TIRADA APARTE DE MATHEMATICÆ NOTÆ - AÑO IV - FASC. 4

UN PROBLEMA DE CALCULO NUMERICO

SOBRE LA INVERSION DE FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES

APLICACIÓN A UNA INTEGRAL DE LA TEORÍA DE LAS RADIACIONES

1. En las aplicaciones del análisis se presenta a menudo el problema de la inversión numérica de funciones definidas como el valor de cierta integral para valores variables de uno de sus extremos de integración. Desde luego que, en el concepto, ese problema no difiere de cualquier otro de inversión, por cuanto si, en vía de ejemplo, la integral se efectúa, como es generalmente posible, por un desarrollo de Taylor, se tratará, después de esto, de invertir la serie, lo que eventualmente podrá hacerse por un procedimiento de coeficientes indeterminados, que eventualmente puede pensarse completado por prolongación analítica. No es luego un problema conceptual el que queremos enfrentar, sino uno de cálculo efectivo.

Notamos también que el problema tiene sus antecedentes clásicos, siendo el aludido el modo de definición de muchas principales funciones habituales, tales como integrales elípticas, función de errores (de Gauss), logaritmo-integral, y, si se quiere, también logaritmo y funciones trigonométricas inversas (decimos, *si se quiere*, porque en estos últimos casos son didácticamente e históricamente las funciones inversas las que se presentan primeras, de modo que el problema ya no existe). Estos casos clásicos indican para el problema propuesto una solución que diríamos banal, consistente en la tabulación; es evidente que ésta puede hacerse partiendo indiferentemente de una cualquiera de las dos funciones inversas entre sí y por tanto, cuando esto sea cómodo, por el cálculo numérico de la integral; bastando después leer la tabla en doble sentido, eventualmente con el auxilio de interpolaciones, como se hace en efecto corrientemente con las tablas de logaritmos y de funciones goniométricas. Podemos agregar que el método es efectivamente ampliamente aplicado en la actualidad también para funciones menos comunes, por cuanto muchísimas son las funciones que se encuentran tabuladas, si no en los libros que están habitualmente en las manos de todos, por lo menos en una u otra memoria o publicación especializada. Pero, precisamente en estos casos puede a menudo considerarse menos práctico ir en busca de la tal publicación — además de que no siempre la aproximación de la tabla corresponderá a la deseada — que proponerse directamente el problema de efectuar la inversión numérica correspondiente a los valores que interesan de la variable, con la aproximación que interesa, y con el mínimo número posible de operaciones. Es natural que el problema así planteado podrá tener soluciones más o menos diferentes en cada caso especial. Vamos a tratar a continuación extensamente uno de estos casos que puede servir de ejemplo.

2. Se demuestra en la física teórica que un haz de partículas cargadas (electrones o protones) de velocidad determinada sufre una dispersión por la cual el radio de la sección del haz normal al eje crece con la distancia del origen, de manera que, indicando con $x = r : R$ la razón entre los radios en la distancia y y en el origen, vale la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = A\sqrt{\log x}$$

donde A es una constante que depende de las condiciones experimentales [1].

Se integra fácilmente esta ecuación por separación de las variables, obteniéndose por tanto

$$y(x) = \frac{1}{A}\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\log x}}. \tag{1}$$

[1] Se encuentra esta ecuación, por ej. en: M. Knoll und E. Ruska, *Beiträge zur geometrischen Elektronenoptik*, Annalen der Physik (5) 12, 1932, p. 607-661 y en R. D. Fowler and G. E. Gibson, *The production of intense Beams of positive Ions*, Physical Review (2) 46, 1934, p. 1934, p. 1075 y sigtes.

La integral del segundo miembro se desarrolla fácilmente en serie entera, convergente para todos los valores de la variable).

Supongamos para eso, como haremos en todo lo sucesivo, que sea $A=1$; el caso de A cualquiera se reduce a éste con el cambio de variable $Ay=y'$.

Pongamos entonces

$$\log x = z, \qquad z=\zeta^2, \qquad dx = 2\zeta e^{\zeta^2}\, d\zeta;$$

resulta

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = 2\int_0^\zeta e^{\zeta^2}\, d\zeta = 2\int_0^\zeta \left(1+\zeta^2+\frac{1}{2!}\zeta^4+\frac{1}{3!}\zeta^6+\ldots\right)d\zeta$$

$$= 2\left(\zeta+\frac{1}{3}\zeta^3+\frac{1}{5.2!}\zeta^5+\frac{1}{7.3!}\zeta^7+\ldots\right) \text{ (1)}$$

es decir

$$y(x) = 2\sqrt{z}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{5.2!}+\frac{z^3}{7.3!}+\ldots+\frac{z^n}{(2n+1)n!}+\ldots\right). \qquad (2)$$

Es evidente que puede a menudo interesar determinar el valor de x que corresponde a y dado; puede por ej. observarse que el experimentador puede variar arbitrariamente la distancia y, la cual por lo tanto funciona como variable principal, mientras x se sigue como resultado experimental. De cualquier manera, y sin preocuparnos de razones prácticas, nos proponemos, como problema matemático y de cálculo numérico, estudiar la inversión de la función $y(x)$ (2).

(1) Este desarrollo se encuentra dado en una nota de la pág. 1084 de la memoria citada de Fowler y Gibson; independientemente nos ha sido indicado en una conversación por el Dr. Manuel Sadosky.

(2) Por esta razón consideramos el caso de que se quiera determinar los valores de $y(x)$ con una aproximación asignada, que puede ser elevada. Para quien lea la nota con intención práctica debe por tanto estar sentado que muchas de las cuestiones tratadas se reducen enormemente por cuanto se pretenda tan solo una débil aproximación.

Como notamos en el párrafo anterior no existen dificultades para invertir, alrededor del origen, la serie (2) o, más generalmente escribir el desarrollo de Maclaurin de la función $x(y)$; en efecto, como mostraremos en detalle en el n. siguiente, podemos calcular de esta función las derivadas sucesivas; se obtienen entonces fácilmente los desarrollos (ver n. 3)

$$z(y) = \frac{1}{2}y - 0{,}33\left(\frac{y}{2}\right)^3 + 0{,}233\left(\frac{y}{2}\right)^5 - 0{,}263\left(\frac{y}{2}\right)^7 + \dots$$

$$x(y) = 1 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4.4!}y^4 + \frac{7}{8.6!}y^6 - \frac{147}{16.8!}y^8 + \dots \qquad (3)$$

pero se ve fácilmente por la simple inspección de los coeficientes, que estas series, para valores de y no muy pequeños, en caso de ser convergentes [1], lo serán muy lentamente.

3. Para resolver esta dificultad conviene enfrentar directamente el problema de la inversión sin tampoco pasar, en un principio, por una integración como la (2).

