

Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura



Tesis Doctoral

Establecimiento de una herramienta para la redefinición del sistema de alturas de Costa Rica mediante la obtención de un geoide gravimétrico estático.

Ing. Mauricio Varela Sánchez

Directora: Dra. Ayelen Pereira
Co-Directora: Dra. María Cristina Pacino

Miembros del Jurado:

Dra. Silvia Miranda
Dr. Ezequiel Pallejá
Dra. Ana Cristina Oliveira Cancoro de Matos

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al título de

Doctor en Ingeniería

Abril de 2018

Certifico que el trabajo incluido en esta tesis es el resultado de tareas de investigación originales y que no ha sido presentado para optar a un título de postgrado en ninguna otra Universidad o Institución.

Mauricio Varela Sánchez

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres María Esther y Mario, por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo a través del tiempo, a mis hermanos Adriana, Mario, Lilliana, José, Alejandro quienes siempre me apoyaron y motivaron, a mis dos ahijadas Fiorella e Isabella cuyo amor y apoyo son motivación para mí. Y a mis sobrinos Javier, Tiffany, Matías y Mariangel a quienes quiero y son uno de mis motivos de superación.

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero, profundo y especial agradecimiento a mi Directora de Tesis Dra. Ayelen Pereira y a mi Co-Directora Dra. María Cristina Pacino, por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para la concreción de este trabajo. Por la oportunidad brindada, orientación, apoyo y confianza, ¡Muchas Gracias por todo!

Un agradecimiento especial a una gran profesora, Ana Cristina Oliveira Cancoro de Matos, quien a través de este periodo me enseñó, ayudó, apoyó y siempre estuvo cerca a la distancia para guiarme en este trabajo, por su generosa voluntad de cooperación desinteresada y muchas gracias por sus recomendaciones.

A Cecilia Cornero, que siempre me apoyó, su buena voluntad, compromiso de ayudar y solidaridad estuvieron siempre presentes.

A los miembros del Jurado, por la disposición, cooperación y las contribuciones realizadas a este trabajo de Tesis.

A la Universidad de Costa Rica, la Facultad de Ingeniería y la Escuela de Ingeniería Topográfica, quienes hicieron posible esta realidad mediante la beca otorgada.

A Juan Antonio Picado Salvatierra y Juan Araque Skinner quienes me dieron su confianza y apoyo para iniciar mis estudios de doctorado.

A la Universidad Nacional de Rosario, la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura y en especial a la Escuela de Posgrado y Educación Continua que me aceptaron como estudiante de esta institución y me brindaron los espacios y facilidades para llevar a cabo esta investigación.

A Gabriela Cordero Gamboa y a mi tío Manuel Sánchez Ruiz, por la confianza depositada en mi persona, por su apoyo y sus palabras de aliento que me dieron motivación en la realización de esta investigación.

A mis padres, hermanos y sobrinos, por todo el apoyo brindado a lo largo de toda mi vida, por ser mi principal fuente de inspiración y amor, gracias por todo.

A mis abuelos maternos y paternos, a todos mis tíos, mis primos y toda la familia en general, gracias por sus palabras de aliento y su apoyo incondicional.

A todas las personas que de una u otra manera me ayudaron y me inspiraron a seguir adelante en mi vida y en especial en este proyecto.

RESUMEN

La superficie del geoide es una superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre, de gran importancia para la Geodesia. Su determinación se ha convertido en uno de los objetivos fundamentales, para dar lugar a una solución del problema altimétrico. Esta problemática es considerada en el contexto del modelado del campo de gravedad terrestre, ya que todos los métodos de cálculo involucran su conocimiento.

Uno de los objetivos de este trabajo es el estudio y cálculo de modelos de geoide estáticos que puedan servir como base para la redefinición del sistema altimétrico de Costa Rica. Siendo ésta el área geográfica de estudio, a modo de comparar y validar la metodología de cálculo se determinó trabajar en la región de la Mesopotamia Argentina.

Se calcularon 4 modelos de geoide para Costa Rica, y 4 para la Mesopotamia Argentina. Se utilizó el modelo de terreno SAM3s_v2 y el modelo de mareas oceánicas DTU10 para completar y calcular las anomalías gravimétricas, junto con observaciones terrestres. Los modelos de geopotencial global GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 y EIGEN6C4, aportaron las contribuciones de larga longitud de onda en el cálculo por medio de la técnica Remove – Restaurar, limitados hasta un cierto grado y orden.

Los modelos calculados resultaron consistentes de acuerdo a la metodología ejecutada, la cual ha sido probada con muy buenos resultados en distintas regiones. Debido a que en Costa Rica los datos de altura ortométrica y GPS son escasos y con una distribución muy heterogénea, no se realizó un análisis estadístico, ya que el mismo no sería representativo. Por otro lado, en la Mesopotamia Argentina el modelo basado en DIR_R5 ($n=m=200$), presentó un RMS de 32 cm, resultando el mejor de entre todos los modelos, y un valor medio de 12 cm en el análisis estadístico. Los modelos calculados presentaron una resolución de 5'.

Por otra parte, es importante mencionar que la gravedad en la superficie terrestre no permanece constante, sino que varía con el tiempo en función de los cambios de masas que se pueden presentar. Se realizó entonces una interpretación geodinámica de las variaciones temporales del geoide mediante datos de la misión satelital GRACE, asociándolos con variaciones de masas en sub-superficie. Estas variaciones fueron analizadas y comparadas con otras informaciones para determinar posibles causas de los cambios de las mismas. GRACE detectó los cambios producidos por la transición de las estaciones seca y lluviosa en Costa Rica, además de las afectaciones al almacenamiento de agua que pueden producir fenómenos relacionados con el cambio climático.

SUMMARY

The surface of the geoid is an equipotential surface of the terrestrial gravity field and of great importance for Geodesy. Its determination has become one of the fundamental objectives to reach a solution for the altimetric problem. This problem can be considered in the context of the modeling of the terrestrial gravity field, since all calculation methods involve their knowledge.

One of the objectives of this work is the study and calculation of static geoid models that can serve as a basis for the redefinition of the altimetric system of Costa Rica.

Furthermore, in order to compare and validate the calculation methodology, it was determined to work also in the region of the Argentinean Mesopotamia.

Four geoid models were calculated for Costa Rica, and 4 for the Argentinean Mesopotamia. The SAM3s_v2 terrain model and the DTU10 ocean tide model were used to complete and calculate the gravimetric anomalies, along with terrestrial observations. The global geopotential models GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 and EIGEN6C4, limited to a certain degree and order, provided the contributions of long wavelength in the calculation by means of the technique Remove - Restore.

The calculated models were consistent according to the implemented methodology, which has been proven with very good results in different regions. Since the orthometric and GPS height data are sparse and with a very heterogeneous distribution in Costa Rica then no statistical analysis was performed, because it would not be representative. On the other hand, in the Argentinean Mesopotamia the model based on DIR_R5 ($n = m = 200$), presented a RMS of 32 cm, resulting the better model, and an average value of 12 cm in the statistical analysis. The calculated models presented a resolution of 5 '.

On the other hand, it is important to mention that gravity does not remain constant in the Earth's surface, but varies with time depending on the changes of mass that may occurred. Therefore, a geodynamic interpretation of the temporal variations of the geoid was also performed using data from the GRACE satellite mission, associating them with sub-surface mass variations. These variations were analyzed and compared with other information to determine possible causes of those changes. GRACE detected the changes produced by the transition of the dry and rainy seasons in Costa Rica, together with the effects on the water storage that can produce phenomena related to the climate change.

LISTADO DE FIGURAS

Figura	Página
Figura 2.1. . Esquema de atracción gravitacional entre dos masas (m_1 y m_2) separadas por una distancia l	4
Figura 2.2. Partículas de masa y vector F, representados en un sistema cartesiano.....	5
Figura 2.3. Geoide, Elipsoide de referencia y ondulación geoidal (N) (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).	9
Figura 2.4. Coordenadas esféricas y rectangulares del punto P.	11
Figura 2.5. Tipos de armónicos esféricos: (a) zonal, (b) sectorial, (c) teseral (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).....	13
Figura 2.6. Superficies de referencia y alturas.	17
Figura 2.7. Reducción de Aire libre.	19
Figura 2.8. Placa de Bouguer y corrección topográfica.	20
Figura 2.9. Cantidades involucradas en el espacio real y de Helmert (Ellmann & Vaníček, 2007).	29
Figura 2.10. Medición de segmentos de arco, Satélite LAGEOS (Rummel 2010).....	37
Figura 2.11. Seguimiento de satélite a satélite CHAMP-GPS y láser SLR (Förste, 2015).....	38
Figura 2.12. Gradiómetro electrostático de gravedad (Fehring et al., 2008).....	40
Figura 2.13. Misión satelital GRACE (Förste et al., 2016).....	41
Figura 3.1. Ubicación geográfica de Costa Rica.	45
Figura 3.2. Ubicación de principales cordilleras de Costa Rica (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Costa_Rica_Topography.png?uselang=es).	46
Figura 3.3. Ubicación geográfica de la Mesopotamia Argentina.	48
Figura 3.4. Ejemplo de Ficha analógica.	50
Figura 3.5. Distribución de puntos con información gravimétrica utilizados en el cálculo para Costa Rica y otros países.....	51
Figura 3.6. Distribución geográfica de las estaciones gravimétricas de la Mesopotamia Argentina.....	53
Figura 3.7. Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2 (Blitzkow et al., 2009).	54
Figura 3.8. Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2 para: a) Costa Rica; b) Mesopotamia Argentina.....	56
Figura 3.9. Anomalía de Aire Libre obtenida del Modelo DTU10 para Costa Rica.....	57

Figura 3.10. Anomalía de Aire Libre obtenida del Modelo DTU10 para la Mesopotamia Argentina.....	58
Figura 3.11. Modelo de Geoide EIGEN-6C4 (ICGEM).	62
Figura 3.12. Esquema de datos que contribuyen la composición de EIGEN-6C4 (Förste et al., 2014).	63
Figura 3.13. Modelo de Geoide GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 (ICGEM).....	64
Figura 3.14. Error de comisión entre los MGG EIGEN-6C4 Y DIR_R5.	65
Figura 3.15. Modelo de Geoide EGM2008 (ICGEM).	66
Figura 3.16. Modelo de Geoide XGM2016 (ICGEM).....	67
Figura 3.17. Puntos con alturas elipsoidales y de nivelación ($N_{GPS-NIV}$) en Costa Rica.	69
Figura 3.18. Puntos con alturas elipsoidales y de nivelación ($N_{GPS-NIV}$) en la Mesopotamia Argentina.....	69
Figura 3.19. Pasadas terrestres de los satélites con sensor altimétrico sobre las estaciones virtuales del Lago de Nicaragua y del Lago Managua, (Hydroweb).	72
Figura 3.20. Serie temporal de precipitación media mensual TRMM en mm/mes para Costa Rica, período Agosto 2002 a Junio 2016, (GIOVANNI).....	73
Figura 4.1. Metodología de cálculo del paquete de programas canadiense SHGEO (Ellmann, 2005).	75
Figura 4.2. Mapa de Anomalías medias de Bouguer completa de Costa Rica en <i>mGal</i>	77
Figura 4.3. Mapa de Anomalías medias de Aire libre de Costa Rica en <i>mGal</i>	78
Figura 4.4. Efectos directos e indirectos de las masas topográficas y atmosféricas sobre la atracción gravitacional DTE (a), DAE (b), SITE (c), en <i>mGal</i>	79
Figura 4.5. Anomalía de Gravedad de Helmert para Costa Rica referida a la superficie terrestre, en <i>mGal</i>	80
Figura 4.6. Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE), en metros.	81
Figura 4.7. Modelos geoidales para Costa Rica en metros a partir del modelo DIR-R5 a (n,m=200); b (n,m=250) y del EIGEN-6C4 c (n,m=200); d (n,m=250).	82
Figura 4.8. Diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 (n=m=200) con respecto a: a) DIR_R5 (n,m=250); b) EIGEN-6C4 (n,m=200); c) EIGEN-6C4 (n,m=250).....	83
Figura 4.9. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (DIR_R5 n,m=200) y los MGG's: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	86
Figura 4.10. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c) XGM2016; d)EGM2008.	87
Figura 4.11. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	88

Figura 4.12. Histograma de las diferencias en Océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	89
Figura 4.13. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	90
Figura 4.14. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	91
Figura 4.15. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	92
Figura 4.16. Histograma de las diferencias en Océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	93
Figura 4.17. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	94
Figura 4.18. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c) XGM2016; d)EGM2008.....	95
Figura 4.19. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	96
Figura 4.20. Histograma de las diferencias en Océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	97
Figura 4.21. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	98
Figura 4.22. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.....	99
Figura 4.23. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c) XGM2016; d)EGM2008.	100
Figura 4.24. Histograma de las diferencias en Océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	101
Figura 4.25. Anomalía de Gravedad de Helmert para la Mesopotamia Argentina referida a la superficie terrestre, en <i>mGal</i>	103
Figura 4.26. Modelo geoidal para la Mesopotamia Argentina en metros a partir del modelo DIR-R5: a) n,m=200, b) n,m=250; y a partir del modelo EIGEN-6C4: c) n,m=200, d) n,m=250.	104
Figura 4.27. Diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 (n=m=200) con respecto a: a) DIR_R5 (n,m=250); b) EIGEN-6C4 (n,m=200); c) EIGEN-6C4 (n,m=250).....	105
Figura 4.28. Diferencias entre N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ en metros a partir del modelo DIR-R5: a) n,m=200, b) n,m=250; y a partir del modelo EIGEN-6C4: c) n,m=200, d) n,m=250.	107
Figura 4.29. Histogramas de frecuencia de las diferencias absolutas entre el N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ para la Mesopotamia Argentina.	108

Figura 4.30. Diferencias Modelo geoidal calculado para Mesopotamia Argentina (DIR_R5 n,m=200) y los MGG's: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	110
Figura 4.31. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para para Mesopotamia Argentina (DIR_R5 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.....	111
Figura 4.32. Diferencias Modelo geoidal calculado para Mesopotamia Argentina (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	112
Figura 4.33. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para para Mesopotamia Argentina (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.....	113
Figura 4.34. Diferencias Modelo geoidal calculado para Mesopotamia Argentina (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	114
Figura 4.35. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para para Mesopotamia Argentina (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	115
Figura 4.36. Diferencias Modelo geoidal calculado para Mesopotamia Argentina (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	116
Figura 4.37. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Mesopotamia Argentina (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c)XGM2016; d)EGM2008.	117
Figura 4.38. Tendencia de la gravedad en <i>mGal/año</i> para Costa Rica, período 2002-2016. ...	122
Figura 4.39. Amplitud de la gravedad en <i>mGal/año</i> para Costa Rica, período 2002-2016.	123
Figura 4.40. Comparación del EWH (GRACE) con Nivel de Agua de altimetría satelital, Lago Managua, Nicaragua.....	126
Figura 4.41. Comparación EWH (GRACE) con Nivel de Agua de altimetría satelital, Lago de Nicaragua, Nicaragua.	127
Figura 4.42. Series temporales período 2002-2016 de EWH de GRACE versus Precipitación (TRMM) en centímetros por año.	128
Figura 4.43. Serie Temporal de EWH de GRACE (cm/año) período 2002-2016 (Azul), recta de regresión lineal del EWH (Rojo).....	130
Figura 4.44. Serie Temporal de Precipitación TRMM (cm/año) período 2002-2016 (Azul), recta de regresión lineal (Rojo) de la Precipitación TRMM.	131
Figura 4.45. Espesor equivalente de agua para el mes de Mayo del año 2015 (<i>cm/mes</i>).....	132
Figura 4.46. Espesor equivalente de agua para el mes de Octubre del año 2011 (<i>cm/mes</i>).	133
Figura 4.47. Espesor equivalente de agua promedio para el período de Agosto del 2002 a Junio 2016 (<i>cm/mes</i>).	134

LISTADO DE TABLAS

Tabla	Página
Tabla 3.1. Subdivisiones de las expansiones del campo de la gravedad (Nicacio, 2017).....	59
Tabla 3.2. Expansiones del campo de la gravedad en función sólo del grado máximo (Nicacio, 2017).	60
Tabla 3.3. MGG's utilizados en el trabajo (ICGEM).....	62
Tabla 4.1. Valores máximos y mínimos de DAE, DTE, SITE.....	78
Tabla 4.2. Valores máximos y mínimos de la ondulación geoidal para cada modelo.....	82
Tabla 4.3. Valores máximos y mínimos de las diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 (n=m=200) respecto a los otros tres modelos calculados.	84
Tabla 4.4. Media, RMS y valores máximos y mínimos de la diferencia entre cada modelo calculado y los MGG's.....	102
Tabla 4.5. Valores máximos y mínimos de las diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 (n=m=200) respecto a los otros tres modelos calculados.	106
Tabla 4.6. Análisis estadístico de las diferencias absolutas entre el N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ para la Mesopotamia Argentina.	109
Tabla 4.7. Media y valores máximos y mínimos de la diferencia entre cada modelo calculado y los MGG's.....	118
Tabla 4.8. Soluciones mensuales RL03-v3 del GRGS sin archivos de soluciones armónicas esféricas disponibles.....	120
Tabla 4.9. Índice ONI, para los fenómenos de El Niño y La Niña.	129

LISTADO DE ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

CNES/GRGS	Centre National d'Études Spatiales, Toulouse/ Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale
CHAMP	CHALLENGING Minisatellite Payload
CR	Costa Rica
CSR	Center for Space Research
DAE	Direct Effect Atmospheric
DIR	Direct Approach
DISERGEMIL	DIRECCIÓN del SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR de Paraguay
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
DTE	Direct Topographic Effect
DTU10	Modelo de Altimetría de Satélite del Danish National Space Center
EGGc	European GOCE Gravity consortium
EGM1996	Earth Gravitational Model 1996
EGM2008	Earth Gravitational Model 2008
EIGEN-6C4	European Improved Gravity model of the Earth by New techniques
ENVISAT	ENVIRONMENTAL SATellite
ERS 1 y 2	European Remote sensing Satellite 1 y 2
EWH	Equivalent Water Height
FES2004	Finite Element Solutions2004
FFT	Fast Fourier Transform
GFO	GEOSAT Follow-On
GFZ	Deutsches GeoForschungsZentrum
GIOVANNI	Goddard Earth Sciences, Data and Information Services Center - GES DISC- Interactive Online Visualization and Analysis Infrastructure

GMT	Generic Mapping Tools software
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GOCE	Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer
GOHS/LEGOS	Équipe Géodésie, Océanographie et Hydrologie Spatiales / Laboratoire d'Etudes en Géophysique et Océanographie Spatiale
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GRGS	Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia y Estadística
ICGEM	International Centre for Global Earth Models
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IGN-Ar	Instituto Geográfico Nacional de Argentina
IGN-CR	Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica
ISDC	Information System & Data Center
JAXA	Japan Aerospace Exploration Agency
JPL	Jet Propulsion Laboratory
KBRR	K-Band Range Rate
LAGEOS	LAser GEOdynamic Satellite
LANDSAT	Earth Observation Satellites
MDT	Modelo Digital de Terreno
MGG	Modelo Geopotencial Global
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration
ONI	Oceanic Niño Index
PITE	Primary Indirect Topographical Effect
PO.DAAC	Physical Oceanography Distributed Active Archive Center
PRARE	Precise Range and Range-Rate Equipment

PVCG	Problema de Valor de Contorno de la Geodesia
RDC	Raw Data Center
SAM3s_v2	South American Digital Terrain Model 3s_v2
SDS	Science Data System
SGM	Servicio Geográfico Militar de la República Oriental del Uruguay
SHGEO	Stokes-Helmert GEOid Software
SITE	Secondary Indirect Topographical Effect
SLR	Satellite Laser Ranging
SRTM	Shuttle Radar Topography Mission
Theia	Data and services for land surfaces
TRMM	Tropical Rainfall Measuring Mission

ÍNDICE

- PORTADA
- DEDICATORIA
- AGRADECIMIENTOS

RESUMEN.....	I
SUMMARY.....	II
LISTADO DE FIGURAS.....	III
LISTADO DE TABLAS.....	VII
LISTADO DE ABREVIATURAS Y SIMBOLOS.....	VIII
INDICE.....	XI

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Consideraciones Generales.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Estructura del Trabajo	3
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	4
2.1. Potencial Terrestre.....	4
2.2. Campo de Gravedad normal, Potencial Real, Potencial Normal y Potencial Perturbador	7
2.3. Funciones armónicas esféricas	10
2.4. El Problema de Valor de Contorno de la Geodesia Física (PVCG).....	14
2.4.1. Formulación de Stokes, o formulación Clásica.....	15
2.4.2. Formulación de Molodensky o formulación moderna	16
2.5. Reducciones y Anomalías Gravimétricas.....	18
2.6. Determinación del Geoide y la Integral de Stokes	21
2.6.1. Modificación del Núcleo de Stokes.....	22
2.6.2. Transformada Rápida de Fourier.....	26
2.6.3. Esquema Stokes – Helmert.....	29
a. Espacio Real	29
b. Espacio de Helmert.....	31
2.6.4. Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE, Primary Indirect Topographical Effect).....	34
2.6.5. Técnica Remove – Restaurar.....	35

2.7.	Misiones Satelitales y Campo de Gravedad Global	35
2.7.1.	LAGEOS	37
2.7.2.	CHAMP	38
2.7.3.	GOCE	40
2.7.4.	GRACE.....	41
3.	ÁREA DE ESTUDIO E INFORMACIÓN UTILIZADA	44
3.1.	Áreas de estudio	44
3.1.1.	Costa Rica (CR).....	44
3.1.2.	Mesopotamia Argentina	47
3.2.	Calculo de modelo geoidal	49
3.2.1.	Datos de gravedad terrestre	49
a.	Costa Rica.....	49
b.	Mesopotamia Argentina	51
3.2.2.	Modelo Digital de Terreno (MDT).....	53
3.2.3.	Anomalía de aire libre en regiones oceánicas	56
3.2.4.	Modelos Geopotenciales Globales (MGG)	58
a.	EIGEN-6C4	62
b.	GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 (DIR-R5).....	63
c.	EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008)	65
d.	XGM2016 (Experimental Gravity Field Model 2016).....	66
3.2.5.	Datos de Nivelación Clásica y GPS (Global Positioning System).....	68
3.3.	Estudio de la variación temporal usando MGG's.....	70
3.3.1.	Datos de la misión GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment).....	70
3.3.2.	Datos de Espesor Equivalente de Agua (EWH)	70
3.3.3.	Datos de Altimetría Satelital	71
3.3.4.	Datos de Precipitación	73
4.	METODOLOGÍA Y RESULTADOS.....	74
4.1.	Modelos Estáticos.....	74
4.1.1.	Modelo de Geoide para Costa Rica	75
a.	Anomalías Completas de Bouguer, Anomalías Medias de Aire Libre.....	75
b.	Anomalía de Gravedad de Helmert	78
c.	Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE)	80
d.	Modelos de Geoide Calculados	81
e.	Comparación de los Modelos Calculados con MGG's	84
4.1.2.	Modelos de Geoide calculados para la Mesopotamia Argentina	102
a.	Anomalía de Gravedad de Helmert	102
b.	Modelos de Geoide Calculados	103
c.	Validación de los Modelos Calculados para la Mesopotamia Argentina.....	106
d.	Comparación de Modelos Calculados con MGG's	109
4.2.	Interpretación de Modelos Dinámicos para Costa Rica	119

4.2.1. Tendencia y Amplitud de la Gravedad	120
4.2.2. Espesor Equivalente de Agua versus Datos de Altimetría Satelital	123
4.2.3. Espesor Equivalente de Agua versus Precipitación.....	127
4.2.4. Espesor Equivalente de Agua (EWH)	131
5. CONCLUSIONES	135
5.1. Modelos Estáticos.....	135
5.1.1. Modelos Estáticos para Costa Rica	135
5.1.2. Modelos Estáticos para la Mesopotamia Argentina	137
5.2. Modelos Dinámicos	138
BIBLIOGRAFÍA	141
ANEXOS	149
Anexo I.....	149
Anexo II.....	151
Anexo III	153
Anexo IV	155
Anexo V.....	157

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Consideraciones Generales

El rápido avance tecnológico en las últimas décadas, en especial el surgimiento de la era satelital y el gran desarrollo de herramientas informáticas, han hecho posible un mejor estudio de la forma de la Tierra, con aplicaciones de teorías que fueron constituidas hace más de un siglo pero que no era posible su aplicación. Por ejemplo en Geodesia, la era satelital ha contribuido para hacer posible el cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie del potencial gravitacional terrestre, que permite el desarrollo de teorías como la de la determinación del geoide, y el estudio de las variaciones temporales de masas.

El desarrollo y utilización en gran medida de tecnologías GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*), hace que la disponibilidad y determinación de modelos geoidales actuales y más precisos, tal que puedan satisfacer las necesidades de distintos usuarios en sus diferentes ámbitos, sea un trabajo de gran importancia en lo inherente a mediciones no elipsoidales, e incentiva la investigación en el cálculo de modelos geopotenciales. Para la determinación de la tercera coordenada (altimétrica), que ubique el punto en su posición espacial respecto del nivel del mar, es indispensable la vinculación entre los sistemas geodésicos y el conocimiento del valor de ondulación geoidal en ese punto.

La determinación de modelos de geoide local, regional o a nivel global es fundamental para todos aquellos trabajos en los que se aplique tecnologías GNSS para realizar estudios planialtimétricos.

El geoide es un cuerpo cuya superficie es equipotencial del campo gravitatorio terrestre y su determinación está estrechamente relacionada con el problema del valor de contorno de la Geodesia Física. En tal sentido, se torna esencial el conocimiento de los fundamentos de la teoría del potencial aplicados al potencial de gravedad de la Tierra (normal y real), así como sus posibilidades de cálculo, ya sea en su forma integral o a través de su desarrollo en serie de funciones armónicas esféricas. Tanto en la formulación clásica del problema planteada por Stokes en 1849, como en concepciones más modernas como la propuesta por Molodensky un siglo después, resulta fundamental el concepto de “Tierra normal”. Las distintas posibilidades de reducción de los valores gravimétricos medidos sobre la superficie permiten la “regularización de la Tierra” para la aplicación de estas teorías (Pacino, 1999).

Hasta el lanzamiento de las misiones satelitales gravimétricas, los modelos del campo gravitatorio terrestre surgieron de la combinación de distintos datos espaciales y de terreno, los cuales han sido recolectados a través de las últimas décadas (datos de seguimiento satelital como SLR (*Satellite Laser Ranging*), DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*), PRARE (*Precise Range and Range-Rate Equipment*) y GNSS, además de gravimetría terrestre convencional y altimetría satelital sobre los océanos. La precisión de estos modelos de gravedad está limitada por la heterogeneidad de la calidad y origen de los datos, y por la falta de una cobertura global con una precisión uniforme (Pereira, 2011).

En la actualidad las misiones satelitales gravimétricas proveen gran cantidad de información que permiten mejorar los modelos de geopotencial. Además hacen posible la medición de las variaciones temporales del campo gravitacional, que proveen valiosa información acerca de la geodinámica del planeta (Wahr et al., 1998), permitiendo obtener la tendencia y amplitud de las oscilaciones gravitatorias para una determinada época y zona.

Las técnicas geodésicas espaciales permiten medir deformaciones en la superficie terrestre que pueden ser relacionadas con la redistribución de masas (Beutler, 2004). El análisis del campo gravitatorio terrestre brinda información sobre la estructura, características y fenómenos geodinámicos del interior de la Tierra.

1.2. Objetivos

Como objetivos del presente trabajo, para lograr establecer una herramienta para la redefinición del sistema de alturas de Costa Rica, se plantearon los siguientes:

- ▶ Determinación de una superficie de referencia altimétrica a través de la utilización de datos de misiones satelitales gravimétricas como GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*).
- ▶ Recopilación, procesamiento y análisis de información de las bases de datos geodésicos, que puedan brindar soporte para este y otros proyectos afines.
- ▶ Colaboración con instituciones interesadas en la temática del proyecto para la definición del sistema vertical y la adopción de un sistema de alturas unificado en Costa Rica.
- ▶ Utilización de Modelos Digitales de Elevaciones para la mejor determinación de una superficie de referencia altimétrica.

- ▶ Evaluación de Modelos Geopotenciales Globales en Costa Rica.
- ▶ Cálculo de un modelo de geoide utilizando datos de campañas satelitales gravimétricas.
- ▶ Evaluación de la obtención de alturas GPS (*Global Positioning System*) sobre puntos de altura conocida a través de campañas de medición en diferentes regiones del país.
- ▶ Dotación a Costa Rica de una superficie equipotencial precisa, instrumento de referencia para el sistema de alturas, por medio de la combinación de técnicas y datos geodésicos.
- ▶ Mejoramiento del conocimiento del territorio costarricense.

1.3. Estructura del Trabajo

La estructura de este trabajo se divide en 5 capítulos principales: Introducción, Fundamentos Teóricos, Área de estudio e Información Utilizada, Metodología y Resultados, y por último, las Conclusiones.

En el Primer capítulo de Introducción se presenta una serie de consideraciones generales como introducción al tema de investigación y propiamente al trabajo realizado, los objetivos planteados para este trabajo de Tesis y la estructura con la que cuenta el trabajo en su desarrollo.

Durante el segundo capítulo, Fundamentos Teóricos, se desarrollan los conceptos teóricos básicos que sustentan esta investigación. Se exponen los siguientes temas: Potencial Terrestre, Campo de Gravedad normal, Potencial Real, Potencial Normal y Potencial Perturbador, Funciones Armónicas Esféricas, El Problema de Valor de Contorno de la Geodesia Física (PVCG), Formulación de Stokes, o Formulación Clásica, Formulación de Molodensky o formulación moderna, Reducciones y Anomalías Gravimétricas, Determinación del Geoide y la Integral de Stokes y por último el Modelado del Potencial Gravitacional mediante GRACE.

El tercer capítulo despliega las características de las áreas de estudio, y además se describen los conjuntos de datos que se utilizaron para los cálculos de esta investigación.

En el cuarto capítulo se describe la metodología aplicada, seguida de los resultados obtenidos. Este apartado se divide en dos temas: el análisis e interpretación de modelos dinámicos obtenidos mediante GRACE y el cálculo de modelos de geoide estáticos para dos áreas diferentes, Costa Rica y la Mesopotamia Argentina. Por último se presentan las conclusiones derivadas de la investigación en el capítulo 5.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Potencial Terrestre

Sir Isaac Newton desarrolla en el tercer libro de su obra *Principios matemáticos de filosofía natural*, publicada en 1687, la Ley de Gravitación Universal que puede enunciarse del siguiente modo:

“Toda partícula de materia del Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas de ambas partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa” (Figura 2.1)

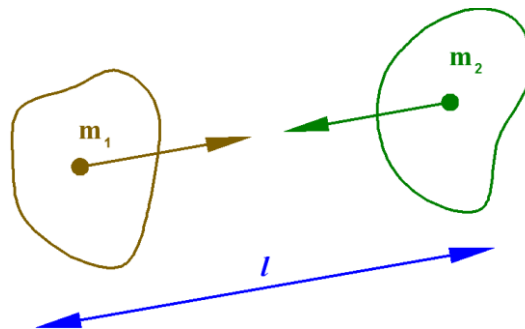


Figura 2.1. . Esquema de atracción gravitacional entre dos masas (m_1 y m_2) separadas por una distancia l .

Dicha ley se puede enunciar en forma de ecuación como:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{l^2} \quad (2.1)$$

Dónde:

m_1, m_2 : masas de las partículas.

l : distancia entre las masas de las partículas.

\vec{F} : Fuerza de atracción gravitatoria.

G : constante de gravitación universal ($6.6742 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$)

Para la ubicación en el espacio de las partículas de masa se define un sistema de coordenadas rectangular X, Y, Z , como el de la Figura 2.2. El vector \vec{F} de la fuerza de atracción gravitacional, tiene magnitud, dirección y sentido.

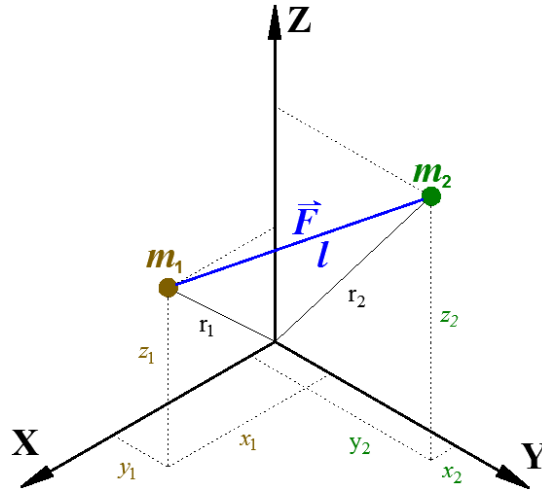


Figura 2.2. Partículas de masa y vector \vec{F} , representados en un sistema cartesiano.

Considerando por simplicidad una masa unitaria en m_2 , siendo conveniente llamarla masa atraída, y a $m_1 = m$ masa atrayente, de acuerdo a la ecuación 2.1 se tendrá:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m}{l^2} \quad (2.2)$$

Donde la distancia l está dada por:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.3)$$

Es conveniente representar el campo de la acción gravitatoria a través de una magnitud escalar llamada potencial de gravitación (V), donde para una masa puntual se define (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$V = G \frac{m}{l} \quad (2.4)$$

Los componentes X , Y , Z de la fuerza gravitacional F están dados por:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} = -Gm \frac{x_2 - x_1}{l^3}, \\ Y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -Gm \frac{y_2 - y_1}{l^3}, \\ Z &= \frac{\partial V}{\partial z} = -Gm \frac{z_2 - z_1}{l^3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

En notación vectorial:

$$\vec{F} = [X, Y, Z] = \text{grad } V$$

(2.6)

Es decir, el vector de fuerza es el vector gradiente de la función escalar V .

Los tres componentes del vector \vec{F} (2.5), se pueden reemplazar por una sola función V . Especialmente cuando se considera trabajar la atracción de conjuntos de puntos masa o cuerpos sólidos. La función V es la suma de todas las contribuciones individuales de cada punto masa (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$V = \frac{Gm_1}{l_1} + \frac{Gm_2}{l_2} + \dots + \frac{Gm_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7), es la suma de todas las contribuciones individuales de cada punto masa. Se asume que cada partícula está distribuida continuamente sobre un volumen v con densidad $\sigma = dm/dv$ (donde dv es un elemento de volumen y dm un elemento de masa). Escribiendo la sumatoria como una integral *-Integral de Newton-* (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\sigma}{l} dv \quad (2.8)$$

La expresión tiene solamente valor teórico porque su uso práctico requeriría el conocimiento de la distribución detallada de la densidad dentro de la Tierra, lo que no es posible (Moritz, 1989).

Introduciendo, el potencial de la fuerza centrífuga (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.9)$$

Siendo ω la velocidad angular de rotación de la Tierra y $p^2 = (x^2 + y^2)$ la distancia perpendicular entre el eje de rotación y la masa puntual de evaluación.

El potencial de gravedad W , es la suma del potencial de la fuerza gravitacional V (2.8) y el potencial centrífugo Φ (2.9), siendo de la forma (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi = G \iiint_v \frac{\sigma}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.10)$$

La integral debe ser extendida sobre toda la Tierra, donde se considera una Tierra rígida con excepción de las mareas y el movimiento del polo (despreciando las variaciones temporales), y por otro lado se considera el efecto atmosférico en general a través de una corrección.

El potencial de atracción V (2.8) es una función armónica fuera de las masas atrayentes (en el vacío del espacio), por lo tanto satisface la ecuación de Laplace (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\Delta V = 0 \quad (2.11)$$

En el interior de las masas, se satisface la ecuación de Poisson:

$$\Delta V = -4\pi G\sigma \quad (2.12)$$

Las funciones (2.11) y (2.12) para el potencial de gravedad resultan entonces de la siguiente manera (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

Fuera del cuerpo:

$$\Delta W = 2\omega^2 \quad (2.13)$$

Dentro del cuerpo:

$$\Delta W = -4\pi G\sigma + 2\omega^2 \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.12) son usadas para dar solución al PVCG, de acuerdo a la posición dentro o fuera de la masa atrayente -en el segundo caso (2.12) en el interior de las masas, provisto de un modelo de distribución de densidades conocido-.

2.2. Campo de Gravedad normal, Potencial Real, Potencial Normal y Potencial Perturbador

Como primera aproximación, la Figura de la Tierra se considera una esfera, y como segunda aproximación, puede ser considerada como un elipsoide de revolución. Aunque la Tierra no es exactamente un elipsoide, el campo de gravedad de un elipsoide es de gran importancia práctica, por su fácil manejo matemático, siendo las diferencias entre el

campo de gravedad real y el campo elipsoidal llamado “normal”, tan pequeñas que pueden ser consideradas lineales (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

Un elipsoide de revolución, generado por la rotación de una elipse alrededor de su eje menor, con la misma velocidad angular (ω) y la misma masa (M) que la Tierra real, cuyo potencial (U_o) constante sobre la superficie, es igual que el potencial en la superficie del geoide (W_o), con su centro en el centro de masas de la Tierra (geocentro), es llamado Tierra normal. El potencial de gravedad normal (2.15) y el vector de gravedad normal (2.16) están definidos como (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$U = \Phi + U_g \quad (2.15)$$

Donde U_g es el potencial gravitacional normal y Φ el potencial centrífugo.

Luego, el vector de gravedad normal en analogía a (2.6) puede expresarse como (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\vec{\gamma} = \text{grad}U = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

La diferencia entre el potencial de gravedad normal U y el potencial de gravedad real W , se conoce como potencial perturbador o potencial anómalo (T), y queda definido por (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$T = W - U \quad (2.17)$$

El valor del potencial anómalo describe las irregularidades locales y regionales del potencial de gravedad real. Como el potencial de gravedad normal modela la mayor parte del campo real de gravedad, el potencial perturbador es mucho más pequeño que los otros dos potenciales (Pereira, 2011).

Considerando el geoide y el elipsoide de referencia con el mismo potencial $U_o = W_o$. Se proyecta un punto P , situado sobre la superficie del geoide, en el punto Q , sobre la superficie del elipsoide, por medio de la normal al elipsoide n' . La distancia entre el punto

P en el geoide y su proyección en el elipsoide Q , se llama altura geoidal u ondulación geoidal N (Figura 2.3) (Pacino, 1999).

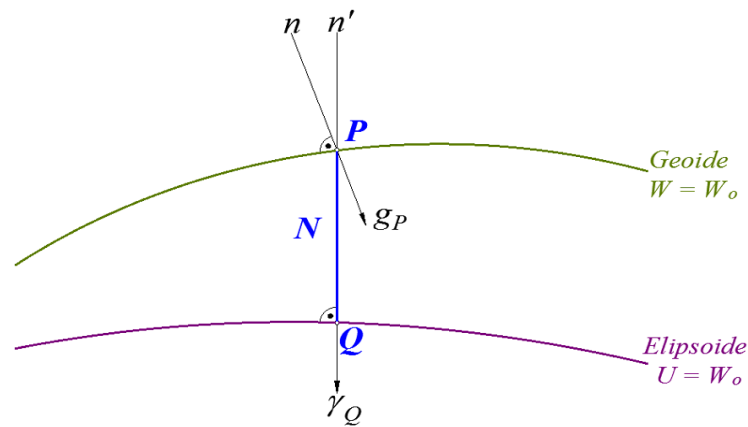


Figura 2.3. Geoide, Elipsoide de referencia y ondulación geoidal (N) (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

Considerando la gravedad de la Tierra en el geoide (g_P) y la gravedad normal (γ_Q) en la superficie del elipsoide (Figura 2.3), se define la anomalía de gravedad ($\overline{\Delta g}$) como (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\overline{\Delta g} = \overline{g_P} - \overline{\gamma_Q} \quad (2.18)$$

El vector tiene magnitud y dirección, la diferencia en magnitud es la anomalía de gravedad (Δg), y la diferencia en la dirección es la deflexión o desvío de la vertical. Ésta tiene dos componentes: Norte – Sur (ξ), y Este – Oeste (η).

Comparando la gravedad en el geoide g_P y la gravedad normal γ_P en el mismo punto P , su diferencia determina la perturbación de la gravedad (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (2.19)$$

Por el teorema de Bruns (2.20), es posible relacionar la ondulación geoidal con el potencial perturbador (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (2.20)$$

Considerando el gradiente normal:

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (2.21)$$

Siendo h medida en la dirección de la normal, y considerando (2.19), se tendrá:

$$\delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (2.22)$$

Recordando la definición de anomalía gravimétrica (2.18), y haciendo uso de la fórmula de Bruns (2.20), tenemos (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (2.23)$$

Esta es la Ecuación Fundamental de la Geodesia Física, la cual relaciona la cantidad medida Δg con el potencial perturbador T . En ella es evidente que la anomalía de gravedad puede expresarse como una combinación lineal entre el potencial perturbador y su derivada normal. Dado que Δg se conoce sobre la superficie geoidal (o se le reduce a ella) de modo discreto, la ecuación solo puede utilizarse como condición de borde (Pacino, 1999; Pereira, 2011).

2.3. Funciones armónicas esféricas

Las funciones armónicas más importantes son los armónicos esféricos (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Se definen las coordenadas esféricas (donde r es el radio vector, ϑ es la distancia polar y λ es la longitud geocéntrica) respecto a las coordenadas rectangulares (x, y, z) , representadas en la Figura 2.4..

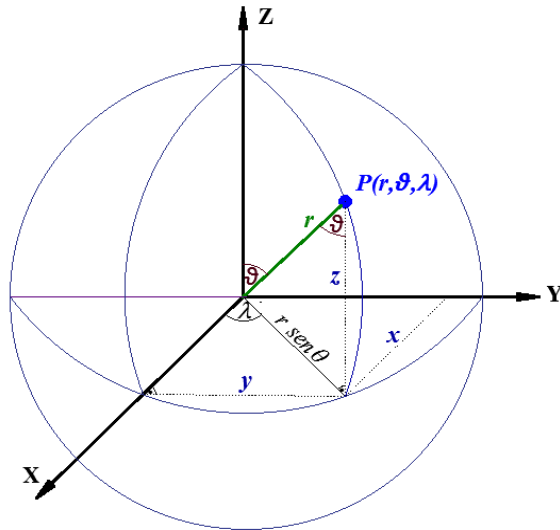


Figura 2.4. Coordenadas esféricas y rectangulares del punto P.

Donde:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \vartheta \cos \lambda, \\ y &= r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \lambda, \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.24)$$

Primeramente se determina el elemento de distancia (elemento de arco) ds , para obtener la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por diferenciación de (2.24) y sustituyendo en la ecuación fundamental de la distancia:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.26)$$

Se obtiene :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta d\lambda^2 \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) evidencia que las coordenadas esféricas son ortogonales, ante la ausencia de términos $dr d\vartheta$, $dr d\lambda$, $d\vartheta d\lambda$; además, la esfera $r = \text{constante}$, el cono $\vartheta = \text{constante}$, y el plano $\lambda = \text{constante}$ se cortan ortogonalmente.

Escribiendo (2.27) en coordenadas ortogonales arbitrarias q_1, q_2, q_3 , se tendrá (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \quad (2.28)$$

El operador de Laplace en esas coordenadas, puede escribirse como (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \right] \quad (2.29)$$

Por comparación de (2.27) y (2.28), para las coordenadas esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \lambda$, tendremos:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \text{sen} \vartheta \quad (2.30)$$

Sustituyendo en (2.29) la relación anterior:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen} \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\text{sen} \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \quad (2.31)$$

El potencial gravitacional V no puede calcularse como la integral triple definida a partir de la ley de gravitación de Newton (2.8), debido a que la variación de la densidad terrestre no puede establecerse con precisión adecuada. Sin embargo, es posible encontrar un desarrollo en serie del potencial V como solución de la ecuación de Laplace (Blakeley, 1996).

Enunciamos en serie la solución a la ecuación de Laplace (2.11) como (Guimarães, 2010):

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\text{sen} \vartheta) \left(\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \text{sen} \lambda \right) \quad (2.32)$$

Siendo M la masa total de la Tierra; a , el radio ecuatorial o semieje mayor; r , la distancia geocéntrica; $\bar{P}_{nm}(\cos\vartheta)$ es la función de Legendre asociada totalmente normalizada; \bar{C}_{nm} y \bar{S}_{nm} , los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos totalmente normalizados (o coeficientes de Stokes); ϑ y λ , son la colatitud y la longitud del punto P .

Donde los coeficientes de Stokes están dados por (Guimarães, 2010):

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{cases} = \frac{1}{Ma^n} \iiint_Q (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r^n \bar{P}_{nm}(\text{sen}\varphi) \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \text{sen}m\lambda' \end{cases} dm \quad (2.33)$$

Estos coeficientes representan hasta grado y orden L (grado y orden máximo) lo que es llamado “modelo geopotencial”. Los coeficientes $C_{n,0} = -J_n$; $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ y $C_{n,n}$, $S_{n,n}$ corresponden a los esféricos armónicos zonales, teserales y sectoriales (Figura 2.5), los cuales tienen diferentes comportamientos de acuerdo a los valores que adopten los subíndices n (grado) y m (orden). Si $m = 0$ (polinomios de Legendre), la esfera es dividida en zonas, por lo que son llamados armónicos zonales. Cuando $n = m$ se generan funciones que dividen la esfera en sectores positivos y negativos, en cuyo caso se denominan armónicos sectoriales. Por último con $m \neq 0$, y $n \neq m$, para cualquier otro valor de m la esfera es dividida en secciones alternativamente positivas y negativas, y se llaman armónicos teserales (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

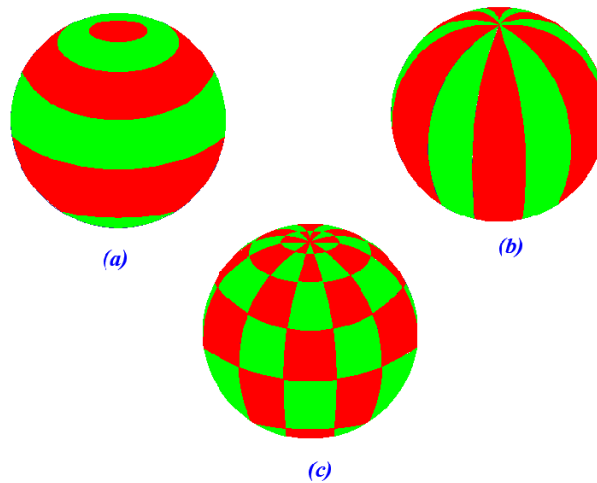


Figura 2.5. Tipos de armónicos esféricos: (a) zonal, (b) sectorial, (c) teseral (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

2.4. El Problema de Valor de Contorno de la Geodesia Física (PVCG)

Conociendo los valores de una determinada variable sobre una superficie limitante, se busca a partir de allí, determinar una función que relacione esa variable, lo que conduce a lo que se denomina "problema de valor de contorno" (Blitzkow, 1996). Lo que se busca en el PVCG es determinar una función para un cuerpo dado.

La determinación del campo de gravedad externo a las masas, donde la superficie limitante es desconocida, es lo que se pretende con la solución al Problema de Valor de Contorno. Stokes propuso una formulación para obtener el potencial perturbador en función de la anomalía de gravedad sobre la superficie del geoide. Sin embargo, esta proposición implica algunas dificultades, pues se desconoce la distribución de densidades en el interior de la corteza. Una nueva formulación del problema fundamental de Geodesia fue propuesta por Molodensky que utiliza la superficie física como límite. Con ello no es necesario el conocimiento, aunque sea aproximado, de un modelo de distribución de densidad en el interior de la corteza entre la superficie física y el geoide. Sin embargo, esta superficie no tiene el mismo significado físico que la superficie geoidal, pues no es una superficie equipotencial (Guimarães, 2010).

La teoría del potencial presenta tres problemas de valor de contorno (Heiskanen & Moritz, 1967):

1. Primer Problema de Valor de Contorno o Problema de Dirichlet: Conociéndose los valores de una función arbitraria V sobre una superficie S , determinar esa función V de forma tal que sea armónica interna o externamente a S , y que la superficie S asuma valores de la función escogida.
2. Segundo Problema de Valor de Contorno o Problema de Neumann: Conociéndose los valores de la derivada normal de una función V sobre una superficie S , determinar la función V que sea armónica interna o externamente a S .
3. Tercer Problema de Valor de Contorno o Problema de Hilbert: conociéndose los valores de la combinación lineal de la función V con su derivada normal sobre la superficie S , determinar la función V en las condiciones anteriores.

El problema de Hilbert, tiene especial importancia en la Geodesia. En este problema la superficie limitante S debe ser definida, mientras que en Geodesia dicha superficie debe ser escogida (Pacino, 1999).

El problema de la Geodesia se centra en la determinación del potencial perturbador a través del conocimiento de las anomalías de gravedad que, observadas sobre la superficie geoidal o reducidas a ésta, son una combinación lineal del potencial perturbador con su derivada normal, de acuerdo con la ecuación fundamental de la Geodesia Física (2.23) (Pacino, 1999).

Estas razones hacen que el tercer Problema de Valor de contorno sea considerado como el Problema de Valor de Contorno de la Geodesia (PVCG).

2.4.1. Formulación de Stokes, o formulación Clásica

En 1849 George Gabriel Stokes, publica la fórmula o integral de Stokes (considerada la de mayor importancia para la Geodesia) y propone como alternativa la superficie del geoide como contorno para resolver dicha integral y que permite obtener el potencial perturbador a partir del conocimiento de las anomalías de gravedad sobre toda la superficie geoidal. En una aproximación esférica, dicha fórmula se expresa como (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.34)$$

Donde R es el radio medio terrestre y σ la superficie terrestre. Esta función depende de la anomalía de gravedad definida sobre la superficie del geoide y de la función de Stokes $S(\psi)$ que está dada por la expresión:

$$S(\psi) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\text{sen}\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\text{sen}\frac{\psi}{2} + \text{sen}^2\frac{\psi}{2}\right) \quad (2.35)$$

Siendo ψ la distancia entre el punto dato (φ, λ) y el punto de cálculo (φ_p, λ_p) .

Seleccionando el elipsoide de referencia de manera tal que posea sobre su superficie el mismo potencial normal que el potencial de gravedad sobre la superficie del geoide, T puede vincularse con la ondulación geoidal N a través de la gravedad normal γ sobre el elipsoide de referencia. Las alturas geoidales N se obtienen entonces a partir del potencial perturbador en cada punto del geoide con la fórmula de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.36)$$

El potencial perturbador debe ser una función armónica para satisfacer la ecuación de Laplace. Para cumplir con este requisito es necesario remover las masas externas al geoide a través de un adecuado proceso de regularización.

El desconocimiento de un modelo, por lo menos aproximado, de la distribución de densidades en el interior de la corteza -entre la superficie terrestre y el geoide- es el gran problema o dificultad de esta formulación.

2.4.2. Formulación de Molodensky o formulación moderna

Mikhail Molodensky, en 1945, propone la superficie física (superficie terrestre) como superficie limitante, debido al desconocimiento de un modelo de distribución de densidad en el interior de la corteza terrestre. En este caso, se sustituye el concepto de geoide por el cuasigeoide. Las anomalías de gravedad y las deflexiones de la vertical se refieren entonces a la superficie física y no a la superficie geoidal.

En esta formulación, la superficie de referencia utilizada pasa a ser el teluroide (Hirvonen, 1960). Se trata de una superficie cuyo potencial normal U en cada punto dado Q es igual al potencial de gravedad W en todos los puntos P de la superficie física que le corresponde, según la dirección de la normal al elipsoide que pasa por cada punto P ; de esta manera se tiene $W_P = U_Q$ (Figura 2.6).

La conexión entre P y Q se define a través de la línea perpendicular (normal) al elipsoide que pasa por P ; la distancia entre ellos se conoce como anomalía de altura ζ . La altura normal H_N se corresponde con la separación entre el teluroide y el elipsoide (distancia entre Q y Q_o). Si de la superficie terrestre se descuenta la altura normal H_N a lo largo de la perpendicular al elipsoide, se obtiene el cuasigeoide (Figura 2.6). Dado que el potencial W varía de punto a punto sobre la superficie de la Tierra, el teluroide y, en consecuencia el cuasigeoide, no son superficies equipotenciales y por lo tanto, no tienen un significado físico directo (Sánchez L., 2002).

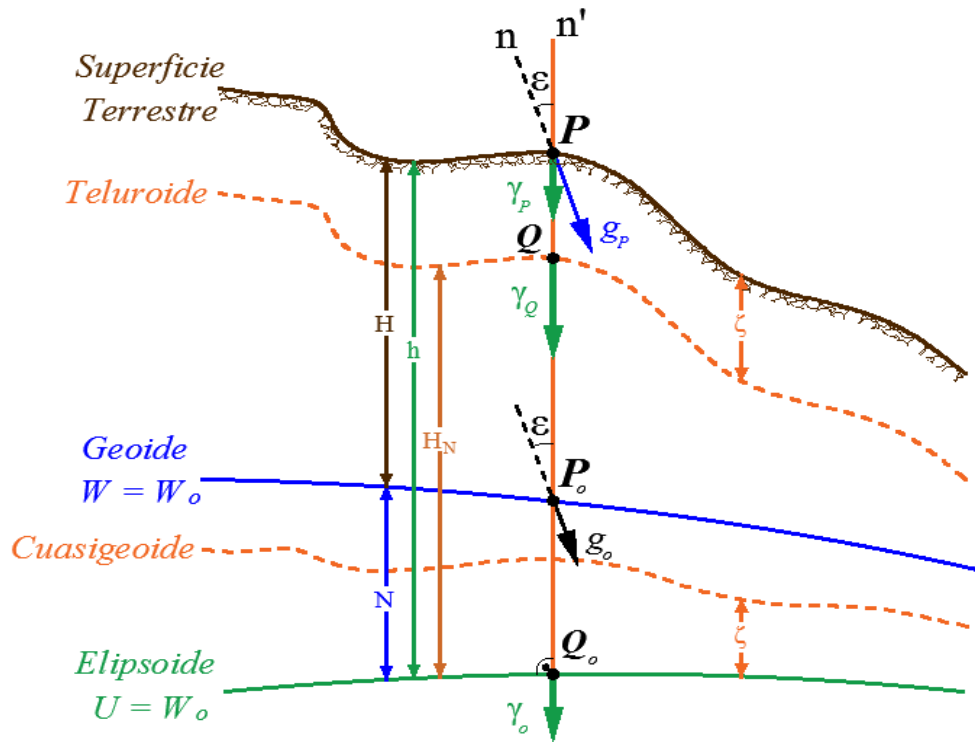


Figura 2.6. Superficies de referencia y alturas.

La diferencia entre la altura normal H_N y la altura geométrica o elipsoidal h es llamada anomalía de altura ζ (Figura 2.6), de manera que (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\zeta = h - H_N \quad (2.37)$$

En la concepción de Molodensky, la altura normal H_N y la anomalía de altura ζ , se corresponden respectivamente con la altura ortométrica H y la ondulación geoidal N (Figura 2.6).

La anomalía gravimétrica es ahora la diferencia entre la gravedad medida en P -sobre la superficie terrestre- y la gravedad normal en Q -sobre el teluroide- (Figura 2.6), siendo (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (2.38)$$

Las anomalías gravimétricas están referidas a la superficie terrestre cuando la gravedad normal es calculada como una prolongación ascendente de la gravedad normal sobre el elipsoide.

La anomalía de altura puede calcularse a partir de la ecuación de Bruns, de la siguiente forma (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (2.39)$$

Donde T es el potencial perturbador calculado sobre la superficie terrestre y γ la gravedad normal sobre el teluroide.

A través de una expresión análoga a la fórmula de Stokes para la altura geoidal N , se vincula la anomalía ζ de altura con las anomalías gravimétricas. No obstante, el teluroide no es una superficie de nivel, y a cada punto P en la superficie de la Tierra corresponde en general una superficie geopotencial diferente. Por lo tanto, la relación entre Δg y ζ en la nueva teoría es considerablemente más complicada que para el geoide (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

El cuasigeoide, obtenido uniendo puntos con igual anomalía de altura, coincide con el geoide en los océanos y se aparta levemente de éste en los continentes. Debe remarcarse que el cuasigeoide no es una superficie de nivel.

2.5. Reducciones y Anomalías Gravimétricas

Las reducciones gravimétricas tienen como propósito llevar (o reducir) los valores de gravedad observados sobre la superficie terrestre al geoide y remover las masas topográficas exteriores al geoide, o desplazarlas de tal manera que el geoide sea una “superficie límite” (Pacino, 1999).

La integral de Stokes requiere para la determinación del geoide, que la anomalía gravimétrica Δg represente “valores límite” sobre éste, para lo que se utilizan las reducciones.

A este procedimiento para remover las masas exteriores a través de las reducciones gravimétricas se le llama regularización de la Tierra.

Los valores de gravedad reducidos al geoide y los valores de gravedad normal calculados no son coincidentes en general unos con otros. Esto es debido al efecto de masas anómalas subyacentes que afectan al valor medido.

La diferencia entre la gravedad reducida (g reducida) y la gravedad normal γ , se denomina anomalía de gravedad, y se pueden definir tantas anomalías como reducciones se consideren.

