Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Proporcionalidad
Semejanzas
Razones

3º Año

Bue, Juan Carlos
Candio, Daniela
Lagreca, Noemí
Martínez, María del Luján
Revisión: Bologna María Noel

Cód. 1301-20

Matemática

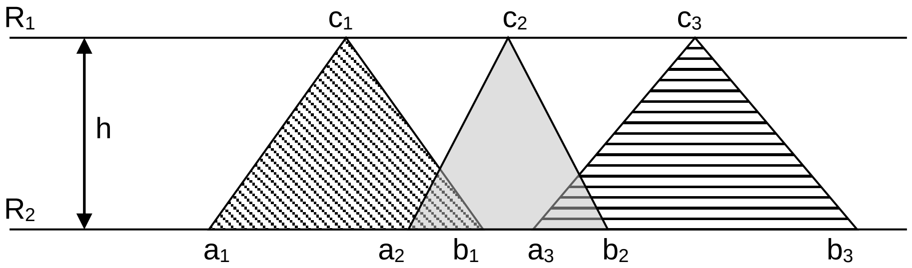
Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

LA PROPORCIONALIDAD EN LOS TRIÁNGULOS

CONSIDERACIONES GENERALES

Dadas dos rectas R_1 // R_2 y los triángulos que se observan en el siguiente gráfico, siendo h la medida de la altura de los mismos:



h es constante pues R_1 // R_2

Información:
Convenimos en simbolizar con ab la medida del segmento ab

si calculamos las áres respectivas, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overset{\Delta}{a_1 b_1 c_1}) = \dfrac{a_1b_1 \cdot h}{2} = a_1b_1 \cdot \dfrac{h}{2} \\[2ex] A(\overset{\Delta}{a_2 b_2 c_2}) = \dfrac{a_2b_2 \cdot h}{2} = a_2b_2 \cdot \dfrac{h}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{A(\overset{\Delta}{a_1 b_1 c_1})}{A(\overset{\Delta}{a_2 b_2 c_2})} = \frac{a_1b_1 \cdot \frac{h}{2}}{a_2b_2 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2}$$

De acuerdo a lo expuesto, resulta:

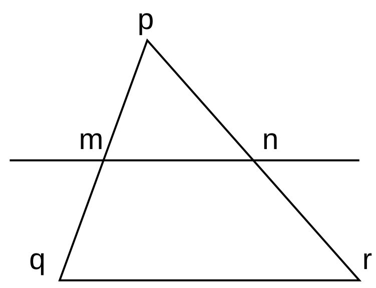
Las áreas de triángulos de igual altura son proporcionales a las medidas de las bases respectivas

TEOREMA

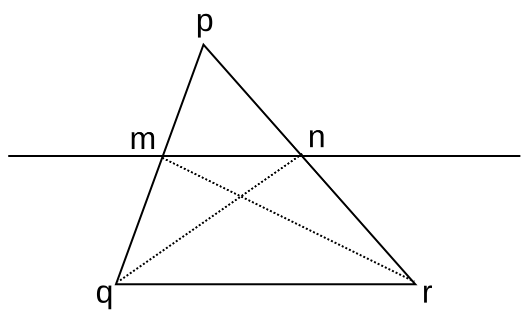
Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre las rectas en las que están incluidos los otros dos lados, segmentos de medidas directamente proporcionales o simplemente segmentos proporcionales.

H) $\overleftrightarrow{mn} \,//\, \overleftrightarrow{qr}$

T) $\dfrac{pm}{mq} = \dfrac{pn}{nr}$



D) $\overset{\Delta}{qmn}$ y $\overset{\Delta}{mnp}$ tienen igual altura (la distancia del vértice n a la recta $\overleftrightarrow{pq}$). Por la propiedad anterior resulta : $\dfrac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnq})} = \dfrac{pm}{mq}$ (1)



Análogamente $\overset{\Delta}{mnp}$ y $\overset{\Delta}{mnr}$ tienen igual altura (la distancia del vértice m a la recta $\overleftrightarrow{pr}$, por lo tanto:

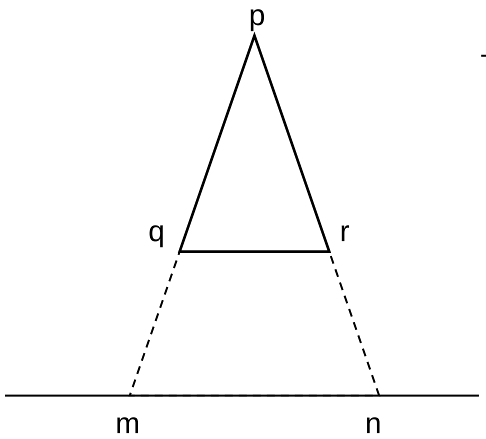
$$\frac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnr})} = \frac{pn}{nr} \quad (2)$$

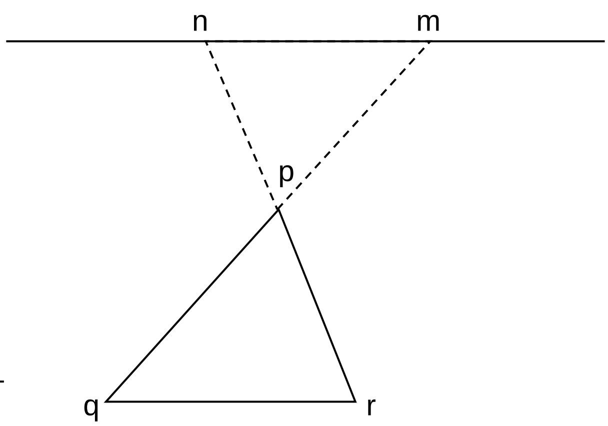
Además $\overset{\Delta}{mnq}$ y $\overset{\Delta}{mnr}$ tienen la misma base mn y la misma altura respecto de esa base, por lo que $A(\overset{\Delta}{mnq}) = A(\overset{\Delta}{mnr})$ (3)

De (1); (2) y (3) resulta:

$$\frac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnq})} = \frac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnr})} \Rightarrow \boxed{\frac{pm}{mq} = \frac{pn}{nr}}$$

Se puede demostrar que la propiedad también vale en los siguientes casos:





TEOREMA RECÍPROCO

> Si una recta interseca a dos lados de un triángulo o a sus prolongaciones y determina sobre ellos segmentos proporcionales, entonces es paralela al tercer lado.

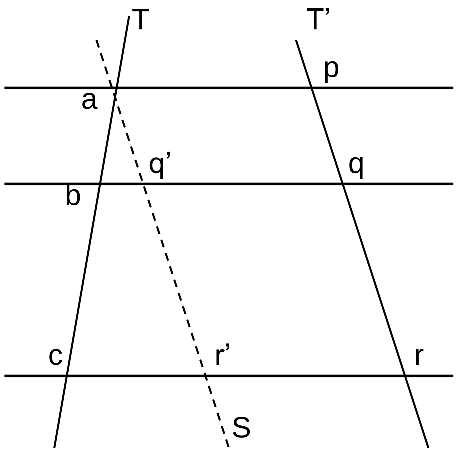
TEOREMA DE THALES

> Si tres o más paralelas son intersecadas por dos transversales, las medidas de los segmentos determinados en una de ellas son directamente proporcionales a las medidas de los segmentos determinados en la otra.