Consideremos el problema en su forma inicial, es decir, (suponiendo siempre el coeficiente $A=1$): *calcular con determinada aproximación la función $x(y)$ definida por la ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\log x} \qquad (4)$$

con la condición inicial que para $y=0$ sea $x=1$; el desarrollo de Taylor de esta función alrededor de un punto (x, y) cualquiera (por ej. precisamente el $(1,0)$) se puede escribir fácilmente calculando las derivadas sucesivas [2] mediante la relación

$$\frac{df(x)}{dy} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}. \qquad (5)$$

(1) La determinación del radio de convergencia de estas series no tiene interés directo para el objeto de esta nota y es problema de naturaleza analítica más elevada que reservamos para otra sucesiva.

(2) En el mismo modo, mejor que por inversión algebraica de la (2), se calculan en efecto las (3).

Poniendo por $f(x)$ la (4), se obtendrá así la derivada segunda y sucesivamente poniendo la derivada $n-1$-ma se obtendrá por recurrencia la n-ma. Se obtienen de esta manera las derivadas siguientes que son las que vamos a utilizar:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{2x\sqrt{\log x}}\sqrt{\log x}=\frac{1}{2x}$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=-\frac{\sqrt{\log x}}{2x^2},\qquad \frac{d^4x}{dy^4}=\frac{4\log x-1}{4x^3},$$

$$\frac{d^5x}{dy^5}=-\frac{12\log x-7}{4x^4}\sqrt{\log x},\qquad \frac{d^6x}{dy^6}=\frac{96\log^2 x-92\log x+7}{8x^5} \tag{6}$$

$$\frac{d^7x}{dy^7}=\frac{480\log^2 x-652\log x+127}{8x^6}\sqrt{\log x}.$$

Se reconoce también fácilmente por inducción la forma general de estas derivadas, para $n\geqq 3$:

$$\frac{d^nx}{dy^n}=-\frac{P_\nu(\log x)}{2x^{n-1}}\sqrt{\log x},\quad \text{para } n \text{ impar } =2\nu+3$$

$$\frac{d^nx}{dy^n}=\frac{P_\nu(\log x)}{2x^{n-1}},\quad \text{para } n \text{ par } =2\nu+2 \tag{7}$$

donde P_ν representa un polinomio de orden ν de la forma

$$P_\nu(\log x)=(n-2)!\log^\nu x-c_1\log^{\nu-1}x+c_2\log^{\nu-2}x-\ldots; \tag{8}$$

(basta, para la demostración, suponer ciertas las fórmulas para determinado n y efectuar la derivación sucesiva aplicando la (5)).

Como primera aplicación de estas fórmulas obtenemos el desarrollo de $x(y)$ alrededor de $y=0$

$$x(y)=1+\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{4.4!}y^4+\frac{7}{8.6!}y^6-\ldots \tag{9}$$

Pero más útilmente que el desarrollo en serie va a servir la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange, que nos permite calcular la aproximación prescindiendo de la convergencia; con la doble ventaja de que, no solamente se aparta el propio problema de esa convergencia, sino que, como será fácil notar, la fórmula dará resultados útiles para el cálculo, aun cuando la misma no se realice.

4. Para nuestro estudio nos conviene aplicar las consideraciones precedentes, poniéndonos en condiciones un poco más generales. Supongamos que, de una manera cualquiera, se haya determinado un par de valores correspondientes de x, y y sean $\bar{x}, \bar{y}$ (por ej. habrá podido fijarse el valor de $\bar{x}$, calculando luego $\bar{y}$ mediante (1), (2)). La fórmula de Taylor nos da que

$$x(\bar{y}+h)=\bar{x}+h\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)+R_n \quad (10)$$

donde las derivadas en paréntesis se entienden calculadas en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y

$$R_n=\frac{h^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}y^n}\right)_{y=\bar{y}+\vartheta h} \quad (0<\vartheta<1). \qquad (11)$$

Los coeficientes $\left(\frac{\mathrm{d}^rx}{\mathrm{d}y^r}\right)$ se calcularán poniendo en las fórmulas (6) $x=\bar{x}$ y (10) podrá aplicarse para calcular $x(y)=x(\bar{y}+h)$ para todos los valores de $h=y-\bar{y}$ para los cuales (11) resulta inferior al error admitido. Para la discusión correspondiente será útil notar que de las expresiones (6), (7), (8) resulta en seguida que todas las derivadas consideradas decrecen rápidamente en valor absoluto a partir de cierto valor de x, porque el logaritmo crece mucho menos que el número. Será conveniente determinar el último máximo de ese valor absoluto; se encuentra que para $n = 4, 5, 6, 7$ este último máximo de $\dfrac{d^n x}{dy^n}$ se realiza respectivamente para [1]

$$\log x' = \frac{7}{12}, \quad \frac{7}{8}, \quad 1{,}12, \quad 1{,}34$$

$$x' = 1{,}792, \ 2{,}399, \ 3{,}065, \ 3{,}84. \qquad (12)$$

Se sigue que en la evaluación de R_n, para $h > 0$ y para valores de $\bar{x}$ respectivamente superiores a los x' (12), podrá siempre aceptarse como valor por exceso el que corresponde a $x = x'$; al contrario, para valores de $\bar{x}$ inferiores a los (12), podrá todavía aceptarse como valor prudencial aquel que corresponde a $x = x'$, siempre que dentro del intervalo $\bar{x} - x'$ el valor absoluto de la derivada no alcance valores mayores que dicho máximo.

Esos máximos son respectivamente

$$\max \frac{d^4 x}{dy^4} = 0{,}058, \quad \max \frac{d^5 x}{dy^5} = 0{,}0243, \quad \max \frac{d^6 x}{dy^6} = 0{,}00825,$$

$$\max \frac{d^7 x}{dy^7} = 0{,}0046. \qquad (13)$$

Se calcula fácilmente que la última condición se realiza para $\bar{x} \geqq x''$ donde respectivamente

$$x'' = 1{,}094 \quad 1{,}6 \quad 2{,}27 \quad 2{,}92.$$

Para cada uno de estos valores de x'' se calcula fácilmente el valor de $y = y''$ por medio de la fórmula (2) u otra equivalente (cfr. n. 11); convendrá en todo caso aproximar por exceso poniendo, por ej.,

$$x'' = 1{,}1 \quad 1{,}6 \quad 2{,}3 \quad 3$$

$$y'' = 0{,}733 \quad 1{,}62 \quad 2{,}49 \quad 3{,}2 \qquad (14)$$

(1) El cálculo de los máximos aludidos aquí y en las líneas siguientes requiere únicamente la vulgar aplicación de reglas elementales; se deja por tanto al lector la verificación.

que para $n=4,5,6,7$ este último máximo de $\dfrac{d^n x}{dy^n}$ se realiza respectivamente para [1]

$$\log x' = \frac{7}{12}, \quad \frac{7}{8}, \quad 1{,}12, \quad 1{,}34$$

$$x' = 1{,}792, \ 2{,}399, \ 3{,}065, \ 3{,}84. \qquad (12)$$

Se sigue que en la evaluación de R_n, para $h > 0$ y para valores de $\bar{x}$ respectivamente superiores a los x' (12), podrá siempre aceptarse como valor por exceso el que corresponde a $x = x'$; al contrario, para valores de $\bar{x}$ inferiores a los (12), podrá todavía aceptarse como valor prudencial aquel que corresponde a $x = x'$, siempre que dentro del intervalo $\bar{x} - x'$ el valor absoluto de la derivada no alcance valores mayores que dicho máximo.