Para reducir el valor de la gravedad observada g en un punto P sobre la superficie terrestre, con una altura ortométrica H , a un punto P_0 sobre el geoide (Figura 2.7). Se aplica la reducción de aire libre (R_{AL}), donde la estación P , quedaría como “suspendida en el aire” (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

$$R_{AL} = -\frac{\partial g}{\partial H} H \quad (2.40)$$

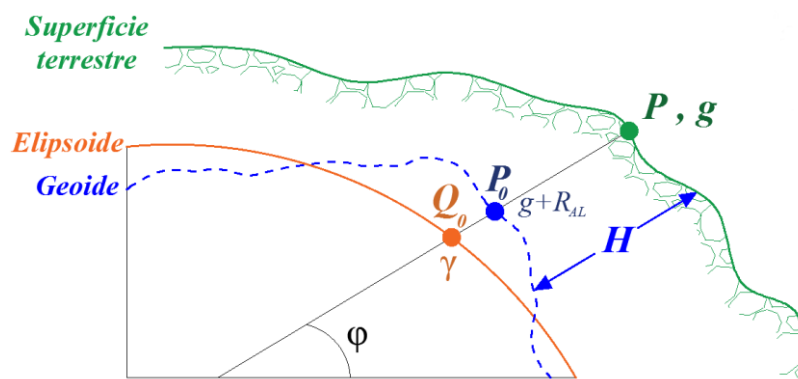


Figura 2.7. Reducción de Aire libre.

Para muchos propósitos es suficiente usar el gradiente normal de la gravedad, obteniéndose (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$R_{AL} = -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H \quad (2.41)$$

En esta reducción sólo se tiene en cuenta el efecto de diferencia de altura entre el punto observado y el geoide, donde no se consideran las densidades de las masas interpuestas (Pacino, 1999).

La diferencia de la gravedad observada reducida con la gravedad normal γ en el punto Q_0 del elipsoide dará como resultado la anomalía de aire libre:

$$A_{AL} = g + R_{AL} - \gamma \quad (2.42)$$

El objetivo de la reducción de Bouguer es remover por completo las masas topográficas fuera del geoido (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

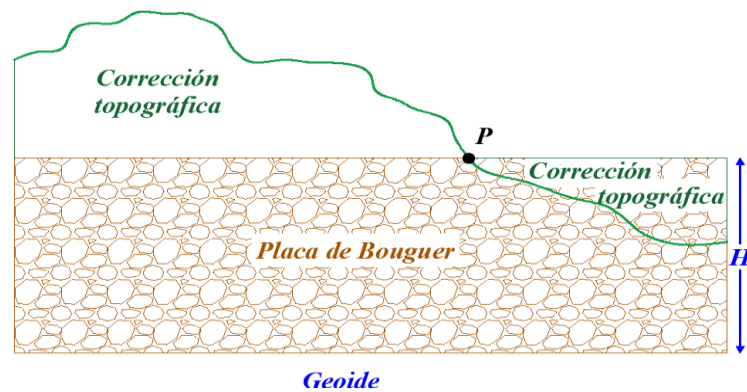


Figura 2.8. Placa de Bouguer y corrección topográfica.

Placa de Bouguer

La reducción de la placa de Bouguer representa la atracción de gravedad de una losa plana indefinida de espesor H (altura del punto P , donde se realiza la medición de g) y con densidad constante σ (Figura 2.8). Remover esta placa es equivalente a sustraer su atracción del valor de la gravedad observada.

En la reducción de Bouguer (R_B) se requiere el conocimiento de las densidades de las masas topográficas, lo que resulta un problema. Convencionalmente se utiliza una densidad σ constante (generalmente 2.67 gcm^{-3} , densidad estándar) y puede evaluarse con la siguiente expresión (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$R_B = 2\pi G\sigma H \quad (2.43)$$

Donde G es la constante de gravitación universal; σ la densidad constante; y H la altitud del punto de medición (Figura 2.8).

Cuando se aplica de forma combinada la reducción de la placa de Bouguer y la reducción de Aire libre, se le llama reducción simple de Bouguer (R_{BS}). La comparación de esta reducción con la gravedad normal dará la llamada anomalía simple de Bouguer (A_{BS}) (Pereira, 2011):

$$A_{BS} = g + R_{AL} - R_B - \gamma = g + R_{BS} - \gamma \quad (2.44)$$

En la corrección de Bouguer se desprecian las irregularidades topográficas cercanas (masas sobre la losa de Bouguer y por debajo de la altura de la estación). Sólo si se tratara de zonas llanas y planicies, la corrección tal como la planteó Bouguer es suficientemente correcta, de lo contrario se debe tener en cuenta las irregularidades del terreno en una corrección complementaria (Introcaso, 2006).

Para completar la anomalía de Bouguer es necesario hacer una Corrección de Terreno (C_T) que considera los desvíos entre la superficie topográfica y la placa de Bouguer (Figura 2.8). El cálculo de esta corrección se realiza actualmente a través de un modelo digital del terreno (Pacino, 1999). La C_T en su formulación clásica está dada por:

$$C_T = G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{z=H_P}^{z=H(x,y)} \frac{z - H_P}{\left(\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - H_P)^2} \right)^3} dx_Q dy_Q dz_Q \quad (2.45)$$

Agregando a la Anomalía simple de Bouguer (A_{BS}) la corrección topográfica (C_T), se obtendrá la Anomalía completa de Bouguer (A_{BC}):

$$A_{BC} = g + R_{AL} - R_B + C_T - \gamma = g + R_{BS} - C_T - \gamma \quad (2.46)$$

2.6. Determinación del Geoide y la Integral de Stokes

Una vez determinadas las anomalías de gravedad reducidas al geoide, se puede aplicar la integral de Stokes (Ec. 2.34) para realizar el cálculo de las ondulaciones geoidales N . La concepción de Stokes para el PVCG supone que la anomalía de la gravedad se conoce de manera continua sobre la superficie geoidal y que no existen masas externas a esta superficie para la determinación de la forma de esa superficie y del potencial de gravedad en el exterior de la misma.

La integral de Stokes se describió en el apartado 2.4.1 (Formulación de Stokes, o formulación Clásica (Ec. 2.34), aunque esta presentación tiene un carácter teórico solamente, debido a la dificultad de obtener valores de gravedad sobre toda la superficie terrestre. Para dar solución al problema de poseer datos de gravedad sobre toda la Tierra, fueron propuestas modificaciones a la integral de Stokes, propiamente al núcleo o función de Stokes.

De forma abreviada se puede representar la ondulación geoidal N de la siguiente forma (Blitzkow, 1996):

$$N(\vartheta, \lambda) = N_L(\vartheta, \lambda) + \delta N_L(\vartheta, \lambda) \quad (2.47)$$

Donde el término N_L es el componente de larga longitud de onda de la altura geoidal, que representa de forma geométrica la separación entre el elipsoide y el esferoide de referencia, representado por el modelo geopotencial. El término δN_L es el componente de corta longitud de onda y se puede interpretar de forma geométrica como la separación entre el esferoide de referencia y el geoide, obtenido a partir de datos gravimétricos terrestres.

El componente de larga longitud de onda es fácilmente calculado a partir de un modelo del geopotencial, lo que significa extender la serie hasta un cierto grado y orden L . Las longitudes de onda corta son calculadas a través de la modificación de la integral de Stokes, que permite restringirla a un casquete esférico de dimensión limitada, de radio ψ_0 .

2.6.1. Modificación del Núcleo de Stokes

Recordando que para aplicar la integral de Stokes es necesario datos de gravedad sobre toda la superficie terrestre, se utiliza la descomposición espectral en el cálculo del modelo de geoide (Ec. 2.47). Ésta combina un Modelo Geopotencial Global (MGG) para el cálculo del componente de larga longitud de onda, con observaciones de gravedad terrestre para la componente de corta longitud de onda, y un modelo digital de terreno.

Esto da la posibilidad de aplicar la integral de Stokes a una región próxima del punto de cálculo. Para ello es necesario proceder a una reformulación de la integral original (Ec. 2.34), que básicamente consiste en modificar la función o núcleo de Stokes $S(\psi)$ (2.35) (Las deducciones matemáticas se pueden encontrar en Vaniček et al., 1987 y Blitzkow et al., 1991). La integral modificada de Stokes se puede escribir de la siguiente manera (Blitzkow, 1996):

$$\delta N_L = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta S_L^m(\psi) \delta g_L \sin\psi d\psi d\alpha \quad (2.48)$$

Donde δS_L^m es el núcleo esférico de integración de Stokes modificado, las ecuaciones se describen como:

$$\delta S_L^m(\psi) = \delta S_L(\psi) - \overline{\delta S_L}(\psi) \quad (2.49)$$

donde:

$$\delta S_L(\psi) = S(\psi) - S_L(\psi) \quad (2.50)$$

$$S_L(\psi) = \sum_{n=2}^l \frac{2n+1}{n-1} P_n(\psi) \quad (2.51)$$

$$\overline{\delta S_L}(\psi) = \sum_{n=0}^l \frac{2n+1}{2} t_n P_n(\cos \psi) \quad (2.52)$$

Si $\psi = 0$, la expresión converge a infinito (Featherstone et al., 1998). Generalmente la Ec. 2.48 es limitada o truncada sobre una capa esférica dada por la distancia $\psi \leq \psi_0$. En la región $\psi_0 < \psi \leq \pi$, el error del truncamiento debería reducirse idealmente a cero.

El objetivo de realizar una modificación del núcleo de Stokes es reducir el error de truncamiento a valores aceptables para aplicaciones geodésicas modernas.

La base de la modificación del núcleo de Stokes (Ec. 2.52) se redefine en la región $\psi_0 < \psi \leq \pi$ como (Molodensky et al., 1962; Featherstone et al., 1998):

$$\overline{\delta S_L}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0) P_n(\cos \psi) \quad (2.53)$$

donde

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (2.54)$$

define los coeficientes de truncamiento de Molodensky.

Se han presentado varias propuestas de modificación del núcleo de Stokes. Wong & Gore (1969) propusieron la eliminación de los polinomios de Legendre de bajo grado ($2 \leq n < L$) del núcleo de Stokes. Al eliminar los armónicos de bajo grado, la fórmula de Stokes no distorsionará la contribución de la larga longitud de onda al geoide. La

eliminación de los polinomios de Legendre introduce un núcleo más alto que el segundo grado y se lo ha llamado el núcleo esferoidal de Stokes y está dado como (Vaníček & Featherstone, 1998):

$$\delta S^M(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (2.55)$$

La modificación del núcleo de Stokes que minimiza el límite superior del error de truncamiento en un sentido de mínimos cuadrados fue propuesto por Vaníček & Kleusberg (1987), y está definida por:

$$\delta S_{vk}^M(\psi) = S^M(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{2} t_k(\psi_0) P_k(\cos \psi) \quad (2.56)$$

Los coeficientes de truncamiento $Q_n(\psi_0)$ (Ec. 2.54) rigen la velocidad a la que convergen las series espectrales del error de truncamiento asociado con el núcleo esférico de Stokes. Meissl (1971) muestra que la serie converge a cero más rápido al aumentar el grado armónico esférico (n) cuando el núcleo de integración es cero en el radio de truncamiento ψ_0 . Por lo tanto, el efecto del error de truncamiento en el geoide se reducirá a una velocidad mayor en comparación con un núcleo no modificado (Featherstone et al., 1998). La modificación se logra restando el valor numérico del núcleo esférico de Stokes en el radio de truncamiento $S(\psi_0)$, del núcleo original. El núcleo modificado se define como:

$$S_{me}(\psi) = S(\psi) - S(\psi_0); \quad \text{Para } 0 \leq \psi \leq \pi \quad (2.57)$$

La función modificada de Stokes tiende a cero más rápidamente que la función normal (Blitzkow et al., 1991). Esto justifica el límite de la integral en torno de ψ_0 . Existe una justificación de carácter físico para ello: se trata del hecho de que la influencia de la región alejada, o de las largas longitudes de onda de la región, son tomadas en consideración por el modelo del geopotencial en el componente N_L . La altura geoidal es finalmente obtenida reincorporando el componente de larga longitud de onda. La integral modificada de Stokes para obtener las ondulaciones geoidales está dada por (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaníček, 2007):

$$\begin{aligned}
N(\Omega) = & \frac{R}{4\pi\gamma_0(\varphi)} \iint_{\Omega_{\psi_0}} S^M(\psi_0, \psi(\Omega, \Omega')) \Delta g(r_g, \Omega) d\Omega' + \\
& + \frac{R}{2\gamma_0(\varphi)} \sum_{n=2}^M \frac{2}{n-1} \Delta g_n^h(r_g, \Omega) + \\
& + \frac{\delta V^t(r_g, \Omega)}{\gamma_0(\varphi)} + \frac{\delta V^a(r_g, \Omega)}{\gamma_0(\varphi)}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

donde:

$$\Delta g(r_g, \Omega) = \left(\Delta g^h(r_t, \Omega) - \sum_{n=2}^M \Delta g_n^h(r_g, \Omega) \right) \tag{2.59}$$

Con (r, Ω) como la posición geocéntrica de un punto representado por el radio geocéntrico r y el par de coordenadas geocéntricas $\Omega = (\varphi, \lambda)$; R el radio medio de la Tierra. Es utilizada la modificación del núcleo de Stokes propuesta por Featherstone (2003) $S^M(\psi_0, \psi(\Omega, \Omega'))$; definida por la combinación de los núcleos de Stokes modificados propuestos por Vaniček & Kleusberg (1987) y Meissl (1971). Este núcleo presenta el mejor resultado en el cálculo de un modelo de geoide en comparación con la técnica de descomposición espectral sin la modificación del núcleo de Stokes (Lobianco, 2005).

El primer término de la derecha en la Ec. (2.59) es el co-geoide residual de Helmert como un campo de referencia, con un grado y orden bajos, y removidos antes de la integración de Stokes con la Ecuación (2.59); el segundo término de la Ecuación adicional (Restaura) a la componente residual de la ondulación geoidal la contribución de larga longitud de onda. El co-geoide de Helmert resulta luego de la suma de los dos primeros términos; el último término es el efecto topográfico indirecto primario –PITE- (Ec. 2.84). El término $\Delta g^h(r_t, \Omega)$ en la Ecuación (2.58), es la anomalía de gravedad de Helmert referida a la superficie de la Tierra.

La modificación de Meissl propone la simple resta de la función de Stokes en relación con la distancia de truncamiento, cuando el error de truncamiento de la serie de Fourier converge rápidamente a cero (Featherstone et al., 1998). La modificación de Vaniček y Kleusberg usa el componente de baja frecuencia de la ondulación geoidal obtenida por el modelo de geopotencial y un esferoide de grado M como una nueva superficie de

referencia (Vaníček & Sjöberg, 1991) en lugar del elipsoide de referencia de Somigliana-Pizzeti. Esta modificación funciona en un sentido para minimizar el error de truncamiento (Guimarães, 2013).

2.6.2. Transformada Rápida de Fourier

La transformada de Fourier realiza la transformación de una función en un dominio del espacio para un dominio de frecuencia. Cuando la función no se conoce de forma continua, sino que se obtiene sólo por muestra en puntos discretos (mayoría de los casos), y siempre que el espaciamiento sea constante, la transformada de Fourier se realiza de manera simple y eficiente a través de algoritmos específicos conocidos como Transformada rápida de Fourier -*Fast Fourier Transform*, FFT- (Cooley & Tukey, 1965). Los datos deben constituir una malla con espaciamiento constante, y cuando esto no ocurra, se debe aplicar alguna técnica de interpolación.

Las cantidades de datos utilizados en Geodesia (medidas gravimétricas, datos de altimetría por radar, modelos digitales del terreno, entre otros), son presentados de forma discreta en un procesamiento que puede llevar largos intervalos de tiempo (Blitzkow, 1996), y una de las maneras de solucionar esto, es realizar las integrales de convolución en el espacio de frecuencia, como por ejemplo la integral de Stokes.

La FFT permite dar solución a la integral de Stokes de una forma rápida, procesando una señal espectral (en dominio de frecuencia). En este caso la función es presentada en una serie de funciones senoidales con frecuencias discretas.

La propiedad fundamental de aquellas integrales es que ellas se transforman en un simple producto de funciones si el proceso de evaluación de las mismas se hace en el espacio de la frecuencia (Blitzkow, 1973). La transformada de Fourier directa e inversa permite un procesamiento analítico de la señal en el espacio de dominio de la frecuencia y viceversa. El par de Transformadas de Fourier están definidas como (Bracewell, 1986; Sideris, 2010):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.60)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (2.61)$$

Los algoritmos conocidos como FFT procesan rápidamente la señal espectral (dominio de frecuencia), resolviendo la integral de Stokes en una cuadrícula regular. Al usar las propiedades de la transformada de Fourier, no hay necesidad de una suma numérica de la solución puntual, y la evaluación de las integrales de convolución se sustituye por multiplicaciones. El procesamiento da resultados en la misma cuadrícula que la de los datos entrada. Proporciona la altura del geoide en todos los puntos de la cuadrícula de anomalías de gravedad. Esta técnica mejora el problema de la velocidad de cálculo y proporciona una cobertura homogénea de los resultados, que es muy adecuada para fines de interpolación y trazado (Sideris, 2010).

La transformada o espectro de Fourier 2-D de una función $h(x, y)$ se define por (Papoulis, 1977; Schwarz et al., 1990):

$$H(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = F[h(x, y)] \quad (2.62)$$

donde F es el operador bidimensional de Fourier, H es el espectro de la función $h(x, y)$, k_x , k_y son los números de onda correspondientes a las coordenadas espaciales x e y , respectivamente, e i es la unidad imaginaria ($i = (-1)^{1/2}$).

Del mismo modo, F^{-1} es el operador de Fourier inverso 2-D, y la transformación inversa se define por:

$$h(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = F^{-1}[H(k_x, k_y)] \quad (2.63)$$

Representado esquemáticamente:

$$h(x, y) \leftrightarrow H(k_x, k_y) \quad \text{o} \quad h(x, y) \leftrightarrow H(u, v) \quad (2.64)$$

donde u y v son las frecuencias espaciales (en ciclos por unidad de distancia) en las direcciones de x e y respectivamente, relacionadas con k_x y k_y por las expresiones:

$$k_x = 2\pi u \quad \text{y} \quad k_y = 2\pi v \quad (2.65)$$

Sustituyendo la ecuación 2.65 en las ecuaciones 2.63 y 2.64:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.66)$$

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.67)$$

Una de las opciones más usadas, es realizar la integral en una dimensión (1D-FFT). Ésta se caracteriza por que los valores de la función de Stokes para una cierta diferencia de longitud entre el punto de cálculo y el de integración son los mismos que para todos los puntos de cálculo sobre un paralelo, aunque diferentes en distintos paralelos. De esta forma, la convolución se realiza sólo en la dirección este-oeste, y en la dirección Norte-Sur se realiza la integración numérica tradicional. Con ello la función núcleo es exacta en toda la región de integración (Haagmans et al., 1993). Por lo tanto, la integral de Stokes (2.41) se puede evaluar mediante la siguiente fórmula 1D-FFT en coordenadas geodésicas:

$$N_{\Delta g}^{\varphi_p} = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \sum F_1^{-1} \left\{ \sum_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_M} F_1 \{ S^{\varphi_p\varphi} \} F_1 \{ \Delta g^\varphi \cos \varphi \} \right\} \quad (2.68)$$

Donde F_1 y F_1^{-1} denotan el operador de la transformada de Fourier 1D y su inversa.

La ventaja principal del enfoque de la FFT es que proporciona exactamente los mismos resultados que los obtenidos por integración numérica directa. Además, sólo tiene que tratar con una matriz compleja unidimensional cada vez, lo que resulta en un ahorro considerable en la memoria de la computadora en comparación con otras técnicas. Por otra parte, la adopción de la FFT hace mucho más eficiente la integración. Se pueden encontrar comparaciones detalladas de diversas técnicas en (Haagmans et al., 1993) y (Forsberg et al., 1993).

2.6.3. Esquema Stokes – Helmert

El segundo método de condensación de Helmert es utilizado como una forma de estimar el efecto de las masas topográficas de la Tierra. Estas masas son reemplazadas por una capa de condensación infinitesimal en el geode. Las cantidades reales del campo se transforman primero en cantidades correspondientes en el espacio de Helmert (Figura 2.9).

El campo de gravedad en el espacio de Helmert puede descomponerse en partes de baja y alta frecuencia. Los modelos de geopotencial global (MGG) son la fuente más precisa para la información de baja frecuencia, mientras que la información de corta longitud de onda se obtiene de la integral de Stokes. La integración se restringe a un límite circular alrededor de los puntos de cálculo en la práctica, se utiliza una modificación del núcleo de Stokes que mitiga el error en la contribución del campo en la zona (Ellmann & Vaníček, 2007).

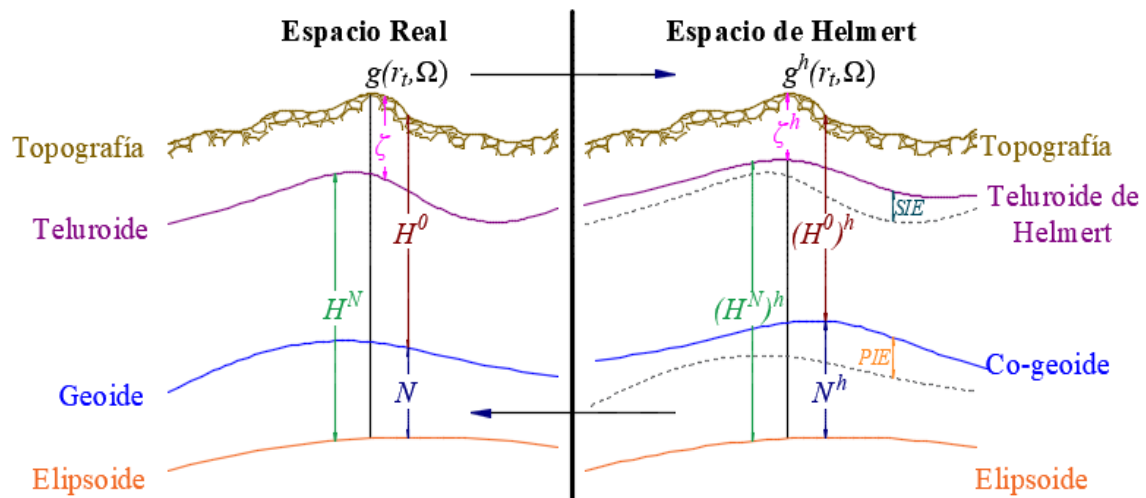


Figura 2.9. Cantidades involucradas en el espacio real y de Helmert (Ellmann & Vaníček, 2007).

a. Espacio Real

El potencial perturbador de gravedad $T(r, \Omega)$ (2.17) es definido como la diferencia entre el potencial de gravedad real $W(r, \Omega)$ y el potencial de gravedad normal $U(r, \Omega)$ generado por un elipsoide de referencia geocéntrico.

$$T(r, \Omega) = W(r, \Omega) - U(r, \Omega) \quad (2.69)$$

donde (r, Ω) es la posición geocéntrica de un punto, que puede ser representado por el radio geocéntrico (r) y su par de coordenadas geocéntricas (ϕ, λ) .

En las regiones de densidad cero, el potencial perturbador $T(r, \Omega)$ es armónico. Cuando las masas topográficas y atmosféricas están completamente ausentes, $T(r, \Omega)$ es armónico sobre la superficie del geoide, donde se cumple la ecuación de Laplace (2.11).

Asimismo, si se conocen los valores de $T(r, \Omega)$ en la superficie del geoide, la altura del geoide puede obtenerse mediante la fórmula de Bruns (2.20). Dado que el potencial perturbador no se puede medir directamente, el problema se reduce a la determinación del potencial perturbador mediante el problema del valor límite del tercer tipo fuera del geoide, donde las anomalías de gravedad referidas al nivel del geoide sirven como valores límite. Para encontrar una relación entre el potencial perturbador y las anomalías gravitatorias, se introduce la derivada radial del potencial perturbador (Ellmann & Vaniček, 2007):

$$\frac{\partial T(r, \Omega)}{\partial r} = \frac{\partial W(r, \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial U(r, \Omega)}{\partial r} \quad (2.70)$$

Evaluando la Ecuación 2.70 en la superficie de la Tierra, se puede aproximar por (Vanicek et al., 1999):

$$\left. \frac{\partial T(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=r_t} = -g(r, \Omega) - \gamma(r, \Omega) + \varepsilon_{\delta g}(r, \Omega) = -\delta g(r, \Omega) + \varepsilon_{\delta g}(r, \Omega) \quad (2.71)$$

donde la diferencia entre la gravedad real $g(r, \Omega)$ y la gravedad normal $\gamma(r, \Omega)$ es la perturbación de la gravedad $\delta g(r, \Omega)$, y $\varepsilon_{\delta g}(r, \Omega)$ es la corrección elipsoidal de la perturbación de la gravedad.

La perturbación de la gravedad no se puede medir en la superficie de la Tierra, por lo cual se transforma en anomalía de gravedad, presentada por la ecuación (Vanicek et al., 1999):

$$\Delta g(r_t, \Omega) = \delta g(r_t, \Omega) + \gamma(r_t, \Omega) - \gamma[r_0(\phi) + H^N(\Omega)] \quad (2.72)$$

donde $H^N(\Omega)$ es la altura normal y $r_0(\phi)$ es el radio geocéntrico de la superficie elipsoidal de referencia.

La gravedad normal en la Ecuación (2.72) está referida a la superficie de la Tierra y al Teluroide. Aplicando la fórmula de Bruns y la aproximación esférica la diferencia es expresada de la siguiente forma (Vaniček & Martinec, 1994):

$$\begin{aligned} \gamma(r_t, \Omega) - \gamma[r_0(\phi) + H^N(\Omega)] = \\ \frac{\partial \gamma(r, \phi)}{\partial n} \Big|_{r=r_t(\Omega)} \frac{T(r_t, \Omega)}{\gamma[r_0(\phi) + H^N(\Omega)]} = \\ - \frac{2}{r_t(\Omega)} T(r_t, \Omega) - \varepsilon_n(r_t, \Omega) \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde $\partial \gamma / \partial n$ es la aproximación lineal del gradiente de gravedad normal con respecto a la normal n del elipsoide de referencia.

Sustituyendo las Ec. (2.71) y (2.73) en (2.72), la fórmula fundamental de la Geodesia Física toma la forma (Vanicek et al., 1999):

$$\Delta g(r_t, \Omega) = \frac{\partial T(r, \Omega)}{\partial r} \Big|_{r=r_t(\Omega)} + \varepsilon_{\delta g}(r_t, \Omega) - \frac{2}{r_t(\Omega)} T(r_t, \Omega) - \varepsilon_n(r_t, \Omega) \quad (2.74)$$

La Ecuación (2.74) está formulada para el espacio real, pero puede ser aplicada en el espacio de Helmert para calcular la anomalía de gravedad de Helmert.

b. Espacio de Helmert

Las mediciones de gravedad se realizan en la superficie topográfica y para satisfacer la condición de frontera, las anomalías de la superficie deben reducirse al geoide. La reducción requiere que la función sea armónica, lo cual no se cumple debido a la presencia de la topografía. Por lo tanto, para establecer una armonicidad del potencial perturbador, las masas atmosféricas y topográficas tienen que ser explicadas de alguna manera.

El segundo método de condensación de Helmert se aplica para este objetivo. Este proceso define una nueva distribución de masas creando un nuevo modelo de Tierra,

llamado espacio de Helmert. Este espacio es distinto del espacio real de la Tierra por la diferencia del potencial de las masas topográficas y atmosféricas eliminadas y condensadas en el geoide. El potencial de gravedad de Helmert se define de la siguiente manera (Vaniček et al., 1999; Ellmann & Vaniček, 2007):

$$W^h(r, \Omega) = W(r, \Omega) - \delta V^t(r, \Omega) - \delta V^a(r, \Omega) \quad (2.75)$$

Donde el superíndice h indica espacio de Helmert, δV^t es la diferencia entre el potencial de las masas topográficas y el potencial de la capa de condensación (potencial topográfico residual) está dado por:

$$\delta V^t(r, \Omega) = V^t(r, \Omega) - V^{ct}(r, \Omega) \quad (2.76)$$

El potencial atmosférico residual δV^a , es obtenido de manera similar por:

$$\delta V^a(r, \Omega) = V^a(r, \Omega) - V^{ca}(r, \Omega) \quad (2.77)$$

donde V^t es el potencial gravitacional de la topografía eliminada por encima del geoide, V^{ct} es el potencial gravitatorio de la capa condensada, y V^a y V^{ca} son los potenciales gravitacionales de las masas atmosféricas eliminadas y condensadas.

El potencial perturbador en el espacio de Helmert se puede escribir como:

$$T^h(r, \Omega) = W^h(r, \Omega) - U(r, \Omega) = T(r, \Omega) - \delta V^t(r, \Omega) - \delta V^a(r, \Omega) \quad (2.78)$$

Aplicando la misma analogía que en la expresión (2.72), la relación entre la condición de límite y la anomalía de Helmert $\Delta g^h(r_t, \Omega)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta g^h(r_t, \Omega) &= \left. \frac{\partial T^h(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=r_t(\Omega)} + \varepsilon_{\delta g}(r_t, \Omega) + \\ &+ \left. \frac{\partial \gamma(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=r_t(\Omega)} \frac{T^h(r_t, \Omega)}{\gamma \left[r_0(\phi) + (H^N(\Omega))^h \right]} = \\ &= - \left. \frac{\partial T^h(r, \Omega)}{\partial r} \right|_{r=r_t(\Omega)} + \varepsilon_{\delta g}(r_t, \Omega) - \frac{2}{r_t(\Omega)} T^h(r_t, \Omega) - \varepsilon_n(r_t, \Omega) \end{aligned} \quad (2.79)$$

La anomalía de gravedad de Helmert, referida a la superficie de la Tierra puede ser expresada por (Vaniček et al., 1999):

$$\Delta g^h(r_t, \Omega) = \Delta g(r_t, \Omega) + \delta A^t(r_t, \Omega) + \frac{2}{r_t(\Omega)} \delta V^t(r_t, \Omega) + \delta A^a(r_t, \Omega) \quad (2.80)$$

donde el primer término del lado derecho de la Ec. (2.80) es la anomalía de aire libre, el segundo es el DTE (*Direct Topographic Effect*) y el tercer término el SITE (*Secondary Indirect Topographical Effect*). El último término es el DAE (*Direct Effect Atmospheric*).

El efecto topográfico directo (DTE) en la gravedad $\delta A^t(r_t, \Omega)$ es una cantidad residual, resultado de la diferencia entre la atracción gravitacional de las masas topográficas condensadas y la atracción de las masas topográficas reales. El efecto directo es obtenido por la derivada radial de los potenciales topográficos residuales (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaniček, 2007):

$$\begin{aligned} \delta A^t(r_t, \Omega) &= \frac{\partial \delta V^t(r_t, \Omega)}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial V^t(r_t, \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial V^{ct}(r_t, \Omega)}{\partial r} = A^t(r_t, \Omega) - A^{ct}(r_t, \Omega) \end{aligned} \quad (2.81)$$

El efecto topográfico indirecto secundario (SITE) se origina debido a la aplicación de la corrección topográfica en la anomalía de gravedad. Su valor numérico es siempre negativo y pequeño, pudiendo crecer en regiones montañosas. SITE está dado por (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaniček, 2007):

$$\frac{2}{r_t(\Omega)} \delta V^t(r_t, \Omega) = \frac{2}{r_t(\Omega)} [V^t(r_t, \Omega) - V^{ct}(r_t, \Omega)] \quad (2.82)$$

El efecto atmosférico directo (DAE) de la gravedad $\delta A^a(r_t, \Omega)$ es la atracción gravitacional de la atmósfera real menos la atracción gravitacional de la atmósfera condensada. El efecto directo es obtenido por la derivada radial de los potenciales atmosféricos residuales (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaniček, 2007):

$$\begin{aligned} \delta A^a(r_t, \Omega) &= \frac{\partial \delta V^a(r_t, \Omega)}{\partial r} \\ &= \frac{\partial V^a(r_t, \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial V^{ca}(r_t, \Omega)}{\partial r} = A^a(r_t, \Omega) - A^{ca}(r_t, \Omega) \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.6.4. Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE, *Primary Indirect Topographical Effect*)

Después de la evaluación del problema del valor límite por la fórmula de Stokes en el espacio de Helmert, se obtiene el co-geoide de Helmert. El proceso de reducción gravimétrica de las masas externas al geoide da origen al llamado Efecto Indirecto sobre el potencial, resultado de la modificación del valor del potencial ocurrido por la condensación de las masas en el interior del geoide. Para localizar el geoide en el espacio real, se evalúan los principales efectos indirectos sobre las alturas geoidales (Vanícek, Martinec, 1994).

El valor de la altura geoidal proporcionado en tales condiciones por la fórmula de Stokes representa la separación entre el elipsoide de referencia y el co-geoide, superficie equipotencial limitante de la Tierra modificada (Gemael, 1999). El PITE se obtiene mediante el cálculo de los potenciales gravitacionales de las masas topográficas y condensadas, ambos referidos al nivel del geoide y es dada por la aplicación de la fórmula de Bruns (Vanicek & Martinec, 1994):

$$\begin{aligned}
 PITE = & \frac{\delta V'(r_t, \Omega)}{\gamma_o(\phi)} = -4\pi G \rho_o \frac{[H^o(\Omega)]^2}{\gamma_o(\phi)} \left[\frac{1}{2} + \frac{H^o(\Omega)}{3R} \right] \\
 & + \frac{G}{\gamma_o(\phi)} \rho_o \iint_{\Omega' \in \Omega_o} \int_{r'=R+H^o(\Omega)}^{R+H^o(\Omega')} l^{-1} [r_t(\Omega), \Psi(\Omega, \Omega'), r'] r'^2 dr' d\Omega' \\
 & - \frac{G}{\gamma_o(\phi)} \rho_o \iint_{\Omega' \in \Omega_o} \frac{r_t^3(\Omega') - r_t^3(\Omega)}{3} l^{-1} [r_t(\Omega), \Psi(\Omega, \Omega'), R] d\Omega' \quad (2.84) \\
 & + \frac{G}{\gamma_o(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_o} \delta\rho(\Omega') \int_{r'=R}^{R+H^o(\Omega')} l^{-1} [r_t(\Omega), \Psi(\Omega, \Omega'), r'] r'^2 dr' d\Omega' \\
 & - \frac{G}{\gamma_o(\phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_o} \delta\rho(\Omega') \frac{r_t^3(\Omega') - R^3}{3} l^{-1} [r_t(\Omega), \Psi(\Omega, \Omega'), R] d\Omega'
 \end{aligned}$$

donde $\gamma_o(\phi)$ es la gravedad normal referida a la superficie del elipsoide.

2.6.5. Técnica Remove – Restaurar

La técnica Remove-Restaurar es un método utilizado en el enfoque de Stokes-Helmert para determinar modelos geoidales. En el cálculo del modelo geoidal, el campo anómalo se puede descomponer en tres segmentos: las bajas frecuencias del espectro de gravedad (N_{MGG}) se obtienen a partir de modelos de geopotencial global basados en satélites (larga longitud de onda); las frecuencias medias ($N_{\Delta g}$) se obtienen a partir de observaciones terrestres y marinas de la gravedad (longitud de onda media); y las frecuencias altas -corta longitud de onda- (PITE) que proceden de los datos topográficos (Guimarães, 2013).

El cálculo de la altura geoidal N combinando los tres segmentos se basa en la siguiente fórmula (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaníček, 2007):

$$N = N_{MGG} + N_{\Delta g} + PITE \quad (2.85)$$

En resumen, según Blitzkow et al. (2008), la determinación de un modelo de geoide gravimétrico estático consta de cinco etapas:

- Cálculo de las anomalías puntuales de aire libre por medio de datos de gravimetría terrestre (coordenadas, altura ortométrica, aceleración de la gravedad).
- Cálculo de las anomalías completas de Bouguer, para obtener posteriormente las anomalías medias de aire libre en una cuadrícula de 5' x 5'. Para este cálculo son necesarias las anomalías puntuales de aire libre y el modelo digital de terreno.
- Cálculo de la anomalía de gravedad de Helmert en la superficie terrestre, obtenidas adicionando a la anomalía media de aire libre, el efecto topográfico directo (DTE), el efecto atmosférico directo (DAE) y el efecto topográfico indirecto secundario (SITE).
- Integración de Stokes, utilizando la técnica “Remove-Restaurar”.
- Adicionar el efecto topográfico indirecto primario (PITE) a las alturas geoidales referidas a un “geoide ficticio” denominado co-geoide (Gemael, 1999; Matos, 2005), para obtener las alturas geoidales referidas a un nuevo geoide.

2.7. Misiones Satelitales y Campo de Gravedad Global

La geodesia espacial en los últimos años, ha permitido mejorar el conocimiento del campo gravitacional terrestre. Las misiones satelitales como CHAMP (*CH*allenging

Minisatellite Payload), LAGEOS (*LAser GEODynamic Satellite*), GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) y GOCE (*Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer*), han sido diseñados principalmente para monitorear el campo gravitacional terrestre, contribuyendo a un conocimiento más preciso del mismo, y en consecuencia se han desarrollado Modelos Geopotenciales Globales (MGG) de alta precisión y resolución espacial.

Las misiones satelitales permiten resolver el problema principal de la determinación del campo de gravedad global; las mediciones de la gravedad terrestre tienen una alta precisión pero es imposible combinar medidas de gravedad terrestres con precisión en distancias largas y globales. La precisión de los componentes del campo de gravedad a gran escala y globales basados en datos terrestres son pobres (problemas de altura, referencia de altura entre continentes y países, precisión de la superficie del mar).

Se plantea la determinación del campo de gravedad desde el espacio mediante el uso de satélites que tiene como principio básico la evaluación con precisión de las perturbaciones de la órbita de los satélites (Förste et al., 2016).

La determinación del campo de gravedad usando satélites (mediante evaluación de perturbaciones de la órbita) significa resolver la ecuación de movimiento sobre la base de la determinación precisa de la órbita (Förste et al., 2016):

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) / m = \vec{f}_g + \vec{f}_{ng} + \vec{f}_{emp} \quad (2.86)$$

donde f_g representa las fuerzas gravitacionales (contiene los coeficientes armónicos esféricos), f_{ng} son las fuerzas no gravitacionales y f_{emp} las fuerzas residuales desconocidas.

El seguimiento ininterrumpido de un satélite de órbita baja por GPS (Global Positioning System) en combinación con la medición de las fuerzas no gravitacionales mediante acelerometría, corresponde a la gravimetría absoluta de caída libre en un laboratorio en la Tierra. CHAMP fue la primera misión de este tipo, seguida por GRACE donde la medición diferencial del movimiento relativo de dos satélites aumenta la sensibilidad, con GOCE se implementa el primer satélite con gradiometría gravitacional que es la acelerometría diferencial entre varias masas de prueba dentro de un satélite (Rummel 2010).

2.7.1. LAGEOS

La misión satelital LAGEOS-I diseñada por la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), fue lanzada al espacio el 4 de Mayo de 1976. Dedicada exclusivamente a la medición láser de alta precisión, es el primer satélite de este tipo, y brindó la primera oportunidad de adquirir datos láser no degradados por errores orbitales o por la matriz del satélite.

El 22 de Octubre de 1992 fue lanzado LAGEOS-II, con un diseño basado en el de LAGEOS-I, construido por la Agencia Espacial Italiana. Los satélites LAGEOS son satélites pasivos (sin energía), cubiertos con 426 reflectores (Figura 2.10).



Figura 2.10. Satélite LAGEOS (Rummel 2010).

LAGEOS está basado en la técnica *Satellite Laser Ranging* (SLR). El largo historial de observación SLR se ha convertido en una fuente muy importante de datos para la detección y el monitoreo de cambios globales y locales en muchos campos diferentes (estudios científicos del sistema Tierra, atmósfera y océanos) (Ciufolini & Pavlis, 2003).

Los datos proporcionados por las mediciones SLR a estos satélites ayudan en la definición del marco de referencia terrestre. También han contribuido a muchas otras áreas, como por ejemplo: en el acceso al centro de masa de la Tierra en relación con la red global y sus variaciones temporales; en mediciones de la constante gravitacional geocéntrica; han permitido controlar las deformaciones tridimensionales de la Tierra sólida; contribuyeron en el monitoreo de la rotación de la Tierra, el movimiento polar y el seguimiento de las variaciones temporales en los componentes estáticos y dinámicos

de larga longitud de onda del campo gravitatorio de la Tierra; dan respaldo en el control de variaciones en la topografía de la Tierra líquida y sólida; ayudaron en la calibración y validación de las órbitas obtenidas a partir de técnicas de seguimiento de microondas, entre otras (Ciufolini & Pavlis, 2003).

Las aplicaciones propias de los datos SLR en el contexto de la determinación del campo de gravedad terrestre basado en satélites son: el uso directo para la determinación del campo de gravedad (parte de longitudes de onda largas, incluida la variación temporal), la validación de modelos de campo de gravedad a través de pruebas de computación en órbita usando datos de seguimiento SLR y la validación de órbitas basadas en GPS para satélites que se utilizan para la determinación del campo de gravedad (Förste et al., 2016).

2.7.2. CHAMP

La misión alemana de satélites para investigación y aplicaciones geocientíficas y atmosféricas CHAMP (Figura 2.11), administrada por el GFZ (*GeoForschungsZentrum Potsdam*), fue lanzada el 15 de Julio del 2000 y después de 10 años de funcionamiento, el 19 de septiembre de 2010, finalizó su misión.

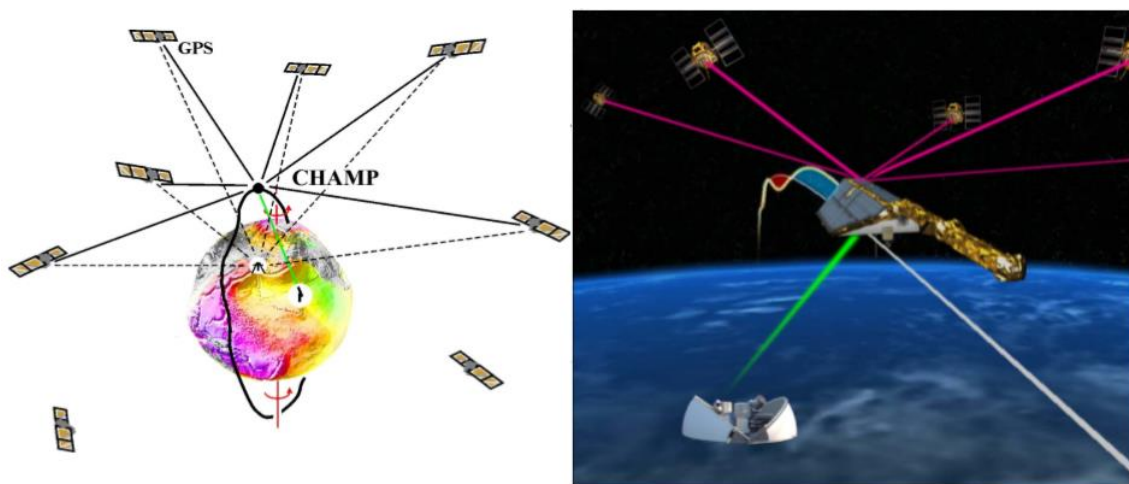


Figura 2.11. Seguimiento de satélite a satélite CHAMP-GPS y láser SLR (Förste, 2015).

Los objetivos principales de CHAMP fueron el mapeo del campo de gravedad global para determinar de forma precisa las características de larga longitud de onda del campo de gravedad terrestre estático y sus variaciones temporales; el mapeo del campo magnético global para determinar de forma precisa el campo magnético principal y

cortical de la Tierra y sus variaciones espacio temporales; el modelado de la ionósfera y la tropósfera (HofmannWellenhof & Moritz, 2005).

Para alcanzar los objetivos de la misión, fueron utilizados diferentes instrumentos de medición. Un receptor GPS de doble frecuencia conectado a un sistema de antenas múltiples para determinar la órbita del satélite, utilizando pseudorrangos de código y fase; el acelerómetro de tres ejes para medir las aceleraciones no gravitatorias; el retroreflector láser para el seguimiento de respaldo para medir los rangos bidireccionales entre las estaciones terrestres y los satélites con una precisión de 1-2 cm, que permitía la determinación precisa de la órbita; magnetómetro *Fluxgate* para medir los componentes del vector del campo magnético de la Tierra; equipo para determinar la densidad y temperatura de los iones, la velocidad de deriva y el campo eléctrico; dos sensores avanzados (brújula estelar avanzada) para proporcionar información de alta precisión según sea necesario para el acelerómetro de tres ejes, el medidor de deriva de iones digitales (HofmannWellenhof & Moritz, 2005).

El principio de medición se basó en el seguimiento de satélite a satélite en modo alto-bajo. El campo de gravedad de la Tierra perturba la órbita del satélite CHAMP, estas aceleraciones perturbadoras corresponden a las primeras derivadas del potencial gravitacional. Esto implica que el campo gravitatorio de la Tierra puede derivarse de las perturbaciones observadas de la órbita del satélite gravitacional aplicando la integración de la órbita numérica (HofmannWellenhof & Moritz, 2005).

CHAMP sirvió como plan piloto para uso preparativo de observaciones de GPS espaciales para investigación atmosférica e ionosférica y aplicaciones en predicción meteorológica y monitoreo del clima espacial.

Con el satélite CHAMP por primera vez se hizo posible derivar el campo gravitatorio terrestre desde las perturbaciones de la órbita de un solo satélite recogidas durante meses, derivando en múltiples estudios como cálculos de modelos de geoide. Los datos recolectados sirvieron de referencia para nuevos modelos globales del campo gravitatorio terrestre.

Esta misión satelital dio inicio a la década internacional de la investigación sobre el geopotencial, abriendo una nueva era en la investigación del geopotencial. Las misiones de seguimiento GRACE y GOCE fueron extensiones consecuentes en el camino hacia un modelo de campo de gravedad detallado para la investigación de la Tierra como sistema.

2.7.3. GOCE

La misión satelital GOCE fue lanzada al espacio el 17 de Marzo de 2009 por la *European Space Agency* (ESA) con una órbita polar a 260 km de altura, para maximizar la sensibilidad a las variaciones del campo de gravedad terrestre. Después de 4 años y 8 meses en órbita alrededor de la Tierra, la misión llegó a su fin el 11 de Noviembre de 2013.

Sus principales objetivos fueron determinar las anomalías del campo de gravedad con una precisión de 1 mGal; determinar el geoide con una precisión de 1 - 2 cm y lograr lo anterior con una resolución espacial mejor a 100 km (Rummel, 2015).

El instrumento principal en GOCE fue un gradiómetro electrostático de gravedad (EGG, por sus siglas en inglés), el cual se muestra en la Figura 2.12. El EGG consistió en tres pares de acelerómetros capacitivos montados en una estructura de soporte estable. Cada acelerómetro cuenta con una masa de prueba que flota en una pequeña jaula y se mantiene en el centro por fuerzas electrostáticas, aplicando algo de voltaje entre la jaula y los diferentes lados de la masa (Fehringer et al., 2008).

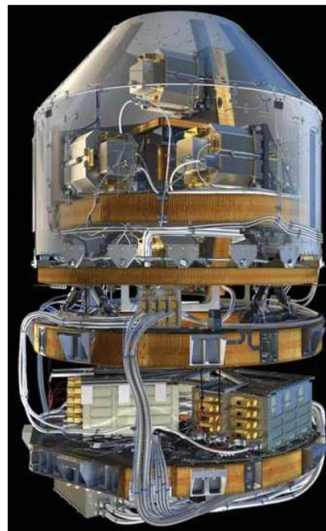


Figura 2.12. Gradiómetro electrostático de gravedad (Fehringer et al., 2008).

En el satélite fueron instalados dos acelerómetros a una distancia de 50 cm que forman un "brazo gradiométrico", la distancia entre cada par de sensores no debe variar en más del 1% de un Angstrom (el diámetro de un átomo) durante un tiempo medio intervalo de aproximadamente tres minutos (Fehringer et al., 2008). Bajo la influencia del campo gravitatorio de la Tierra, las dos masas de prueba del mismo par tienen la tendencia a acercarse o alejarse una de la otra, y el gradiómetro mide este movimiento.

Los resultados de los acelerómetros se restan el uno del otro. El ruido y las fuerzas perturbadoras que afectan a ambos acelerómetros se eliminan y esto se denomina "rechazo de modo común". La diferencia en la aceleración debida a la Tierra es lo que queda y se llama el "gradiente de gravedad". Este es el principal producto científico de GOCE (Fehringer et al., 2008).

Los gradientes se obtienen en las tres dimensiones y como resultado, hay un mapa de gradiente de gravedad que cubre la Tierra, excepto en las áreas de los polos. Los datos GOCE permiten la recuperación de un campo de gravedad estático de alta resolución con una calidad homogénea, una buena precisión y una resolución muy alta. Los productos resultantes se utilizan en la modelización oceánica, terrestre y del nivel del mar.

2.7.4. GRACE

El objetivo de la misión GRACE es realizar una medición precisa del campo gravitatorio terrestre y sus variaciones en el tiempo. La misión conjunta de la agencia espacial alemana (DLR) y la NASA, lanzada el 17 de Marzo de 2002, está compuesta por dos satélites mellizos (GRACE-1 y GRACE-2), que se encuentran en la misma órbita a 220 kilómetros de distancia uno del otro (Figura 2.13).

El 27 de Octubre de 2017, la misión satelital GRACE terminó todas las operaciones científicas. Los satélites gemelos de GRACE proporcionaron información sobre cómo nuestro planeta está cambiando al rastrear el movimiento continuo del agua líquida, el hielo y la tierra sólida.

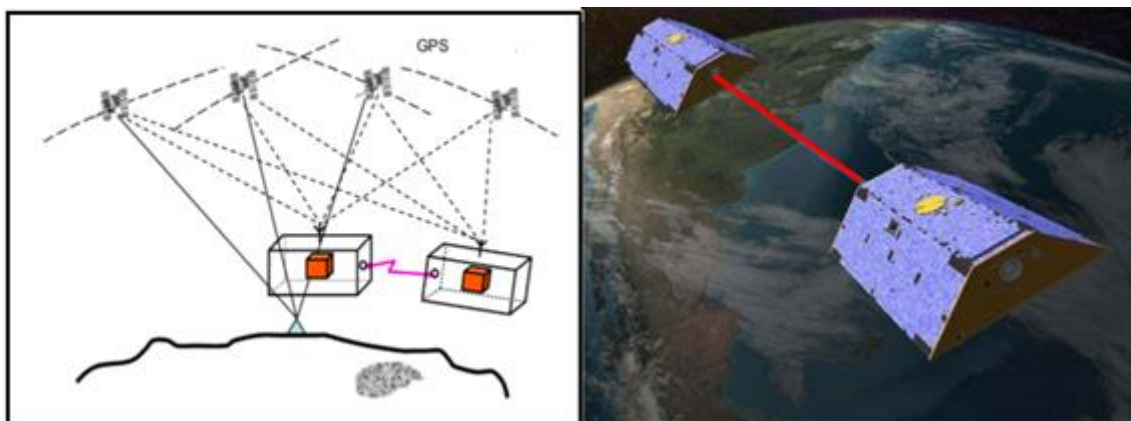


Figura 2.13. Misión satelital GRACE (Förste et al., 2016).

El campo de gravedad de la Tierra es originado tanto por la distribución de masas de la Tierra sólida como por la distribución de las capas de fluidos que la rodean: atmósfera, océanos, hielos, aguas superficiales y aguas subterráneas. Las mareas en el océano y en la parte sólida, las perturbaciones atmosféricas, el reacondicionamiento de la corteza debido a deshielos, los cambios estacionales en las aguas superficiales y subterráneas, producen variaciones en la distribución de masas de la Tierra. Estas variaciones se manifiestan como variaciones temporales del campo de gravedad (Montenegro, 2010).

Conocer las variaciones temporales en el campo gravitatorio tiene diversas aplicaciones, como por ejemplo, el seguimiento del movimiento de agua de la Tierra para monitorear los cambios en el almacenamiento de agua subterránea, la cantidad de agua en grandes lagos y ríos, la humedad del suelo, las capas de hielo y los glaciares y el nivel del mar causado por la adición de agua al océano. Esto proporciona una visión única del clima de la Tierra y de los efectos que provoca el cambio climático.

Las variaciones en el campo gravitatorio provocan cambios en la distancia entre los dos satélites. Un instrumento de microondas mide con una muy alta precisión la distancia entre ambos satélites (Figura 2.13), a partir de lo cual es posible determinar las fluctuaciones en el campo gravitatorio, y por lo tanto, la densidad de la Tierra en la superficie debajo de los satélites. Además de este cambio de rango, las fuerzas no gravitatorias se miden en cada satélite usando un acelerómetro de alta precisión (Bettadpur, 2012).

Como se mencionó anteriormente, las perturbaciones que se observan en la órbita de los satélites GRACE y su distancia relativa permiten estimar el potencial de gravedad terrestre W . El campo de gravedad de la Tierra W es producto de la distribución de masas, tanto superficiales como profundas. Los cambios que se producen en la distribución de masa se traducirán en variaciones temporales del campo de gravedad. El geopotencial en un punto de campo exterior, en el instante t , se puede expresar como (Bettadpur, 2012):

$$V(r, \varphi, \lambda; t) = \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \left(\bar{C}_{nm}(t) \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}(t) \sin m\lambda \right) \quad (2.87)$$

Donde r es el radio geocéntrico; (φ, λ) son la latitud y longitud del punto de campo, respectivamente; $\bar{P}_{nm}(\cos\vartheta)$ representa los polinomios asociados de Legendre totalmente normalizados; y \bar{C}_{nm} y \bar{S}_{nm} , son los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos

totalmente normalizados, que ahora dependen del tiempo y serán los provistos por la misión GRACE.

Notar que en la ecuación (2.87) se ha truncado la serie en el grado y orden máximo N_{max} , que dependerá de los datos y la precisión alcanzada. De acuerdo a la convención de la geodesia satelital, se elige el origen del sistema de referencia coincidente con el centro de masas de todo el sistema terrestre, incluyendo sus componentes sólidos y líquidos, por lo que el potencial no posee términos de grado $n=1$ en la Ecuación (2.87) (Pereira, 2011).

La misión GRACE-FO (GRACE Follow-On) será la sucesora de la misión original, enfocándose en continuar el exitoso registro de datos de GRACE. Los nuevos satélites llevarán un moderno instrumento láser para rastrear la distancia de separación entre los satélites con el potencial de producir una medición aún más precisa.

El proyecto GRACE-FO se ejecuta en los Estados Unidos bajo la dirección de la *Science Mission Directorate* (SMD) de la NASA y la Oficina del Programa de Misiones Sistemáticas de la Tierra en GSFC (*Goddard Space Flight Center*). El JPL (*Jet Propulsion Laboratory*) tiene asignada la responsabilidad del proyecto GRACE-FO.

Los resultados de la misión GRACE realmente han revolucionado el campo de la investigación del sistema de la Tierra y han establecido la necesidad de futuras misiones de gravedad por satélite.

Las misiones satelitales descritas en este capítulo han brindado gran información sobre el campo de gravedad terrestre, mejorando el conocimiento de diferentes procesos dinámicos de la Tierra y permitiendo el cálculo de modelos estáticos del campo de gravedad cada vez más precisos, con un cubrimiento global y una mejor resolución. Los buenos resultados obtenidos en estas misiones hacen pensar que en el futuro la comprensión del campo de gravedad de la Tierra mejore con nuevas misiones y datos que permitan un mayor y mejor estudio de todas sus componentes.

A partir de la información brindada por estos satélites y las posibilidades informáticas, se hace posible la utilización práctica de teorías construidas hace más de un siglo para el estudio de la forma y dimensiones de la Tierra, de su campo de gravedad y sus variaciones temporales (Cornero et al., 2016).

3. ÁREA DE ESTUDIO E INFORMACIÓN UTILIZADA

3.1. Áreas de estudio

El territorio de Costa Rica es la principal área geográfica de estudio, sin embargo, a modo de comparar y validar la metodología de cálculo utilizada en la obtención de un modelo de geoide, se definió una segunda área de estudio.

Costa Rica tiene características muy particulares que pueden inferir en los resultados obtenidos a través de la metodología trazada para la determinación del geoide estático, por lo que, tal como se expuso anteriormente, se planteó trabajar en una zona conformada también por características diferentes, seleccionando así la Mesopotamia Argentina para el cálculo de un modelo de geoide estático.

Para la selección de esta segunda zona de estudio se tomaron en cuenta principalmente dos puntos comparativos:

1. La Mesopotamia Argentina se encuentra completamente dentro del territorio continental de la Argentina (no limita con océanos), mientras que Costa Rica es casi una “isla” dentro del continente americano, ya que una gran extensión de sus límites continentales está conformada por el Océano Pacífico y el Mar Caribe.
2. Los datos gravimétricos disponibles para Costa Rica son antiguos, y en su contraparte la Mesopotamia Argentina cuenta con datos de campañas de medición gravimétrica más actuales.

3.1.1. Costa Rica (CR)

Se localiza en América Central, dentro de las coordenadas 8° y $11^{\circ}15'$, de latitud Norte, y 82° y 86° , de longitud Oeste, limita al Norte con la República de Nicaragua, al este con el mar Caribe, al Sureste con la República de Panamá y al Oeste con el océano Pacífico (Figura 3.1). La superficie total es de $551,100 \text{ km}^2$, de los cuales $51,100 \text{ km}^2$ son zona continental y $587,682 \text{ km}^2$ de territorio marino. Según la Comisión Nacional de División Territorial Administrativa en 1997, Costa Rica suma en costas una longitud de 1,466 km, divididos en dos litorales; el Caribe con una longitud de 212 km y el Pacífico con 1,254 km de longitud. La longitud máxima del territorio continental es de 464 km y la mínima de 119 km.

