

CURSO ELEMENTAL
DE
ESTÁTICA GRÁFICA

97

POR **LUIS B. LAPORTE**

Ingeniero Civil, Laureado por la Facultad
de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
de la Universidad Nacional de Buenos
Aires, Director de la Escuela Industrial
de la Nación - Rosario - - - - -
Profesor de Estática Gráfica y de Resis-
tencia de Materiales en la misma. - - -
Profesor de Construcciones de Mampos-
tería de la Facultad de Ciencias Mate-
máticas. Físico-Químicas y Naturales,
aplicadas a la Industria, de Rosario - -

CON 195 FIGURAS

SEGUNDA EDICIÓN

1924

PAPELERÍA Y TALLERES GRÁFICOS "LA VELOCIDAD"
980 - GENERAL MITRE - 982
ROSARIO DE SANTA FÉ

ES PROPIEDAD del AUTOR
Derechos reservados. Efectuado
el depósito legal instituido por
las leyes 7092 y 9510 - - -

2174

PRÓLOGO

DE LA PRIMERA EDICION

Durante varios años, para facilitar la tarea de mis alumnos de la Escuela Industrial de Rosario, repartí entre ellos apuntes de Estática Gráfica, apuntes tirados con autocopista americano y que resultaban contener a veces algunos errores originados por la falta de corrección previa de las reproducciones que anualmente se hacían.

Esos apuntes tenían la ventaja de su bajo precio, pero el ensayo efectuado el año pasado por el Profesor de la misma Escuela, Ing. Arturo Sallovitz, al publicar, impreso por la misma Casa Pomponio, un volumen de Elementos de Geometría Descriptiva, me demostró que podía hacer imprimir mis apuntes de Estática por un precio de costo sensiblemente igual al de los apuntes autocopados, por lo que, dada la mucho mejor impresión que se obtendría, y creyendo llenar un vacío existente entre nuestros libros de enseñanza, no vacilé en darlos a la imprenta.

Estos Elementos comprenden algunas nociones que no enseño a mis alumnos (como la composición de fuerzas en el espacio) pero que he incluído por exigirlo el conjunto de la obra. El profesor elegirá las que el alumno deba conocer para poder resolver luego los problemas de resistencia que se le presentarán en su campo de acción.

No comprenden estos Elementos sino lo que es indispensable que todo alumno de Escuela Industrial sepa sobre la materia. Los que deseen completar sus conocimientos de Estática Gráfica deberán hacerlo en publicaciones de cursos universitarios.

La poca extensión impuesta por el precio a que debe resultar la obra para que su adquisición no sea onerosa

a los alumnos, me impide completar cada capítulo con una serie de problemas prácticos y su resolución razonada, resolución sobre la que todo profesor debe insistir en clase. Sin embargo, en el último capítulo, expongo una serie bastante completa de ejercicios y problemas frecuentes en la práctica.

Razones especiales me obligaron a cambiar la notación científica que adopto en mis clases para la expresión de momentos estáticos y de esfuerzos de corte, notación que hubiera deseado conservar en estos apuntes. Creo, sin embargo, que no ha quedado con ello perjudicada la claridad del texto.

Rosario, Marzo de 1918.

EL AUTOR.

DE LA SEGUNDA EDICION

Habiéndose agotado la primera edición de mi Curso Elemental de Estática Gráfica y subsistiendo las causas relatadas en el prólogo de la primera edición, he creído conveniente reimprimir aquel Curso, con el doble objeto de facilitar el estudio de la materia por los alumnos y de dar cumplimiento a disposiciones superiores, dictadas en 1920, que obligan a los Profesores a presentar a la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-químicas y Naturales, aplicadas a la Industria, de Rosario, — a la que hoy está anexada la Escuela Industrial de Rosario, — sus respectivos cursos para ser dados a la publicidad por aquélla, salvo que los mismos señores Profesores los hubieren publicado, como en el presente caso.

Rosario, Marzo de 1924.

EL AUTOR.

CURSO ELEMENTAL DE ESTÁTICA GRÁFICA

ESTATICA GRAFICA

CAPITULO I.

INTRODUCCION

Reposo y movimiento. — Principio de inercia. — Fuerza: definición y clasificación. — Obstáculos opuestos a la acción de una fuerza. — Acción y reacción; igualdad de las mismas. — Caracteres de las fuerzas aisladas. — Unidades de intensidad. — Representación gráfica de las fuerzas. — Segmentos representativos. — Sistemas de fuerzas. — Polígono de fuerzas. — Fuerzas equivalentes: resultante y componentes. — Fuerzas en equilibrio; fuerzas equilibrantes. — Momento estático de una fuerza.

Reposo y Movimiento — Se dice que un cuerpo está en reposo con relación a otros cuando su posición con respecto a ellos no varía, y se dice que un cuerpo se mueve, está en movimiento o goza de tal o cual movimiento con relación a otros, cuando su posición, referida a éstos, varía.

La trayectoria (1) y la velocidad (2) de un cuerpo o de un punto material, caracterizan su movimiento o estado dinámico. El estado de reposo no es más que un caso especial del de movimiento: aquel en que la velocidad es cero.

Principio de la Inercia — La física nos enseña que la materia no puede por sí misma cambiar nada a su estado dinámico, es decir a su estado de movimiento.

La materia es inerte, y siendo ella la substancia que integra los cuerpos, también éstos serán inertes, no pudiendo por sí solos alterar su estado dinámico ni su estado físico en general.

Fuerza — Es indispensable la intervención de una causa extraña para que pueda ser alterado el estado dinámico

(1) Trayectoria de un móvil es la línea engendrada por el móvil durante su movimiento o sea la línea que se obtiene reuniendo con un trazo continuo las sucesivas posiciones del móvil.

(2) Velocidad de un móvil en un instante t es el límite hacia el cual tiende la velocidad media en un intervalo de tiempo dt contado a partir de ese instante, cuando ese intervalo tiende hacia cero.

del cuerpo, causa que se ha denominado fuerza. Definiremos por lo tanto la fuerza diciendo que es toda causa capaz de alterar el estado dinámico de un cuerpo.

Así, por ejemplo, la gravedad, que produce la caída de los cuerpos más pesados que el aire y la ascensión de los más livianos que el aire, es una fuerza.

Fuerzas motoras y Fuerzas resistentes. — Las fuerzas, al alterar el estado dinámico de un cuerpo, pueden hacerlo aumentando la velocidad del movimiento o disminuyéndola. En el primer caso provocan el movimiento y son llamadas fuerzas motoras; en el segundo caso se llaman fuerzas resistentes y se oponen al movimiento.

La electricidad, en un tranvía eléctrico, es una fuerza motora, puesto que al pasar por los motores provoca el movimiento del coche; los frotamientos entre ruedas y rieles, entre ejes y cojinetes y entre ruedas y zapatas del freno, son fuerzas resistentes, puesto que se oponen al movimiento del vehículo.

Algunas fuerzas pueden ser motoras y resistentes según las circunstancias. La misma electricidad puede servir para detener el vehículo eléctrico. La gravedad es motora para los cuerpos que caen, pero es resistente para los cuerpos lanzados hacia arriba.

Fuerzas permanentes, accidentales, instantáneas — Las fuerzas se clasifican también según la magnitud del intervalo de tiempo en que actúan y según su repartición en el espacio.

Según el intervalo de tiempo en que actúan, se dividen en permanentes y accidentales. Son permanentes las fuerzas que actúan constantemente, como, por ejemplo, el peso de las construcciones. Son accidentales las fuerzas que actúan solamente durante un intervalo de tiempo más o menos largo, como, por ej.: la acción del viento sobre un techo, el peso de un vehículo que rueda sobre un puente, el de una muchedumbre compacta sobre el piso de un salón.

Cuando el intervalo de tiempo durante el cual obra la fuerza es muy pequeño, se dice que ésta es instantánea. Así es la acción de un explosivo en un cañón.

Fuerzas aisladas, Fuerzas continuas — Según su repartición, las fuerzas se dividen en aisladas, o concentradas, y en fuerzas continuas. Fuerzas aisladas son las que actúan en un punto debiendo entenderse aquí por punto, no el matemático, sino una superficie de pequeñas dimensiones. Así, se consideran como fuerzas aisladas la carga que una columna de edificio trasmite a la viga que la sostiene y la que una rueda de vehículo trasmite al puente sobre el que pasa,

aunque en ambos casos la superficie de contacto es bien apreciable. En el caso de la columna se supone la carga concentrada en el eje longitudinal de la misma (fig. 1), y, en el de la rueda, en la vertical que pasa por el centro de la misma. (fig. 2).

Cuando las fuerzas actúan sobre todos los puntos de una superficie o sobre los de una línea relativamente grande se dice que son continuas. Así, por ej., el peso del muro MN que descansa sobre la viga AB, (fig. 3), constituye una carga continua para ésta, pues actúa en toda su longitud. La acción del viento sobre un techo y la presión de los fluidos (agua, vapores, aire) sobre las paredes de los recipientes que los contienen o sobre los cuerpos en ellos sumergidos son también ejemplos de fuerzas continuas, así como el peso de una masa de tierra sobre un piso.

Se dice que una fuerza continua está uniformemente distribuida sobre una superficie cuando sobre la unidad de área se tiene una fuerza constante, en cualquier parte que se la tome.

Así, si (fig. 4) sobre la superficie plana ABCD se tiene una masa homogénea de arena, de igual altura h en todas sus partes, es evidente que sobre cada cm^2 de la superficie ABCD actúa el peso de un prisma de arena de 1 cm^2 de base y de altura constante h y que por lo tanto el peso de toda la arena está uniformemente distribuido sobre la superficie ABCD.

Si en un recipiente cualquiera MNLP (fig. 5), de fondo plano y horizontal, hay cierta cantidad de líquido, éste pesa por igual sobre cada centímetro cuadrado de fondo y por lo tanto este fondo sufrirá la acción de una carga uniformemente distribuida.

Cuando la fuerza continua no obedece a la ley de constancia enunciada, se dice que no es uniformemente distribuida. Tal serían, por ej., la acción de una masa de tierra, de forma irregular, sobre la superficie ABC que la sostiene (fig. 6), y el empuje de un líquido sobre las paredes laterales del recipiente que lo contiene, fig. 7.

Unidades — Las fuerzas continuas distribuidas sobre una superficie se expresan en kilogramos por centímetro cuadrado kg. cm^{-2} o en kilogramos por metro cuadrado kg. m^{-2} . Así, por ej., se dice: sobre tal puente hay una sobrecarga de 1600 kg. m^{-2} ; sobre tal pistón hay una presión de 8 kg. cm^{-2} .

En el caso de fuerzas uniformemente distribuidas esa fuerza unitaria es constante para toda la superficie cargada; en el caso de fuerzas no distribuidas uniformemente,

esa fuerza unitaria varía de un punto a otro de la superficie.

De una fuerza continua que actúa sobre una viga se dice que es uniformemente distribuida si la porción de fuerza correspondiente a una unidad de longitud de luz (3) es constante, cualquiera que sea el punto de la luz en que se la tome. Así, si sobre una viga (fig. 8) se tiene un muro de espesor s y altura h , constantes en toda su longitud, para cada metro de viga se tendrá en cualquier parte de la luz una carga igual a $1m \times s \times h \times d$, siendo d el peso unitario de la fábrica del muro, y por lo tanto se dirá que sobre dicha viga actúa una fuerza o carga continua uniformemente distribuida.

En este caso la carga unitaria se expresa en kilogramos por metro de viga, $kg. m^{-1}$, o en kilogramos por centímetro de viga, $kg. cm^{-1}$.

Su valor será constante si se trata de carga uniformemente repartida y variable si la carga no está distribuida uniformemente.

Las cargas continuas pueden actuar sobre toda la superficie o viga o solamente sobre una parte de ellos. En algunos casos, sobre una superficie o sobre una viga, actúan simultáneamente fuerzas o cargas continuas y fuerzas o cargas aisladas.

Obstáculos opuestos a la acción de una fuerza. — Al definir la fuerza hemos dicho que es toda causa capaz de modificar el estado dinámico de un cuerpo. Este estado será en realidad modificado o no según que el cuerpo sea o no libre. En este último caso, que se verifica cuando el cuerpo tiene puntos de contacto (apoyos) o vínculos de unión con los cuerpos vecinos, estos apoyos o vínculos son obstáculos que se oponen al movimiento del cuerpo.

El cuerpo ejerce en cada uno de sus puntos de apoyo o de vinculación una acción sobre los cuerpos que toca, acción que éstos devuelven mediante reacciones que actúan en los mismos puntos y que son exactamente iguales y contrarias a las acciones. (4)

Así, (fig. 9), un cono C , de peso P , parado de punta

(3) Luz de una viga es la distancia que hay entre sus apoyos.

(4) La mecánica se funda en ciertos principios fundamentales entre los que se encuentra el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, que dice: Cuando un cuerpo ejerce una acción determinada sobre otro cuerpo, éste reacciona sobre el primero con una fuerza exactamente igual y contraria a la acción de aquél y de igual recta de acción.

sobre una mesa, ejerce en el punto de apoyo A una acción sobre la mesa, igual a su peso P, y, a su vez, la mesa reacciona sobre el cono, en A, con una fuerza R de igual recta de acción que P, de intensidad igual a P y de sentido contrario a P.

Una viga AB (fig. 10) que descansa en apoyos A y B, ejerce sobre éstos cierta acción. A su vez, los apoyos ejercen sobre la viga reacciones R^A y R^B que son respectivamente iguales a las acciones que la viga ejerce sobre ellos.

Caracteres de las fuerzas — Las fuerzas aisladas se caracterizan por los siguientes elementos: punto de aplicación, recta de acción, sentido e intensidad.

Punto de aplicación de una fuerza es el punto sobre el que actúa la fuerza; se indica en general por un punto o una cruz pequeña.

Recta de acción de una fuerza es la recta sobre la que, bajo su acción, se movería su punto de aplicación suponiéndolo libre y partiendo del reposo. Así, si bajo la acción única de una fuerza F aplicada en A (fig. 11) este punto se mueve sobre la recta a, diremos que esta recta es la de acción de la fuerza F. Se indica en general la recta de acción por medio de una recta que pasa por el punto de aplicación.

Dirección u orientación de una recta es el ángulo que ella forma con otra recta tomada como base, y, por lo tanto, rectas de igual dirección serán rectas paralelas. Cuando varias fuerzas tienen sus rectas de acción paralelas entre sí, diremos que son fuerzas de igual dirección.

Sentido de una fuerza es el sentido del movimiento que, bajo su acción, adquiriría su punto de aplicación, suponiéndolo libre y partiendo del reposo.

Es evidente que el punto A (fig. 11) puede moverse sobre la recta a de dos maneras distintas o sea siguiendo dos sentidos bien distintos: de izquierda a derecha o de derecha a izquierda; siendo también evidente que esos dos movimientos corresponderían a dos fuerzas bien distintas pero de igual recta de acción. Se dice que esas dos fuerzas tienen sentidos contrarios, atribuyéndose a cada una de ellas el mismo sentido que el del movimiento que comunica a A.

El sentido se indica en general por medio de una pequeña flecha. Así en la (fig. 12) la flecha colocada en el extremo de la recta a, indicativa del sentido de la fuerza F, nos dice que esta fuerza haría mover su punto de aplicación A, si fuera libre y partiera del reposo, justamente siguiendo el sentido de la flecha, es decir, hacia arriba y a la derecha.

Intensidad de una fuerza es su magnitud. Toda fuerza

produce cierto efecto sobre un cuerpo, y, por comparación de dicho efecto con el producido en condiciones exactamente iguales sobre el mismo cuerpo por una fuerza adoptada como unidad, se determina la magnitud o intensidad de aquélla.

Unidad de Intensidad — Como los efectos producidos por las fuerzas pueden obtenerse siempre mediante la acción de pesos convenientes, se ha adoptado como unidad de fuerza la de peso, es decir, el kilogramo (kg) peso de un litro de agua destilada, en el vacío, a 4, 1° C, al nivel del mar y en París.

Para la medición de fuerzas grandes se emplea la tonelada (t) igual a 1000 kg; para las pequeñas se emplea el gramo (g).

Representación gráfica de las fuerzas — Una fuerza estará representada, en general, por un trozo de recta, de longitud cualquiera, que indica su recta de acción (fig. 13), un punto con el que se indica su punto de aplicación, una flecha indicativa de su sentido, y una letra (F en la fig. 13) con la que se denomina la fuerza para distinguirla de otras, letra al lado de la que se escribe a menudo la intensidad de la fuerza.

En muchos casos, en virtud de un principio que veremos más adelante y que dice que el efecto dinámico de una fuerza no se altera trasladando su punto de aplicación a cualquier parte de su recta de acción, se representa la fuerza sin indicar punto de aplicación (fig. 14).

Para efectuar operaciones gráficas con las fuerzas (suma geométrica de las mismas, por ejemplo) se las representa por medio de segmentos de recta paralelos a sus rectas de acción y de longitudes proporcionales a las intensidades de las correspondientes fuerzas, adoptando previamente una escala de fuerzas, o sea una relación que indique qué longitud de segmento representará una unidad de fuerza o el número de kg. o de t. representados por una unidad de longitud de segmento. Dichos segmentos se completan con una letra en cada extremo, con una flecha en su parte media, igual a la del sentido de la fuerza que representa cada segmento, y con la letra que sirve para denominar la fuerza, letra que se escribe al lado de la flecha. Los segmentos así obtenidos se llaman segmentos representativos de las fuerzas.

Así, si a partir de un punto A se quiere trazar un segmento representativo de la fuerza F igual 500 kg. (fig. 15), fijaremos primeramente una escala de fuerzas, por ejemplo: 1 cm. representa 100 kg. (es decir que cada cm. del segmen-

to representativo representará 100 kg.), luego trazaremos por A una paralela a la recta de acción de F, mediremos sobre ella, siguiendo el sentido de F o sea hacia abajo, $AB = 5$ cm., marcaremos en el medio de AB una flecha igual a la de F, al lado de ella pondremos la letra F, denominativa de la fuerza, y tendremos así en AB el segmento representativo pedido.

El punto A es el origen del segmento, B es su término. Al leer un segmento representativo por las letras que hay en sus extremos, debe leerse primero la del origen y después la del término, con lo que la lectura indica el sentido de la fuerza representada.

Sistema de fuerzas. Polígono de fuerzas — Sistema de fuerzas es el conjunto de varias fuerzas consideradas simultáneamente. Así al estudiar el efecto de las fuerzas F' , F'' y F''' sobre un cuerpo K se hablará del sistema de fuerzas F' , F'' y F''' (fig. 16).

Polígono de un sistema de fuerzas F' , F'' , F''' ... y F_n o polígono de las fuerzas F' , F'' , F''' ... F_n es la quebrada poligonal que se obtiene tomando en cualquier orden, uno a continuación del otro, a la misma escala de fuerzas, los segmentos representativos de todas esas fuerzas. Así (fig. 16 y 17), si MN es el segmento representativo de F' , NL el de F'' y LQ el de F''' , diremos que MNLQ es un polígono de las fuerzas F' , F'' y F''' .

Es evidente que siendo M un punto cualquiera del plano podrán trazarse tantos polígonos de un mismo sistema de fuerzas cuantos se quiera.

Fuerzas equivalentes — Cuando dos fuerzas, o dos sistemas de fuerzas, actuando sucesivamente sobre un mismo cuerpo, en las mismas condiciones, producen sobre él el mismo efecto dinámico, se dice que son equivalentes.

Si una fuerza produce sobre un cuerpo el mismo efecto dinámico que un sistema de fuerzas, se dice que aquella fuerza y este sistema son equivalentes. La fuerza equivalente a un sistema de fuerzas se llama resultante de este sistema, y las fuerzas que forman este último se llaman sus componentés.

Sistema de fuerzas en equilibrio. - Fuerzas equilibrantes. — Se dice que un sistema de fuerzas está en equilibrio cuando su resultante es igual a cero y está situada en la parte finita del plano. Como tal fuerza no produce ningún efecto dinámico sobre un cuerpo, un sistema en equilibrio tampoco lo producirá, y por lo tanto podrá aplicarse siempre a un cuerpo todos los sistemas de fuerzas en equilibrio que se quiera, sin alterar su estado dinámico.

Cuando dos fuerzas o dos sistemas de fuerzas son tales que uno anula el efecto del otro, se dice que se equilibran y se llaman fuerzas o sistemas equilibrantes.

Cuerpo en equilibrio. - Fuerzas exteriores. — Cuerpo o construcción en equilibrio es todo cuerpo o construcción que no cambia de sitio, no se mueve, con relación al observador en reposo o sea con relación a la tierra. Al estudiar la Mecánica aplicada a las construcciones, se verá que para que un cuerpo cualquiera esté en equilibrio es necesario y suficiente que el sistema de fuerzas exteriores aplicadas al mismo esté en equilibrio, entendiéndose bajo dicho nombre de fuerzas exteriores las cargas que actúan sobre el cuerpo, las reacciones de los apoyos y el peso propio del cuerpo.

Así en el caso de la fig. 9, sobre el cono en ella representado actúan las siguientes fuerzas exteriores: el peso P del cono y la reacción R^A . Cuando este sistema de fuerzas P y R^A sea un sistema en equilibrio, el cono estará también en equilibrio.

En el caso de la fig. 18, si sobre la viga AB que descansa en los apoyos A y B actúan las cargas F' y F'' y se indica con P el peso propio de la viga, dichas cargas y dicho peso propio originarán en los apoyos reacciones R^A y R^B . Todas estas fuerzas F' , F'' , P , R^A y R^B reciben el nombre de fuerzas exteriores y la viga estará en equilibrio cuando ellas formen un sistema en equilibrio.

Momento estático de las fuerzas. Unidad. Representación gráfica — Brazo de palanca de una fuerza F respecto de un punto M es la distancia d que hay entre ambos, distancia que como sabemos se mide sobre la perpendicular bajada desde M a F .

Momento estático o momento de primer orden de una fuerza F con respecto a un punto M es el producto de la intensidad de aquélla por su brazo de palanca respecto de M . En la fig 19 de tendrá

$$M = F \cdot d.$$

Al momento de una fuerza F con respecto a un punto M se le atribuye el signo $+$ o el signo $-$ según que dicha fuerza tienda a hacer girar el cuerpo alrededor de M en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj o en sentido inverso.

En el caso de la fig. 19 el momento de F es positivo con respecto a M . En el de la fig. 20 el momento de P con respecto a A es negativo.

Los momentos estáticos se expresan en kilográmetros = kgm. , en kilográcentímetros = kgcm. , o en tonelámetros

= tm., según las unidades que se haya adoptado para expresar la fuerza y el brazo de palanca.

Un tonelámetro es igual a mil kilográmetros, un kilográmetro a cien kilográcentímetros.

$$1 \text{ tm} = 1000 \text{ kg m} = 100\,000 \text{ kg cm}$$

$$1 \text{ kg m} = 100 \text{ kg cm}$$

Así como se representa las fuerzas por medio de segmentos de recta cuyas longitudes son proporcionales a sus intensidades, puede representarse fácilmente los momentos de las fuerzas con respecto a un punto por medio de figuras cuyas áreas sean proporcionales a dichos momentos. Si en la fig. 21 tomamos AB igual al segmento representativo de F, A'B' igual al segm. repres. de F' y unimos luego A, B, A' y B' con O, formaremos los triángulos AOB y A'OB' en los que se tiene:

$$\text{triáng. AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot d$$

$$\text{y triáng. A'OB'} = \frac{1}{2} A'B' \cdot d'$$

y, dividiendo miembro a miembro

$$\frac{\text{triáng. AOB}}{\text{triáng. A'OB'}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot d}{\frac{1}{2} A'B' \cdot d'}$$

o, simplificando,

$$\frac{\text{triáng. AOB}}{\text{triáng. A'OB'}} = \frac{AB \cdot d}{A'B' \cdot d'}$$

$$\frac{\text{triáng. AOB}}{\text{triáng. A'OB'}} = \frac{AB \cdot d}{A'B' \cdot d'}$$

pero siendo $AB \cdot d$ = momento de la fuerza F con respecto al punto O, y $A'B' \cdot d'$ = momento de la fuerza F' respecto del mismo punto O, podrá escribirse:

$$\frac{\text{triáng. AOB}}{\text{triáng. A'OB'}} = \frac{M. F \text{ resp. O}}{M. F' \text{ resp. O}}$$

$$\frac{\text{triáng. AOB}}{\text{triáng. A'OB'}} = \frac{M. F \text{ resp. O}}{M. F' \text{ resp. O}}$$

lo que nos dice que las áreas de los triángulos obtenidos son proporcionales a los momentos de las fuerzas respecto del punto O, y que por lo tanto dichos triángulos representan gráficamente dichos momentos.