Esos máximos son respectivamente

$$\max \frac{d^4 x}{dy^4} = 0{,}058, \quad \max \frac{d^5 x}{dy^5} = 0{,}0243, \quad \max \frac{d^6 x}{dy^6} = 0{,}00825,$$

$$\max \frac{d^7 x}{dy^7} = 0{,}0046. \qquad (13)$$

Se calcula fácilmente que la última condición se realiza para $\bar{x} \geqq x''$ donde respectivamente

$$x'' = 1{,}094 \quad 1{,}6 \quad 2{,}27 \quad 2{,}92.$$

Para cada uno de estos valores de x'' se calcula fácilmente el valor de $y = y''$ por medio de la fórmula (2) u otra equivalente (cfr. n. 11); convendrá en todo caso aproximar por exceso poniendo, por ej.,

$$x'' = 1{,}1 \quad 1{,}6 \quad 2{,}3 \quad 3$$

$$y'' = 0{,}733 \quad 1{,}62 \quad 2{,}49 \quad 3{,}2 \qquad (14)$$

[1] El cálculo de los máximos aludidos aquí y en las líneas siguientes requiere únicamente la vulgar aplicación de reglas elementales; se deja por tanto al lector la verificación.

5. El método de cálculo que vamos a exponer consiste en la idea siguiente: vamos a determinar una sucesión de pares de valores de $\bar{x}, \bar{y}$ que denominaremos

$$(x_0\, y_0),\ (x_1\, y_1),\ \ldots,\ (x_r\, y_r),\ \ldots \tag{15}$$

para $\bar{x} > x''$, $\bar{y} > y''$, y

$$(x_{-1}\, y_{-1}),\ (x_{-2}\, y_{-2}),\ \ldots \tag{16}$$

para $\bar{x} < x''$, $\bar{y} < y''$, tales que los valores de la función $x(y)$ para valores de y comprendidos entre dos de estos valores de $\bar{y}$ se podrá calcular con la aproximación requerida por medio de la fórmula (10) cortada a un determinado $n-1$ y despreciando el correspondiente R_n; y lo importante será que el número de los intervalos en que resultará dividido el dominio de los posibles valores de y será extraordinariamente reducido en comparación con cualquier forma de tabulación.

Pero los dos casos de $\bar{y} > y''$ y de $\bar{y} < y''$ deben tratarse en modo diferente.

Empezando por el primero ($\bar{y} > y''$; subíndices positivos), pongamos, para valores correspondientes de x, y, cuyo cálculo se supone depender de la fórmula (10) con $\bar{x} = x_r$, $\bar{y} = y_r$,

$$x - x_r = k,\ y - y_r = h; \tag{17}$$

por el teorema del valor medio es

$$h = \frac{k}{\sqrt{\log (x_r + \eta k)}} \qquad (0 < \eta < 1)$$

Si se supone primero que $k > 0$, se sigue que

$$h \leqq \frac{k}{\sqrt{\log x_r}}, \tag{18}$$

por lo cual el valor de R_n (11) será menor de lo que se obtiene sustituyendo en lugar de h el segundo miembro de (18); por la hipótesis $y > y''$, se mayora ulteriormente R_n al poner $\vartheta = 0$. Si por tanto ponemos por brevedad

$$H_{nr} = \frac{P_\nu(\log x_r)}{2.n!\,\log^{\nu+1} x_r}, \tag{19}$$

resulta

$$|R_n| < \frac{1}{x_r^{\,n-1}} H_{nr} k^n,$$

y será ciertamente

$$|R_n| < \varepsilon$$

cuando sea

$$k < x_r^{\frac{n-1}{n}} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{H_{nr}}} = k_{nr}. \tag{20}$$

Si ε es el límite superior de error admitido en el cálculo de $x(y)$, este valor de k_{nr} (u otro menor), podrá luego asumirse como anchura, a la derecha, de un intervalo $x_r - x_r + k_{nr}$ tal que, en cuanto el valor de $y = y_r + h$ sea contenido dentro del correspondiente intervalo $y_r - y_r + h_{nr}$, el valor de $x(y)$ será proporcionado con la exactitud requerida por la fórmula (10) cortada como se dijo.

Importa notar que el número $y_r + h_{nr}$ está determinado por $x_r + k_{nr}$ por medio de la integral (1) (u otra expresión equivalente); resulta por consecuencia determinado el número h_{nr} el cual, por el razonamiento anterior será tal de hacer, para cualquier $x > x_r$

$$\frac{h_{nr}^{\,n}}{n!} \left| \frac{d^n x}{dy^n} \right| < \varepsilon;$$

se sigue que, poniendo en (10) $\bar{x} = x_r + k_{nr}$, $\bar{y} = y_r + h_{nr}$, podrá la fórmula aplicarse por valores negativos de h, en valor absoluto $\leqq h_{nr}$, para calcular con la aproximación requerida el valor de $x(y)$ para y a la izquierda de $y_r + h_{nr}$.

Sigue de estas observaciones la construcción siguiente de la sucesión (15): Elegido convenientemente el valor $x_0 > x''$ (como vamos a puntualizar después) se determina por la (20) k_{n0}; pongamos luego $x'_0 = x_0 + k_{n0}$ y, por medio de la misma (20) donde se ponga x'_0 por x_r calculemos una k'_{n0}; pongamos $x_1 = x'_0 + k'_{n0} = x_0 + k_{n0} + k'_{n0}$; sobre x_1 se opera análogamente, poniendo siempre, en modo recurrente

$$x_{r+1} = x_r + k_{nr} + k'_{nr}$$

donde k_{nr} y k'_{nr} se obtienen respectivamente de (20) y de la fórmula análoga donde se ha cambiado x_r en $x'_r = x_r + k_{nr}$. Una vez determinada de esta manera la sucesión de los x_r, se calculan los correspondientes y_r según la integral (1) (ver más exactamente n. 11). Se pueden entonces calcular los valores de $x(y)$ aplicando la fórmula (10) por valores positivos y negativos de $h = y - y_r$, siendo el y_r determinado por cada y de manera que sea, por valores negativos de h, $|h| \leqq h'_{nr-1}$ y por valores positivos de h, $h \leqq h_{nr}$ (donde h_{nr}, h'_{nr} tienen significado evidente por lo que antecede).

(Para determinar los h_{nr}, h'_{nr} será necesario calcular los números y'_r análogamente a los y_r; pero, mientras los y_r deben calcularse con toda la exactitud para que la sustitución en (10) lleve a un error no superior a ε, este otro cálculo podrá evidentemente hacerse con aproximación grosera).