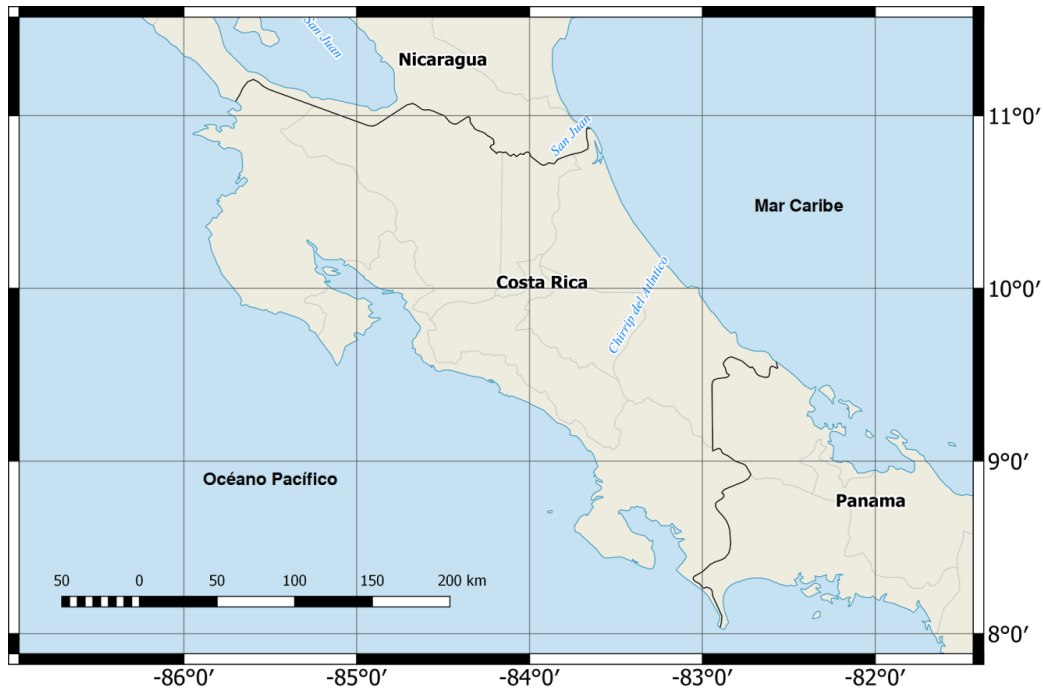


Figura 3.1. Ubicación geográfica de Costa Rica.

Las características del territorio costarricense son poco usuales en el mundo, ya que se considera como una tierra de formación nueva (150 millones de años). De acuerdo con la constitución del relieve, se encuentra atravesada de Noroeste a Sureste por una serie de cordilleras (Figura 3.2): La Cordillera de Tilarán constituida por rocas volcánicas terciarias, y la Cordillera Volcánica Central se encuentra conformada por cuatro edificios volcánicos, Poás, Irazú, Barva y Turrialba. Estructuralmente la Cordillera de Talamanca es un anticlinal formado por rocas sedimentarias marinas y por rocas volcánicas, cuya formación pertenece a la era Terciaria. Se inicia al este del Valle Central y tiene una orientación Noroeste - Sureste. El sistema montañoso, al encontrarse más cerca del litoral pacífico, presenta mayor cantidad de accidentes geográficos, mientras que su pendiente es mucho más suave en el sector atlántico. Algunas de sus cimas sobrepasan los 3,000 m, tal es el caso de los cerros de la Muerte (3,491 m), Kámuk (3,554 m), Urán (3,333 m) y el Chirripó, el cual es el más alto del territorio nacional (3,820 m) (MINAE et al, 1997).

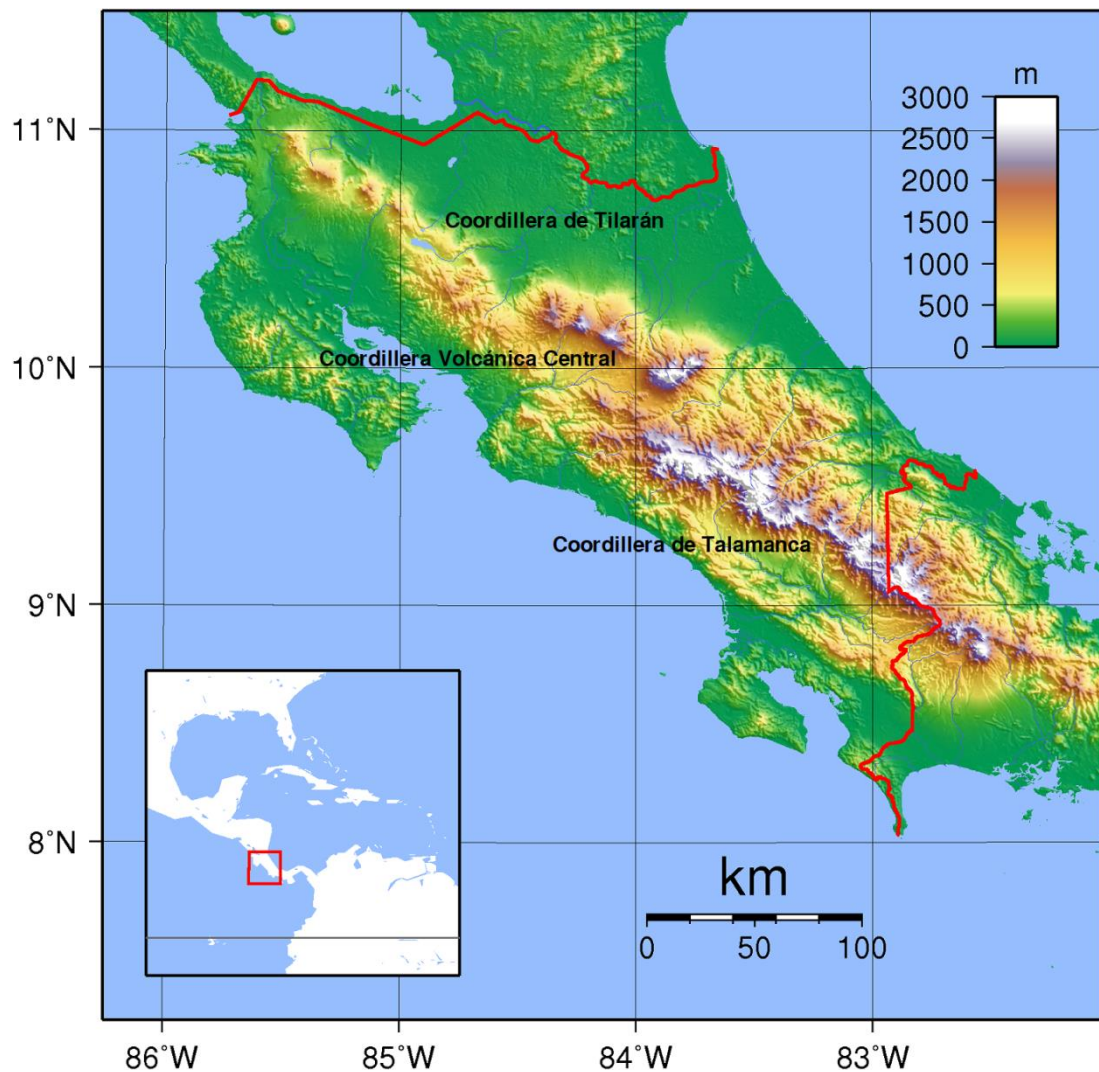


Figura 3.2. Ubicación de principales cordilleras de Costa Rica (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Costa_Rica_Topography.png?uselang=es).

En Costa Rica se han reconocido más de 200 focos volcánicos, de los cuales solamente unos 20 poseen morfologías juveniles de gran tamaño. De estos volcanes, en la actualidad, el Rincón de la Vieja, el Poás, y el Turrialba presentan actividad importante, con erupciones de ceniza y material incandescente; mientras el Irazú y el Arenal han mostrado actividad eruptiva en época histórica. Los otros, sin embargo, manifiestan cierta actividad residual (solfataras, aguas termales, microtemblores, etc.) con formas recientes, que les permite no hacerse acreedores aún del calificativo de extintos (MINAE et al, 1997).

El desplazamiento continental sobre las rocas viscosas del manto terrestre es llevado a cabo de modo continuo a través del tiempo. En su proceso de desplazamiento, las placas continentales interactúan de diferentes formas: pueden deslizarse y/o hundirse al lado de otras, proceso que se conoce con el nombre de subducción. Esta característica se

encuentra en la costa Pacífica de Costa Rica, con la placa Cocos y la placa Caribe. Además, al Sureste del territorio, ambas placas interactúan con la de Nazca, caso conocido como punto triple, que está situado en la región del golfo Dulce. Frente a la costa Pacífica del istmo centroamericano se encuentra una depresión submarina llamada Fosa Mesoamericana (MINAE et al, 1997).

El proceso de subducción hace que la placa Coco se esté hundiendo poco a poco bajo la emergente placa del Caribe. Esta se desliza hacia el Este produciendo así el surgimiento paulatino del territorio costarricense. El choque de la placa Coco contra la del Caribe origina la subducción de la primera bajo la segunda, facilitando el levantamiento geotectónico del territorio nacional. Ello propicia, entre otros aspectos, la intensa actividad sísmica de diversa magnitud que afecta al país (aunque no todos los movimientos sísmicos son perceptibles a la población) (MINAE et al, 1997).

Como ejemplo, se destacan en los últimos 25 años tres grandes terremotos: Limón en 1991, con 7.7° de magnitud en la escala Richter; Cinchona en 2009, con 6.2° de magnitud, y el más reciente Nicoya en 2012, de 7.6° de magnitud.

3.1.2. Mesopotamia Argentina

Es una región de la República Argentina conformada por las provincias de Misiones, Corrientes y Entre Ríos, sumando un territorio entre las tres provincias de 196,781 km² (Figura 3.3). Está enmarcada entre los paralelos -27° 15' y -30° 20' de latitud Sur, y entre los meridianos -55° 40' y -58° de longitud oeste (Silva, 1999).

sedimentos eminentemente arenosos y limosos, más o menos friables; el paisaje es el de una llanura incisa por varios valles fluviales y los respectivos interfluvios en forma de cordones también arenosos. Parte de los valles fluviales son zonas de esteros.

3. Región “llana” que ocupa la extensión entre los ríos Miriñay y Aguapey, con substrato de rocas duras (basaltos y cuarcitas/areniscas) pero cubiertas por un espesor relativamente grueso de sedimentos areno-arcilloso. Es la llamada región de los “malezales”, en parte inundada durante largos períodos, y con manchones de monte en las partes más altas.
4. Región “deprimida”, constituida por la cuenca del Iberá con sus lagunas, esteros y malezales y los valles fluviales de los ríos Corrientes, Aguapey y Miriñay. Asimismo, quedan incluidos en esta región los complejos de esteros de la región arenosa (esteros del Riachuelo, de Las Maloyas, Carambola, etc).

El sistema hidrográfico de la región es muy importante. Hay gran cantidad de ríos, aunque tienen cursos cortos. Los más relevantes son el Paraná y el Uruguay, con sus afluentes: Iguazú, Urugua-í, Pepirí Guazú, Acaraguay, Chirimía, Hernandarias y Gualeguay. Entre las lagunas se encuentran las de Trim, Luna, Fernández e Iberá. Dentro de la hidrografía de la región se destacan las Cataratas del Iguazú, un conjunto de 275 saltos que caen en forma vertiginosa desde 70 metros de altura, en escalones y cascadas, en el curso del río Iguazú.

3.2. Cálculo de modelo geoidal

3.2.1. Datos de gravedad terrestre

a. Costa Rica

La información gravimétrica terrestre disponible consta de una base de datos analógica compuesta por fichas de puntos pertenecientes al Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGN-CR), que datan del período 1960 a 1980 (Figura 3.4). Esta información se digitalizó en una planilla de cálculo.

Si bien se contaba con un total de 2,445 fichas de puntos, se trabajó solamente con información de los 2,333 puntos que tenían la información completa.

INSTITUTO GEOGRAFICO DE COSTA RICA	
Provincia: <u>San José</u>	Gravedad: Obs. <u>977 939.89</u>
Fecha: <u>23-11-79</u>	Teor. <u>978 202.04</u>
Hora: <u>10:11</u> Elev: <u>1147.75</u>	Anomalía: Aire Libre <u>89.98</u>
Lat: <u>09° 55.60</u> Long: <u>84° 04.44</u>	Bouguer <u>-36.27</u>
Página: _____ Libro: _____	ABD-43 17-16B
Observador: <u>ALBADI</u> Inst: <u>E-56</u>	977939.89
Observaciones <u>15:47</u>	

Figura 3.4. Ejemplo de Ficha analógica.

Se agregó además información gravimétrica de los países vecinos a Costa Rica (Nicaragua, Panamá, El Salvador y Honduras), cedida por la *Escola Politécnica de la Universidad de São Paulo* en forma de grilla de anomalías de Bouguer con una resolución de 5 'x 5'. La grilla se generó a partir de la información de Costa Rica a la que se le sumaron 2,245 puntos en Nicaragua, 424 puntos en Panamá, 81 puntos en El Salvador y 108 puntos en Honduras (Figura 3.5).

Los datos de gravedad se sometieron a un control para determinar inconsistencias en los mismos. Este proceso se realizó comparando la anomalía de aire libre puntual con la anomalía de aire libre del *European Improved Gravity model of the Earth by New techniques* - EIGEN-6C4 -(Förste et al., 2014). En la comparación los datos se consideraron aceptables cuando la diferencia entre la anomalía de aire libre del punto y la obtenida del MGG en el mismo punto fue inferior a 15 mGal, lo que puede traducirse en una diferencia en la altitud del orden de los 50 metros.

Para realizar este control se tomó en cuenta que los registros de gravedad con los que se realizó este trabajo, en su mayoría, son datos antiguos, donde las mediciones fueron realizadas principalmente con gravímetros *LaCoste & Romberg* de la serie G y gravímetros *Worden*, además, las coordenadas de latitud, longitud y alturas fueron obtenidas de cartas a escala 1:50.000 o inferiores.

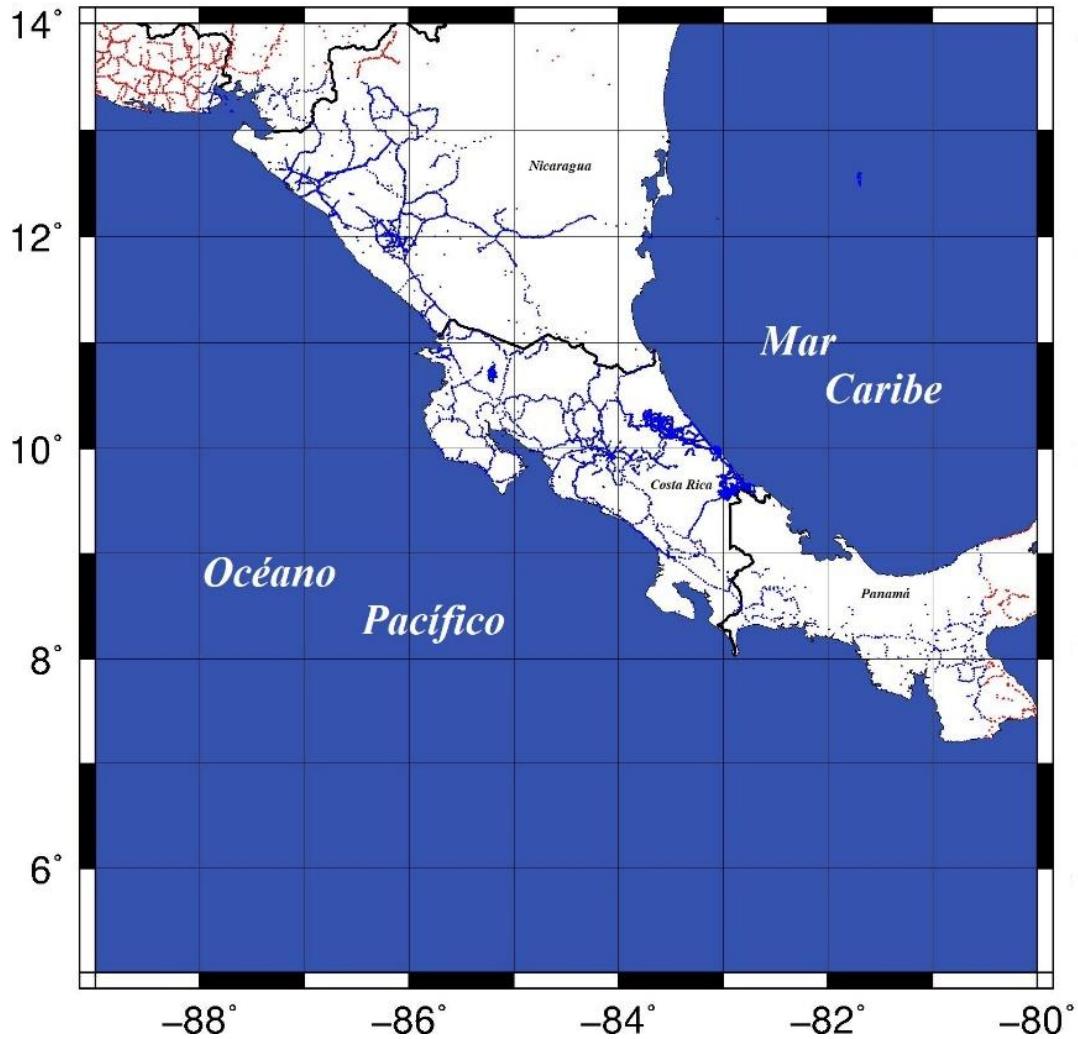


Figura 3.5. Distribución de puntos con información gravimétrica utilizados en el cálculo para Costa Rica.

b. Mesopotamia Argentina

Según Villella y Pacino (2010), en Argentina se dispone de una base de datos conformada con unos 150,000 puntos que incluyen aquellos pertenecientes a las redes IGN-Ar de distintos órdenes y datos aportados por institutos científicos, universidades y empresas privadas. Esta información es variada en calidad y distribución geográfica. Para el modelado del geoide gravimétrico estático, se utilizó la información de puntos pertenecientes a las provincias de Misiones, Entre Ríos y Corrientes, así como de las provincias y países colindantes (Figura 3.6).

Fueron utilizados para el cálculo del modelo de geoide estático para la Mesopotamia Argentina un total de 38,441 observaciones gravimétricas terrestres, de las cuales 21,975 pertenecen a la Argentina, 9,093 están ubicadas en Brasil, 2,267 en Uruguay y 5,106 en

Paraguay.

Las observaciones gravimétricas de la Argentina utilizadas en este cálculo tienen dos fuentes de origen: líneas de nivelación del IGN-Ar de distintos órdenes y datos propios medidos por el Área Geodinámica y Geofísica de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA – UNR).

El proceso de medición de las líneas de nivelación llevado a cabo por el IGN-Ar demandó casi un siglo. En ese lapso se utilizaron distintos gravímetros y variado instrumental topográfico. Por otro lado, las coordenadas planimétricas de los puntos que componen las líneas fueron obtenidas de cartas, aunque aproximadamente dos terceras partes de ella fueron reocupadas con navegadores GPS. Por el contrario, las estaciones medidas por la FCEIA tuvieron lugar en la última década. Las determinaciones gravimétricas se hicieron con gravímetros *LaCoste & Romberg* modelo G y las coordenadas fueron medidas con equipos GPS geodésicos de manera tal de garantizar una precisión en la altura elipsoidal (h) inferior a los 10 cm.

La información para los países vecinos al área de trabajo fue proporcionada por la *Escola Politécnica de la Universidad de São Paulo*, en forma de una cuadrícula de anomalías de Bouguer con resolución de 5 'x 5'. La cuadrícula fue generada con datos del Servicio Geográfico Militar (SGM) de la República Oriental del Uruguay, la Dirección del Servicio Geográfico Militar de Paraguay (DISERGEMIL) y con las informaciones de Brasil provenientes del Instituto Brasileño de Geografía y Estadística (IBGE), Universidades y empresas petroleras.

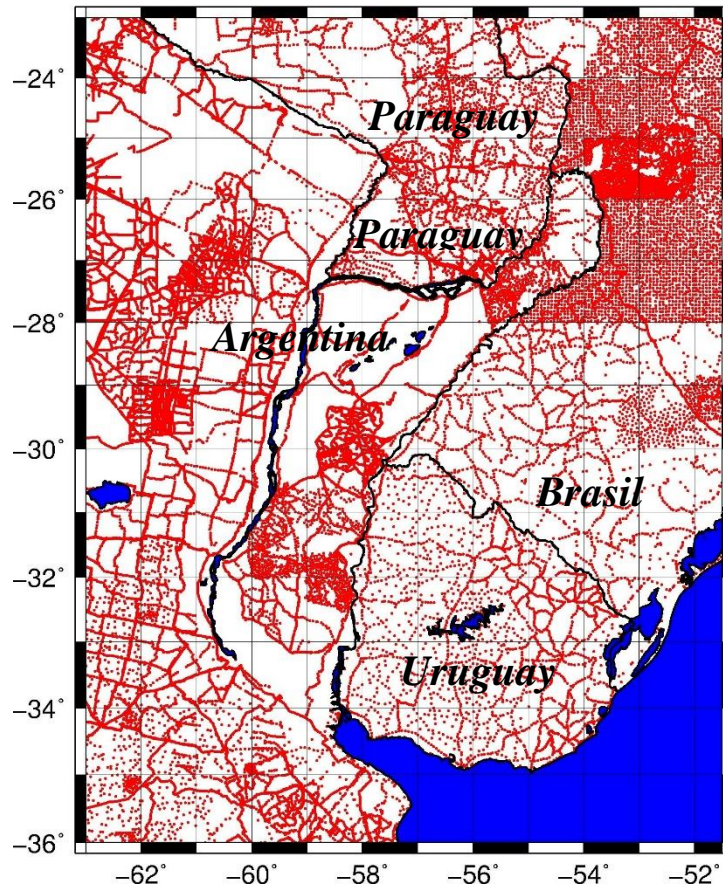


Figura 3.6. Distribución geográfica de las estaciones gravimétricas de la Mesopotamia Argentina.

3.2.2. Modelo Digital de Terreno (MDT)

En este trabajo se utilizó el MDT *South American Model 3s versión 2* (SAM3s_v2), con una grilla de resolución de 3" x 3" de arco (aproximadamente 90 m x 90 m), el cual se muestra en la Figura 3.7. Abarca un área comprendida entre las latitudes 25° Norte a 60° Sur y entre las longitudes 100° a 25° Oeste; comprende un total de 1,983 cuadrículas de 1°x1° (Matos & Blitzkow, 2008).

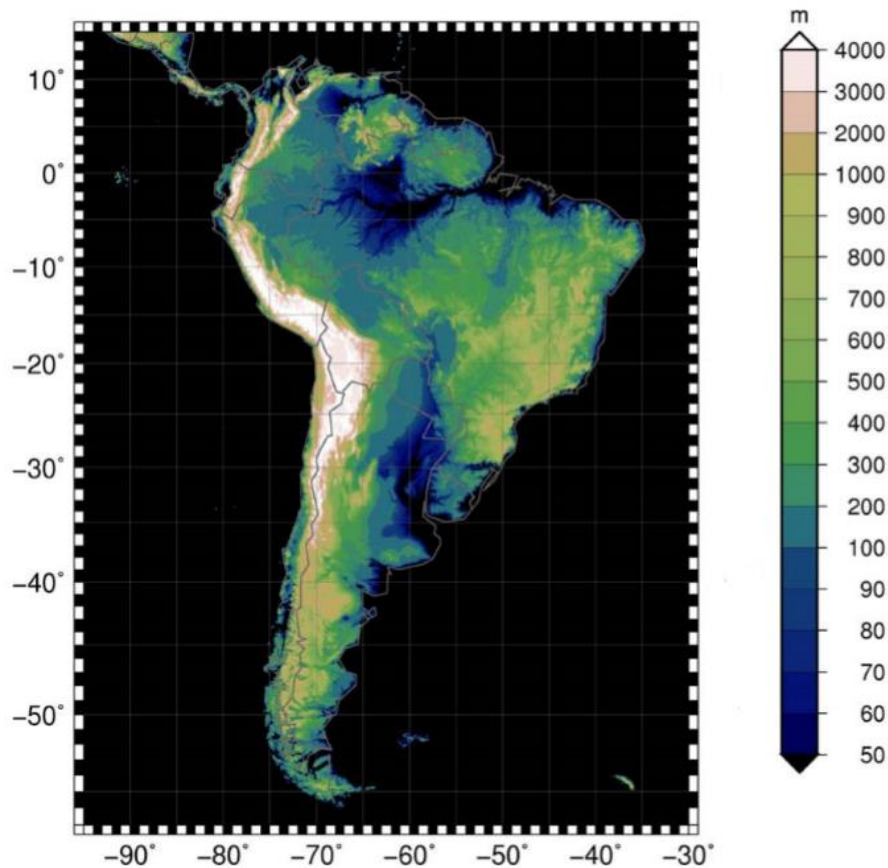


Figura 3.7. Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2 (Blitzkow et al., 2009).

Este modelo se deriva del Modelo Digital de Terreno SRTM3 disponible a nivel global (Hensley et al, 2001), el cual es producto de la misión SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*), proyecto conjunto de la NASA – Estados Unidos, DLR - Alemania y de ASI – Italia, utilizando la nave espacial Endeavour.

En el MDT SAM3s_v2, los vacíos en el MDT SRTM3 debidos a fallos en la obtención de datos fueron completados con datos altimétricos obtenidos de cartas digitalizadas y el MDT DTM2002 -*Digital Terrain Model 2002*- (Saleh & Pavlis, 2002; Matos, 2005). Además, fueron reconstruidas las alturas ortométricas, sustituyendo el EGM96 (Lemoine et al, 1998), utilizado originalmente, por el modelo geopotencial EIGEN-GL04C (Förste et al., 2008).

Este MDT SAM3s_v2 brinda la información necesaria para el cálculo de las anomalías completas de Bouguer, las anomalías de Helmert y el efecto topográfico indirecto primario. En las siguientes figuras se muestra el Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2, para las dos zonas de estudio, Costa Rica (3.8.a) y la Mesopotamia Argentina (3.8.b).

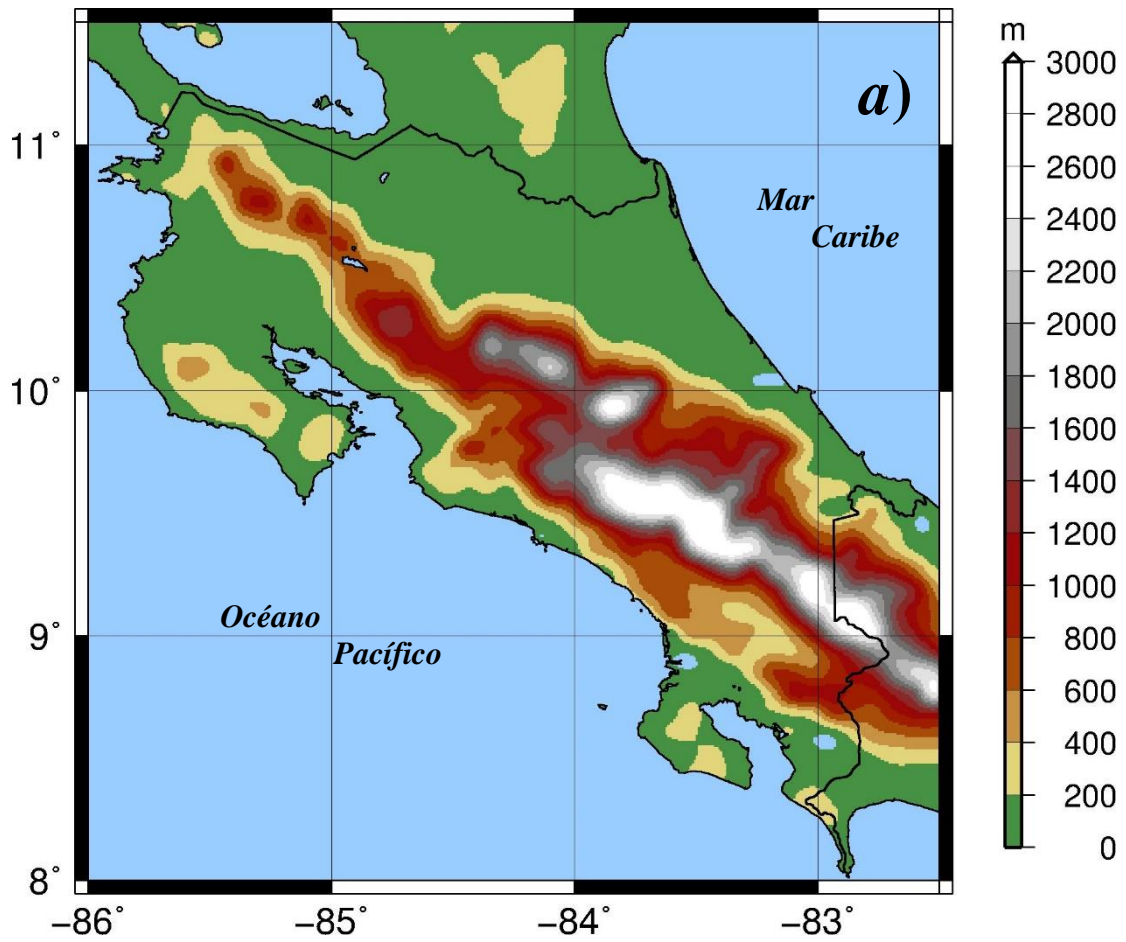


Figura 3.8.a. Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2 para Costa Rica.

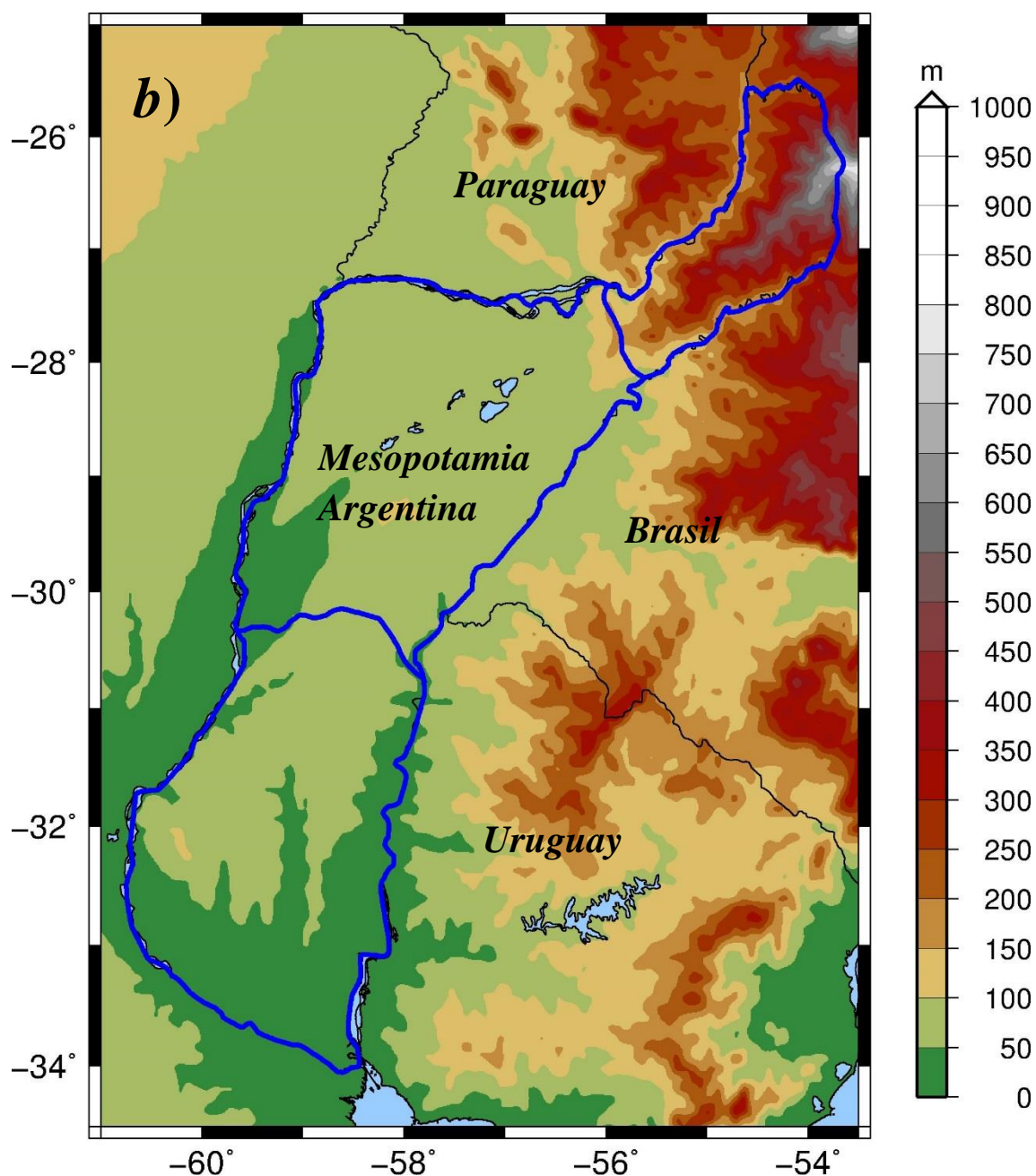


Figura 3.8.b Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2 para la Mesopotamia Argentina.

3.2.3. Anomalía de aire libre en regiones oceánicas

Para llevar a cabo el cálculo del modelo geoidal es necesario contar con información gravimétrica en un área que excede la zona de cálculo, y que muchas veces involucra áreas oceánicas. Para dotar de información gravimétrica (anomalías de Aire Libre medias) a estos espacios oceánicos, se utilizó el modelo global de mareas oceánicas DTU10 - *Technical University of Denmark* (Andersen, 2010).

Este modelo se desarrolla en base a FES2004 (*Finite Element Solutions2004*), modelo mundial de mareas oceánicas y el "response method" (Munk & Cartwright, 1966) que es un método de respuesta para el análisis residual de datos de altímetros de múltiples misiones. El modelo de marea global extendido FES2004, se utilizó como modelo de referencia. Los datos fueron provistos por mediciones de diecisiete años del altímetro satelital multi-misión desde septiembre de 1992 a Diciembre de 2009 de TOPEX / POSEIDON - *Topography Experiment/Poseidon* -(fase A y fase B), JASON1 -*Journées Altimétriques Satellites*- (fase A y fase B) y altimetría satelital JASON-2 para el análisis de los niveles del mar (Cheng, Andersen, 2010).

Costa Rica es un país pequeño que limita con el Océano Pacífico y el Mar Caribe, característica que da lugar a que la región de cálculo involucre una amplia franja oceánica, tal como se puede apreciar en la Figura 3.9. Por esta razón, la influencia de este modelo en el cálculo de las anomalías de Helmert, y por ende en el modelo de geoides, será significativa.

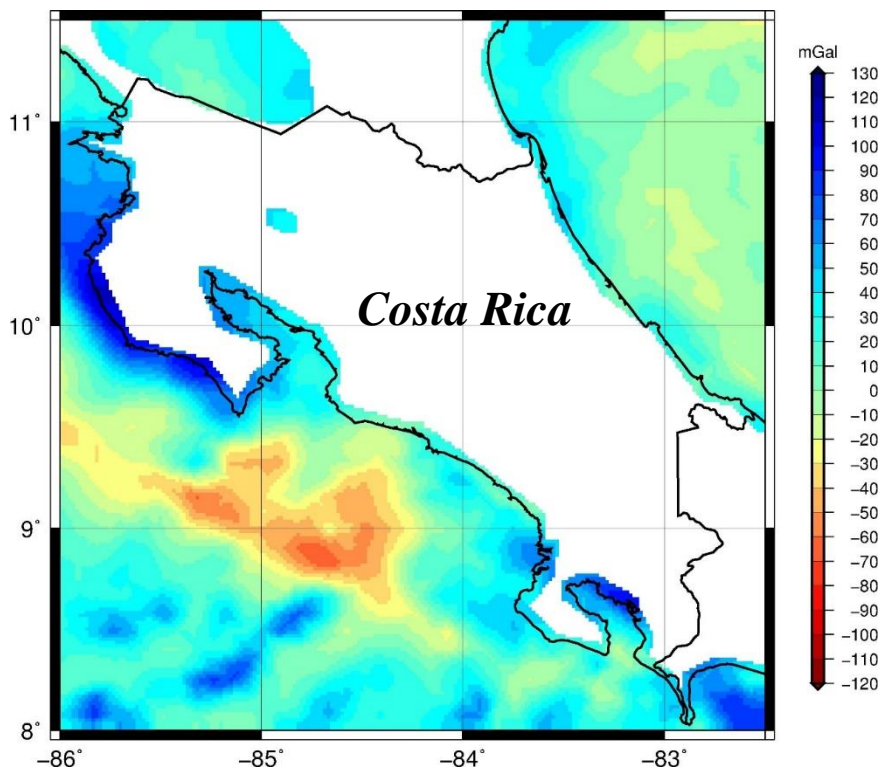


Figura 3.9. Anomalía de Aire Libre obtenida del Modelo DTU10 para Costa Rica.

Para la región de la Mesopotamia Argentina, el Modelo DTU10 completa principalmente el área de la desembocadura del Río de la Plata y parte del Océano Atlántico (Figura 3.10).

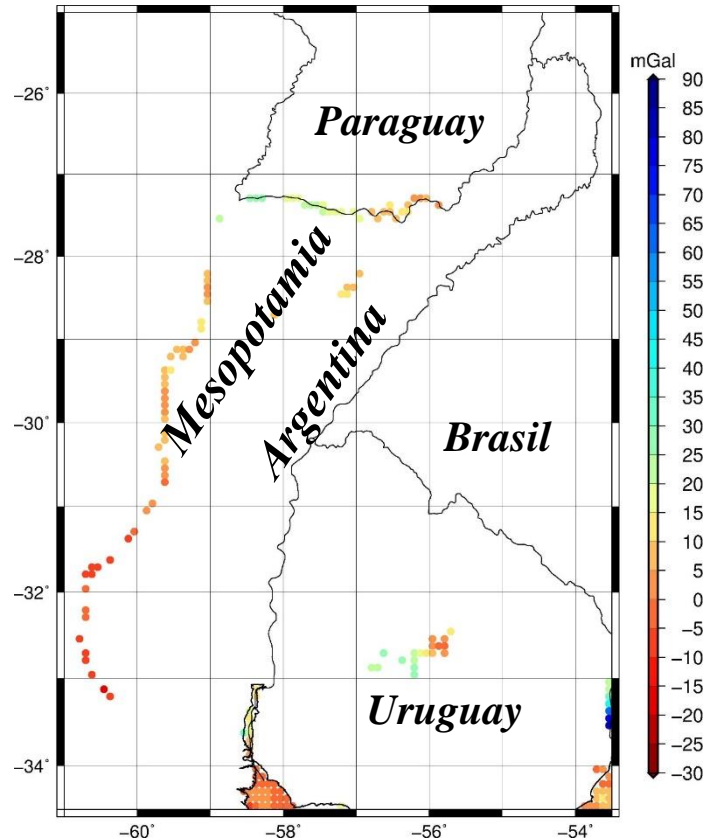


Figura 3.10. Anomalía de Aire Libre obtenida del Modelo DTU10 para la Mesopotamia Argentina.

3.2.4. Modelos Geopotenciales Globales (MGG)

Un modelo geopotencial global es un conjunto de coeficientes del potencial gravitatorio de la Tierra representado en una serie de funciones armónicas esféricas (Rapp, 1998). Se puede expresar en términos de una serie de armónicos esféricos fuera de las masas atrayentes de la Tierra, que se determinan a partir de datos obtenidos con el uso de técnicas terrestres, marinas y espaciales.

Comúnmente los MGG son expresados como un conjunto truncado de coeficientes armónicos esféricos, debido a la dificultad de observar datos de gravedad continuos en toda la superficie de la Tierra (Kirby, 1997). El grado y el orden máximos definen la resolución y la longitud de onda o la frecuencia del modelo.

Los primeros modelos basados en datos de satélites y desarrollados en expansión de armónicos esféricos datan de los años 70's, con resoluciones espaciales iguales o peores que 1,500 km (Rapp, 1998). En la actualidad existen modelos como el EGM2008 o el EIGEN-6C4, con resolución espacial de 9 km (Pavlis et al., 2012). De manera más específica, según lo descrito por Seeber (2003), considerando el desarrollo teórico del campo gravitacional terrestre en armónicos esféricos realizado hasta un grado máximo n y un orden máximo m , la menor longitud de onda λ que lo define en la superficie de la Tierra es dado por la ecuación (Nicacio, 2017):

$$\lambda = \frac{360^\circ}{n} \quad (3.1)$$

En muchos casos, la mitad de la longitud de onda ($\lambda / 2$) se considera válida. Esto hace que la ecuación 3.1 sea aproximadamente igual a la ecuación 3.2, cuando se considere la obtención de la resolución espacial D en kilómetros (Nicacio, 2017):

$$D = \frac{20000}{n} [km] \quad (3.2)$$

Estas ecuaciones permiten la subdivisión de las expansiones del campo gravitatorio y de los MGGs según clases (Tabla 3.1), de acuerdo con sus longitudes de onda solucionables λ , con el grado máximo de desarrollo n y la resolución espacial (Hirt et al., 2011).

Clasificación	Largos	Medios	Cortos	Muy Cortos
grado máximo de desenvolvimiento n	2 a 100	100 a 200	200 a 2190	> 2190
complemento de onda λ , en km	> 400	400 a 200	200 a 18	< 18
resolución espacial, en km	> 200	200 a 100	100 a 9	< 9

Tabla 3.1. Subdivisiones de las expansiones del campo de la gravedad (Nicacio, 2017).

Se puede presentar la subdivisión de las expansiones del campo gravitatorio en sólo función del grado máximo de desarrollo del modelo, como se visualiza en la Tabla 3.2 (Pereira & De Freitas, 2014).

Subdivisión	Largos	Medios	Cortos
grado máximo de desenvolvimiento n	2, 250	250, 360	360, 2160

Tabla 3.2. Expansiones del campo de la gravedad sólo en función del grado máximo (Nicacio, 2017).

Estas convenciones se utilizan para separar efectos globales (relacionados con largas longitudes de onda del geopotencial) de efectos locales (asociados a cortas longitudes de onda) y de sus intermediarios (relativos a medias longitudes de onda), principalmente cuando el objetivo del desarrollo es la determinación de cantidades vinculadas al potencial perturbador (Pereira & De Freitas, 2014).

El potencial perturbador fue descrito en el apartado 2.2 con la Ecuación 2.17, donde/y el término de grado cero del potencial perturbador puede ser escrito como:

$$T_0 = \frac{(GM_T - GM_0)}{r} \quad (3.3)$$

con M_0 la masa del elipsoide, M_T la masa real de la Tierra. De esta manera se deduce que el término de grado cero será cero, solo si ambas masas fueran iguales.

Entonces, aplicando una generalización de la fórmula de Bruns, se puede obtener la Ecuación 3.4 (Heiskanen & Moritz, 1967), en la cual ζ_P es la anomalía de altura en un punto P , γ_P es la gravedad normal calculada en el mismo punto:

$$\zeta_P = \frac{T_P - (W_0 - U_0)}{\gamma_P} \quad (3.4)$$

donde:

$$T_P = T_0 + T'_P \quad (3.5)$$

Queda de la forma:

$$\zeta_P = \zeta_z + \frac{T'_P}{\gamma_P} \quad (3.6)$$

donde:

$$\zeta_z = \frac{(GM_T - GM_0)}{r_P \gamma_P} - \frac{(W_0 - U_0)}{\gamma_P} \quad (3.7)$$

Finalmente, el término de grado cero, será cero sólo si las masas fueran iguales y el potencial del elipsoide fuera igual al de la Tierra. El valor de ζ_z puede determinarse siempre que se conozcan estimaciones para GM_T y W_0 . En algunas aplicaciones, ζ_z es cero, lo que implica que el valor de ζ se refiere a un elipsoide donde $GM_T = GM_0$ y $W_0 = U_0$ (Lemoine et al., 1998).

Tener presente esta corrección permitirá expresar los observables del campo gravitacional respecto de un elipsoide arbitrario. Esta aclaración es válida ya que en la práctica se tiende a expresar las alturas geoidales o anomalías, en relación al WGS84 (*World Geodetic System 1984*), mientras que el campo normal involucrado en los modelos generalmente no responde al asociado a WGS84.

Para la determinación de un geoide gravimétrico local el Modelo Geopotencial Global provee la contribución de larga longitud de onda del campo de gravedad, y cuando se combina con el campo gravitatorio de onda corta (observaciones de gravedad marina y terrestre) aplicando la técnica remover – restaurar, se puede desarrollar un modelo geoidal preciso.

Para la generación de los modelos de geoide para Costa Rica y la Mesopotamia Argentina, las largas y medianas longitudes de onda fueron representadas por los modelos EIGEN-6C4 y GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 (DIR-R5) en relación al cálculo de descomposición y recomposición espectral. En la Tabla 3.1 se muestra cada modelo, su año de publicación, grado y orden de los coeficientes armónicos esféricos y el tipo de datos con los que fueron calculados. El modelo EIGEN-6C4, está basado en información de gravimetría terrestre, altimetría satelital y datos gravimétricos de las misiones satelitales GOCE, GRACE, LAGEOS. El DIR_R5 se basa solamente en información de las misiones satelitales gravimétricas.

Además, se utilizaron los modelos EGM2008 -*Earth Gravitational Model 2008*- (Pavlis et al., 2012) y el XGM2016 -*Experimental Gravity Field Model 2016*- (Pail et al., 2016), para realizar una comparación de éstos con los modelos calculados. La tabla 3.3 presenta un resumen de los Modelos Geopotenciales Globales utilizados en este trabajo.

Modelo	Año	Grado/Orden	Datos	Referencias
EIGEN-6C4	2014	2190	A, G, S(GOCE), S(GRACE), S(LAGEOS)	Förste et al., 2014
DIR_R5	2014	300	S(GOCE), S(GRACE), S(LAGEOS)	Bruinsma et al., 2013
EGM2008	2008	2190	A, G, S(GRACE)	Pavlis et al., 2012
XGM2016	2017	719	A, G, S(GOCO05s)	Pail, R. et al, 2017

Tabla 3.3. MGG's utilizados en el trabajo (ICGEM).

a. EIGEN-6C4

Este es un modelo global estático combinado del campo de gravedad donde los coeficientes de la serie de las funciones armónicas esféricas se calcularon hasta el grado y orden 2190, fue elaborado conjuntamente por GFZ Potsdam (*Deutsches GeoForschungsZentrum*) y GRGS Toulouse (*Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale*). En la Figura 3.11 se muestra el modelo EIGEN-6C4 para parte del continente americano, que contiene las dos áreas de estudio de este trabajo.

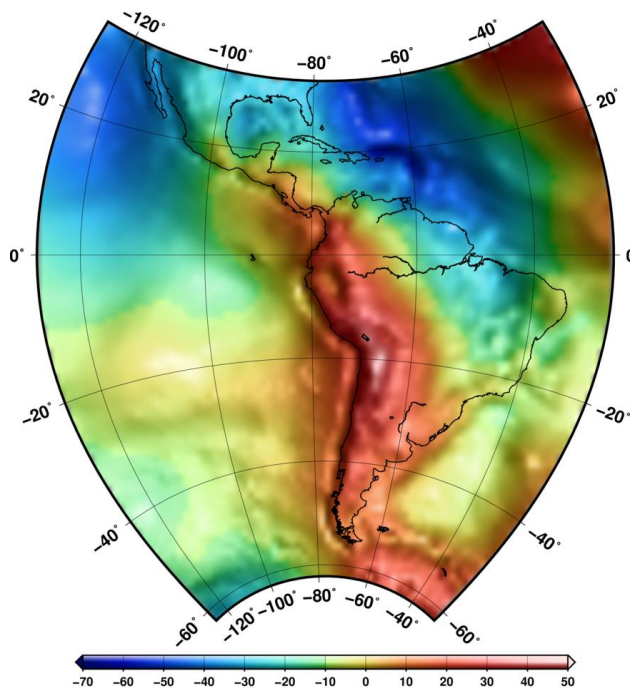


Figura 3.11. Modelo de Geoida EIGEN-6C4 (ICGEM).

Para su cálculo se utilizaron las informaciones gravitacionales de los satélites (Förste et al., 2014): LAGEOS 1 y 2 (*Laser Geodynamic Satellite*) entre 1985 y 2010, facilitando el desarrollo hasta grado y orden 2 a 30; GRACE entre Febrero de 2003 y Diciembre de 2012, posibilitando desarrollo hasta grado y orden 175; datos del gradiente de la gravedad

del satélite GOCE, entre Noviembre de 2009 y Octubre de 2013, permitiendo el desarrollo hasta grado y orden 300.

Además se utilizó el modelo de altimetría por satélite DTU12 y el EGM2008 (Förste et al., 2014). Para completar la grilla de 5' de la anomalía de aire libre media en la región oceánica, se utilizaron datos del modelo de altimetría por satélite del *Danish National Space Center*, denominado DTU10 (Andersen et al., 2010) que permite el desarrollo hasta el grado y el orden 370, y por último la utilización de una solución bloque diagonal similar a la descrita por Pavlis et al. (2012), que admite el desarrollo hasta grado y orden 2190.

En la Figura 3.12 se muestra el esquema de la contribución de los datos al desarrollo del modelo EIGEN-6C4.

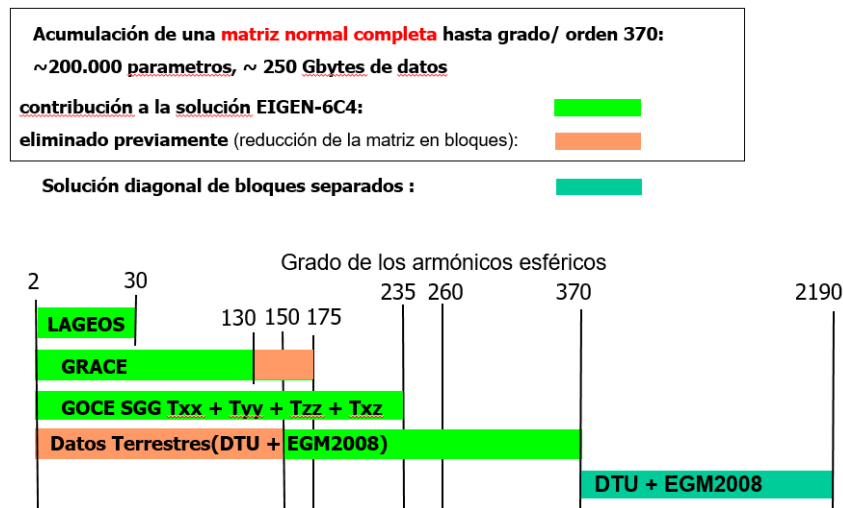


Figura 3.12. Esquema de datos que contribuyen la composición de EIGEN-6C4 (Förste et al., 2014).

b. GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 (DIR-R5)

El GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 de grado y orden 300 (que representa una resolución espacial de 0.6 grados de arco, es decir, ~ 67 km), es un modelo satelital basado en una combinación completa de GOCE-SGG con GRACE (10 años) y LAGEOS 1 y 2 (15 años); fue obtenido utilizando la solución *Direct Approach* (DIR) desarrollada por el *European GOCE Gravity consortium* (EGGc). Fue producido por el *German Research Centre for Geosciences Potsdam* (GFZ) y el *Centre National d'Études Spatiales, Toulouse/ Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale tiale* (GRGS/CNES), Toulouse (Bruinsma et al., 2013).

En la Figura 3.13 se muestra el modelo DIR_R5 para las dos áreas de estudio de este trabajo.

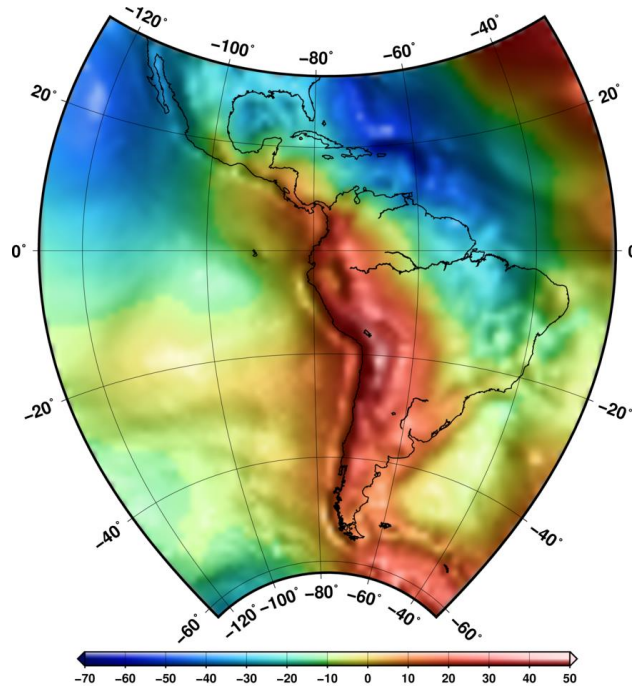


Figura 3.13. Modelo de Geoide GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 (ICGEM).

Las incertezas de los propios coeficientes armónicos esféricos de los Modelos Geopotenciales Globales son reflejadas en el llamado error de comisión, el cual es debido a los errores de observación que se propagan en la ondulación geoidal.

En la Figura 3.14 se muestran la amplitud y los errores de comisión de los dos MGG's (DIR_R5 y EIGEN-6C4) utilizados en el cálculo del modelado de geoida estático, con el fin de comparar ambos modelos. La amplitud de los modelos por grado se muestra con líneas continuas en rojo (DIR_R5) y negro (EIGEN-6C4). La línea verde continua presenta una diferencia de amplitud acumulativa entre los dos modelos; la línea azul continua presenta una diferencia de amplitud entre los dos modelos por grado; y en líneas puntuadas rojo (DIR_R5) y negro (EIGEN-6C4) se muestran los errores de comisión por grado.

El error de comisión de ambos modelos es prácticamente el mismo hasta el grado 140, a partir de este grado muestran una diferencia, donde el error en el EIGEN-6C4 se mantiene siempre por debajo del DIR_R5. Además, hasta el grado 220 ambos presentan un error de comisión milimétrico, y a grados mayores se muestra un error centimétrico.

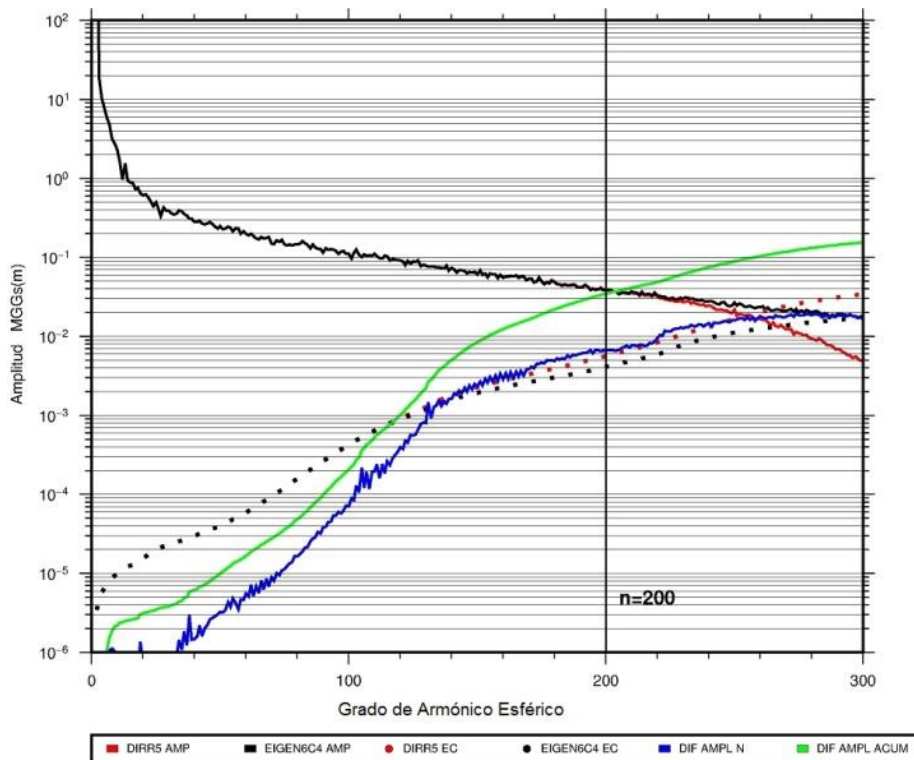


Figura 3.14. Error de comisión entre los MGG EIGEN-6C4 Y DIR_R5.

c. EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008)

El EGM2008 (Figura 3.16) es un modelo esférico armónico desarrollado por la *National Geospatial-Intelligence Agency* (NGA) de Estados Unidos, fue presentado en la Asamblea General de la Unión Europea de Geociencias en Viena en 2008. Es el primer modelo en el que fue posible el desarrollo en armónicos hasta grados superiores a 2000.

Este modelo es completado con coeficientes armónicos esféricos hasta el grado y el orden 2159, contiene coeficientes adicionales que se extienden hasta el grado 2190 y el orden 2159 (Pavlis et al., 2012), que corresponde a una resolución espacial de 5 minutos de arco (aproximadamente 9 km).

EGM2008 fue desarrollado en un ajuste por los mínimos cuadrados en términos de armónicos elipsoidales que combinó el modelo ITG-GRACE03S, el cual estaba disponible hasta grado y orden 180, con informaciones gravitacionales extraídas de una grilla global 5'×5' de anomalías de la gravedad. Este conjunto global fue formado con la unión de datos terrestres, aerotransportados y valores derivados de altimetría por satélite. En ciertas áreas los datos de anomalía de gravedad disponibles sólo podían ser utilizados en baja resolución, su contenido espectral se complementaba con informaciones

gravitacionales obtenidas de una base de datos topográfica global detallada (Pavlis et al., 2012).