Luego, para obtener una figura representativa del momento de una fuerza con respecto a un punto bastará tomar sobre la fuerza un segmento representativo de la misma y unir sus extremos con el punto fijo o centro de momentos. El triángulo así obtenido es la figura buscada.

Momento de una fuerza con respecto a un eje es el producto de la proyección de dicha fuerza sobre un plano perpendicular al eje, por la menor distancia entre la recta de acción de la fuerza y el eje.

Los momentos estáticos de las fuerzas tienen gran importancia, pues, como se verá en otros cursos, el efecto dinámico de una fuerza sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje, es proporcional a su momento estático con respecto a dicho eje; y las fuerzas interiores que se desarrollan entre las moléculas de los cuerpos por la acción de las fuerzas exteriores que sobre ellos actúan, son proporcionales al momento estático de estas fuerzas.

CAPITULO II.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA GRÁFICA.

Objeto de la Estática. — Problemas principales que ella resuelve. — **Principios en que se funda.** — Fuerzas congruentes, fuerzas concurrentes, fuerzas paralelas, fuerzas cualesquiera. — **Sistemas de fuerzas coplanares o no.**

Objeto de la Estática — Se llama componer varias fuerzas a la operación de determinar su resultante, y descomponer una fuerza F en otras que actúen en rectas dadas a la operación inversa, o sea a aquella por medio de la cual se determinan fuerzas que actúen en las rectas dadas y tales que tengan por resultante la fuerza F dada.

La composición y la descomposición de fuerzas, así como la determinación de las condiciones de equilibrio de los sistemas de fuerzas, forman el principal objeto de la Estática. Sus problemas pueden ser resueltos analíticamente, es decir, con ayuda del álgebra, o gráficamente, es decir por los medios que el dibujo geométrico pone a nuestra disposición. En este segundo caso la Estática se denomina Gráfica y definiremos por lo tanto la Estática Gráfica diciendo que es la parte de la mecánica aplicada a las construcciones que se ocupa de resolver por medios geométricos los problemas de composición y descomposición de fuerzas, de estudiar por los mismos medios las condiciones de equilibrio de las fuerzas y de aplicar la composición y descomposición de fuerzas y las condiciones de equilibrio a la determinación de ciertos elementos indispensables para el cálculo de las construcciones.

Nuestro curso no será exclusivamente de Estática Gráfica. En algunos casos nos valdremos o haremos notar relaciones analíticas que permiten resolver ciertos problemas más rápida y exactamente que por los medios gráficos.

Principios — Además de los principios fundamentales

de la mecánica, la Estática Gráfica se funda en los principios siguientes:

1er. Principio: Dos fuerzas iguales y contrarias, aplicadas a un mismo punto, se equilibran. — Así, por ejemplo, si a un punto A (fig. 22) se aplican dos fuerzas F y F' iguales en intensidad y directamente opuestas, ellas formarán un sistema en equilibrio.

Este principio es una verdad experimental que no exige mayor demostración.

2.º Principio: Dos fuerzas iguales y contrarias, aplicadas a dos puntos de un cuerpo, pero de rectas de acción congruentes, se equilibran. — Así, si las fuerzas F y F' (Fig. 23) de rectas de acción congruentes y aplicadas respectivamente a los puntos A y A', son de igual intensidad y de sentido contrario, ellas formarán un sistema en equilibrio. También este principio es una verdad que no necesita mayor demostración.

Recíprocamente, admitiremos que si dos fuerzas F y F' aplicadas a uno o a dos puntos de un cuerpo (fig. 24) se equilibran, ellas son iguales en intensidad y son directamente opuestas, es decir, sus rectas de acción se confunden y sus sentidos son contrarios.

3er. Principio: Una fuerza puede ser aplicada a un punto cualquiera de su recta de acción sin que se altere su efecto dinámico. — Sea (fig. 25) una fuerza F aplicada al punto A de un cuerpo C. Es evidente que si aplicamos en un punto B del mismo cuerpo dos fuerzas iguales y contrarias F' y F'' ellas no alterarán el estado dinámico del cuerpo, por cuanto forman un sistema en equilibrio.

Apliquemos ese sistema a un punto B de la recta de acción de F y de modo que se confundan las rectas de acción de todas las fuerzas y que F' y F'' tengan intensidades iguales a la de F .

El sistema de las tres ff. F , F' y F'' es equivalente a la fuerza F ya que ambos producen el mismo efecto dinámico sobre C.

Pero F y F'' forman también un sistema en equilibrio y por lo tanto el sistema de las tres fuerzas F , F' y F'' será también equivalente a la fuerza F' . Luego, las fuerzas F y F' producen separadamente sobre C el mismo efecto y como $F = F'$ resulta demostrado que no se altera el efecto producido por una fuerza cuando se la supone aplicada a cualquier punto de su recta de acción.

De este principio se deduce, como recíproco, que si dos fuerzas aplicadas a un cuerpo libre son equivalentes, ellas deben coincidir en recta de acción, sentido e intensidad.

En virtud de esta libertad de trasladar el punto de aplicación a cualquier parte de la recta de acción es que a menudo se representa las fuerzas sin marcar punto de aplicación.

4.º Principio: Si un sistema de fuerzas está en equilibrio, una cualquiera de las fuerzas equilibra el efecto de las demás. — Este principio es también evidente y es un caso particular del principio general que dice que “si un sistema de fuerzas está en equilibrio un grupo cualquiera de fuerzas del sistema equilibra las fuerzas restantes”.

Como consecuencia de este principio se deduce que en todo sistema de fuerzas en equilibrio una cualquiera de las fuerzas es igual y contraria a la resultante de las demás, y la resultante de una parte del sistema es igual y contraria a la resultante de la otra parte.

5.º Principio: Si sobre una misma recta actúan varias fuerzas, y se conviene en asignar el signo más + a las que tienen un sentido y el signo — a las que tienen sentido contrario, la resultante actuará sobre la misma recta de acción, su intensidad será igual a la suma algebráica de las componentes y su sentido será el que corresponde al signo de la suma. — Así si sobre una recta (fig. 26) actúan las fuerzas F , F' , F'' , F''' y F'''' y se conviene en que sean positivas las que tienen sentido hacia la derecha y negativas las que lo tienen hacia la izquierda, su resultante tendrá por valor: $R = F'' + F''' + F'''' - F - F'$. Si el signo que corresponde a R es + su sentido será el de las fuerzas positivas; en caso contrario su sentido será el de las fuerzas negativas.

6.º Principio: Principio del paralelógramo: Si sobre un cuerpo actúan dos fuerzas F y F' que se cortan en un punto A , a partir de este punto de concurrencia se toma sobre cada fuerza un segmento representativo de la misma, se completa el paralelógramo al que pertenecen esos dos segmentos y se une el vértice A con el opuesto de dicho paralelógramo, la diagonal así obtenida representa, en posición, sentido e intensidad, la resultante de las fuerzas F y F' .

Así, por ejemplo, sean F y F' (fig. 27) dos fuerzas aplicadas respectivamente a dos puntos B y B' de un mismo cuerpo. Si las prolongamos hasta que se corten, tomamos a una escala determinada $AC =$ segmento representativo de F y $AD =$ segmento representativo de F' , trazamos enseguida por C una $\parallel AD$ y por D una $\parallel AC$ y determinamos el punto E de encuentro de dichas paralelas, tendremos que la diagonal AE será un segmento representativo de la re-

sultante de las ff F y F' , resultante que pasa por A , punto de concurrencia de sus dos componentes.

Este principio tiene su demostración analítica basada en la de la composición de movimientos como se verá en el curso de Mecánica y se demuestra además experimentalmente, por medio de varios aparatos, en los cursos de Física.

En los principios expuestos se basa la composición de fuerzas. Las fuerzas con que se opera pueden estar todas en un plano o no estarlo. En el primer caso forman un sistema plano de fuerzas o un sistema de fuerzas coplanares, en el segundo forman un sistema de fuerzas en el espacio. Se dice que varias fuerzas son congruentes cuando tienen la misma recta de acción; se dice que son concurrentes cuando sus rectas de acción pasan todas por un mismo punto; y se dice que son paralelas cuando lo son sus rectas de acción. Llamaremos sistema de fuerzas cualesquiera a un sistema de fuerzas que no son concurrentes ni paralelas. Empezaremos por la composición de fuerzas coplanares y terminaremos con el estudio de los sistemas de fuerzas en el espacio.

Simultáneamente se irá deduciendo las condiciones de equilibrio de dichos sistemas, se estudiarán algunas propiedades importantes de la resultante, se generalizarán luego los resultados parciales obtenidos y, finalmente, se aplicará todo lo visto a la determinación de centros de gravedad y a la de elementos necesarios para el cálculo de vigas cargadas y de algunos sistemas reticulados.

CAPITULO III

FUERZAS CONGRUENTES Y FUERZAS COPLANARES CONCURRENTES

Composición de fuerzas que actúan sobre una misma recta. — Composición de dos fuerzas concurrentes. — Propiedades de la resultante. — Teorema de las proyecciones. — Teorema de los momentos. — Descomposición de una fuerza en otras dos que actúen en rectas que se cortan sobre la fuerza dada. — Composición de más de dos fuerzas concurrentes coplanares. — Propiedades de la resultante. — Condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes.

Composición de fuerzas que actúan sobre una misma recta. — En este caso se obtendrá la resultante de las fuerzas dadas aplicando el quinto principio visto en el capítulo anterior.

Así si sobre un vehículo (fig. 28) se ejercen las fuerzas

$F = 20 \text{ kg}$ y $F' = 50 \text{ kg}$, de igual recta de acción, y se desea obtener la resultante de este sistema de dos fuerzas, resultante que según aquel principio actuará sobre la misma recta que las componentes F y F' , bastará hacer la suma algebraica de las intensidades de las componentes, suma que nos da:

$$R = F + F' = -20 \text{ kg} + 50 \text{ kg} = +30 \text{ kg}.$$

y que nos dice que la resultante tendrá una intensidad de 30 kg y que su sentido será el de las fuerzas positivas.

Composición de dos fuerzas concurrentes. — Dos fuerzas situadas en un plano son siempre concurrentes (en la parte finita del plano o, cuando son paralelas, en el infinito). Aquí estudiaremos solamente la composición de dos fuerzas que se corten en la parte finita del plano.

Sean (fig. 29 a) las fuerzas F y F' que queremos componer. Ello se conseguirá aplicando el principio del paralelogramo estudiado en el capítulo anterior. Por lo tanto tomando a partir de A , punto de concurrencia de las dos fuerzas, sobre la recta de acción de F un segmento AB representativo de dicha fuerza, y a partir del mismo punto A , sobre la recta de acción de F' un segmento AC representativo de esta misma fuerza F' ; completando en seguida el paralelogramo $ABCD$ y trazando la diagonal AD que pasa por el punto de concurrencia A , tendremos en ella, dándole un sentido desde aquel punto al vértice opuesto, el segmento representativo de la resultante buscada, segmento situado sobre la recta de acción de dicha resultante R .

Observemos que si, aplicando la misma escala de fuerzas que nos ha servido para construir el paralelogramo $ABCD$, a partir de un punto A' (fig. 29 b) tomamos un segmento $A'B'$ representativo de F y a continuación un segmento $B'D'$ representativo de F' , trazamos $A'D'$ y le damos sentido de A' a D' , tendremos dos triángulos ABD y $A'B'D'$ que serán iguales y paralelos, por ser:

$$\begin{array}{l} AB = y \parallel A'B' \\ BD = y \parallel B'D' \\ a = a' \end{array}$$

De esta igualdad y del paralelismo de los lados deducimos:

$$A'D' = y \parallel AD$$

lo que nos dice que también $A'D'$ es un segmento representativo de R o sea de la resultante de F y F' .

Si en vez de tomar primero el segmento representativo de F y a continuación el de F' , invertimos el orden en que trazamos dichos segmentos, como lo hemos hecho en la fi-

gura 29-c, el segmento A''D'' que resultaría uniendo los extremos libres de los segmentos representativos de F' y F, será también un segmento representativo de la resultante de dichas dos fuerzas, pues de la comparación de los triángulos ACD y A''C''D'' resulta sucesivamente

$$AC = y \parallel A''C''$$

$$b = b''$$

$$CD = y \parallel C''D''$$

$$\text{Trg. ACD} = y \parallel \text{trg. A''C''D''}$$

y finalmente A''D'' = y $\parallel$ AD.

Por lo tanto, para hallar un segmento representativo de la resultante R no será indispensable construir el paralelógramo de las fuerzas F y F', pues bastará con hacer cualquiera de las construcciones indicadas en las figuras 29-b y 29-c. Ahora bien, la quebrada A'B'D' es un polígono de las fuerzas F y F', el punto A' es su origen o punto de partida, el punto D' es su término o punto de llegada, la recta A'D' que une estos dos puntos se llama línea de cierre del polígono de las fuerzas F y F', y es, según hemos visto, un segmento representativo de la resultante de estas dos fuerzas. Análogamente A''C''D'' es otro polígono de las fuerzas F' y F, A'' es su origen, D'' su término, A''D'' es su línea de cierre, y ésta es también un segmento representativo de la resultante de las fuerzas F y F'.

Es evidente que obtenido un segmento representativo de la resultante, y sabiendo que ésta pasa siempre por el punto de concurrencia de las dos fuerzas, bastará, para obtenerla, trazar por dicho punto de concurrencia una paralela al segmento representativo de la resultante.

De todo lo expuesto se deduce que para hallar la resultante de dos fuerzas concurrentes bastará construir, a determinada escala, un polígono de esas dos fuerzas y trazar su línea de cierre. Esta línea, con sentido del origen al término del polígono, nos dará un segmento representativo de la resultante buscada, la que se obtendrá en posición trazando por el punto de concurrencia una paralela a dicho segmento. En cuanto a la intensidad de la resultante bastará medir su segm. repres. a la escala de las fuerzas.

Así, para determinar la resultante de las ff. $F = 2t$ y $F' = 3t$, (fig. 30) construiremos un polígono de las mismas a partir de un punto cualquiera del plano, A, p. ej., y a una escala determinada (p. ej.: 1 cm repr. 1t.); tomaremos AB = 2 cm como segm. repr. de F, y, a continuación, o sea a partir de B, BC = 3 cm como segm. repr. de F'.

La quebrada ABC que resulta es un polígono de las

ff. F y F' , AC es su línea de cierre y es por lo dicho antes un segmento representativo de la resultante buscada. Este segmento representativo nos da el sentido, la intensidad y la dirección de la resultante. El sentido de la resultante, como ya lo hemos dicho, debe ser tal que en el polígono de las fuerzas indique una marcha del origen hacia el término del mismo o sea desde A hacia C . La intensidad se obtendrá midiendo la longitud del segmento y multiplicándola por el número de toneladas o kilogramos representados por la unidad de longitud, número dado por la escala de fuerzas adoptada. Así, si AC mide 4.2 cm representará una fuerza de $4.2 \text{ cm} \times 1 \text{ t. cm}^{-1} = 4.2 \text{ t.}$ Nos falta solamente la resultante en posición, y fácil será obtenerla recordando que debe pasar por M , punto de concurrencia de F y F' , y que es $\parallel$ a su segm. repres. Bastará pues trazar por M una paralela a AC para obtener la resultante buscada.

Teorema de las proyecciones. — La resultante así hallada goza de propiedades importantes entre las que anotaremos las siguientes:

La proyección de la resultante sobre un eje cualquiera es igual a la suma de las proyecciones de las componentes sobre el mismo eje.

En efecto, sean (fig. 31) F y F' dos fuerzas cuya resultante R hemos determinado por medio del polígono ACD . Si tomamos un eje cualquiera XX y proyectamos sobre él los puntos A , C y D tendremos en $A'C'$ la proyección de AC o de F' , en $C'D'$ la proyección de CD o de F , y en $A'D'$ la de AD o de R . La simple inspección de la fig. 31 nos da $A'D' = A'C' + C'D'$ o sea

$$\text{Proy. } R = \text{proy. } F' + \text{proy. } F$$

L. Q. Q. D.

Si en vez del eje XX hubiéramos tomado el YY y proyectado sobre él el polígono ACD , tendríamos, asignando $+$ a las proyecciones con sentido hacia la derecha y $-$ a las con sentido hacia la izquierda:

$$A''D'' = A''C'' - C''D'' \quad (1)$$

pero

$$A''D'' = \text{proy. } R \text{ sobre } YY$$

$$A''C'' = \text{proy. } F' \text{ sobre } YY$$

$$- C''D'' = \text{proy. } F \text{ sobre } YY$$

y, sustituyendo en (1),

$$\text{proy. } R = \text{proy. } F' + \text{proy. } F$$

Teorema de los momentos. — Otra propiedad importantísima de la resultante es la siguiente: El momento estático de la resultante con respecto a un punto situado en

el plano de las fuerzas es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de las componentes respecto del mismo punto.

En efecto, sean (fig. 32) F y F' dos fuerzas cuya resultante R hemos determinado por medio del paralelogramo de las fuerzas $ABCD$ y sea O el punto fijo del plano, o centro de los momentos. Unamos el punto A de concurrencia de las dos componentes con el centro de los momentos O , tracemos por O la recta XX perpendicular a AO , proyete-mos ortogonalmente sobre ella los puntos B , C y D , y unamos estos puntos con O ; tendremos:

$$OB' = \text{proy. de } F \text{ sobre } XX$$

$$OD' = \text{proy. de } F' \text{ sobre } XX$$

$$OC' = \text{proy. de } R \text{ sobre } XX, \text{ y, por lo que se}$$

acaba de demostrar en el teorema anterior,

$$OC' = OB' + OD'$$

Por otra parte, siendo los triángulos ABO , ADO y ACO proporcionales a los momentos estáticos de las ff F , F' y R respecto del punto O , podrá escribirse:

$$\frac{M^{\circ}F}{\text{trg. } ABO} = \frac{M^{\circ}F'}{\text{trg. } ADO} = \frac{M^{\circ}R}{\text{trg. } ACO}$$

y de ahí, aplicando una conocida propiedad de las proporciones, se tendrá:

$$\frac{M^{\circ}F + M^{\circ}F'}{\text{trg. } ABO + \text{trg. } ADO} = \frac{M^{\circ}R}{\text{trg. } ACO} \quad (2)$$

Pero

$$\text{trg. } ABO = \frac{1}{2} AO \cdot OB'$$

$$\text{trg. } ADO = \frac{1}{2} AO \cdot OD'$$

y, sumando miembro a miembro las igualdades anteriores,

$$\text{trg. } ABO + \text{trg. } ADO = \frac{1}{2} AO (OB' + OD')$$

y como

$$OB' + OD' = OC'$$

resultará

$$\text{tr. } ABO + \text{trg. } ADO = \frac{1}{2} AO \cdot OC'$$

o bien, teniendo presente que

$$\frac{1}{2} AO \cdot OC' = \text{trg. } AOC$$

podrá escribirse

$$\text{trg. } ABO + \text{trg. } ADO = \text{trg. } AOC$$

lo que nos dice que los denominadores de la igualdad (2) son iguales entre sí. Suprimiendo en la igualdad (2) esos denominadores iguales, ella nos dará

$$M^{\circ}F + M^{\circ}F' = M^{\circ}R$$

L. Q. Q. D.

Descomposición de una fuerza en otras dos que actúan en rectas que se cortan sobre la fuerza dada.—Este problema es el inverso del anterior y se propone, dadas una fuerza R y dos rectas a y b que se cortan sobre ella, hallar dos fuerzas F' y F'' que actuando sobre a y b tengan por resultante la fuerza R o, como vulgarmente se dice, hallar las componentes de R según las rectas de a y b (fig. 33).

Este problema se resuelve como sigue: Se toma a partir de un punto cualquiera A del plano (fig. 33) un segmento AB representativo de la fuerza dada R ; luego, por uno de sus extremos, el A , p. e., se traza una paralela a una de las rectas dadas, a la b p. ej., y por el otro extremo del segmento se traza una paralela a la otra recta dada. Estas dos paralelas se cortan en un punto C que determina dos segmentos AC y CB representativos de las fuerzas que se buscan. En efecto, si suponemos que sobre a actúe una fuerza F' cuyo segmento representativo sea el CB , y que sobre b actúe una fuerza F'' de segmento representativo igual a AC , estas dos ff tendrán evidentemente por resultante la fuerza dada R y por lo tanto son sus componentes según a y b o sea las fuerzas buscadas.

Obsérvese (fig. 33-b) que si en vez de trazar por A una $\parallel$ a b trazamos una $\parallel$ a a , y por B una $\parallel$ a b obtendremos el mismo resultado, pues los triángulos $A'B'D'$ y ABC serán iguales, por tener

$$\begin{aligned} AB &= y \parallel A'B' \\ \text{áng. } A &= \text{áng. } B' \\ \text{áng. } B &= \text{áng. } A' \end{aligned}$$

y de esa igualdad se deducirá

$$\begin{aligned} A'D' &= y \parallel CB = \text{segm. repr. } F' \\ D'B' &= y \parallel AC = \text{segm. repr. } F'' \end{aligned}$$

Nótese que ACB y $A'D'B'$ son polígonos de las ff F' F'' , y que los sentidos que en ellos atribuyamos a estas fuerzas deben ser tales que los polígonos sean recorridos yendo desde el origen de la resultante a su término o punto de llegada, es decir, de A hacia B en (a) y de A' hacia B' en (b).

Composición de cualquier número de fuerzas concurrentes situadas en un plano. — Para hallar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes coplanares puede seguirse un procedimiento aplicable a todos los sistemas planos de fuerzas y que consiste en hallar la resultante de dos de las fuerzas del sistema, componer esta resultante con una tercer fuerza del sistema dado, lo que nos dará una nueva resultante; componer esta nueva resultante con una cuarta

fuerza y seguir así hasta haber compuesto todas las fuerzas del sistema. La última resultante obtenida será la resultante del sistema.

En efecto, sea (fig. 34) el sistema de las ff F' , F'' , F''' y F^{IV} , cuya resultante buscamos. Compongamos primero las dos fuerzas F' y F'' por medio del polígono de ff. Tomando AB igual al segm. repr. de F' y a continuación de B, BC, igual al segm. repr. de F'' tendremos en ABC el polígono de las fuerzas F' y F'' y en AC la línea de cierre de este polígono. Trazando por Q una paralela a AC tendremos la resultante r'' de F' y F'' . Compongamos ahora r'' con F''' para lo que tomaremos un segm. repres. de r'' , segmento que ya tenemos en AC, y, a continuación del mismo, o sea por C, uno representativo de F''' . Sea CD este segmento. Entonces ACD es el polígono de las ff. r'' y F''' . AD es su línea de cierre y por lo tanto el segm. repres. de la resultante r''' de r'' y de F''' , resultante que se obtendrá en posición trazando por Q una paralela a AD. Finalmente compondremos r''' con F^{IV} , para lo cual construiremos el polígono de estas dos ff, polígono que tenemos en ADE y cuya línea de cierre es AE. Esta línea AE será el segm. repres. de la resultante R de r''' y F^{IV} y debemos probar que R es también resultante de todo el sistema F' , F'' , F''' y F^{IV} .