Para $r = 0$ no tiene sentido h'_{-1}; se pueden sin embargo repetir las anteriores observaciones relativas a la aplicación de los resultados obtenidos a valores negativos de h, teniendo en cuenta la definición de los números x'' (14), para concluir que vale lo dicho aún para $r = 0$ con tal que se ponga

$$h'_{-1} = \min (h_0, y_0 - y'').$$

Esto proporciona el criterio para la elección del x_0 de partida, pues será conveniente que la diferencia $|h_0 - h'_{-1}|$ resulte posiblemente pequeña.

6. Para la aplicación numérica es útil observar que, lo mismo que la derivada n-ma, la función H_{nr} tiende a 0 al crecer x_r, con variación muy lenta (tendiendo asintóticamente a la forma $C \log^{-1} x_r$) y que, por otra parte, por presentarse en la fórmula (20) bajo $\sqrt[n]{\ }$, en denominador, pequeñas variaciones

en su valor influyen muy poco sobre el valor de k_{nr}; por estas razones, y considerando que siempre está permitido sustituir a k_{nr} un valor minorante, con el único efecto de acortar un poco los intervalos de aplicación de (10) con determinados coeficientes, podrá mantenerse constante el valor de H_{nr} para amplios dominios de la variable y, en el máximo valor correspondiente al extremo inferior de ese dominio. La fórmula (20) toma entonces la forma simplificada

$$k_{nr} = c_{nr}\, x_r^{\frac{n-1}{n}} \tag{21}$$

Se calcula fácilmente que para $n = 4, 5, 6, 7$ la función $H_n(x)$ alcanza su máximo valor respectivamente para los valores $x = \bar{\bar{x}}$

$$\begin{array}{lllll} \bar{\bar{x}} = 1{,}65 & 3{,}22 & 5{,}99 & 10{,}80 & \\ \log \bar{\bar{x}} = 0{,}5 & 1{,}166 & 1{,}79 & 2{,}38 & \end{array} \tag{22}$$

y estos máximos son

$$H^*_4 = 0{,}042 \quad H^*_5 = 0{,}011 \quad H^*_6 = 0{,}0045 \quad H^*_7 = 0{,}0024. \tag{23}$$

Teniendo en cuenta los valores de $\sqrt[n]{\varepsilon}$ proporcionados por la tabla

ε	$n=$ 4	5	6	7
0,1	0,563	0,631	0,681	0,720
0,01	0,317	0,398	0,464	0,518
0,001	0,178	0,252	0,317	0,372
0,0001	0,100	0,159	0,215	0,269

(24)

se obtiene luego que, para la aplicación práctica y para los valores de ε de la forma $10^{-\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$, pueden adoptarse, por valores de x no excesivamente grandes (unos cientos), los siguientes valores de las constantes c_{nr} en la fórmula (21)

ε	$n=4$	5	6	7	
0,1	1,24				
0,01	0,7	0,99	1,14		(25)
0,001		0,62	0,78	0,88	
0,0001			0,53	0,638	

Para dar una idea de como efectivamente es reducida la variabilidad del coeficiente c_{n_r} por efecto de un más riguroso cálculo de la función H_n basta notar que para $x=200$ se obtiene precisamente $H_5=0{,}0042$ en lugar del $H^*{}_5=0{,}011$; pero poniendo además, por ej. $\varepsilon=10^{-2}$ el coeficiente c_5 pasa por eso al valor 1,19 en lugar del 0,99 de la tabla. (Ver sin embargo en el n. 10 una aplicación de esta variabilidad).

7. Consideremos, para hacer un ejemplo concreto, el caso de poner

$$\varepsilon=10^{-2}, \qquad n=5.$$

Elegiremos

$$x_0=4,$$

un poco superior a $\overline{\overline{x}}=3{,}22$; resulta entonces (con los símbolos del n. 5)

$$k_0=0{,}99\,.\,4^{0{,}8}=3{,}03, \qquad x'_0=4+3=7$$

$$y_0=y(4)=3{,}96014\ (^1)$$

$$y'_0=y(7)=6{,}41176$$

$$h_0=6{,}41-3{,}96=2{,}45, \qquad y_0-y''=3{,}96-1{,}62=2{,}34;$$

la elección de $x_0=4$ se demuestra por tantó apropiada por resultar muy próximos entre sí los números h_0 y y_0-y''. Será

$$h_{-1}=2{,}34.$$

Para el cálculo de los sucesivos números x_r, x'_r pondremos

(1) Para el cálculo de estos números ver n. 11.

en (21) $c_{5r} = 1$ como valor aproximado de 0,99, lo que está justificado, además que por la aproximación efectiva, por el hecho de que c_{nr} es creciente con x_r [1]; tenemos por tanto

$$k_{5r} = x_r^{0,8}$$

y luego la sucesión

$$\begin{array}{llll} x_0 = 4 & x_1 = 11,79 & x_2 = 29,53 & x_3 = 65,37 \\ x'_0 = 7, & x'_1 = 18,99 & x'_2 = 44,53 & x'_3 = 93,70 \\ & x_4 = 131,49 & x_5 = 245,05 & \\ & x'_4 = 181,05 & x'_5 = 326,59 & \end{array} \tag{26}$$

Si, llegando a x_5 estimaramos conveniente aprovechar el valor 1,19 del coeficiente c_5 según la observación final del n. 6, para ampliar el intervalo de confianza de la interpolación, obtendríamos

$$x'_5 = 342,08.$$

Para estos valores de x convendrá calcular, conforme a las ideas del n. 5, los valores correspondientes de y, problema éste del cual nos ocuparemos más adelante (n. 11).

8. Para los valores de (x, y) inferiores a (x'', y'') dejan de poderse aplicar las consideraciones precedentes por el hecho de que la función que define el resto R_n deja de ser monótona y también alcanza valores absolutos bastante elevados. Para los casos de $n = 4$ y $n = 5$ no se pone verdadero problema, porque esos valores están dentro del dominio de convergencia de la serie inversa (9).

Para cualquier caso basta observar que, tratándose de intervalos finitos, y también de anchura muy reducida, y siendo las derivadas acotadas, se podrá calcular, en función de una cota superior de las mismas, una anchura mínima de intervalos de

[1] Al final del n. 6 se vió que pasando x del valor 3,22 a 200 el valor de c_{5r} pasa de 0,99 a 1,19 es decir crece en la razón media de 1 ‰; pero sabemos también que el crecimiento es relativamente más rápido para los valores pequeños.

validez de la fórmula (10) (sin resto) y dividir dichos intervalos en partes con esa anchura.

