cup[1;3]$

14. **a)** $f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1 & x\ge -1\\ -x-1 & x<-1\end{cases}$ **d)** $f(x)=\left|-\frac{1}{2}x\right|=\begin{cases}-\frac{1}{2}x & x\le 0\\ \frac{1}{2}x & x>0\end{cases}$
15. **a)** no es inyectiva **b)**no es inyectiva **c)**es inyectiva **d)**no es inyectiva
16. **a)**V **b)**F **c)**V (justificaciones a cargo del alumno)
17. A cargo del lector
18. **a)**F **b)**F
19. **a)**Par **b)**Impar **c)**Impar **d)**impar
20. **a)**$f_1$no es par,f_1 no es impar, f_2 es par , f_3 es impar.
b)

	Intersección con eje x	Intersección con eje y
$f_1(x)=x^3-1$	(1;0)	(0;-1)
$f_2(x)=\|x\|+4$	no existe	(0;4)
$f_3(x)=\frac{1}{x}$	No existe	No existe

c)A cargo del lector

21. A cargo del lector
22. **a)** positivo **b)**negativo

23. A cargo del lector
24. A cargo del lector

25. a) $R-\{5\}$ **b)** $(-\infty;4]$ **c)** $(-\infty;4]$ **d)** $(-\infty;4]-\left\{\frac{5}{2}\right\}$

26. A cargo del lector

27. a) $g\circ f=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\mathrm{Dom}(g\circ f)=R-\{8\}$; $f\circ g=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$ $\mathrm{Dom}(f\circ g)=R-\{2\}$

b) $g\circ f=|x+1|$ $\mathrm{Dom}(g\circ f)=R$; $f\circ g=|x|+1$ $\mathrm{Dom}(f\circ g)=R$

c) $g\circ f=\frac{x-1}{4x-2}$ $\mathrm{Dom}(g\circ f)=R-\left\{1;\frac{1}{2}\right\}$; $f\circ g=\frac{2x+4}{-3-2x}$ $\mathrm{Dom}(f\circ g)=R-\left\{-2;-\frac{3}{2}\right\}$

d) $g\circ f=\sqrt{\frac{x+1}{2x}}$ $\mathrm{Dom}(g\circ f)=(-\infty;-1]\cup R^{+}$ $f\circ g=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ $\mathrm{Dom}(f\circ g)=R^{+}$

28. Gráficas a cargo del lector
a)Dom(t_1)=R,Im(t_1)= R_0^+ **b)**Dom(t_2)=R_0^+,Im(t_2)=$[3;+\infty)$**c)**Dom(t_3)= $R-\{-2\}$,Im(t_3)= $R-\{-1\}$
d) Dom(t_4)= R,Im(t_4)= $(-\infty;-2]$**e)** Dom(t_5)= $[3;+\infty)$, Im(t_5)= R_0^+ **f)** Dom(t_6)= R,Im(t_6)= $[1;+\infty)$
g) Dom(t_7)= $R-\{0\}$,Im(t_7)=R_0^+ **h)** Dom(t_8)= $R-\{0\}$,Im(t_8)= R^+ **i)** Dom(t_9)= R,Im(t_9)= R_0^+
j) Dom(t_{10})= $[-1;+\infty)$, Im(t_{10})= R_0^+

29. a) A cargo del lector
b)las imágenes valen 1 **c)**las imágenes valen 2 **d)**de los apartados a y c podemos concluir que la función presenta un "salto " para $x_0 = 2$ **e)**por derecha y por izquierda de x_0=1.5 las imágenes valen 1y la función no presenta un salto para dicho valor de la variable independiente.

30. a)a cargo del lector b) $f(x)=\frac{1}{4}$ y $f(-0,5)=\frac{1}{2}$

31. A cargo del lector

32. a)a cargo del lector **b)** $f:R\rightarrow R/f(x)=2x^3+1$; $f^{-1}:R\rightarrow R/f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

$g:[-2;+\infty)\rightarrow R_0^+$ / $g(x)=\sqrt{x+2}$; $g^{-1}:R_0^+\rightarrow[-2;+\infty)$ / $g^{-1}(x)=x^2-2$

$h:R-\{2\}\rightarrow R-\{0\}$ / $h(x)=\frac{1}{x-2}$; $h^{-1}:R-\{0\}\rightarrow R-\{2\}$ / $h^{-1}(x)=\frac{1}{x}+2$

c)$x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (cero de f) x=-2 (cero de g) $x=2 \vee x=-2$ (ceros de t)

33. A cargo del lector

Bibliografía

- Egler A., Müller D., Hecklein M. y Vrancken S.(2008). ***Funciones***. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.
- Lagreca L, Cattaneo B., Rosito M.. **Apunte de *Funciones*** . Rosario, Dpto. Matemática Instituto Politécnico Superior “Gral. San Martín”.2000
- Cattaneo B, Mirta Rosito. **Apunte de Funciones** , Rosario ,Departamento de Matemática Instituto Politécnico Superior “Gral. San Martín”. 2015
- J. Stewart ,L. Redlin, S Watson **Precálculo** , Tercera Edición , Editora Thomson Learning, D.F. México 2001