Se tiene sucesivamente

$$R \text{ equivalente del sistema } r''' \text{ y } F^{IV} \quad (1)$$

y por ser

$$r''' \text{ equivalente del sistema } r'' \text{ y } F'''$$

podrá escribirse, sustituyendo en la equivalencia (1) r''' por su equivalente,

$$R \text{ equivalente del sistema } r'', F''' \text{ y } F^{IV} \quad (2)$$

pero a su vez

$$r'' \text{ es equivalente del sistema } F' \text{ y } F''$$

y sustituyendo en (2) r'' por su equivalente se tendrá

$$R \text{ equivalente del sistema } F', F'', F''' \text{ y } F^{IV}$$

o sea

$$R = \text{resultante del sistema dado}$$

L. Q. Q. D.

Si, en la fig. 34, se examina la quebrada ABCDE se verá que ella está constituida por los segms. repres. de las 4 ff. dadas, tomados uno a continuación del otro; es por lo tanto un polígono de las ff dadas: A es su origen, E su término, AE su línea de cierre. Como AE es el segm. repres. de la resultante del sistema, vemos que para obtenerlo hubiera bastado construir directamente todo el polígono

ABCDE y trazar su línea de cierre. La resultante R se obtendrá en posición trazando por Q, punto de concurrencia de todas las ff, una paralela a dicha línea de cierre AE.

Si en vez de construir el polígono de las fuerzas tomando los segms. repres. en el orden en que los hemos tomado, es decir en el orden $F' F'' F''' F^{IV}$, se construyen a la misma escala de ff otros polígonos a partir de distintos puntos y tomando los segms. en orden distinto (p. ej. uno en el orden F', F''', F^{IV}, F'' , otro en el orden F'', F''', F^{IV}, F' ; otro en el orden F^{IV}, F', F'', F''' ; etc.), se observará que todos los polígonos de ff. obtenidos tendrán sus líneas de cierre iguales y paralelas y serán por lo tanto todas ellas otros tantos segms. repres. de la resultante.

Luego, para hallar la resultante de un sistema plano de ff. concurrentes, bastará construir un polígono de dichas ff, en el orden que se quiera, y trazar por el punto de concurrencia de las ff una paralela a la línea de cierre del polígono obtenido. Dicha línea de cierre será un segm. repres. de la resultante buscada, debiendo dársele un sentido tal que la flecha indique una marcha desde el origen del polígono hacia el término del mismo. Su longitud por medio de la escala de ff. nos dará la intensidad de la resultante.

Ejemplo: Determinar la resultante del sistema de fuerzas concurrentes F', F'', F''', F^{IV} y F^V (fig. 35). Tomemos un punto cualquiera, A por ej., en el plano, y a partir de él construyamos un polígono de las fuerzas dadas.

Para ello adoptemos previamente la escala de fuerzas, p. ej.: 1 cm repres. 2 t. y tracemos luego $AB = 1$ cm, como segm. repres. de F' , a partir de B tracemos $BC = 2,5$ cm, como segm. repres. de F'' , a continuación de C tomemos CD , de 1,75 cm, como segm. repres. de F''' , a continuación de D tomemos DE , de 0,75 cm de longitud, como segm. repres. de F^{IV} y, finalmente, a partir de E tomemos EG , de 0,65 cm de longitud, como segm. repres. de F^V . La quebrada ABCDEG es el polígono de las cinco fuerzas dadas, A es su origen, G su término, AG es su línea de cierre y es un segm. repres. de la resultante buscada, la que se obtendrá en posición trazando por el punto Q de concurrencia de las componentes una paralela a AG. El sentido de la resultante será el de AG (de A hacia G) y su intensidad se obtendrá multiplicando la longitud de AG, expresada en cm, por la fuerza representada por 1 cm, fuerza que según la escala adoptada es de 2 t. Si AG mide 2,4 cm la intensidad de R será

$$R = 2,4 \text{ cm. } 2 \text{ t. cm}^{-1} = 4,8 \text{ t.}$$

El teorema de las proyecciones que hemos visto para el

caso de 2 fuerzas concurrentes es aplicable también al caso de mayor número de fuerzas concurrentes, pues cualquiera que sea el número de estas fuerzas siempre se verifica que “la proyección de la resultante sobre un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de las proyecciones de las componentes sobre el mismo eje”.

En efecto, si consideramos el sistema de la fig. 35, trazamos en su plano un eje cualquiera XX y proyectamos sobre él los vértices del polígono de las fuerzas, tendremos en A', B', C', D', E' y G' las respectivas proyecciones de A, B, C, D, E y G y en A'B', B'C', C'D', D'E' y E'G' las respectivas proyecciones de F, F', F'', F''' y FIV y FV. En cuanto a los signos de estas proyecciones, si convenimos en dar el signo + a las dirigidas hacia abajo y el signo — a las dirigidas hacia arriba, tendremos

$$\begin{aligned}\text{Proy. } F &= + A'B' \\ \text{» } F' &= + B'C' \\ \text{» } F'' &= + C'D' \\ \text{» } F''' &= - D'E' \\ \text{» } FIV &= - E'G'\end{aligned}$$

Sumando las proyecciones de las fuerzas, se tendrá

$$\begin{aligned}\text{Suma Proj. } F &= \text{Proj. } F + \text{Proj. } F' + \text{Proj. } F'' + \\ &+ \text{Proj. } F''' + \text{Proj. } FIV + \text{Proj. } FV\end{aligned}$$

o bien, sustituyendo por las cantidades anteriores,

$$\begin{aligned}\text{Suma Proj. } F &= A'B' + B'C' + C'D' - D'E' - E'G' = \\ &= A'D' - D'G' = A'G'\end{aligned}$$

pero

$$A'G' = \text{Proj. } R$$

y por lo tanto

$$\text{Suma Proj. } F = \text{Proj. } R$$

L. Q. Q. D.

Si en vez del eje XX se toma otro eje YY y se proyectan sobre él la resultante y sus componentes, se verá que siempre se verifica el teorema enunciado.

El teorema de los momentos que hemos visto para el caso de dos fuerzas puede ser extendido fácilmente a un número cualquiera de fuerzas concurrentes, enunciándose entónces como sigue: “El momento estático de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes con respecto a un punto de su plano es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de las componentes respecto del mismo punto”.

En efecto, en la fig. 34, por lo ya demostrado para

el caso de dos fuerzas concurrentes tendremos sucesivamente:

$$M^{\circ}r'' = M^{\circ}F' + M^{\circ}F''$$

$$M^{\circ}r''' = M^{\circ}r'' + M^{\circ}F''' = M^{\circ}F' + M^{\circ}F'' + M^{\circ}F'''$$

$$M^{\circ}R = M^{\circ}r''' + M^{\circ}F^{IV} = M^{\circ}F' + M^{\circ}F'' + M^{\circ}F''' + M^{\circ}F^{IV}$$

L. Q. Q. D.

Por lo tanto, ya se trate de dos o de más fuerzas concurrentes, siempre se verificará que **la proyección de la resultante sobre un eje es igual a la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes sobre el mismo eje** y que **“el momento estático de la resultante respecto de un punto del plano es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de sus componentes respecto del mismo punto”**.

Equilibrio de fuerzas concurrentes. Condiciones gráficas de equilibrio. — Hemos definidos en el capítulo primero un sistema de fuerzas en equilibrio diciendo que es un sistema de fuerzas cuya resultante es igual a cero. Por otra parte hemos visto que la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes está representada por la línea de cierre del polígono de éstas fuerzas siendo evidente que cuanto menor sea la longitud de esta línea de cierre tanto menor será la intensidad de la resultante.

En general, al construir el polígono de las fuerzas de un sistema, se tendrá, como en las figs. 34 y 35, un punto terminal distinto del origen del polígono, es decir un polígono abierto; la resultante tendrá entonces una intensidad dada por la longitud de la línea de cierre y por la escala adoptada para la representación de las fuerzas. Pero si al construir el polígono de las fuerzas resultara como en la fig. 36 que el término del mismo cayera sobre el origen, es decir si se obtiene un polígono cerrado, entonces la línea de cierre tendrá una longitud nula, representaría por ello una fuerza igual a cero, y por lo tanto el sistema estaría en equilibrio.

Recíprocamente, para que un sistema de fuerzas concurrentes esté en equilibrio es necesario y suficiente que si se construye un polígono de sus fuerzas resulte éste cerrado. Esta condición es necesaria, porque si el polígono de las fuerzas fuera abierto el sistema no estaría en equilibrio por tener una resultante de valor diferente de cero, y es suficiente porque si ella se verifica la resultante del sistema tendrá un valor cero.

Condiciones analíticas de equilibrio. — Si se tiene (fig. 37) un sistema de n concurrentes F, Q, Z , etc., cuya resul-

tante es R , y se proyecta ésta y aquélla sobre 2 ejes ortogonales X e Y , tendremos en virtud del teorema de las proyecciones:

$$(1) \quad R' = F' + Q' + Z' + T' + \dots$$

$$(2) \quad R'' = F'' + Q'' + Z'' + T'' + \dots,$$

siendo R' la proyección de R sobre el eje x , R'' su proyección sobre el eje Y , F' la proyección de F sobre el eje x , F'' la de la misma fuerza sobre el eje Y , Q' la proyección de Q sobre x , Q'' de la misma fuerza sobre Y , etc.

Ahora bien, si el sistema está en equilibrio tiene por definición una resultante nula, es decir $R = 0$, y las proyecciones de R son también nulas, es decir

$$R' = 0 \text{ y } R'' = 0$$

y, sustituyendo en (1) y (2), se tendrá

$$\dots (3) \quad F' + Q' + Z' + T' + \dots = 0$$

$$\dots (4) \quad F'' + Q'' + Z'' + T'' \dots = 0$$

expresiones que nos dicen que cuando un sistema de ff. concurrentes está en equilibrio las sumas de las proyecciones de sus componentes sobre dos ejes cualesquiera son nulas, separadamente, para cada eje.

Recíprocamente: Para que un sistema ff. concurrentes esté en equilibrio es necesario y suficiente que las sumas de las proyecciones de sus componentes sobre dos ejes sean nulas para cada uno de los dos ejes. Esta condición es necesaria porque si cualquiera de esas sumas no fuera nula la resultante tendría un valor diferente de cero, y es suficiente porque si ella se verifica la resultante será nula.

CAPITULO IV

COMPOSICION DE FUERZAS COPLANARES, NO CONCURRENTES.

Composición de fuerzas coplanares no concurrentes. — Polo y polígono funicular. — Teorema de las proyecciones y teorema de los momentos. — Cálculo del momento de un sistema por medio del polígono funicular. — Descomposición de una fuerza en otras tres no concurrentes que actúen en rectas dadas.

Composición de fuerzas coplanares no concurrentes. —

La resultante de un sistema tal de fuerzas puede hallarse siguiendo el procedimiento general que consiste en componer primero dos de las fuerzas dadas, luego la re-

sultante de estas dos ff con una tercera fuerza del sistema, la nueva resultante con una cuarta fuerza, y así sucesivamente hasta haber compuesto todas las fuerzas dadas. Pero este procedimiento es largo y presenta dificultades cuando las fuerzas no se cortan dentro del cuadro del dibujo o cuando son paralelas, por lo que se prefiere aplicar el procedimiento del polígono funicular que expondremos en seguida.

Sean (fig. 38) tres fuerzas no concurrentes F' , F'' y F''' , cuya resultante queremos hallar. A partir de un punto cualquiera A del plano construyamos el polígono ABCD de las fuerzas dadas, tomemos un punto cualquiera O, que llamaremos **polo**, y unámoslo con los vértices del polígono ABCD; obtendremos las rectas OA, OB, OC y OD que llamaremos **radios polares** y que numeraremos I, II, III y IV siguiendo el orden del polígono de las fuerzas. Ahora, a partir de un punto cualquiera E del plano, tracemos una paralela al primer radio polar hasta cortar la fuerza F' , lo que hace en el punto G; por G tracemos una paralela al segundo radio polar hasta cortar la fuerza F'' , lo que hace en H; por H tracemos una paralela al tercer radio polar hasta cortar la fuerza F''' , lo que hace en el punto I, y por este punto tracemos una paralela al cuarto radio polar. Tenemos así la poligonal EGHJ que llamaremos polígono funicular correspondiente al polo O; prolonguemos el primero y el último lados (I y IV) del polígono funicular hasta que se corten, lo que nos da su punto de intersección K. Trazando AD, línea de cierre del polígono de las 4 fuerzas, tendremos en ella un segm. repres. de la resultante del sistema, y, trazando por K, punto de intersección del 1º y último lados del funicular, una $\parallel$ a AD tendremos dicha resultante.

Para demostrarlo, descompongamos cada una de las ff dadas, F' , F'' y F''' , en otras dos que actúen en los lados del funicular que se cortan sobre ella. Así, descompongamos F' en dos ff que actúen en los lados EG y GH del funicular, F'' en dos ff que actúen en los lados GH y HI, F''' en dos ff que actúen en los lados HI e IJ del funicular. Si aprovechamos el segm. AB, representativo de F' , para descomponer F' según EG y GH, trazaremos por A una paralela a EG, lo que nos da AO, y por D una paralela a GH, lo que nos da BO. Estas dos paralelas se cortan en O y por lo tanto AO será el segm. repres. de la componente de F' según EG, componente que llamaremos f' , y OB será el segm. repres. de la componente de F' según GH, componente que llamaremos q' . Aprovechando, de la misma manera,

los segmentos representativos de F'' y de F''' , que tenemos en BC y en CD respectivamente, tendríamos, llamando f'' y q'' las componentes de F'' según HG y HI, y f''' y q''' las de F''' según HI e IJ:

AO	=	segm. repres. de f'
OB	=	» » » q'
BO	=	» » » f''
OC	=	» » » q''
CO	=	» » » f'''
OD	=	» » » q'''

Igualdades en las que vemos en seguida que q' y f'' tendrán igual intensidad y sentido contrario, así como q'' y f''' .

Ahora bien, si en el sistema dado de las ff F' , F'' y F''' sustituimos cada una de estas fuerzas por sus componentes, tendremos un sistema equivalente al dado, pues habremos sustituido cada fuerza por un grupo de dos que le es equivalente, y podrá escribirse

- (1) Sistema F' , F'' y F'''
equivalente del
(2) sistema f' , q' , f'' , q'' , f''' y q'''

pero, observando la figura 38 se ve que las ff. q' y f'' actúan sobre una misma recta y son iguales en intensidad y de sentidos contrarios, por lo que se destruyen y pueden ser suprimidas del sistema (2) sin que se altere el efecto de éste. Del mismo modo q'' y f''' se equilibran por tener igual recta de acción, ser iguales en intensidad y tener sentidos contrarios, y pueden por ello ser suprimidas del sistema (2) sin que se altere el efecto de éste. Haciendo las supresiones indicadas la equivalencia anterior podrá escribirse:

- (1) sistema F' , F'' y F'''
equivalente del
(3) sistema f' y q'''

Como dos sistemas equivalentes tienen igual resultante, bastará hallar la resultante del sistema (3) para tener la del sistema dado. Siendo AOD el polígono de las dos ff. f' y q''' , su línea de cierre será AD y ésta será el segm. repres. de su resultante o sea de la del sistema dado; y como esta recta AD coincide con la línea de cierre del polígono ABCD de las fuerzas dadas, resulta que esta línea nos da un segm. repres. de la resultante buscada.

En cuanto a la resultante, en posición, la obtendremos trazando una paralela a esta línea de cierre por el punto de concurrencia de las ff. f' y q''' . Como estas fuerzas ac-

túan en el primero y en el último lados del funicular construido, será por el punto de intersección de estos lados por donde debe pasar la resultante, quedando por lo tanto demostrada la verdad del procedimiento descripto.

Como ya dijimos, el punto O se llama polo, las rectas que lo unen a los vértices del polígono de las fuerzas se llaman radios polares, y el polígono EGHJ obtenido trazando sucesivamente paralelas a los **radios polares** se llama **polígono funicular** correspondiente al polo O.

Obsérvese bien que los lados del funicular, los radios polares, las fuerzas y sus segm. repres. guardan ciertas relaciones de posición que deben cumplirse siempre y que observados fielmente sirven para construir con exactitud el polígono funicular correspondiente a un polo dado. Esas relaciones son las siguientes:

1ª. A todo radio polar que llega al punto de separación de los segmentos repres. de dos fuerzas corresponde en el funicular un lado paralelo comprendido entre esas mismas dos fuerzas. Así, en la fig. 38, al radio polar II, que va al punto B de separación de los segm. repres. de F' y F'' , corresponde en el funicular el lado GH comprendido entre las ff. F' F'' .

2ª. Si dos radios polares comprenden el segm. repres. de una fuerza, los correspondientes lados del funicular deben cortarse sobre esa fuerza. Así, fig. 38, los radios II y III comprenden el segm. repres. de F'' , en el funicular los correspondientes lados, que son aquí GH y HI, deben cortarse sobre F'' .

El polígono funicular se aplica a la determinación de la resultante de un número cualquiera de fuerzas no concurrentes situadas en un plano.

La resultante de tales sistemas satisface también al enunciado del teorema de las proyecciones y al del teorema de los momentos ya que las demostraciones que se han dado antes son válidas también para este caso de ff. no concurrentes, pues la proyección del polígono de ff. sobre un eje siempre nos demostrará que: “**la proyección de la resultante sobre un eje es igual a la suma algebraica de las proyecciones de las componentes sobre el mismo eje**”, y la aplicación sucesiva del teorema de los momentos demostrado para dos ff. concurrentes a las resultantes parciales que se obtengan componiendo sucesivamente dos a dos todas las ff. de un sistema de ff. no concurrentes, demostrará que “**el momento estático de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes respecto de un punto de su plano es igual**

a la suma algebraica de los momentos estáticos de las componentes respecto del mismo punto”.

Determinación del momento de la resultante. — En virtud del teorema de los momentos, cuando se quiera tener el momento de la resultante de un sistema de ff. F' , F'' , F''' y F^{IV} (fig. 39) respecto de un punto O del plano se calculará el momento estático de cada fuerza respecto de O y se sumará los momentos parciales así obtenidos. Si d' es el brazo de palanca de F' , d'' el de F'' , d''' el de F''' y d^{IV} el de F^{IV} , se tendrá

$$\begin{aligned} M^{\circ}F' &= - F' \cdot d' \\ M^{\circ}F'' &= + F'' \cdot d'' \\ M^{\circ}F''' &= + F''' \cdot d''' \\ M^{\circ}F^{IV} &= - F^{IV} \cdot d^{IV} \end{aligned}$$

y sumando dichos momentos parciales tendremos el momento de la resultante:

$$M^{\circ}R = - F' \cdot d' + F'' \cdot d'' + F''' \cdot d''' - F^{IV} \cdot d^{IV}$$

Si, por ejemplo: $F' = 2t$, $F'' = 1t$, $F''' = 2t$, $F^{IV} = 5t$, $d' = 3m$, $d'' = 2m$, $d''' = 2,5m$ y $d^{IV} = 2m$, resultaría:

$$M^{\circ}R = - 2t \cdot 3m + 1t \cdot 2m + 2t \cdot 2,5m - 5t \cdot 2m = - 9tm.$$

Este procedimiento es muy largo cuando se tiene un gran número de fuerzas o cuando se quiere calcular los momentos de un sistema o de una parte del mismo respecto de varios puntos del plano. En este caso se determina el momento por medio de un polígono funicular siguiendo el procedimiento que pasamos a exponer:

Supongamos que se quiere determinar el momento estático del sistema de ff. F' , F'' , F''' , F^{IV} (fig. 40) con respecto al punto K de su plano. Tomemos una escala de fuerzas y construyamos el polígono ABCDE de las fuerzas dadas; tomemos un polo O, tracemos los radios polares I, II, III, IV y V, construyamos un polígono funicular correspondiente GNQSTV, tracemos por el punto K, centro de momentos, una recta paralela a la resultante del sistema, y marquemos sobre ella los puntos en que la encuentran el primero y el último lados del funicular. Sean G y H esos puntos, puntos que determinan sobre la paralela a R un segmento cuya longitud indicaremos con y . Bajemos ahora desde el polo O una perpendicular OV al segmento AE representativo de la resultante. La distancia OV

del polo a dicho segmento se llama distancia polar y la designaremos con H.

Vamos a demostrar que el momento estático de R, o sea el de todo el sistema, con respecto a K, estará dado por el producto **y**. **H**.

En efecto, si comparamos los triángulos AOE y GJH vemos que, por construcción, se tiene:

$$\begin{array}{l} \text{GJ} \parallel \text{AO} \\ \text{HJ} \parallel \text{EO} \\ \text{GH} \parallel \text{AE} \end{array} ;$$

por lo tanto dichos triángulos son semejantes. Si H es la altura del triángulo AEO, correspondiente al vértice O, y **d** la altura homóloga en el triángulo GJH, podrá escribirse:

$$\frac{\text{A E}}{\text{G H}} = \frac{\text{H}}{\text{d.}} \quad (1)$$

Si se supone que GH representa una f. **y** se tendrá

$$\frac{\text{A E}}{\text{G H}} = \frac{\text{R}}{\text{y}}$$

y sustituyendo en (1) resultará

$$\frac{\text{R}}{\text{y}} = \frac{\text{H}}{\text{d}}$$

de donde

$$\text{R.d} = \text{y.H}$$

pero

$$\text{R.d} = \text{Mom. R respecto de K}$$

por lo tanto

$$\text{Mom. R resp. de K} = \text{y.H}$$

L. Q. Q. D.

En esta fórmula **y** debe expresarse como fuerza y H como longitud, pero puede expresarse **y** como longitud, debiendo tomarse entonces H como fuerza, pues la relación (1) puede escribirse

$$\frac{\text{A E}}{\text{O V}} = \frac{\text{G H}}{\text{d}} = \frac{\text{y}}{\text{d}} \quad (2)$$

y si OV representa una fuerza H

$$\frac{\text{A E}}{\text{O V}} = \frac{\text{R}}{\text{H}}$$

y (2) puede escribirse entonces

$$\frac{R}{H} = \frac{y}{d}$$

de donde $R.d = H.y$

o Mom. R resp. de $K = H.y$

expresión en la que H es una fuerza e y una longitud.

Por lo tanto, para tener el momento estático de la resultante de un sistema de fuerzas respecto de un punto, basta construir un polígono funicular del sistema dado, trazar por el centro de momentos una paralela a la resultante, trazar la distancia polar y multiplicar esta distancia polar por el segmento que sobre la paralela a la resultante trazada por el centro de momentos interceptan el primero y el último lados del funicular, debiendo ser expresada una de dichas cantidades como fuerza y la otra como longitud.

Como ya lo hicimos notar, este procedimiento permite determinar rápidamente el momento de todo un sistema de fuerzas o de parte del mismo respecto de uno o de varios puntos del plano.

Sea p. ej., el sistema de ff. F' , F'' , F''' y el punto T, centro de momentos (fig. 41). Para hallar el momento del sistema respecto de T construyamos el polígono de las fuerzas ABCD, tomemos el polo O, tracemos los radios polares y construyamos un funicular correspondiente EGHJ.

Por T tracemos una paralela a la línea de cierre del polígono de las ff. y marquemos sobre esa paralela los puntos en que la encuentran el primero y el último lados del funicular, puntos que resultan ser K y L. Sabemos que el momento buscado estará dado por el producto.

$$y . H = KL . H$$

Supongamos ahora que queremos hallar el momento del sistema con respecto a otro punto T' del plano. Nos bastará trazar por éste una paralela a la línea de cierre del polígono de las fuerzas, marcar sobre ella los puntos K' y L' en que el primero y el último lados del funicular la encuentran, medir el segm. K'L' y multiplicarlo por H.

$$y' . H = K'L' . H$$

Si se quiere determinar el momento de una parte del sistema solamente, por ej. el momento del sistema formado por F' y F'' únicamente, con respecto a T, observaremos que en ABC ya tenemos un polígono de las ff. F' y F'' , en AC su línea de cierre, en O un polo, en OA, OB y OC los

radios polares y en EGH un polígono funicular correspondiente a dicho polo. Por consiguiente, bastará trazar por T una paralela a AC, determinar sobre ella los puntos N y Q en que la encuentran los lados primero y últimos (son los I y III) de ese funicular y multiplicar finalmente el segmento NQ por la distancia polar h' .

Del mismo modo se tendría que el momento del sistema F' y F'' respecto de T' sería igual a $N'Q'.h'$.

Vemos pues la facilidad con que se puede calcular los momentos de un sistema o de parte del mismo con respecto a cualquier punto del plano.

Téngase bien presente que en el producto

$$y \cdot H$$

debe siempre expresarse uno de los factores como fuerza y el otro como longitud, lo que quiere decir que uno de los segmentos debe ser medido a la escala de las fuerzas y el otro a la escala de longitudes.