H) $\overleftrightarrow{ap} \ // \ \overleftrightarrow{bq} \ // \ \overleftrightarrow{cr}$, T y T´ transversales.

T) $\frac{ab}{bc} = \frac{pq}{qr}$

D) Trazamos por el punto "a" la recta S // T'



Llamamos q' y r' a los puntos de intersección de S con $\overleftrightarrow{bq}$ y $\overleftrightarrow{cr}$ respectivamente. En el $\overset{\Delta}{acr'}$ es $\overleftrightarrow{bq'} \ // \ \overleftrightarrow{cr'}$. Por el teorema anterior resulta:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{aq'}{q'r'} \quad \otimes$$

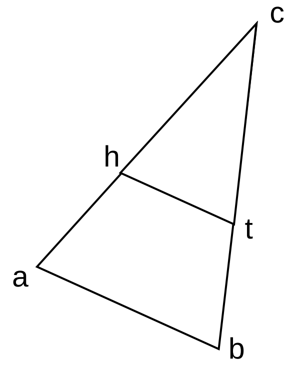
Pero aq'qp y q'r'rq son paralelogramos por construcción (poseen dos pares de lados opuestos paralelos). Por propiedad de los paralelogramos resulta: $\begin{cases} aq' = pq \\ q'r' = qr \end{cases}$

Reemplazando en $\otimes$: $\boxed{\frac{ab}{bc} = \frac{pq}{qr}}$

En particular, si ab = bc, entonces pq = qr (a segmentos congruentes en una de las transversales, corresponden segmentos congruentes en la otra).

ACTIVIDADES

1) Sabiendo que $\overleftrightarrow{ht} \parallel \overleftrightarrow{ab}$ completa:



a) $\frac{ca}{ch} = \_\_\_$ **d)** $\frac{tb}{ct} = \_\_\_$

b) $\frac{ca}{ha} = \_\_\_$ **e)** $\frac{ct}{ch} = \_\_\_$

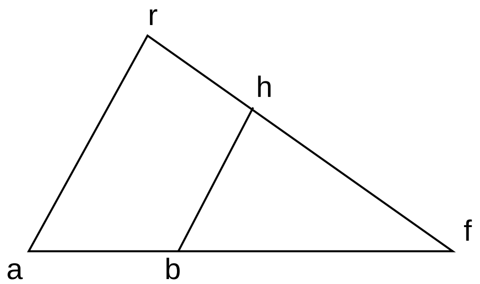
c) $\frac{ch}{ha} = \_\_\_$ **f)** $\frac{bt}{ah} = \_\_\_$

2) Si $\overleftrightarrow{bh} \parallel \overleftrightarrow{ar}$ y la medida de los segmentos respecto a la misma unidad de medida, es la que se indica en cada apartado, calcula la medida del segmento que se solicita.

a) rh = 4 hf = 8
bf = 10 ab =

b) rh = 6 hf =10
ab = 3 af =

c) rh = 5 rf = 20
af = 18 bf =

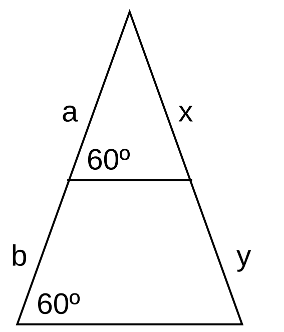


3) Completa las siguientes igualdades

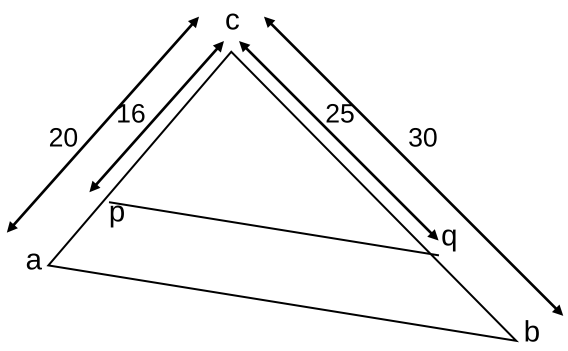
a) $\frac{a}{b} = \_\_\_\_$ **d)** $\frac{a}{x} = \_\_\_\_$

b) $\frac{a+b}{a} = \frac{\_\_\_\_}{x}$ **e)** $\frac{a+b}{b} = \frac{x+}{\_\_\_\_}$

c) $\frac{a+b}{x+y} = \frac{\_\_\_\_}{x}$ **f)** $\frac{x+y}{a+b} = \frac{y}{\_\_\_\_}$



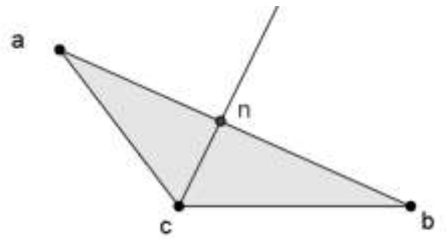
4) Si los segmentos de la figura poseen las medidas indicadas, respecto al cm, ¿es $\overleftrightarrow{pq} \,//\, \overleftrightarrow{ab}$? Justifica la respuesta.



PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO INTERIOR DE UN TRIÁNGULO

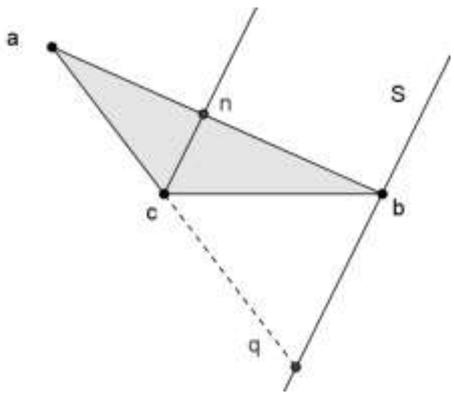
La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo determina sobre el lado opuesto segmentos cuyas longitudes son directamente proporcionales a los lados adyacentes a dicho ángulo.

H) $\overset{\Delta}{abc}$; $\overrightarrow{cn}$ bisectriz de $\hat{c}$



T) $\dfrac{an}{nb} = \dfrac{ac}{cb}$

D) Trazamos por b una recta S // $\overrightarrow{cn}$ .Se prolonga el segmento $\overline{ac}$ tal que $\overleftrightarrow{ac} \cap S = \{q\}$



Aplicando el teorema de una paralela a un lado de un triángulo resulta: $\dfrac{an}{nb} = \dfrac{ac}{cq}$ (1)

$a\hat{c}n = c\hat{q}b$ por correspondientes entre $\overleftrightarrow{cn} \,//\, S \,\not{/\!/}\, \overleftrightarrow{aq}$ (2)

$b\hat{c}n = c\hat{b}q$ por alternos internos entre $\overleftrightarrow{cn} \,//\, S \,\not{/\!/}\, \overleftrightarrow{cb}$ (3)

$a\hat{c}n = b\hat{c}n$ por $\overrightarrow{cn}$ bisectriz de $\hat{c}$ (4)

Resulta de (2), (3), y (4) por aplicación de la propiedad transitiva que:

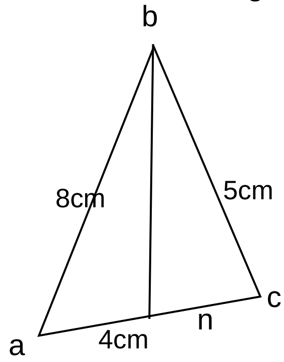
$$c\hat{q}b = c\hat{b}q \underbrace{\Rightarrow}_{(5)} \overline{cq} = \overline{cb} \quad (6)$$

(5) En todo triángulo a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes

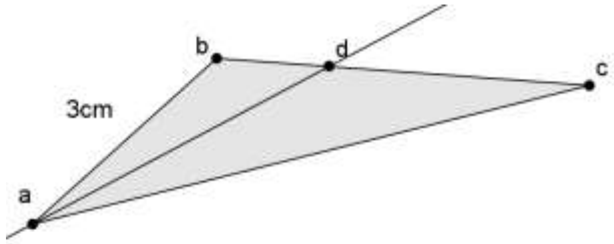
Reemplazando (6) en (1) $\dfrac{an}{nb} = \dfrac{ac}{cb}$

ACTIVIDADES

5) Si $\overrightarrow{bn}$ biseca a $\hat{b}$ y los lados poseen las medidas indicadas en la figura, respecto al centímetro, halla el perímetro del triángulo abc

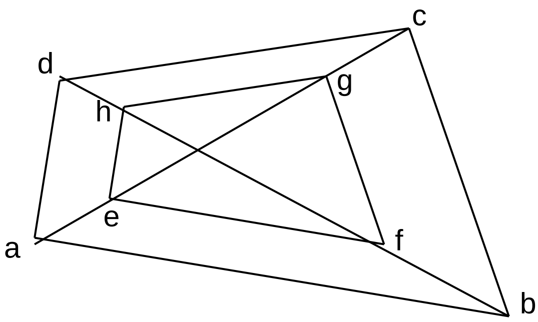


6) Calcula la longitud del $\overline{ac}$ respecto al centímetro, dado que $\overrightarrow{ad}$ biseca al ángulo $b\hat{a}c$ y bd = 2 dc.



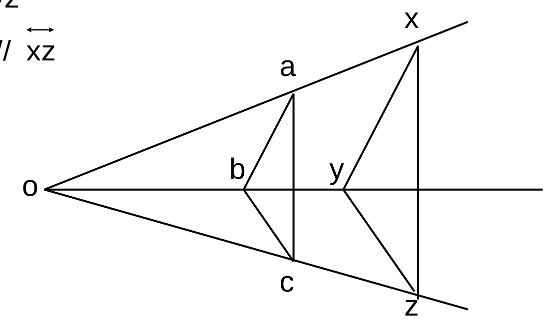
7) En la figura es: $\overleftrightarrow{ef}$ // $\overleftrightarrow{ab}$; $\overleftrightarrow{fg}$ // $\overleftrightarrow{bc}$ y $\overleftrightarrow{gh}$ // $\overleftrightarrow{dc}$

Prueba que $\overleftrightarrow{he}$ // $\overleftrightarrow{da}$

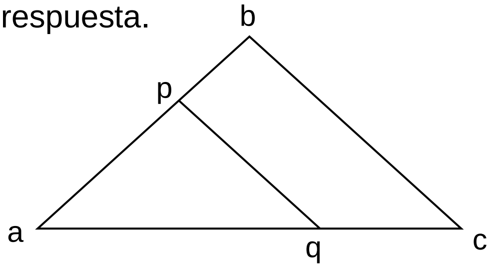


8) Se dan dos triángulos $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{xyz}$ tales que $\overleftrightarrow{xa}$; $\overleftrightarrow{yb}$ y $\overleftrightarrow{zc}$ se intersecan en o y $\overleftrightarrow{ab}$ // $\overleftrightarrow{yx}$; $\overleftrightarrow{bc}$ // $\overleftrightarrow{yz}$

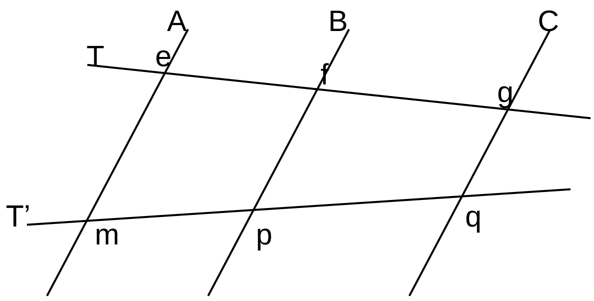
Prueba que $\overleftrightarrow{ac}$ // $\overleftrightarrow{xz}$



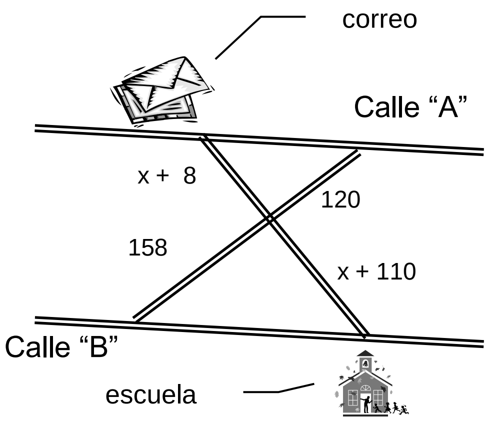
9) Si ap = 2x + 4; pb = x + 2; aq = 3x + 1; qc = x + 3 y ac = 24 (las medidas se dan con respecto al cm) ¿es $\overleftrightarrow{pq} \parallel \overleftrightarrow{bc}$? Justifica tu respuesta.



10) Si A // B // C, T y T’ transversales y ef = 4,4 , fg = 7,7 y mq = 11 respecto al cm, calcula la medida de los $\overline{mp}$ y $\overline{pq}$ respecto al cm.

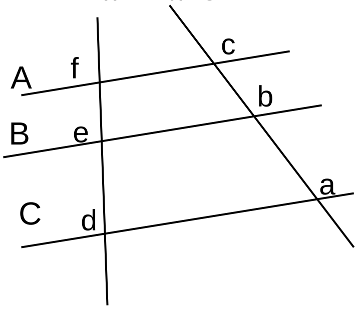


11) ¿A qué distancia se encuentran entre sí, el correo y la escuela? (Las calles A y B son paralelas).La unidad de medida utilizada es el metro



12) Encuentra la longitud de $\overline{ac}$ **(**Utiliza valores exactos para efectuar los cálculos)

A // B // C



$fe = \left(\sqrt{5} - 1\right)cm$

$ed = \sqrt{20}\ cm$

$cb = x\ cm$

$ab = \left(\sqrt{5} + 1\right)cm$

SEMEJANZA

Polígonos Semejantes

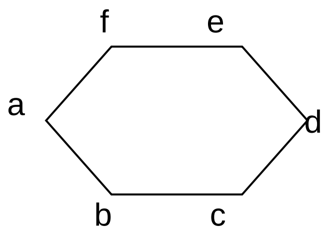
Para comenzar a desarrollar este tema estableceremos algunos conceptos vinculados a polígonos semejantes (en particular a triángulos semejantes).primeramente definiremos polígonos semejantes