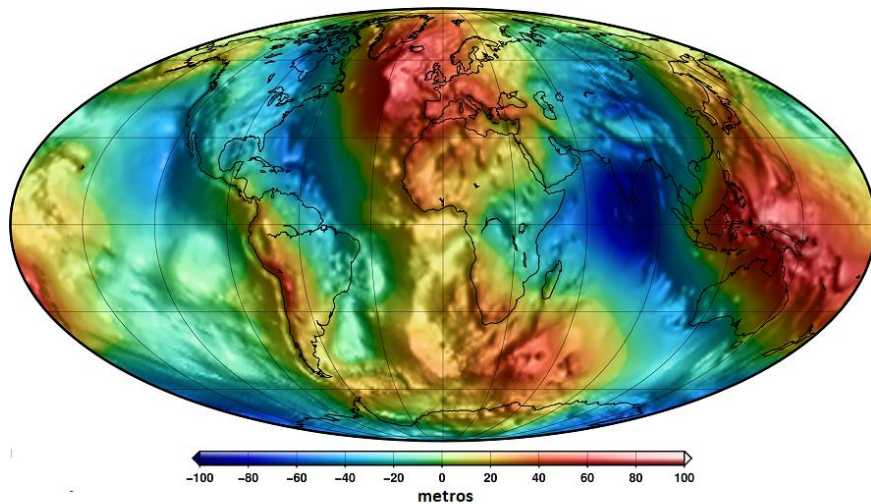


Figura 3.15. Modelo de Geoide EGM2008 (ICGEM).

d. XGM2016 (Experimental Gravity Field Model 2016)

El modelo de geoide XGM2016 (Figura 3.17) producido por la NGA (*National Geospatial-Intelligence Agency*), se extiende hasta el grado y orden 719, con una resolución máxima soportada por su cuadrícula terrestre de 15'x15'. Un enfoque importante es la combinación óptima de los nuevos datos terrestres con la última información de gravedad del satélite. Esto incluye 11 años de GRACE (2002-2013) y toda la misión de GOCE (2009-2013). La combinación se basa en un sistema de ecuación normal completo hasta el grado máximo de la expansión ($n = 719$). Se aplica una estrategia de ponderación dependiente de la región, lo que permite considerar la precisión individual de cada celda de datos altimétrica y terrestre para que la transición de datos satelitales a terrestres y altimétricos se pueda modelar individualmente para cada celda (Pail et al., 2016).

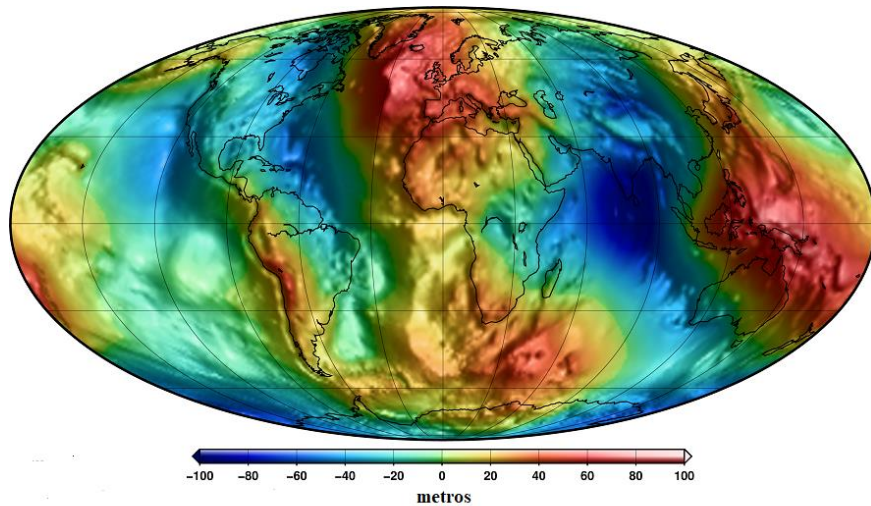


Figura 3.16. Modelo de Geoide XGM2016 (ICGEM).

Los modelos estocásticos para la base de datos terrestre / altimétrica se basan en comparaciones con soluciones de solo satélite en el rango de longitud de onda larga a media. La validación de XGM2016 incluirá las métricas internas del ajuste final, lo que demuestra el beneficio de los datos de GOCE. La validación externa incluye (por ejemplo) comparaciones de GPS / nivelación sobre el terreno y mejoras en el modelo de topografía dinámica media (MDT) derivada global, en comparación con los modelos independientes y los datos de las velocidades de las corrientes oceánicas. También se incluyen otras evaluaciones y comparaciones con modelos existentes, como EGM2008.

La comparación de las anomalías de altura acumulada, tanto de EGM2008 como de XGM2016 en grado / orden 719, arroja diferencias de 26 cm en África y de 40 cm en América del Sur. Estas diferencias son el resultado de incluir información adicional de datos satelitales, así como de los datos de tierra mejorados en estas regiones. XGM2016 también produce una Topografía Dinámica Media más suave con artefactos significativamente reducidos, lo que indica un modelado mejorado de las áreas oceánicas (Pail et al., 2016).

Este modelo es el antecesor al modelo de geoide *Earth Gravitational Model 2020* - EGM2020- (Barnes et al., 2015) que sustituirá al *Earth Gravitational Model 2008*- EGM2008- (Förste et al., 2014). El nuevo modelo se beneficiará de nuevas fuentes de datos y procedimientos, información de gravedad actualizada de los satélites GOCE y GRACE, y nuevos datos gravimétricos (terrestres, aéreos y navales) sobre áreas geográficas específicas, que proporcionarán una mejor cobertura y resolución global

sobre la Tierra, las áreas costeras y algunas áreas oceánicas. La acumulación continua de datos de altimetría satelital, así como las mejoras en el tratamiento de estos datos, definirán mejor el campo de gravedad marina, sobre todo en las regiones polares y cercanas a la costa (Barnes et al., 2015).

El EGM2020 será esencialmente un modelo armónico elipsoidal hasta grado (n) y orden (m) 2159, pero se lanzará como un modelo armónico esférico al grado 2190 y al orden 2159 (Barnes et al., 2015).

3.2.5. Datos de Nivelación Clásica y GPS (*Global Positioning System*)

Para evaluar la precisión de los modelos de geoide desarrollados, se utilizaron datos de nivelación clásica (alturas referidas al nivel medio del mar) y las llamadas alturas GPS. Combinando las alturas de la nivelación (H) y las alturas elipsoidales (h), ubicadas conjuntamente en los mismos puntos de referencia, se obtienen las alturas geoidales ($N_{GPS-NIV}$) por diferencia simple con la siguiente fórmula:

$$N_{GPS-NIV} = h - H \quad (3.8)$$

En Costa Rica existen muy pocos datos, principalmente provenientes de Universidades, generados bajo proyectos de investigación (78 puntos) (Figura 3.17). Estos no tienen una buena distribución en el espacio país, como para que un análisis estadístico sea representativo para todo el territorio.

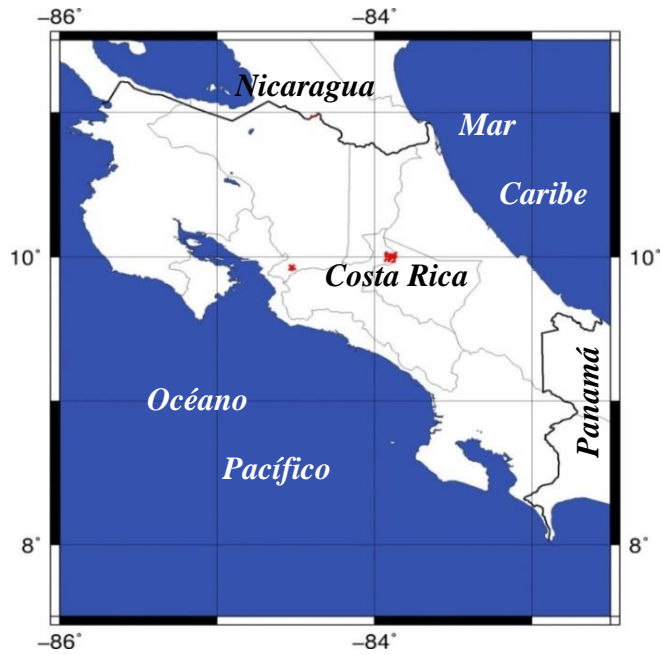


Figura 3.17. Puntos con alturas elipsoidales y de nivelación ($N_{GPS-NIV}$) en Costa Rica.

Con respecto a la Mesopotamia Argentina se dispuso de 48 puntos con esta información (Figura 3.18). La cobertura de los datos es muy heterogénea, y provienen de distintas fuentes: Universidades, redes geodésicas provinciales, Instituto Geográfico Nacional, etc.

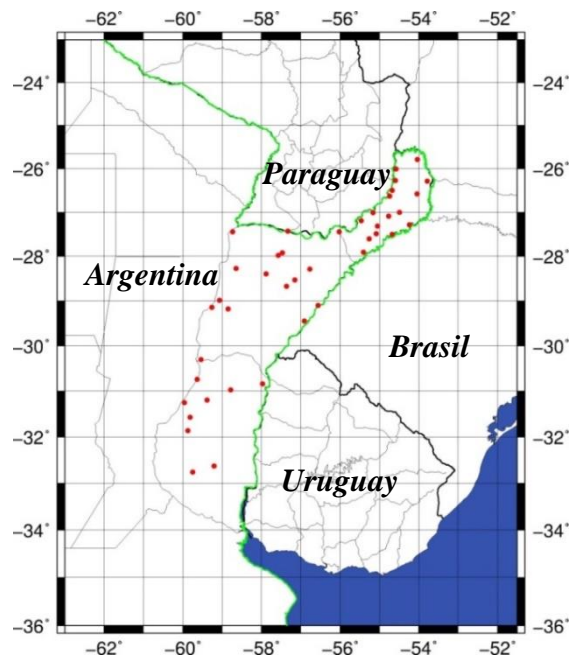


Figura 3.18. Puntos con alturas elipsoidales y de nivelación ($N_{GPS-NIV}$) en la Mesopotamia Argentina.

3.3. Estudio de la variación temporal usando MGG's

3.3.1. Datos de la misión GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*)

Los datos provenientes de la misión satelital GRACE son archivados y distribuidos a través de cuatro agencias espaciales: el *Jet Propulsion Laboratory* (JPL), *Physical Oceanography Distributed Active Archive Center* (PO.DAAC), *el Science Data System* (SDS), *el Center for Space Research* (CSR) y el *GeoForschungsZentrum Potsdam* (GFZ) (Case et al., 2010).

Estos productos se organizan en cuatro niveles de información de los cuales tres de ellos son accesibles a los usuarios: Nivel 0 (L0); Nivel 1A (L1A); Nivel 1B (L1B); Nivel 2 (L2) (Case et al., 2010). Para este trabajo se utilizaron solamente los datos de nivel 2 (L2), específicamente los archivos GSM-2.

Los distintos productos de GRACE y la documentación de soporte de los mismos se pueden consultar en los sitios de internet de las siguientes instituciones: PO.DAAC (sitio web <ftp://podaac-ftp.jpl.nasa.gov/GeodeticsGravity/>); la página del JPL (<https://grace.jpl.nasa.gov/>); *Information System & Data Center* (ISDC) (<http://isdc.gfz-potsdam.de/grace-isdc/grace-gravity-data-and-documentation/>); GFZ (<http://www.gfz-potsdam.de/en/grace/>) y el CSR (<http://www.csr.utexas.edu/grace/>)

Además de estos centros de procesamiento de los datos de la misión satelital GRACE, existe otro que funciona de manera independiente el CNES/GRGS. En la página web <http://grgs.obs-mip.fr/grace>, se pueden ver y descargar sus diferentes productos, documentación y soporte del procesamiento llevado a cabo por estos centros. Este ofrece en sus productos los archivos con los coeficientes armónicos esféricos normalizados del campo de gravedad terrestre.

3.3.2. Datos de Espesor Equivalente de Agua (EWH)

La mayoría de los cambios mensuales de la gravedad son causados por cambios en el almacenamiento de agua en reservorios hidrológicos, por el movimiento de masa en los océanos, la atmósfera y la criósfera; y por intercambios entre éstos. Dicha extensión vertical puede ser medida en centímetros (Swenson & Wahr, 2006).

Los datos de espesor equivalente de agua (EWH por sus siglas en inglés), están basados en las soluciones nivel 2 (coeficientes armónicos esféricos) de GRACE de los centros de procesamiento (CSR, JPL, GFZ, GRGS). Estos están dados en formato de grilla, con un cubrimiento global y un espaciamiento de 1°, de forma mensual. Cada grilla

representa la diferencia de masa de agua para cada mes. En la realización de este trabajo se tomaron en cuenta los datos de EWH del centro GRGS.

Las grillas de EWH proporcionadas por el CNES/GRGS, son obtenidas a partir de las soluciones GRACE procesadas por el mismo centro. Las cuadrículas tienen en cuenta los coeficientes del grado 2 al 80, sin reemplazar el coeficiente $C_{2,0}$ debido a que las soluciones CNES/GRGS ya contienen datos SLR (Lageos 1 y 2 / Starlette / Stella hasta grado 30).

Este centro no aplica filtros ni suavizado en el cálculo del EWH, debido a que ya fue empleado durante el cálculo de los coeficientes armónicos esféricos (los datos pueden descargados de su página web <http://grgs.obs-mip.fr/grace>). Estos últimos datos de EWH fueron utilizados para analizar las diferencias mensuales de las masas de agua durante la realización de este trabajo.

3.3.3. Datos de Altimetría Satelital

Para este trabajo, los datos de altimetría satelital utilizados fueron obtenidos a través de la página web del centro de Servicios de Datos Terrestres (Theia) “HydroWeb” (<http://hydroweb.theia-land.fr/>). Esta tiene a disposición de los usuarios una base de datos con series temporales sobre los niveles de agua de grandes ríos, lagos y humedales de todo el mundo. Estas series de tiempo se basan principalmente en datos altimétricos de las misiones Topex / Poseidon, ERS 1 y 2 (*European Remote sensing Satellite*), ENVISAT (*Environmental SATellite*), Jason 1, Jason 2, GFO (GEOSAT Follow-On). En este sitio están disponibles las series temporales del nivel de agua, y también las imágenes LANDSAT (LAND = Tierra y SAT = satélite) que muestran la ubicación geográfica de aproximadamente 250 estaciones virtuales en todo el mundo (Crétau et al., 2011).

La altimetría por RADAR desde el espacio consiste en mediciones de la distancia vertical entre el satélite y el nivel del agua. La diferencia entre la altura del satélite sobre la superficie de referencia (generalmente un elipsoide), determinada mediante cálculos precisos de orbitas, y la distancia superficial satélite-agua, proveen mediciones del nivel del agua sobre la superficie de referencia (Pereira, 2011).

Para cada estación se ofrece un gráfico de la serie temporal del nivel de agua, un archivo de texto con la información de altimetría satelital, y una descripción y características de la estación. En la Figura 3.19 se muestran las estaciones de los lagos de Managua y de Nicaragua, y las respectivas pasadas satelitales.

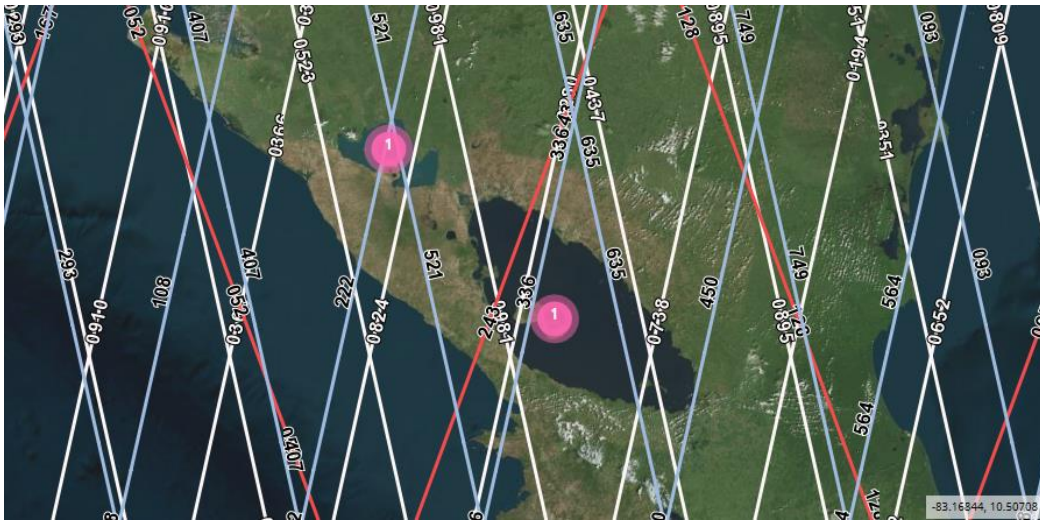


Figura 3.19. Pasadas terrestres de los satélites con sensor altimétrico sobre las estaciones virtuales del Lago de Nicaragua y del Lago Managua (Hydroweb).

La construcción de las series temporales del nivel de agua se realiza por medio de las frecuencias dadas por los altímetros en cada misión satelital. Cada altímetro emite una serie de pulsos de microondas hacia la dirección del nadir. A partir de la medición del retardo de tiempo bidireccional entre la emisión y la recepción del pulso, se determina la altura de la superficie mediante la diferencia de la órbita del satélite y la medición del rango del altímetro. Dependiendo del tamaño del lago (si es muy grande), se realiza una corrección por la pendiente del geoide (o, de forma equivalente, el nivel medio del lago), la cual se hace promediando los niveles de altura derivados de los ciclos completos de la altimetría. Luego, los niveles de agua se refieren a este "nivel medio del lago". Si los diferentes satélites cubren el mismo lago, el nivel del lago se calcula entonces en un proceso de 3 pasos, donde cada información satelital se procesa de manera independiente (Crétaux et al., 2011).

Los sesgos de los instrumentos de radar entre diferentes satélites y las diferencias geoidales se eliminan utilizando los datos de Topex/Poseidon como referencia. Luego, los niveles de los lagos de los diferentes satélites se fusionan mensualmente. Generalmente se obtiene una mayor precisión de los niveles del lago aplicando un procesamiento multi-satélite (Crétaux et al., 2011).

4. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

En la actualidad los modelos de geopotencial pueden clasificarse en dos grupos. Por un lado, los llamados “modelos estáticos”, calculados para un instante determinado, con información obtenida durante un período específico, generalmente consistente en diferentes tipos de mediciones terrestres y satelitales utilizadas tanto para el procesamiento de datos, como para su validación. Por otro lado, los llamados modelos “dinámicos”, los que surgen con el avance tecnológico de los últimos años y el lanzamiento de misiones satelitales que permiten la medición continua en el tiempo de las variaciones del campo gravitatorio terrestre.

Cabe mencionar que la Tierra es un planeta dinámico, cuyas masas internas y con diferentes densidades se encuentran en constante interacción y movimiento. Los modelos “dinámicos” permiten el estudio de estas variaciones y fenómenos.

En este trabajo se realiza un análisis de modelos “dinámicos” para el territorio costarricense (apartado 4.2), para lo cual se tuvieron en cuenta los datos derivados de la misión satelital GRACE, con la finalidad de conocer la variación temporal de la gravedad y sus posibles causas.

En el apartado 4.1, se presentan los pasos llevados a cabo para el cálculo de modelos “estáticos” para Costa Rica (apartado 4.1.1.) y la Mesopotamia Argentina (apartado 4.1.2.).

4.1. Modelos Estáticos

Uno de los objetivos de este trabajo, es proveer al territorio costarricense de un modelo geopotencial que pueda servir como una superficie de referencia altimétrica al país, así como insumo para la actualización y determinación de un nuevo sistema vertical.

El cálculo de los modelos de geoide estático se llevó a cabo con el paquete de programas canadiense SHGEO (*Stokes-Helmert Geoid Software*), que se trata de un software científico para la determinación geoidal precisa, basado en la teoría de Stokes-Helmert para el cálculo del geoide gravimétrico (apartados 2.5.3; 2.5.4 y 5.5.5). Este programa fue desarrollado bajo la dirección del profesor Petr Vaníček en el Departamento de Geodesia e Ingeniería Geomática de la Universidad de New Brunswick, en Fredericton, Canadá. Los programas en particular fueron creados por diferentes autores

cuya investigación presentada en diferentes trabajos fue incorporada al software SHGEO (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaniček, 2007).

En la Figura 4.1 se muestra un esquema de la metodología de cálculo que utiliza el paquete de programas canadiense SHGEO, la cual sigue prácticamente las 5 etapas según Blitzkow et al., 2008, que se describen en el apartado 2.5.5.

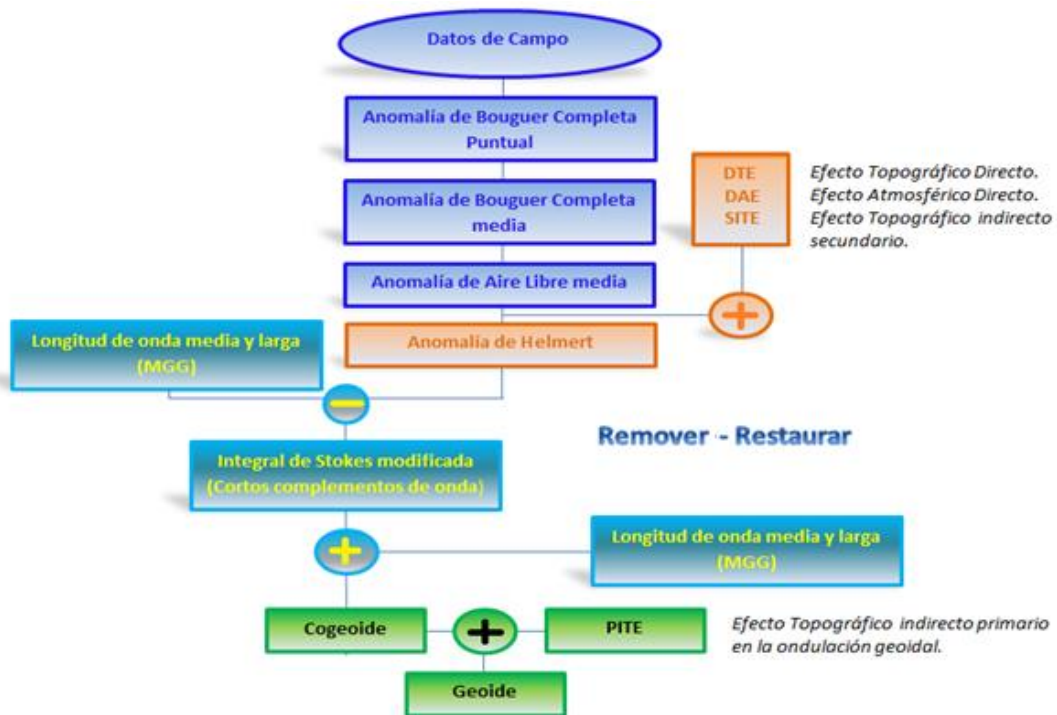


Figura 4.1. Metodología de cálculo del paquete de programas canadiense SHGEO (Ellmann, 2005).

4.1.1. Modelo de Geoide para Costa Rica

a. Anomalías Completas de Bouguer, Anomalías Medias de Aire Libre

Como fuente de información para el cálculo del modelo de geoide, se disponen de puntos con datos gravimétricos. Las anomalías de aire libre y de Bouguer simple se calcularon para cada uno de los puntos a partir de la información disponible. La corrección de terreno luego fue adicionada a la anomalía de Bouguer simple para obtener las anomalías puntuales de Bouguer completa.

Las anomalías de Bouguer completas necesitan estar ordenadas de manera homogénea en una grilla de 5'x5' en sentido Oeste-Este y Norte-Sur. Sin embargo, los datos gravimétricos terrestres, y por ende las anomalías gravimétricas puntuales, no tienen una distribución homogénea (apartado 3.2.1); además las mediciones datan de hace más de

38 años, las que generalmente se realizaban siguiendo las carreteras, dejando grandes áreas sin información gravimétrica. Estos vacíos de información, y la dependencia de la topografía de las anomalías de aire libre no permiten crear una grilla a partir de éstas, por lo que se resolvió trabajar con las anomalías de Bouguer, que aunque también dependen de la topografía, tienen una representación de forma más suave.

Para tratar de llenar al máximo posible estos vacíos de información se realizó un proceso de interpolación de los datos existentes. En primer lugar, organizando los datos en una grilla de $1' \times 1'$, donde se interpolaron los datos puntuales por medio de un algoritmo de vecindad circular, limitada por un radio de búsqueda de $5'$, la que calcula la media de todos los puntos que se encuentren dentro del círculo para asignar un valor a cada nodo de la grilla.

La grilla de $5'$ luego se calculó a partir de la cuadrícula de $1'$, la que fue dividida en bloques de $5' \times 5'$, en los cuales se calculó la posición media o coordenada del centro de cada bloque, promediando luego la anomalía de Bouguer para ese punto.

En la Figura 4.2 se muestran las anomalías medias de Bouguer obtenidas a partir de la metodología descrita en los párrafos anteriores. Los datos se encuentran en una grilla de $5'$, y se muestran en una escala de color, donde las zonas en color gris representan áreas sin información.

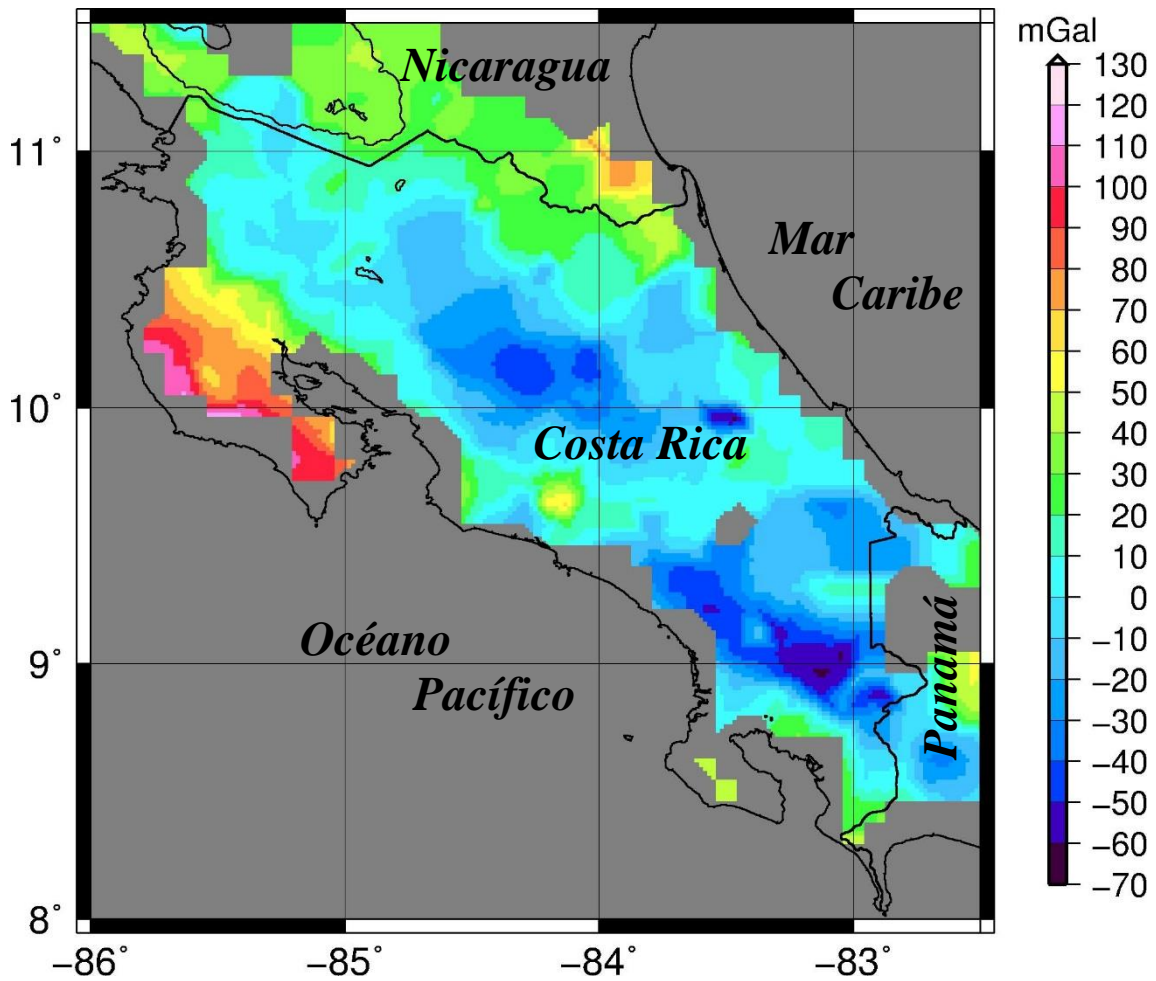


Figura 4.2. Mapa de Anomalías medias de Bouguer de Costa Rica en *mGal*.

A partir de las anomalías medias de Bouguer, se reconstruyeron las anomalías medias de aire libre (Figura 4.3). Estas fueron calculadas a partir de las anomalías medias de Bouguer adicionando la corrección de Bouguer simple y sustrayendo la corrección de terreno. Los datos de anomalía media de aire libre para los océanos fueron completados con información obtenida de la anomalía de aire libre derivada del DTU10 (apartado 3.2.3).

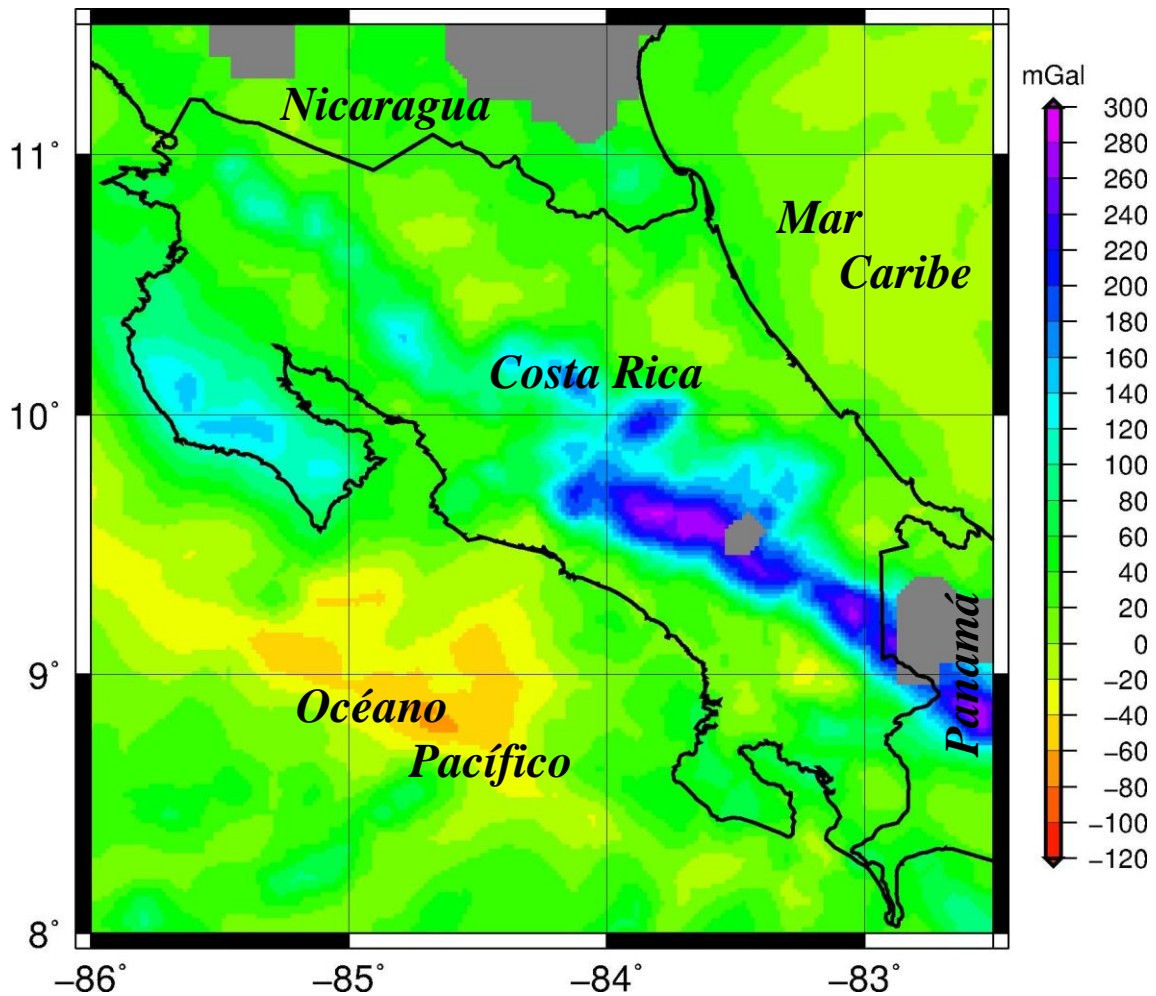


Figura 4.3. Mapa de Anomalías medias de Aire libre de Costa Rica en *mGal*.

b. Anomalía de Gravedad de Helmert

Las anomalías de gravedad de Helmert referidas a la superficie terrestre (Figura 4.5) se calcularon de acuerdo a la Ecuación 2.80, adicionando los efectos directos e indirectos de las masas topográficas y atmosféricas sobre la atracción gravitacional (apartado 2.6.3.b) que pueden apreciarse en la Figura 4.4: DTE (a), DAE (b), SITE (c). Los valores máximos y mínimos de estos efectos pueden observarse en la tabla 4.1.

VALOR	DTE(<i>mGal</i>)	DAE(<i>mGal</i>)	SITE(<i>mGal</i>)
Mínimo	-38.22	-0.84	-0.12
Máximo	22.02	-0.72	0.00

Tabla 4.1. Valores máximos y mínimos de DAE, DTE, SITE.

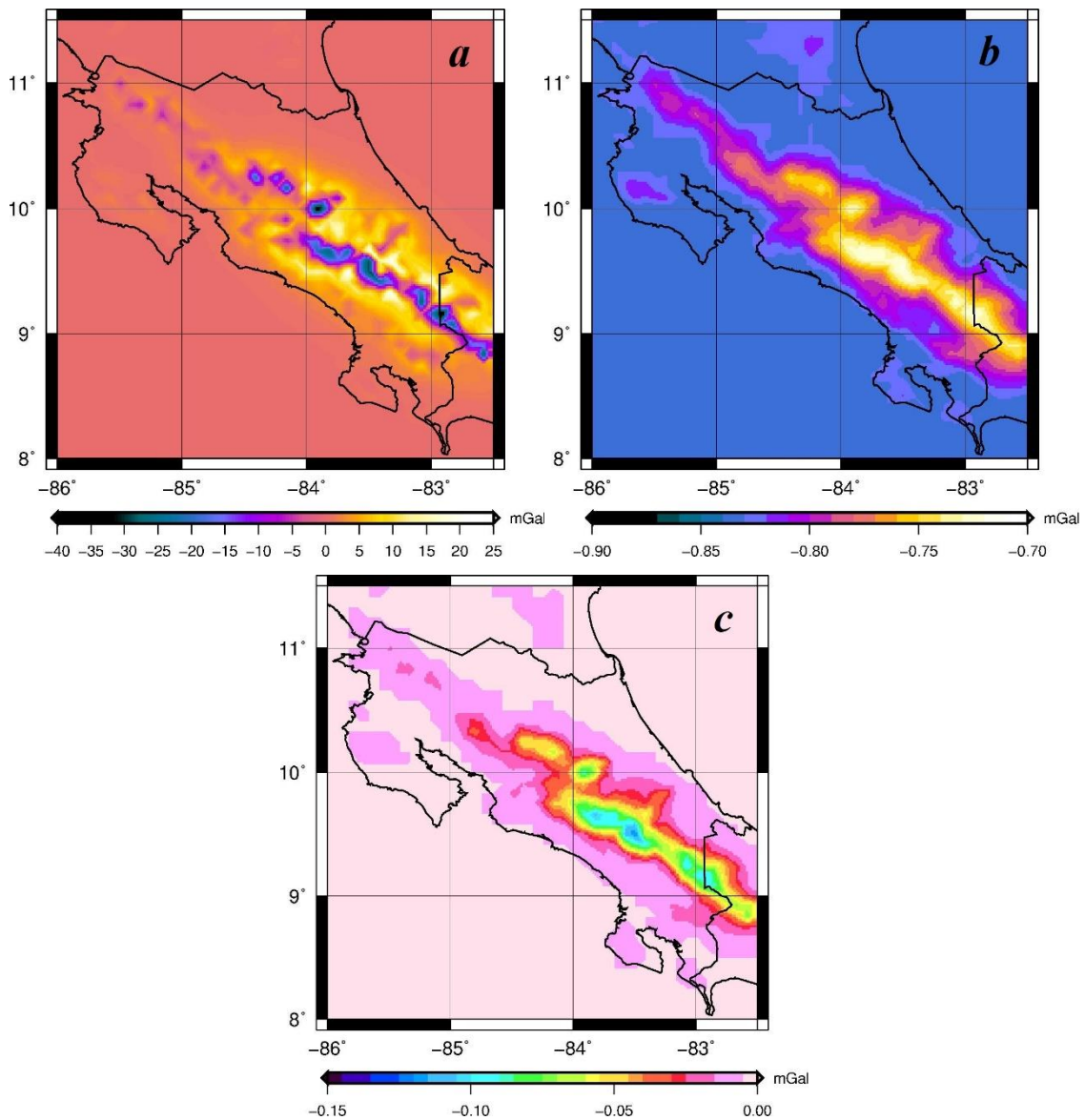


Figura 4.4. Efectos directos e indirectos de las masas topográficas y atmosféricas sobre la atracción gravitacional DTE (a), DAE (b), SITE (c), en *mGal*.

La anomalía de gravedad de Helmert referida a la superficie de la Tierra (Figura 4.5) muestra un valor máximo de 263.948 *mGal* y un valor mínimo de -115.196 *mGal*. Este cálculo provoca el traslado del espacio real al espacio de Helmert (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaníček, 2007).

Después de calcular esta anomalía se puede proceder a aplicar la técnica *remove – restaurar*, donde la descomposición espectral consiste en eliminar de la anomalía media de gravedad el componente de longitud de onda larga proporcionado por un MGG hasta un cierto grado y orden. La integral de Stokes se calculó mediante la técnica FFT

utilizando un valor para el radio de integración (ψ_0) y la modificación del núcleo de Stokes propuesta por Featherstone (2003), luego se restauró el componente de longitud de onda larga del MGG en el co-geoide con el mismo grado y orden con el que fue removido de la anomalía media de gravedad de Helmert.

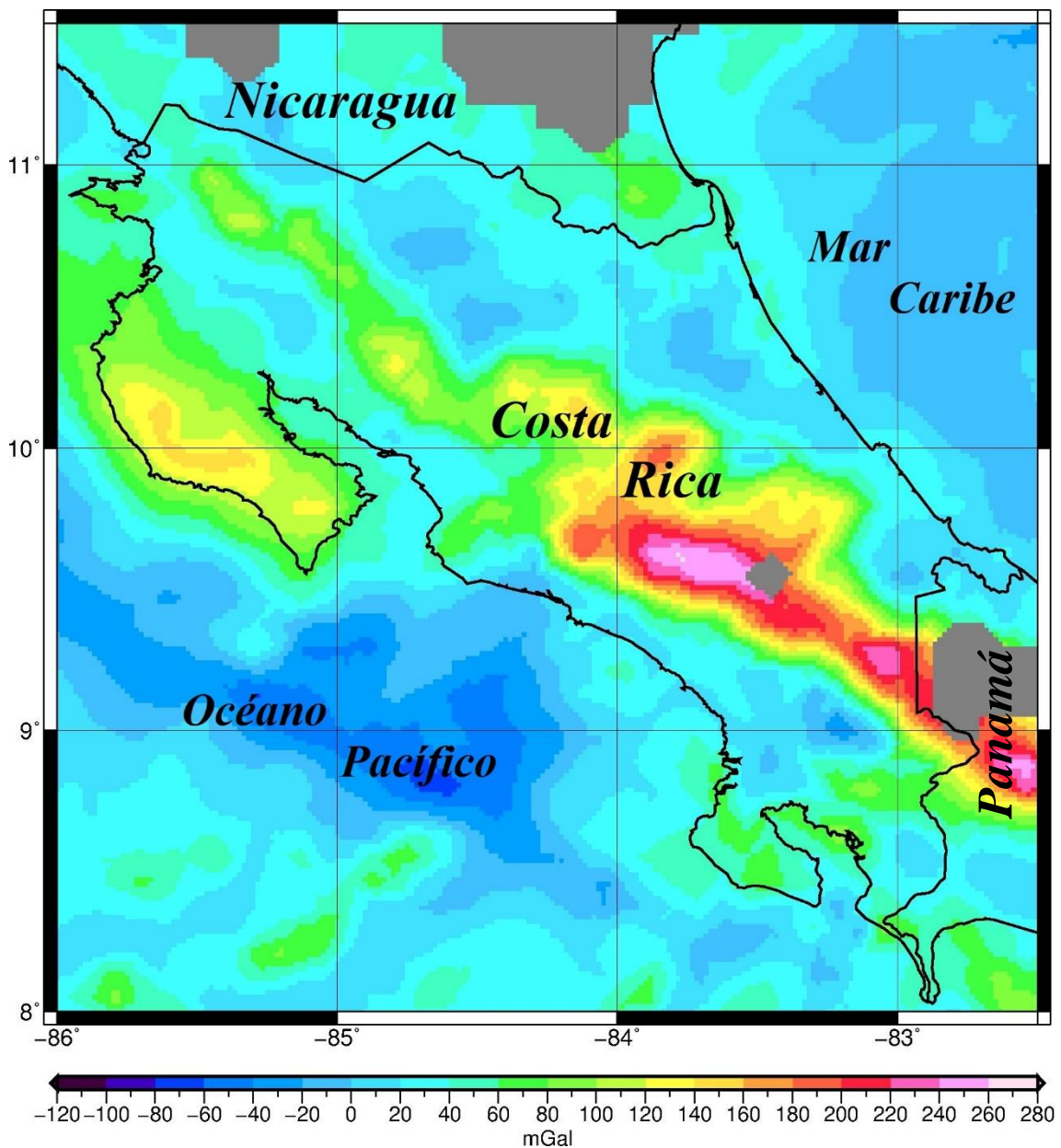


Figura 4.5. Anomalía de Gravedad de Helmert para Costa Rica referida a la superficie terrestre, en *mGal*.

c. Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE)

En la Figura 4.6 se muestra el Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE), desarrollado en el apartado 2.6.4. Este efecto es adicionado al co-geoide de Helmert

obtenido luego de la aplicación de la técnica remover – restaurar, como se muestra en la Ecuación 2.58 del apartado 2.5.5, y permite obtener las alturas geoidales en el espacio real. El PITE tiene un valor mínimo de -0.49 m y un valor máximo de 0.02 m para el área de trabajo, los valores más negativos se encuentran en las zonas altas del país y ascienden hacia la zona costera.

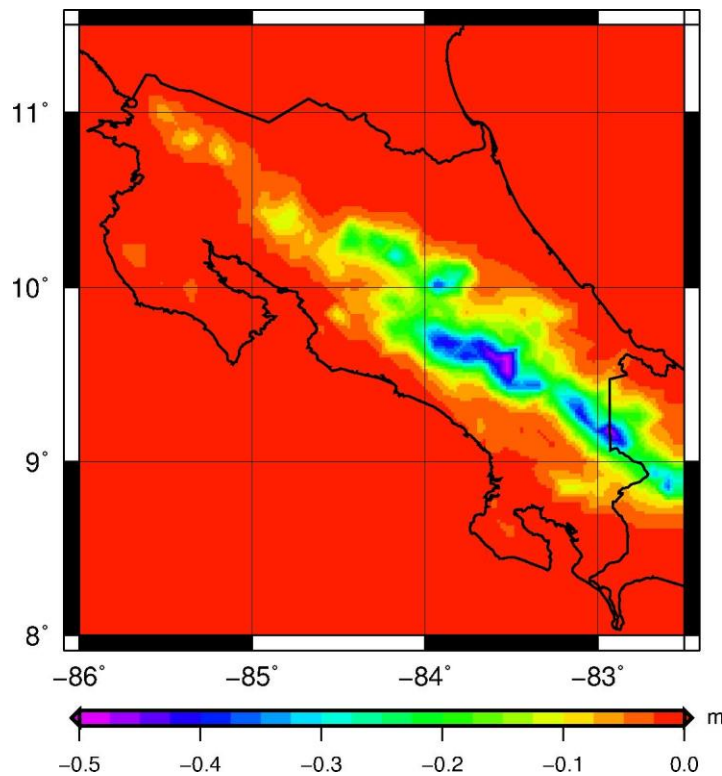


Figura 4.6. Efecto Topográfico Indirecto Primario (PITE), en metros.

d. Modelos de Geoide Calculados

En total se calcularon cuatro modelos de geoide para Costa Rica (Figura 4.7), dos con cada Modelo de Geopotencial Global (DIR_R5 y EIGEN-6C4), evaluando en la técnica remover – restaurar la larga longitud de onda hasta dos diferentes grados y ordenes ($n=m=200$ y 250 para cada MGG).

En la Tabla 4.2 se muestran los valores máximos y mínimos de las ondulaciones geoidales obtenidas en cada uno de los modelos calculados, donde en el valor máximo se pueden apreciar diferencias de hasta 27 centímetros y de 12 centímetros en los valores mínimos entre los diferentes modelos calculados.

MGG	Valor mínimo de N (m)	Valor máximo de N (m)
DIR_200	-2.27	16.95
DIR_250	-2.36	17.19
EIGEN-6C4_200	-2.26	16.92
EIGEN-6C4_250	-2.24	16.98

Tabla 4.2. Valores máximos y mínimos de la ondulación geoidal para cada modelo.

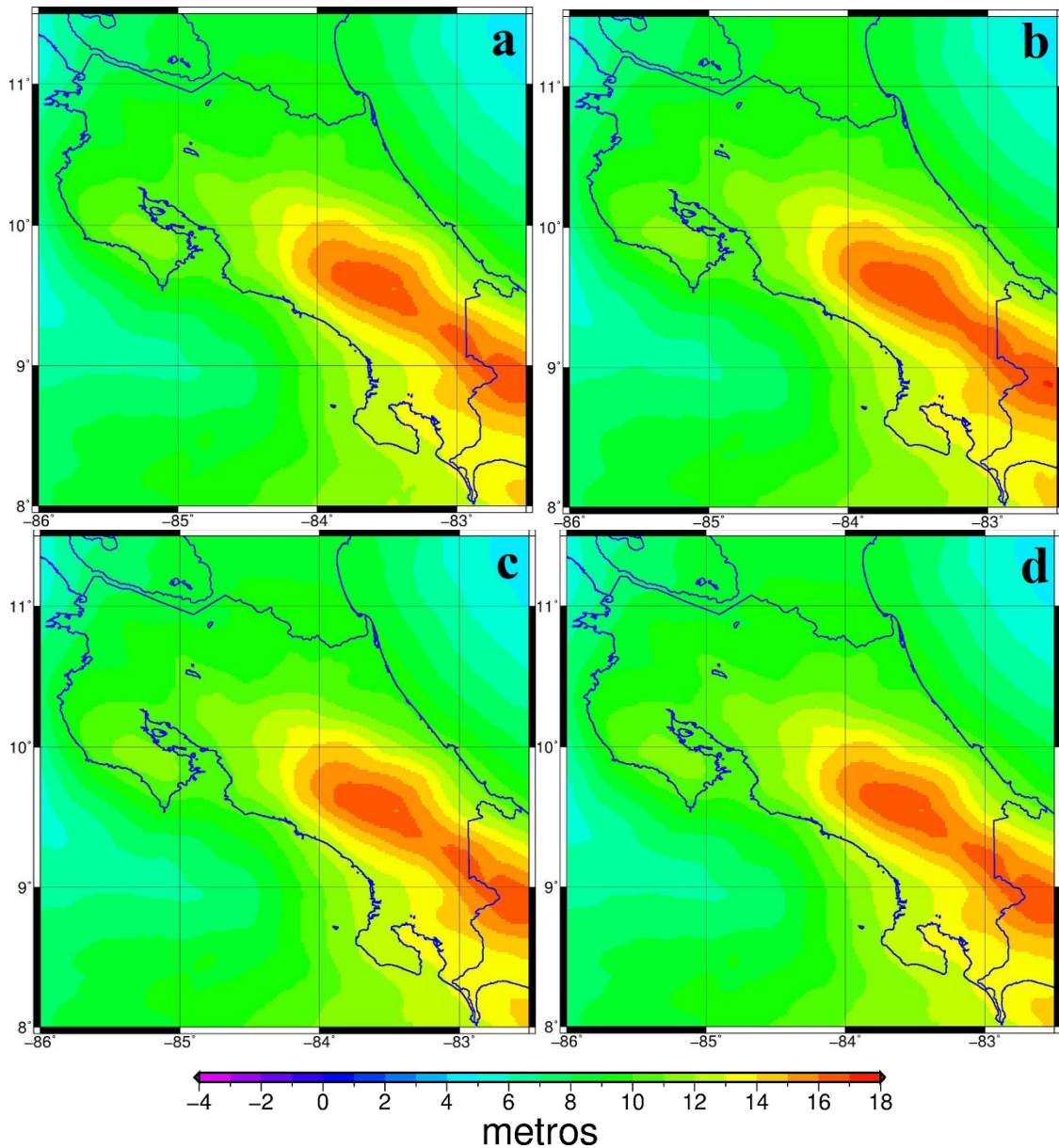


Figura 4.7. Modelos geoidales para Costa Rica en metros: a partir del modelo DIR-R5 (a: $n,m=200$; b: $n,m=250$); y a partir del EIGEN-6C4 (c: $n,m=200$; d: $n,m=250$).

Debido a que los intervalos de las curvas de nivel en los modelos geoidales calculados están en metros (Figura 4.7), y que éstos se presentan visualmente semejantes, se obtuvieron las diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 ($n=m=200$) con respecto a los otros tres modelos calculados. Estas diferencias entre los modelos (Figura 4.8) permiten observar la contribución debido a las largas longitudes de onda de los MGG's y los métodos de construcción de los modelos geopotenciales, ya que tanto los datos gravimétricos terrestres como el método de cálculo no varían.

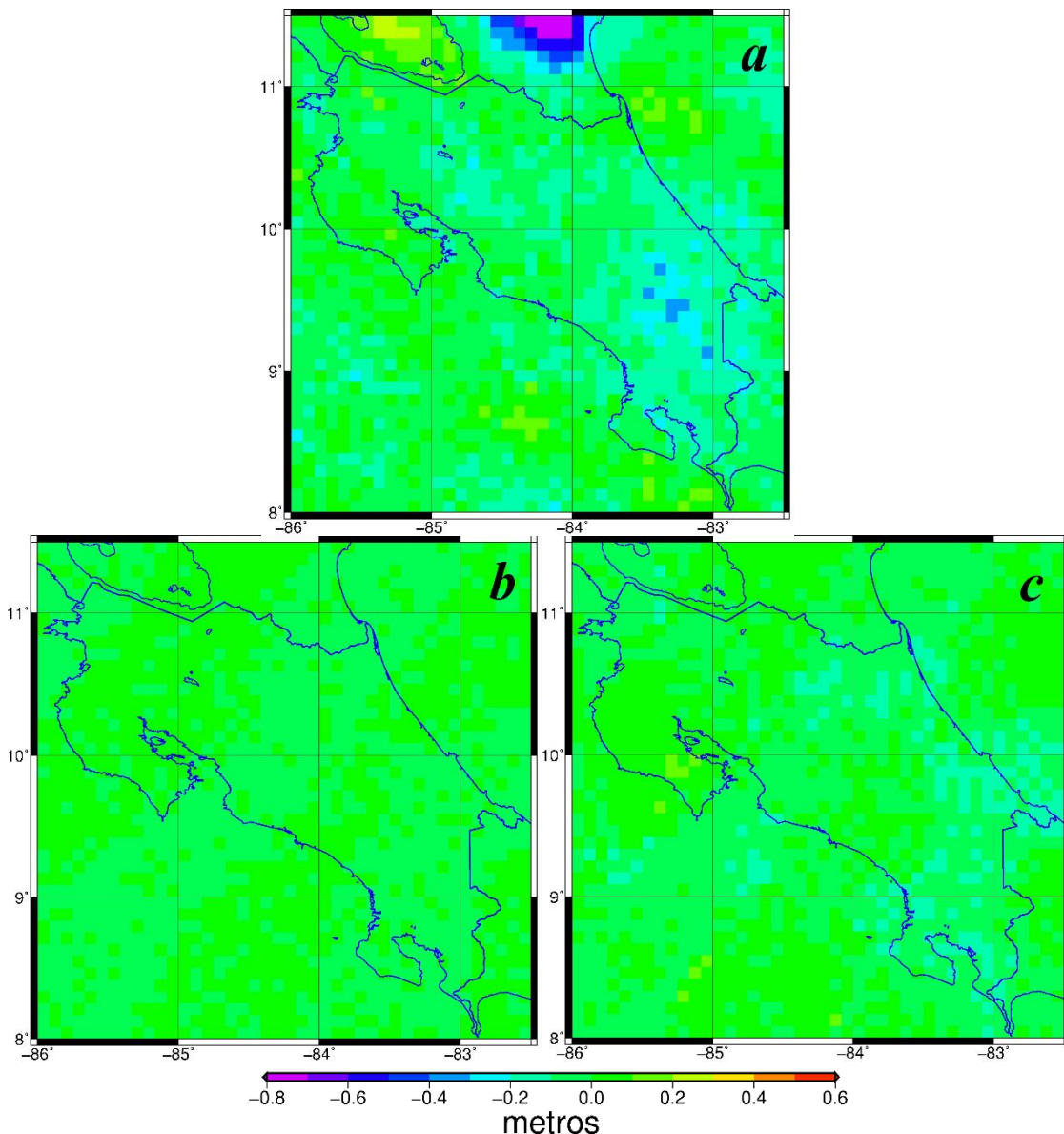


Figura 4.8. Diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 ($n=m=200$) con respecto a: a) DIR_R5 ($n,m=250$); b) EIGEN-6C4 ($n,m=200$); c) EIGEN-6C4 ($n,m=250$).

En la tabla 4.3 se muestran los valores máximos y mínimos de las diferencias entre el modelo de geoide DIR_R5 (n=m=200) y los otros modelos calculados (**DIR_R5_250**, **EIGEN-6C4_200**, **EIGEN-6C4_250**). La diferencia respecto al modelo DIR_R5 (n=m=250) presenta la mayor dispersión de datos con respecto a los otros modelos.

Modelo	ΔN mín. (m)	ΔN máx. (m)
DIR_R5_250	-0.78	0.54
EIGEN-6C4_200	-0.10	0.11
EIGEN-6C4_250	-0.14	0.12

Tabla 4.3. Valores máximos y mínimos de las diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 (n=m=200) respecto a los otros tres modelos calculados.

e. Comparación de los Modelos Calculados con MGG's

Se realizó la comparación de cada modelo de geoide desarrollado en este trabajo con cuatro MGG's: DIR_R5, EIGEN-6C4, XGM2016 y EGM2008. Los dos primeros son motivo de comparación por que contribuyeron al cálculo de los modelos (DIR_R5, EIGEN-6C4), el EGM2008 por ser el más utilizado en Costa Rica y el XGM2016 fue escogido para la comparación siendo el prototipo del modelo EGM2020.

Para realizar esta comparación es necesario descargar las grillas de cada MGG de la página web del *International Centre for Global Earth Models* (ICGEM), las cuales deben ser coincidentes en coordenadas y espaciamiento (5' x 5'). Los MGG se utilizaron hasta su grado y orden máximo.

La diferencia o residuo surge de la discrepancia entre el valor de N_{cal} del modelo calculado y el valor de N_{MGG} del modelo geopotencial global, en el mismo punto de la grilla, dado de la siguiente forma:

$$difN_{cal-MGG} = N_{cal} - N_{MGG} \quad (4.1)$$

Además de la diferencia total, se analizó de forma separada la parte terrestre y la oceánica. En Costa Rica sólo se contaban con mediciones de gravedad en el área continental, y éstas fueron las que contribuyeron a los cálculos de los modelos de geoide. Por otro lado, la parte oceánica fue aportada completamente por las anomalías de aire

libre del modelo DTU10. Para el análisis, en los histogramas se utiliza una escala en el eje Y de 0 a 40%, excepto los casos que señalen otra escala diferente.

Las diferencias del modelo calculado entre DIR_R5 ($n=m=200$) y los MGG's pueden verse en la Figura 4.9, donde aquellas con respecto al EIGEN-6C4, el XGM2016 y el EGM2008 son más homogéneas en toda el área de trabajo. Con respecto al DIR_R5, se observa un comportamiento más heterogéneo, mostrando zonas con mayores diferencias.

El histograma de la Figura 4.10.a muestra las diferencias del modelo DIR_R5, donde se aprecia una mayor dispersión de los datos. La comparación con los otros tres MGG's manifiestan una mayor agrupación dentro del intervalo de -0.10 m a -0.20 m, siendo el EIGEN-6C4 el que presenta el mayor pico de agrupación con más del 35% de los residuos en ese intervalo.