Descomposición de una fuerza en otras tres no concurrentes. — Hemos visto como se descompone una fuerza en otras dos que se cortan sobre la recta de acción de la fuerza dada.

La descomposición de una fuerza F en tres o más situadas en un mismo plano con F y que se corten en un mismo punto (fig. 42) de la recta de acción de la fuerza dada es un problema indeterminado pues tiene infinitud de soluciones.

En cambio es perfectamente determinado el problema de descomposición de una fuerza F (fig. 43) en otras tres, coplanares entre sí y con F , que actúen en rectas no concurrentes a , b y c . Esta descomposición se efectúa como sigue: se determina el punto de intersección de una de las rectas dadas con la fuerza dada, por ej. el de a con F , sea A dicho punto. Se determina en seguida el punto de intersección de las otras dos rectas b y c entre sí, lo que nos da el punto B. Se unen estos dos puntos A y B y se obtiene una recta x auxiliar. Se descompone en seguida F en dos fuerzas que actúen en a y en x , lo que será posible porque a y x se cortan sobre F , y en seguida se descompone la fuerza x , obtenida, en dos que actúen en b y c . En el caso de la figura 43 tomaríamos por ejemplo CD = segm. repres. de F , por C trazaríamos una $\parallel$ a a y por D una $\parallel$ a x ; estas paralelas se cortan en E y entonces CE sería el segm. repres. de la componente que actuará en a , y ED sería el segm. repres. de la fuerza que actuaría en x . En seguida descompondríamos esta fuerza x en dos que ac-

tuarán en **b** y **c** (lo que es posible porque **b** y **c** se cortan sobre **x**) Para ello, siendo ED un segm. repres. de **x**, trazáramos por E una $\parallel$ a **c** y por D una $\parallel$ a **b**; estas $\parallel$ se cortan en G, y tendremos en EG el segm. repres. de la componente que actuará en **c**, y en GD el segm. repres. de la que actuará en **b**, quedando por lo tanto determinadas las tres componentes buscadas, las que podrán marcarse ahora sobre las rectas **a**, **b**, y **c**, dándoles el mismo sentido que tengan sus respectivos segm. representativos.

Es evidente que las fuerzas así obtenidas, F' , F'' y F''' , son las componentes buscadas, pues si se procede a su composición se obtiene como resultante justamente la fuerza dada F . Esto se ve fácilmente en el polígono de las fuerzas CEGD.

Compruébase, haciendo las construcciones pertinentes, que se llega exactamente al mismo resultado si se determina $A' =$ punto intersección F con **b**, $B' =$ punto intersección **a** con **c**, se traza $A'B' = x'$; se descompone F según **b** y x' , y luego x' según **a** y **c**.

La obtención del mismo resultado, cualquiera que sea la recta auxiliar que se tome, demuestra que el procedimiento indicado es exacto. Si se desea una demostración matemática de esta exactitud compóngase un sistema de 3 ff. coplanares no concurrentes y compárese el cuadrilátero completo formado por el polígono de las fuerzas con la figura formada por las tres fuerzas, sus resultantes parciales y su resultante total.

Este procedimiento tiene frecuente aplicación en los sistemas reticulares para la determinación de las tensiones de las barras. (Método de Culmann).

CAPITULO V.

FUERZAS COPLANARES PARALELAS

Composición de fuerzas paralelas coplanares. — Teorema de las proyecciones y teorema de los momentos. — Composición de dos fuerzas paralelas. — Relación entre las intensidades de las fuerzas y sus distancias a la resultante. — Generalización de dicha relación para el grupo de tres fuerzas formado por dos fuerzas paralelas y su resultante. — Determinaciones gráfica y analítica de la resultante de dos fuerzas paralelas. — Descomposición de una fuerza en otras dos paralelas a ella; procedimientos gráfico y analítico. — Nociones de fuerzas continuas paralelas.

Composición de fuerzas paralelas coplanares. — La com-

posición de fuerzas paralelas se hace siguiendo exactamente el procedimiento del polígono funicular expuesto en el capítulo anterior para el caso de fuerzas no concurrentes, coplanares.

Así (fig. 44) si se desea componer el sistema de fuerzas F' , F'' , F''' y F^{IV} , construiremos un polígono de estas fuerzas adoptando previamente una escala de fuerzas. Resulta así el A B C D E, que se reduce en este caso a una recta por tratarse de fuerzas paralelas entre sí. Tomaremos luego un polo O, trazaremos los radios polares y construiremos en seguida un funicular G I J K L N de las fuerzas dadas. Prolongando el primero y el último lados de este funicular, tendremos en el punto V de intersección de ambos un punto por el que pasará la resultante buscada. La intensidad de ésta la calcularemos midiendo su segm. repres. AE, línea de cierre del polígono de las fuerzas; el sentido será el del mismo segm. AE, y su posición se obtendrá trazando por V una paralela a dicha línea de cierre. Así, en nuestro caso, obtendríamos como resultante la fuerza R igual a nueve y media toneladas.

El polígono de las ff nos demuestra que en el caso de fuerzas paralelas el segm. repres. de la resultante es igual a la suma algebraica de los segm. repres. de las componentes y que por lo tanto la intensidad de la resultante será igual a la suma algebraica de las intensidades de las componentes. Así, en la fig. 44, se tiene

$$R = 2t. + 3t. + 2,5t. + 2t. = 9,5t.$$

También vemos en el polígono de las fuerzas que la resultante tendrá la misma dirección que las componentes, es decir, que será paralela a ella.

En la fig. 45 tenemos otro ejemplo de composición de fuerzas paralelas por medio del polígono funicular.

Vemos que también en este caso se tiene:

$R = \text{Suma componentes} = F' + F'' - F''' = 2t$,
siendo F''' negativa, si F' y F'' son positivas, por tener F''' sentido contrario al de estas últimas fuerzas.

El momento estático de un sistema de fuerzas paralelas respecto de un punto de su plano se determina siguiendo exactamente el procedimiento explicado en el capítulo anterior para las fuerzas no concurrentes.

Así si se quiere (fig. 44) el momento estático de las ff. F' , F'' , F''' y F^{IV} respecto del punto T, bastará, una vez construido el funicular G I J K L N, trazar por T una paralela a la resultante, o sea una paralela a la dirección ge-

neral de las fuerzas, determinar sobre ella el segm. $QS = y$ que interceptan el primero y el último lados del funicular y multiplicarlo por la distancia polar H .

En nuestro dibujo, si se considera y como fuerza y H como longitud, se tendrá:

$$y = 4,6t$$

$$H = 5m$$

$$\text{Mom. R resp. T} = y.H = 4,6t \times 5m = 23 \text{ tm}$$

siendo positivo este momento según resulta de observar la posición de la resultante respecto del centro T .

De la misma manera, en la figura 45 se ha calculado los momentos del sistema de ff F' , F'' y F''' respecto de los puntos T y T' respectivamente.

Construido el funicular $EGIJK$, trazadas por T y T' las paralelas a la resultante del sistema, determinados los puntos Q , S , Q' y S' de intersección de dichas paralelas con los lados primero y último del funicular, y medidos los segms. $QS = y$, y $Q'S' = y'$, considerados como fuerzas, y la distancia polar H , considerada como longitud, resulta:

$$\text{Mom. R resp. de T} = y.H = -1,1t \times 4,4m = -4,84tm$$

$$\text{Mom. R resp. de T'} = y'.H = -3,6t \times 4,4m = -15,84tm$$

siendo estos momentos negativos por la disposición relativa de la resultante y de los puntos T y T' .

Teorema de las proyecciones. — Es evidente que en este caso de fuerzas paralelas se verifica también el teorema de las proyecciones que dice “la proyección de la resultante de un sistema de fuerzas sobre un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes sobre el mismo eje”.

La simple inspección de los polígonos de fuerzas de las figuras 44 y 45 lo demuestra, así como el hecho de que siendo un sistema de fuerzas paralelas simultáneamente un caso particular de un sistema de fuerzas no concurrentes y de un sistema de fuerzas concurrentes (1), su resultante debe gozar de las mismas propiedades generales que las resultantes de dichos sistemas.

Teorema de los momentos. — En virtud de lo expuesto en el párrafo que precede, debe verificarse también que “el momento estático de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas coplanares respecto de un punto de su plano es

(1) En efecto, un sistema de fuerzas paralelas es un sistema de ff. no concurrentes que forman todas igual ángulo entre sí y es también un sistema de ff. concurrentes cuyo punto de concurrencia está en el infinito.

igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de sus componentes respecto del mismo punto''.

Este teorema tiene una demostración sencilla para el caso que consideramos. En efecto, sea (fig. 46) un sistema de tres fuerzas paralelas F' , F'' y F''' , sea ABCD un polígono de dichas fuerzas, EGIJ un funicular de las mismas correspondiente al polo O, y R la resultante del sistema. Vamos a demostrar que el momento de R respecto de un punto T del plano será igual a la suma algebraica de los momentos de F' , F'' y F''' respecto del mismo punto T.

Tracemos por T una paralela a la dirección general de las fuerzas y prolonguemos los lados del funicular hasta que la corten.

El primer lado la corta en L, el segundo en N, el tercero en P y el cuarto en Q. Sabemos, por lo demostrado ya, que

$$\text{Mom. R resp. T} = LQ \times H$$

Ahora bien, comparando los triángulos LGN y AOB se ve que son semejantes, por lo que se podrá escribir

$$\frac{LN}{AB} = \frac{d'}{H} \quad (1)$$

y, si LN representa una fuerza y' ,

$$\frac{LN}{AB} = \frac{y'}{F'}$$

sustituyendo en (1)

$$\frac{y'}{F'} = \frac{d'}{H} \therefore F' \cdot d' = y' \cdot H$$

o

$$\text{Mom. } F' \text{ resp. T} = y' \cdot H \quad (2)$$

Análogamente, comparando los triángulos NIP y BOC entre sí y los triángulos PJQ y COD entre sí, tendríamos

$$\text{Mom. } F'' \text{ resp. T} = y'' \cdot H \quad (3)$$

$$\text{Mom. } F''' \text{ resp. T} = y''' \cdot H \quad (4)$$

Sumando miembro a miembro las anteriores igualdades (2), (3) y (4) se tendrá

$$\text{Mom. } F' + \text{Mom. } F'' + \text{Mom. } F''' = y' \cdot H + y'' \cdot H + y''' \cdot H$$

o bien, sacando H factor común.

$$\text{Mom. } F' + \text{Mom. } F'' + \text{Mom. } F''' = (y' + y'' + y''') \cdot H$$

pero, según la figura 46,

$$y' + y'' + y''' = y$$

luego

$$\text{Mom. } F' + \text{Mom. } F'' + \text{Mom. } F''' = y.H$$

y como $y.H = \text{Mom. } R \text{ resp. } T$, resultará
 $\text{Mom. } F' \text{ resp. } T + \text{Mom. } F'' \text{ resp. } T + \text{Mom. } F''' \text{ resp. } T =$
 $= \text{Mom. } R \text{ resp. } T$

L. Q. Q. D.

Caso de dos fuerzas paralelas. — La resultante de dos ff. paralelas, ya de igual sentido = (fig. 47), ya de sentido contrario = (fig. 48), se halla fácilmente por medio del polígono funicular (véase figs. 47 y 48). En el caso de ff. de igual sentido la resultante actúa entre las componentes y su intensidad es

$$R = F' + F''$$

En el caso de ff. de sentido contrario vemos que la resultante actúa fuera de las dos ff., del lado de la mayor que tiene el sentido de ésta y que su intensidad es

$$R = F'' - F'$$

El problema inverso, o sea el que consiste en descomponer una fuerza R en otras dos que actúen en rectas paralelas a la de acción de R , se resuelve fácilmente como sigue: sea (fig. 49) una fuerza R que se quiere descomponer en otras dos que actúen en las rectas a y $b \parallel R$. Por un punto J , cualquiera de la recta de acción de R se trazan dos rectas cualesquiera I y II y se determina el punto de intersección de cada una de ellas con una de las rectas a y b . Por ej., se determina G , punto de intersección de I y a , y H punto de intersección de II con b . Se unen en seguida G y H por medio de una recta, se toma un segm. DE repres. de la f. dada R , por uno de sus extremos, por ej. el D , se traza una $\parallel$ a una de las rectas trazadas por J , p. ej. a la I , y por el otro extremo una $\parallel$ a la otra recta trazada por J . Estas dos paralelas se cortarán en un punto que llamaremos O en la fig. 49. Si ahora, por este punto O trazamos una paralela OK a la recta GH , esta paralela dividirá el segmento DE en dos porciones que son los segmentos representativos de las componentes buscadas. Así DK es el segm. repres. de la componente que actuará en a , componente que llamaremos F' , y KE es el segmento representativo de la componente que actuará en b , componente que llamaremos F'' .

La simple observación de la figura 49 nos demuestra que realmente las fuerzas F' F'' así obtenidas son las componentes de R según a y b , pues si se compone estas dos ff. F' y F'' se obtiene R como resultante.

Este procedimiento resulta de la simple inversión del procedimiento seguido para componer dos fuerzas paralelas.

Obsérvese bien que la componente F' tiene por segm. repres. el segm. DK comprendido entre los radios OK y OD que son $\parallel$ a las rectas GH y GJ que se cortan en un punto de dicha componente, y que, análogamente, la componente F'' tiene por segm. repres. el segm. KE comprendido entre los radios OK y OE paralelos respectivamente a las rectas HG y HJ que se cortan en un punto de F'' .

Si las dos rectas dadas a y b están a un mismo lado de la f. R que se quiere descomponer (fig. 50) el problema se resuelve del mismo modo.

Tomaremos un punto cualquiera D sobre R, por D trazaremos dos rectas cualesquiera I y II hasta cortar las rectas a y b ; sea E el punto de intersección de I con a , y sea G el de intersección de II con b . Uniremos E con G por medio de una recta. Tomaremos en seguida, a una escala de fuerzas determinada, un segm. AB repres. de la fuerza R, trazaremos por uno de sus extremos una $\parallel$ a I y por el otro extremo una $\parallel$ a II. Estas dos paralelas se cortarán en un punto que llamaremos O y por el que trazaremos una paralela a EG. Esta paralela es la recta OC y ella determina sobre la recta en que se encuentra el segmento AB, repres. de R, dos segms. que son los repres. de las componentes que se buscan. En este caso se tiene en CB el segm. repres. de la componente F' que actuará en a , y en AC el segm. repres. de la componente F'' que actuará en b . El sentido de las componentes se obtendrá fácilmente recordando que solamente cuando dos componentes paralelas son de sentido contrario su resultante pasa fuera de ellas, que la más próxima a la resultante tiene igual sentido que ella y es la mayor en intensidad de las dos componentes, y que la otra componente es de sentido contrario.

Obsérvese que también en este caso el segm. repres. de F' resulta estar comprendido entre los radios OC y OB respectivamente $\parallel$ a las rectas DE y EG que se cortan sobre F' , y el segm. repres. de F'' resulta comprendido entre los radios OA y OC respectivamente $\parallel$ a las rectas GD y GE que se cortan sobre F'' . De esta observación y de la formulada para el caso en que las componentes tienen igual sentido se induce la regla general siguiente, aplicable para saber cuál es el segm. repres. de cada una de las componentes buscadas: A cada componente corresponde en el polígono de las fuerzas un segm. repres. comprendido entre los radios polares paralelos a las rectas que se cortan sobre dicha componente.

Los problemas anteriores, de composición de dos fuerzas paralelas y de descomposición de una fuerza en otras dos paralelas a ella, pueden también ser resueltos analíticamente mediante ciertas relaciones que existen entre las intensidades de las componentes, la de su resultante, y las distancias entre todas estas fuerzas.

En efecto, sean (fig. 51-a) F' y F'' dos ff. paralelas de igual sentido y sea R su resultante; llamemos d la distancia que existe entre las dos componentes, d' la distancia que existe entre F' y R , y d'' la distancia entre F'' y R .

En virtud del teorema de los momentos podrá escribirse, para un punto cualquiera del plano de las fuerzas,

$$(1) \text{ Mom. } R = \text{Mom. } F' + \text{Mom. } F''$$

Si los momentos se refieren a un punto A , situado sobre la resultante, se tendrá

$$\text{Mom. } R \text{ resp. } A = 0$$

y podrá escribirse la ecuación (1) como sigue:

$$\text{Mom. } F' \text{ resp. } A + \text{Mom. } F'' \text{ resp. } A = 0 \quad (2)$$

pero

$\text{Mom. } F' \text{ resp. } A = -F'.d'$ y $\text{Mom. } F'' \text{ resp. } A = F''.d''$ luego, sustituyendo en (2)

$-F'.d' + F''.d'' = 0$ de donde $F'.d' = F''.d''$ y, finalmente,

$$\frac{F'}{F''} = \frac{d''}{d'} \quad (3)$$

ecuación que nos dice que " las intensidades de las componentes son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias a la resultante.

Si los momentos se refieren a un punto B de la componente F' , se tendrá

$$\text{Mom. } R \text{ resp. } B = R.d'$$

$$\text{Mom. } F' \text{ resp. } B = 0$$

$$\text{Mom. } F'' \text{ resp. } B = F''.d$$

y, sustituyendo en (1), se tendrá

$$R.d' = F''.d$$

de donde

$$\frac{R}{F''} = \frac{d}{d'} \quad (4)$$

ecuación que nos dice que las intensidades de las fuerzas R y F'' son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias a la otra fuerza F' .

De la misma manera, si tomamos como centro de momentos un punto C situado sobre F'', se tendrá:

$$\text{Mom. R resp. C} = - R \cdot d''$$

$$\text{Mom. F' resp. C} = - F' \cdot d$$

$$\text{Mom. F'' resp. C} = 0$$

y la ecuación (1) se transformará en

$$- R \cdot d'' = - F' \cdot d \quad \text{o} \quad R \cdot d'' = F' \cdot d$$

de donde

$$\frac{R}{F'} = \frac{d}{d''} \quad (5)$$

ecuación que nos dice que las intensidades de las ff. R y F' son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias a la otra componente F''.

El mismo raciocinio aplicado al caso de dos fuerzas paralelas de sentidos contrarios (fig. 51-b), nos conducirá a ecuaciones exactamente iguales a las (3), (4) y (5) expuestas, y por lo tanto, puede generalizarse en un solo enunciado las propiedades encontradas:

Cuando se considera el grupo de tres fuerzas formado por dos fuerzas paralelas y su resultante, las intensidades de dos cualesquiera de dichas tres fuerzas son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias a la tercera fuerza.

Las ecuaciones (3), (4) y (5) son las que se emplean para resolver analíticamente los problemas de composición de dos fuerzas paralelas y el problema inverso.

Supongamos, por ej., que se quiere determinar la resultante de las dos fuerzas F' igual 100 kg y F'' igual 200 kg situadas a seis metros una de otra (fig. 52). Sabemos ya que la resultante es paralela a las fuerzas dadas, que pasará entre ellas, que tendrá su mismo sentido y que su intensidad R será igual a la suma de las intensidades de las componentes, es decir

$$R = F' + F'' = 100 \text{ kg} + 200 \text{ kg} = 300 \text{ kg}$$

Para tener la resultante en posición bastará conocer su distancia a una de las fuerzas dadas, o sea conocer d' o d'',

para lo que bastará aplicar una de las ecuaciones (4) o (5).

La (4) nos dice:

$$\frac{F''}{R} = \frac{d'}{d}$$

de donde

$$d' = \frac{F'' \cdot d}{R}$$

y, siendo

$$F'' = 200 \text{ kg}, d = 6\text{m}, R = 300 \text{ kg}$$

resultará

$$d' = \frac{200 \text{ kg} \times 6\text{m}}{300 \text{ kg}} = 4\text{m}$$

De la misma manera, aplicando la ecuación (5), obtendremos el valor de d'' , aunque este valor puede hallarse observando que $d' + d'' = d$.

Si se tratara de componer dos fuerzas paralelas, de sentido contrario, téngase presente que entonces la intensidad de la resultante es igual a la diferencia aritmética de las dos componentes, que su recta de acción pasa fuera de las componentes, del lado de la mayor y que tiene el mismo sentido que ésta.

Así, en el caso de figura 53, se tendrá:

$$R = F' - F'' = 500 \text{ kg} - 300 \text{ kg} = 200 \text{ kg}.$$

R actuará arriba de F' , por ser F' mayor que F'' , y tendrá el mismo sentido que F' . En cuanto a la posición de R se determinará calculando d' o d'' por medio de cualquiera de las ecuaciones (4) o (5). Aplicando la (4) tendremos:

$$\frac{R}{F''} = \frac{d}{d'}$$

de donde

$$d' = \frac{F'' \cdot d}{R}$$

y siendo

$$F'' = 300 \text{ kg} ; d = 2\text{m} ; R = 200 \text{ kg}$$

resultará

$$d' = \frac{300 \text{ kg} \times 2\text{m}}{200 \text{ kg}} = 3\text{m}.$$

Podrá en seguida calcularse d'' por la fórmula (5) o por la relación

$$d'' = d - d'$$

El problema inverso de descomponer una fuerza en otras dos paralelas a ella se resuelve analíticamente por medio de las mismas fórmulas (4) y (5) debiendo hacerse notar que en este caso las incógnitas son las intensidades de las componentes que se busca.

Si se trata de descomponer (fig. 54) una fuerza R igual 50 kg en otras dos que actúen en las rectas a y b situadas a ambos lados de R , una a 2 metros y la otra a 3 metros, tendremos que las componentes tendrán igual sentido que R y que su valor podrá deducirse de cualquiera de las fórmulas (4) o (5). Así, la (4) nos da:

$$\frac{R}{F'} = \frac{d}{d''}$$

de donde

$$F' = \frac{R \cdot d''}{d}$$

y siendo

$R = 50 \text{ kg}$; $d'' = 3\text{m}$; $d = d' + d'' = 5\text{m}$
resultará

$$F' = \frac{50 \text{ kg} \times 3\text{m}}{5\text{m}} = 30 \text{ kg}$$

(El valor de F'' se deducirá de la relación (5) o de la ecuación

$$R = F' + F''$$

Exactamente del mismo modo se procede para descomponer una fuerza R en otras dos que actúen en rectas a y b situadas a un mismo lado de R debiendo tenerse presente que en este caso las componentes serán entre sí de sentido contrario, que la que está más cerca de la fuerza dada tendrá el mismo sentido que ésta y será la de mayor intensidad.

Así, en el caso de la (fig. 55), se tendrá

$$\frac{R}{F'} = \frac{d}{d''}$$

$$F' = \frac{R \cdot d''}{d}$$

y sustituyendo valores

$$F' = \frac{70 \text{ kg} \times 4\text{m}}{2\text{m}} = 140 \text{ kg}$$

y

$$F'' = R - F' = 70 \text{ kg}.$$

Los problemas anteriores tienen gran aplicación en las vigas y armaduras para la determinación de reacciones.

Las relaciones que existen entre las intensidades de dos fuerzas paralelas, la de su resultante y las distancias entre estas fuerzas, nos conducen a hacer uso de los siguientes procedimientos gráficos para la resolución de los problemas que acabamos de ver.

a) Composición de dos fuerzas paralelas. Sean F' y F'' las ff. paralelas que se quiere componer (figs. 56 y 57). Se sabe que

$$R = F' + F''$$

según las componentes tengan iguales o contrarios sentidos. Si sobre cada una de las componentes se toma un segm. repres. de la otra componente (AB y CD en las figs. 56 y 57) y se unen los extremos de estos segmentos de manera que las rectas de unión unan siempre el punto de partida de un segm. repres. con el de llegada o término del otro segmento repres., estas rectas se cortarán en un punto E de la resultante buscada. En efecto, si se traza por E una $\parallel$ a las componentes y se marcan las distancias d, d' y d'' es fácil demostrar, por comparación de los triángulos DCE y ABE, que

$$\frac{F'}{F''} = \frac{d''}{d'}$$

y que por lo tanto la resultante así hallada satisface las relaciones (3), (4) y (5) antes encontradas.