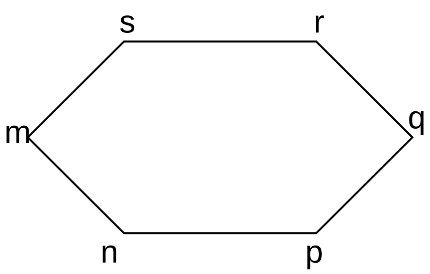
Definición

Dos polígonos son **semejantes** cuando uno es imagen de otro por aplicación de una función, tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- sus puntos conservan el orden y la pertenencia
- sus lados homólogos son proporcionales
- sus ángulos homólogos son congruentes

Ejemplo:





Sabiendo que abcdef $\sim$ mnpqrs resultа:

$$\frac{ab}{mn}=\frac{bc}{np}=\frac{cd}{pq}=\frac{de}{qr}=\frac{ef}{rs}=\frac{af}{ms}$$

y

$$\hat{a}=\hat{m} \quad \hat{b}=\hat{n} \quad \hat{c}=\hat{p} \quad \hat{d}=\hat{q} \quad \hat{e}=\hat{r} \quad \hat{f}=\hat{s}$$

NOTA:
El símbolo $\sim$
Se lee ...es semejante a....

Semejanza de triángulos

Dos triángulos semejantes abc y a’b’c’ tienen por la definición dada los ángulos homólogos congruentes:

$$\hat{a}=\hat{a'} \quad \hat{b}=\hat{b'} \quad \hat{c}=\hat{c'}$$

y los lados proporcionales:

$$\frac{a'b'}{ab}=\frac{b'c'}{bc}=\frac{a'c'}{ac}$$

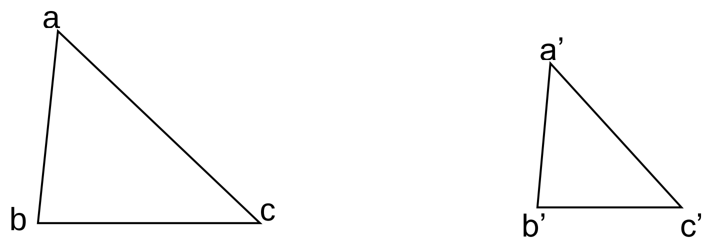
Criterios de semejanza de triángulos

El conjunto de las condiciones mínimas para que dos triángulos sean semejantes se resumen en los denominados **criterios de semejanza de triángulos**, que enunciamos a continuación:

Dos triángulos son semejantes si y sólo si:

Tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruente.

Ejemplo:



Si $\dfrac{a'b'}{ab} = \dfrac{a'c'}{ac}$ y $\hat{a} = \hat{a'}$ entonces $\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'}$

Tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

Ejemplo:

Si $\dfrac{a'b'}{ab} = \dfrac{b'c'}{bc} = \dfrac{a'c'}{ac}$ entonces $\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'}$

Tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

Ejemplo:

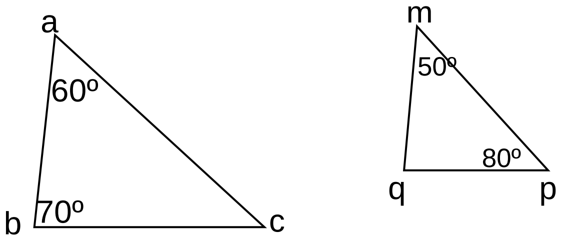
Si $\hat{a} = \hat{a'}$ $\hat{b} = \hat{b'}$ entonces $\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'}$

Observación: La semejanza entre triángulos cumple con la relación de equivalencia ya que cumple con las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

ACTIVIDADES

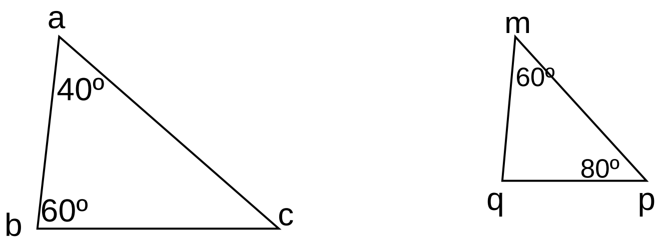
13) Indica en cada caso si los triángulos abc y mpq son semejantes de acuerdo a los datos dados, escribe el criterio de semejanza utilizado.

a)



b) abc triángulo rectángulo y mpq triángulo isósceles con $\hat{p}$ =40º (siendo este el opuesto a la base)

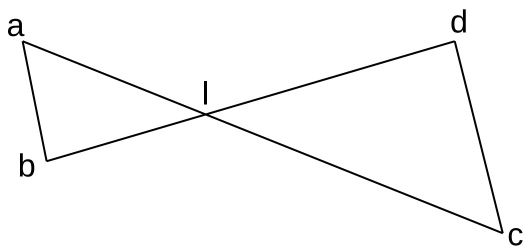
c)



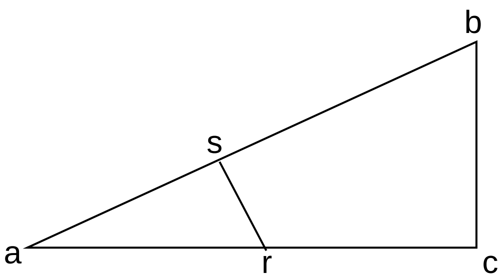
d) En el triángulo abc las medidas de sus lados son: ab=5 cm bc=6 cm ca = 7 cm y el triángulo mpq tiene un perímetro de 34000 cm

14) Si $\hat{b} = \hat{d}$ y cd = 4.ab
Demuestra que bd = 5 . bl

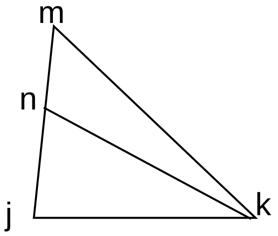
Ayudita:
Para plantear la proporcionalidad de los lados ordena el nombre de los triángulos según sus ángulos congruentes



15) Dado $\overline{bc} \perp \overline{ac}$ y $\overline{rs} \perp \overline{ab}$, demuestra que $\frac{as}{ac} = \frac{ar}{ab}$

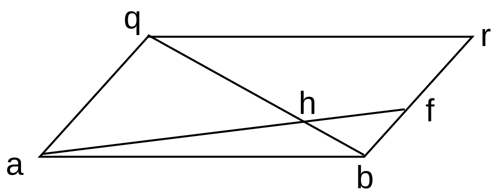


16)



Sabiendo que $\hat{jnk} = \hat{jkm}$, demuestra que $\overset{\Delta}{knj} \sim \overset{\Delta}{mkj}$

17) Dado el paralelogramo abrq con la diagonal qb y el segmento af que se intersecan en h , demuestra que qh . hf = hb . ah

