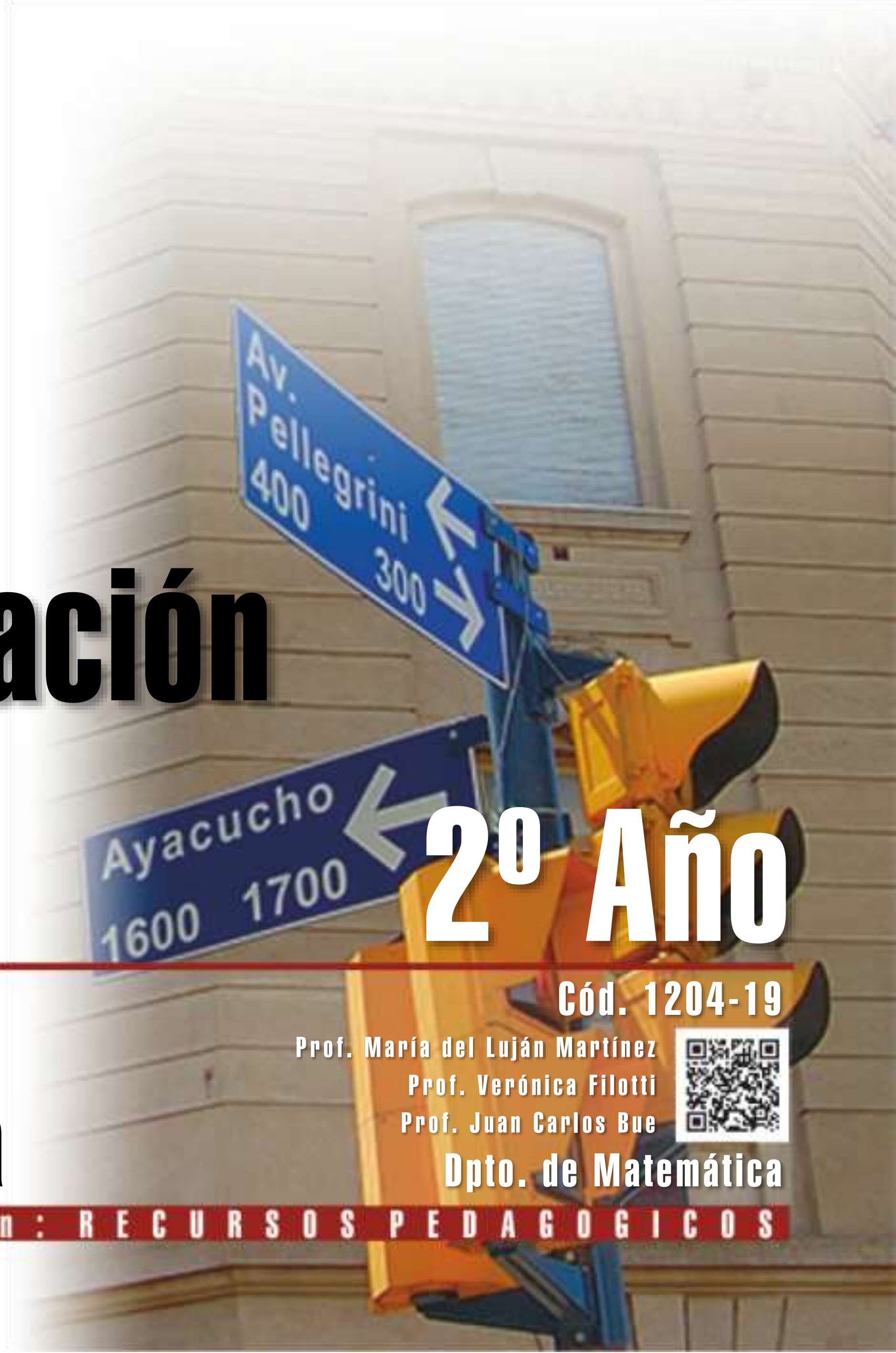
Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Potenciación en R



2º Año

Cód. 1204-19

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Verónica Filotti
Prof. Juan Carlos Bue
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

POTENCIACIÓN EN LOS REALES

Potencia de exponente entero.