Si (figs. 58 y 59) se quiere descomponer una fuerza R en otras dos paralelas a ella, que actúen en rectas a y b dadas, se tomará sobre una de estas rectas un segmento AB representativo de la fuerza R que se quiere descomponer, por uno de los extremos de este segmento se trazará una recta cualquiera c, que corte la fuerza R y la otra componente buscada, determinando al mismo tiempo los puntos de intersección, se unirá el otro extremo del segm. repres. de R con el punto de intersección G situado sobre la otra componente buscada (resultando así la recta GA), y se trazará por el punto de intersección E situado sobre R una paralela a esa recta GA hasta cortar el segm. repres. de R o su prolongación. El punto de intersección obtenido divide dicho segm. repres. de R en dos segmentos que son los representativos de las componentes buscadas.

En efecto, la comparación de los triángulos semejantes que se encuentran en las figuras 58 y 59 demostrará que las

fuerzas así obtenidas satisfacen las relaciones que caracterizan el grupo de tres fuerzas formado por dos fuerzas paralelas y su resultante. (Hágase, como ejercicio, dicha demostración).

Nociones de fuerzas continuas. — Hemos visto en el capítulo primero varios ejemplos de fuerzas continuas; tiene especial interés para nosotros el saber hallar la resultante de algunas de dichas fuerzas, por ejemplo de fuerzas continuas de acciones paralelas entre sí, que cargan puntos de una misma recta, constantes o no en intensidad.

Supongamos una chapa rectangular pesada ABCD, de pequeño espesor constante s , puesta de canto sobre una recta AB (fig. 60). Esta chapa ejerce una acción continua sobre AB originada por la acción de su peso sobre dicha recta. Es evidente que sobre un centímetro de luz, cualquiera que sea la parte de AB en que se le tome, actúa el peso de una porción paralelipipédica de chapa, de 1 cm. de ancho, de altura h , y de espesor s . Siendo constante h a lo largo de AB, se tendrá sobre esta recta una carga o fuerza uniformemente distribuída, cuyo valor se expresará, según lo dicho en el cap. 1.º, indicando la fuerza total que corresponde a la unidad de longitud de AB. Si, por ej., el peso total de la chapa es P y la longitud de AB es l , se dirá que sobre AB actúa una carga uniformemente distribuída de intensidad

$$p = \frac{P}{l}$$

Se acostumbra decir también que sobre AB actúa una carga total P uniformemente distribuída sobre toda su longitud.

Si ABCD fuera un muro de espesor apreciable, pero constante, fácil es imaginar concentrado todo el peso del muro en el plano vertical que pasa por el eje de la viga, para lo que basta suponer reducido el muro a una lámina, pero conservando todo su peso. La carga continua producida por el muro sobre AB se expresaría indicando el peso p que corresponde a cada metro o a cada centímetro de luz, o el peso total que corresponde a una luz determinada l , siendo evidente que siempre que se trate de carga uniformemente distribuída, se tendrá:

$$p = \frac{P}{l}$$

$$y \dots \dots \dots P = p.l$$

Si se supone AB dividido en un gran número de partes elementales y se considera la fuerza que actúa sobre cada elemento, se tendrá (en este caso de fuerzas producidas por la gravedad como en el caso de presiones sobre paredes planas) un sistema de muchas fuerzas paralelas cuya resultante interesa saber determinar. Tratándose de fuerzas paralelas, la resultante será igual a la suma de las componentes y se conocerá su valor en función de las cantidades p y l , que son dadas. En cuanto a su posición, ella pasa por el punto medio de AB y es paralela a sus componentes. En efecto, si se ha dividido AB en un número par de partes iguales podrán agruparse todas las fuerzas elementales en grupos de dos fuerzas iguales, formados, cada uno, por una fuerza elemental f y su simétrica f' (fig. 60 y 61). Todos los grupos así formados tienen por resultante fuerzas que actúan sobre la misma recta y paralela a las componentes y equidistante de ellas, es decir la recta que pasa por el medio de AB; es evidente que la resultante de estas resultantes parciales será una fuerza que actuará en la misma recta y , quedando por lo tanto demostrado que cuando una fuerza continua uniformemente distribuida carga una recta, su resultante pasa por el punto medio de esta recta.

Si la intensidad de la fuerza continua es variable a lo largo de la recta cargada (p. ej., en la fig. 62, el peso del muro ABCD sobre AB) puede hallarse su resultante considerando las acciones parciales correspondientes a elementos, l , l' , l'' , l''' , etc. integrantes de AB, y componiendo todas las fuerzas parciales así obtenidas: f , f' , f'' , etc. Como regla general se tomarán elementos bastante cortos como para suponer que sin error sensible pueda tomarse la parte de muro que le corresponda como un muro de altura constante sobre el elemento considerado.

Cuando la intensidad de la fuerza continua varía de un punto a otro de la recta cargada obedeciendo una ley determinada, será en general posible hallar una fórmula que dé la posición de la resultante de toda la carga. Por ejemplo, en el caso de una viga AB (fig. 63) que sostiene un muro de espesor uniforme pero de altura que aumenta desde cero hasta un máximo h proporcionalmente a las distancias al apoyo en que su altura es cero; y también en el caso de una pared plana lateral, fig. 64, que recibe las presiones de un líquido, presiones que sabemos son proporcionales a las profundidades. En estos dos casos particulares la intensidad en un punto de la recta cargada es directamente proporcional a la distancia de dicho punto al extremo en que la intensidad es nula, y la resultante actúa en una recta para-

lela a las acciones elementales, situada a una distancia $1\frac{1}{3}$ del punto más cargado de la recta cargada, siendo 1 la longitud de esta recta.

Si sobre una recta actúa una carga continua (fig. 65) y, a partir de varios puntos suficientemente próximos A, C, D, etc., se toman segmentos paralelos y de longitudes proporcionales a las intensidades de la fuerza continua en los mismos, y se unen luego por medio de un trazo continuo los extremos libres de dichos segmentos (A', B', C', etc.), se tendrá una superficie AA'D'B'BDA que se llama superficie de la carga continua que actúa sobre AB o, simplemente, superficie de carga de AB. Las ordenadas de esta superficie son, por construcción, proporcionales a las intensidades de la fuerza continua en los puntos correspondientes, y, por ello mismo, las áreas comprendidas entre dos pares de ordenadas son proporcionales a las cargas totales que actúan sobre las porciones de AB interceptadas por esos dos pares de ordenadas. Así, las áreas CC'DD' y BB'EE' son proporcionales a las cargas totales que actúan sobre CD y EB respectivamente.

En el caso de una carga continua uniformemente distribuida, la superficie de carga será un rectángulo (fig. 60) puesto que la intensidad es constante en todos los puntos de la recta cargada AB. En el de la figura 64 la superficie de carga será un triángulo ABC puesto que las intensidades son directamente proporcionales a las profundidades.

Esta representación de cargas continuas por medio de superficie de carga es usual en vigas cargadas y en otros problemas. Veremos más tarde como por medio de ella se simplifica la determinación de la resultante de una fuerza continua.

Por ahora sólo agregaremos que puede hallarse dicha resultante dividiendo la recta cargada en elementos, determinando las acciones parciales que actúan sobre dichos elementos y buscando luego su resultante; o bien, dividiendo la carga total en porciones cuyas resultantes parciales sepamos hallar y componiendo luego estas resultante parciales.

CAPITULO VI.

PARES COPLANARES DE FUERZAS

Par de fuerzas. — Momento estático de un par. — Constancia de dicho momento para todos los puntos de su plano. — Valor del momento. — Sustitución de un par por otro. — Resultante de dos o más pares de fuerzas. — Momento del par resultante. — Pares equilibrantes. — Resultante de un par y de una fuerza coplana-

res. — Efecto producido por la introducción de un par de fuerzas en un sistema de resultante única. — Par y fuerza equilibrantes.

Par de fuerzas. — Llámase par de fuerzas el sistema formado por dos fuerzas paralelas, de igual intensidad y de sentidos contrarios. Así las fuerzas F' y F'' (fig. 66) paralelas y de contrarios sentidos, constituyen un par si sus intensidades son iguales, es decir, si $F' = F''$.

La distancia d entre las dos fuerzas del par se llama su brazo de palanca y se mide, según sabemos, sobre la perpendicular, común a las dos fuerzas del par.

Si se aplican las relaciones encontradas en el capítulo anterior a la determinación de la resultante de un par de fuerzas se verá que se obtiene como intensidad de la resultante una fuerza cero, pues

$$R = F' - F'' = 0$$

por ser F' y F'' iguales entre sí. Y en cuanto a la distancia de la resultante a cualquiera de las componentes se obtendrá un valor infinito.

Luego un par de fuerzas tiene por equivalente una fuerza cero que actúa en el infinito. Es pues un sistema irreducible a una sola fuerza y, por ello, exige un estudio especial.

En este capítulo sólo estudiaremos algunas generalidades y la composición de pares coplanares.

Momento estático de un par. — El momento de un par $F' F''$ con respecto a un punto cualquiera O de su plano, se hallará siguiendo los procedimientos expuestos en los capítulos anteriores para hallar el momento de un sistema de fuerzas.

Uno de los métodos consiste en aplicar el teorema de Varignon o sea en calcular el momento de cada fuerza con respecto al punto O y hacer luego la suma algebraica de los momentos obtenidos. Así en la figura 67 tendríamos:

$$\begin{aligned} M^{\circ} \text{ par.} &= M^{\circ} F' + M^{\circ} F'' \\ M^{\circ} \text{ par.} &= F' \cdot a' - F'' \cdot a'' \end{aligned}$$

Otro procedimiento consiste en determinar el momento de todo el sistema por medio del polígono funicular; pero vamos a ver en seguida que el momento de un par de fuerzas se obtiene siempre por medio de una relación muy sencilla y que **es constante en valor y en signo para todos los puntos de su plano.**

En efecto, sea (fig. 68) un par $Q'Q''$ y tomemos, en su plano, como centros de momentos, tres puntos A, B y C, situados en todas las posiciones relativas que en el plano del par puede tener un punto con relación al par, es decir uno de un lado del par, otro entre las fuerzas del par y el tercero del otro lado. Calculando sucesivamente los momentos del par para esos tres puntos tendremos:

Para el punto A:

M par resp. A = Mom. Q' resp. A + Mom. Q'' resp. A
y siendo

$$\text{Mom. } Q' \text{ resp. A} = Q' \cdot a' \quad \text{y}$$

$$\text{Mom. } Q'' \text{ resp. A} = - Q'' \cdot a''$$

resultará, sustituyendo

$$\text{Mom. par resp. A} = Q' \cdot a' - Q'' \cdot a'' \quad \text{o, por ser, } Q' = Q''$$

$$\text{Mom. par resp. A} = Q' (a' - a'') \quad ;$$

pero

$$a' - a'' = - d$$

$$\therefore \text{Mom. par resp. A} = - Q' \cdot d \quad (1)$$

Para el punto B:

Mom. par resp. B = Mom. Q' resp. B + Mom. Q'' resp. B
y como

Mom. Q' resp. B = $-Q' \cdot b'$ y Mom. Q'' resp. B = $-Q'' \cdot b''$
se tendrá, sustituyendo,

$$\text{Mom. par resp. B} = - Q' \cdot b' - Q'' \cdot b'' = - Q' (b' + b'')$$

pero

$$b' + b'' = d$$

$$\therefore \text{Mom. par resp. B} = - Q' \cdot d \quad (2)$$

Para el punto C, efectuando análogas operaciones, se tendría igualmente

$$\text{M. par resp. C} = - Q' \cdot d \quad (3)$$

Comparando las ecuaciones (1), (2) y (3) se ve inmediatamente que todos los segundos miembros son iguales en valor y en signo, lo que demuestra que el momento de un par es constante en valor y signo para cualquier punto de su plano. Por otra parte, esas relaciones dan como magnitud del momento del par, en todos los casos, el producto de una de las fuerzas que lo constituyen por el brazo de palanca del mismo; por lo cual se dirá que momento de un par es el producto de su brazo de palanca por la intensidad de una de sus fuerzas. El signo se obtiene considerando la rotación que produciría el par sobre el plano en que está situado, suponiéndolo fijado en un punto. Para obtener rápidamente el sentido de la rotación basta considerar cómo gira una de las fuerzas alrededor de un punto tomado sobre la otra fuerza. Se dará signo positivo al momento de un par que tienda

a producir un movimiento análogo al del movimiento de las agujas de un reloj y signo negativo al de un par que tienda a producir un movimiento contrario.

El momento de un par se representa gráficamente por medio de un triángulo (fig. 69) cuya base AB está sobre una de las fuerzas y es segm. repres. de dicha fuerza, y cuyo vértice está sobre la otra fuerza del par. Si dados dos pares se construyen los triángulos según esa indicación, será fácil demostrar que las áreas de dichos triángulos serán proporcionales a los momentos de los pares correspondientes.

Sustitución de un par por otro. — Dado un par de fuerzas $F'F''$ puede siempre obtenerse otro par de fuerzas equivalente al par dado y que actúe en dos rectas paralelas cualesquiera.

En efecto, sea (fig. 70) el par de fuerzas $F'F''$ y las dos rectas paralelas cualesquiera a y b . Vamos a probar que hay un par de fuerzas situado sobre a y b , equivalente al par dado. Sean A el punto de intersección de a con F' , B el de b con F'' ; tracemos AB y descompongamos F' según a y AB. Para ello tomemos un segmento GH repres. de F' , tracemos por G una $\parallel$ a AB y por H una $\parallel$ a a ; determinando el punto I de intersección de estas dos $\parallel$ tendremos en GI un segm. repres. de la componente X' de F' según AB y en IH un segm. repres. de la componente Q' de F' según a .

Descompongamos ahora F'' según b y AB. Tomando JK como segm. repres. de F'' , a la misma escala de fuerzas que GH, y siguiendo el procedimiento anterior, tendremos en JL un segm. repres. de la componente X'' de F'' según AB, y en LK un segm. repres. de la componente Q'' de F'' según b .

El par de fuerzas dado $F' F''$ tiene por equivalente el sistema de 4 fuerzas X', Q', X'' y Q'' , sistema que se reduce a un par según veremos en seguida.

Si se comparan los triángulos GHI y JKL se observa que

$$\begin{aligned} GH &= y \parallel JK \\ \text{áng. } G &= \text{áng. } J \\ \text{áng. } H &= \text{áng. } K \end{aligned}$$

y que por lo tanto son iguales. De esta igualdad se deduce

$$GI = JL \text{ o } X' = X'' \quad (1)$$

$$IH = LK \text{ o } Q' = Q'' \quad (2)$$

Siendo $X' = X''$, actuando estas dos fuerzas sobre una misma recta AB, y siendo sus sentidos contrarios, se destruirán, y el sistema de las 4 fuerzas X', Q', X'' y Q'' se reducirá al sistema de dos fuerzas Q' y Q'' .

Ahora bien, estas dos fuerzas son de igual intensidad según (2), actúan en rectas paralelas por hipótesis, y tienen, según se ve en la fig. 70, sentidos contrarios. Constituyen pues un par de fuerzas, par equivalente al dado. Por lo tanto un par de fuerzas puede ser siempre reducido a otro par equivalente que actúe en dos rectas paralelas dadas.

El par equivalente así obtenido tiene siempre un momento igual al del par dado. En efecto, si en la fig. 70, para descomponer F' según a y AB , suponemos que AC sea un segm. repres. de F' , se tendría en AB y en BC los segm. repres. de X' y Q' respectivamente.

Ahora bien, según lo expuesto antes el triángulo ACB , obtenido uniendo los extremos A y C del segm. repres. de F' con un punto B de F'' , representa gráficamente el momento del par $F' F''$. Por otra parte, el mismo triángulo ACB puede también considerarse obtenido uniendo los extremos C y B del segm. repres. de Q' con un punto A de Q'' y en tal caso representa también el Momento del par $Q' Q''$. Se podrá entonces escribir

$$\frac{\text{M. par } F'F''}{\text{triáng. } ACB} = \frac{\text{M. par } Q'Q''}{\text{triáng. } ACB} \quad (4)$$

y, por ser iguales los denominadores,

$$\text{M. par } F'F'' = \text{M. par } Q'Q''$$

En cuanto a los sentidos, de la simple inspección de la figura se deduce que son iguales.

Teniendo presente todo lo expuesto y el hecho de que dos sistemas equivalentes pueden siempre ser sustituidos uno por el otro sin que cambie el estado dinámico del cuerpo sobre el que se hacen actuar, podremos decir que un par de fuerzas puede siempre, sin que se altere su efecto dinámico, ser sustituido por otro par de fuerzas situado en su plano y de igual momento, o, lo que viene a ser lo mismo, un par puede ser trasladado en su plano, de cualquier manera, con tal que no se altere el valor de su momento.

Para que el enunciado que acabamos de dar sea general faltaría demostrar que él se verifica también en el caso en que las rectas a y b sean paralelas a las fuerzas del par dado.

Sean, fig. 71, $F'F''$ el par dado, a y b las rectas dadas.

Descomponiendo F' en dos fuerzas que actúen en a y b tendremos como valor de sus componentes

$$T' = F' \frac{d + m + d'}{d'}$$

y

$$T'' = F' \frac{d + m}{d'}$$

Descomponiendo F'' según a y b , y llamando Z' y Z'' sus componentes, tendremos:

$$Z' = F'' \frac{m + d'}{d'}$$

y

$$Z'' = F'' \frac{m}{d'}$$

El par de fuerzas $F'F''$ tiene por equivalente el sistema de 4 fuerzas T' , Z' , T'' y Z'' y veamos a que se reduce este sistema de fuerzas.

T' y Z' actuando sobre una misma recta tienen por resultante una fuerza

$$(5) \quad Q' = T' - Z' = F' \cdot \frac{d}{d'}$$

Análogamente T'' y Z'' tienen por resultante una fuerza

$$Q'' = Z'' - T'' = -F'' \cdot \frac{d}{d'} \quad (6)$$

Las expresiones (5) y (6) nos demuestran que Q' y Q'' son iguales y de signo contrario; como por hipótesis actúan en rectas paralelas, ellas forman un par, par equivalente al dado. Además, de cualquiera de las igualdades (5) o (6) se saca

$$Q' \cdot d' = F' \cdot d$$

o sea

$$M. \text{ par } Q = M. \text{ par } F$$

lo que nos indica que los dos pares equivalentes tienen igual momento. La figura nos indica también la igualdad de los signos, y por lo tanto la verdad del enunciado anterior para todos los casos: un par de fuerzas puede siempre, sin alterar su estado dinámico, ser sustituido por otro par cualquiera situado en su plano, de igual momento estático que el par dado, o, en otras palabras, un par de fuerzas puede ser

transformado en otro par sin alterar su efecto dinámico con tal que se conserve constante el valor de su momento.

Resultante de varios pares de fuerzas. — Para componer varios pares de fuerzas, se puede, teniendo en cuenta lo que se acaba de exponer, transformarlos en pares de igual brazo de palanca, conservando sus respectivos momentos, transportarlos luego de modo que sean congruentes y hallar en seguida las resultantes de los dos sistemas de fuerzas congruentes obtenidos al superponer los pares. O bien, siguiendo los procedimientos generales expuestos en la composición de fuerzas cualesquiera, se puede: A) componer los pares dos a dos hasta haber compuesto todos los pares dados; B) aplicar el procedimiento del polígono funicular.

Cualquiera que sea el procedimiento que se siga, la resultante obtenida será otro par de fuerza de momento igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de los pares componentes.

En efecto, si $F'F''$ y $Q'Q''$ son dos pares coplanares (fig. 72) y los componemos hallando primero la resultante R' de F' y Q' y luego la R'' de F'' y Q'' , y se comparan luego los triángulos ABD y $A'B'D'$, veremos que estos triángulos son iguales y paralelos y que por lo tanto R' y R'' son también iguales y paralelas.

Las fuerzas R' y R'' son pues iguales en intensidad, actúan en rectas paralelas y tienen sentidos contrarios. Forman por lo tanto un par de fuerzas que es el par resultante de los dos pares dados.

Si se considera el grupo de las tres fuerzas R'' , Q'' y F'' , en dicho grupo R'' es la resultante de Q'' y F'' y por lo tanto su momento con respecto a un punto cualquiera debe ser igual a la suma de los momentos de las otras dos fuerzas respecto del mismo punto. Tomando, pues, el punto A como centro de momentos debe tenerse

(7) $\text{Mom. } R'' \text{ resp. } A = \text{Mom. } F'' \text{ resp. } A + \text{Mom. } Q'' \text{ resp. } A$
pero

$$\text{Mom. } R'' \text{ resp. } A = R'' \cdot r$$

$$\text{Mom. } F'' \text{ resp. } A = F'' \cdot f$$

$$\text{Mom. } Q'' \text{ resp. } A = Q'' \cdot q$$

y, sustituyendo estos valores en (7), resulta

$$R'' \cdot r = F'' \cdot f + Q'' \cdot q \quad (8)$$

Observando ahora que

$$R'' \cdot r = M \text{ par } R \quad ,$$

$$F'' \cdot f = M \text{ par } F \quad y$$

$$Q'' \cdot q = M \text{ par } Q \quad ,$$

podrá escribirse, sustituyendo en (8),

$$M_{\text{par}} R = M_{\text{par}} F + M_{\text{par}} Q$$

lo que nos demuestra que el momento del par resultante es igual a la suma de los momentos de los pares componentes.

Demostrado el teorema para dos pares, fácil sería extenderlo a un número cualquiera de pares, pues bastará ir componiendo dos a dos los pares dados y los pares resultantes parciales que se obtengan, hasta haber compuesto todos los pares dados.

Dos pares de igual momento pero de rotación contraria se equilibran. Es en efecto evidente por lo que se acaba de exponer que el par resultante de dos pares tales tiene un momento nulo por ser igual a la suma de dos cantidades iguales y de signo contrario. Siendo el efecto diámico de un par proporcional a su momento, resultará que el par resultante no producirá ningún efecto dinámico y por lo tanto los dos pares dados son equilibrantes entre sí y su conjunto constituye un sistema en equilibrio. Al mismo resultado se llegaría si se compusieran los dos pares dados por medio de alguno de los procedimientos explicados en los capítulos anteriores.

Por lo tanto, para anular el efecto de un par bastará aplicar en su plano otro par de fuerzas de igual momento, pero de rotación contraria.

Resultante de un par de fuerzas y de una fuerza aislada —

Un par de fuerzas y una fuerza situada en el plano del par tienen por resultante una fuerza de igual intensidad y paralela a la fuerza dada y cuyo momento estático respecto de un punto del plano de todas las fuerzas es igual al momento estático de la fuerza dada respecto de dicho punto más el momento del par dado.

En efecto, sean (fig. 73) el par $F'F''$ y la fuerza P . Para hallar su resultante apliquemos el procedimiento de componer dos a dos todas las fuerzas del sistema hasta haberlas compuesto todas: construyamos el polígono $ABCD$ de las fuerzas, tracemos por E una $\parallel$ a AC y por G una $\parallel$ a AD , línea de cierre del polígono de las fuerzas. Tendremos así la recta de acción de la resultante total, que llamaremos R . La figura $ABCD$ es evidentemente un paralelógramo por ser en ella $AB = y \parallel CD$; por lo tanto AD será también igual y paralela a BC , o,

$$R = y \parallel P$$

quedando así demostrada la primera parte del teorema.

Respecto de la segunda parte, es decir a la que se refiere a los momentos, no necesita mayor demostración si se recuerda que en virtud del teorema de Varignon el momento de la resultante de cualquier sistema es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de sus componentes.

En virtud de este teorema puede afirmarse que el efecto producido por la introducción de un par de fuerzas en un sistema de resultante única es el de hacer trasladar esta resultante paralelamente a sí misma hasta que su momento estático haya aumentado algebraicamente de una cantidad igual al momento del par introducido.

Si el par de fuerzas y la fuerza dadas tienen, respecto de un punto, momentos iguales, pero de signos contrarios, su resultante tendrá un momento nulo con respecto a ese punto. Como dicha resultante tiene una intensidad igual a la de la fuerza dada, para que su momento sea nulo con respecto a un punto es necesario que pase por dicho punto. Por lo tanto, cuando una fuerza y un par tienen momentos iguales respecto de un punto, pero de signos contrarios, su resultante pasará por dicho punto.