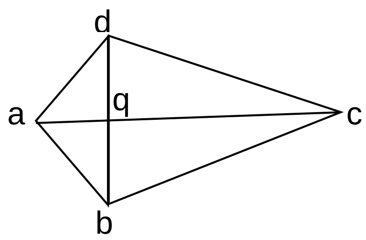


18) En la figura si $\overline{db} \perp \overline{ac}$ y dq = bq = 2 aq = $\frac{1}{2}$ qc, demuestra que:

a) $\overset{\Delta}{aqd} \sim \overset{\Delta}{dqc}$

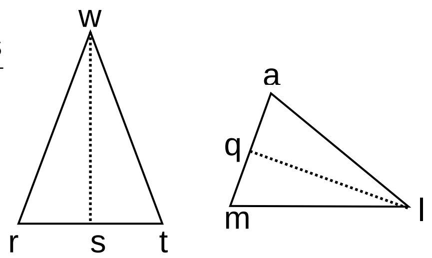
b) $\overset{\Delta}{bqc} \sim \overset{\Delta}{aqd}$

c) $\overline{ad} \perp \overline{dc}$

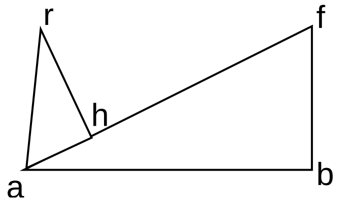


19) En las figuras ws y lq son medianas y $\frac{rw}{al} = \frac{rt}{am} = \frac{ws}{lq}$

Demuestra que $\overset{\Delta}{rwt}$ y $\overset{\Delta}{alm}$ son semejantes.

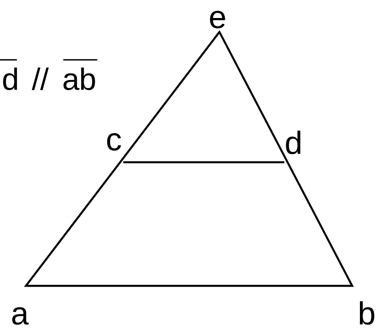


20) Dada esta figura, en la que $\overline{ra} \perp \overline{ab}$; $\overline{fb} \perp \overline{ab}$; $\overline{rh} \perp \overline{af}$



Demuestra que $\overset{\Delta}{hra} \sim \overset{\Delta}{baf}$ y
hr . bf = ha . ba

21) Dado $\hat{a} = \hat{b}$ y ac = db demuestra que $\overline{cd} \parallel \overline{ab}$



Semejanza de triángulos rectángulos.

En los triángulos rectángulos tenemos la ventaja de conocer uno de sus ángulos (el ángulo recto). Esto hace que en este tipo de triángulos existan propiedades particulares.

Propiedades.

- **a)** Demuestra que si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo respectivamente congruentes, entonces son semejantes
- **b)** Demuestra que en todo triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa determina en el triángulo dos triángulos semejantes entre sí y también semejantes al original.
- **c)** En todo triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa es medio proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa. Justifica.
- **d)** En todo triángulo rectángulo cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección ortogonal de dicho cateto sobre ella. Justifica.

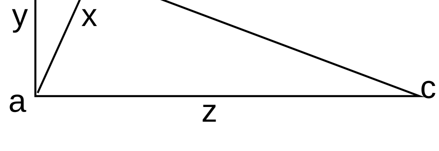
ACTIVIDADES

22) Demuestra que en triángulos semejantes las alturas homólogas son directamente proporcionales a las bases respectivas.

23) Demuestra que la razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de un par de lados homólogos cualesquiera.

24) Datos: $\overset{\Delta}{abc}$ con $\hat{a} = 1$ Recto $\overline{bc} \perp \overline{am}$
a) mc = 5 y bm = 4. Halla: x, y, z

b) ab = 12 y bm = 8. Halla: x; mc y z

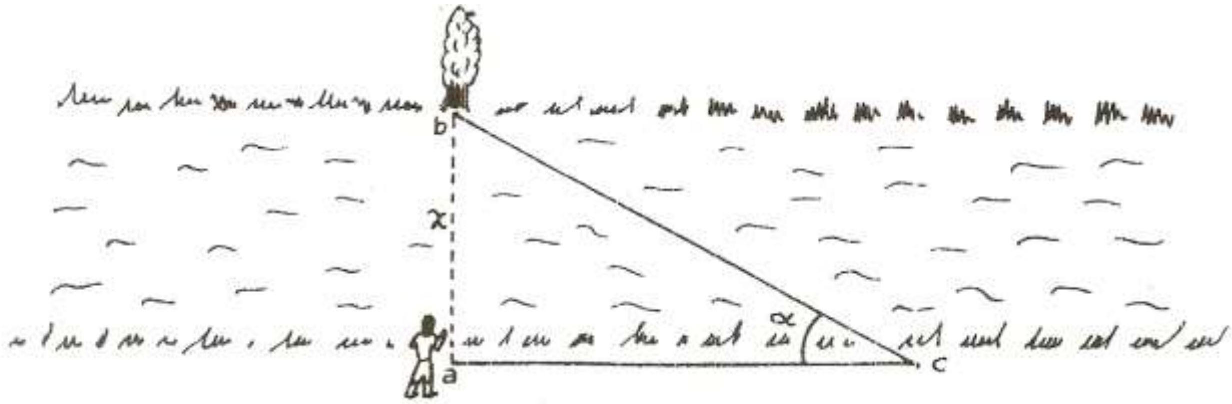


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Lee atentamente la siguiente situación:

PROBLEMA MOTIVADOR:

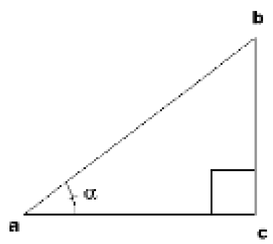
Estamos en la orilla de un río y deseamos medir el ancho del mismo, para ello elegimos un objeto(en este caso un árbol como muestra el dibujo) que se encuentra a la mínima distancia, en la orilla de enfrente y nos movemos a lo largo de la orilla una distancia de 100 m y desde allí con referencia al objeto obtenemos un ángulo $\hat{\alpha} = 24º$. Con estos datos calcula el ancho del río.



Antes que comiences a resolverlo, nos parece oportuno que precisemos algunos conceptos.
A partir del gráfico que esquematiza el problema planteado, observarás que queda determinado el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ rectángulo en $\hat{a}$.

Para resolver situaciones de este tipo es necesario recurrir a relaciones que vinculen ***lados y ángulos*** de un triángulo y así encontrar los elementos desconocidos del mismo. Esto se conoce con el nombre de ***Resolución de triángulos rectángulos***; situaciones de este tipo dieron comienzo a esta rama de la Matemática llamada **TRIGONOMETRÍA**

En primer lugar es conveniente darles nombres a algunos elementos que componen el triángulo rectángulo.

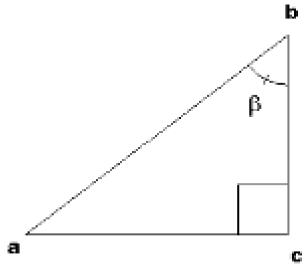


Llamamos:

- Cateto adyacente con referencia al $\hat{\alpha}$ del $\overset{\Delta}{abc}$ al segmento $\overline{ac}$.
- Cateto opuesto con referencia al $\hat{\alpha}$ del $\overset{\Delta}{abc}$ al segmento $\overline{bc}$.
- Hipotenusa del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ al segmento $\overline{ab}$.