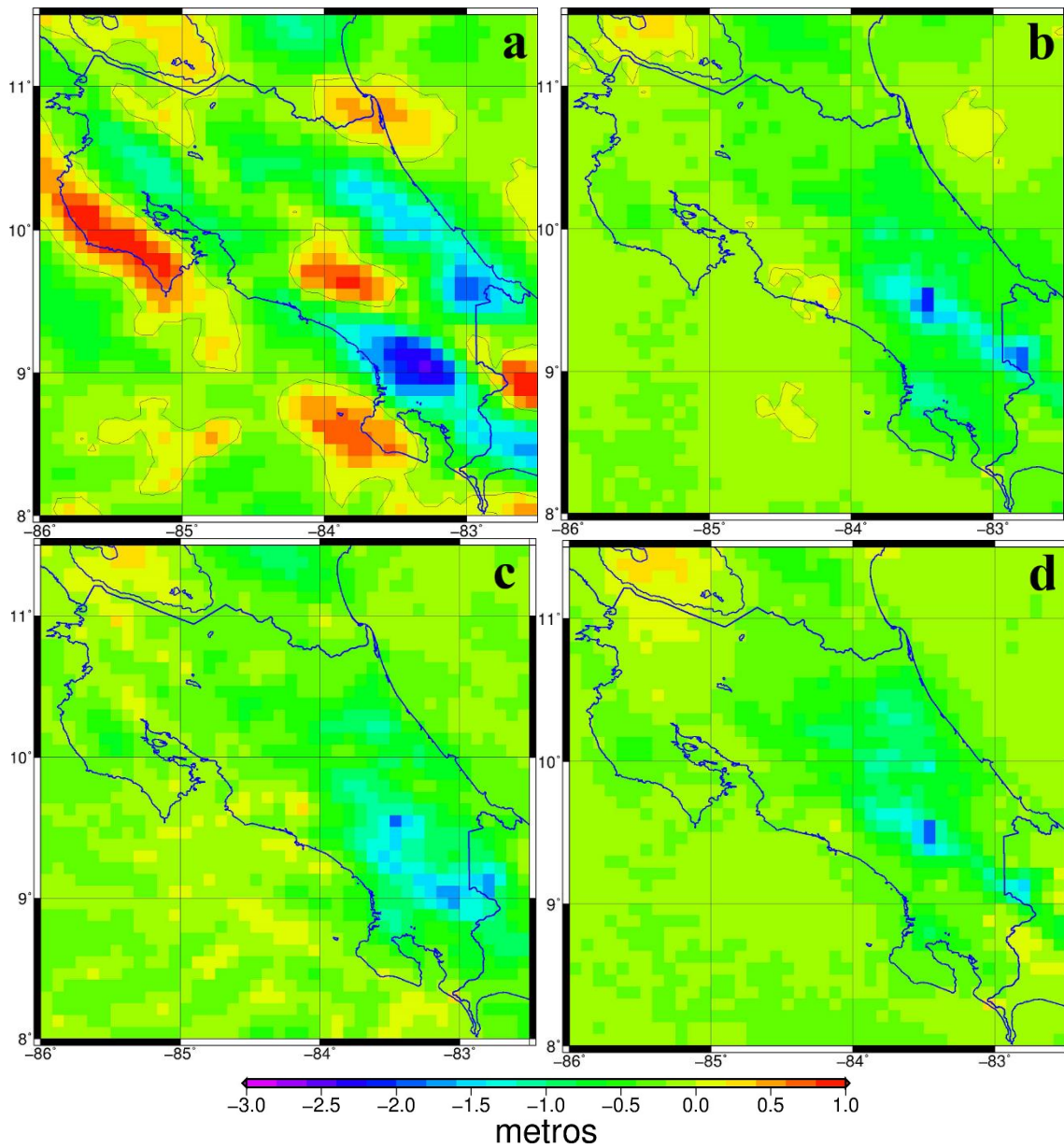


Figura 4.9. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (DIR_R5 $n,m=200$) y los MGG's: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

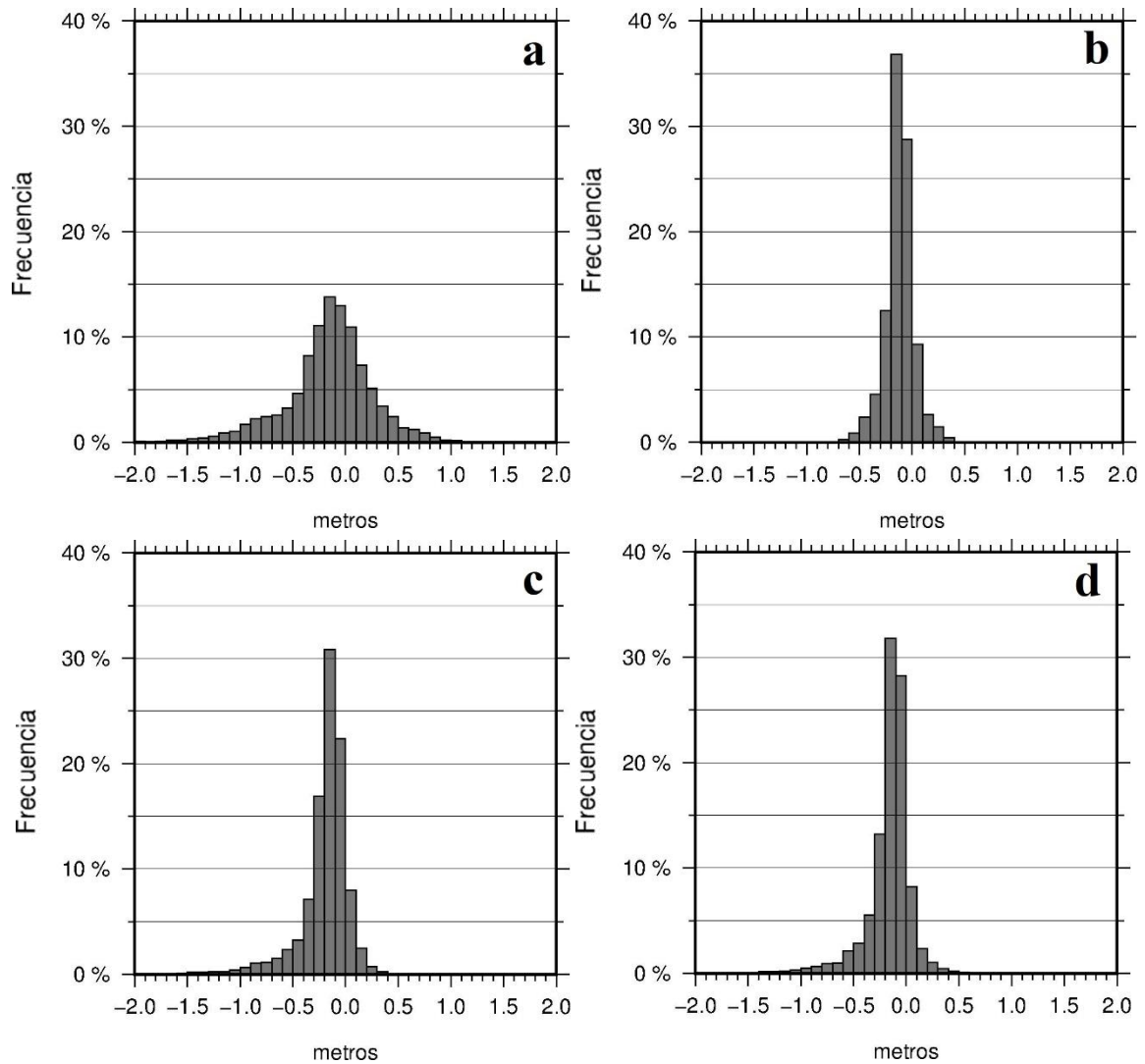


Figura 4.10. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=200) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

Los residuos de la comparación de los MGG's con respecto al modelo calculado con DIR_R5 ($n=m=200$), tomando en cuenta solamente la parte continental, se visualizan en los histogramas de la Figura 4.11, donde se puede observar que los datos muestran una mayor dispersión en tierra y no alcanzan el 20% de frecuencia en ninguno de los casos.

Las mayores frecuencias en tierra se presentan con respecto a los MGG's EIGEN-6C4 y XGM2016, siendo el primero ligeramente mejor que el segundo, con una mayor agrupación de valores en el intervalo de 0 m a 0.10 m.

En la parte oceánica (Figura 4.12), el EGM2008 presenta la mejor frecuencia y agrupación de los datos. En cambio, el DIR_R5 presenta la mayor dispersión de los datos con respecto a las otras comparaciones.

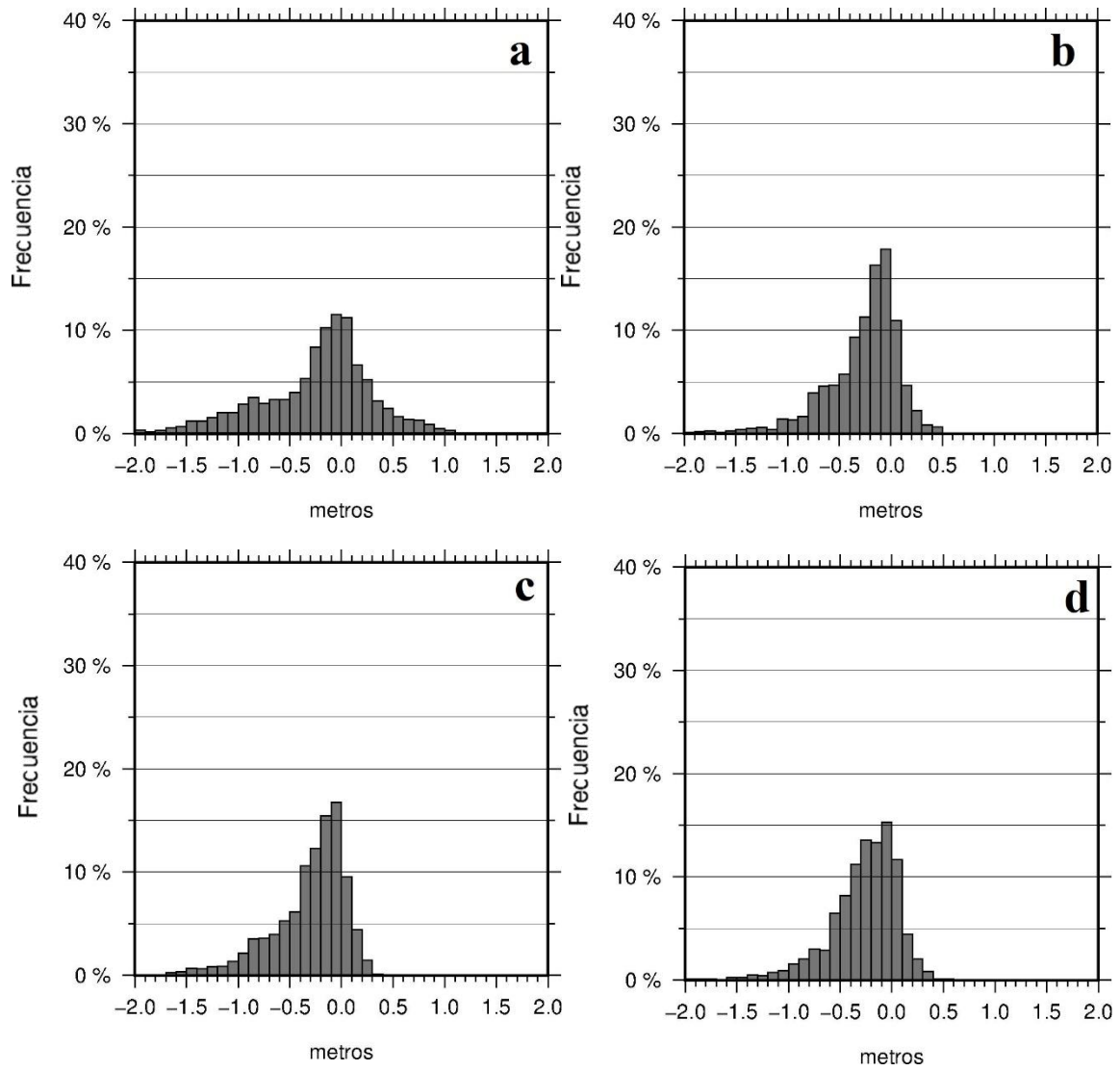


Figura 4.11. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 $n,m=200$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

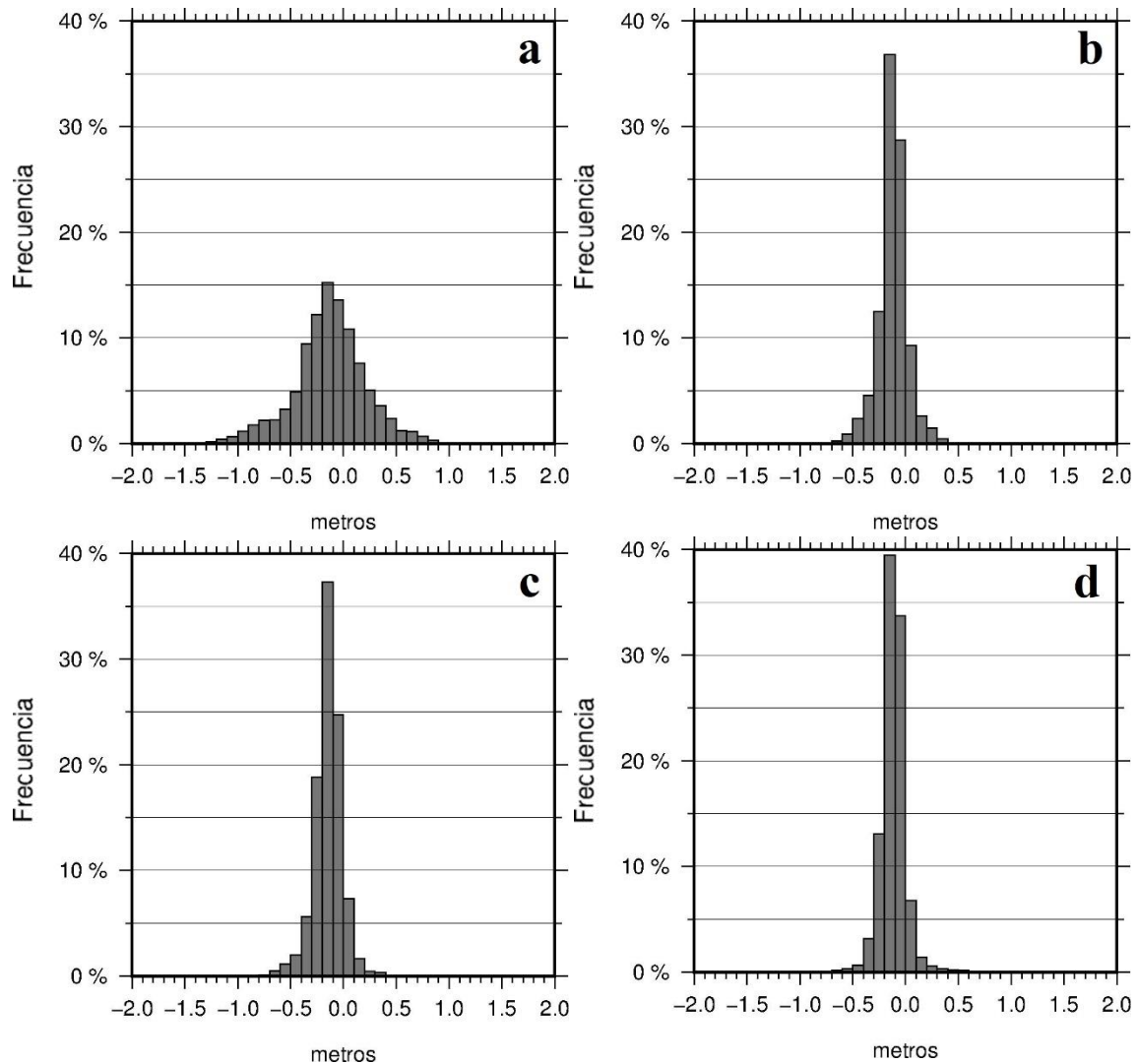


Figura 4.12. Histograma de las diferencias en océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=200) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

En la Figura 4.13 se exponen los mapas de las comparaciones del modelo calculado con DIR_R5 ($n=m=250$) y los MGG's. En el mapa (a) de la figura (diferencia con DIR_R5) se muestran diversos sectores menores a -2.00 m y mayores a 0.50 m (colores azules y naranjas respectivamente en la escala de colores), evidenciando grandes diferencias. Los mapas (b, c, d) permiten observar una menor variabilidad de las diferencias, excepto por las pequeñas zonas celestes y azules.

Los histogramas (Figura 4.14) indican que el MGG EGM2008 tiene la mayor agrupación de datos en el intervalo que va de 0 m a 0.10 m, superando el 35% de frecuencia.

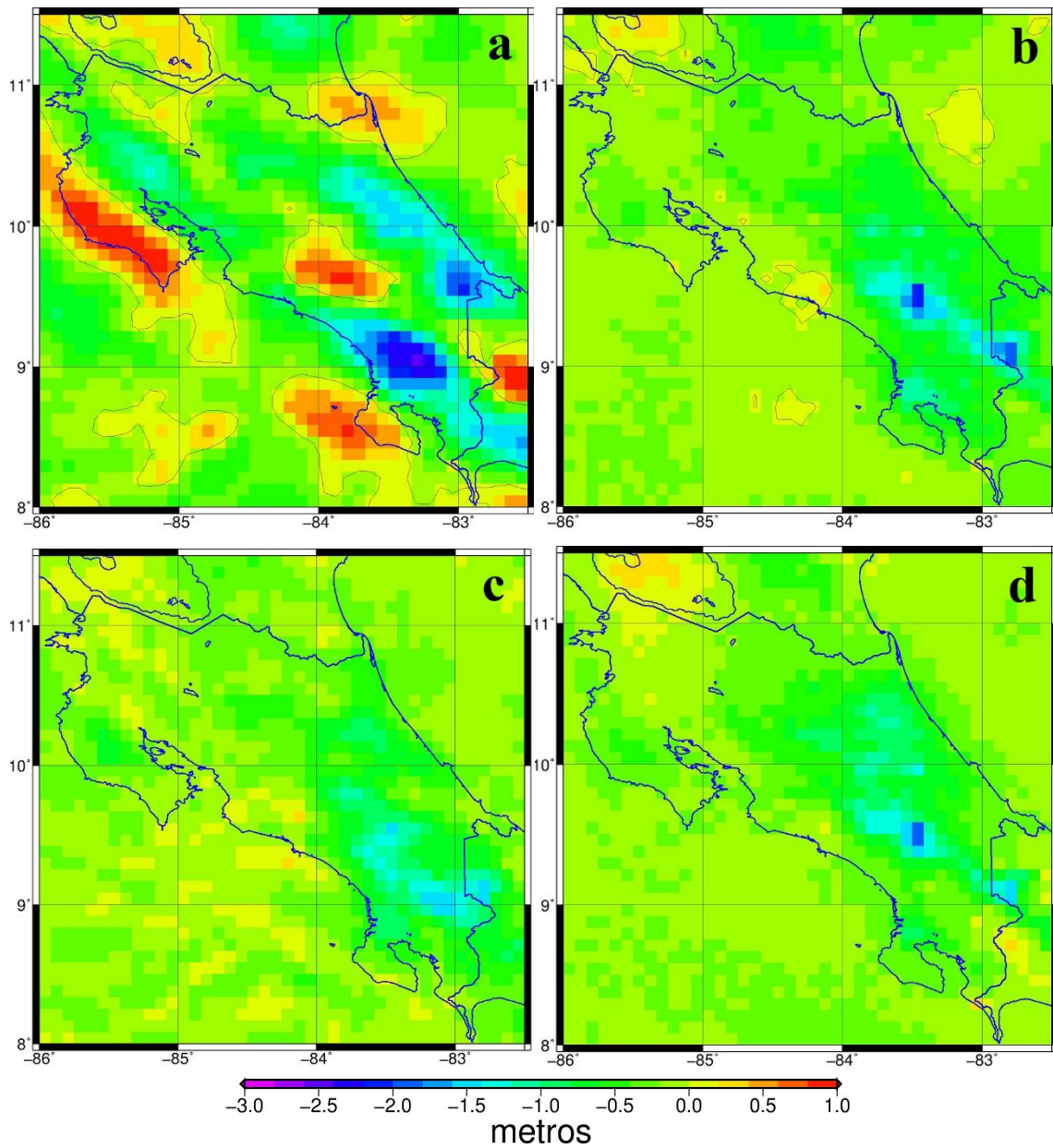


Figura 4.13. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (DIR_R5 $n,m=250$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

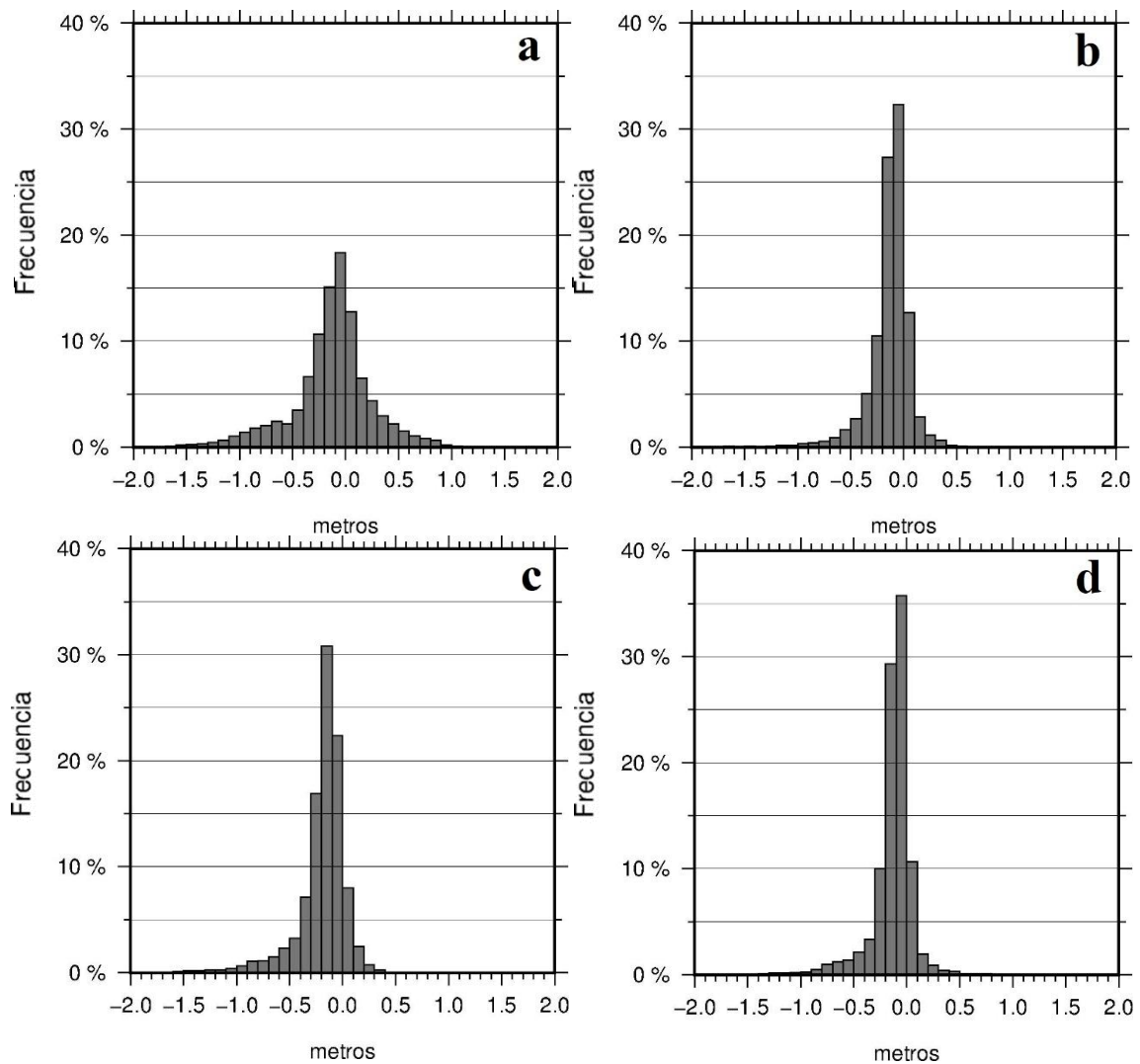


Figura 4.14. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

En territorio continental (Figura 4.15) las diferencias para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) con los modelos EIGEN-6C4 y EGM2008 muestran que éstos son los que mejor se ajustan al modelo calculado; y el DIR_R5 es el que presenta la mayor dispersión de los residuos.

Los histogramas que representan la parte oceánica (Figura 4.16) utilizan en este caso una escala en el eje Y de 0 a 45%. Las diferencias del modelo DIR_R5 n,m=250 con el EGM2008 reflejan los mejores resultados con una mayor agrupación (superior al 40%) y una menor dispersión de los datos.

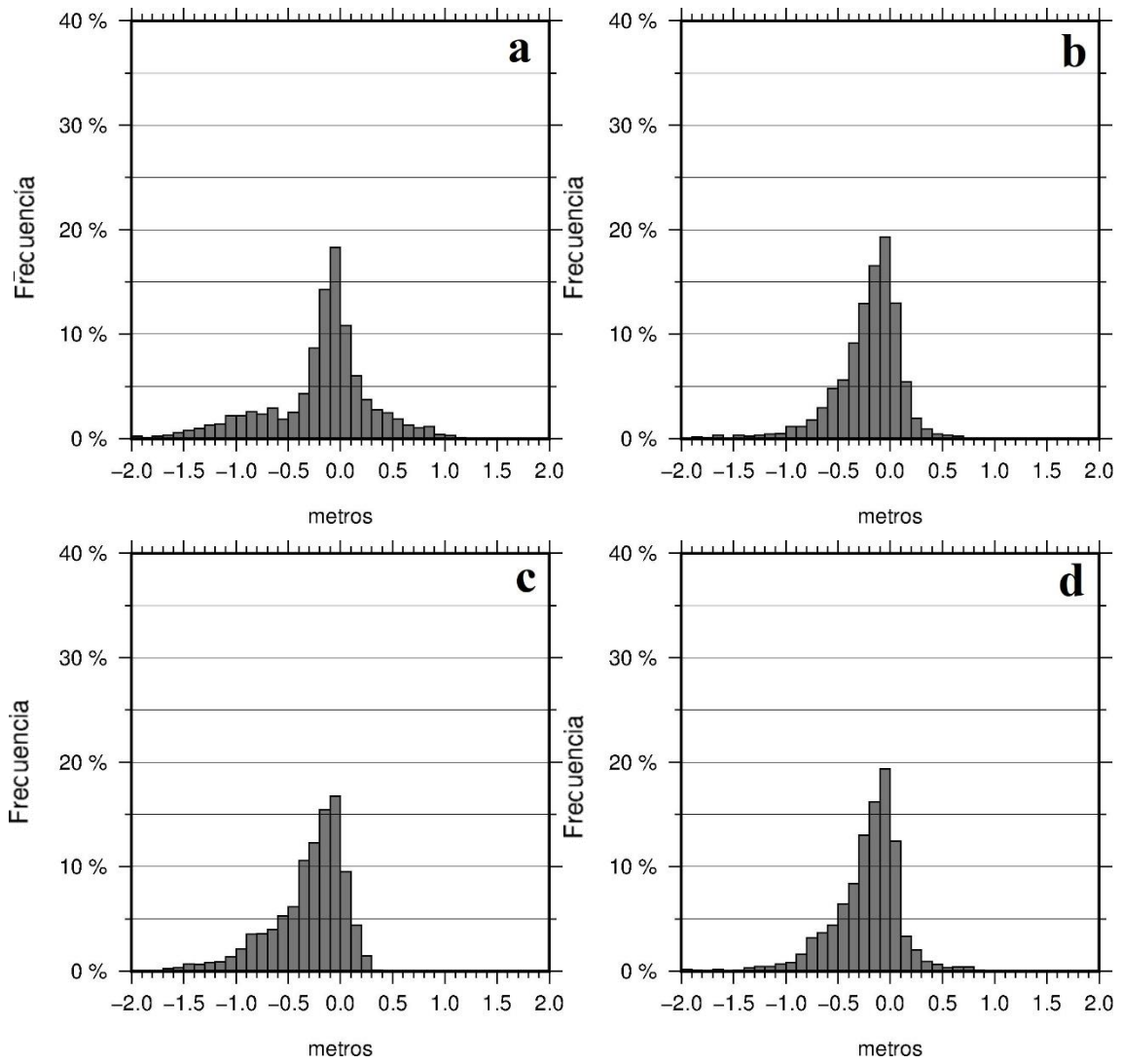


Figura 4.15. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

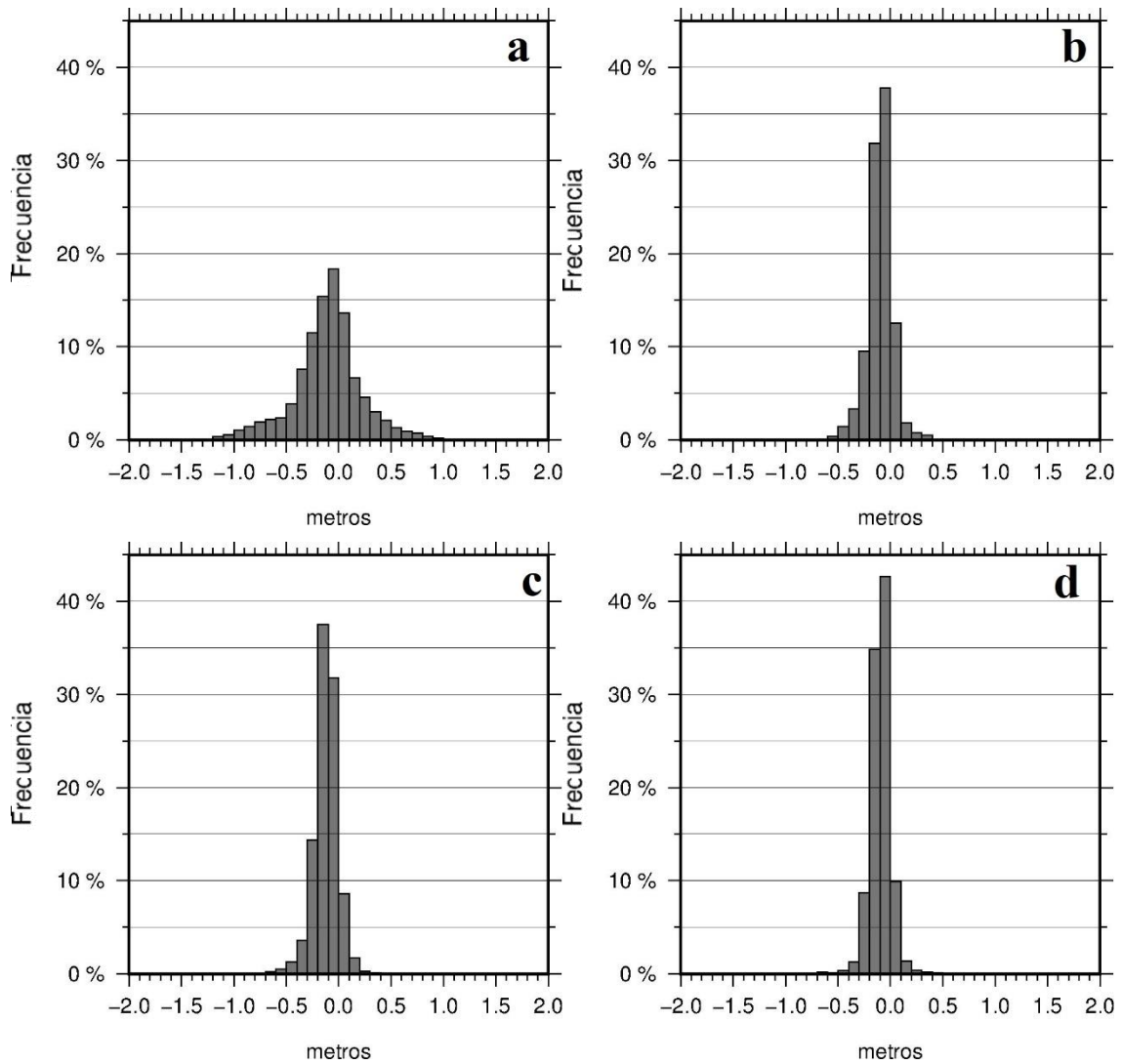


Figura 4.16. Histograma de las diferencias en océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (DIR_R5 n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

Los mapas de las diferencias del modelo geoidal para Costa Rica basado en EIGEN-6C4 (n,m=200) se presentan en la Figura 4.17, y en la Figura 4.18, los histogramas. La comparación respecto al MGG EGM2008 es la que muestra los mejores resultados, con una agrupación de datos superior al 35% en el intervalo de 0 m a 0.10 m. Además, la comparación respecto al MGG DIR_R5 muestra la mayor dispersión de los datos para este modelo.

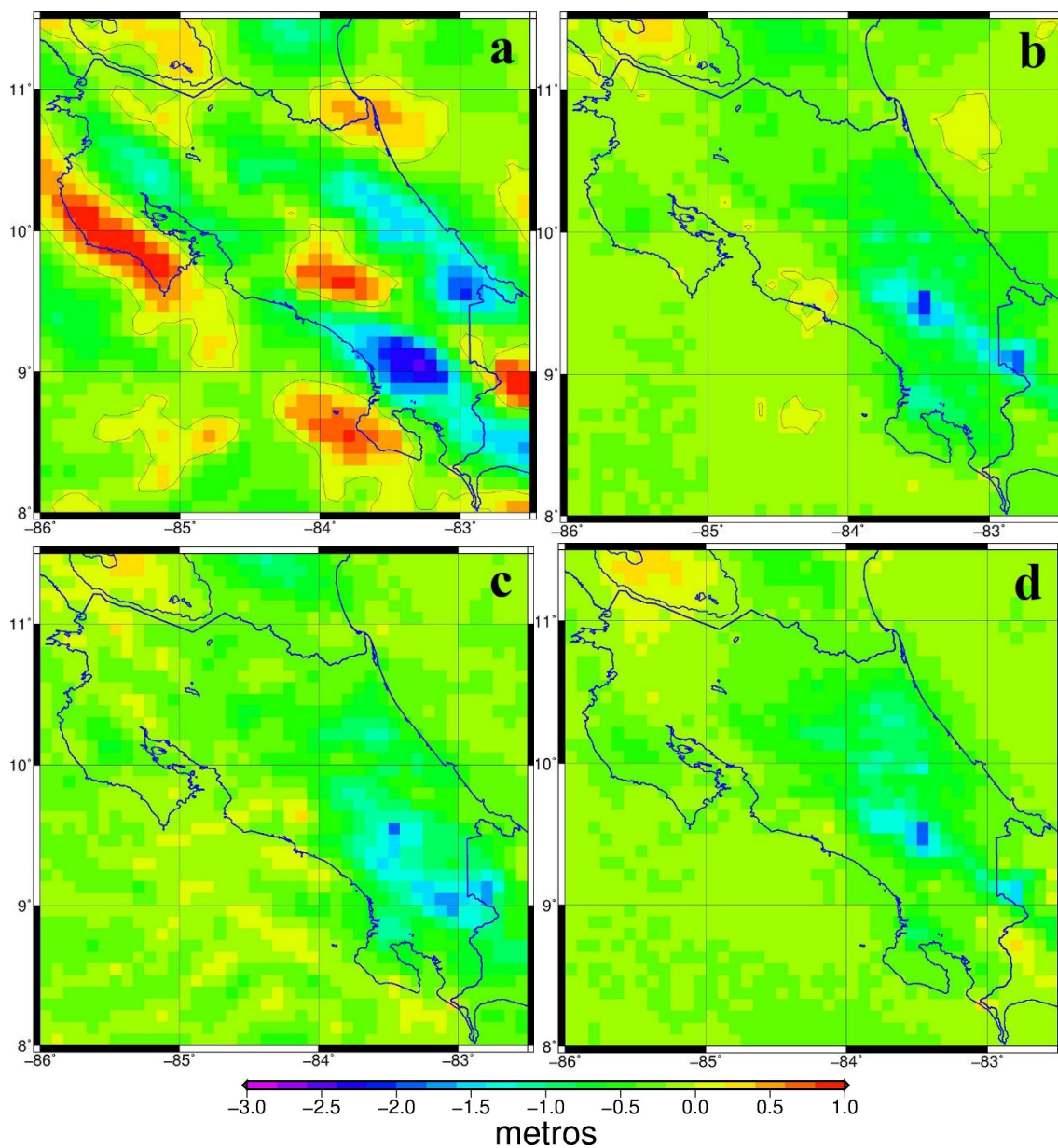


Figura 4.17. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (EIGEN-6C4 $n,m=200$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

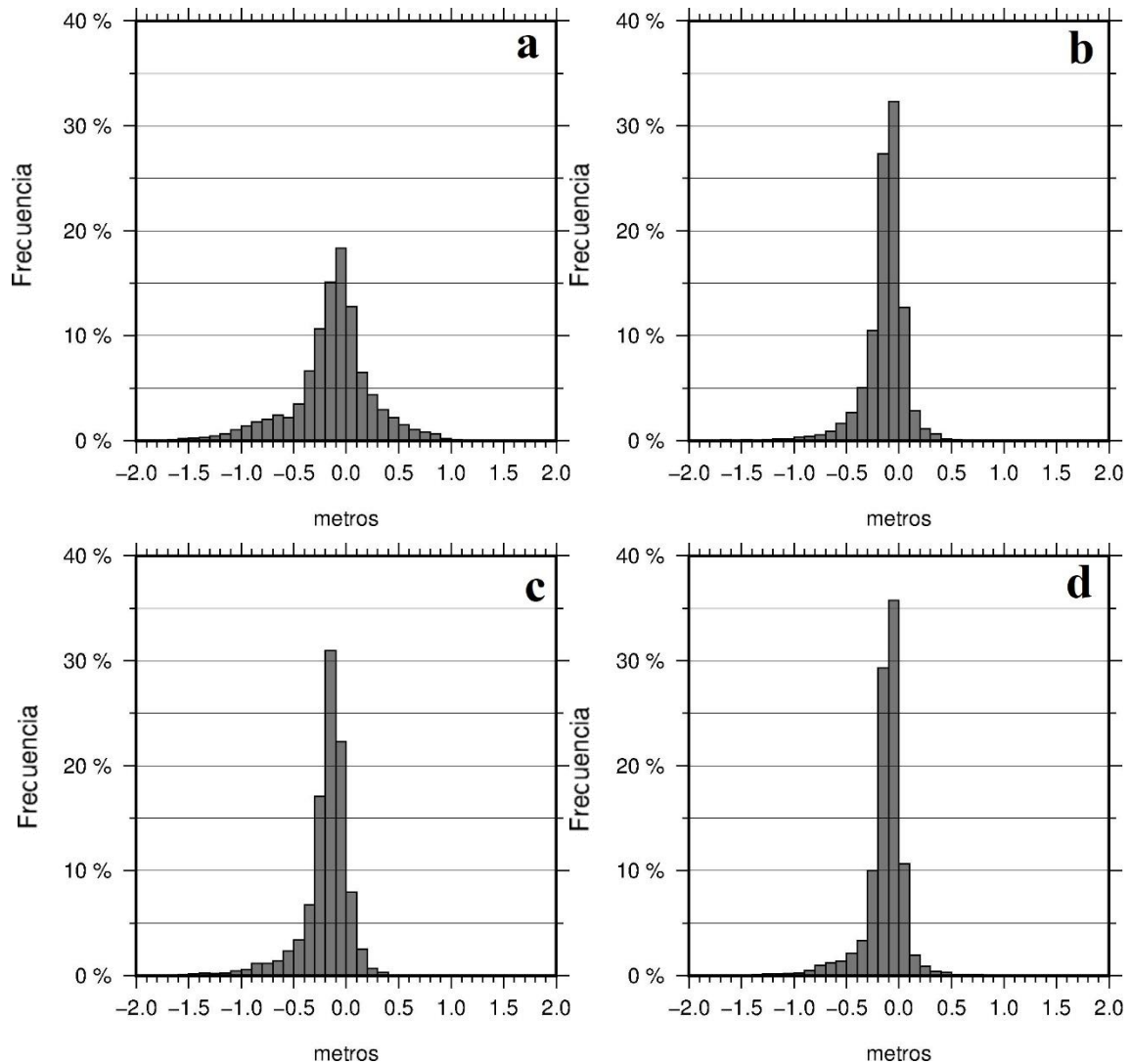


Figura 4.18. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 $n,m=200$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

Respecto al territorio continental (Figura 4.19) las diferencias con respecto a todos los MGG's, en su mayoría, se conglomeran entre las frecuencias del 15% y el 20%, agrupadas en el intervalo que va de -0.10 m a 0.00 m, donde el EIGEN-6C4 y el EGM2008 superan levemente las comparaciones con el DIR_R5 y el XGM2016.

En el océano (Figura 4.20), los histogramas se trabajaron con una escala en el eje Y de 0 a 45%. La diferencia respecto al EGM2008 es la presenta los mejores resultados, obteniendo más de un 40% de la frecuencia de los datos en el intervalo de -0.10 m a 0 m.

Respecto a esta comparación, el modelo EGM2008 es el que mejor se ajusta al modelo calculado basado al EIGEN-6C4 ($n,m=200$).

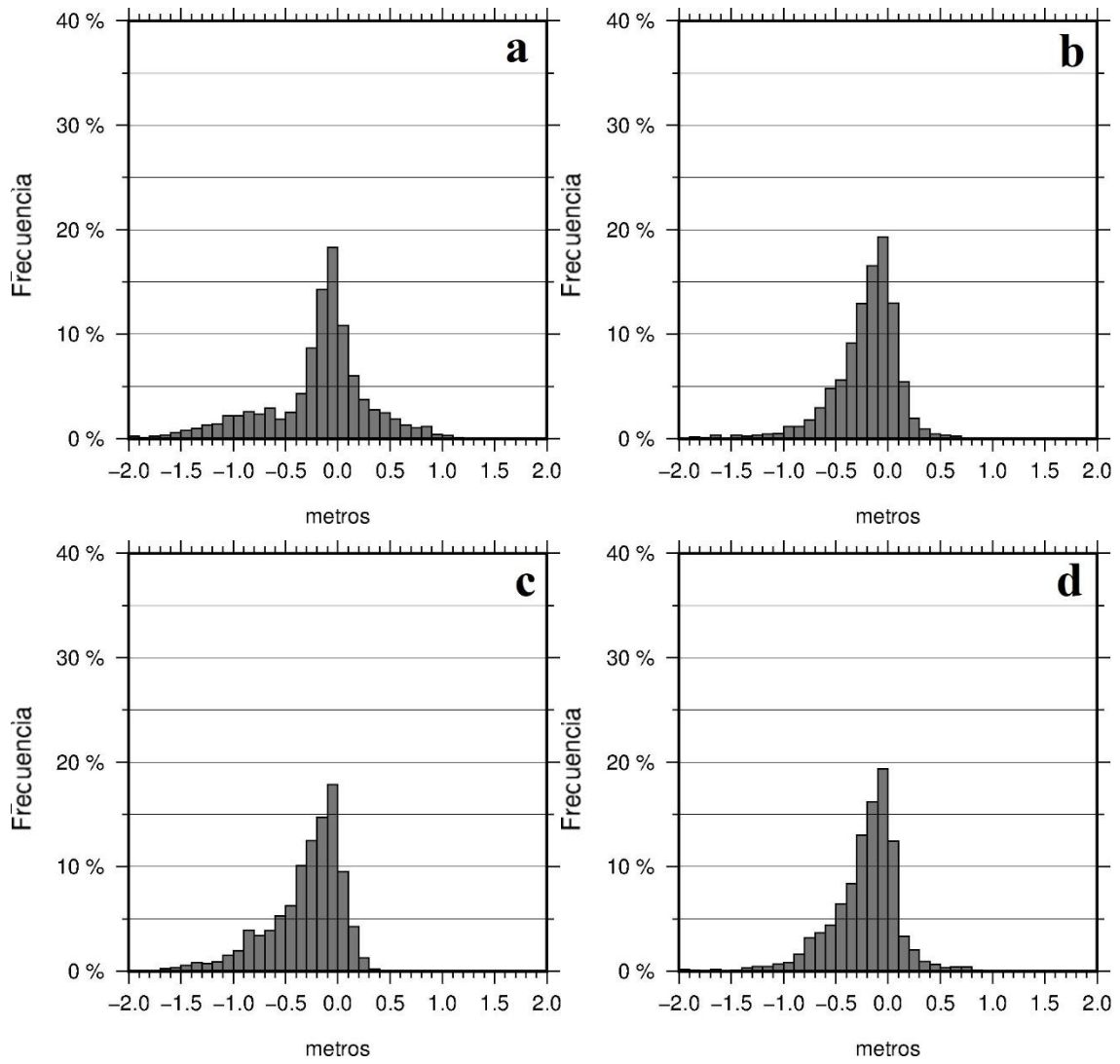


Figura 4.19. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=200) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d)EGM2008.

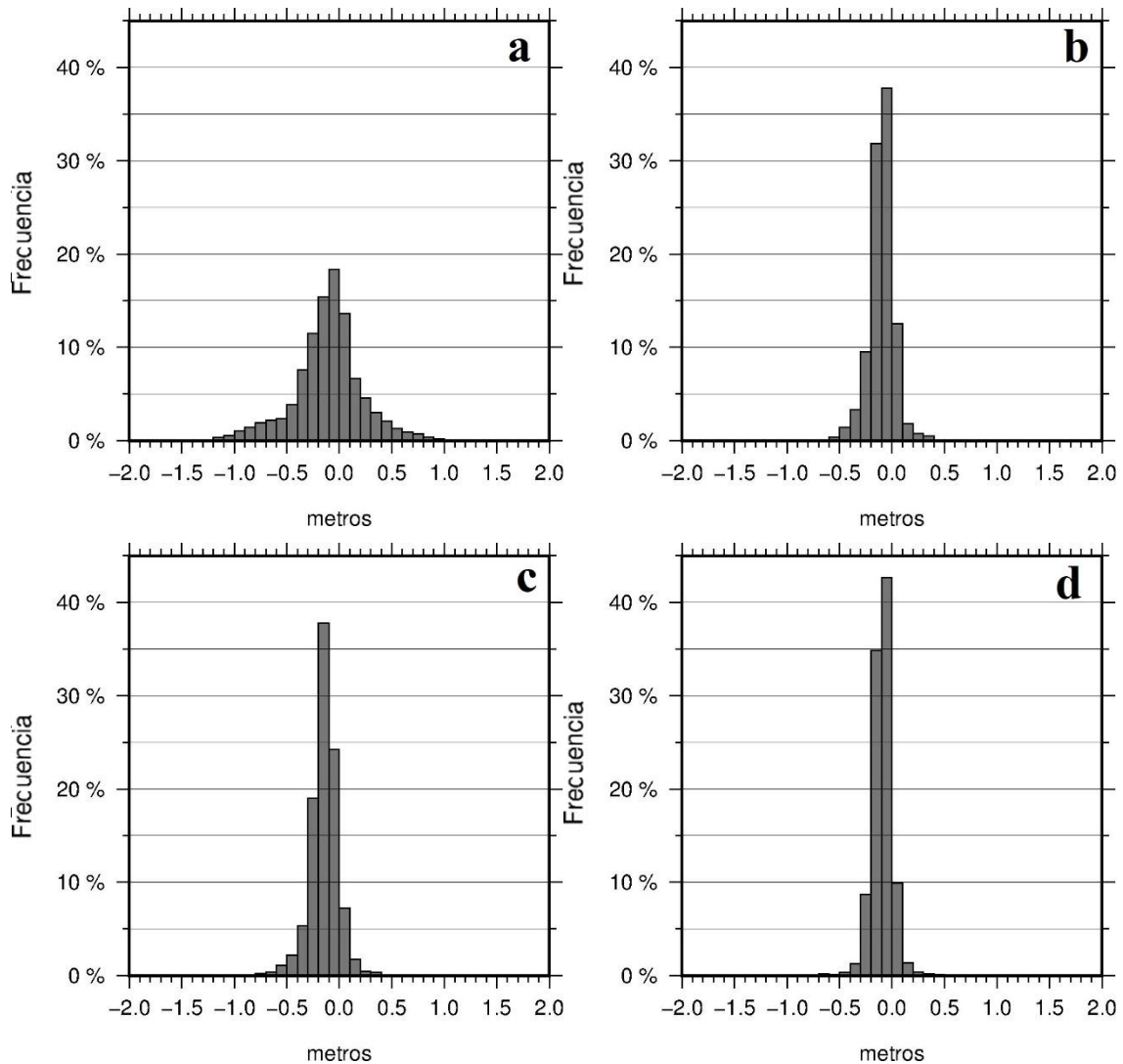


Figura 4.20. Histograma de las diferencias en océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 $n,m=200$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

Los residuos del modelo para Costa Rica basado en el MGG EIGEN-6C4 ($n=m=250$) con respecto a los MGG's presentan los mejores resultados en relación al EGM2008, tal como se puede ver en las Figuras 4.21 y 4.22, seguidamente del EIGEN-6C4, el XGM2016 y por último el DIR_R5.

Los histogramas de residuos de la parte continental se muestran en la Figura 4.23, donde todos los modelos alcanzan una frecuencia de entre el 15% y el 20%. En el océano, los histogramas de los residuos (Figura 4.24) muestran que la comparación con el EGM2008 corresponde con el mejor resultado con una frecuencia de más del 40% de los datos agrupados en el intervalo de -0.10 m a 0 m.