Si el par y la fuerza dados están aplicados a un cuerpo que tiene un punto fijo y es con respecto a este punto fijo que se verifica que los momentos son iguales pero de signos contrarios, la resultante de todo el sistema pasará por dicho punto y por consiguiente no producirá movimiento alguno sobre el cuerpo. Por lo tanto se podrá anular el efecto dinámico de un par sobre un cuerpo que tiene un punto fijo introduciendo una fuerza cuyo momento respecto de dicho punto sea igual y contrario al momento de aquel par.

CAPITULO VII

FUERZAS EN EL ESPACIO (1)

Fuerzas del espacio, su representación. — Composición de fuerzas concurrentes. — Composición de fuerzas paralelas. — Composición de los sistemas anteriores por medio de los métodos de Geometría descriptiva. — Lema fundamental: la proyección de la resultante es la resultante de las proyecciones de las componentes. — Propiedades de la resultante de los sistemas anteriores; teoremas de las proyecciones y de los momentos. — Pares de

(1) De este capítulo el profesor de Escuela Industrial enseñará únicamente la parte que pueda tener más tarde aplicación en Resistencia de Materiales.

fuerzas en el espacio. — Constancia de su momento respecto de una serie de ejes paralelos. — Valor del momento de un par respecto de un eje cualquiera. — Movimiento de un par en planos paralelos. — Pares equivalentes. — Pares equilibrantes. — Resultante de dos o más pares. — Resultante de un par de fuerzas y de una fuerza única. — Sustitución de una fuerza por un par y otra fuerza. — Composición de fuerzas cualesquiera no coplanares. — Sistema resultante.

Composición de fuerzas en el espacio. — Las fuerzas que actúan en el espacio pueden ser concurrentes, ser paralelas o no ser ni lo uno ni lo otro.

Todo sistema en el espacio puede ser representado en un plano por los métodos de la geometría descriptiva; quedará por lo tanto definido un sistema de fuerzas cuando se den sus dos proyecciones.

Un sistema de fuerzas Z, Q, F , concurrentes en un punto A (fig. 75), tendrá por proyección horizontal 3 rectas Z', Q', F' concurrentes en A' , proyección horizontal de A , y por proyección vertical 3 rectas F'', Q'', Z'' , concurrentes en A'' , proyección vertical de A , pues sabemos que la proyección de un haz de rectas sobre un plano es otro haz cuyo punto de concurrencia es la proyección del punto de concurrencia del haz dado.

Siendo las proyecciones de un haz de rectas paralelas sobre un plano otro haz de rectas paralelas, un sistema de fuerzas paralelas tendrá por proyecciones dos series de rectas paralelas. Así un sistema de fuerzas F, Q, Z (fig. 76), paralelas entre sí, estará representado por las proyecciones F', Q', Z' , paralelas entre sí, y F'', Q'', Z'' , paralelas también entre sí.

Finalmente, cuando las fuerzas que constituyen el sistema no son ni concurrentes ni paralelas, sus proyecciones serán rectas de direcciones varias. La figura 77 representa un sistema de esa naturaleza.

Empezaremos por estudiar la composición de fuerzas concurrentes siguiendo luego con la de fuerzas paralelas para terminar finalmente con la composición de fuerzas cualesquiera.

Composición de fuerzas concurrentes. — Sean F, Q, X, Z cuatro fuerzas que concurren al mismo punto A (fig. 78). Para hallar la resultante de tal sistema puede hallarse primero la resultante r de dos de las fuerzas dadas, por ej., de F y Q , por medio del paralelogramo $ABCD$ de estas dos fuerzas F y Q ; componer luego r con otra de las fuerzas dadas, p. ej. con X , por el mismo procedimiento, obteniendo

de ir componiendo sucesivamente las fuerzas del sistema para hallar la resultante de éste.

Así (fig. 79) para hallar la resultante de las ff. F, Q, X y Z aplicadas respectivamente en los puntos A, B, C, y D podemos determinar primero la resultante r de F y Q, lo que será fácil por estar F y Q en un plano; se tendrá así

$$r = F + Q \quad (1)$$

y $\frac{AM}{MB} = \frac{Q}{F}$; luego determinamos la resultante r' de r

y X, debiendo tenerse $r' = r + X \quad (2)$

y $\frac{MN}{NC} = \frac{X}{r}$; y finalmente compondríamos r' con Z, lo

que nos daría la f R que sería la resultante de todo el sistema y que debe satisfacer las relaciones.

$$R = r' + Z \quad (3)$$

y $\frac{NO}{OD} = \frac{Z}{r'}$

Las relaciones (1), (2) y (3) dan sucesivamente $R = r' + Z$

$$R = r + X + Z$$

$R = F + Q + X + Z =$ Suma componentes, es decir que en el caso de fuerzas paralelas la intensidad de la resultante es igual a la suma algebraica de las intensidades de las componentes.

Siendo la fuerza R paralela a la dirección general de las fuerzas y siendo su intensidad igual a la suma algebraica de las intensidades de las componentes, es evidente que también en el caso de fuerzas paralelas se verifica el teorema de las proyecciones, es decir que **en un sistema de fuerzas paralelas la proyección de su resultante sobre un eje cualquiera será igual a la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes sobre el mismo eje.**

Determinación de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes o paralelas por los métodos de Geometría Descriptiva. — Esta determinación se funda en el siguiente

principio: Tanto para un sistema de fuerzas concurrentes como para un sistema de fuerzas paralelas se verifica siempre que la proyección de su resultante sobre un plano cualquiera es la resultante de las proyecciones de las componentes sobre el mismo plano.

Demostraremos primero este principio para el caso de fuerzas concurrentes. Sean (fig. 80) F , Q y Z tres fuerzas concurrentes en A , R su resultante determinada por medio del polígono $MBCD$ de las fuerzas dadas. Sea a el plano de proyección, A' la proyección de A ; F' , Q' , Z' y R' las de las ff. F , Q , Z y R ; M' B' C' D' la del polígono de las fuerzas $MBCD$.

Siendo MB y F paralelas entre sí sus proyecciones sobre a también serán paralelas entre sí, es decir, $M' B'$ será paralela a F' y, por la misma razón,

$$\begin{aligned} B'C' &\parallel Q' \\ C'D' &\parallel Z' \\ M'D' &\parallel R' \end{aligned}$$

Por otra parte, a la escala de fuerzas adoptada para construir el polígono $MBCD$, el segm. $M'B'$ representa la fuerza F' , es decir la fuerza proyección de F sobre a , pues si b es el ángulo que forma F con el plano a se tendrá

$$\begin{aligned} F' &= F \cos b \\ M'B' &= MB \cos b \end{aligned}$$

y, dividiendo miembro a miembro,

$$\frac{F'}{M'B'} = \frac{F}{MB} \quad \text{o} \quad \frac{F'}{F} = \frac{M'B'}{MB}$$

lo que demuestra que $M'B'$ es un segm. repres. de F' . Análogas demostraciones comprobarían que $B'C'$ es un segm. repres. de Q' , que $C'D'$ es segm. repres. de Z' y que $M'D'$ lo es de R' .

Basta ahora la simple inspección de la figura para ver que $M'D'$, segm. repres. de R' , es la línea de cierre del polígono $M'B'C'D'$ de las ff. F' , Q' , Z' , y que por lo tanto R' es la resultante de estas tres ff. F' , Q' , Z' .

Como R' es la proyección de la resultante y F' , Q' y Z' las de las componentes, queda demostrado que la proyección de la resultante es resultante de las proyecciones de las componentes.

Vamos a demostrar ahora que el mismo principio se verifica en el caso de fuerzas paralelas. Consideremos el caso de dos fuerzas paralelas. Sean (fig. 81) F y Q las dos fuerzas dadas, R su resultante; A , B y C sus respectivos puntos de aplicación, a el plano de proyección; A' , B' y C' las proyecciones respectivas de A , B y C , y F' , Q' y R' las proyecciones de las ff. F , Q y R sobre a .

(Tendremos $R = F + Q$)

$$y \quad \frac{AC}{CB} = \frac{Q}{F} \quad (o)$$

Por otra parte, siendo Q , F y R paralelas entre sí, también lo serán entre sí sus proyecciones Q' , F' y R' , y se tendrá

$$\frac{F'}{F} = \frac{Q'}{Q} = \frac{R'}{R} = \cos. b \quad (1) \quad \text{si se}$$

indica con b el ángulo que las fuerzas forman con el plano.

De la relación (1) sacamos

$$\frac{F' + Q'}{F + Q} = \frac{R'}{R} \quad \text{y, por ser } R = F + Q,$$

resultará

$$R' = F' + Q' \quad (2)$$

De la misma relación (1) se saca

$$\frac{F'}{Q'} = \frac{F}{Q} \quad (3)$$

Considerando ahora las rectas AB y $A'B'$ cortadas por las paralelas AA' , BB' y CC' se tiene

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} \quad (4)$$

Sustituyendo en la igualdad (o) el primer miembro por su valor dado por (4) y el segundo miembro por su valor dado por (3), se tendrá

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{Q'}{F'}$$

Esta relación y la (2) $R' = F' + Q'$ nos dicen en seguida que R' es la resultante de las dos fuerzas paralelas F' y Q' pues es igual a su suma y divide a $A'B'$ en partes in-

versamente proporcionales a esas dos componentes. Pero R' es la proyección de R , y F' y Q' son las proyecciones de F y Q ; luego: la proyección de la resultante de dos fuerzas paralelas sobre un plano es resultante de las proyecciones de estas dos fuerzas sobre el mismo plano. Será fácil extender el principio a un número cualquiera de fuerzas paralelas.

Aplicando el principio anterior se podrá determinar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes o paralelas dado por sus dos proyecciones; bastará componer las proyecciones sobre cada plano para obtener las proyecciones de la resultante buscada.

Teorema de los momentos — Recordemos que si F es una fuerza cualquiera (fig. 82), OV un eje cualquiera, F' la proyección de F sobre un plano a perpendicular a dicho eje y OA la distancia de la $f.$ F' al punto O de intersección del eje OV con el plano a , el momento de la $f.$ F respecto al eje OV estará dado por el producto $F' \times AO$, o sea por el momento de su proyección F' respecto del punto O .

Consideremos ahora el sistema de fuerzas concurrentes de la fig. 80 y su proyección sobre el plano a . Sea y un eje cualquiera perpendicular a a y O su intersección con a .

Siendo R' resultante del sistema plano F', Q', Z' , se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{Mom. } R' \text{ resp. } O &= \text{Mom. } F' \text{ resp. } O + \text{Mom. } Q' \text{ resp. } O + \\ &\quad + \text{Mom. } Z' \text{ resp. } O \end{aligned} \quad (1)$$

pero, según lo recordado en el párrafo anterior,

$$\begin{aligned} \text{Mom. } R' \text{ resp. } O &= \text{Mom. } R \text{ resp. eje } y \\ \text{Mom. } F' \text{ resp. } O &= \text{Mom. } F \text{ resp. eje } y \\ \text{Mom. } Q' \text{ resp. } O &= \text{Mom. } Q \text{ resp. eje } y \\ \text{Mom. } Z' \text{ resp. } O &= \text{Mom. } Z \text{ resp. eje } y \end{aligned}$$

y, substituyendo estos valores en (1), podrá escribirse:

$$\begin{aligned} \text{Mom. } R \text{ resp. eje } y &= \text{Mom. } F \text{ resp. eje } y + \\ &\quad + \text{Mom. } Q \text{ resp. eje } y + \text{Mom. } Z \text{ resp. eje } y \end{aligned}$$

ecuación que nos dice que **en el caso de un sistema de fuerzas concurrentes el momento de su resultante respecto de un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes respecto del mismo eje.**

Si en vez de considerar un sistema de fuerzas concurrentes se considera (fig. 83) uno de fuerzas paralelas F, Q, T, V , su resultante R , un eje cualquiera z , se traza un plano

a perpendicular al eje z y se proyectan sobre él las ff. dadas y su resultante, tendremos que

$$\begin{aligned} M. R' \text{ resp. } O &= M. F' \text{ resp. } O + M. Q' \text{ resp. } O + M. T' \\ &\text{resp. } O + M. V' \text{ resp. } O \end{aligned} \quad (2)$$

pero según lo ya recordado

$$\begin{aligned} M. R' \text{ resp. } O &= M. R \text{ resp. eje } z \\ M. F' \text{ resp. } O &= M. F \text{ resp. eje } z \\ M. Q' \text{ resp. } O &= M. Q \text{ resp. eje } z \\ M. T' \text{ resp. } O &= M. T \text{ resp. eje } z \\ M. V' \text{ resp. } O &= M. V \text{ resp. eje } z \end{aligned}$$

y sustituyendo en (2) estos valores tendremos

$$\begin{aligned} M. R \text{ resp. } z &= M. F \text{ resp. } z + M. Q \text{ resp. } z + M. T. \text{ resp. } z + \\ &+ M. V \text{ resp. } z \end{aligned}$$

ecuación que nos dice que **en un sistema de fuerzas paralelas el momento de la resultante respecto de un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto del mismo eje.**

Pares de fuerzas. — Estudiada la composición de fuerzas concurrentes y de fuerzas paralelas corresponde pasar a la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas de direcciones cualesquiera, pero antes debemos ver algunos teoremas relativos a equivalencia y composición de pares de fuerzas situados en planos distintos.

El momento de un par de fuerzas es constante para todos los ejes paralelos a una misma dirección — En efecto sea FF (fig. 84) un par situado en un plano cualquiera y z, z', z'' una serie de ejes paralelos. Tracemos un plano perpendicular a z , y, por lo tanto, a toda la serie de ejes, y proyectemos sobre él el par FF. La proyección de éste será otro par F'F'. Si O, O', O'', etc. son los respectivos puntos de intersección de z, z', z'' , etc. con el plano a , tendremos, por lo ya recordado, que

$$\begin{aligned} M. \text{ par } F \text{ resp. eje } z &= M. \text{ par } F' \text{ resp. punto } O \\ M. \text{ par } F \text{ resp. eje } z' &= M. \text{ par } F' \text{ resp. punto } O' \\ M. \text{ par } F \text{ resp. eje } z'' &= M. \text{ par } F' \text{ resp. punto } O'' \end{aligned}$$

Pero siendo el momento de un par F' constante para todos los puntos de su plano, los segundos miembros de las igualdades anteriores son todos iguales y, por lo tanto, los primeros también lo serán, es decir:

$$\begin{aligned} M. \text{ par } F \text{ resp. eje } z &= M. \text{ par } F' \text{ resp. eje } z' = \\ M. \text{ par } F \text{ resp. eje } z'' &= \text{constante} \\ &\text{l. q. q. d.} \end{aligned}$$

El momento de un par respecto de un eje cualquiera es igual al momento de una de sus fuerzas con respecto a un eje paralelo al dado y que corte la otra fuerza del par.

Es evidente, por lo recién visto, que el momento del par FF' (fig. 85) será el mismo para el eje z que para el $z' \parallel z$. Ahora, siendo M par FF' resp. eje $z' = MF$ resp. eje $z' + MF'$ resp. eje z' y siendo nulo el momento de F respecto de z' , por cortar a este eje, se tendrá

$$M \text{ par } FF' \text{ resp. eje } z' = MF' \text{ resp. eje } z'$$

o también, en virtud de la igualdad de momentos de un mismo par respecto de ejes paralelos

$$M \text{ par } FF' \text{ resp. eje } z = MF' \text{ resp. eje } z'$$

l. q. q. d.

Si el eje con relación al cual se refieren los momentos es normal al plano del par, el momento de éste con relación a dicho eje es igual a lo que se conoce simplemente con el nombre de **momento** del par o sea al producto de una de las fuerzas por el brazo de palanca del par.

Esto es evidente pues si se traza un plano perpendicular al eje, dicho plano será paralelo al del par, la proyección de éste será otro par exactamente igual al mismo y su momento con respecto al punto O (fig. 86) será igual según lo visto en el capítulo anterior a $F'd'$; pero $F' = F$ y $d' = d$

$$\therefore M. \text{ par resp. eje } z = F \cdot d$$

El momento de un par de fuerzas respecto de un eje cualquiera es igual a su momento respecto de un eje normal a su plano multiplicado por el coseno del ángulo formado por esos dos ejes. — Sean fig. 87, un par FF' , un eje cualquiera z , un eje z' paralelo a z que corte una de las fuerzas del par en C ; n el eje normal en C al plano del par FF' , a un plano perpendicular al eje z , O' el punto de intersección de z' con a , AB un segmento representativo de F' y $A'B'$ su proyección sobre el plano a o sea un segmento representativo de la fuerza F' , proyección de F' sobre a ; sea b el ángulo de los ejes n y z' , ángulo igual al que forman el plano del par FF' y el a . Se tendrá, sucesivamente,

$$\frac{M \text{ par } F \text{ resp. eje } n}{M \text{ par } F \text{ resp. eje } z} = \frac{\text{triáng. } ABC}{\text{triáng. } A'B'C'} \quad (1)$$

pero

$$\text{triáng. A'B'C'} = \text{triáng. ABC.} \cos b$$

de donde

$$\frac{\text{triáng. ABC}}{\text{triáng. A'B'C'}} = \frac{1}{\cos b}$$

valor que sustituido en la igualdad (1) da

$$\frac{M \text{ par F resp. eje n}}{M \text{ par F resp. eje z}} = \frac{1}{\cos b}$$

de donde, finalmente, resulta

$$M \text{ par F resp. eje z} = M \text{ par F resp. eje n} \times \cos b$$

l. q. q. d.

Teniendo presente que b es también el ángulo formado por el plano del par con un plano normal al eje dado y que el momento de un par respecto de un eje normal a su plano es llamado simplemente momento del par, se podrá enunciar el teorema recién demostrado como sigue: El momento de un par respecto de un eje cualquiera es igual al momento del par multiplicado por el coseno del ángulo que forma su plano con un plano normal al eje dado.

El momento de un par con relación a un eje no varía aunque se mueva el par de cualquier manera en su plano o en planos paralelos al mismo, siempre que se mantenga constante el momento del par.

En efecto, según lo que se acaba de ver, el momento de un par con respecto a un eje cualquiera z está dado por el producto

$$M \text{ par resp. eje z} = M \text{ par} \times \cos b$$

en que M par es el momento del par respecto de un eje normal al plano del mismo, o simplemente momento del par, y b el ángulo formado por el plano del par con un plano perpendicular al eje z .

Ahora bien, si se mueve el par en las condiciones marcadas, permanecerán invariables M par y b , y por lo tanto también permanecerá constante el primer miembro de la igualdad que precede.

Dos pares de igual momento y de rotación opuesta, situados en planos paralelos, se equilibran. — Para demostrarlo reduzcamos (fig. 88) los dos pares a otros equivalentes de igual brazo de palanca $F'F''$, $Q'Q''$ y dando a todas las fuerzas una misma dirección. Entonces, como los pares

son de igual momento, sus ff. deberán ser también iguales puesto que lo son los brazos. La figura ABCD es evidentemente un paralelógramo; componiendo F' con Q' y F'' con Q'' se obtendrán las resultantes parciales $F' + Q'$ y $F'' + Q''$ aplicadas al mismo punto E y por lo tanto congruentes, de sentidos contrarios y de igual intensidad. Componiéndolas darán una fuerza cero y por lo tanto el sistema estará en equilibrio, o sea un par ha equilibrado el otro.

Dos pares de fuerzas de igual momento, situados en planos paralelos, son equivalentes. — En efecto, sean $F'F''$ y $Q'Q''$ los dos pares dados, a y b sus respectivos planos de acción. Si imaginamos el par $Z'Z''$ (figura 89) en el plano del par $Q'Q''$ y tal que se tenga.

$$M \text{ par } Q = - M \text{ par } Z \quad (1)$$

se tendrá, también, en virtud de la hipótesis,

$$M \text{ par } F = - M \text{ par } Z \quad (2)$$

Según lo visto en el capítulo anterior la (1) nos dice que el par Q equilibrará el par Z y, por lo visto en el párrafo que precede, la (2) nos dice que el par F equilibrará el par Z ; como dos sistemas que equilibran separadamente un tercer sistema son equivalentes entre sí, resulta que el par Q será equivalente al par F .

Como consecuencia importante de este teorema se tiene que un par puede ser desplazado como se quiera en planos paralelos al mismo con tal que se mantenga constante su momento.

La resultante de un número cualquiera de pares, situados en planos cualesquiera, es otro par de fuerzas cuyo momento con relación a un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de los momentos de los pares componentes respecto del mismo eje. — Si los pares dados están en planos paralelos todos entre sí resulta evidente el enunciado, pues todos los pares pueden ser trasladados hasta ubicarlos en un solo plano, y ya sabemos por lo visto en la bolilla anterior que entonces tienen por resultante un solo par cuyo momento es igual a la suma de los de los pares componentes.

Queda por considerar el caso en que los planos de los pares no son paralelos. Consideremos primero (fig. 90) el caso de dos pares FF y QQ situados en los planos a y b respectivamente. Sea MN la intersección de a y b , y AB dos puntos cualesquiera de dicha intersección. Sin alterar el efecto dinámico de los pares, manteniendo constante sus mo-

mentos, podremos transformarlos y transportarlos en sus planos hasta que sus fuerzas pasen por A y B. Supongamos que F' y F'' es el par equivalente al FF' y $Q'Q''$ el equivalente al par QQ . Compongamos F' con Q' , y F'' con Q'' ; sean R' y R'' las resultantes obtenidas. Es fácil ver que los paralelógramos de ff. $ACDE$ y $BC'D'E'$ serán iguales y paralelos, y que, por lo tanto, AD será $= y \parallel BD'$ o sea $R' = y \parallel R''$. Como estas fuerzas son de sentidos contrarios constituirán un par, quedando pues demostrando que la resultante de dos pares cualesquiera es otro par.

Para demostrar la segunda parte del teorema consideremos un eje cualquiera y' y tracemos otro eje y que pase por el punto B y sea $\parallel y'$.

Por lo visto antes tendremos

- (1) M par FF' resp. eje $y =$ M par $F'F''$ resp. eje $y =$
 $= M f.F'$ resp. eje y
- (2) M par QQ resp. eje $y =$ M par $Q'Q''$ resp. eje $y =$
 $= M f.Q'$ resp. eje y
- (3) M par RR resp. eje $y =$ M par $R'R''$ resp. eje $y =$
 $= M f.R'$ resp. eje y

Siendo R' la resultante de las fuerzas concurrentes F' y Q' se tendrá

$$M f.R' \text{ resp. eje } y = M f.F' \text{ resp. eje } y + M f.Q' \text{ resp. eje } y$$

Y substituyendo en esta igualdad sus términos por sus iguales dados en las relaciones (1), (2) y (3), resultará

$$M \text{ par } R'R'' \text{ resp. eje } y = M \text{ par } F'F'' \text{ resp. eje } y + \\ + M \text{ par } Q'Q'' \text{ resp. eje } y$$

con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

Demostrado el teorema para dos pares, fácil será, aplicando las relaciones que acabamos de ver, extenderlo a un número cualquiera de pares componiéndoles dos a dos hasta haberlos compuesto todos.

Resultante de un par y de una fuerza. — Una fuerza única y un par de fuerzas tienen por resultante una fuerza única o dos fuerzas no coplanares según que la fuerza dada sea o no paralela al plano del par dado (fig. 91).

En efecto, si la fuerza dada es paralela al plano del par, se puede trasladar éste, sin alterar su efecto dinámico, hasta que contenga la recta de acción de aquélla. En ese momento el sistema se ha reducido a una fuerza y a un par si-

tuados ambos en un mismo plano, sistema que por lo visto en el capítulo anterior tiene por resultante una fuerza única igual y paralela a la dada. Si la fuerza dada no es paralela al plano del par, se puede siempre trasladar éste paralelamente a sí mismo hasta que una de sus fuerzas corte la fuerza dada. Las dos fuerzas que se cortan tienen una resultante que no se corta con la otra fuerza del par y, por lo tanto, el sistema se ha reducido a dos fuerzas irreductibles, no coplanares.