Así, notando que, para cualquier $x \geqq 1$

$$\left|\frac{d^4x}{dy^4}\right| \leqq \frac{1}{4},$$

se ve que será siempre $R_4 < 10^{-2}$ para $h \leqq \sqrt[4]{0{,}96}$; se sigue que para $y \leqq 0{,}99$ se tendrá el valor de $x(y)$ con error $< 0{,}01$ por la fórmula (ver (9))

$$x(y) = 1 + \frac{y^2}{4},$$

y que, siempre con error $< 10^{-2}$ podrá calcularse el valor de $x(y)$ para $y \leqq 2$ por medio de la fórmula

$$x(0{,}99 + h) = 1{,}235 + 0{,}459\,h + 0{,}2D2\,h^2 - 0{,}0251\,h^3.$$

Análogamente, considerando los máximos módulos de la derivada sexta, se obtiene que para $y \leqq 0{,}97$ se calcula con error $< 10^{-3}$ con la fórmula

$$x(y) = 1 + \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{96}$$

y que el valor de x para cualquier valor de $y \leqq 2{,}05$ está dado, con dicha aproximación por

$$x(0{,}99 + h) = 1{,}228 + 0{,}4532\,h + 0{,}2041\,h^2 - 0{,}0250\,h^3 - 0{,}0010\,h^4 + 0{,}0019\,h^5.$$

9. Resumiendo estos resultados aplicándolos, para fijar las ideas, al caso tratado ya con más detalle en el n. 7, podemos concluir que, por medio de 7 fórmulas del tipo

$$x(y_r + h) = x_r + a_{1r}h + a_{2r}h^2 + a_{3r}h^3 + a_{4r}h^4$$

$$(r = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\ y_{-1} = 0{,}99),$$

estamos en condición de calcular el valor de $x(y)$ con error $< 10^{-2}$ para todos los valores de y entre 0 y 200.

Los valores de los coeficientes están dados por la siguiente

Tabla A [1]

	a_{1r}	a_{2r}	a_{3r}	a_{4r}	a_{5r}	a_{6r}
$x_{-1} = 1{,}235$	0,45942	0,20243	$-0{,}25102.10^{-1}$	$-0{,}86109.10^{-3}$	$0{,}17740.10^{-2}$	$-0{,}4963.10^{-3}$
$x_0 = 4$	1,17741	$0{,}62500.10^{-1}$	$-0{,}61323.10^{-2}$	$0{,}73977.10^{-3}$	$-0{,}92325.10^{-4}$	$0{,}1084.10^{-4}$
$x_1 = 11{,}79$	1,57075	$0{,}21204.10^{-1}$	$-0{,}94167.10^{-3}$	$0{,}56372.10^{-4}$	$-0{,}38287.10^{-5}$	$0{,}2774.10^{-6}$
$x_2 = 29{,}53$	1,83995	$0{,}8466.10^{-2}$	$-0{,}17583.10^{-3}$	$0{,}50733.10^{-5}$	$-0{,}16950.10^{-6}$	$0{,}6153.10^{-8}$
$x_3 = 65{,}37$	2,04452	$0{,}38244.10^{-2}$	$-0{,}39871.10^{-4}$	$0{,}58621.10^{-6}$	$-0{,}10068.10^{-7}$	$0{,}1890.10^{-9}$
$x_4 = 131{,}49$	2,20883	$0{,}19013.10^{-2}$	$-0{,}10646.10^{-4}$	$0{,}84838.10^{-7}$	$-0{,}79351.10^{-9}$	$0{,}8142.10^{-11}$
$x_5 = 245$	2,34552	$0{,}10202.10^{-2}$	$-0{,}3255.10^{-5}$	$0{,}1487.10^{-7}$	$-0{,}79976.10^{-10}$	$0{,}4728.10^{-12}$

10. A propósito de los números que preceden es importante, en el orden práctico, la observación siguiente: hemos tratado en forma general el problema del cálculo de $x(y)$ con dada aproximación, suponiendo esta asignada a priori y suponiendo que de ella tuviera que depender la elección del valor de n y la determinación de una tabla de valores fundamentales como la (26). Débese notar sin embargo que tal tabla no está determinada por el problema en modo necesario, pudiéndose siempre sustituir por otra donde los intervalos, convenientemente elegidos, sean más cortos. Así, si se propusiera calcular únicamente con la aproximación de 0,1 podría ser conveniente utilizar fórmulas con 4 términos solamente y la tabla (25) con la fórmula (21) indica entonces poner

$$k_{4r} = 1{,}24\, x_r^{0{,}75}. \qquad (27)$$

lo que llevaría a empezar nuevamente todos los cálculos preparatorios.

Podemos sin embargo utilizar los mismos valores fundamentales proporcionados por la tabla (26) considerando que para $x \leqq 73{,}17$

$$1{,}24\, x^{0{,}75} < x^{0{,}80};$$

(1) Estos coeficientes fueron calculados con muchas más cifras de lo necesario para la aproximación indicada para tener en cuenta las observaciones del párrafo siguiente.

y que, por otra parte, calculando nuevamente H_4 para $x=73$ se encuentra que para $x>73$ puede ponerse [1]

$$k_{4r}=2{,}6\, x_r^{0{,}75},$$

y se tiene entonces

$$k_{4r}<x_r^{0{,}80}$$

para valores de x_r hasta el orden de 10^8.

Una observación análoga puede hacerse en el caso de querer una aproximación mayor, por ej. en 10^{-3}. En este caso los coeficientes c_{nr} dados por la tabla (25) resultan sensiblemente <1, pero, creciendo n, crece el exponente de x_r en la (21), lo que tiene por consecuencia que para $n=6$, o 7 podrá todavía aceptarse la limitación $k_{nr}\leqq x_r^{0{,}80}$ salvo eventualmente para pequeños valores de x_r. Así, tomando $n=7$, tendremos

$$k_{7r}=0{,}88\, x_r^{0{,}85}<x_r^{0{,}80}$$

por

$$x_r\geqq 9{,}4.$$

Comparando con la tabla (26) o A se ve que puede la misma todavía utilizarse con sólo adoptar por x_0 el valor

$$x_0=5$$

y calcular para los valores de $y\leqq 5{,}5$ por medio de fórmulas como las del § 8.

Con estas consideraciones una tabla del tipo A adquiere carácter universal para la aplicación a diferentes órdenes de aproximación, desde luego a costa de una subdivisión, a veces, en intervalos menos anchos (y por tanto más numerosos) de lo estrictamente necesario.

11. Vengamos ahora al cálculo de los valores $y_r=y(x_r)$, $y'_r=y(x'_r)$. Como notamos varias veces, este cálculo puede hacerse por la fórmula (2), siendo el segundo miembro convergente para cualquier x; pero el número de términos necesarios para obtener una dada aproximación se hace extraordinariamente

---

[1] Se observó en el n. 6 que en general el coeficiente c_{nr} varía de poco cuando x_r crece; evidentemente, por las razones dichas, tal variabilidad resulta mayor cuando n se elije menor.

grande al crecer x; para evaluar el resto que corresponde a cortar la serie al término de grado n, basta notar que de (2), es decir

$$y(x)=2\sqrt{\log x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log^n x}{(2n+1)n!},$$

se sigue

$$2\sqrt{\log x}\sum_{n=0}^{p}\frac{\log^n x}{(2n+1)n!}<y(x)$$

$$<2\sqrt{\log x}\left\{\sum_{n=0}^{p}\frac{\log^n x}{(2n+1)n!}+\frac{\log^{p+1} x}{(2p+3)(p+1)!}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{\log x}{p+2}\right)^i\right\}.$$

Para $p+2>\log x$ la diferencia de los miembros extremos

$$\frac{2\log^{p+\frac{3}{2}} x}{(2p+3)(p+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{\log x}{p+2}}$$

da una acotación del error (por defecto) que resulta al tomar como valor de $y(x)$ el primer miembro.