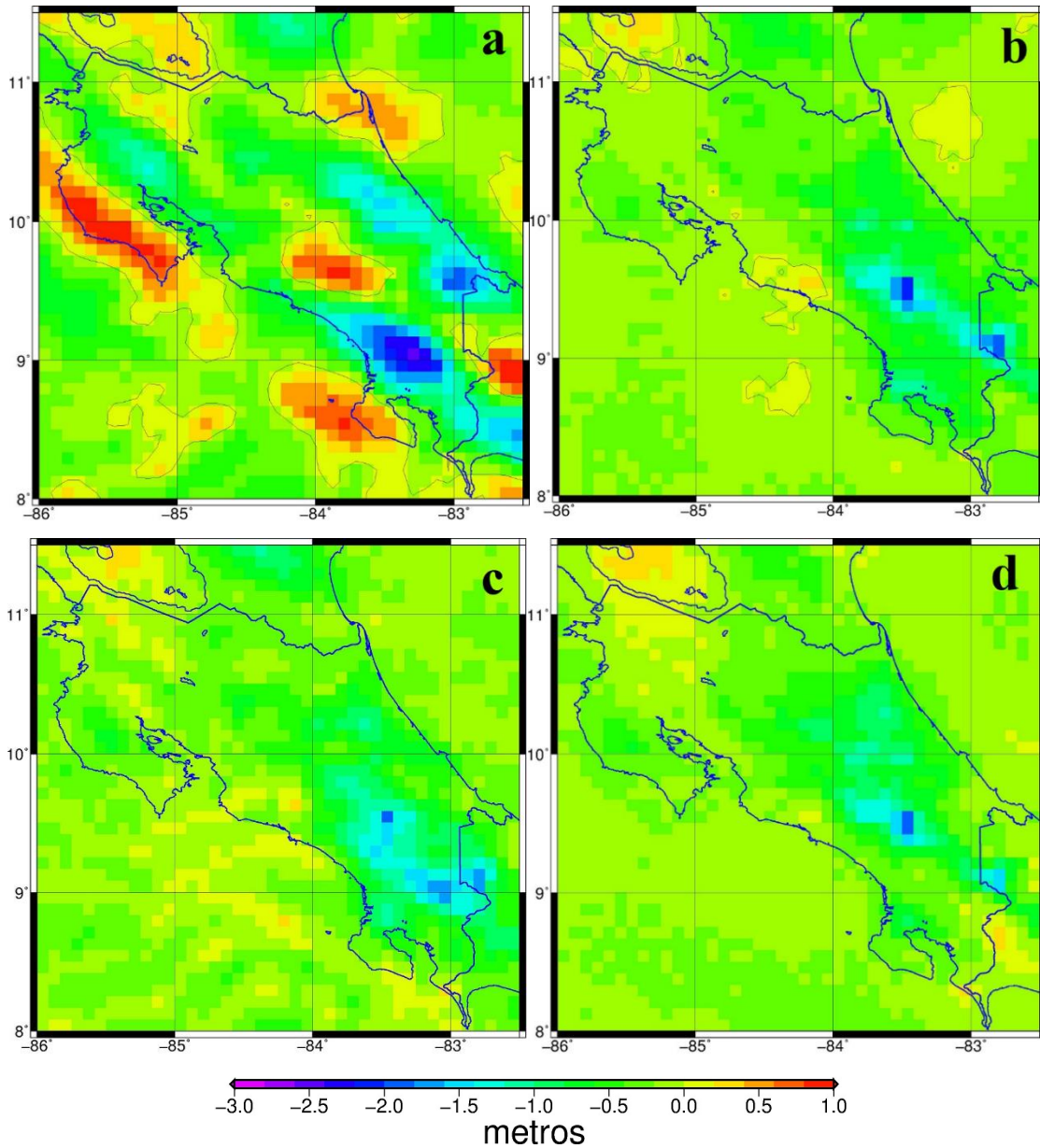


Figura 4.21. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

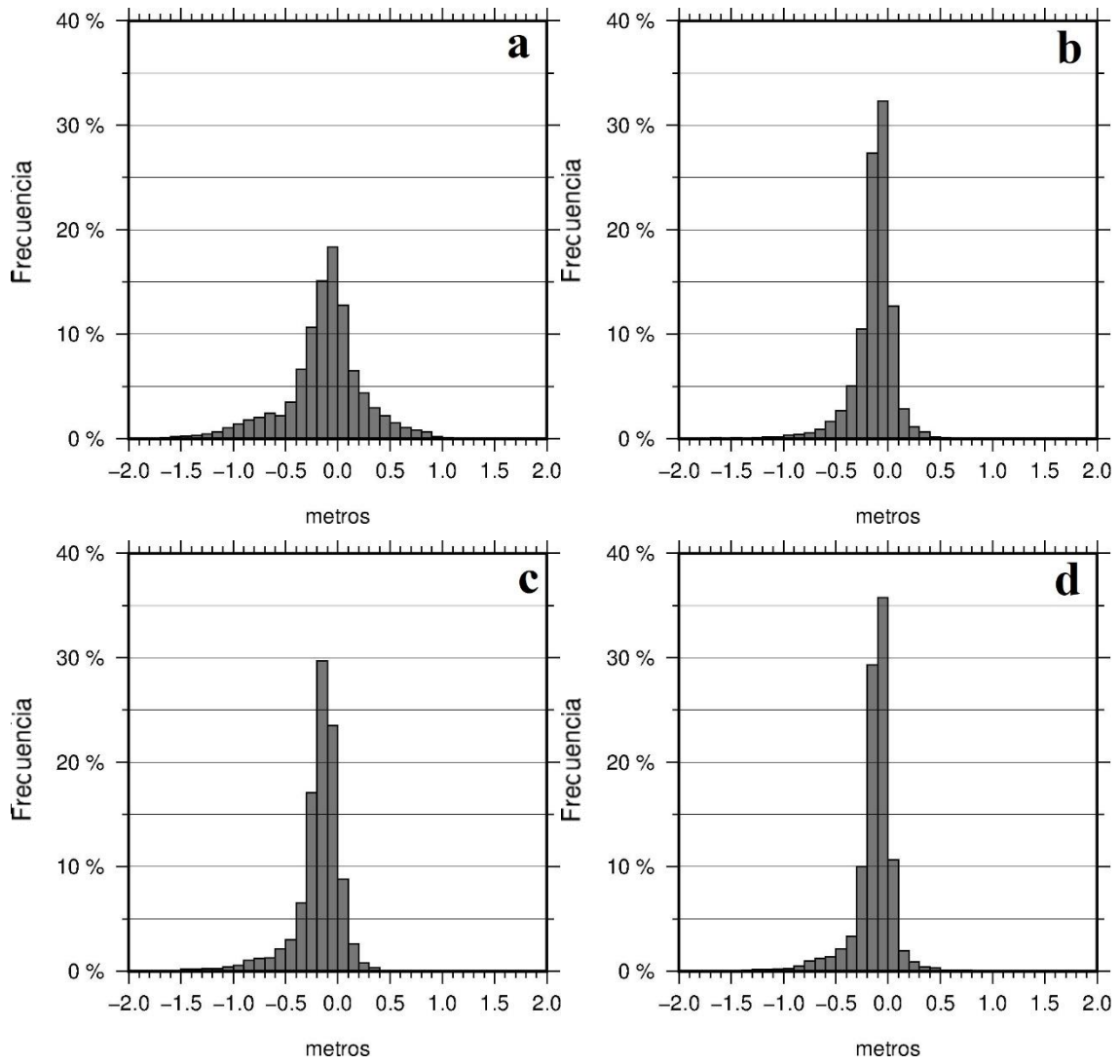


Figura 4.22. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 $n,m=250$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

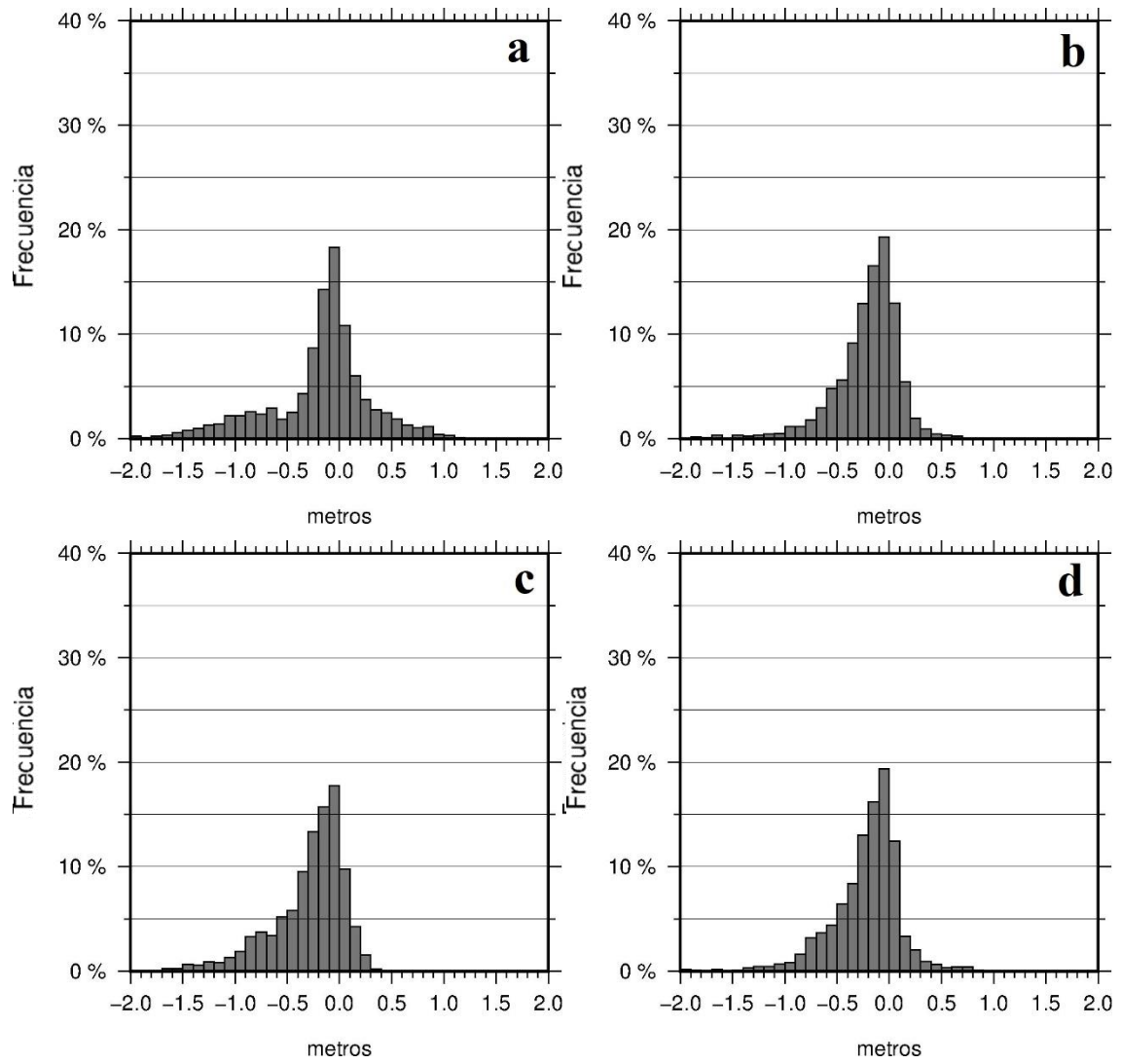


Figura 4.23. Histograma de las diferencias en tierra entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 $n,m=250$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

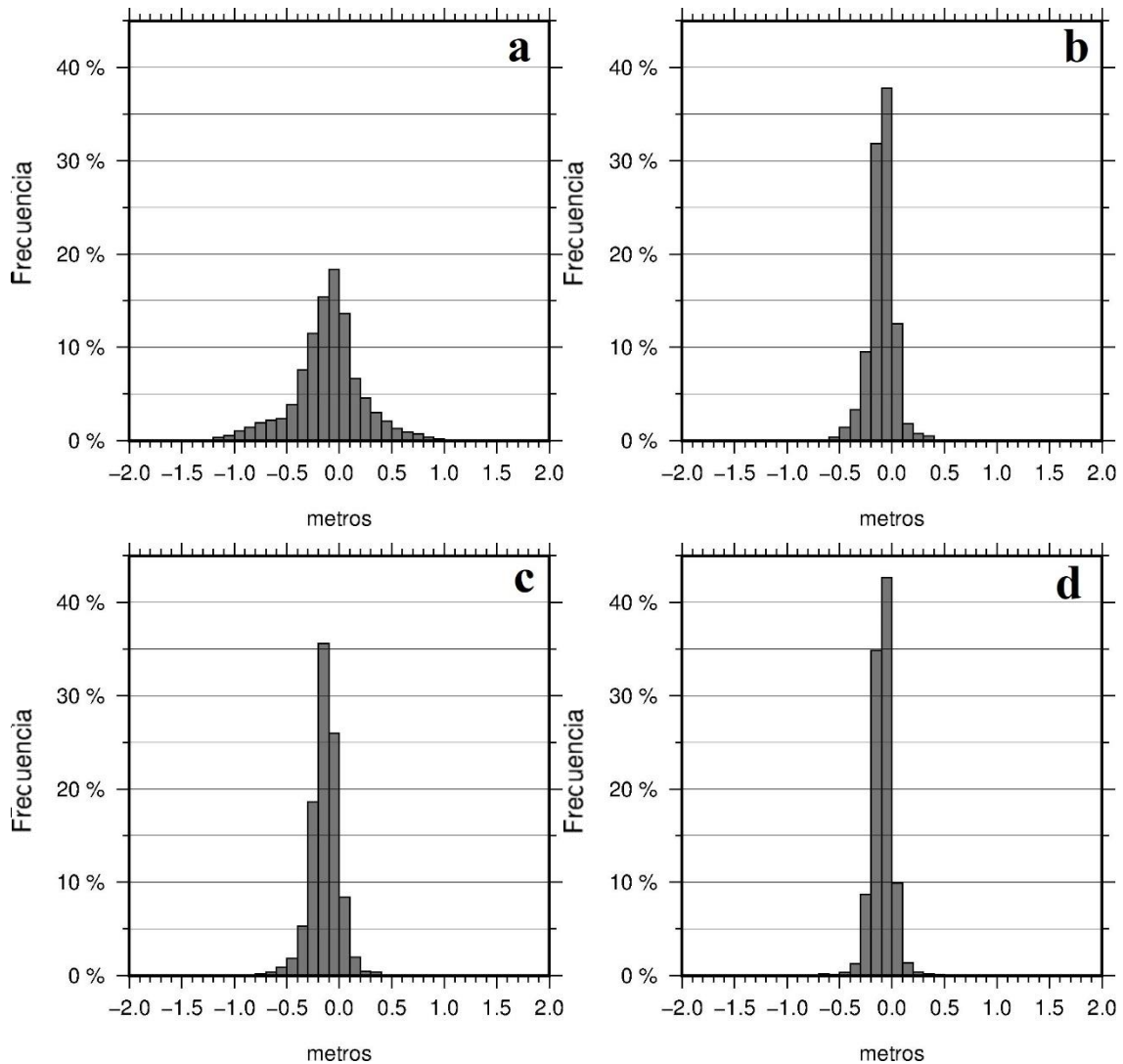


Figura 4.24. Histograma de las diferencias en Océano entre el Modelo geoidal para Costa Rica (EIGEN-6C4 n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

La tabla 4.4 es un resumen de las diferencias entre cada modelo calculado (DIR_R5 y EIGEN-6C4) y los MGG's, donde se presentan la media, el RMS (raíz media cuadrática) y los valores mínimos y máximos de los residuos, luego los valores para la parte sólo terrestre, y por último, para sólo la oceánica. Se resaltan los mejores valores entre todas las comparaciones para cada caso (completo, tierra, océano), la media más cercana a cero, el menor (RMS); y en cuanto a los valores mínimos y máximos, se resaltan los que producen el menor o más pequeño intervalo de valores. El modelo calculado con el MGG DIR_R5, con la contribución de longitud de onda larga hasta grado y orden 200, es el que presenta la mayor cantidad de mejores valores respecto a las comparaciones de los cuatro Modelos Geopotenciales Globales.

Modelo Calculado	MGG	Completo				Tierra				Agua			
		Media (m)	RMS (m)	Dif. Min (m)	Dif. Máx. (m)	Media (m)	RMS (m)	Dif. Min (m)	Dif. Máx. (m)	Media (m)	RMS (m)	Dif. Min (m)	Dif. Máx. (m)
DIR_R5 (n=m=200)	DIR_R5	-0.16	0.45	-2.46	1.14	-0.25	0.61	-2.46	1.14	-0.13	0.36	-1.66	1.14
	EIGEN-6C4	-0.16	0.28	-2.15	0.55	-0.26	0.44	-2.15	0.48	-0.12	0.18	-0.86	0.55
	XGM2016	-0.19	0.30	-1.89	0.44	0.55	0.61	0.27	1.24	-0.15	0.20	-0.86	0.44
	EGM2008	-0.16	0.28	-2.28	0.54	-0.28	0.44	-2.28	0.54	-0.12	0.16	-0.96	0.52
DIR_R5 (n=m=250)	DIR_R5	-0.13	0.41	-2.33	1.24	-0.19	0.54	-2.33	1.24	-0.11	0.34	-1.50	1.22
	EIGEN-6C4	-0.13	0.24	-1.87	0.68	-0.21	0.38	-1.87	0.68	-0.10	0.15	-0.90	0.41
	XGM2016	-0.16	0.25	-1.54	0.39	-0.25	0.39	-1.54	0.35	-0.12	0.17	-0.77	0.39
	EGM2008	-0.13	0.25	-2.15	0.83	-0.22	0.40	-2.15	0.83	-0.09	0.14	-0.82	0.46
EIGEN-6C4 (n=m=200)	DIR_R5	-0.16	0.45	-2.55	1.18	-0.25	0.61	-2.55	1.11	-0.13	0.36	-1.65	1.18
	EIGEN-6C4	-0.16	0.28	-2.15	0.55	-0.26	0.44	-2.15	0.50	-0.12	0.18	-0.88	0.55
	XGM2016	-0.19	0.30	-1.89	0.44	-0.31	0.46	-1.89	0.33	-0.15	0.20	-0.89	0.44
	EGM2008	-0.16	0.28	-2.25	0.56	-0.28	0.44	-2.25	0.51	-0.12	0.16	-0.95	0.56
EIGEN-6C4 (n=m=250)	DIR_R5	-0.15	0.44	-2.45	1.13	-0.23	0.59	-2.45	1.11	-0.12	0.36	-1.55	1.13
	EIGEN-6C4	-0.15	0.28	-2.15	0.55	-0.25	0.43	-2.15	0.50	-0.11	0.18	-0.88	0.55
	XGM2016	-0.18	0.29	-1.89	0.44	-0.29	0.45	-1.89	0.33	-0.14	0.19	-0.89	0.44
	EGM2008	-0.16	0.27	-2.25	0.56	-0.26	0.43	-2.25	0.51	-0.11	0.16	-0.95	0.56

Tabla 4.4. Media, RMS y valores máximos y mínimos de la diferencia entre cada modelo calculado y los MGG's.

4.1.2. Modelos de Geoide calculados para la Mesopotamia Argentina

El cálculo de los modelos de geoide para la Mesopotamia Argentina siguió la misma metodología que se utilizó para Costa Rica, con datos en forma de grilla de anomalías completas de Bouguer de 5'x5', utilizando el MDT SAM3s_v2, y las anomalías de aire libre provenientes del modelo DTU10. Se reconstruyeron las anomalías medias de aire libre a partir de las anomalías de Bouguer completas, luego se calculó la anomalía de Helmert, a continuación se aplicó la técnica remover – restaurar (de la misma forma que para Costa Rica), y por último se adicionó el PITE al co-geoide de Helmert.

a. Anomalía de Gravedad de Helmert

En la Figura 4.25 se muestra el mapa de las anomalías de gravedad de Helmert en mGal referida a la superficie terrestre, éstas equivalen a la anomalía gravimétrica media de aire libre más los Efectos Topográfico Directo, Atmosférico Directo y Topográfico

Secundario Indirecto (Ellmann, 2005; Ellmann & Vaníček, 2007). Esta anomalía muestra un valor máximo de 96.46 mGal y un valor mínimo de -52.20 mGal.

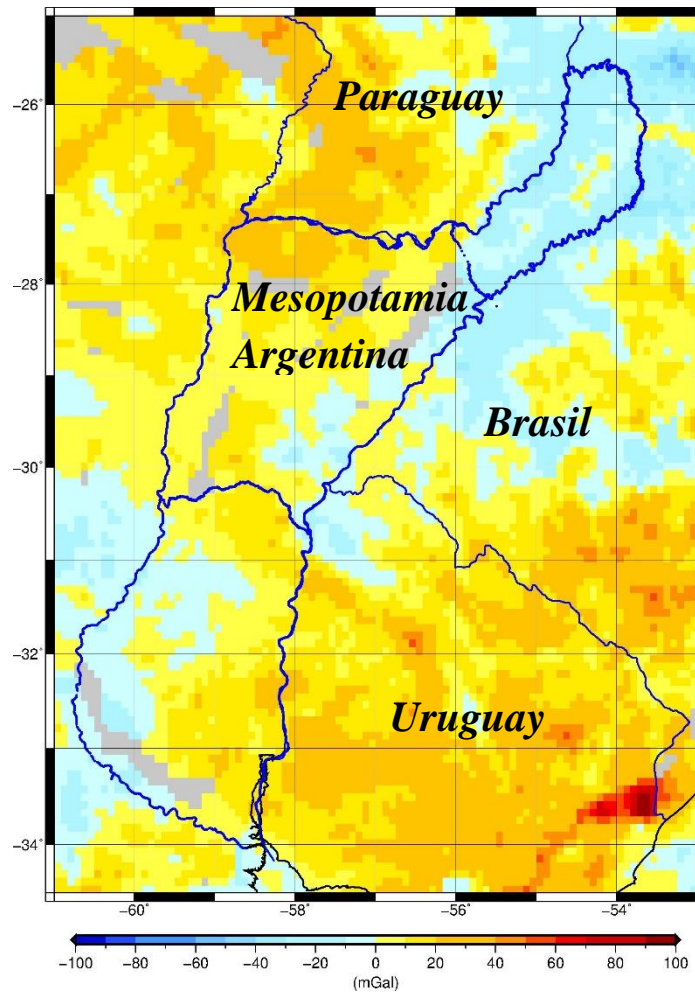


Figura 4.25. Anomalía de Gravedad de Helmert para la Mesopotamia Argentina referida a la superficie terrestre, en *mGal*.

b. Modelos de Geoide Calculados

Para la Mesopotamia Argentina se calcularon cuatro modelos de geoide (Figura 4.26) utilizando la técnica *remove – restaurar*, donde las contribuciones de onda larga fueron provistas por dos modelos de geopotencial global diferentes, el DIR_R5 y el EIGEN-6C4, hasta el grado y orden 200 ($m=n=200$) y 250 ($m=n=250$). La ondulación geoidal en los modelos calculados varía entre 1 m y 19 m en la región de la Mesopotamia Argentina.

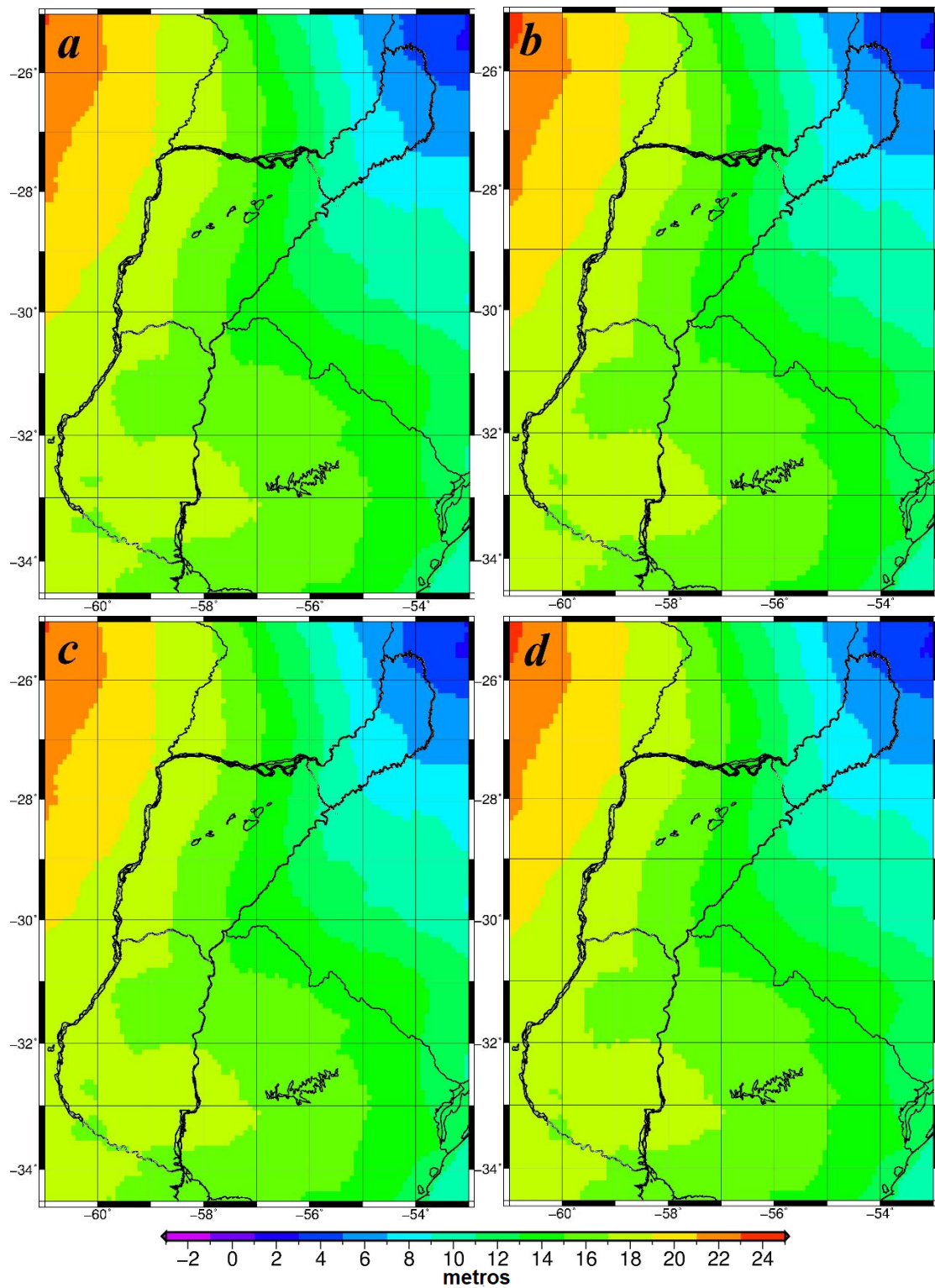


Figura 4.26. Modelos geoidales para la Mesopotamia Argentina en metros a partir del modelo DIR-R5: a) $n,m=200$, b) $n,m=250$; y a partir del modelo EIGEN-6C4: c) $n,m=200$, d) $n,m=250$.

En la Figura 4.27 se exponen las diferencias del modelo calculado para la Mesopotamia Argentina basado en el MGG DIR_R5 ($n=m=200$) con respecto a los otros

tres modelos calculados. Éstos se presentan visualmente similares (Figura 4.26) debido a que los intervalos de las curvas de nivel están en metros, los datos gravimétricos terrestres son los mismos y el método de cálculo también. Estas diferencias entre los modelos calculados y el basado en el MGG DIR_R5 ($n=m=200$) (Figura 4.27) permiten observar la contribución debido a las largas longitudes de onda de los MGG's y los métodos de construcción de los modelos geopotenciales.

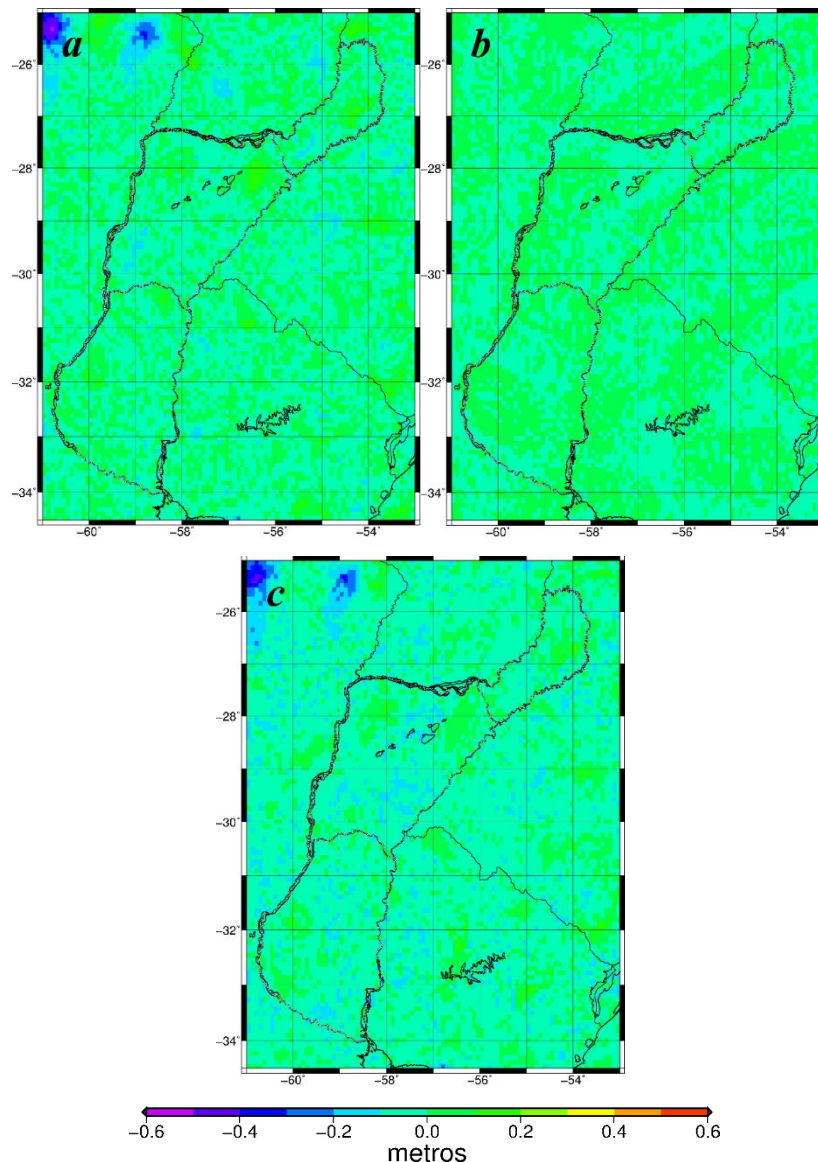


Figura 4.27. Diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 ($n=m=200$) con respecto a: a) DIR_R5 ($n,m=250$); b) EIGEN-6C4 ($n,m=200$); c) EIGEN-6C4 ($n,m=250$).

La tabla 4.5 muestra los valores máximos y mínimos de las diferencias entre el modelo de geoides DIR_R5 ($n=m=200$) y los otros tres modelos calculados. La diferencia respecto

al modelo DIR_R5 (n=m=250) presenta la mayor dispersión de datos con respecto a los otros modelos.

Modelo	ΔN mín. (m)	ΔN máx. (m)
DIR_R5_250	-0.52	0.50
EIGEN-6C4_200	-0.11	0.13
EIGEN-6C4_250	-0.42	0.50

Tabla 4.5. Valores máximos y mínimos de las diferencias del modelo basado en el MGG DIR_R5 (n=m=200) respecto a los otros tres modelos calculados.

c. Validación de los Modelos Calculados para la Mesopotamia Argentina

Los cuatro modelos geoidales obtenidos en base a DIR_R5 y EIGEN-6C4 (grado y orden 200 y 250 respectivamente) fueron comparados con 48 puntos que contenían datos de alturas de nivelación clásica (H) y alturas elipsoidales (h). Mediante la Ecuación 3.8, se calculó luego la ondulación geoidal $N_{GPS-NIV}$.

En las Figura 4.28 se presentan las diferencias de la ondulación geoidal entre cada modelo y los puntos $N_{GPS-NIV}$ para DIR_R5 (200 (a), 250 (b)) y EIGEN-6C4 (200 (c), 250 (d)) respectivamente. Cada punto tiene un valor de acuerdo a la escala grafica de colores, donde el color del punto representa su diferencia, donde se puede observar que solo cuatro puntos (en azul, rojo y rosa) superan los 50 cm en su discrepancia.

En la Figura 4.29 se muestran los histogramas de frecuencia de las diferencias absolutas entre el N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ para la Mesopotamia Argentina, donde se puede apreciar que la media de la diferencia para los cuatro modelos se encuentra entre 0.10 m y 0.20 m.

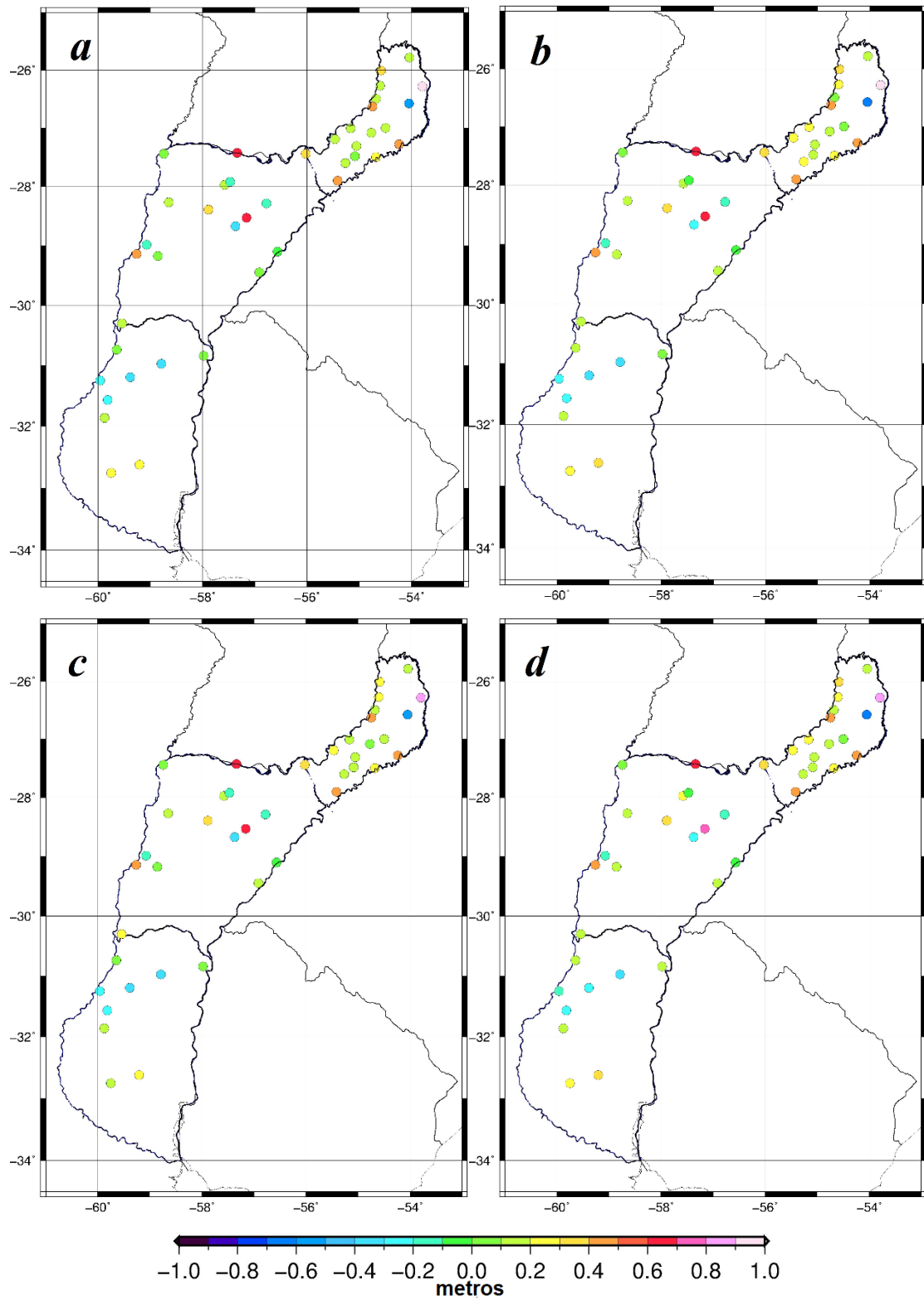


Figura 4.28. Diferencias entre N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ en metros a partir del modelo DIR-R5: a) $n,m=200$, b) $n,m=250$; y a partir del modelo EIGEN-6C4: c) $n,m=200$, d) $n,m=250$.

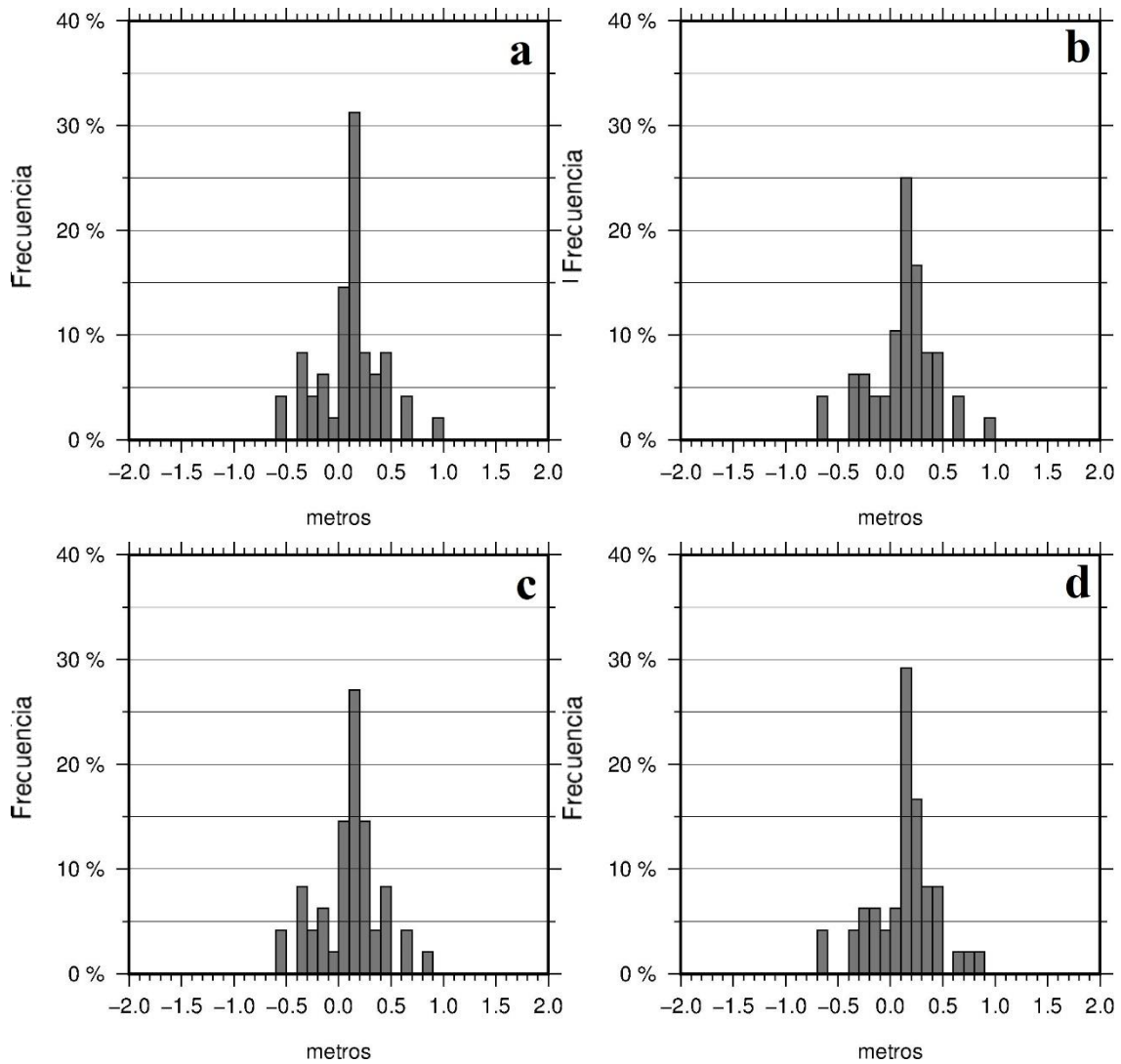


Figura 4.29. Histogramas de frecuencia de las diferencias absolutas entre el N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ para la Mesopotamia Argentina.

En la Tabla 4.6 se aprecian los valores proporcionados por el análisis estadístico realizado para las diferencias entre la ondulación geoidal de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ para para cada modelo. El modelo DIR_R5 ($n=m=200$) y EIGEN-6C4 ($n=m=200$) presentan la menor raíz media cuadrática (RMS), y la media de los residuos más cercana a cero. El EIGEN-6C4 ($n=m=200$) además, presenta el menor intervalo de valores entre su valor mínimo y máximo.

	Media (m)	RMS (m)	Diferencia Máxima (m)	Diferencia Mínima (m)
DIR_R5 (n=m=200)	0.10	0.31	0.90	-0.60
DIR_R5 (n=m=250)	0.11	0.32	0.91	-0.64
EIGEN-6C4 (n=m=200)	0.10	0.31	0.89	-0.58
EIGEN-6C4 (n=m=250)	0.13	0.32	0.88	-0.61

Tabla 4.6. Análisis estadístico de las diferencias absolutas entre el N de los modelos calculados y $N_{GPS-NIV}$ para la Mesopotamia Argentina.

d. Comparación de Modelos Calculados con MGG's

Igualmente que para Costa Rica, para la Mesopotamia Argentina se compararon los modelos calculados con cuatro MGG's. En las Figuras 4.30, 4.32, 4.34 y 4.36 se pueden apreciar los mapas de las diferencias. Estos mapas muestran en la comparación con los modelos EIGEN-6C4, XGM2016 y EGM2008, que las diferencias tienen un comportamiento más homogéneo en toda la zona de estudio, exceptuando la zona Norte perteneciente a la provincia de Misiones, donde se observan las mayores discrepancias entre las tres comparaciones. Además, se puede apreciar que las comparaciones respecto al MGG DIR_R5 presentaron diferencias más heterogéneas en el área de trabajo.

Los histogramas de frecuencia (Figuras 4.31, 4.33, 4.35 y 4.37) manifiestan que la comparación de los modelos calculados con respecto al MGG XGM2016, es donde se obtienen los mejores resultados respecto a las diferencias con una mayor agrupación (más del 30% de frecuencia) de los datos entre los valores de -50 cm y de 0 cm en todos los casos.

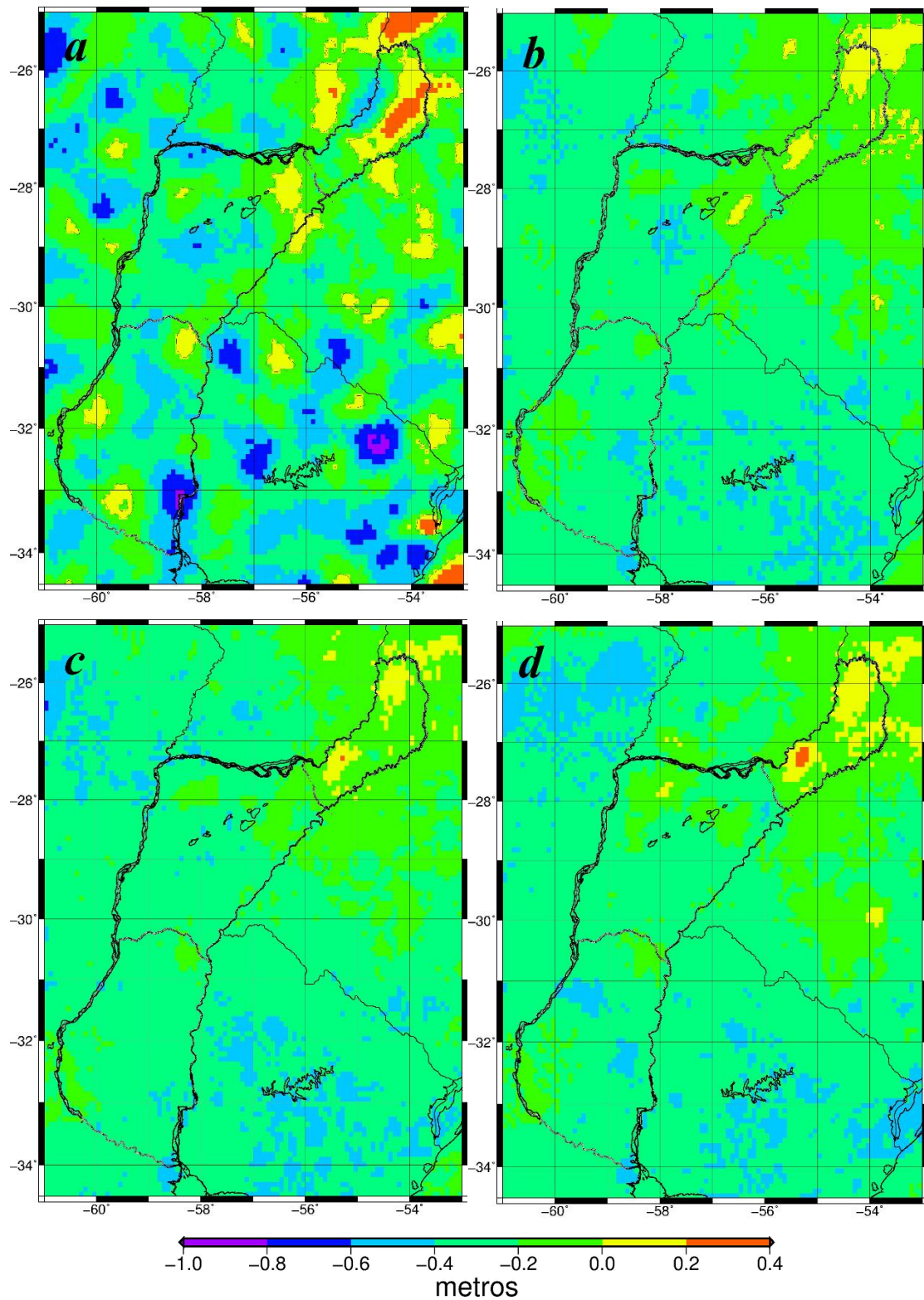


Figura 4.30. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para la Mesopotamia Argentina DIR_R5 ($n,m=200$) y los MGG's: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

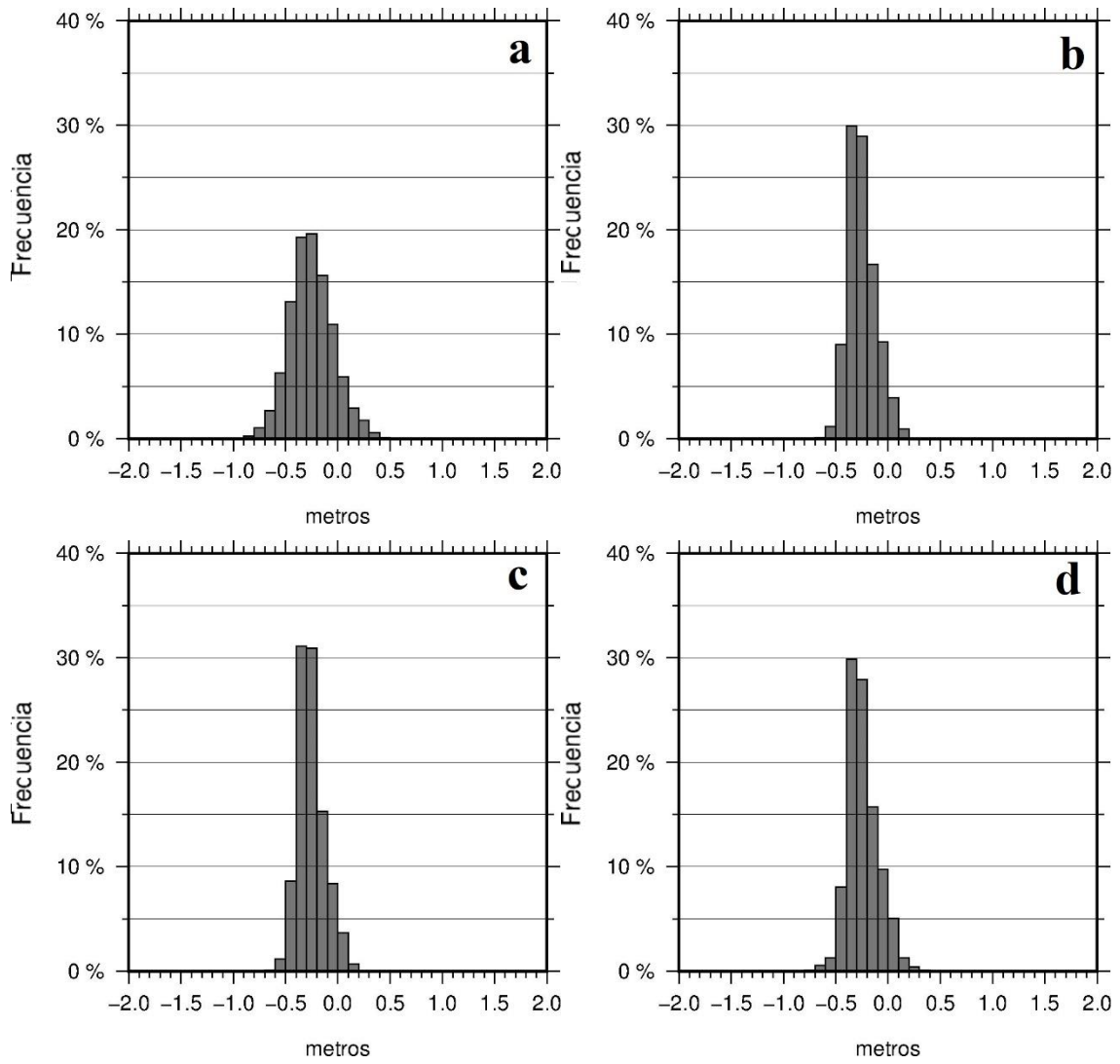


Figura 4.31. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para la Mesopotamia Argentina DIR_R5 (n,m=200) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

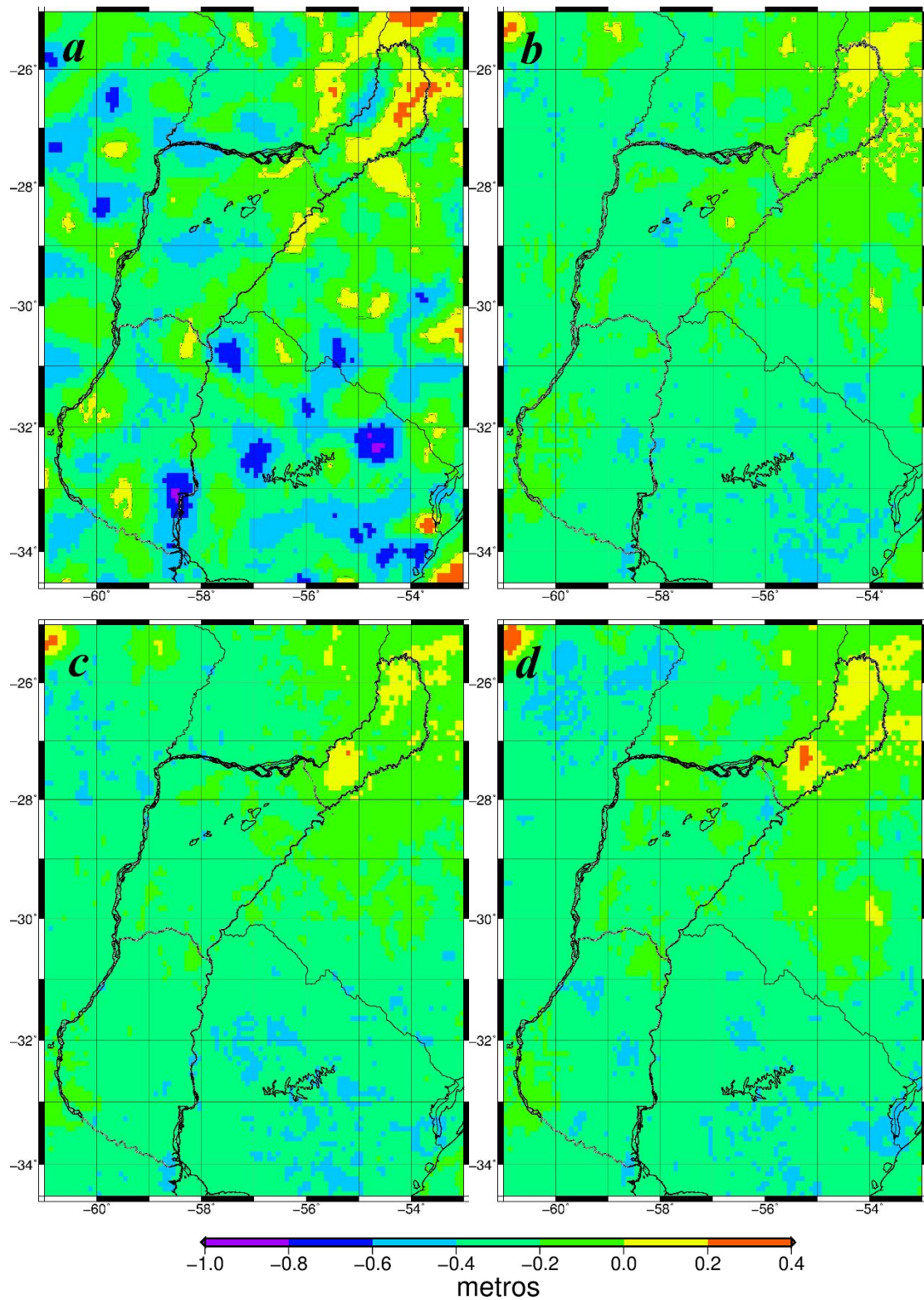


Figura 4.32. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para la Mesopotamia Argentina DIR_R5 ($n,m=250$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

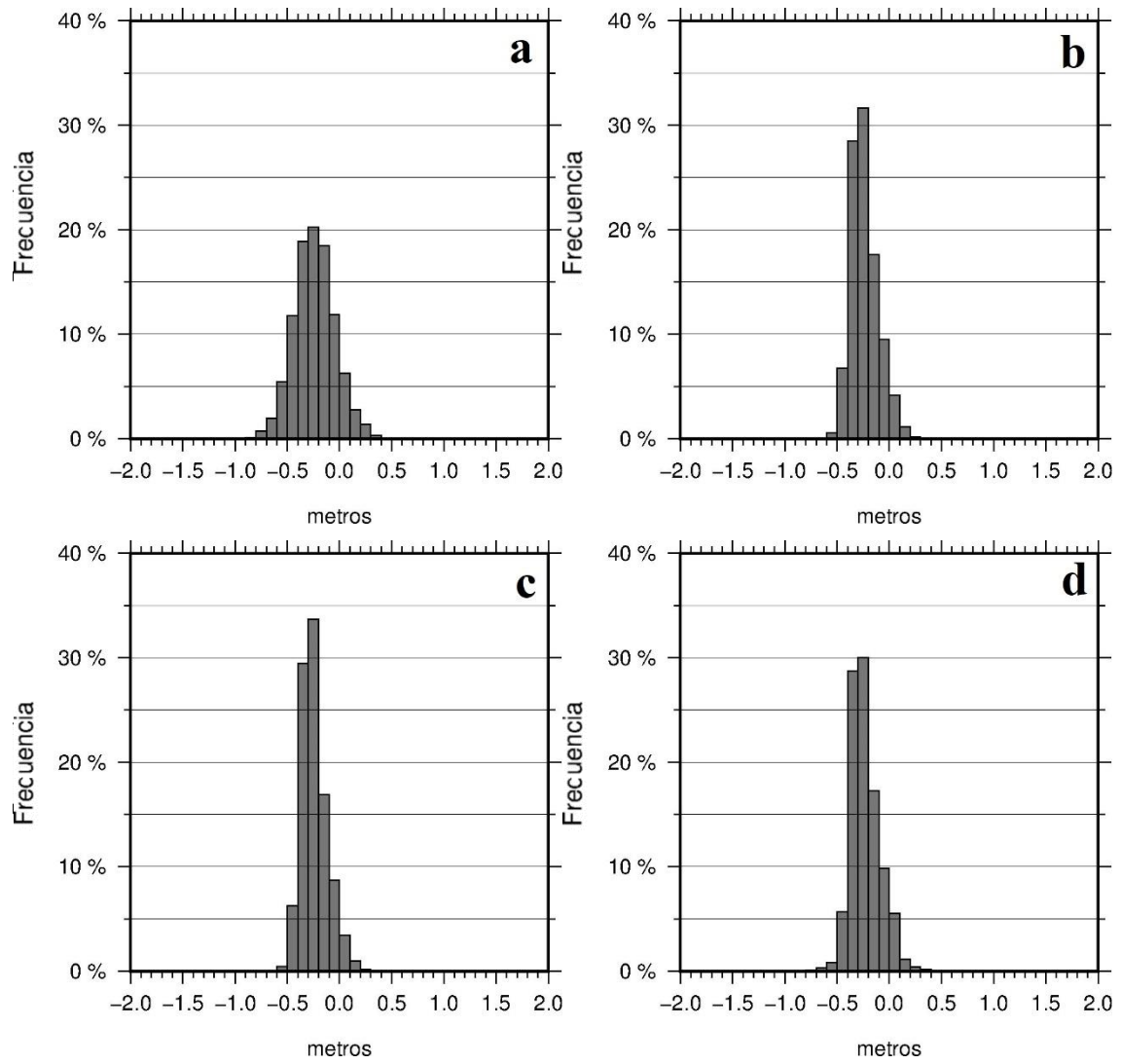


Figura 4.33. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para la Mesopotamia Argentina DIR_R5 (n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

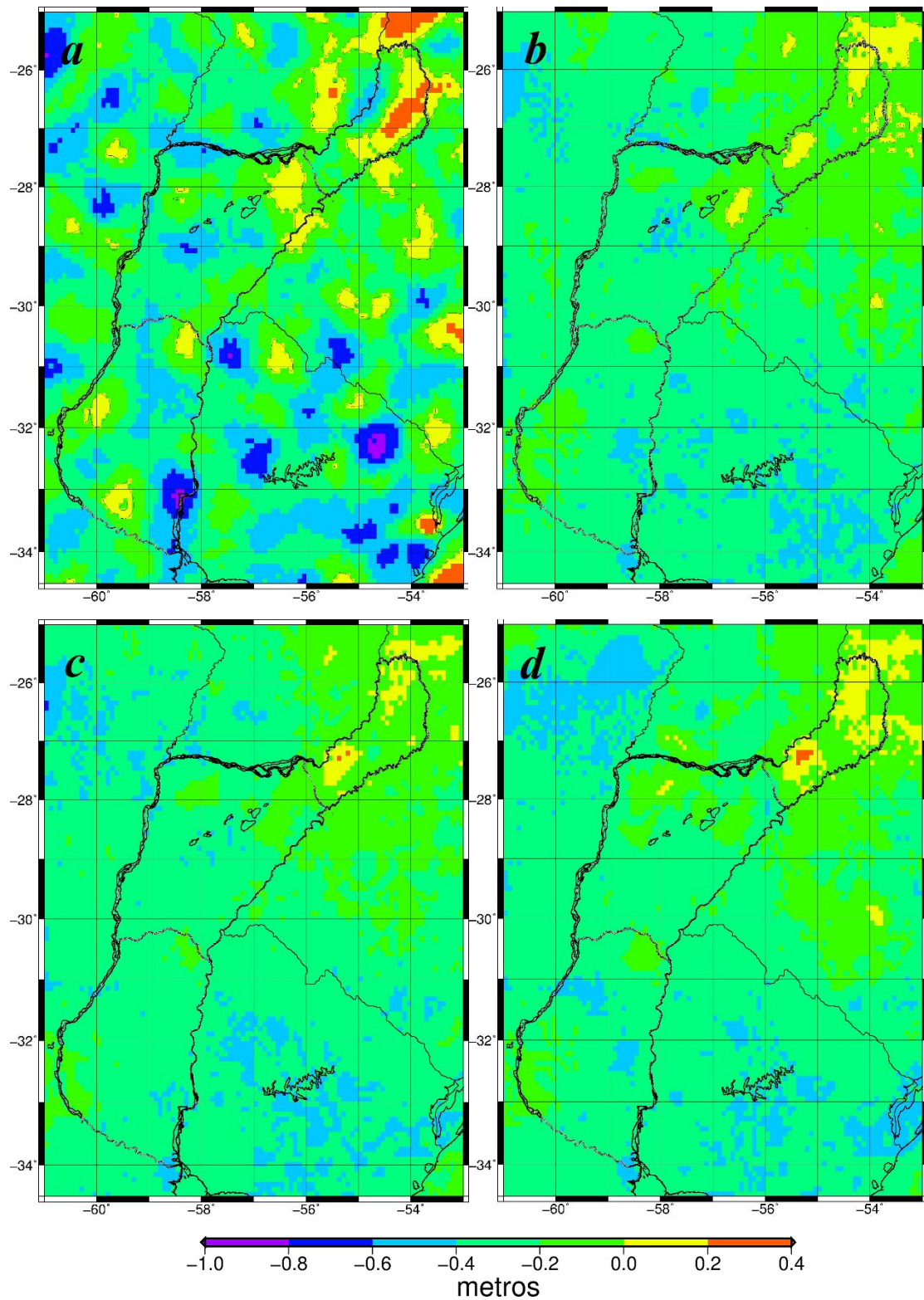


Figura 4.34. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para la Mesopotamia Argentina EIGEN-6C4 ($n,m=200$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

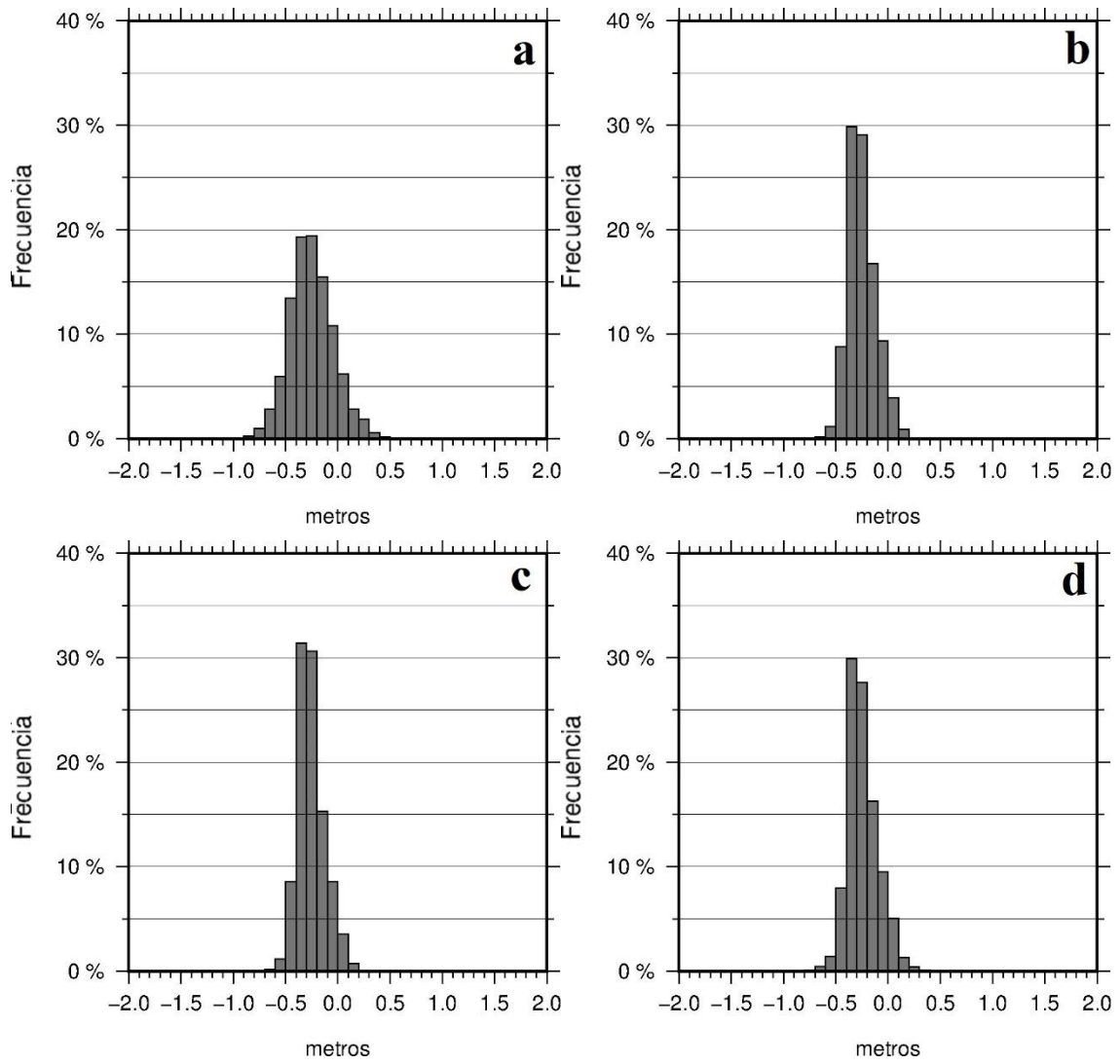


Figura 4.35. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para la Mesopotamia Argentina EIGEN-6C4 (n,m=200) y: a) DIR_R5; b)EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

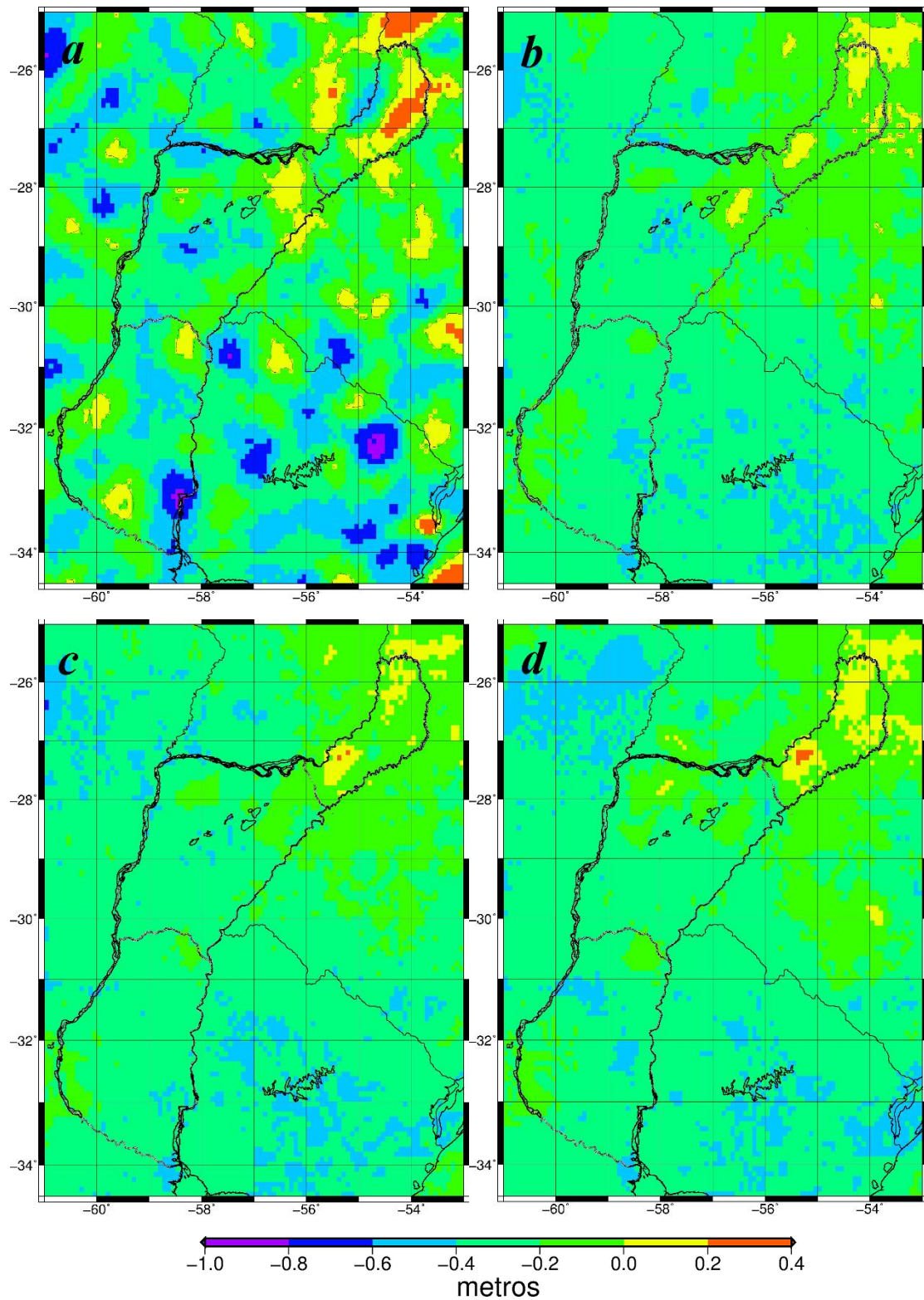


Figura 4.36. Diferencias entre el Modelo geoidal calculado para la Mesopotamia Argentina EIGEN-6C4 ($n,m=250$) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

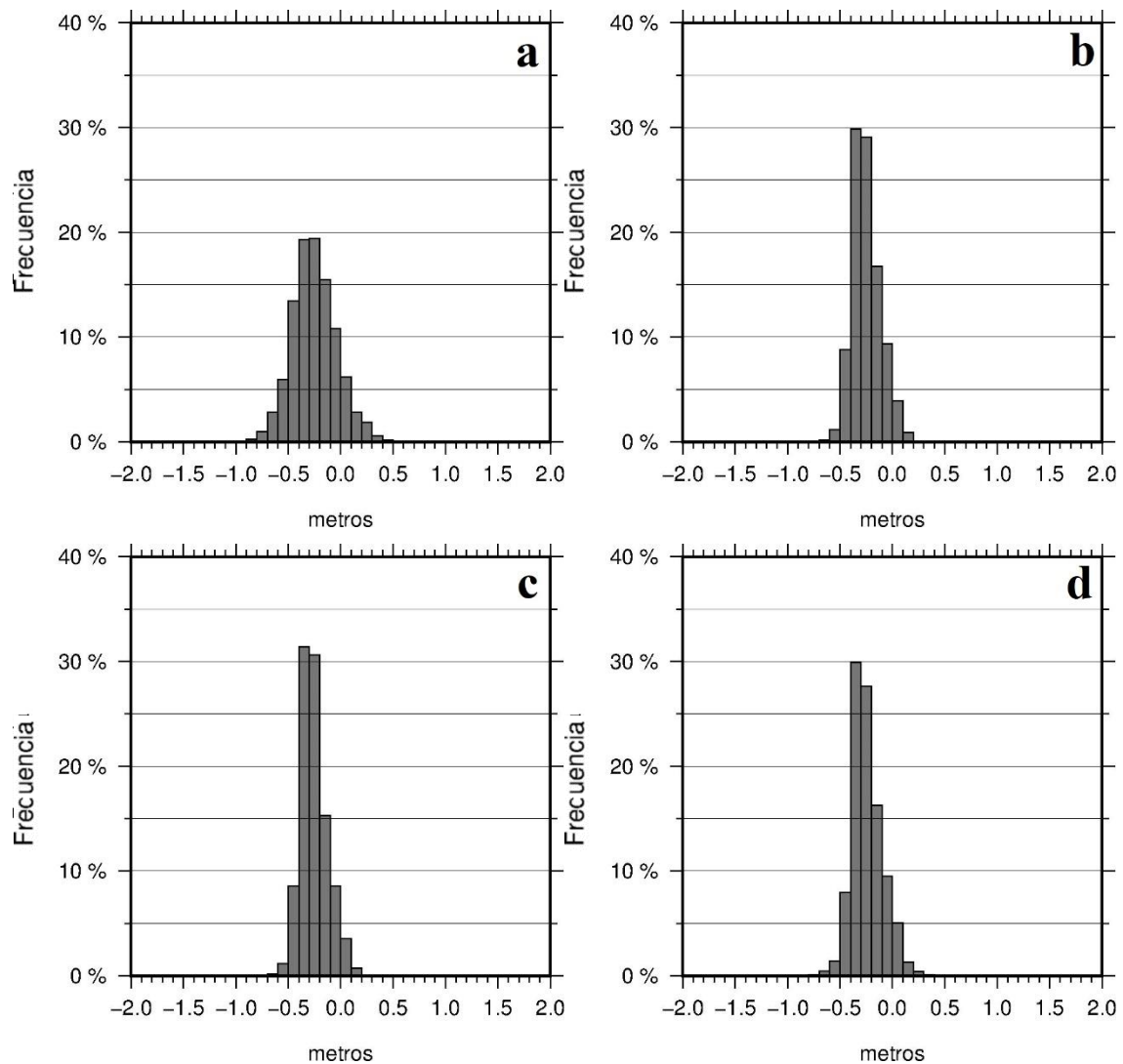


Figura 4.37. Histograma de las diferencias entre el Modelo geoidal para la Mesopotamia Argentina EIGEN-6C4 (n,m=250) y: a) DIR_R5; b) EIGEN-6C4; c) XGM2016; d) EGM2008.