Sustitución de una fuerza por un sistema equivalente formado por una fuerza y un par. — Una fuerza puede siempre, sin que se altere su efecto dinámico, ser sustituida por un sistema formado por una fuerza que pase por un punto cualquiera dado y por un par de momento igual en valor y signo al de la fuerza dada respecto de dicho punto.

En efecto, sea (fig. 92) F una fuerza dada; tomemos un punto cualquiera A y vamos a sustituir la fuerza F por otra fuerza que pase por A y por un par. Para ello tracemos por A dos fuerzas F' y F'' , iguales y paralelas a F , pero de sentidos contrarios entre sí. Un sistema tal es un sistema en equilibrio y puede ser agregado a cualquier grupo sin alterar su efecto; por lo tanto el sistema total F, F', F'' será equivalente a la fuerza F . Pero el sistema F, F', F'' puede considerarse también como formado por el par FF'' y por la fuerza F' resultando que aquel par y esta fuerza F' forman un sistema equivalente a la fuerza dada F . Ahora bien, siendo evidente que la fuerza F' es igual y paralela a la fuerza dada y que el momento del par FF'' es igual en valor y signo al de la fuerza dada respecto del punto A , queda demostrada la verdad del enunciado.

Observando que si z es un eje cualquiera que corte a F' y F'' , el momento del par FF'' respecto de dicho eje es igual al de la fuerza F respecto del mismo eje z , y que ese momento es constante para todos los ejes paralelos a z , se podrá enunciar el lema anterior como sigue: Una fuerza puede siempre, sin alterar su efecto dinámico, ser sustituida por un sistema formado por una fuerza igual y paralela a ella y que corte a un eje cualquiera dado y por un par cuyo momento con respecto a dicho eje sea igual en valor y signo al de la fuerza dada respecto del mismo eje.

Composición de fuerzas cualesquiera, no coplanares. — Para hallar la resultante de un sistema de n fuerzas situadas de cualquier manera en el espacio, se sustituye cada una de ellas por un grupo equivalente formado por una

fuerza K y por un par, tratando de que todas las fuerzas K pasen por un mismo punto, con lo que el problema se reduce a componer n fuerzas K concurrentes y n pares. Las n fuerzas K darán una resultante única R y los n pares darán un par resultante N ; por lo tanto la resultante de un sistema de fuerzas situadas de cualquier manera en el espacio es una fuerza única y un par.

Si la fuerza es paralela al plano del par el sistema tendrá como resultante final una fuerza única; si la fuerza no es paralela al plano del par el sistema resultante lo formarán dos fuerzas no coplanares irreductibles.

Así, fig. 93, si se quiere obtener la resultante del sistema de tres fuerzas F , Q y Z , se toma un punto M cualquiera en el espacio y por él se trazan, de acuerdo con lo indicado en el lema anterior, dos fuerzas F' y F'' iguales y paralelas a F pero opuestas entre sí, otras dos ff. Q' y Q'' iguales y paralelas a Q , pero opuestas entre sí, y finalmente dos ff. Z' y Z'' , iguales y paralelas a Z , pero también opuestas entre sí. Todo el sistema dado puede entonces ser reemplazado por las 3 fuerzas concurrentes F' , Z' y Q' y por los tres pares FF'' , QQ'' , ZZ'' .

Componiendo las ff. F' , Z' y Q' tendremos una fuerza R ; componiendo los pares un par K ; esa fuerza R y el par K podrán todavía reducirse a una fuerza única si el plano del par es paralelo a R . Si dicho paralelismo no existe podrán ser reducidos a un sistema irreductible de 2 fuerzas no coplanares.

CAPITULO VIII

RESULTANTE DE UN SISTEMA CUALQUIERA DE FUERZAS CUALESQUIERA Y CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

Resultantes de un sistema cualquiera de fuerzas coplanares. — Condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares. — Condiciones analíticas de equilibrio de dicho sistema. — Resultante de un sistema cualquiera de fuerzas no coplanares. — Condiciones de equilibrio de tal sistema. — Cuerpo en equilibrio. — Condiciones de equilibrio de un cuerpo. — Fuerzas exteriores.

Resultante de un sistema de fuerzas coplanares. — Hemos visto que la resultante de un sistema plano de fuerzas se obtiene por medio de un polígono de las fuerzas y de un polígono funicular de las mismas, teniendo el sistema de fuerzas dado, por equivalente, un sistema de dos fuerzas que actúan en los lados primero y último del funicular y cuyos segmentos representativos son, respectivamente, el primer y el último radios polares, con sentido del origen del polígono de las fuerzas al polo, el primero, y del polo al término del polígono de las fuerzas el último. Al construir dichos polígonos, podrá resultar que el de las fuerzas sea, o no, abierto. En el primer caso, la resultante tiene por segmento representativo un segmento de longitud bien determinada, y como los lados primero y último del polígono funicular se cortan en un punto situado en la parte finita del plano, esa resultante será una fuerza bien determinada en magnitud y posición. En el segundo caso, es decir cuando el polígono de las fuerzas sea cerrado, los radios polares primero y último son congruentes y entonces las dos fuerzas equivalentes a todo el sistema dado y que actúan en los lados extremos del funicular serán iguales y de sentidos contrarios. Ahora bien, un funicular cualquiera de tal sistema tendrá sus lados extremos paralelos entre sí, por serlo separadamente a una misma recta, y podrá suceder que esos lados extremos no se superpongan o que sean congruentes. Si los lados extremos no se superponen, el sistema dado resulta tener por equivalente un sistema de dos fuerzas que actúan en rectas paralelas, que son iguales en intensidad y que tienen sentidos contrarios, es decir un par de fuerzas. En cambio, si los lados extremos se superponen, el sistema resulta tener por equivalente dos fuerzas que actúan sobre la misma recta, de igual intensidad y de sentidos contrarios, es decir un sistema en equilibrio y, por lo tanto, el sistema dado estará en equilibrio.

En resumen: si cuando se construye un polígono de las fuerzas de un sistema dado de fuerzas coplanares y un funicular del mismo resulta abierto el polígono de las fuerzas, el sistema tiene por resultante una fuerza única; si el polígono de las fuerzas resulta cerrado y el funicular abierto, el sistema tiene por resultante un par de fuerzas; y, finalmente, si resultan cerrados los dos polígonos, el sistema está en equilibrio.

Condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares. — Hemos definido el sistema de fuerzas

en equilibrio diciendo que es el sistema que tiene por resultante una fuerza única de intensidad cero y situada en la parte finita del plano. Si se construye un polígono de fuerzas correspondiente a un sistema en equilibrio, debe resultar cerrado, porque, de ser abierto, el sistema tendría por resultante una fuerza única bien conocida, lo que es contrario a la hipótesis. Si se construye un funicular de dicho sistema debe resultar también cerrado, es decir que sus lados extremos deben resultar superpuestos, pues, si así no fuera, el sistema tendría por resultante un par de fuerzas, lo que también es contrario a la hipótesis.

Recíprocamente, para que un sistema de fuerzas copla- nares esté en equilibrio es necesario y suficiente que resul- ten cerrados cualquier polígono de dichas fuerzas y cual- quier funicular de las mismas. Esta condición es necesaria, porque si no se verifica, el sistema tendrá por resultante una fuerza o un par de fuerzas y no estaría por lo tanto en equilibrio. Es suficiente, porque, según lo que se acaba de ver, si ella se verifica el sistema tiene por resultante una fuerza cero situada en la parte finita del plano.

Condiciones analíticas de equilibrio de un sistema de fuerzas copla- nares. — Si una fuerza es igual a cero, sus pro- yecciones sobre dos ejes ortogonales cualesquiera serán nu- las también, y, recíprocamente, para que una fuerza sea nula es necesario y suficiente que sus proyecciones sobre dos ejes ortogonales cualesquiera sean nulas. En efecto, sabemos (fig. 94) que si F' y F'' son las proyecciones de una fuerza F sobre dos ejes ortogonales x e y se tendrá la relación

$$F^2 = F'^2 + F''^2$$

de donde

$$F = \sqrt{F'^2 + F''^2}$$

Como los dos sumandos que hay debajo del radical se- rán siempre positivos, por ser potencias pares, para que el primer miembro, es decir F , sea nulo, será necesario que cada uno de los sumandos subradicales sea nulo, y para ello deberá tenerse separadamente $F' = 0$ y $F'' = 0$.

Puede entonces establecerse que para que un sistema tenga una resultante nula es indispensable que dicha resul- tante tenga proyecciones nulas sobre dos ejes ortogonales cualesquiera. Pero como según el teorema de las proyeccio- nes la proyección de la resultante sobre un eje es igual a la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes sobre el mismo eje, resultará que **para que un sistema de**

fuerzas coplanares esté en equilibrio, o sea tenga por resultante una fuerza cero, será necesario que las sumas algebraicas de las proyecciones de sus fuerzas sobre dos ejes ortogonales cualesquiera sean nulas separadamente, es decir, para cada eje.

Por otra parte, hemos dicho que un sistema de fuerzas en equilibrio es un sistema cuya resultante es cero y no actúa en el infinito. Una resultante tal tiene siempre un momento igual a cero con respecto a cualquier punto situado en la parte finita del plano de las fuerzas, pues ese momento será igual a una longitud determinada multiplicada por una intensidad cero. Como según el teorema de Varignon el momento de la resultante es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes, resulta que en un sistema en equilibrio esta suma será igual a cero.

Recíprocamente, para que un sistema de fuerzas coplanares esté en equilibrio es necesario que además de verificarse la condición de las proyecciones se verifique también que la suma de los momentos estáticos de sus componentes respecto de un punto situado en la parte finita de su plano sea igual a cero. Esta condición es necesaria pues si ella no se verifica el momento estático de la resultante tendría un valor determinado, diferente de cero, y ello no sería posible sino teniendo la resultante del sistema un valor bien determinado, es decir no estando el sistema en equilibrio.

Reuniendo todas las condiciones analíticas de equilibrio que acabamos de ver podrá, pues, decirse que para que un sistema esté en equilibrio, es necesario y suficiente que **las sumas algebraicas de las proyecciones de todas sus componentes sobre dos ejes ortogonales sean nulas para cada eje y que la suma algebraica de los momentos estáticos de sus componentes respecto de un punto de su plano sea también nula**. La condición que llamaremos de las proyecciones nos asegura que la resultante es cero, la condición de los momentos nos asegura que ella no actúa en el infinito.

Resultante de un sistema de fuerzas cualesquiera, no coplanares. — Hemos visto que un sistema cualquiera de fuerzas no coplanares puede siempre ser reducido a una fuerza única que pase por un punto elegido libremente y a un par de fuerzas. Se dice que un sistema tal de fuerzas está en equilibrio cuando dicha fuerza única es nula y dicho par tiene un momento nulo respecto de cualquier eje del espacio. Para que estas condiciones se verifiquen es necesario y suficiente que queden cumplidas las siguientes: 1.º Que las

sumas de las proyecciones de todas las componentes del sistema sobre tres ejes ortogonales cualesquiera sean nulas para cada uno de los tres ejes. Y 2.º Que las sumas de los momentos estáticos de todas las componentes del sistema respecto de tres ejes ortogonales cualesquiera sean nulas para cada uno de los tres ejes.

La primera condición nos asegura que la intensidad de la resultante es cero; la segunda, que el par resultante tendrá un momento nulo respecto de cualquier eje.

Condiciones de equilibrio de los cuerpos. — Hemos definido un cuerpo en equilibrio diciendo que es todo cuerpo que permanece en reposo.

Para estudiar las condiciones de equilibrio de los cuerpos hay que considerarlos en relación con los cuerpos que los rodean. Un cuerpo puede ser completamente libre o puede tener puntos de contacto con cuerpos vecinos (apoyos, puntos fijos, etc.).

Si el cuerpo es completamente libre permanecerá en reposo, es decir, en equilibrio, siempre que el sistema de fuerzas que sobre él actúe esté en equilibrio; pues, siendo entonces nula la resultante y nulo el momento del par resultante, no habrá ni traslación ni rotación. Por lo tanto, para saber si un cuerpo libre está en equilibrio bastará determinar las condiciones en que está el sistema de fuerzas que se le ha aplicado.

Si el cuerpo tiene vínculos de unión o puntos de contacto con cuerpos vecinos, puede considerársele como libre y sometido al sistema de fuerzas dado y además a las reacciones que sobre él ejercen los cuerpos vecinos en cada uno de los puntos de contacto o vinculación. Y entonces, para que el cuerpo esté en equilibrio, bastará que lo esté el sistema de todas esas fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo, fuerzas exteriores que, como acabamos de decir, comprenden las cargas dadas, el peso propio del cuerpo y las reacciones que los cuerpos vecinos ejercen sobre el cuerpo considerado.

Esta condición de equilibrio de los cuerpos apoyados o vinculados es justamente la que sirve para calcular las reacciones que los apoyos ejercerán sobre el cuerpo, reacciones que se determinan siempre de modo que vengan a equilibrar todas las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo dado (cargas y peso propio), pues cuando se calcula una construcción se supone que ella debe permanecer en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas exteriores que sobre ella actuarán.

En general, las construcciones están constituídas por un conjunto más o menos complejo de piezas, y para que ellas estén en equilibrio es necesario: 1.º Que toda la construcción, tomada en conjunto, esté en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que sobre ella actúan; y 2.º Que cada pieza constituyente de la construcción esté en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que sobre ella actúan, fuerzas exteriores que comprenderán las cargas que actúan sobre esa pieza, el peso de la pieza y las reacciones que el resto de la construcción ejerce sobre dicha pieza.

Estas condiciones de equilibrio de los cuerpos tienen gran importancia, pues, como veremos más adelante, ellas sirven para determinar las reacciones de los apoyos de vigas y armaduras y las tensiones de las barras de los sistemas reticulares articulados.

En algunos casos, tratándose por ejemplo de cuerpos con un punto fijo o con un eje fijo, se enuncian bajo forma especial las condiciones de equilibrio de los mismos, pero no nos ocuparemos de esos casos por no interesarnos en este curso y por caber, por otra parte, todos ellos, dentro de la condición general enunciada.

CAPITULO IX.

CENTROS DE GRAVEDAD

Centro de un sistema de fuerzas paralelas. — Centro de gravedad de un cuerpo. — Centro de gravedad de superficies y de líneas homogéneas. — Principios que facilitan la determinación del centro de gravedad de cuerpos, superficies y líneas. — Plano diametral; diámetro; centro de figura. — Determinación del centro de gravedad de los siguientes cuerpos, superficies y líneas: segmento de recta, quebrada cualquiera, porción de polígono regular, arco de circunferencia, triángulo, paralelógramos varios, trapecio, cuadrilátero cualquiera, sector circular, círculo, segmento de círculo, segmento de corona circular, figura cualquiera, paralelepípedo cualquiera, prisma, tetraedro, pirámide, cilindro, cono, esfera, zona esférica, casquete esférico, sector esférico, cuerpo cualquiera. — Determinación analítica del centro de gravedad de las figuras planas.

Centro de un sistema de fuerzas paralelas. — Cuando las componentes de un sistema de fuerzas paralelas giran alrededor de sus respectivos puntos de aplicación conservando constantes sus respectivas intensidades y los ángu-

los que forman entre sí (es decir conservándose siempre paralelas) la resultante de dicho sistema gira alrededor de un punto que se llama **centro del sistema**.

En efecto, sean dos fuerzas paralelas F' y F'' ; A y B sus respectivos puntos de aplicación, R su resultante y C su punto de aplicación o sea el punto en que R corta la recta AB (fig. 95), punto determinado por las relaciones

$$\frac{F'}{R} = \frac{d''}{d} = \frac{CB}{AB} \quad (1)$$

Si conservando constantes las intensidades de F' y F'' las hacemos girar de un mismo ángulo hasta ocupar por ej. la posición indicada con Q' y Q'' , y si R' es la resultante de Q' y Q'' , se tendrá $R' = Q' + Q''$ y, por ser $Q' = F'$ y $Q'' = F''$,

$$\begin{aligned} R' &= F' + F'' = R \\ \text{Deberá tenerse además,} \\ \frac{Q'}{R'} &= \frac{BC'}{AB} \end{aligned} \quad (2)$$

indicando con C' el punto en que R' encuentre a AB. Pero

$$\begin{aligned} Q' &= F' \\ R' &= R \end{aligned}$$

y por lo tanto la (2) podrá escribirse

$$\frac{F'}{R} = \frac{BC}{AB} \quad (3)$$

ecuación que comparada con la (1) nos da $BC = BC'$ lo que nos dice que C' debe ser congruente con C.

Resultando pues que para cualquier posición de las ff. F' y F'' su resultante pasa por C, queda demostrado que cuando dos fuerzas paralelas giran de un mismo ángulo al rededor de sus respectivos puntos de aplicación conservando constantes sus intensidades, su resultante gira alrededor de un punto que se llama centro del sistema y que se obtiene en la intersección de la resultante del sistema, en cualquiera de sus posiciones, con la recta que une los puntos de aplicación de las componentes.

Sea ahora un mayor número de fuerzas paralelas, cuatro, p. ej., en un plano o en el espacio, como se quiera. Sean (fig. 96) F' , F'' , F''' y F^{IV} las fuerzas dadas, A, B, D, E,

sus respectivos puntos de aplicación, $\mathbf{r}'$ la resultante de $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$, $\mathbf{r}''$ la resultante de $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{F}'''$, o sea la de $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}''$ y $\mathbf{F}'''$, y sea $\mathbf{R}$ la resultante de $\mathbf{r}''$ y $\mathbf{F}^{IV}$ o sea la de todo el sistema.

Si $\mathbf{C}$ es el punto de intersección de $\mathbf{r}'$ con $\mathbf{AB}$, $\mathbf{C}'$ el de $\mathbf{r}''$ con $\mathbf{CD}$ y $\mathbf{C}''$ el de $\mathbf{R}$ con $\mathbf{C'E}$, tendremos por lo recién visto que $\mathbf{C}$ será el centro de las ff. $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$, que $\mathbf{C}'$ será el centro de las ff. $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{F}'''$ y que $\mathbf{C}''$ será el centro del sistema $\mathbf{r}''$ y $\mathbf{F}^{IV}$.

Supongamos ahora que hacemos girar las fuerzas dadas de un mismo ángulo alrededor de sus respectivos puntos de aplicación. Entonces $\mathbf{r}'$ gira alrededor de $\mathbf{C}$ conservándose paralela a las fuerzas y conservando su intensidad que es igual a $\mathbf{F}' + \mathbf{F}''$. Conservándose constantes en intensidad $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{F}'''$, y conservando su paralelismo al girar alrededor de los puntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ respectivamente, resultará que su resultante $\mathbf{r}''$ girará alrededor del punto $\mathbf{C}'$ en que corta a $\mathbf{CD}$. Por razones análogas $\mathbf{R}$ girará alrededor de $\mathbf{C}''$ punto en que corta $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C'E}$ quedando por lo tanto demostrado que en un sistema de fuerzas paralelas, al girar las componentes alrededor de sus respectivos puntos de aplicación, su resultante gira alrededor de un punto. Este punto es el que llamamos centro del sistema.

Es evidente que si todos los puntos de aplicación de las fuerzas están sobre una misma recta, el centro del sistema estará sobre dicha recta, pues, en tal caso, todos los segmentos $\mathbf{AB}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{C'E}$, etc. (fig. 96) estarían sobre esa misma recta. También es evidente que si todos los puntos de aplicación están sobre un mismo plano el centro estará sobre ese plano, porque entonces los segmentos $\mathbf{AB}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{C'E}$, etc. estarían todos en ese mismo plano.

Es también evidente que si en un sistema de fuerzas paralelas se hace variar la intensidad de todas las fuerzas de manera que los nuevos valores sean proporcionales a los anteriores el centro del sistema no habrá cambiado, pues los primeros miembros de las igualdades (1), (2) y (3) se habrán conservado, por hipótesis, constantes; por lo tanto sucederá lo mismo con los segundos y de consiguiente todas las resultantes parciales conservan la misma posición no variando sino su intensidad.

La propiedad de la resultante de girar alrededor de un punto (centro del sistema), cuando las componentes giran en ciertas condiciones alrededor de sus puntos de aplicación, da un procedimiento sencillo para determinar ese centro. Bastará en efecto determinar la resultante del sistema dado, hacer girar luego todas las componentes del sistema

alrededor de sus respectivos puntos de aplicación conservando constantes sus intensidades y los ángulos que forman entre sí, determinar la resultante del sistema en la nueva posición del mismo y hallar la intersección de las dos resultantes obtenidas para las dos posiciones del sistema.

Centro de gravedad. — El centro de gravedad de un cuerpo es el punto por el que pasa constantemente la resultante de las acciones que la gravedad ejerce sobre todas las moléculas del cuerpo, cualquiera que sea la posición de éste. Si se considera el sistema de fuerzas paralelas formado por todas las acciones que la gravedad ejerce sobre las moléculas de un cuerpo, es evidente que dichas acciones no varían de intensidad y permanecen siempre paralelas entre sí, es decir no cambian los ángulos que forman entre sí, aunque cambie la posición del cuerpo. Por lo tanto tal sistema admite un centro de fuerzas y ese centro es justamente el centro de gravedad del cuerpo.

Por ello mismo la determinación del centro de gravedad de un cuerpo se reduce a hallar el centro del sistema de fuerzas paralelas formado por las acciones que la gravedad ejerce sobre los elementos del cuerpo.

Las superficies y las líneas, no teniendo volumen, no tienen en rigor centro de gravedad. Sin embargo, si a cada elemento de línea o de superficie se asigna una fuerza proporcional a su extensión, el sistema de fuerzas paralelas así obtenido tiene un centro, centro al que se llama centro de gravedad de la línea o de la superficie respectivamente.

Nos ocuparemos especialmente de la determinación de los centros de gravedad de cuerpos homogéneos y de superficies y líneas que supondremos también homogéneas, es decir tales que a porciones iguales de las mismas correspondan fuerzas también iguales. La determinación de los centros de gravedad se hará, en general, buscando el centro de un sistema de fuerzas paralelas, pero esa determinación será más simple cuando se pueda aplicar alguno de los principios siguientes:

1°. Si un cuerpo tiene un plano diametral el centro de gravedad se encuentra en dicho plano.

Plano diametral de un cuerpo con relación a un eje z es todo plano a tal que si se proyecta sobre él, y paralelamente al eje z , un punto material cualquiera N se encontrará siempre en el cuerpo, del otro lado del plano a y a una distancia $N'Q = NQ$, otro punto material N' de igual masa

que N (fig. 97). Supongamos que el cuerpo de la figura 97 tiene un plano diametral a y que queremos determinar su centro de gravedad. Aplicaríamos en todos sus puntos fuerzas paralelas y proporcionales a sus masas. Las fuerzas aplicadas a dos puntos tales como N y N', por iguales y equidistantes de Q, tendrían como resultante una fuerza aplicada en Q, punto del plano a . Todos los puntos del cuerpo podrían ser reunidos en grupos de dos, de la misma manera, y el conjunto de las fuerzas se reduciría así a un número mitad de fuerzas aplicadas todas en puntos del plano diametral, siendo evidente que entonces el punto de aplicación de la resultante total estará también en dicho plano.

Los prismas de bases paralelas (fig. 115 y 116), el tetraedro (fig. 117) y otros cuerpos tienen siempre uno o más planos diametrales.

2º. Si un cuerpo tiene un diámetro el centro de gravedad de dicho cuerpo está sobre ese diámetro.

Diámetro de un cuerpo con relación a un plano a es toda recta Z tal que si se proyecta sobre ella en P un punto cualquiera M del cuerpo (fig. 98), paralelamente al plano fijo a , y se prolonga en seguida MP de una cantidad $M'P = MP$, se encontrará en la posición M' así determinada un punto material perteneciente al cuerpo y de igual masa que M.

Admitamos desde luego la existencia de un diámetro tal como OZ en un cuerpo C.

Haciendo actuar sobre todos los puntos del cuerpo fuerzas paralelas y proporcionales a las masas, las dos fuerzas iguales aplicadas en M y M' tendrán una resultante cuyo punto de aplicación será P. Como todos los puntos del cuerpo podrán ser reunidos de la misma manera en grupos de dos, el conjunto de todas las fuerzas podrá reducirse a un sistema de resultantes parciales, de misma dirección, en número mitad que el de fuerzas, y cuyos puntos de aplicación estarán situados sobre OZ. Si se efectúa después la composición de esas resultantes parciales resultará que el punto de aplicación de la resultante total estará también sobre OZ.