En capítulos anteriores hemos definido potencia de exponente natural

Resumiendo las propiedades vistas en aquella oportunidad:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , b \neq 0$
- $\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$
- $a^n.a^m = a^{n+m}$

Nos proponemos encontrar ahora una propiedad referente al cociente de potencias de igual base similar a la ya estudiada "producto de potencias de igual base". Es decir, pretendemos escribir una expresión del tipo $\frac{a^m}{a^n}$, con $a \neq 0$, como una sola potencia… ¿Se podrá?

Estudiaremos tal cociente atendiendo a las distintas posibilidades de m y n, y suponiendo que m y n son naturales mayores que 1. (De aquí en adelante, omitiremos la demostración para el caso en que los exponentes sean iguales a 1 por ser triviales)

Así, planteando en forma literal, resulta:

- Si $m > n$, *es:*

$$\frac{a^m}{a^n} \overset{(1)}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ factores}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ factores}} \overset{(2)}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n\ factores}}{1} \overset{(1)}{=} a^{m-n}$$

- Si $m < n$ es:

$$\frac{a^m}{a^n} \overset{(1)}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ factores}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ factores}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m\ factores}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{a^{n-m}}$$

- Si $m = n$, es:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} \overset{(3)}{=} 1$$

(1) Definición de potencia de exponente natural.

(2) $\forall x, \forall y \neq 0, \forall z \neq 0$: $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$

(3) $\frac{x}{x} = 1 \ \forall x \neq 0$

Tener distintas expresiones para el *cociente de potencias de la misma base*, no nos resulta conveniente.

Nos proponemos unificar todos los casos. Entonces:

- Para el caso en el que $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$ resulta que el cociente de las potencias de igual base es una potencia de la misma base cuyo exponente es la resta entre los exponentes del dividendo y el divisor.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- Para el caso en el que $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$**:**

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Si **definimos:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, resulta:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

- Para el caso en el que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$**:**

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

Si **definimos**

$a^0 = 1$ con $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$

Observación:
0^0 no está definido

Resulta

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 = a^0 = a^{m-n}$$

Hemos logrado **una sola expresión** para el cociente de potencias de igual base cualesquiera sean los exponentes naturales.

Esta es: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ donde $m \wedge n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 0$

Coloquialmente expresamos:

El cociente de potencias de igual base, de exponente natural, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes dados.

Con lo visto, estamos en condiciones de definir la potencia de exponente entero.

Definición de la potencia de base real y exponente entero

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}^{\text{n factores}} & \forall a, \quad n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \\ a & \forall a, \quad n = 1 \\ 1 & \forall a \neq 0, \quad n = 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \forall a \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z} \wedge n < 0 \end{cases}$$

Te contamos que, las propiedades que conocías para potencias de exponente natural también se verifican para potencias de exponente entero.

Es decir, si m y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

- $(a.b)^n = a^n.b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$
- $a^n.a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ con $a \neq 0$

Nota:
En lo sucesivo supondremos que las variables asumen los valores que permiten que las diversas expresiones puedan estar definidas.

PROBLEMAS

1) ¿Por qué $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$ con $n \in N$ y $a \neq 0$? Ejemplifica.