Mucho más rápidamente se aproxima el valor de nuestra integral con las consideraciones siguientes:

Cualesquiera sean $a>b>1$ se tiene por una integración por partes

$$\int_b^a\frac{dx}{\sqrt{\log x}}=\left[\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right]_b^a+\frac{1}{2}\int_b^a\frac{dx}{\log^{\frac{3}{2}} x}$$

y, repitiendo p veces análoga operación,

$$\int_b^a\frac{dx}{\sqrt{\log x}}=\left[\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right]_b^a+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right]_b^a+\dots$$

$$+\frac{1.3\dots(2r-1)}{2^r}\left[\frac{x}{\log^{\frac{2r+1}{2}} x}\right]_b^a+\dots \qquad (28)$$

$$+\frac{1.3\dots(2p-1)}{2^p}\int_b^a\frac{dx}{\log^{\frac{2p+1}{2}} x}.$$

Se nota en esta fórmula que, si la diferencia $a-b$ es un poco grande, los primeros términos del segundo miembro son grandes de manera que, opuestamente a lo que ocurre con los primeros términos de las fórmulas (2), ellos proporcionan inmediatamente una parte importante del valor de la integral del primer miembro. Pero se nota también que, mientras el resto representado por la última integral es siempre positivo, los términos integrados, a partir de un cierto r, resultan negativos; precisamente la condición necesaria y suficiente para que

$$\left[\frac{x}{\log^{\frac{2r-1}{2}} x}\right]_b^a \geqq 0$$

es que, poniendo

$$\log a = \alpha, \qquad \log b = \beta,$$

sea

$$\frac{2r-1}{2} \leqq \frac{\alpha-\beta}{\log\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{29}$$

Se sigue que, para aplicar útilmente la fórmula (28), deberá suponerse

$$p \leqq \frac{\alpha-\beta}{\log\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{1}{2}$$

porque, para valores mayores, la parte integrada diverge del valor del primer miembro, creciendo por consiguiente el resto.

Se puede analizar más precisamente el fenómeno observando que, para r fijo, la función

$$x : \log^{\frac{2r-1}{2}} x$$

es mínima para

$$x = e^{\frac{2r-1}{2}};$$

se sigue que para sacar de la fórmula (28) el máximo provecho es conveniente que, no solamente los términos integrados sean positivos, sino que, en cuanto sea posible, los números $\exp\frac{2r-1}{2}$ no caigan dentro del intervalo $a-b$, porque sólo así los términos integrados darán su máxima contribución en el valor buscado.

Sobre la base de estas observaciones obtenemos la regla siguiente para el cálculo numérico de la función $y(x)$:

Para $x \leqq \sqrt{e}$ se aplica con toda comodidad y conveniencia la fórmula (2); en particular resulta

$$y(\sqrt{e}) = \sqrt{2}\Big(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{40} + \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} + \frac{1}{42240} + \frac{1}{599040}$$

$$+ \frac{1}{9676800} + \ldots\Big) = 1{,}689924 = Y_0$$

Para valores mayores de x, supongamos calculados una vez para siempre los números

$$Y_r = \int_{e^{\frac{2r-1}{2}}}^{e^{\frac{2r+1}{2}}} \frac{dx}{\log^{\frac{2r+1}{2}} x}$$

(sobre este cálculo volveremos más adelante); ponemos además

$$\log x = z \qquad t = \text{parte entera de } \left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Se tiene

$$y(x) = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = Y_0 + \frac{1}{2} Y_1 + \frac{3}{4} Y_2 + \ldots + \frac{1.3 \ldots (2t-1)}{2^t} Y_t +$$

$$+ \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right]_{\sqrt{e}}^{x} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right]_{e^{\frac{3}{2}}}^{x} + \frac{2}{3}\left[\frac{x}{\log^{\frac{5}{2}} x}\right]_{e^{\frac{5}{2}}}^{x} \qquad (30)$$

$$+\dots+\frac{1.3\dots(2t-3)}{2^{t-1}}\left[\frac{x}{\log^{\frac{2t-1}{2}}x}\right]_{e^{\frac{2t-1}{2}}}^{x}+R$$

$$R=\frac{1.3\dots(2t-1)}{2^t}\int_{e^{\frac{2t+1}{2}}}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\log^{\frac{2t+1}{2}}x}\,.$$

Para el cálculo de R, lo mismo como para el cálculo de los números Y_r que coinciden con los valores de la integral que figura en R cuando por x se pusiera su límite superior $\exp\dfrac{2t+3}{2}$, debe excluirse, salvo para los valores pequeños de $t\,(t\leqq 2)$, un desarrollo en serie análogo a (2) que daría lugar a las mismas dificultades señaladas anteriormente; pero podemos notar que, por la propiedad de mínimo que sirvió para determinar el extremo inferior de integración, se puede prever que, dentro de los límites de la integración, la función integrada se mantiene, además que pequeña, sensiblemente constante y por lo tanto se obtendrá rápidamente una buena aproximación con la simple aplicación de fórmulas de cuadratura como las de trapecios o de Simpson.

En efecto, poniendo todavía $z=\log x$, resulta

$$\int_{e^{\frac{2t+1}{2}}}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\log^{\frac{2t+1}{2}}x}=\int_{\frac{2t+1}{2}}^{z}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z^{\frac{2t+1}{2}}};$$

las derivadas segunda y cuarta de la función integranda, en la segunda expresión, son respectivamente

$$\frac{\mathrm{e}^z}{z^{\frac{2t+1}{2}}}\left(1-\frac{2t+1}{z}+\frac{(2t+1)(2t+3)}{4z^2}\right)$$

y

$$\frac{\mathrm{e}^z}{z^{\frac{2t+1}{2}}}\left(1-\frac{2(2t+1)}{z}+\frac{3}{2}\,\frac{(2t+1)(2t+3)}{z^2}-\frac{(2t+1)(2t+3)(2t+5)}{2z^3}\right.$$
$$\left.+\frac{(2t+1)(2t+3)(2t+5)(2t+7)}{16z^4}\right)$$

y se calcula fácilmente que ambas alcanzan su máximo valor para

$$\frac{2t+1}{2} \leqq z \leqq \frac{2t+3}{2}$$

en el extremo inferior del intervalo, siendo estos máximos respectivamente

$$\left(\frac{2t+1}{2e}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{2}{2t+1}, \quad \left(\frac{2e}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{12(2t+5)}{(2t+1)^3};$$

la anchura del intervalo de integración es

$$z - \frac{2t+1}{2} = I \leqq 1$$

($=1$ sólo en el caso extremo de los números Y_r). Por una regla conocida [1] se sigue que el error resultante en el cálculo de R (o del término en Y_t de (30)) por dividir el intervalo de integración en n partes iguales, será, en el caso de aplicar la regla de los trapecios:

$$\frac{(2t-1)!}{2^{2t}.3(t-1)!(2t+1)}\left(\frac{2e}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{I^3}{n^2} \tag{31}$$

y en el caso de aplicar la regla de Simpson:

$$\frac{(2t-1)!(2t+5)}{2^{2t+3}.75(t-1)!(2t+1)^3}\left(\frac{2e}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{I^5}{n^4}. \tag{32}$$