Observación:
La hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre el lado opuesto al ángulo recto.

En base a lo expuesto y considerando el $\overset{\Delta}{abc}$,completa:



En el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$, con referencia al $\hat{\beta}$, se llama:

- Cateto opuesto al segmento …………………..
- Cateto adyacente al segmento ………………….
- Hipotenusa al segmento ………………….

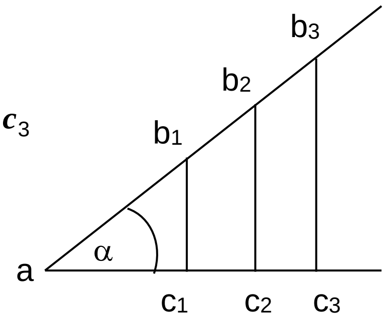
DEFINICIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.

Consideremos un ángulo $\hat{a}$ cualquiera agudo.

Sean $\overset{\Delta}{ab_1c_1}$; $\overset{\Delta}{ab_2c_2}$; $\overset{\Delta}{ab_3c_3}$ algunos de los triángulos rectángulos que podemos construir según indicamos en la figura, con $\hat{a}$ ángulo común y b_1 ; b_2 ; b_3 ; c_1 ; c_2 ; c_3 puntos pertenecientes a los lados de dicho ángulo:

Según hemos visto, resulta:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{ab_1c_1}} \sim \overset{\Delta}{\boldsymbol{ab_2c_2}} \sim \overset{\Delta}{\boldsymbol{ab_3c_3}}$$



Entonces, las medidas de sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1c_1}{ab_1} = \frac{b_2c_2}{ab_2} = \frac{b_3c_3}{ab_3} = k_1$$
$$\frac{ac_1}{ab_1} = \frac{ac_2}{ab_2} = \frac{ac_3}{ab_3} = k_2$$
$$\frac{b_1c_1}{ac_1} = \frac{b_2c_2}{ac_2} = \frac{b_3c_3}{ac_3} = k_3$$

Cada una de esta serie de razones iguales, que son independientes de los triángulos considerados y que sólo varían si varía $\hat{a}$, reciben nombres especiales.
Así:

$$k_1 = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{a}}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = \text{ seno de } \hat{a} = sen\ \hat{a}$$

$$k_2 = \frac{medida\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{a}}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = \text{ coseno de } \hat{a} = \cos \hat{a}$$

$$k_3 = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{a}}{medida\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{a}} = \text{tangente de } \hat{a} = tg\ \hat{a}$$

A tales expresiones: $sen\ \hat{a}$; $\cos \hat{a}$; y $\mathrm{tg}\, \hat{a}$ se las denomina **RAZONES TRIGONOMETRICAS DE** $\hat{a}$.

ACTIVIDADES

25) El seno y el coseno de un ángulo agudo; ¿son números:
- menores que 1? ¿Cuándo? Justifica.
- mayores que 1? ¿Cuándo? Justifica.

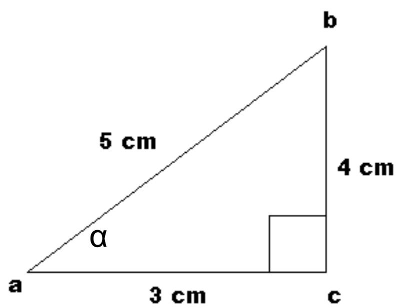
26) ¿ Qué valores puede asumir la tangente de un ángulo agudo ?Justifica

27) De acuerdo a los datos de la figura, completa:

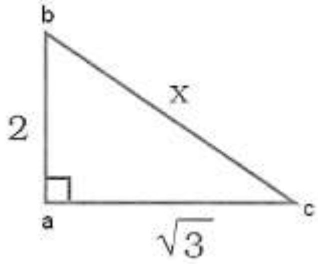
sen $\hat{a}$ =

cos $\hat{a}$ =

tg $\hat{a}$ =

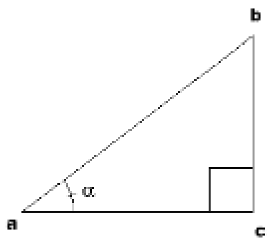


28) Calcula x, y las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$



Propiedades.

a) Demuestra que $\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}}$



H) Sea $a\overset{\Delta}{b}c$ rectángulo en *b* y $\hat{\alpha}$ ángulo interior agudo.

T) $\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}}$

Demostración:

Sea $b\hat{a}c = \hat{\alpha}$,
$$\frac{\operatorname{sen}\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}} \underset{\boxed{(1)}}{=} \frac{\frac{bc}{ab}}{\frac{ac}{ab}} \overset{\boxed{(2)}}{=} \frac{bc}{ab}\cdot\frac{ab}{ac} \underset{\boxed{(3)y(4)}}{=} \frac{bc}{ac} \overset{\boxed{(5)}}{=} \operatorname{tg}\hat{\alpha}$$

(1) Definición de $\operatorname{sen}\hat{\alpha}$ y $\cos\hat{\alpha}$

(2) Algebra de la división.

(3) $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{w}{z} = \dfrac{x\,.\,w}{y\,.\,z}$ $\quad \forall\, x;\, w \in R\,;\, y \neq 0;\, z \neq 0$

(4) $\dfrac{x\,.\,y}{z\,.\,y} = \dfrac{x}{z}$ $\quad \forall\, x; \in R\,;\, y \neq 0;\, z \neq 0$ ·

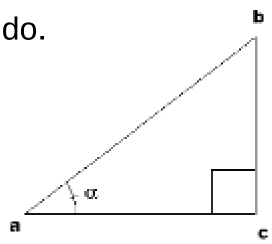
(5) Definición de $\operatorname{tg}\hat{\alpha}$

b) Demuestra que: $\operatorname{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = 1$

Observa que:
$(\operatorname{sen}\hat{a})^2 = \operatorname{sen}^2\hat{a}$

H) Sea $a\overset{\Delta}{b}c$ rectángulo en *b* y $\hat{\alpha}$ ángulo interior agudo.

T) $\operatorname{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = 1$



Demostración

Sea $b\hat{a}c = \hat{\alpha}$,

$$\operatorname{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} \overset{\boxed{(1)}}{=} \left(\frac{bc}{ab}\right)^2 + \left(\frac{ac}{ab}\right)^2 \underset{\boxed{(2)}}{=} \frac{bc^2}{ab^2} + \frac{ac^2}{ab^2} \overset{\boxed{(3)}}{=} \frac{bc^2 + ac^2}{ab^2} \underset{\boxed{(4)}}{=} \frac{ab^2}{ab^2} \overset{\boxed{(5)}}{=} 1$$

(1) Definición de $\operatorname{sen}\hat{\alpha}$ y $\cos\hat{\alpha}$
(2) Propiedad distributiva de la potenciación respecto al cociente.
(3) Suma de expresiones racionales.
(4) Teorema de Pitágoras.
(5) $\frac{x}{x} = 1 \quad \forall\, x; \neq 0$.