2) Escribe como potencia de exponente positivo y resuelve:

a) 3^{-1} b) $(-3)^{-1}$ c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$ e) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$ f) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$

g) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$ h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ i) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$

j) $(-1)^{-5}$ k) $(-3)^{-2}$ l) $(-1)^{-4}$

m) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3}$ n) $(-2)^{-5}$

3) Resuelve

a) $4^{-2} =$ $- 4^{-2} =$ $(-4)^{-2} =$

b) $\dfrac{1}{5^{-3}} =$ $\dfrac{1}{-5^{-3}} =$ $\dfrac{1}{(-5)^{-3}} =$

4) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^{-1} = \dfrac{2}{3}$ b) $x^{-3} = -27$ c) $x^{-5} = \dfrac{1}{32}$

d) $a \cdot a^3 \cdot a^x = a^{-2}$ e) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{16}{81}$

5) Resuelve, aplicando las propiedades de la potenciación, cuando sea posible expresando el resultado final con exponentes positivos:

a) $\left[2^{-3} \cdot 2 + \left(3^2\right)^{-1}\right]^{-1} =$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 3 \cdot 3^{15}}{3^3 \cdot 3^{16} \cdot 3^{-1}} =$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - \left(2^{-1}\right)^2 + \dfrac{2^{-2}}{3^{-2}} =$

d) $\dfrac{(-2)^2 \cdot \left[(-2)^3\right]^{-2}}{(-2)^{-5}} =$

6) Resuelve hasta llegar a la mínima expresión, indicando el resultado final con exponentes positivos.

a) $\left(2^{10} \cdot a^{-2}\right) \cdot \left(2 \cdot a^{3}\right) =$

b) $\dfrac{2 \cdot 3^{7} x^{2}}{3^{5} x^{4}} =$

c) $\left(\dfrac{1}{2} b^{2}\right)^{-1} =$

d) $\left(2c^{-1} d^{2}\right)^{-2} =$

e) $\dfrac{3 \cdot a^{4}}{3^{-2} a^{2}} =$

f) $\left[\dfrac{2 \cdot x^{-1}}{16 \cdot x^{-3}}\right]^{3} =$

7) Resuelve y escribe el resultado sin utilizar exponentes negativos:

a) $\left(3^{-2} x\right).\left(2.3^{-1} x^{-2}\right) =$

f) $\left(\dfrac{\pi^{-4} a^{2}}{\frac{1}{\pi} \cdot a}\right)^{-3} =$

b) $\left[(-2)^{2} a^{-1}\right] : \left[(-2) x\right] =$

g) $\left\{ \left[(a^{-2} \cdot a^{3}) \cdot a^{-1}\right]^{2} \cdot a^{-1} \right\}^{3} =$

c) $\dfrac{0,\overline{2} a^{-5} b}{\left(0,\overline{2}\right)^{-3} a^{3} b^{-3}} =$

h) $\left\{ \left[(a^{-1} b^{-2}) \cdot (a^{-1} n)\right]^{2} : (a^{-1} b^{0}) \right\}^{-2} =$

d) $\left[(-5) a^{3} b^{-2}\right]^{2} =$

i) $\left[(a^{-2} b^{-3}) : (abc)\right]^{2} : (a^{-1} b^{-2} c)^{-1} =$

e) $\left[\left(-a^{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2} a^{-2}\right)\right]^{2} =$

8) Resuelve y simplifica las siguientes expresiones, de modo que el resultado se exprese con exponentes positivos:

a) $\dfrac{1}{3} x \left(x^{2} + a^{-2}\right) =$

b) $\left(\dfrac{1}{3} a^{2} - 3a^{-1} + 1\right) : a =$

c) $\left[(-2) a + \dfrac{1}{2} a^{-1}\right] \cdot a^{-1} =$

d) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(6 + \dfrac{3}{x^{-1}}\right) =$

e) $x^{-1} \cdot \left(\dfrac{2}{x} + 3x^{2}\right) =$

f) $\left(-2\, a^{-1} + a\right).\left(a^{2} + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{a} =$

g) $\dfrac{1}{a^{-2}b}+\dfrac{b^{-1}}{a^{-1}}=$

h) $\dfrac{3m^{-2}}{n^{-1}}+\dfrac{2\ m^{-2}\ n}{3^{-1}}=$

i) $\left(\dfrac{x^{-2}y}{3}+\dfrac{1}{x^2y^{-1}}\right).\left(x^{-2}y\right)^{-1}=$