Si cada una de estas expresiones se divide por la misma donde t se haya sustituído por $t+1$ se obtienen respectivamente las razones

$$\frac{1}{e}\left(\frac{2t+3}{2t+1}\right)^{\frac{2t+5}{2}}$$

[1] Ver p. ej. Levi - *Analisi algebrica e infinitésimale* p. 344 y 348 - de La Vallée - Poussin - *Cours d'analyse infinitésimale* 3me. édición. T. 1, p. 398.

y

$$\frac{1}{e}\left(\frac{2t+3}{2t+1}\right)^{\frac{2t+7}{2}}\frac{(2t+3)(2t+5)}{(2t+1)(2t+7)};$$

en la segunda hemos aislado el último factor, siempre >1, pero muy próximo a 1 apenas t crece; por ej. para $t=3$ vale 1,1; despreciando este factor y poniendo $\frac{2t+1}{2}=\eta$ esas dos razones se escriben

$$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^{\eta+2}, \quad \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^{\eta+3}$$

es decir

$$\exp\left[-1+(\eta+2)\log\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\right]$$

$$=\exp\left[-1+(\eta+2)\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{2\eta^2}+\frac{1}{3\eta^3}-\ldots\right)\right]$$

$$>\exp\left[\frac{2\eta^2+3\eta-2}{2\eta^2}-1\right]=\exp\frac{3\eta-2}{2\eta^2}$$

y

$$\exp\left[-1+(\eta+3)\log\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\right]>\exp\frac{5\eta-2}{2\eta^2}.$$

Esta observación nos conduce a las conclusiones siguientes: Sea al aplicar la fórmula de los trapecios, sea para la de Simpson, la exactitud crece al crecer t; sin embargo la razón del crecimiento disminuye al crecer t, tendiendo a 1 cuando $t\rightarrow\infty$. Pero esta razón para el caso de la fórmula de Simpson es todavía sensible ($>\sqrt{e}$) para $t=4$.

Calculando (31) y (32) para $I=1$, $n=1$, $t\leqq 4$, se obtiene para los límites superiores de los errores:

$t=1$	fórm. de trapecios	0,07	fórm. de Simpson	0,00026
$t=2$		0,05		0,000063
$t=3$		0,02		0,000021
$t=4$		0,013		0,00001;

en general la razón entre el error resultante de la aplicación de la fórmula de trapecios y el que corresponde a la fórmula de Simpson es del orden de $1 : 200\,(2t-3)$.

Si por tanto suponemos querer calcular los números de la forma $c_r . Y_r$ que comparecen en la fórmula (30) con error $< 10^{-5}$, nos convendrá aplicar la fórmula de Simpson con $n=2$ hasta $r=4$ y con $n=1$ para valores mayores de r.

He aquí, por ej., los cálculos detallados de Y_1 y de Y_5.

$$Y_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{e^z\,dz}{z^{1/2}} \; ;$$

debe calcularse la función integrada para

$$z = \tfrac{1}{2} + k.\,0{,}25 \qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$2 \log_{10} \frac{e^z}{z^{3/2}} = \log_{10} e + k \frac{\log_{10} e}{2} - 3 \log_{10} (0{,}5 + k.\,0{,}25)$$

$\log_{10}\ e = 0{,}4342945$

$3 \log_{10} 0{,}5 = \overline{1}{,}0969100$

$\qquad\qquad \overline{1{,}3373845}$

$$\log_{10} \frac{e^{1/2}}{0{,}5^{3/2}} = 0{,}6686922 \qquad \frac{e^{0,5}}{0{,}5^{3/2}} = 4{,}663288$$

Análogamente

$$\frac{e^{0,75}}{0{,}75^{3/2}} = 3{,}259334 \; , \; \frac{e}{1} = 2{,}718282 \; , \; \frac{e^{1,25}}{1{,}25^{3/2}} = 2{,}497486 \; , \; \frac{e^{1,50}}{1{,}50^{3/2}} = 2{,}439522$$

$$Y_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{e^{0,5}}{0{,}5^{3/2}} + 4\,\frac{e^{0,75}}{0{,}75^{3/2}} + 2\,\frac{e}{1} + 4\,\frac{e^{1,25}}{1{,}25^{3/2}} + \frac{e^{1,50}}{1{,}50^{3/2}}\right) = 2{,}963887$$

$$Y_5 = \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{e^z\,dz}{z^{11/2}} \quad ; \quad z = \frac{9}{2} + k.\,0{,}5 \; (k = 0,1,2)$$

$$2 \log \frac{e^z}{z^{11/2}} = 9 \log e + k \log e - 11 \log\,(4{,}5 + k.\,0{,}5)$$

$$\frac{e^{4,5}}{2{,}5^{11/2}} = 0{,}022956 \quad , \quad \frac{e^5}{3^{11/2}} = 0{,}021239 \quad , \quad \frac{e^{5,5}}{3{,}5^{11/2}} = 0{,}020731$$

$$Y_5 = \frac{1}{6}\,(0{,}022956 + 4.0{,}021239 + 0{,}020731) = 0{,}0214405$$

Se obtienen de esta manera los valores

$Y_1 = 2{,}963887 \qquad Y_2 = 1{,}345976 \qquad Y_3 = 0{,}437183$

$Y_4 = 0{,}107982 \qquad Y_5 = 0{,}214474 \,.\, 10^{-1} \qquad Y_6 = 0{,}355820 \,.\, 10^{-2}$

$Y_7 = 0{,}506718 \,.\, 10^{-3}, \qquad \ldots;$

se ve que las Y_r decrecen bastante rápidamente al crecer r, lo que debía preverse observando que

$$Y_r - Y_{r+1} = \int_{\frac{2r-1}{2}}^{\frac{2r+1}{2}} \left(\frac{e^z}{z^{\frac{2r+1}{2}}} - \frac{e^{z+1}}{(z+1)^{\frac{2r+3}{2}}} \right) dz$$

$$= \int_{\frac{2r-1}{2}}^{\frac{2r+1}{2}} \frac{e^z}{z^{\frac{2r+1}{2}}} \left[1 - \frac{e}{z+1} \left(1 - \frac{1}{z+1} \right)^{\frac{2r+1}{2}} \right] dz > 0;$$

sin embargo debe tenerse en cuenta que, después de los primeros, los factores por los que se encuentran multiplicados en (30) van creciendo de manera tal de eliminar la ventaja de la aparente despreciabilidad.