A manera de resumen se presenta la tabla 4.7 donde se observan los valores de la media, mínimos y máximos de los residuos obtenidos; los mejores resultados son presentados dentro de un rectángulo de color azul resaltados. Las comparaciones de los MGG's con el modelo calculado DIR_R5 con grado y orden 250 agrupa los valores más destacados.

Modelo Calculado	MGG	Media (m)	RMS (m)	Diferencia Minima (m)	Diferencia Maxima (m)
	DIR_R5	-0.25	0.33	-0.90	0.52
DIR_R5 (n=m=200)	EIGEN-6C4	-0.25	0.28	-0.76	0.34
	XGM2016	-0.26	0.29	-0.69	0.29
	EGM2008	-0.24	0.28	-0.90	0.48
	DIR_R5	-0.24	0.31	-0.91	0.54
DIR_R5 (n=m=250)	EIGEN-6C4	-0.24	0.27	-0.67	0.39
	XGM2016	-0.24	0.27	-0.60	0.27
	EGM2008	-0.23	0.27	-0.97	0.55
	DIR_R5	-0.25	0.33	-0.88	0.51
EIGEN-6C4 (n=m=200)	EIGEN-6C4	-0.25	0.28	-0.76	0.32
	XGM2016	-0.26	0.29	-0.69	0.28
	EGM2008	-0.24	0.28	-0.89	0.50
	DIR_R5	-0.25	0.33	-0.88	0.51
EIGEN-6C4 (n=m=250)	EIGEN-6C4	-0.25	0.28	-0.76	0.32
	XGM2016	-0.26	0.29	-0.69	0.28
	EGM2008	-0.24	0.28	-0.89	0.50

Tabla 4.7. Media y valores máximos y mínimos de la diferencia entre cada modelo calculado y los MGG's para la Mesopotamia Argentina.

4.2. Interpretación de Modelos Dinámicos para Costa Rica

Para el análisis del Espesor Equivalente de agua en el territorio costarricense, se utilizaron las últimas versiones de los datos de nivel 2 del centro de procesamiento GRGS (RL03-v3), durante las distintas etapas de cálculo y procesamiento de los datos de Espesor equivalente de Agua.

Estos datos consisten en coeficientes armónicos esféricos hasta grado y orden 80, y a partir de ellos se obtuvieron los correspondientes mapas de tendencia y amplitud de la gravedad. En cuanto a los datos de EWH, asimismo se utilizaron los archivos de EWH en la versión RL03-v3.

También se analizaron los datos de nivel 2 de otros centros de procesamiento (JPL, CSR, GFZ), pero los resultados no fueron óptimos, esto pudo haberse debido a la reducida área que conforma el territorio de Costa Rica (51,100 km²), y la falta de compatibilidad de ésta con la resolución espacial de GRACE (de entre 200 km y 400 km). Estas soluciones presentaron ruido o las llamadas “rayas” (Norte-Sur) debido a que en su procesamiento no presentan ningún filtro ni suavizado. Los datos del centro GRGS son filtrados por el llamado “*de-striping*” (Swenson y Wahr, 2006) y se aplica un filtro gaussiano que suaviza y reduce la resolución espacial de las observaciones de GRACE al amortiguar los coeficientes de mayor grado (Landerer & Swenson, 2012).

Finalmente, se resolvió la utilización de las soluciones del centro GRGS debido a que sus datos de nivel 2 no necesitan la aplicación de algún tipo de “suavizado” ni de filtros adicionales, ya que durante su elaboración por parte del centro de procesamiento GRGS estos procesos ya son incluidos.

Las soluciones mensuales RL03-v3 del GRGS comprenden el período de Agosto de 2002 a Mayo del 2016, de las cuales no se dispone de 13 de ellas (Tabla 4.6, color verde); mientras que para el Espesor Equivalente de Agua, las soluciones faltantes fueron de 10 meses (Tabla 4.8, color azul). Los errores en los satélites, “saltos” en los equipos GPS, acelerómetros o en la información KBRR (*K-Band Range Rate*) entre otras causas, pueden ser el motivo de la falta de estos archivos.

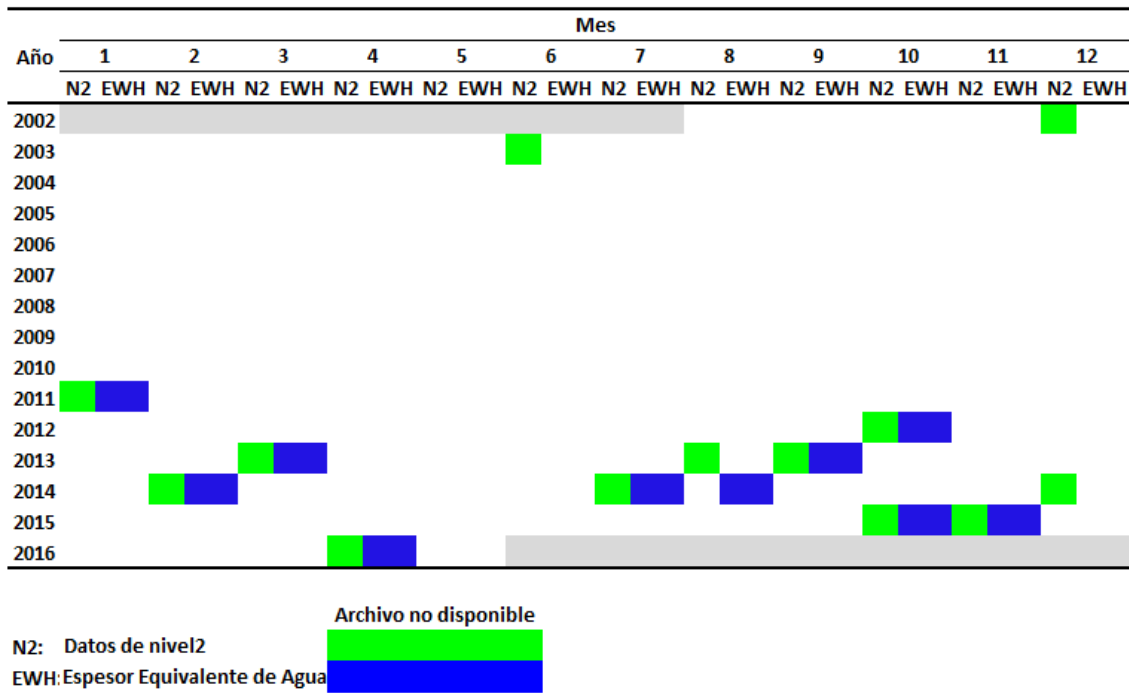


Tabla 4.8. Soluciones armónicas esféricas mensuales RL03-v3 del GRGS no disponibles.

Los cálculos de la tendencia y amplitud de la gravedad se llevaron a cabo con el paquete de programas geodésicos denominado GRAVSOF (Tscherning et al., 1992), desarrollado por Rene Forsberg, del Centro Espacial Nacional de Dinamarca, y Carl C. Tscherning (Anexo I).

Para representar gráficamente las soluciones mensuales de EWH, se utilizó el software GMT (*The Generic Mapping Tools*), una colección de programas de código abierto para elaborar mapas desarrollada por la *School of Ocean and Earth Science and Technology* de la Universidad de Hawái.

4.2.1. Tendencia y Amplitud de la Gravedad

Para la confección de mapas de amplitud y tendencia de la gravedad, para el período de Agosto de 2002 a Mayo del 2016, se tuvo en cuenta la información proveniente de la campaña gravimétrica satelital GRACE (soluciones mensuales RL03-v3 del GRGS) a partir de las cual se puede inferir la variación de masas.

Como se menciona en el apartado anterior, se trabajó con el paquete de programas geodésicos denominado GRAVSOF (Tscherning et al., 1992). En primera instancia se determinó la zona de estudio que comprendiera completamente el territorio continental

de Costa Rica, la cual se definió entre los 5° y 14° de latitud Norte, y los 89° y 80° de longitud Oeste.

El primer programa utilizado es el Harmexp, el cual calcula valores de ondulación geoidal, anomalías y/o perturbaciones de la gravedad, y deflexiones de la vertical sobre grillas, a partir de un desarrollo en serie de coeficientes armónicos esféricos -para este caso, procedentes de las soluciones GRACE- (Pereira, 2011).

Los datos de entrada de este programa son los archivos con los coeficientes armónicos esféricos (soluciones de nivel 2) derivados de las observaciones GRACE, el grado y orden máximo del desarrollo en serie de las funciones armónicas esféricas, las coordenadas en grados decimales del área de trabajo y el espaciamiento de la grilla.

De acuerdo a Sørensen & Forsberg (2010), se filtró la información truncando el desarrollo en serie de las funciones armónicas esféricas a partir del grado y orden 30, con el fin de limitar los errores existentes en los coeficientes de mayor orden.

Se define la tendencia, amplitud y fase de una variable en función del tiempo a partir de (Pereira, 2011):

$$\delta g(t) = a + b \cdot t + c \cdot \cos(t) + d \cdot \sin(t) \quad (4.2)$$

Donde $b \cdot t$ representa la tendencia de la gravedad (pendiente de la función $x(t)$); a es la ordenada al origen.

De la Ecuación 4.2, se deduce la amplitud A de la variable y la fase ϕ , que serán:

$$c \cdot \cos(t) + d \cdot \sin(t) = A \cdot \cos(\phi + t) \quad (4.3)$$

Donde:

$$A^2 = c^2 + d^2$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{c}{d} \right)$$

Luego, teniendo en cuenta (4.2) para la función $\delta g(t)$, se estimaron las variaciones de masa a partir de la tendencia de la gravedad, tomando en cuenta en primer lugar la determinación del cambio en el tiempo de δg , por medio de un análisis de cuatro parámetros de la tendencia de las perturbaciones de la gravedad. Se estimaron luego en cada punto de la grilla definida, la tendencia y dos términos estacionales (Ecuación 4.3),

teniendo en cuenta la altura sobre la Tierra de los satélites de la misión satelital GRACE (Pereira, 2011).

El programa utilizado para calcular la tendencia y la amplitud de las anomalías de la gravedad es el Gracefit, el cual ajusta la tendencia y los términos periódicos a una secuencia de datos en forma de grilla (Anexo I). Los datos de entrada son el archivo en forma de grilla de las perturbaciones de la gravedad calculado con el programa Harmexp, y las épocas de los datos tomados en cuenta para el cálculo.

En la Figura 4.38, se muestra el mapa de tendencia de la gravedad para Costa Rica en milímetros por año para el período de Agosto de 2002 a Mayo del 2016, calculado con las soluciones mensuales RL03-v3 del centro de procesamiento GRGS.

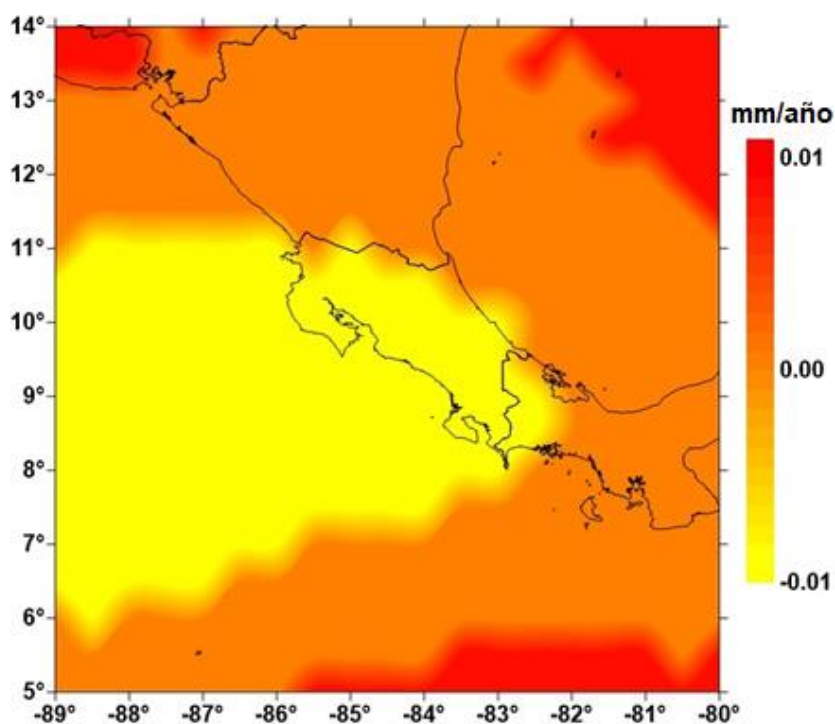


Figura 4.38. Tendencia de la gravedad en mm/año para Costa Rica, período 2002-2016.

El mapa (Figura 4.38) muestra una tendencia negativa en la mayor parte del territorio costarricense. GRACE permite registrar variaciones causadas por los procesos atmosféricos, cambios en el grosor de la nieve, humedad del suelo, cambios o modificación del balance de la capa de hielo, procesos geodinámicos (como cambios en la topografía de la Tierra o la distribución masiva como resultado de las interacciones de la placa litosférica: colisión, subducción, fisuras o rupturas de fallas), rebote postglacial, convección del manto, terremotos, sedimentación y erosión, lo que también debería

contribuir a las variaciones temporales del campo de gravedad de la Tierra (Mikhailov et al., 2004).

El mapa de amplitud en milímetros por año para Costa Rica se muestra en la Figura 4.39, donde se pueden apreciar mayores valores hacia el Norte, principalmente hacia la cuenca del río San Juan y los lagos de Nicaragua y Managua.

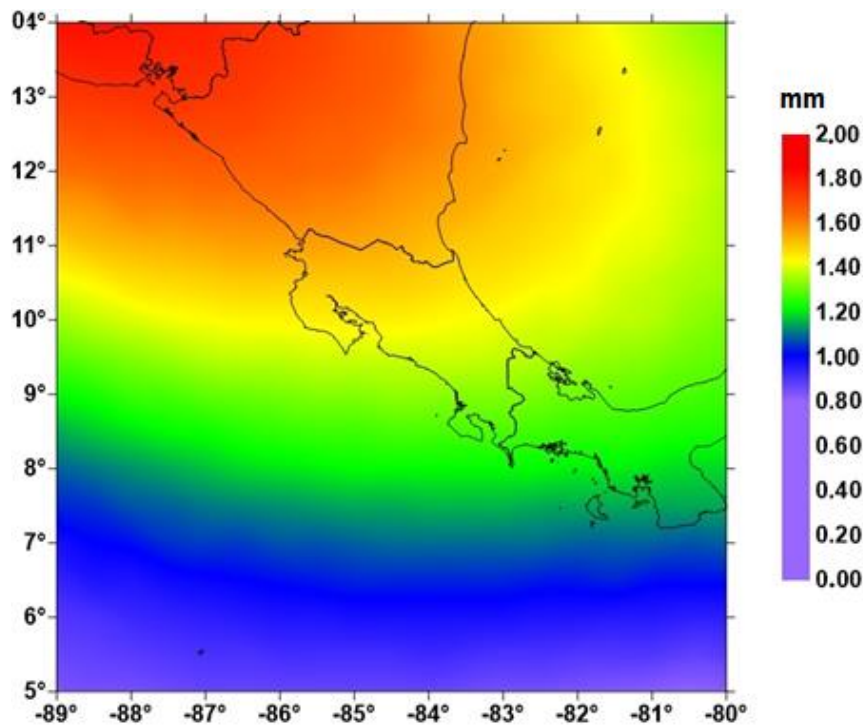


Figura 4.39. Amplitud de la gravedad en milímetros para Costa Rica, período 2002-2016.

Los mapas de tendencia y amplitud de la gravedad para Costa Rica, no muestran una variación importante que permita visualizar algún evento geofísico significativo en la región, esto se debe a la pequeña extensión del territorio continental del país y a que las soluciones de nivel 2 como fueron utilizadas, generalmente no se aplican directamente a una región no acorde con la resolución espacial de GRACE (400km²). Esto podría mejorarse utilizando las soluciones “mascon” del JPL.

4.2.2. Espesor Equivalente de Agua versus Datos de Altimetría Satelital

Con el objetivo de comparar las soluciones mensuales de Espesor Equivalente de Agua de GRACE, calculadas por el centro de procesamiento CNES/GRGS (RL03-v3) con información independiente, se utilizaron datos de altimetría satelital (Figuras 4.40 y 4.41).

Para ello se descargaron las series temporales de las estaciones virtuales del sitio web “HydroWeb” (<http://hydroweb.theia-land.fr/>) perteneciente al Centro de Servicios de Datos Terrestres (Theia) y al GOHS/LEGOS (*Équipe Géodésie, Océanographie et Hydrologie Spatiales / Laboratoire d’Etudes en Géophysique et Océanographie Spatiale*).

Debido a que en el territorio costarricense no se cuenta con ninguna estación virtual, para realizar la comparación se utilizaron las series temporales mensuales de dos estaciones virtuales de “HydroWeb” cercanas al territorio de Costa Rica. Las mismas están ubicadas sobre los lagos de Nicaragua (11.5° de latitud Norte y 85.5° de longitud oeste) y Managua (12.35° de latitud Norte y 86.35° de longitud oeste), en territorio nicaragüense. La estación del lago de Nicaragua se encuentra activa y sigue produciendo datos, mientras la estación del lago de Managua, se encuentra inactiva desde Enero del 2015.

En cuanto a las series temporales de EWH de GRACE, éstas fueron obtenidas mediante la herramienta interactiva del centro de procesamiento CNES/GRGS denominada GRACE Plotter (<http://www.thegraceplotter.com/>), que permite trazar y comparar series temporales calculadas a partir de las soluciones GRACE, ya sea para ubicaciones de puntos, rectángulos o polígonos.

De esta forma, a partir de las soluciones de nivel 2 (CNES RL03-v3 mensual), se seleccionó la variable (altura de agua) para las coordenadas latitud y longitud coincidentes con las de las estaciones virtuales de altimetría satelital. Los resultados se muestran en un gráfico de la serie temporal para los puntos seleccionados y en un archivo de texto con la información perteneciente a dicha serie.

Los datos de altimetría satelital se debieron regularizar para tener una misma unidad de longitud y tiempo, ya que la resolución temporal está dada en metros por mes, y la de GRACE es en centímetros por mes. Además, se realizó una comparación a partir del cálculo de las correlaciones temporales de las señales de los distintos productos para el período de estudio.

La correlación entre dos variables independientes X e Y puede obtenerse a partir del coeficiente de Pearson R , calculado en función de la covarianza entre ellas de acuerdo a (Vaz de Almeida, 2009):

$$R = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.3)$$

donde la covarianza está dada por:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \quad (4.4)$$

Y los desvíos estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n^2}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n^2}} \quad (4.5)$$

La recta de regresión se define con:

$$Y = aX + b \quad (4.6)$$

Donde los coeficientes a y b son calculados a través de:

$$a = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum(x^2)) - (\sum x)^2} \quad b = \frac{n(\sum y)(\sum(x^2)) - (\sum x)(y)}{n(\sum(x^2)) - (\sum x)^2} \quad (4.7)$$

El rango de valores del coeficiente R^2 puede variar entre 0 y 1, y mejor será la correlación cuanto más cerca de este último esté el valor. Este coeficiente es utilizado para estimar cuán bien se ajustan los datos de la recta de regresión, y por lo tanto, evaluar la coherencia (dependencia lineal) entre las dos variables. La recta de regresión proporciona el factor de escala entre las dos variables independientes (Vaz de Almeida, 2009).

Es necesario destacar que los valores de espesor equivalente de agua de GRACE y el nivel de agua determinado por altimetría satelital en los lagos, representan magnitudes diferentes: GRACE “ve” el almacenamiento de agua como una columna vertical compuesta de agua superficial, subterránea y humedad del suelo integrada en un determinado período de tiempo; mientras que el nivel de agua representa el nivel de agua de un lago o río, determinado por altimetría satelital. Es necesario remarcar que en el

análisis de las señales del almacenamiento de agua, la resolución en tiempo y espacio de las dos variables puede ser diferente, y además la cantidad geofísica medida no es la misma, por lo que esto debe tenerse en cuenta al realizar la correlación de las mismas (Andersen et al., 2008).

Las señales de las series temporales representan distintas variables por lo que se analizó solamente el comportamiento, el desfase y correlación de ambas señales. La comparación de las series temporales de EWH de GRACE y el nivel de agua de altimetría satelital para el lago de Managua se presenta en la Figura 4.40, donde se puede observar que no coinciden ni la fase ni el periodo, excepto para el lapso de mediados del 2010 a mitad del 2011, donde se aprecia un comportamiento similar de las señales en cuanto a picos altos y bajos.

Se calculó luego el coeficiente de correlación entre las dos variables independientes, EWH y nivel de agua de altimetría satelital en este caso, en función de la covarianza entre las variables independientes, resultando un valor de 0.53, lo que representa una correlación moderada.

En la Figura 4.40 se puede observar que las señales de EWH de GRACE y nivel de agua de altimetría satelital siguen un comportamiento similar en cuanto a los altos y bajos en la amplitud de las señales y que además se ajustan bastante bien en la fase, a partir del año 2010.

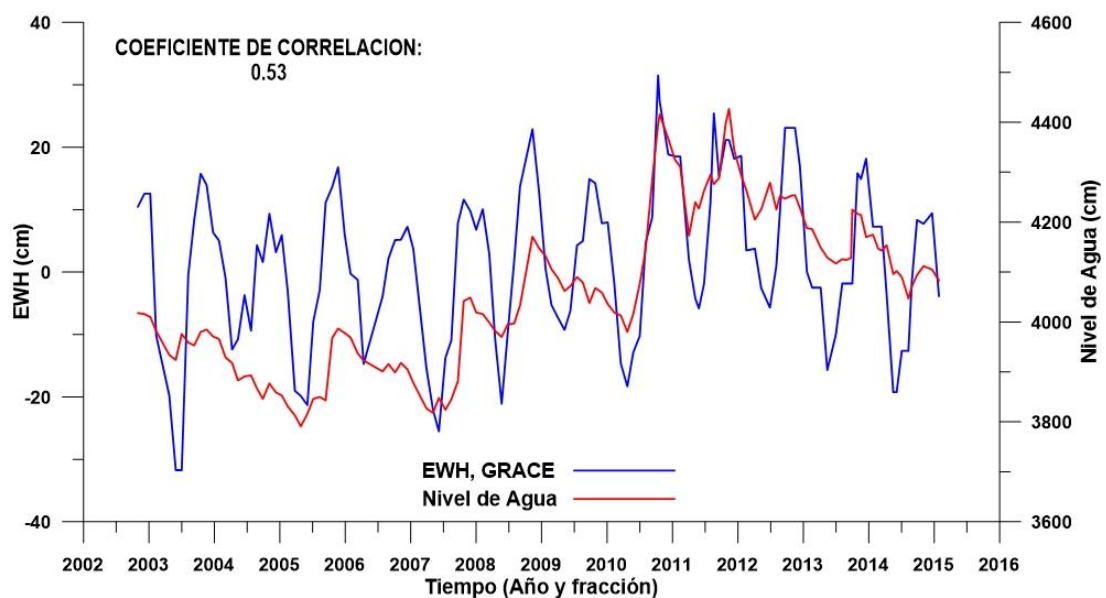


Figura 4.40. Comparación del EWH (GRACE) y Nivel de Agua de altimetría satelital, Lago Managua, Nicaragua.

En la Figura 4.41 se observa la comparación de las señales de EWH (GRACE) respecto al nivel de agua de altimetría satelital en el lago de Nicaragua, la cual muestra que para esta estación, las señales se ajustan bien tanto en amplitud como en la fase con un pequeño corrimiento o diferencia, pero en general muestran un comportamiento similar. Las mayores diferencias en la fase se pueden apreciar durante el año 2007, los últimos meses del 2013, en el transcurso del año 2014 y los primeros meses del 2015. En cuanto a la amplitud, se puede observar que las señales de EWH de GRACE y nivel de agua de altimetría satelital siguen un comportamiento similar en cuanto a los altos y bajos.

En este caso el coeficiente de correlación entre las variables da como resultado un valor de 0.70, lo que indica una fuerte correlación entre la señal del Espesor Equivalente de Agua con respecto al de la estación virtual, situada sobre el espejo de agua del Lago de Nicaragua, lo que indica una correspondencia muy próxima en el comportamiento de ambas señales.

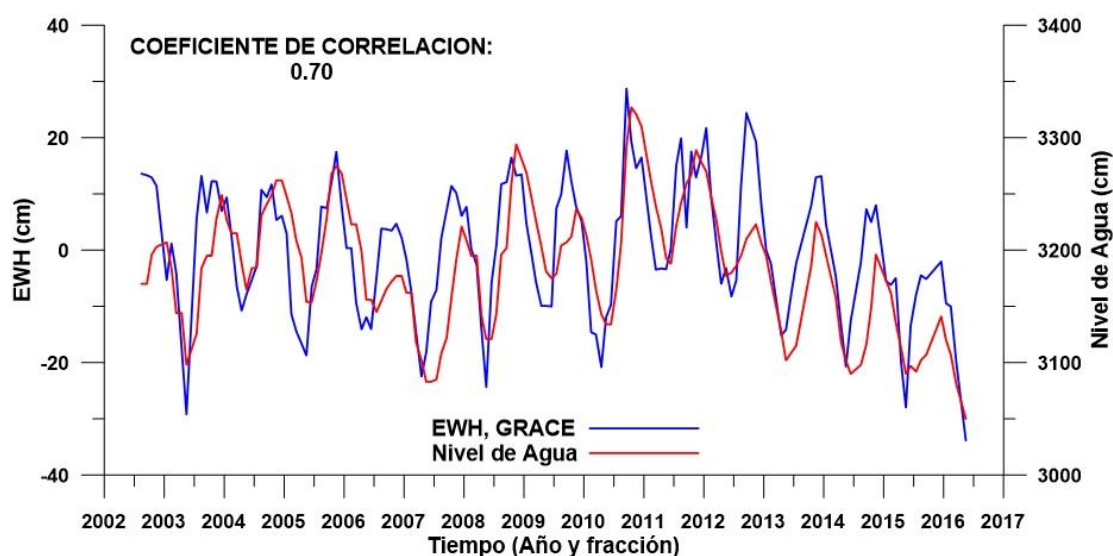


Figura 4.41. Comparación del EWH (GRACE) y Nivel de Agua de altimetría satelital, Lago de Nicaragua, Nicaragua.

4.2.3. Espesor Equivalente de Agua versus Precipitación

Se realizó una comparación de los promedios mensuales del Espesor Equivalente de Agua (EWH), obtenido del centro de procesamiento CNES/GRGS, con datos de precipitación provenientes de la *Tropical Rainfall Measuring Mission* (TRMM) para el territorio continental de Costa Rica y el período comprendido entre Agosto del 2002 a Junio del 2016 (Figura 4.42).

Las series temporales de EWH, se calcularon con la herramienta GRACE Plotter (www.thegraceplotter.com), cortesía de CNES / GRGS, donde se aproximó el área del territorio costarricense por medio de un polígono de cinco vértices.

Los datos de precipitación (TRMM) se obtuvieron a partir del visualizador GIOVANNI (Acker ,2007) desarrollado por la NASA, el cual puede ingresarse a través de su sitio web (<https://giovanni.gsfc.nasa.gov/giovanni/>). Luego de seleccionar la misión y el tipo de datos, se obtuvieron las series temporales promedio para el área de Costa Rica, para el período Agosto del 2002 a Junio del 2016 en el contorno del país.

Es necesario remarcar que la comparación de los registros de precipitación con el EWH de GRACE es sólo cualitativa y no cuantitativa, debido a que la lluvia representa sólo uno de los tres parámetros principales (junto con la evapotranspiración y el caudal) que contribuyen al cambio en el almacenamiento de agua (Pereira, 2011).

En la Figura 4.42 se comparan las series temporales de EWH y de precipitación TRMM en centímetros por año, donde los resultados presentaron una correlación moderada (0.50). Se puede apreciar además, que los datos de precipitación en sus máximos y mínimos son coincidentes con las dos estaciones climáticas presentes en Costa Rica: la época seca que comprende desde el mes de Diciembre hasta finales de Abril; y la época lluviosa, que inicia en principios de Mayo hasta finales de Noviembre. Los valores mínimos están dados generalmente en el primer semestre del año y los valores máximos en el segundo semestre.

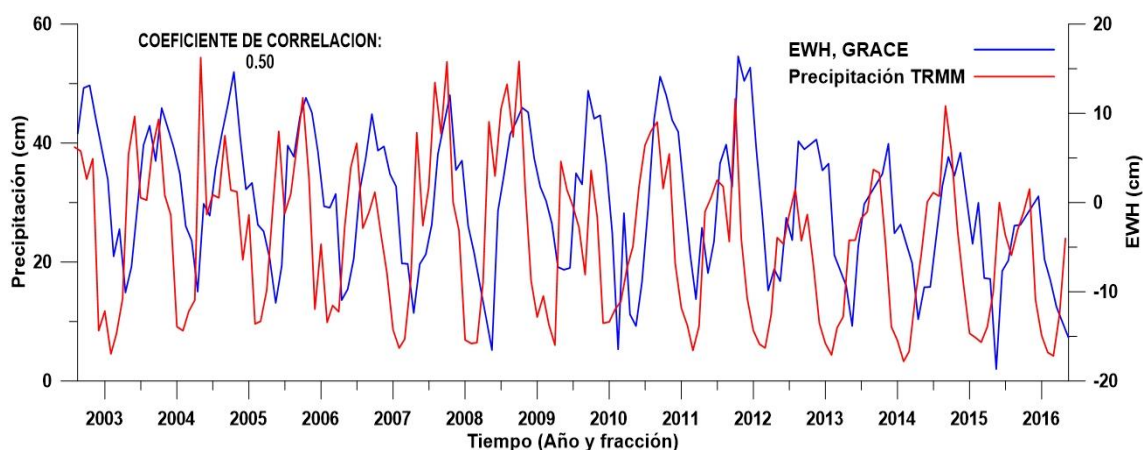


Figura 4.42. Series temporales de EWH de GRACE versus Precipitación (TRMM) en centímetros por año, período 2002-2016.

Se puede observar en la Figura 4.42 que las señales de espesor equivalente de agua de GRACE se ajustan bastante bien con respecto a las de precipitación TRMM para todo el periodo de estudio, pero con una marcada diferencia de fase.

La serie temporal de EWH muestra un desfase respecto a la de precipitación en todo el período. El menor valor de espesor equivalente de agua es de -18.66 cm, durante el mes de Mayo del año 2015, dentro del intervalo de tiempo que el fenómeno El Niño afectó a Costa Rica de Octubre del 2014 a Octubre 2015; mientras que el valor máximo de EWH (16.386 cm) ocurrió durante Octubre del 2011, un período de afectación del fenómeno de La Niña (Septiembre 2011 - Marzo 2012).

		Períodos de 3 meses											
Tipo	Temporada	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDE	DEF	EFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ
ME	2002 · 2003	0.8	0.9	1.0	1.2	1.3	1.1	0.9	0.6	0.4	0.0	-0.3	-0.2
	2003 · 2004	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3
WE	2004 · 2005	0.5	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.4	0.4	0.3	0.1
WL	2005 · 2006	-0.1	-0.1	-0.1	-0.3	-0.6	-0.8	-0.8	-0.7	-0.5	-0.3	0.0	0.0
WE	2006 · 2007	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.9	0.7	0.3	0.0	-0.2	-0.3	-0.4
SL	2007 · 2008	-0.5	-0.8	-1.1	-1.4	-1.5	-1.6	-1.6	-1.4	-1.2	-0.9	-0.8	-0.5
WL	2008 · 2009	-0.4	-0.3	-0.3	-0.4	-0.6	-0.7	-0.8	-0.7	-0.5	-0.2	0.1	0.4
ME	2009 · 2010	0.5	0.5	0.7	1.0	1.3	1.6	1.5	1.3	0.9	0.4	-0.1	-0.6
SL	2010 · 2011	-1.0	-1.4	-1.6	-1.7	-1.7	-1.6	-1.4	-1.1	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4
ML	2011 · 2012	-0.5	-0.7	-0.9	-1.1	-1.1	-1.0	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4	-0.2	0.1
	2012 · 2013	0.3	0.3	0.3	0.2	0.0	-0.2	-0.4	-0.3	-0.2	-0.2	-0.3	-0.3
	2013 · 2014	-0.4	-0.4	-0.3	-0.2	-0.2	-0.3	-0.4	-0.4	-0.2	0.1	0.3	0.2
WE	2014 · 2015	0.1	0.0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.6	0.6	0.6	0.8	1.0	1.2
VSE	2015 · 2016	1.5	1.8	2.1	2.4	2.5	2.6	2.5	2.2	1.7	1.0	0.5	0.0
WL	2016 · 2017	-0.3	-0.6	-0.7	-0.7	-0.7	-0.6	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.4	0.4

Tabla 4.9. Índice ONI, para los fenómenos de El Niño y La Niña.

La información sobre el *Oceanic Niño Index* (ONI), el cual es un estándar de la NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*) respecto al Fenómeno de El Niño y La Niña, fueron consultados en el sitio web <http://ggweather.com/enso/oni.htm>.

Este índice representa la media de la anomalía de temperatura de la superficie del océano durante tres meses (tabla 4.9). Por ejemplo, el período de tres meses JJA significa la media de los meses de Junio, Julio y Agosto; y así sucesivamente para el resto de los meses del año, siempre señalando los meses con la primera letra de su nombre.

El tipo de evento es clasificado de la siguiente manera: El Niño (color magenta): WE= Débil, ME = Moderado, SE = Fuerte, VSE = Muy Fuerte; La Niña (color azul): WL = Débil, ML = Moderado, SL = Fuerte.

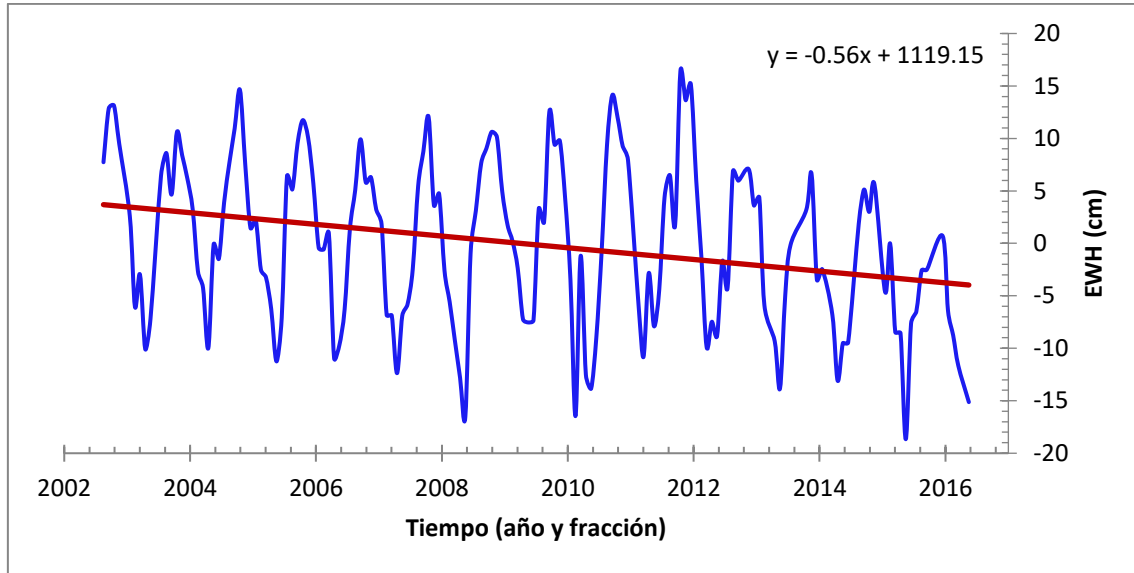


Figura 4.43. Serie Temporal de EWH de GRACE (cm/año), período 2002-2016 (Azul), y recta de regresión lineal (Rojo).

Se analizó a continuación cada serie temporal de EWH por separado, y se graficó la recta de regresión lineal para cada una. Se puede apreciar, tanto en la Figura 4.43 como en la Figura 4.44, que la recta de regresión lineal del Espesor Equivalente de agua, y la de la precipitación TRMM tienen una tendencia (pendiente) negativa, durante el período de Agosto del 2002 a Junio del 2016.

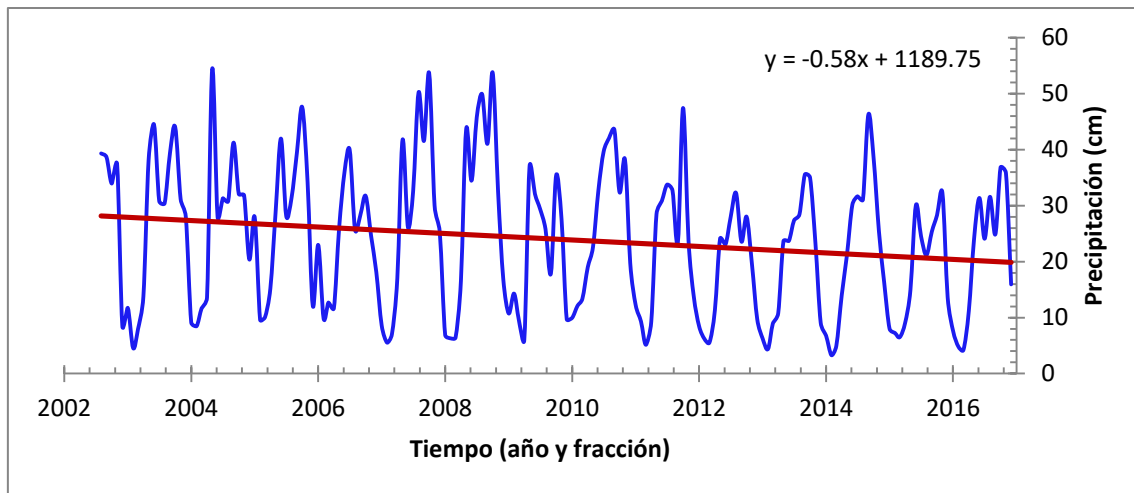


Figura 4.44. Serie Temporal de Precipitación TRMM (cm/año), período 2002-2016 (Azul), y recta de regresión lineal (Rojo).

4.2.4. Espesor Equivalente de Agua (EWH) Mensual

Se analizaron en forma mensual los resultados de las soluciones RL03-v3 de Espesor Equivalente de Agua (EWH), calculados por el centro de procesamiento CNES/GRGS, para el período de Agosto del 2002 a Junio del 2016. Éstos se presentan como grillas de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$, con cubrimiento global, y donde cada una representa la diferencia de masa para cada mes.

Por medio del software GMT, se graficaron los mapas de EWH mensuales, para un área definida entre los 5° y 14° de latitud Norte, y los 89° y 80° de longitud Oeste, dentro de la cual se encuentra el territorio continental de Costa Rica.

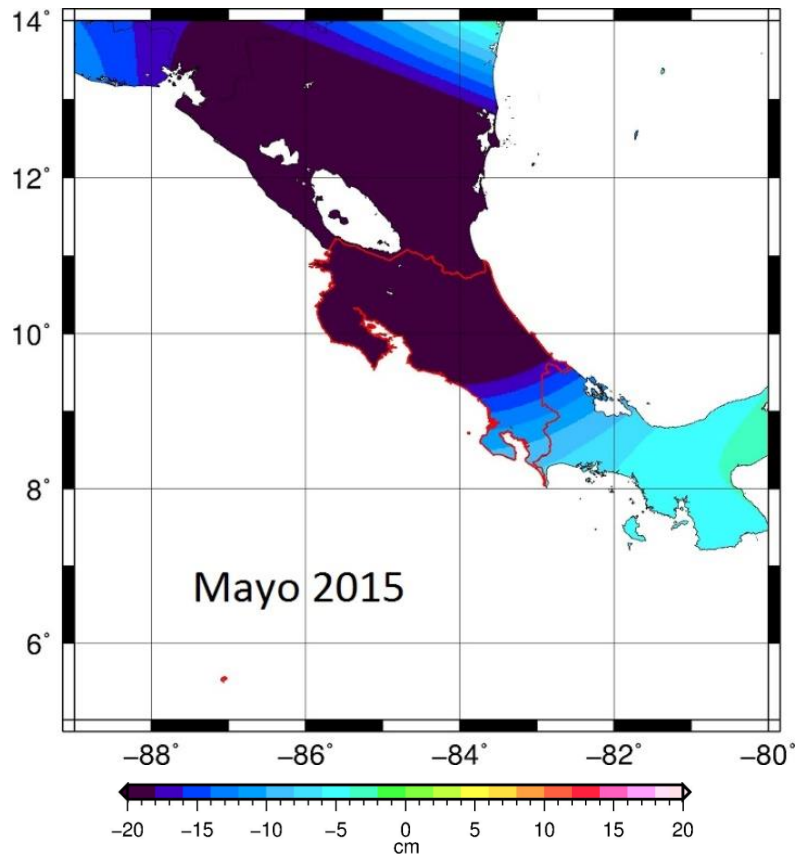


Figura 4.45. Espesor equivalente de agua para el mes de Mayo del año 2015 (cm/mes).

Durante el mes de Mayo del año 2015 (Figura 4.45) se encontró el menor valor de Espesor Equivalente de Agua (-18.66 cm) para todo el período de estudio, mientras que el valor máximo (16.39 cm) ocurrió durante Octubre del 2011 (Figura 4.46). Estos valores ocurrieron durante períodos de afectación de El Niño (Octubre 2014 – Octubre 2015) y La Niña (Septiembre 2011 - Marzo 2012) respectivamente. Los valores de ONI para estos dos meses de valores de EWH máximos y mínimos, pueden verse resaltados en la Tabla 4.9.

En el Anexo II se presentan los gráficos para para todos los meses de Mayo del período de estudio, mes que generalmente presentó los valores más negativos de EWH. El año 2015 (Anexo III) muestra los valores más bajos de EWH, lo que puede ser evidencia de la afectación del fenómeno de El Niño durante ese lapso de tiempo.

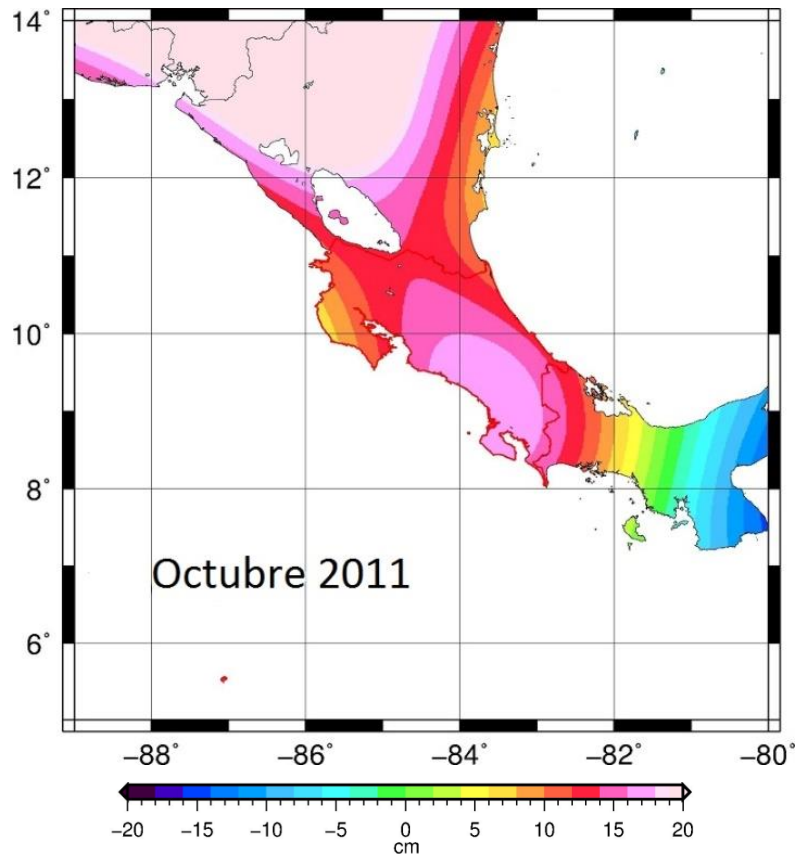


Figura 4.46. Espesor equivalente de agua para el mes de Octubre del año 2011 (cm/mes).

En Octubre de cada año generalmente se presentaron los mayores valores de EWH en Costa Rica (Anexo IV). Durante este mes del año 2011, ocurrieron los valores más altos para el período de estudio, donde en la mayor parte del territorio costarricense supera los 14 cm. El año 2011 se presentó una tendencia negativa del EWH hasta Junio, y a partir del mes de Julio esto cambia hacia una tendencia positiva.

En la Figura 4.47 se muestra el espesor equivalente de agua promedio para todo el período de estudio (Agosto del 2002 a Junio 2016) calculado con las soluciones mensuales del GRGS. El mapa muestra un EWH promedio para Costa Rica de entre los 0 cm y 0.40 cm.

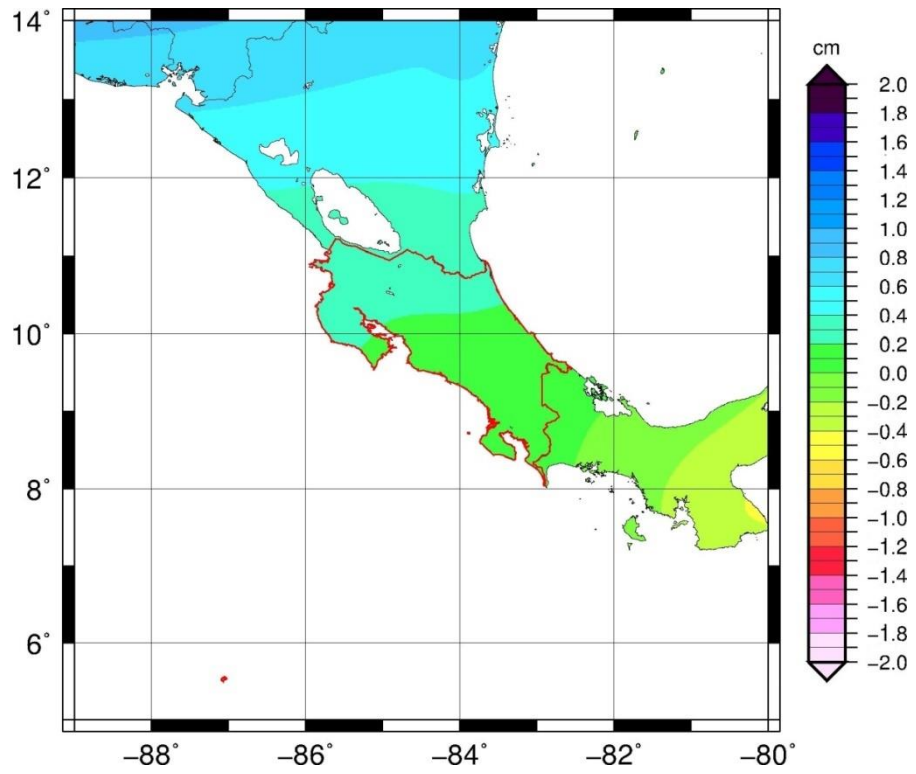


Figura 4.47. Espesor equivalente de agua promedio para el período de Agosto del 2002 a Junio 2016 (cm/mes).

5. CONCLUSIONES

5.1. Modelos Estáticos

5.1.1. Modelos Estáticos para Costa Rica

Con respecto a la información gravimétrica para el cálculo del geoide en Costa Rica, es necesario mencionar que los datos son antiguos y que a lo largo del tiempo nunca tuvieron mantenimiento, por lo que no se tiene certeza de la calidad respecto a la actualidad. Los datos se sometieron a un control de calidad, respecto al MGG EIGEN6C4, para descartar aquellos puntos que no fueran óptimos para su utilización en el cálculo.

Por otro lado, la distribución de los datos de gravedad en el país no es homogénea y presenta además grandes vacíos de información.

El cálculo de las anomalías gravimétricas se realizó con los datos gravimétricos terrestres, las cuales se transformaron a un formato de grilla y fueron completadas con anomalías de aire libre provenientes del modelo global DTU10 para los océanos, y el modelo digital de terreno para Suramérica SAM3s_v2. Por lo tanto, luego de llenar la grilla con información proveniente de estos modelos se procede a realizar los cálculos de la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre, inmediatamente se aplica la técnica remover-integrar-restaurar para obtener los modelos de geoide, por lo que hay que considerar la influencia de la precisión de estos modelos en los resultados finales obtenidos.

El modelo oceánico DTU10 tuvo una alta influencia en la determinación del geoide para Costa Rica, debido a la gran área oceánica que comprendió el cálculo y el pequeño territorio continental del país. Este modelo pudo haber influenciado de dos formas los resultados finales: primeramente, en la transición de las anomalías terrestres respecto a las anomalías oceánicas provenientes de este modelo; en segundo lugar, a causa de la longitud del radio de integración que interviene en la Integral de Stokes, ya que casi todo punto de la grilla en su integración abarcara datos oceánicos debido a la forma de Costa Rica.

En relación con el Modelo Digital de Terreno SAM3s_v2, el mismo puede causar imprecisiones en el cálculo del efecto topográfico indirecto primario (PITE), de gran importancia a la hora de la estimación de la ondulación geoidal (N). Costa Rica cuenta con características de relieve muy variadas que van desde el nivel del mar hasta los 3,820 m de altura, con grandes y abruptos cambios de altura en reducidas áreas, lo que puede

llevar a diferencias respecto al MDT e influenciar la determinación de la ondulación geoidal.

La metodología de cálculo utilizada para realizar los modelos de geoide gravimétricos estáticos en este trabajo ya ha sido probada en distintas partes del mundo y ha demostrado ser un procedimiento adecuado para el cómputo preciso.