j) $x^2(-x+\dfrac{1}{2}x^{-1})-(5-x^3)=$

k) $\left(p+\dfrac{1}{2}\right).(1-p)-\dfrac{1}{2}(-1-p)=$

l) $x^{-5}\left(x^3-x\right)+(-x^2)^{-2}=$

9) Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades que correspondan:

a) $\left(-\dfrac{3}{2}a\right)^4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}a\right)^2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}a\right)=$

f) $\left\{\left[\left(-\dfrac{3}{2}m\right)^4\right]^{-3}\right\}^{-1}=$

b) $\left(\dfrac{1}{3}m\right)^2:\left(\dfrac{1}{3}m\right)^{-1}=$

g) $\left|\left\{\left[\left(-\dfrac{5}{3}a\right)^2\right]^0\right\}^{-8}\right|^{15}=$

c) $\left(-\dfrac{1}{2}mp\right)^3:\left(-\dfrac{1}{2}mp\right)^{-2}=$

h) $\left(\dfrac{3}{4}a^5\right)^3\cdot\left[\left(\dfrac{3}{4}a^5\right)^2\right]^{-4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}a^5\right)=$

d) $\dfrac{8^4m^3p^4q^0}{8^2m^{-2}p^4q^3}=$

i) $\dfrac{5^4a^{-5}b^8c^0}{5^2ab^{-2}c^5}=$

e) $\left\{\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right]^3\right\}^2=$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para resolver problemas los científicos deben realizar, más de una vez, tediosos cálculos como el que te mostramos:

$$\mathbf{1234567 \times 56789}$$

Por supuesto, como estás pensando, se ayudan con calculadoras o computadoras.
Pero, veamos qué sucede si intentamos resolver nosotros este producto utilizando una calculadora científica.

Pulsa, para ello, las teclas que nos permiten obtener el producto planteado

¿Qué observas en el visor de tu calculadora? ………………………………..

La calculadora ha utilizado una forma de escritura llamada **notación científica.**

$$\underbrace{7{,}010982536}_{\text{número entre 1 y 10}} \times \underbrace{10^{10}}_{\text{potencia de 10}}$$

que consiste en escribir un número como el producto de un número entre 1 y 10 por una potencia entera de 10.

Así, son ejemplos del uso de este tipo de escritura las siguientes expresiones:

- 12 500 000 000 000 = $1{,}25.10^{13}$
- 2700 000 000 = $2{,}7.\ 10^{9}$

No sólo este tipo de escritura es útil para escribir **números grandes**. Los científicos también necesitan, a veces, trabajar con **números muy pequeños** como lo es, por ejemplo, el resultado de la operación.

0,23:1 000 200

¿Qué nos informa la calculadora en este caso al efectuar con ella este cálculo?

Pulsemos nuevamente las teclas que permiten obtener el cociente que buscamos.*¿Qué observas en el visor?*
...

¿Qué indican, en este caso, estas expresiones?

Expresan que el número buscado es:

El -07 que aparece en el visor nos indica que debemos correr la coma 7 lugares a la izquierda

$$2{,}200540092 \times 10^{-07} = 2{,}200540092 \times \frac{1}{10^7} =$$
$$= 0{,}0000002299540092$$

La notación científica nos provee una forma de simplificar la escritura. Además no es sólo útil para expresar resultados de operaciones, es aún más útil cuando expresamos los números con los que operamos, ya sea en el cálculo manual, en el mental o en el cálculo mecanizado
En general concluimos:

> Un número se expresa en notación científica cuando se lo escribe como el producto entre un número mayor que uno y menor que 10 y una potencia de base 10 con exponente entero.