Los términos iniciales de la fórmula (30) resultan en efecto

$$Y_0 = 1{,}68992 \qquad Y_1^* = \frac{1}{2} Y_1 = 1{,}48194 \qquad Y_2^* = \frac{3}{4} Y_2 = 1{,}00948$$

$$Y_3^* = \frac{3.5}{8} Y_3 = 0{,}81972, \qquad Y_4^* = \frac{3.5.7}{16} Y_4 = 0{,}70863,$$

$$Y_5^* = \frac{3.5.7.9}{32} Y_5 = 0{,}63337, \qquad Y_6^* = \frac{3.5.7.9.11}{64} Y_6 = 0{,}57793$$

$$Y_7^* = \frac{3.5.7.9.11.13}{128} Y_7 = 0{,}53496, \ldots$$

La fórmula (30) permite ahora calcular los números $y(x_r)$, $y(x'_r)$ que habían quedado en suspenso en el n. 7 y esto con relativa facilidad y con toda la aproximación requerida dentro de los cinco decimales que hemos adoptado para nuestros

Y^*_r. Se obtiene:

$$y(4) = Y_0 + \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right]_{\sqrt{e}}^{4} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{4} \frac{dx}{\log^{3/2} x}$$

$$= Y_0 + \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right]_{\sqrt{e}}^{4} + Y^*_1 - \frac{1}{2}\int_{4}^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{dx}{\log^{3/2} x} \qquad (^1)$$

$= 3{,}96014$

$$y(7) = Y_0 + Y^*_1 + \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right]_{\sqrt{e}}^{7} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\log^{3/2} x}\right]_{e^{3/2}}^{7} + \frac{3}{4}\int_{e^{3/2}}^{7} \frac{dx}{\log^{5/2} x}$$

$= 6{,}41176$

....

Como ejemplo he todavía aquí el cálculo de $y\,(245)$:

$$\log 245 = 5{,}501259, \qquad t = 5$$

$$y(245) = Y_0 + Y^*_1 + Y^*_2 + Y^*_3 + Y^*_5 +$$

$$+ \left[\frac{245}{\sqrt{5{,}50126}} - \sqrt{2e}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{245}{5{,}50126^{3/2}} - \left(\frac{2e}{3}\right)^{3/2}\right]$$

$$+ \frac{3}{4}\left[\frac{245}{5{,}501269^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{2e}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\right] + \frac{15}{8}\left[\frac{245}{5{,}501269^{\frac{7}{2}}} - \left(\frac{2e}{7}\right)^{\frac{7}{2}}\right]$$

$$+ \frac{105}{16}\left[\frac{245}{5{,}501269^{\frac{9}{2}}} - \left(\frac{2e}{9}\right)^{\frac{9}{2}}\right] +$$

$$+ \frac{945}{32}\;\frac{245 - e^{\frac{11}{2}}}{2}\left[\frac{1}{5{,}501269^{\frac{11}{2}}} + \left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{11}{2}}\right]$$

---

(1) Nótese en este ejemplo el uso que puede hacerse de los números $Y_r{}^*$ para reducir el intervalo de integración de la integral en R de la fórmula (30); precisamente, con los símbolos de esa fórmula convendrá calcular el término R_n por diferencia siempre que $\log x = z > t + 1$.

siendo en este caso el error debido a la integración aproximada del resto del orden de 10^{-6}. Efectuando los cálculos resulta

$$y(245) = 118{,}84149$$

donde las dos últimas cifras son inseguras.

12. Si en la parte integrada de la fórmula (30) se desechan todos los términos que aparecen no dependientes explícitamente de x, es decir los términos de la primera línea y los que dependen de los extremos inferiores de los corchetes, se obtiene la expresión

$$S_p(x) = \frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1 + \sum_{r=1}^{p} \frac{1.3\ldots(2r-1)}{2^r \log^r x}\right) \tag{33}$$

donde a p puede darse cualquier valor entero $\geqq 0$ y se entiende que la Σ representa 0 para $p = 0$. Es interesante notar que, para cualquier valor de p esta suma es valor asintótico de $y(x)$ en el sentido que *para cualquier valor fijado por p existe un número X_p tal que para $x > X_p$*

$$y(x) > S_p(x) \tag{34}$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{S_p(x)} = 1 \tag{35}$$

Resulta (34) observando que si en (28) se sustituye x en el lugar de a y se pone por b un número fijo cualquiera > 1, se infiere, para $x > b$,

$$y(x) - \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\log x}} > S_p(x) - S_p(b);$$

pero, cambiando p en $p+1$ se tiene aún

$$y(x) - S_p(x) - \left(\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\log x}} - S_p(b)\right) > \frac{1.3\ldots(2p+1)}{2^{p+1}}\left[\frac{x}{\log^{\frac{2p+3}{2}} x}\right]_b^x \tag{36}$$

donde el segundo miembro, creciendo x, puede hacerse arbitrariamente grande y por tanto mayor del valor absoluto del término constante en paréntesis en el primer miembro. Luego

$$y(x) - S_p(x) > 0. \tag{37}$$

La (35) resulta por otra parte por la simple aplicación de la regla de L'Hospital siendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\log x}}, \quad \frac{dS_p(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\log x}}(1+\Sigma), \tag{38}$$

$$\Sigma > 0, \quad \lim_{x \to \infty} \Sigma = 0.$$

Más precisamente la (36) expresa que si la desigualdad (37) se realiza para $x = b$, se realizará también para cualquier valor de $x > b$, siendo la diferencia $y(x) - S_p(x)$ creciente con x. Pero, por (38),

$$\frac{d(y-S)}{dy} < 0,$$

es decir que la razón incremental de $y - S$ es decreciente. Los resultados anteriores nos han dado que para $p = 0$ la diferencia

$$y(4) - \frac{4}{\sqrt{\log 4}} = 3{,}96 - 3{,}40 = 0{,}56$$

ya es positiva; luego será para todos los $x > 4$

$$y(x) > \frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

Pero tenemos también

$$y(245) - \frac{245}{\sqrt{\log 245}} = 118{,}84 - 104{,}46 = 14{,}38;$$

se sigue que para cualquier $x > 4$ la razón $x : \sqrt{\log x}$ es una evaluación por defecto de $y(x)$ que, aplicada a una sucesión como la (29), es suficiente para que, dado un y, permita determinar los valores de x_r, x'_r para los cuales las correspondientes y_r, y'_r le están más próximas, antes que los propios valores de éstas estén determinados con exactitud.

Como aplicación de esta observación, poniendo

$$\frac{x}{\sqrt{\log x}} = y^*(x),$$

terminamos este estudio con la tabla de los $y^*(x)$ calculados para los valores de x de la tabla (26) aproximados en la unidad:

$x = 4$	7	12	19	30	44	65	94
$y^*(x) = 3{,}40$	5,02	7,61	11,07	16,27	22,62	31,81	44.10

$x = 130$	180	245	342
$y^*(x) = 52{,}92$	79,02	104,46	141,51.

B. Levi

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.