Todos los modelos de geoide calculados tienen una resolución de 5' x 5' y las discrepancias entre estos, se basan principalmente, en la contribución de onda larga (hasta grado y orden 200 y 250 en este caso) por parte de dos Modelos Geopotenciales Globales en la técnica *remove – restaurar* (GO_CONS_GCF_2_DIR_R5 y EIGEN6C4), y en la variación del radio de integración en la integral de Stokes.

La ondulación del geoide obtenida en los modelos calculados presenta diferencias de hasta 12 cm en sus valores mínimos y de 27 cm en los valores máximos los cuales pueden observarse en la Figura 4.7 y en la Tabla 4.2.

En la comparación de los modelos calculados respecto a los MGG's, los que mejor se ajustan a éstos son los modelos combinados EIGEN-6C4 y EGM2008.

En cuanto a las diferencias respecto al modelo DIR_R5, presentó el mayor rango entre los valores mínimos y máximos de las diferencias en todas las comparaciones, mostrando una mayor dispersión de los datos (Figuras 4.9, 4.13, 4.17 y 4.21). Hay que tener en cuenta que el modelo DIR_R5 se basa solamente en observaciones satelitales, mientras los Modelos Geopotenciales Globales EIGEN6C4, EGM2008 y el XGM2016 combinan observaciones terrestres en su cálculo. Los valores estadísticos pueden verse en la Tabla 4.4

El modelo calculado con el MGG DIR_R5 hasta grado y orden 250 es el que mejor se ajustó a los Modelos de Geopotencial Globales con los que fue comparado, esto se puede divisar en la Tabla 4.4 y en las Figuras 4.9, 4.13, 4.17 y 4.21, donde obtuvo el mejor valor de la media (-0.13) y el menor RMS (-0.24), valores obtenidos en la comparación respecto al modelo EIGEN-6C4.

Para Costa Rica no se puede afirmar que alguno de los cuatro modelos de geoide calculados sea mejor que otro, ya que no existe información de puntos con ondulación del geoide calculada geoméricamente por la diferencia entre las alturas elipsoidales y las obtenidas por medio de nivelación geométrica ($N_{GPS-NIV}$), para comparar y validar dichos modelos. La precisión real de los modelos calculados depende de los datos disponibles, su precisión y su distribución espacial.

5.1.2. Modelos Estáticos para la Mesopotamia Argentina

Respecto de los modelos de geoides calculados para la Mesopotamia Argentina, se contaba con datos de puntos con alturas elipsoidales y de nivelación, información que permite calcular una ondulación geoidal geométrica por medio de una diferencia simple ($N_{GPS-NIV}$), esto permite analizar la coherencia de los resultados obtenidos.

Se realizó la comparación entre la ondulación geoidal geométrica ($N_{GPS-NIV}$) y las ondulaciones geoidales (N) resultantes de los modelos calculados. Es importante rescatar que tanto las alturas derivadas de GPS, como las obtenidas con el método clásico de nivelación contienen errores intrínsecos, siendo generalmente más críticos en el segundo caso, por lo que los valores de ondulación geoidal obtenidos a partir de las diferencias entre ambos tipos de alturas no representan necesariamente magnitudes que deban considerarse mejores en términos de calidad.

En el presente trabajo, se realizó un análisis estadístico de la comparación entre las ondulaciones geoidales ($N_{GPS-NIV}$) y las obtenidas de cada modelo calculado (Tabla 4.6), para luego contrarrestar los resultados obtenidos. El modelo basado en DIR_R5 ($n=m=200$) y el EIGEN-6C4 ($n=m=200$), presentaron un valor medio de la diferencia de 0.10 m, y un RMS de 0.31; sin embargo el EIGEN-6C4 ($n=m=200$) presentó la menor dispersión de los datos. La Figura 4.28 y 4.29, representan gráficamente el análisis estadístico, en la primera se observa la distribución y el comportamiento de los puntos analizados mostrando la diferencia en cada punto de acuerdo a una escala de colores, y en la segunda se muestra el histograma de las diferencias obtenidas.

Es necesario destacar que la distribución de puntos con información de alturas elipsoidales y de nivelación no es homogénea en toda la región; y además éstos son escasos para la extensión del territorio estudiado, presentando grandes vacíos principalmente en las provincias de Corrientes y Entre Ríos. La mayoría de los puntos presentan diferencias de entre ± 0.5 m, lo cual se puede apreciar en los histogramas de frecuencia de las diferencias ($N_{GPS-NIV}$) para cada modelo (Figura 4.29).

La ondulación geoidal en los cuatro modelos varía en un rango de 1 m al Norte de la provincia de Misiones, y hasta los 19 m hacia el Suroeste de la región de la Mesopotamia Argentina.

Con respecto a los datos gravimétricos hay que rescatar que en la Argentina se realizan grandes esfuerzos por diferentes entidades para realizar campañas de medición y mantenimiento de la información existente. En el caso de la Mesopotamia, se contaba con

datos gravimétricos provenientes de mediciones recientes. También hay que mencionar que, a pesar de la gran cantidad de datos, la región aún presenta grandes vacíos en cuanto a puntos con información gravimétrica, en especial en las provincias de Corrientes y Entre Ríos.

En cuanto a la comparación de los modelos calculados respecto de los Modelos Geopotenciales Globales, el EGM2008 es el que presentó los mejores resultados en las diferencias los cuales pueden observarse en las Figuras de la 4.30 a la 4.37. Este presentó los mejores valores para la media y RMS en todas las comparaciones (Tabla 4.7).

El modelo calculado con DIR_R5 hasta grado y orden 250 es el que mejor concordó con los cuatro MGG's comparados, obteniendo los mejores valores de la media y los menores valores en el RMS de las diferencias los cuales se pueden ver en la tabla 4.7.

5.2. Modelos Dinámicos

Respecto a las variaciones temporales del campo de gravedad, puede concluirse a partir de los resultados obtenidos, que GRACE no permitió detectar eventos geofísicos importantes durante el período de estudio, esto debido principalmente a la resolución espacial de GRACE (400 km^2) la cual no es compatible con la pequeña extensión continental de Costa Rica.

Con relación a la tendencia de la gravedad para Costa Rica que se muestra en la Figura 4.38, el mapa mostro un comportamiento negativo para todo el territorio durante el periodo de estudio (Agosto de 2002 a Junio de 2016). Los valores de la tendencia de la gravedad son muy pequeños y no tienen una variación significativa, lo que no permite visualizar un evento geofísico importante en el territorio costarricense durante el intervalo de tiempo estudiado.

Las estimaciones de masa de GRACE muestran el cambio regional de la masa total, aspecto a tomar en cuenta en la comparación entre los datos de espesor equivalente de agua de GRACE y los datos de altimetría satelital, ya que estos últimos, miden solo la variación en la superficie de almacenamiento de agua en un punto en particular.

Sin embargo, para las dos estaciones virtuales de altimetría satelital comparadas con la serie temporal de datos de EWH de GRACE, la correlación resultó de moderada a alta para el período de Agosto 2002 a Junio 2016. Las variaciones del nivel del espejo de agua detectadas por altimetría satelital, en estas dos estaciones, se ajustan bastante bien a las obtenidas a través de GRACE, principalmente en la mostrada en la Figura 4.41 que

pertenece al Lago de Nicaragua en la cual se observa un pequeño desfase mientras en amplitud y período se muestran muy similares; en la estación sobre el Lago Managua de la Figura 4.40 las señales se observan con una amplitud diferente, excepto en el lapso de tiempo que va de mediados del año 2010 hasta el 2012.

Los datos de espesor equivalente de agua de GRACE, también fueron comparados de forma mensual con datos de precipitación TRMM, mediante las series temporales para todo el período de estudio. Hay que recordar que los datos de precipitación representan sólo uno de los tres parámetros principales (junto con la evapotranspiración y el caudal) que contribuyen al cambio en el almacenamiento de agua.

El comportamiento de las señales mensuales de precipitación TRMM se mostraron consistentes con las de espesor equivalente de agua de GRACE. Esta comparación resulto muy útil para comprender cualitativamente las variaciones que presenta el EWH.

El cotejo de las series temporales de precipitación TRMM y de EWH de GRACE expuesto en la Figura 4.42, mostraron una correlación alta entre ambos tipos de datos, indicando que las dos variables están altamente relacionadas entre sí.

Se demostró que en Costa Rica las variaciones de EWH están muy relacionadas con las estaciones climatológicas (seca - lluviosa), ya que los picos más bajos de EWH corresponden a los meses de fin de la época seca e inicio de la época lluviosa, y los más altos corresponden al fin de la época lluviosa e inicio de la seca, esto puede verse en detalle en la Figura 4.42.

Costa Rica es también altamente afectada por fenómenos climatológicos que interfieren en el EWH, como los fenómenos de El Niño y La Niña, los que pueden provocar valores extremos como los ocurridos en Mayo 2015 y Octubre 2011 que se pueden observar en las Figuras 4.45 y 4.46 respectivamente.

Asimismo, se calculó la recta de regresión lineal para cada una de las series temporales, tanto la de espesor equivalente de agua de GRACE, como la de precipitación TRMM, expusieron una tendencia negativa para el período de Agosto del 2002 a Junio del 2016. Este es un aspecto a tomar en cuenta que requiere de estudios futuros, ya que dicha tendencia podría significar la afectación de las reservas de agua con las que cuenta Costa Rica para abastecer de agua potable a la población.

Conforme al mapa del promedio de espesor equivalente de agua de GRACE de la Figura 4.47, este fue calculado con las grillas mensuales de espesor equivalente de

GRACE, Costa Rica muestra una variabilidad promedio positiva en cuanto a EWH; sin embargo, ésta es menor a 1 centímetro.

Este conocimiento debería conducir a una mejor comprensión de la afectación del cambio climático en Costa Rica, con fenómenos como El Niño y La Niña, que conduzcan a pronósticos más precisos de los patrones climáticos, la capacidad de rastrear la distribución cambiante de recursos hídricos en acuíferos terrestres importantes, y una mejor previsión de los recursos naturales en peligro.

Finalmente, se puede concluir que GRACE es una gran herramienta para la detección de los fenómenos que afectan el medio ambiente, en especial en el estudio de las variaciones temporales de las capas de agua, que proveen datos sobre eventos climatológicos extremos (sequías, inundaciones, etc), y que permiten mejorar la comprensión del cambio climático.

BIBLIOGRAFÍA

- Acker J. G., Leptoukh G., (2007). El análisis en línea mejora el uso de los datos de la ciencia de la Tierra de la NASA. *Eos, Trans. AGU*, vol. 88, No. 2 (9 de Enero de 2007), páginas 14 y 17.
- Andersen O., Berry P., Freeman J., Lemoine F.G., Lutsckhe S., Jakobsen F., Butts M., (2008). Satellite Altimetry and GRACE Gravimetry for Studies of Annual Water Storage Variations in Bangladesh. *Terrestrial Atmospheric and Oceanic Sciences - TERR ATMOS OCEAN SCI.*, 19 (1-2): 47-52. DOI: 10.3319/TAO.2008.19.1-2.47 (SA).
- Sánchez L., 2002. Determinación de Alturas Físicas en Colombia. Institut für Planetare Geodäsie Technische Universität Dresden, Alemania.
- Andersen O., (2010). The DTU10 Gravity field and Mean sea surface. Second International Symposium of the Gravity Field Service – IGFS2 20 – 22 September 2010 Fairbanks, Alaska.
- Barnes D., Factor J.K., Holmes S. A., Ingalls S., Presicci M.R., Beale J., Fecher T., (2015). Earth Gravitational Model 2020. American Geophysical Union. Reunión de otoño diciembre 2015. <https://agu.confex.com/agu/fm15/webprogram/Paper63459.html>.
- ICGEM, Barthelmes F., Köhler W., (2016). International Centre for Global Earth Models (ICGEM), in: Drewes, H., Kuglitsch, F., Adám, J. et al., *The Geodesists Handbook 2016*, *Journal of Geodesy* (2016), 90(10), pp 907-1205, doi: 10.1007/s00190-016-0948-z
- Bettadpur S., (2012). Level-2 Gravity Field Product User Handbook (Rev 3.0, May 29, 2012), GRACE 327-734 (CSR-GR-03-01). Center for Space Research, The University of Texas at Austin.
- Beutler G., (2004). Revolution in Geodesy and Surveying. FIG Article, July 2004, pp. 19.
- Blakeley R. J., (1996). Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge Univ. Press.
- Blitzkow D., (1973). Função de transferência de modulação - Aplicação ao estudo do desempenho dos sistemas aerofotográficos. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- Blitzkow D., (1996). O problema do valor de contorno da geodésia: resultados práticos para a América do Sul. Tese (Livre Docência) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Blitzkow D., Cintra J.P., Fortes L.P.S., (1991). A contribution to the geoid determination. In: *Recent Geodetic and Gravimetric Research in Latin America. Proceedings. International Association of Geodesy Symposia: Symposium*, 111. Edited by W. Torge. Springer-Verlag, Berlin.

- Blitzkow D., Matos, A.C.O.C., Lobianco, M. C. B., Campos I. O., (2009). The progress of the geoid in south. The progress of the geoid in South America under GRACE and EGM2008 America under GRACE and EGM2008 models. IAG, Buenos Aires, Argentina.
- Blitzkow D., Matos, A.C.O.C., Campos, I.O., Ellmann, A., Vanicek, P., Dos Santos, M.C., (2008). An attempt for an Amazon geoid model using Helmert gravity anomaly. In: Michael G. Sideris. (Org.). Observing our Changing Earth. 1 ed.: Springer-Verlag, 2008, v. 133, p. 187-194.
- Bracewell R., (1986). The Fourier transform and its applications. 3rd edition, McGraw Hill, New York.
- Bruinsma S., Förste C., Abrikosov O., Marty J.C., Rio M.H., Mulet S., Bonvalot S., (2013). The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach, *Geophysical Research Letters*, 40, 14:3607-3612. doi.org/10.1002/grl.50716.
- Case K., Kruizinga G., Sien-Chong Wu, (2010). GRACE Level 1B data product – user handbook. Jet Propulsion Laboratory – California Institute of Technology (JPL D-22027).
- Cheng Y., Andersen O.B., (2010). Improvement in global ocean tide model in shallow water regions. Poster, SV.1-68 45, OSTST, Lisbon, Oct.18-22.
- Ciufolini I., Pavlis E., (2003). The gravitomagnetic field and its measurement with the Lageos satellites. *Nonlinear Gravitodynamics*: pp. 185-200.
- Comisión Nacional de División Territorial Administrativa, 1997. División Territorial Administrativa de la República de Costa Rica. Imprenta Nacional. 180 p.
- Cooley J. W. and Tukey J. W., (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, vol. 19, pp. 297-301.
- Cornero C., Pereira A., Pacino M.C., Balparda L.R., (2016). Comparación de modelos geopotenciales recientes en Argentina. *Revista Geoacta de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas*, 41(1):87-97.
- Crétaux J-F., Jelinski W., Calmant S., Kouraev A., Vuglinski V., Bergé Nguyen M., Gennero M-C., Nino F., Abarca Del Rio R., Cazenave A., Maisongrande P., (2011). SOLS: A Lake database to monitor in Near Real Time water level and storage variations from remote sensing data, *J. Adv. Space Res.*, doi:10.1016/j.asr.2011.01.004
- Dahle C., Flechtner F., Gruber C., König D., König R., Michalak G., Neumayer K., (2013). GFZ GRACE, Level-2 Processing Standards Document for Level-2, Product Release 0005. Helmholtz Centre Potsdam, GFZ German Research Centre for Geosciences.
- Ellmann A., Vaníček P., (2007). UNB applications of Stokes-Helmert's approach to geoid computation. *Journal of Geodynamics*, v. 43, p. 200-213.

- Ellmann A. (2005). SHGEO software package, An UNB Application to Stokes-Helmert's Approach for Precise Geoid Computation. Reference Manual I, Theory of Stokes-Helmert's Method of Geoid Determination; Reference Manual II, Software User's Guide; Reference Manual III, Auxiliary Programs. Fredericton, New Brunswick, Canada September 2005.
- Featherstone W.E., (2003). Software for computing five existing types of deterministically modified integration kernel for gravimetric geoid determination, In *Computers & Geosciences*, Volume 29, Issue 2, 2003, Pages 183-193, ISSN 0098-3004, [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(02\)00074-2](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(02)00074-2).
- Featherstone W.E., Evans J., Olliver J.A., (1998). Meissl-modified Vaníček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. *Journal of Geodesy*, v.72, p. 154-160.
- Featherstone W.E., Sideris M.G., (1998). Modified kernels in spectral geoid determination: first results from Western Australia. In: R. Forsberg and M. Feissl and R. Dietrich (Ed.). *Geodesy on the move: gravity, geoids, geodynamics, and Antarctica*, Berlin: Springer-Verlag. International Association of Geodesy Symposia, 119:188-193.
- Fehringer M., Andre G., Lamarre D., Maeusli D., (2008). GOCE and its gravity measurements systems, *ESA Bulletin* 133, p. 14-23, February, 2008.
- Forsberg R., Sideris M.G., (1993) Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach. *Manuscripta Geodaetica* Vol. 18, pp. 82-90.
- Förste C., (2015). About the Generation of global Gravity Field Models from Satellite and Surface data. *EUREF Symposium 2015/Tutorial Height and Gravity*, Leipzig, 2nd June 2015.
- Förste C., Bruinsma S. L., Abrikosov O., Lemoine J-M., Marty J. C., Flechtner F., Balmino G., Barthelmes F., Biancale R., (2014). EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. GFZ Data Services. <http://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>
- Förste C., König R., Bruinsma S., Lemoine J.M., Dahle C., Reinquin F., Flechtner F., (2016). On the principles of satellite-based Gravity Field Determination with special focus on the Satellite Laser Ranging technique. 20th International Workshop on Laser Ranging, Potsdam, 9– 14 Oct. 2016
- Förste C., Schmidt, R., Stubenvoll, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, H., Biancale, R., Lemoine, J-M, Bruinsma, S, Loyer, S, Barthelmes, F & Esselborn, S 2008, 'The GeoForschungsZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C', *Journal of Geodesy*, vol. 82, no. 6, pp. 331-46.
- Gemael C., (1999). *Introdução a Geodésia Física*. Curitiba: 2^a ed. Editora UFPR, 302 pp.

- Guimarães G., (2010). A altimetria e o modelo geoidal no Estado de São Paulo. Dissertação de Mestrado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Guimarães G., (2013). A geoid model in the state of São paulo: an attempt for the evaluation of different methodologies. Dissertação de Doutorado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Haagmans R. E., De Min E., Van Gelderen M., (1993). Fast evaluation of convolution integral on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes integral. *Manuscripta Geodaetica*, vol 18, pp. 227-241.
- Haagmans R.E., De Min. E., Van Gelderen M., (1993). Fast evaluation of convolution integral on the sphere using 1D FTT and a comparison with existing methods for Stokes integral. *Manuscripta Geodaetica*, 18: 227-241
- Heiskanen W. A. & Moritz H., (1985). *Geodesia Física*. Ed. Instituto geográfico Nacional – Instituto de Astronomia y Geodesia, Madrid.
- Heiskanen, W.A., Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman, San Francisco, CA, 364 p.
- Hensley, S., Munjy, R.; Rosen, P. (2001). Interferometric synthetic aperture radar. In: Maune, D. F. (Ed.). *Digital elevation model technologies applications: the DEM user's manual*. Bethesda, Maryland: ASPRS (The Imaging & Geospatial Information Society), cap. 6, pp. 142–206.
- Hirt C., Gruber T., Featherstone W. E., (2011). Evaluation of the first GOCE static gravity field models using terrestrial gravity, vertical deflections and EGM2008 quasigeoid heights. *Journal of Geodesy*, v. 85, p. 723–740.
- Hirvonen, R.A., (1960). *New theory of gravimetric geodesy*. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Helsinki, v. 32.
- Hofmann-Wellenhof B. & Moritz H., (2005). *Physical Geodesy*. Ed. Springer Wien, Nueva York.
- IERS, IERS Conventions (2010). *IERS Technical Note, No. 36*, Frankfurt am Main, Germany: Verlagdes Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, 12p. 2010. Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn36.html>.
- Introcaso A., (2006). *Geodesia Física*. Boletín del Instituto de Fisiografía y Geología, Volúmen especial número 1, pp. 1 - 128. Rosario, 10-06-2006. ISSN 1666-115X.
- Kirby J.F., Featherstone W.E., (1997). A study of zero-and first-degree terms in geopotential models over Australia, *Geomatics Research Australasia*, pp. 93-108.
- Landerer F. W., Swenson S. C. (2012). Accuracy of scaled GRACE terrestrial water storage estimates, *Water Resour. Res.*, 48, W04531, doi: 10.1029/2011WR011453.

- Lemoine F. G., Kenyon S. C., Factor J. K., Trimmer R.G., Pavlis N. K., Chinn D. S, Cox C. M., Klosko S. M., Luthcke S. B., Torrence M. H., Wang Y. M., Williamson R. G., Pavlis E. C., Rapp R. H., Olson T. R., (1998). The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. NASA/TP-1998-206861.
- Li, Y., Sideris, M. (1993). Estimation and minimization of geoid undulation errors, In: International Association of Geodesy General Meeting. Beijing, China.
- Lobianco M.C.B., (2005). Determinação das alturas do geoide no Brasil. 2005. 165p.PhD Thesis – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Martinec Z., Matyska C., Grafarend E.W. & Vanicek P., (1993). On Helmert's 2nd condensation method. Manuscripta geodaetica, vol. 18, pp. 417-.
- Matos, A.C.O.C. & Blitzkow, D. (2008). Modelagem Digital de Terrenos (MDT) de 3" para a América do Sul (projeto de Pos-Doc). Datos disponibles en: <http://www.ptr.poli.usp.br/lgt/proj/proj26.htm>.
- Matos, A.C.O.C., 2005. Implementação de modelos digitais de terreno para aplicações na área de Geodésia e Geofísica na América do Sul. PhD thesis - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 355 p. Disponible en: <http://www.teses.usp.br/teses/>
- Meissl, P., (1971). Preparations for the numerical evaluation of second-order Molodenski-type formulas. Columbus, Dep. of Geodetic Science and Surveying. Ohio State University, Report 163.
- Mikhailov V., Tikhotsky S., Diament M., Panet I., Ballu V., (2004). Can tectonic processes be recovered from new gravity satellite data? Earth and Planetary Science Letters Volume 228, Issues 3–4, Pages 281-297. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2004.09.035>.
- Ministerio del Ambiente y Energía (MINAE), Instituto Meteorológico Nacional (IMN), Coastal Zone Management Centre (CZMC), Comité Regional de Recursos Hidráulicos (CRRH), 1997. Estudios de Cambio Climático en Costa Rica. Componente Recursos Costeros. Evaluación de la Vulnerabilidad de los Recursos Costeros al Cambio Climático. Recuperado de: http://cambioclimaticocr.com/multimedia/recursos/mod-1/Documentos/vulnerabilidad_de_recursos_costeros.pdf
- Molodensky M.S., Eremev V.F., Yurkina M.I., (1962). Methods for study of the external gravity field and figure of the earth. Israel Jerusalem Scientific Translations, Jerusalem.
- Moritz H., (1989), Advanced Physical Geodesy, 2nd Edition, Karlsruhe: Wichmann.
- Montenegro M.S., (2010). Variaciones de las reservas de agua durante la sequía del año 2009 en la provincia de Buenos Aires a partir de datos satelitales de la misión GRACE. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Universidad Nacional de La Plata.

- Munk W. H., Cartwright D. E., (1966). Tidal Spectroscopy and Prediction. *Philos. Trans. R. Soc. London, A*, 259:533-583
- Nicacio E.L., (2017). Alternativa para determinação de altitudes normais-ortométricas na Amazônia legal brasileira. Dissertação de Doutorado. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- Pacino, M.C. (1999). Geoide y estructura litosférica en la Argentina. Tesis Doctoral Universidad Nacional de Rosario.
- Pail R., Fecher T., Barnes D., Factor J.F., Holmes S.A., Gruber T., Zingerle P., (2016). The experimental gravity field model XGM2016. Presentation at International Symposium on Gravity, Geoid and Height System 2016, Thessaloniki. URL:http://gghs2016.com/wp-content/uploads/2016/07/GGHS_2016_paper_32.pdf
- Papoulis A., (1977). Signal analysis. McGraw-Hill, New York.
- Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* (1978-2012) Volume 117.
- Pereira A., (2011). Estudio comparativo de modelos de geopotencial y análisis geodinámico de las variaciones temporales del campo gravitacional para la Argentina. Tesis Doctoral Universidad Nacional de Rosario.
- Pereira R. A. D., De Freitas S. R., (2014). Indicativos da possibilidade da divisão do espectro geopotencial com base no desenvolvimento da altura geoidal em um único ponto a partir de wavelets. *Revista Brasileira de Cartografia*, v. 66, n. 3, p. 463–471.
- Popolzzio E., (1977). Contribución a la Geomorfología de la Provincia de Corrientes. Instituto de Física y geología de la Universidad de Rosario, Serie Nota N°1., Rosario, Argentina.
- Rapp, R.H., (1998b). Past and Future Developments in Geopotential Modeling, in R Forsberg, M Feissel & R Dietrich (eds), *Geodesy on the Move*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, vol. 119, pp. 58-78.
- Rummel R., (2005). Geoid and gravity in earth sciences—an overview. Workshop on Enabling Observation Techniques for Future Solid Earth Missions, Jan 30–Feb 01, 2003, Int. Space Sci. Inst. Bern Switzerland, *Earth Moon and Planets* n. 94, p. 3-11,.
- Rummel R., (2010). Satellite Gravimetry. 5th ESA Earth Observation Summer School 2-13 August 2010, ESA-ESRIN, Frascati / Italy
- Saleh J.; Pavlis, N.K. (2002). The development and evaluation of the global digital terrain model DTM2002, 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece.

- Schwarz K. P., Sideris M. G. and Forsberg R. (1990). The use of FFT in physical geodesy. *Geophys. J. Int.*, 100, 485-514.
- Schwarz K., Sideris M.G., Forsberg R., (1990). The use of FFT techniques in physical geodesy. Review Paper, *Geophysical Journal International*, v. 100, p 485-514.
- Seeber G., (2003). *Satellite Geodesy: foundations, methods and applications*. 2nd. ed. Berlin-New York: Walter de Gruyter.
- Sideris M.G., (2010). Geoid determination by FFT techniques. Lectures notes for the Ninth International School for the Determination and use of the Geoid. La Plata, Argentina.
- Sideris, M.G. (1990), Rigorous gravimetric terrain modelling using Molodensky's operator. *Manuscripta geodaetica*, vol. 15, no. 2, pp. 97-106.
- Silva, A. A., 1999. Contribución al Conocimiento de la Geología e Hidrogeología del Sistema Acuífero Termal de la Cuenca Chaco-paranaense Oriental Argentina. Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- Sørensen, L. S., & Forsberg, R. (2010). Greenland Ice Sheet Mass Loss from GRACE Monthly Models. In *Gravity, Geoid and Earth Observation* (pp. 527-532). Springer. (International Association of Geodesy Symposia; No. 135). DOI: 10.1007/978-3-642-10634-7_70
- Swenson S. C., Wahr J., (2006). Post-Processing removal of correlated errors in GRACE data. *Geophys. Res. Lett.*, 33, L08402, doi: 10.1029/2005GL025285.
- Tapley, B.D., Bettadpur, S., Ries, J.C., Thompson, P. and Watkins M.M. (2004): GRACE measurements of mass variability in the Earth System. *Science*, 305: 503-505.
- TRMM (Tropical Rainfall Measuring Mission) (2011), TRMM (TMPA) Rainfall Estimate L3 3 hour 0.25 degree x 0.25 degree V7, Greenbelt, MD, Goddard Earth Sciences Data and Information Services Center (GES DISC), https://disc.gsfc.nasa.gov/datacollection/TRMM_3B42_7.html. Acceso Enero 2016 a Octubre 2017.
- Tscherning C.C., Forsberg R., Knudsen P., (1992). The GRAVSOFIT package for geoid determination. Proc.1st Continental Workshop on the Geoid in Europe, Prague: 327-334.
- Vaniček P., Featherstone W.E. (1998). Performance of three types of Stoke's kernel in the combined solution for the geoid. *Journal of Geodesy*, Berlin v. 71, n. 12, p. 684-697.
- Vaniček P., Featherstone, W.E., (1969). Performance of three types of Stokes Kernel. *Geophysical Journal Research*. New York, vol. 18, n.1, p. 81-89.

- Vaníček P., Huang J., Novák P., Pagiatakis S.D., Véronneau M., Martinec Z., Featherstone W.E., (1999). Determination of the boundary values for the Stokes-Helmert problem, *Journal of Geodesy*, Vol.73, Springer.
- Vaníček P., Kleusberg A., (1987) The Canadian geoid - Stokesian approach. *Manuscripta Geodaetica*, v. 12, p. 86-98.
- Vaníček P., Kleusberg A., Chang R.G., Fashir H., Christou N., Hofman M., Kling T., Arsenault T., (1987). The Canadian Geoid. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick. Fredericton, Canada.
- Vaníček P., Martinec Z., (1994). The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid. *Manuscripta Geodaetica*, v. 19, p. 119-128.
- Vaníček P., Sjöberg L.E., (1991), Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels, *Journal of Geophysical Research*, v. 96, p. 6529-6539.
- Vaz de Almeida F. G., (2009). Variação temporal do campo gravitacional detectada pelo satélite GRACE: Aplicação na bacia Amazônica. Tesis de Doctorado en Ingeniería presentada en la Escuela Politécnica de la Universidad de San Pablo, Brasil.
- Villella J.C. and Pacino, M.C. (2010). Interpolación gravimétrica para el cálculo de los números geopotenciales de la red altimétrica de Argentina en zonas de alta montaña. *Geoacta*, 35: 13-26.
- Wahr, J., M. Molenaar, and F. Bryan (1998), Time variability of the earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, *J. Geophys. Res.*, 103(B12), 30205–30229.
- Wong, L., Gore, R. (1969). Accuracy of geoid heights from modified Stokes Kernels. *Geophysical Journal Research*. vol. 18, n.1, p. 81-91.

Anexo II: Mapas de variación de EWH mensual obtenidas a través de las grillas GRACE del GRGS para todos los meses de Mayo en el período 2003 – 2016.

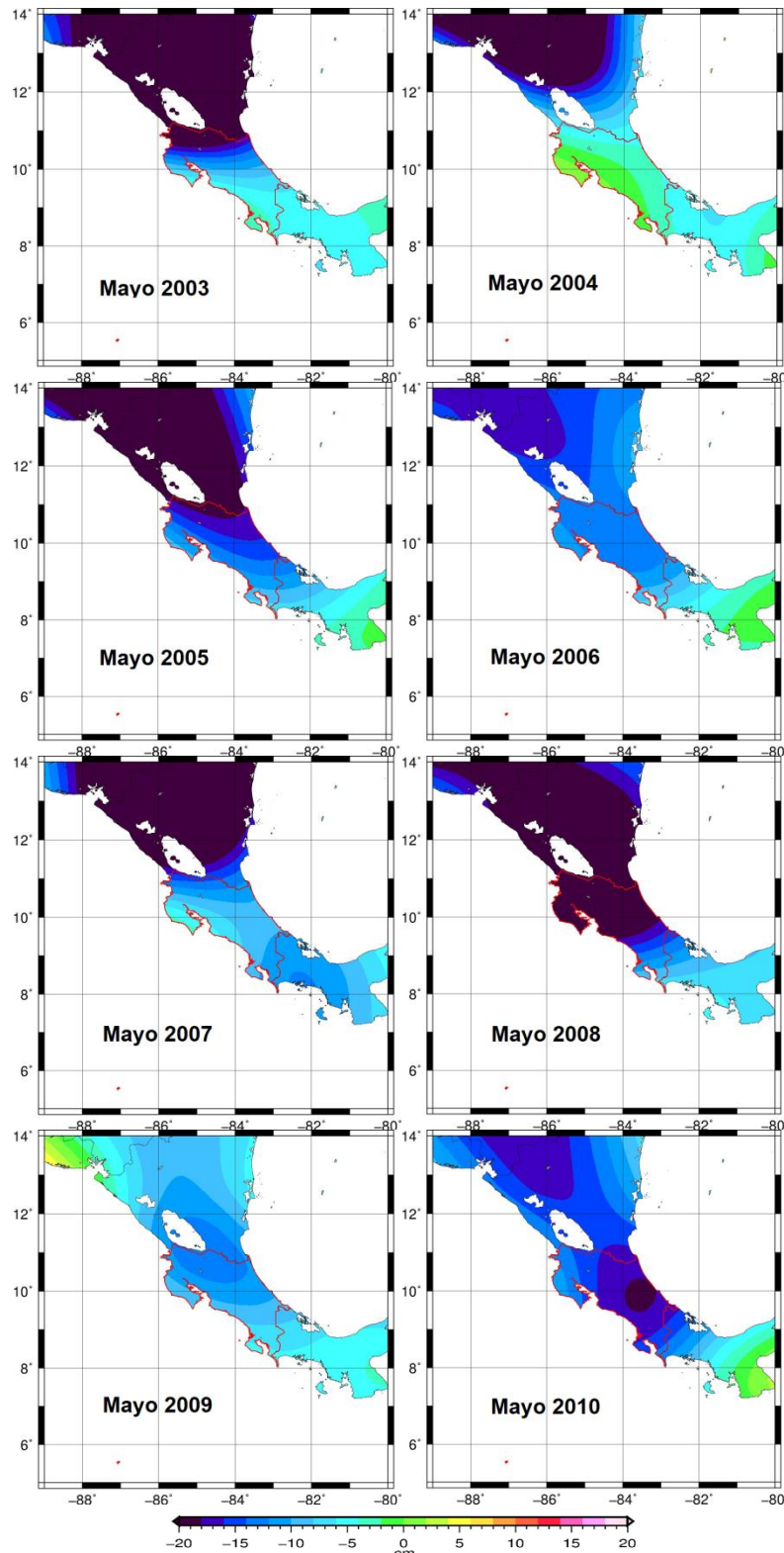


Figura II.1. Espesor equivalente de agua para cada mes de Mayo desde 2003 al 2010 (cm/mes).

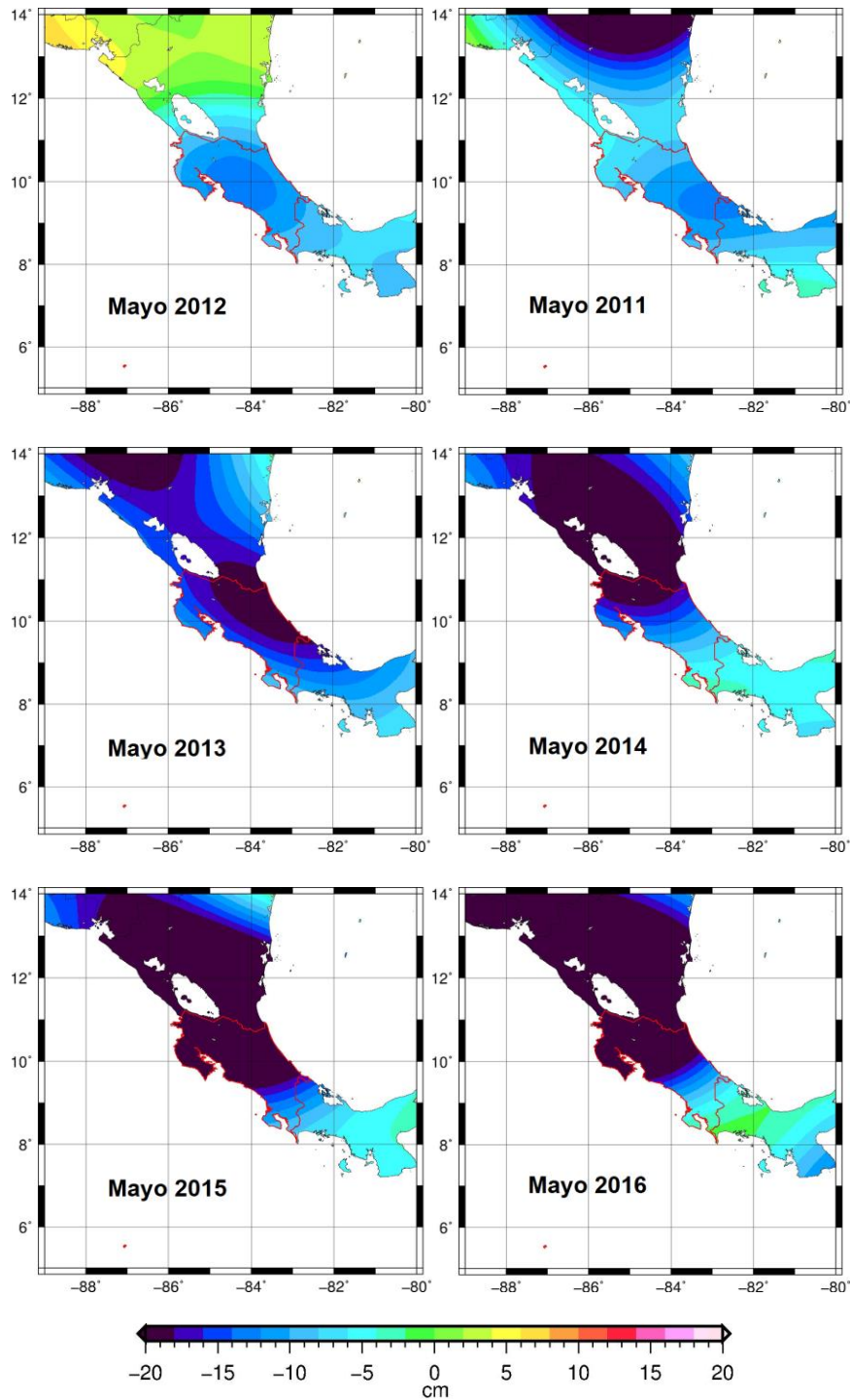


Figura II.2. Espesor equivalente de agua para cada mes de Mayo desde 2011 al 2016 (cm/mes).

Anexo III : Mapas de variación de EWH mensual obtenidas a través de las grillas GRACE del GRGS para el año 2015.

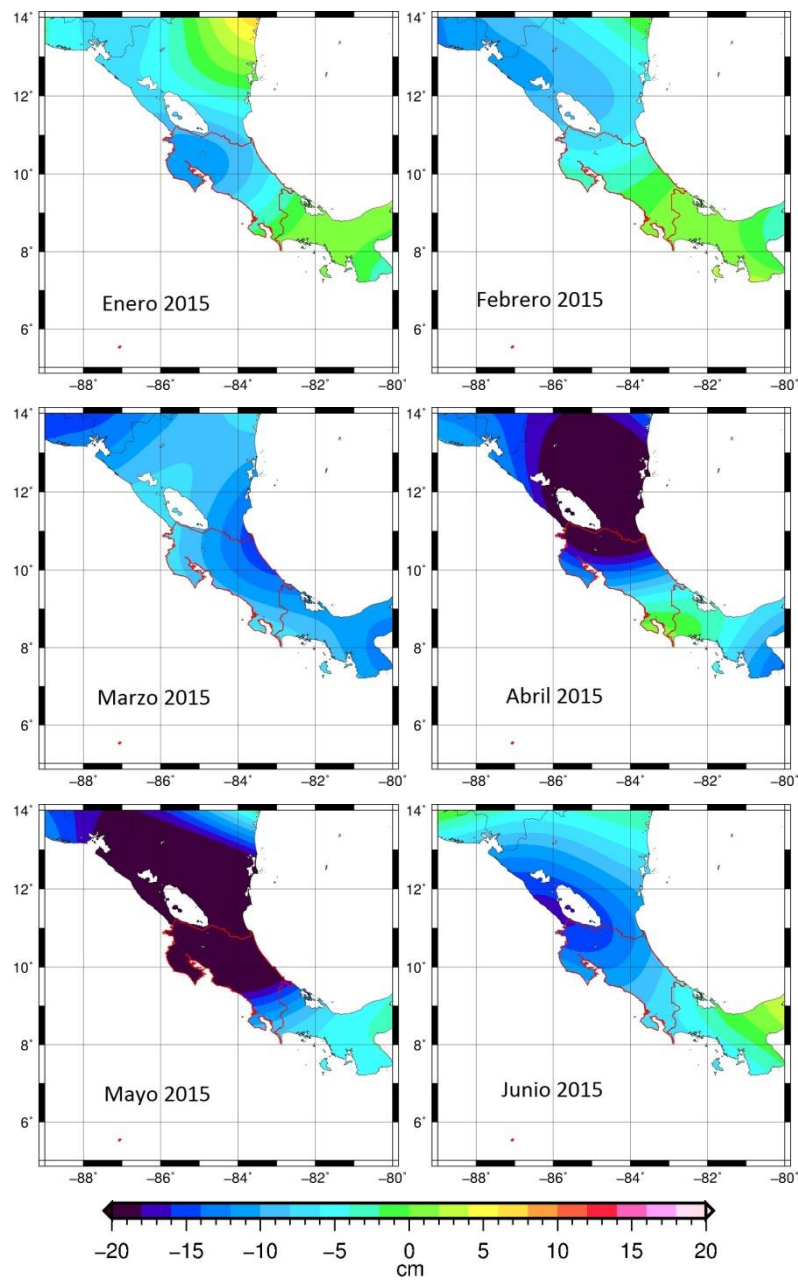


Figura III.1. Espesor equivalente de agua mensual, de Enero a Junio del año 2015 (cm/mes).

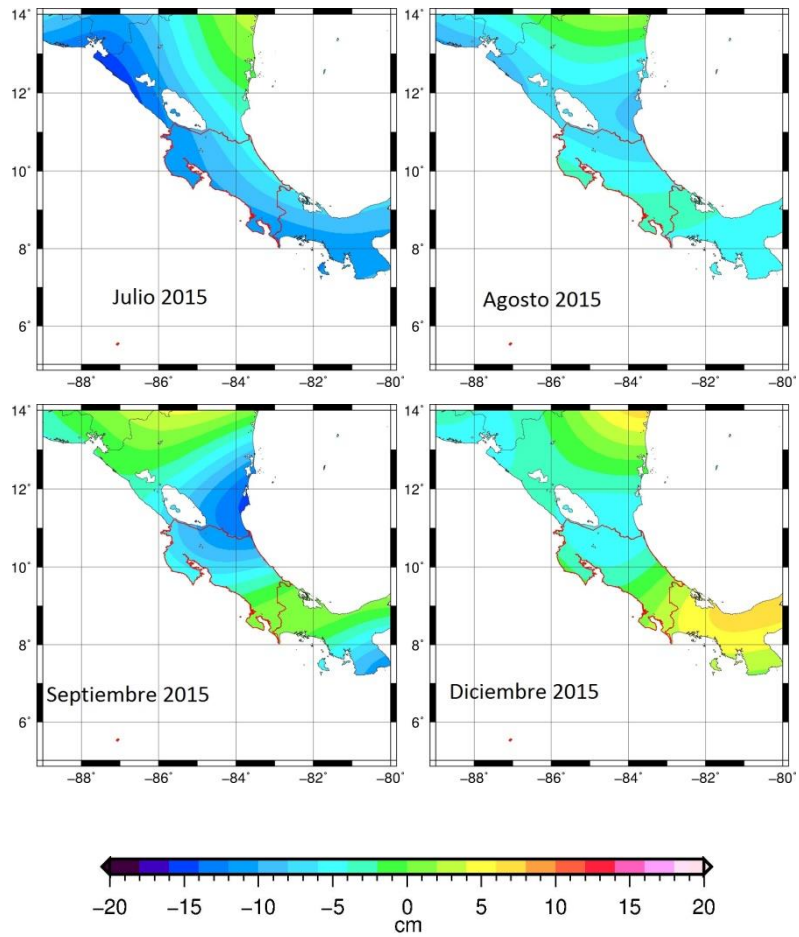


Figura III.2. Espesor equivalente de agua para Julio, Agosto, Setiembre y Diciembre del año 2015 (cm/mes)

Anexo IV: Mapas de variación de EWH mensual obtenidas a través de las grillas GRACE del GRGS para todos los meses de Octubre en el período 2002 – 2016.

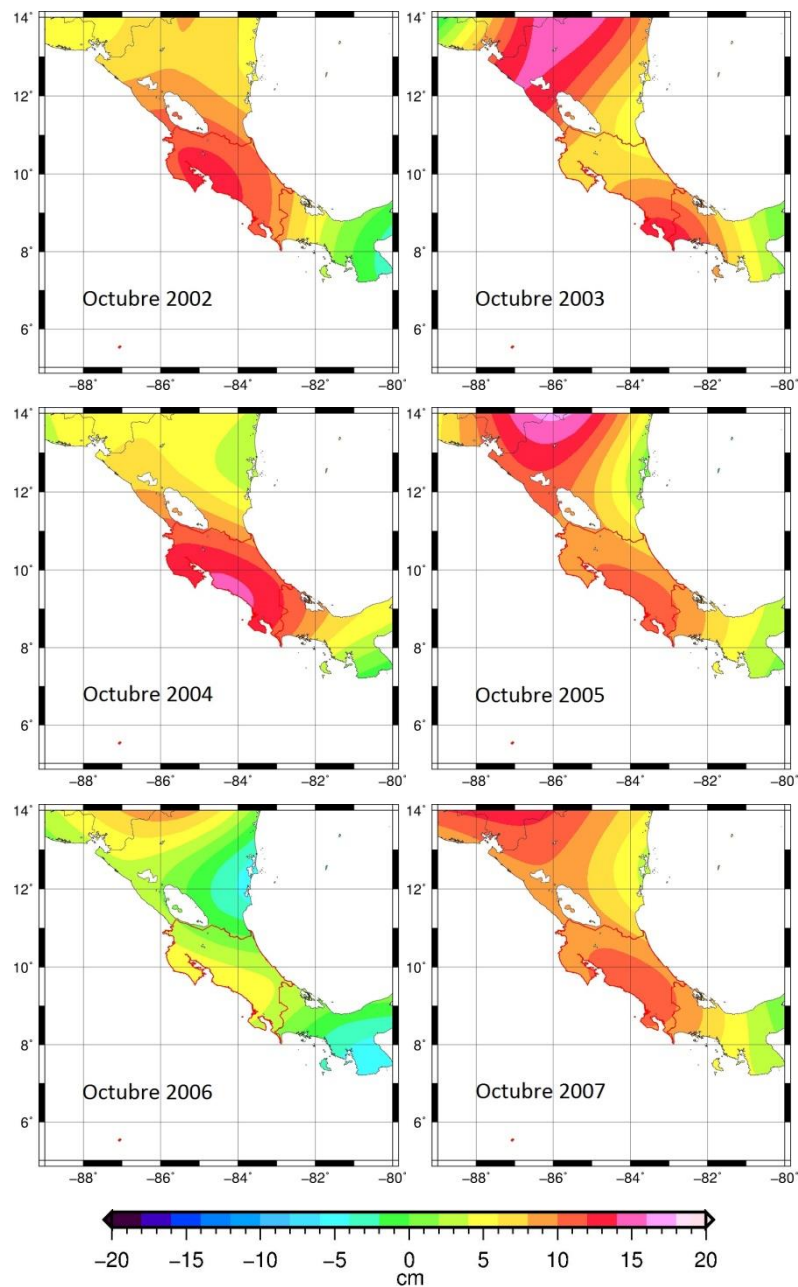


Figura IV.1. Espesor equivalente de agua para cada mes de Octubre desde 2002 al 2007 (cm/mes).

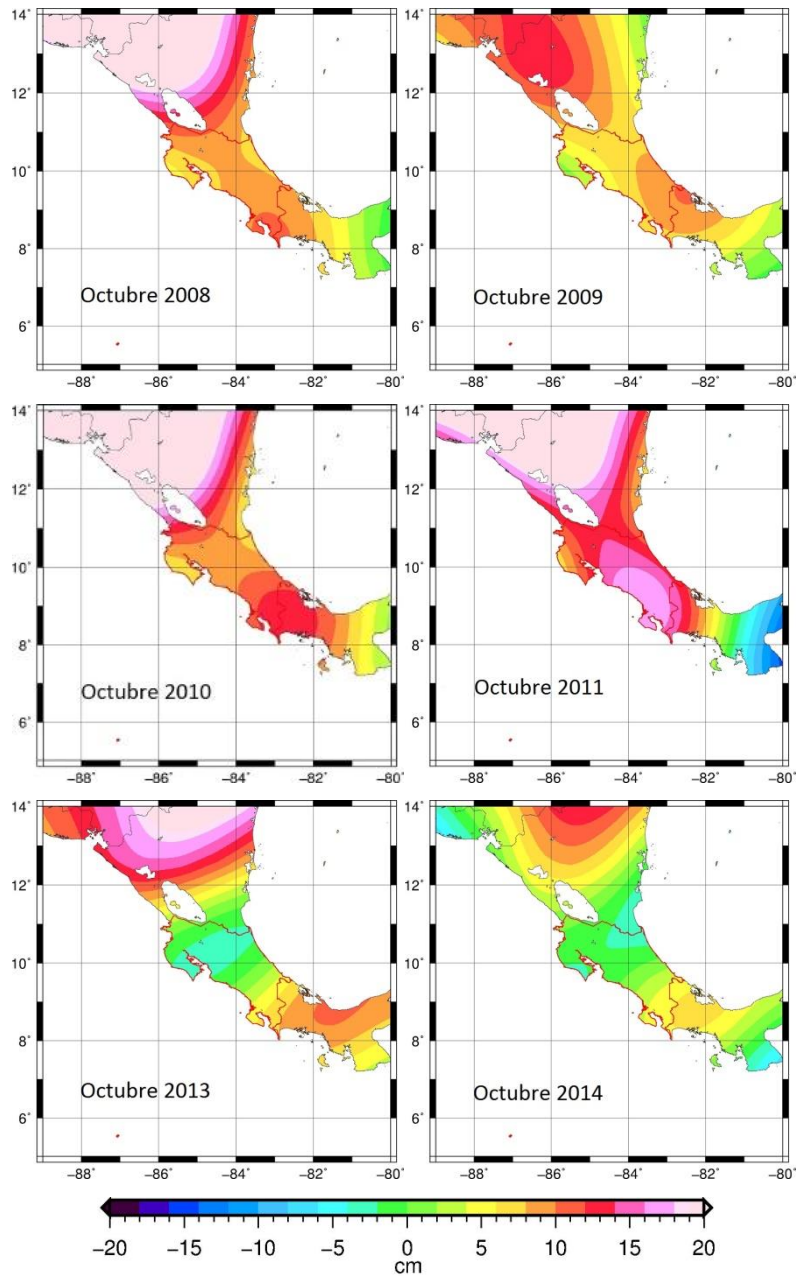


Figura IV.2. Espesor equivalente de agua para cada mes de Octubre desde 2011 al 2014.

Anexo V: Mapas de variación de EWH mensual obtenidas a través de las grillas GRACE del GRGS para el año 2011.

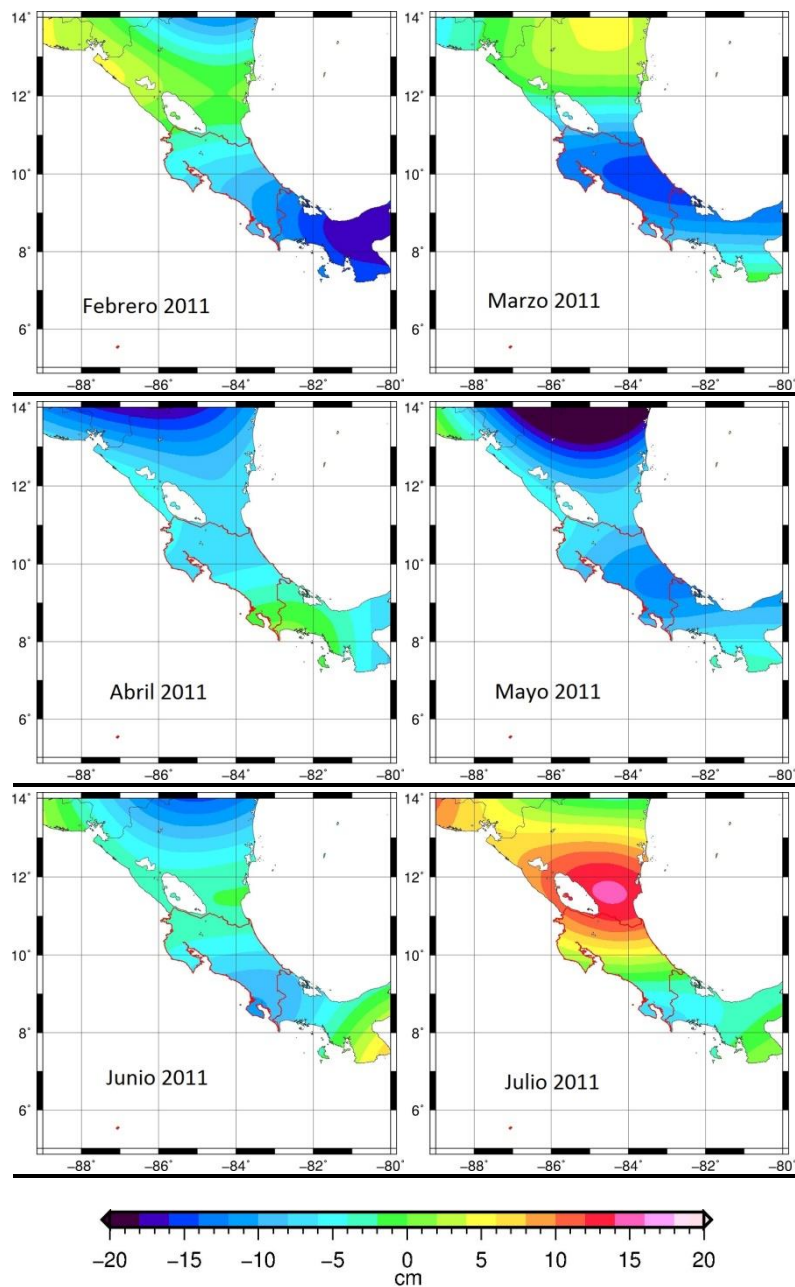


Figura V.1. Espesor equivalente de agua mensual, de Febrero a Julio del año 2011 (cm/mes).

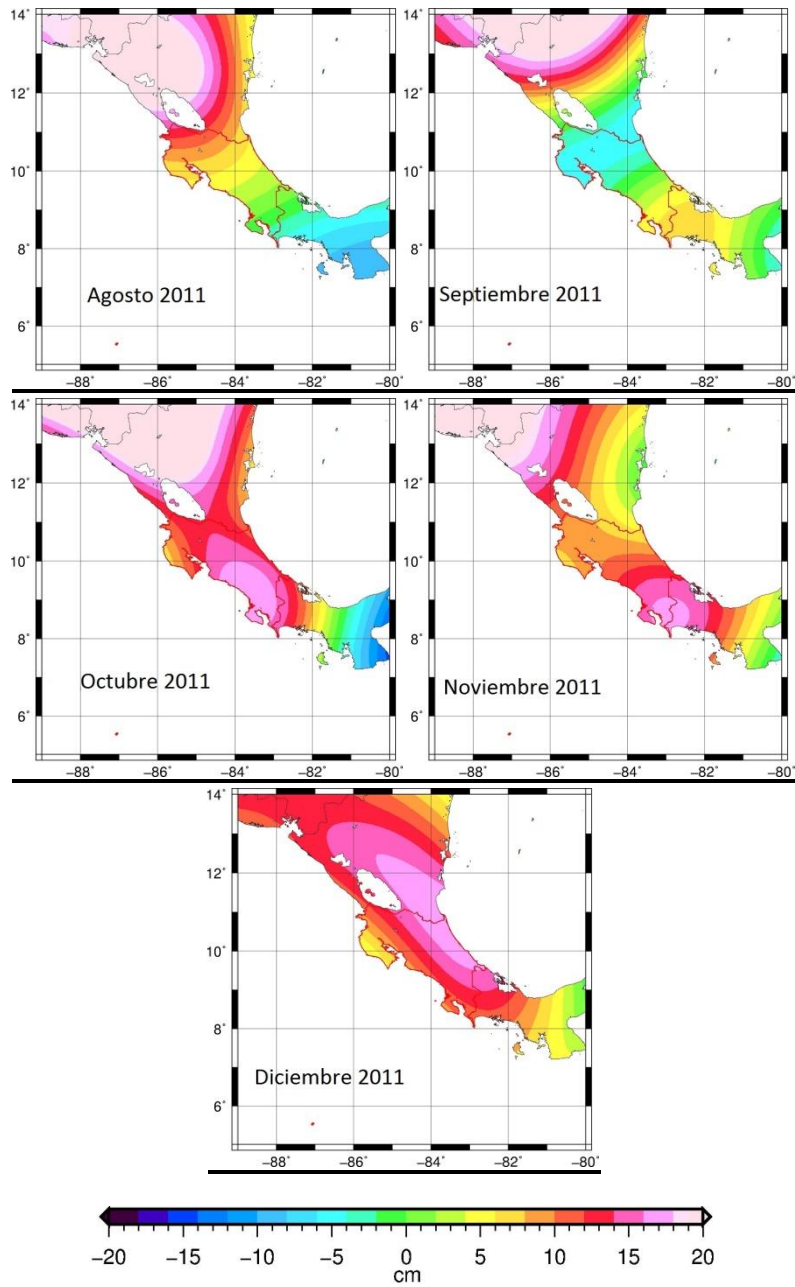


Figura V.2. Espesor equivalente de agua mensual, de Agosto a Diciembre del año 2011 (cm/mes).