PROBLEMAS

10) Expresa cada número sin emplear potencias

a) 2.5×10^{-3}
b) 0.563×10^{-1}
c) 0.0023×10^{5}
d) 1.25×10^{4}

11) Expresa en notación científica

a) 300000000000
b) 128000000000000
c) 0,000000000428
d) 321000000000
e) 0,00000000012
f) 0,000000123720
g) 0,000000001138
h) 56000000000000
i) $0{,}235 \times 10^{-2}$
j) 2847×10^{2}

Respuestas

1) A cargo del alumno

2) a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 3 d) -3 e) $\frac{125}{8}$ f) $-\frac{125}{8}$ g) $\frac{25}{4}$
h) $\frac{9}{4}$ i) 16 j) -1 k) $\frac{1}{9}$ l) 1 m) $\frac{125}{64}$

3) a) $\frac{1}{16}; -\frac{1}{16}; \frac{1}{16}$ b) 125; -125; -125

4) a) $x=\frac{3}{2}$ b) $x=-\frac{1}{3}$ c) $x=2$ d) $x=-6$ e) $x=-4$

5) a) $\frac{36}{13}$ b) $\frac{7}{2}$ c) 1 d) -2

6) a) $2^{11}a$ b) $\frac{18}{x^2}$ c) $\frac{2}{b^2}$ d) $\frac{1}{4}\ \frac{c^2}{d^4}$ e) $27a^2$ f) $\frac{1}{512}\ x^6$

7) a) $\frac{2}{27}\ \frac{1}{x}$ b) $\frac{-2}{ax}$ c) $\frac{4}{81}\ \frac{b^4}{a^8}$ d) $25\ \frac{a^6}{b^4}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi^9}{a^3}$

g) $\frac{1}{a^3}$ h) $\frac{a^6b^8}{n^2}$ i) $\frac{1}{a^7b^{10}c^7}$

8) a) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\ \frac{x}{a^2}$ b) $\frac{1}{3}a-3\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$ c) $-2+\frac{1}{2}\ \frac{1}{a^2}$ d) $4+2x$
e) $2\ \frac{1}{x^2}+3x$ f) $a^3-\frac{3}{2}a$ g) $\frac{a^2}{b}+\frac{a}{b}$ h) $9\ \frac{n}{m^2}$
i) $\frac{4}{3}$ j) $\frac{1}{2}x-5$ k) $-p^2+p+1$ l) $\frac{1}{x^2}$

9) a) $-\frac{2187}{128}\ a^7$ b) $\frac{1}{27}m^3$ c) $-\frac{1}{32}\ m^5p^5$ d) $64\frac{m^5}{q^3}$
e) 729 f) $\frac{531441}{4096}m^{12}$ g) 1 h) $\frac{256}{81}\ \frac{1}{a^{20}}$ i) $25\ \frac{b^{10}}{a^6c^5}$

10) a) 0,0025 b) 0,0563 c) 230 d)125000

11) a) 3×10^{11} b) $1{,}28\times10^{14}$ c) $4{,}28\times10^{-10}$
d) $3{,}21\times10^{11}$ e) $1{,}2\times10^{-10}$ f) $1{,}2372\times10^{-7}$
g) $1{,}138\times10^{-9}$ h) $5{,}6\times10^{1}$ i) $2{,}35\times10^{-3}$ j) $2{,}847\times10^{5}$

BIBLIOGRAFIA

* PREM 8 (Buschiazzo, Cattaneo, Gonzalez, Hinrischen, Filiputti, Lagreca)

* Matemática Activa II (Masco, Cattaneo, Hinrischen)

* Matemática 8 de Julia Seveso y otros. Serie Vértice. Editorial Kapeluz

* Matemática 9 de Julia Seveso y otros. Serie Vértice. Editorial Kapeluz

* Álgebra Intermedia de Allen R. Angel (Sexta Edición). Editorial Pearson

* Matemática 9 de Julia Seveso y otros. Serie Vértice. Editorial Kapeluz

* Álgebra Intermedia de Allen R. Angel (Sexta Edición). Editorial Pearson