29) Utilizando lo demostrado en los ejercicios 29 y 30 , completa:

a) sen $\hat{\alpha}$ = 0,25 $\Rightarrow$ cos $\hat{\alpha}$ = ... tg $\hat{\alpha}$ = ...

b) cos $\hat{\beta}$ = $\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ sen $\hat{\beta}$ = ... tg $\hat{\beta}$ = ...

30) Usando tu calculadora, resuelve:

a) sen 17º + sen 73º =

b) cos 46º + cos 45º =

c) sen 23º 15’ 42’’ =

d) cos 35º 17’ 33’’ =

e) tg 63º 7’ 21’’

31) Calcula el ángulo agudo en cada caso:

a) cos α = 0,7649 $\Rightarrow$ α =

b) sen β = 0,5621 $\Rightarrow$ β =

c) tg γ = 2,1255 $\Rightarrow$ γ =

d) sen δ = 0,2134 $\Rightarrow$ δ =

e) cos ω = 0,1425 $\Rightarrow$ ω =

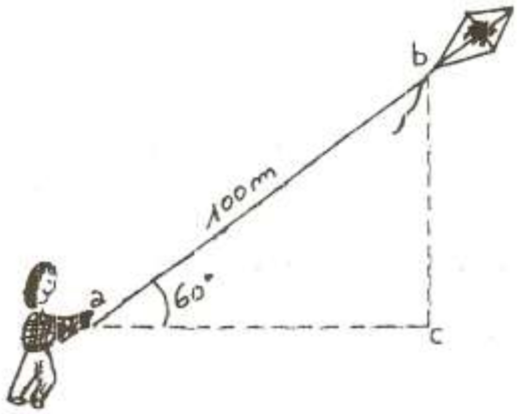
f) tg ε = 5,2314 $\Rightarrow$ ε =

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

PROBLEMA Nº 1

Te proponemos los siguientes problemas donde en alguno de ellos contarás con nuestra ayuda:

> Te encuentras en el parque remontando un barrilete, has soltado ya 100 m de hilo y observas que el ángulo $\hat{\alpha}$ que forma la cuerda del barrilete con la horizontal es de 60º. ¿A qué altura se encuentra dicho barrilete respecto de tu mano?



Observamos que nos queda determinado un triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ rectángulo en $\hat{c}$.
Identifiquemos los elementos de dicho triángulo.

ab	Medida de la hipotenusa.
ac	Medida del cateto adyacente a $\hat{\alpha}$.
cb	Medida del cateto opuesto a $\hat{\alpha}$.

El problema nos pide calcular la altura respecto a la mano del niño, es decir la medida del segmento cb (la medida del cateto opuesto a $\hat{\alpha}$).
Veamos los datos:

ab = 100 (con respecto al metro).
$\hat{\alpha}$ = 60º
$cb = x$

¿En cuáles de las relaciones definidas anteriormente interviene la incógnita? ……………

……………………………………………………………………………………………………….

Seguramente pensaste en las funciones trigonométricas seno $\hat{\alpha}$ y tangente $\hat{\alpha}$.

- Consideremos la $tg\ \hat{\alpha} = \frac{cb}{ac}$. Observamos que son dos las incógnitas, cb y ac, luego esta ecuación no te permitirá encontrar cb.

- Consideremos el $sen\ \hat{\alpha} = \dfrac{cb}{ab}$. Observamos que la única incógnita es cb, planteamos entonces la ecuación:

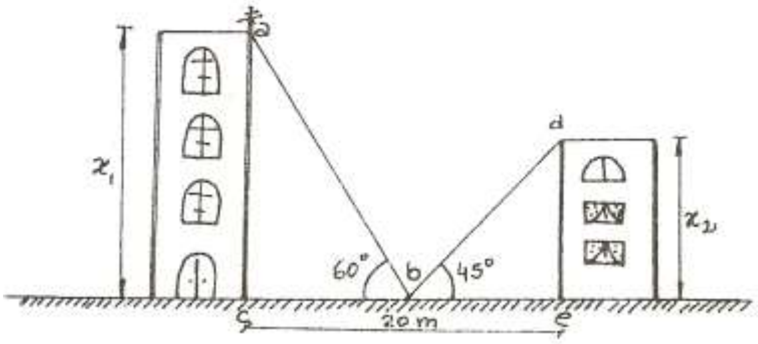
$$sen\ 60^{o} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = ...$$

El barrilete se encuentra a ………………………………………..respecto de la mano del niño.

Te proponemos el siguiente desafío:

PROBLEMA Nº 2

El ancho de una calle es de 20 metros. Si te colocas en el centro de la misma podrás observar los edificios que están situados a ambos lados. Al medir los ángulos que forman las visuales con los puntos más altos de los edificios y la horizontal, resultan de 45º y 60º respectivamente. ¿Cuál es la altura correspondiente a cada uno de los edificios?



Para esta situación observa los triángulos rectángulos: $\overset{\Delta}{acb}$ y $\overset{\Delta}{bed}$ rectángulos en $\hat{c}$ y $\hat{e}$ respectivamente; así:

- en el triángulo $\overset{\Delta}{acb}$ rectángulo resulta:
  $c\hat{b}a = 60^{o}$
  $cb = 10$ (con respecto al metro)
  $ac = x_1$

¿En cuáles de las relaciones trigonométricas vistas anteriormente interviene la incógnita?
…………………………………………………………………………………………………….....

Seguramente pensaste en las funciones trigonométricas seno $\hat{\alpha}$ y tangente $\hat{\alpha}$.
De estas dos, para continuar tu trabajo te quedas con ………………… porque …………..

……………………………………………………………………………………………………

A continuación completa:

$$tg\ 60^{o} = ------------ \Rightarrow ac = -------- \Rightarrow x_1 = --------$$

De la misma forma procede a calcular x_2.

ACTIVIDADES

32) Resuelve el problema motivador de página 13.

33) Si la sombra de una columna de alumbrado público es la mitad de su altura en un momento del día. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal?

34) En un triángulo isósceles cuya base tiene una longitud de 5cm y ángulo opuesto a ella de 30º; encuentra:
a) la altura del triángulo con respecto a dicha base.
b) las alturas correspondientes a los lados congruentes.

35) Calcula la cantidad de superficie del triángulo isósceles en cada caso:
a) Sabiendo que los ángulos congruentes miden respectivamente 43º 28' y la altura correspondiente al lado no congruente es de 25 cm.
b) Sabiendo que el ángulo no congruente es de 52º 30' y la altura correspondiente a uno de sus dos lados congruentes es de 15 cm.

36) Calcula la altura de un faro que se encuentra alejado de un acantilado. Desde un barco se toman las medidas del ángulo que forma la visual con la luz y la horizontal, es de 70º. Luego retrocede 40 metros y el ángulo que forma ahora con la visual es de 50º.

37) Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50º con el suelo.

38) En un triángulo isósceles no equilátero, el lado desigual mide 10 cm y los ángulos congruentes miden 70º. Calcula su área y su perímetro.

39) Halla el ángulo de elevación de un globo aerostático que recorre 459 m en el aire para subir 450 m.

40) Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm respectivamente.

41) Calcula el perímetro de un paralelogramo sabiendo que su cantidad de superficie es de 360 m^2, la altura de 7,2 m y uno de sus ángulos es de 50º.

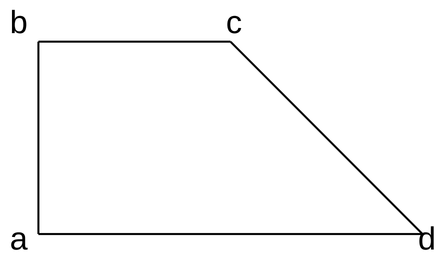
42) Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 metros de la pared?

43) <u>Datos</u>: $abcd$ trapecio rectángulo en $b\hat{a}d$.

$\overline{cd} = 4\ m$

Triángulo $\overset{\triangle}{acd}$ isósceles con $\overline{ac} = \overline{cd}$.

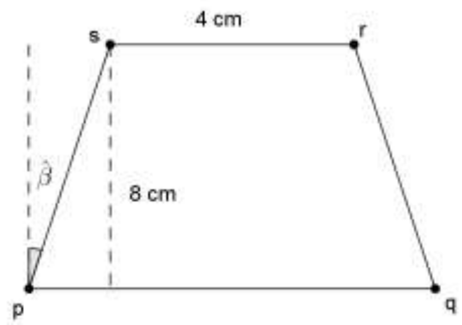
$c\hat{d}a = 35º\ 43'$



<u>Calcula</u>: Cantidad de superficie del $abcd$.

44) ¿A qué distancia del observador se encuentra un avión, si lo ve bajo un ángulo de 50º de elevación con respecto al horizonte cuando está a una altura de 400m?

45) Si *pqrs* es un trapecio isósceles de 8 cm de altura y 4 cm de base menor. ¿Cuál es la longitud de la base mayor? ($\hat{\beta}$ = 15º).

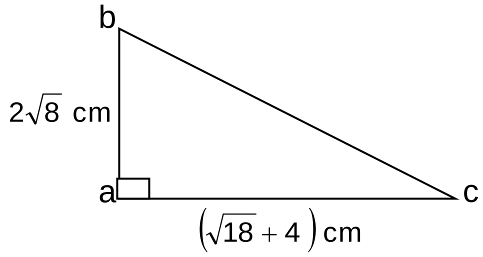


<u>Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo</u>
Autores : Prof. J. C. Bue – Prof. D. Candio – Prof. N. Lagreca – Prof. M L. Martínez

MÁS ACTIVIDADES

1) En el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{mpq}$ con $\overline{mp} = \overline{pq}$ la medida de la base es $\sqrt{8}$ cm y la superficie es de 4 cm^2 .Calcula la altura respecto de la base y la medida de los ángulos del triángulo. (Utiliza valores exactos para efectuar los cálculos)

2) Selecciona la respuesta correcta. Justifica



a) La superficie del $\overset{\Delta}{abc}$ es:

i) 28 cm^2 ii) $(7\sqrt{2}+4)\text{cm}^2$ iii) $(16\sqrt{2}+24)\text{cm}^2$ iv) $(8\sqrt{2}+12)\text{cm}^2$

b) La $\text{tg}\,\hat{b}$ es :

i) $\sqrt{2}+12$ ii) $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4}$ iii) $\frac{7}{2}$ iv) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

Respuestas:

1) a) $\frac{cb}{ct}$ **b)** $\frac{cb}{tb}$ **c)** $\frac{ct}{tb}$ **d)** $\frac{ah}{hc}$ **e)** $\frac{cb}{ca}$ **f)** $\frac{ct}{ch}$

2) a) ab = 5 **b)** af = 8 **c)** bf =13,5

3) a) $\frac{x}{y}$ **b)** $\frac{x+y}{x}$ **c)** $\frac{a}{x}$ **d)** $\frac{b}{y}$ **e)** $\frac{x+y}{y}$ **f)** $\frac{y}{b}$

4) $\overleftrightarrow{pq}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{ab}$

5) Perímetro = 19,5 cm

6) ac = 1,5 cm

7) y 8) A CARGO DEL ALUMNO

9) $\overleftrightarrow{pq} // \overleftrightarrow{bc}$

10) pq = 7cm; mp = 4cm

11) Distancia del correo a la escuela: 746,21 m

12) $ac = \left(\frac{7}{5}\sqrt{5} + 1\right)cm$

13) a) no **b)**no **c)**sí **d)**no

14) al 23) A cargo del alumno

24) a) $x = 2\sqrt{5}$ cm, $y = 6$ cm, $z = 3\sqrt{5}$ cm

b) $x = 4\sqrt{5}$ cm, $mc = 10$ cm, $ac = 6\sqrt{5}$ cm

25) $0 < sen\left(\hat{\alpha}\right) < 1, \quad 0 < cos\left(\hat{\alpha}\right) < 1$

26) $tg\left(\hat{\alpha}\right) \in R^+$ si $0 < \hat{\alpha} < 90º$

27) $sen\left(\hat{a}\right) = \frac{4}{5}, \; cos\left(\hat{a}\right) = \frac{3}{5}, \; tg\left(\hat{a}\right) = \frac{4}{3}$

28) $x = \sqrt{7}$ - $sen\left(\hat{b}\right) = \frac{\sqrt{21}}{7}, \; cos\left(\hat{b}\right) = \frac{2}{7}\sqrt{7}, \; tg\left(\hat{b}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen\left(\hat{c}\right) = \frac{2}{7}\sqrt{7}, \; cos\left(\hat{b}\right) = \frac{\sqrt{21}}{7}, \; tg\left(\hat{b}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

29) y 30) A cargo del alumno

31) a) $\cos\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\operatorname{tg}\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{15}}{15}$

b) $\operatorname{sen}\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sqrt{24}}{5}$; $\operatorname{tg}\left(\hat{\beta}\right) = \sqrt{24}$

32) a) 1,25 **b)** 1,4 **c)** 0,39 **d)** 0,82 **e)** 1,97

33) a) 40º6'6'' **b)** 34º12'4'' **c)** 64º48'14'' **d)** 12º19'18'' **e)**81º48'26'' **f)**79º10'41''

34) $\text{altura} = 44{,}52\text{m}$

35) $\hat{\alpha} = 63^{\circ}\,26'\,58''$

36)a) $\text{altura} = 9{,}33\,\text{cm}$ **b)** $\text{altura} = 4{,}83\,\text{cm}$

37) a) $659{,}38\,\text{cm}^2$ **b)** $141{,}8\,\text{cm}^2$

38) $\text{altura} = 83{,}83\ \text{m}$

39) $\text{altura de la torre} = 15{,}49\ \text{m}$

40) $\text{Área} = 68{,}69\,\text{cm}^2$ $\text{Perímetro} = 39{,}24\,\text{cm}$

41) $\text{Ángulo de elevación} = 78^{\circ}\ 38'\ 6'',44$

42) Los ángulos son 112º 37' 11'',5 y 67º 22' 48'',49

43) $\text{Perímetro} = 118{,}8\ \text{m}$

44) La inclinación de la escalera es de 60º

45) $\text{Superficie abcd} = 11{,}38\,\text{cm}^2$

46) Distancia = 522,16 m

47) Longitud base mayor=8,29cm