Todo prisma de bases regulares y paralelas, de número par de caras laterales, los cuerpos de revolución y otros tienen uno o más diámetros.

3º. Si una figura plana tiene un diámetro el centro de gravedad de la figura estará sobre dicho diámetro.

Diámetro de una figura plana con relación a un eje x es toda recta tal que si se proyecta sobre ella, en P por ejemplo (fig. 99), un punto cualquiera M de la figura, parale-

lamente al eje x , y se prolonga en seguida MP de una cantidad $M'P = MP$, se encontrará en la posición así determinada M' un elemento material de igual masa que M .

Agrupando también en este caso todos los puntos o elementos de la figura en pares de elementos formados por un elemento y su simétrico se podrá sustituir todas las fuerzas por un número mitad que tengan sus puntos de aplicación sobre el diámetro considerado, siendo evidente entonces que el punto de aplicación de la resultante total, o sea el centro de gravedad de la figura, estará bien sobre esa recta.

El triángulo, los paralelógramos, los polígonos regulares y otras figuras tienen uno o más diámetros.

4°. En todos los cuerpos y superficies dotados de un centro de figura, si los puntos diametralmente opuestos son de igual masa el centro de figura coincide con el centro de gravedad.

En efecto, las fuerzas paralelas y proporcionales a las masas, aplicadas a todos los puntos del cuerpo o de la superficie, podrán disponerse según un número mitad de grupos de dos fuerzas iguales actuando en puntos diametralmente opuestos. Las resultantes parciales de estos grupos estarán aplicadas en el centro de figura, la resultante general estará también aplicada en este centro y, por lo tanto, este punto es el centro de gravedad.

5°. Si un cuerpo o una superficie, está compuesto de dos partes cuyas masas son M y M' y cuyos centros de gravedad respectivos son A y A' , el centro de gravedad G del cuerpo se encontrará sobre la línea AA' y la dividirá en dos segm. AG y $A'G$ inversamente proporcionales a M y M' (figura 100).

En efecto, cuando se hace actuar sobre todos los puntos del cuerpo fuerzas paralelas y proporcionales a las masas, las de la primera parte dan una resultante proporcional a M y que pasa por A ; las de la segunda parte dan una resultante de igual dirección, que pasa por el centro A' y proporcional a M' .

La composición de estas dos resultantes parciales conduce siempre, cualquiera que sea la dirección de ambas, a una resultante general que pasa por un punto G de AA' tal que se tenga

$$\frac{AG}{A'G} = \frac{M'}{M}$$

El punto G así obtenido es el centro del sistema de fuerzas paralelas aplicadas a todos los puntos del cuerpo y es, por lo tanto, el centro de gravedad de éste.

En general, si un cuerpo o una superficie está formado por diversas partes de masas $M, M', M'', \dots$ y de centros de gravedad $A, A', A'', \dots$, el centro de gravedad del conjunto se obtendrá buscando el centro de las fuerzas paralelas y proporcionales a $M, M', M'', \dots$, aplicadas en $A, A', A'', \dots$ respectivamente.

Esta regla se deduce extendiendo el quinto principio al caso de un cuerpo dividido en más de dos partes.

Expuestos los principios que anteceden pasaremos a determinar el centro de gravedad de líneas, superficies y cuerpos usuales, debiendo hacer notar que tratándose de cuerpos, superficies y líneas homogéneas los planos diametrales y los diámetros son, respectivamente, planos y ejes de simetría, oblicua unas veces, ortogonal otras.

Centro de gravedad de una recta pesada. — Si se considera una recta formada por una sucesión de puntos materiales se tendrá una recta pesada, y, si se supone que un elemento de recta de longitud dl (fig. 101) pesa siempre la misma cantidad dp en cualquier parte de la recta en que se le tome, se tendrá además una recta homogénea o uniformemente cargada.

El centro de gravedad de tal recta se obtendrá fácilmente observando que su punto medio C es su centro de figura y que por lo tanto, de acuerdo con el principio 4.º, recién expuesto, en él debe estar su centro de gravedad.

Centro de gravedad de una quebrada homogénea. — El centro de gravedad de una quebrada ABCD (fig. 102) se obtendrá aplicando el principio 5.º recién visto. Para ello dividiremos la quebrada en sus elementos AB, BC y CD; buscaremos los centros de gravedad de estos elementos, obteniendo así los puntos g, g' y g'' ; aplicaremos en estos puntos fuerzas proporcionales a los pesos de AB, BC y CD respectivamente, es decir fuerzas p, p' y p'' tales que

$$\frac{p}{\text{peso AB}} = \frac{p'}{\text{peso BC}} = \frac{p''}{\text{peso CD}} \quad (1)$$

y buscaremos finalmente el centro del sistema p, p' y p'' . Este centro será el centro de gravedad buscado.

Observemos que si la quebrada es homogénea y se indica con q el peso de la unidad de longitud de la misma se tendrá

$$\text{peso AB} = \text{AB} \cdot q \quad (2)$$

$$\text{peso BC} = \text{BC} \cdot q \quad (3)$$

$$\text{peso CD} = \text{CD} \cdot q \quad (4)$$

De donde, dividiendo primero (2) por (3) y luego (3) por (4), resulta

$$\frac{\text{peso AB}}{\text{peso BC}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} \quad \text{o} \quad \frac{\text{peso AB}}{\text{AB}} = \frac{\text{peso BC}}{\text{BC}} \quad (5)$$

$$\text{y} \quad \frac{\text{peso BC}}{\text{peso CD}} = \frac{\text{BC}}{\text{CD}} \quad \text{o} \quad \frac{\text{peso BC}}{\text{BC}} = \frac{\text{peso CD}}{\text{CD}} \quad (6);$$

reuniendo (5) y (6) se tendrá

$$\frac{\text{peso AB}}{\text{AB}} = \frac{\text{peso BC}}{\text{BC}} = \frac{\text{peso CD}}{\text{CD}} \quad (7)$$

y, multiplicando miembro a miembro (1) por (7), resultará

$$\frac{p}{\text{AB}} = \frac{p'}{\text{BC}} = \frac{p''}{\text{CD}}$$

lo que quiere decir que si las ff. p , p' y p'' son proporcionales a los pesos de los elementos también lo serán a las longitudes de éstos. Por lo tanto se simplificará la operación tomando fuerzas proporcionales a las longitudes de los elementos correspondientes.

Centro de gravedad de una poligonal regular. — El centro de gravedad de una poligonal regular se determina teniendo presente que se halla sobre el diámetro de la poligonal y que su distancia al centro de la poligonal es una cuarta proporcional entre el desarrollo de la poligonal, la cuerda que subtiende y el radio de la circunferencia inscrita.

Así (fig. 103) si G es el centro de gravedad de la poligonal ABCDEF, su distancia al punto O debe ser tal que

$$GO = OJ \times \frac{AF}{\text{desarr. ABCDEF}}$$

Para determinar gráficamente la posición de G se procede como sigue:

Sea (fig. 103) ABCDEF la poligonal regular cuyo centro de gravedad se busca. Sea O su centro, OJ su diámetro, AF la cuerda que subtiende y OJ el radio de la circunferencia inscripta. Se levanta en J una perpendicular al diámetro OJ y se toma sobre ella JH igual a la mitad del desarrollo de la poligonal; se traza por el extremo A una paralela al diámetro OJ y se determina el punto I en que esa paralela encuentra a la recta que une O con H. Se proyecta en seguida ortogonalmente I sobre OJ y se tendrá en su proyección G el centro de gravedad buscado. En efecto, comparando los triángulos semejantes OGI y OJH, se tiene:

$$\frac{OG}{OJ} = \frac{GI}{JH}$$

de donde

$$OG = OJ \times \frac{GI}{JH} \quad \text{pero}$$

$$GI = AK = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2} c$$

$$JH = \frac{1}{2} \text{ desarr. poligonal} = \frac{1}{2} a$$

$$OJ = \text{radio circ inscripta} = r$$

luego, sustituyendo y simplificando, se tendrá

$$OG = r \cdot \frac{c}{a}$$

es decir que OG es cuarta proporcional entre **r**, **c** y **a** y es por lo tanto el centro de gravedad de la poligonal.

Centro de gravedad de un arco de circunferencia. —

Siendo un arco de circunferencia una poligonal regular de número infinito de lados infinitamente pequeños se comprende que el procedimiento para la determinación de su centro de gravedad será el mismo seguido para una poligonal regular. Así (fig. 104) si se quiere determinar el centro de gravedad del arco ACB de centro O, trazaremos primero su diámetro OC perpendicular a la cuerda AB, levantaremos en C una perpendicular a OC y tomaremos sobre ella CD igual $\frac{1}{2}$ arco ACB, uniremos D con O, trazaremos por A una paralela a OC y determinaremos su punto de intersección E con DO. Proyectando en seguida E sobre OC tendremos en G el centro de gravedad buscado.

Centro de gravedad de superficies. — Si se supone superficies pesadas y homogéneas, es decir que tienen siempre el mismo peso por unidad de superficie en cualquier par-

te que se la tome, podrá determinarse fácilmente su centro de gravedad aplicando los principios expuestos.

Cuando las superficies tengan un centro de figura el centro de gravedad estará en él. Tales son el círculo, el cuadrado, el rectángulo, el paralelógramo, el rombo (fig. 105) y todos los polígonos regulares de número par de lados.

Si la superficie tiene un diámetro su centro de gravedad estará sobre dicho diámetro, si tiene varios diámetros su centro de gravedad estará en el punto de intersección de dichos diámetros, pues tiene que estar simultáneamente sobre todos ellos.

Centro de gravedad de un triángulo. — En todo triángulo sus medianas son diámetros del mismo (cada una divide en partes iguales todas las rectas contenidas en el triángulo y paralelas al lado a cuyo punto medio llega) y por lo tanto su centro de gravedad estará (fig. 106) en el punto G de intersección de las medianas. Por Geometría sabemos que la altura del punto G sobre un lado AC será $\frac{1}{3}$ de la altura total correspondiente a este lado.

Centro de gravedad de un trapecio. — El centro de gravedad de un trapecio se determina como sigue (fig. 107). Si se unen los puntos medios de las bases se tiene un diámetro del trapecio y sobre él debe estar el centro de gravedad. Por otra parte si dividimos el trapecio en dos porciones ABD y BCD y determinamos sus respectivos centros de gravedad g' y g'' , sobre $g'g''$ debe hallarse también el centro de gravedad. Luego éste se hallará en la intersección de las dos rectas EH y $g'g''$ o sea en el punto G.

Otra manera de determinar el centro de gravedad de un trapecio (fig. 108): se prolonga cada base de una cantidad igual a la base opuesta, una hacia un lado y la otra hacia el otro lado, p. ej., AE igual DC, CH igual AB. Se unen los puntos E y H, se traza la mediana IJ del trapecio, y el punto G de intersección de esas dos rectas será el centro de gravedad buscado.

Centro de gravedad de un cuadrilátero cualquiera. — Para su determinación gráfica se procede como sigue: Se considera (fig. 109) los dos triángulos ABC y ACD determinados por la diagonal AC; se buscan los centros de gravedad q' y q'' de estos triángulos y, uniendo estos dos puntos, tendremos una recta $q'q''$ sobre la que debe estar el centro de gravedad del cuadrilátero según el principio quinto. Si se traza luego la otra diagonal BD, se consideran los dos triángulos ABD y BCD en que divide al cuadrilátero, se determinan los puntos g' y g'' , centros de gravedad de dichos triángulos, y se unen g' y g'' , se tendrá también en esta

recta $g'g''$ una recta sobre la que debe estar el centro de gravedad del cuadrilátero. Debiendo estar este centro de gravedad simultáneamente sobre $g'g''$ y sobre $q'q''$ estará evidentemente en el punto de intersección G de ambas rectas. Obsérvese que se verifican las siguientes igualdades:

$$Gg'' = g'E, Gg' = g''E, Gq' = q''H, Gq'' = q'H. —$$

Centro de gravedad de un sector circular. — Sea (fig. 110) el sector circular OAB. Si suponemos el arco AB dividido en elementos AH, HI, IJ, etc. muy pequeños y trazamos los radios OA, OH, OI, OJ, etc., tendremos el sector formado por una infinidad de triángulos de vértices congruentes en O, de bases sobre el arco AB y todos de igual altura R. Los centros de gravedad de esos triángulos serán los puntos g', g'', g''', g^{IV} , etc. situados a una distancia igual a un tercio de R de sus respectivas bases y estarán, por lo tanto, sobre un arco EF concéntrico del AB y de radio igual a dos tercios de R.

Si se ha dividido el sector en triángulo de bases iguales e infinitamente pequeñas, los puntos $g', g'', g''',$ etc., formarán un arco continuo sometido a cargas iguales para longitudes iguales, o sea un arco homogéneo EF de radio igual a dos tercios de R, y cuyo centro de gravedad coincidirá con el del sector circular. Por lo tanto para tener el centro de gravedad de un sector circular bastará hallar el centro de gravedad del arco de circunferencia de igual centro y abertura, y de radio igual a dos tercios del radio del sector.

Centro de gravedad de un segmento circular y de una corona circular. — Sea (fig. 111) ACB un segmento circular. Para determinar su centro de gravedad se considera el segmento como resultado de restar el triángulo AOB del sector OACB y se aplica el principio quinto. Se busca g' , centro de gravedad del sector OACB, y g'' centro de gravedad del triángulo AOB. Se aplican en g' y g'' fuerzas paralelas p' y p'' , de intensidades proporcionales a las áreas del sector y del triángulo respectivamente, y de sentidos contrarios, es decir fuerzas tales que se verifique.

$$\frac{p'}{p''} = \frac{\text{área OACB}}{\text{área OAB}}$$

Se busca en seguida la resultante R de p' y p'' ; su intersección G con el diámetro OC del segmento, será el centro de gravedad de este segmento.

Análogamente, para obtener el centro de gravedad de un segmento de corona circular tal como el ABCD (fig. 112)

se buscan los centros de gravedad g' y g'' de los sectores OAB y OCD que por diferencia dan el segmento de corona ABCD; se aplican en g' y g'' dos ff. p' y p'' de sentidos contrarios y de intensidades proporcionales a las áreas de los sectores respectivos y se determina su resultante R; en la intersección de ésta con el diámetro OE se tendrá el centro de gravedad G buscado.

Centro de gravedad de una superficie plana cualquiera.

— El centro de gravedad de una figura cualquiera (fig. 113) se determina dividiendo la figura en elementos superficiales, AHF, AFB, FBDE, BCD, etc., cuyos respectivos centros de gravedad se sepa ya determinar; es decir se divide la figura en triángulos, cuadrados, rectángulos, trapezios, sectores, etc., según sus contornos. Se determinan los centros de gravedad de estos elementos y se aplica en ellos fuerzas p' , p'' , p''' , etc. paralelas y proporcionales a las áreas de dichos elementos. El centro del sistema de fuerzas así formado será el centro de gravedad de la figura.

Se aplican fuerzas proporcionales a las áreas de los elementos porque tratándose de superficies pesadas homogéneas, las áreas de los elementos son proporcionales a los pesos de los mismos y entonces pueden ser sustituidos éstos por aquéllas sin que cambie el centro del sistema.

Ejemplo: Para aclarar lo dicho vamos a buscar el centro de gravedad de la superficie ABCDEFH dibujada en la fig. 114. Dividamos la figura en una serie de figuras cuyos centros de gravedad sepamos ya determinar, por ej., en los rectángulos ABHI, CIDK, JKLF y en los triángulos HJF y LDE. Busquemos los centros de gravedad de estas figuras: obtendremos los puntos g' , g'' , g''' , g^{IV} , etc.; apliquemos ahora en estos puntos fuerzas p' , p'' , p''' , p^{IV} , y p^V paralelas y proporcionales a las áreas de los respectivos elementos y busquemos el centro de este sistema. Para ello, por los métodos conocidos, determinamos la resultante del sistema; sea R dicha resultante.

Hagamos girar en seguida todas las fuerzas alrededor de sus respectivos puntos de aplicación g' , g'' , g''' , etc., conservando constantes sus intensidades y conservándose paralelas, hasta que ocupen una nueva posición, por ej., la q' , q'' , q''' , ... y hallemos la resultante R' del nuevo sistema. La intersección de R' con R nos dará el punto alrededor del cual giró la resultante o sea el centro del sistema, centro que es el centro de gravedad buscado.

Centro de gravedad de los cuerpos. — El centro de gravedad de los cuerpos se halla aplicando los principios expuestos y siguiendo un procedimiento enteramente análogo al

explicado para superficies cualesquiera. Se divide el cuerpo en una serie de elementos o cuerpos menores cuyos centros de gravedad se sepa ya determinar fácilmente (veremos en seguida cuales son esos cuerpos), se buscan los centros de gravedad de estos elementos, se aplica en ellos fuerzas paralelas proporcionales a los pesos o a los volúmenes de los elementos correspondientes, y finalmente, por cualquiera de los procedimientos conocidos, se determina el centro del sistema de fuerzas paralelas así formado. Ese centro es el centro de gravedad buscado.

En cuerpos más o menos regulares la determinación del centro de gravedad se simplifica por la existencia de planos diametrales, de diámetros o de un centro de figura.

Cuerpos con un centro de figura. — La esfera, el cubo, el paralelepípedo, los prismas regulares de bases paralelas y de número par de caras laterales, tienen un centro de figura y por lo tanto en él se encontrará su centro de gravedad.

Centro de gravedad de un prisma cualquiera de bases paralelas. — El centro de gravedad de un prisma tal se halla en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las bases. Sea, en primer lugar (fig. 115) el prisma triangular ABCDEF. Si H es el punto medio de EC e I el punto medio de FB, DHIA será un plano diametral del prisma y, por lo tanto, sobre él estará el centro de gravedad buscado. De la misma manera, si J es el punto medio de DE y K el de FA, el plano JCBK es diametral y también sobre él debe estar el centro de gravedad del prisma. Este deberá estar entonces sobre la recta LM, intersección de esos dos planos y recta de unión de los centros de gravedad de las dos bases, pues M es el c. de g. de AFB y L es el c. de g. de DEC. Si trazamos ahora el plano PQS paralelo y equidistante de las bases, se tendrá un nuevo plano diametral y por lo tanto sobre él debe estar el centro de gravedad del prisma. Este centro de gravedad estará pues en la intersección de LM con PQS, pero como PQS equidista de las bases cortará a LM en su punto medio, quedando por lo tanto demostrado el enunciado para el caso del prisma triangular.

Si se trata (fig. 116) de un prisma cualquiera, podemos descomponerlo en prismas de bases triangulares, determinar el centro de gravedad de cada uno de esos prismas, aplicar en dichos centros de gravedad fuerzas paralelas y proporcionales a los pesos o volúmenes de los prismas respectivos y buscar el centro del sistema de fuerzas así formado. Pero los centros de gravedad g , g'' , g''' , así deter-

minados, están en el plano medio LMNPQ y son los centros de gravedad de los triángulos LQM, QMN y QNP en que queda dividido el polígono LMQNP igual a las bases, y las fuerzas p' , p'' y p''' son proporcionales a las áreas de estos triángulos por ser todos los prismas de igual altura. Entonces el centro del sistema p' , p'' , p''' , que es el centro de gravedad del prisma total, es también el centro de gravedad del polígono LQPNM. Es evidente que este centro está sobre la recta que une los centros G' y G'' de las bases, y, como el plano LMNPQ es el plano medio, el punto G será el punto medio de $G' G''$.

Centro de gravedad de una pirámide triangular. — Sea (fig. 117) VBCA la pirámide cuyo centro de gravedad se busca. Sean D, E y F los puntos medios de CB, AC y VB respectivamente. Los planos AVD, VEB y AFC son planos diametrales de la pirámide y por lo tanto en todos ellos debe estar el centro de gravedad buscado. Trazando entonces Vg' , intersección de AVD y de VEB, y Ag'' , intersección de AVD con AFC, tendremos en G, intersección de Vg' y Ag'' , el centro de gravedad de la pirámide dada.

Por ser $g' D$ igual $1/3 AD$ y $g'' D$ igual $1/3 VD$ se tendrá Gg' igual a un tercio de VG , Gg'' igual a un tercio de AG , y, de consiguiente

$$\begin{aligned} Gg' &= \frac{1}{4} Vg' \\ y \quad Gg'' &= \frac{1}{4} Ag'' \end{aligned}$$

Como g' es el centro de gravedad de la base ABC, y g'' el de la cara VBC, podrá decirse que el centro de gravedad de una pirámide triangular se encuentra sobre la recta que va de un vértice al centro de gravedad de la cara opuesta y a una distancia de esta cara igual al cuarto de la longitud de dicha recta, pues la demostración anterior puede extenderse fácilmente a las otras caras del tetraedro.

Si se trazan las alturas de la pirámide se verá en seguida que el centro de gravedad dista de una cara cualquiera una cantidad igual a la cuarta parte de la altura correspondiente a dicha cara.

Si se trata de una pirámide cualquiera, el centro de gravedad estará sobre la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base y a un cuarto de altura sobre la base. En efecto, si (fig. 118) se divide la pirámide en pirámides triangulares de bases en la base ABCDE y de vértice común V, los centros de gravedad de las pirámides así obtenidas estarán en el plano FHIJK distante de la base una

cantidad igual a un cuarto de la altura de la pirámide y por lo tanto el centro de gravedad de la pirámide estará también sobre ese plano.

Si por otra parte se supone la pirámide formada por una infinidad de capas de espesor infinitamente pequeño, paralelas a la base, y superpuestas, los centros de gravedad de todas estas capas estarán sobre la recta VG que une el vértice con el centro de gravedad de la base y por lo tanto el centro de gravedad de la pirámide deberá estar también sobre VG. De consiguiente, dicho punto estará en la intersección de VG con el plano FHIJK o sea en el punto G' tal que $G'G$ igual $\frac{1}{4}$ VG.

Centro de gravedad de un cilindro de bases paralelas y de un cono. — Siendo el cilindro un caso particular del prisma su centro de gravedad se hallará en el punto medio G (fig. 119) de la recta AB que une los centros de gravedad de las bases del cilindro. De la misma manera, siendo el cono un caso particular de la pirámide, su centro de gravedad se hallará sobre la recta VA que une su vértice con el centro de gravedad de la base y a una altura igual a un cuarto de la altura total (fig. 120).

Centro de gravedad de una zona y de un sector esféricos. — El centro de gravedad se encuentra en el punto G, medio de la recta que une los centros de las bases de la zona esférica.

Así si (fig. 121) se tiene la zona ABCD (superficie esférica comprendida entre los planos paralelos AD y BC), sabemos que las bases de la zona son las circunferencias de centro O' y O'' y que estos centros están sobre el diámetro OV perpendicular a los planos de las bases. Este diámetro OV es también diámetro estático de la zona y sobre él, en el punto medio de O'O'', se encuentra el centro de gravedad de la zona.

Siendo un casquete esférico un caso particular de una zona, aquel en que uno de los planos básicos es tangente a la esfera originaria, su centro de gravedad se hallará en el punto medio de la altura del casquete, (fig. 122).

El centro de gravedad de un sector esférico se determina siguiendo un procedimiento similar al seguido para encontrar el de un sector circular. Basta para ello determinar el centro de gravedad del casquete esférico, de igual abertura y centro que el sector esférico dado, y de radio igual a los tres cuartos del radio de dicho sector esférico. (figura 123).

Sabiendo determinar el centro de gravedad de los cuerpos que acabamos de ver, será posible, siguiendo el procedimiento ya indicado, determinar el de un cuerpo cualquiera pues, en general, los cuerpos dados podrán ser divididos en algunos de los cuerpos que acabamos de estudiar.

Determinación analítica del centro de gravedad. — Es tan importante esta determinación y tan conveniente su empleo en muchos casos, que la expondremos a continuación, pero únicamente para figuras planas.

Hemos visto que el procedimiento general para hallar el centro de gravedad de una figura cualquiera consiste en dividirla en una serie de elementos, en buscar los centros de gravedad g' , g'' , g''' , etc., de estos elementos, en aplicar en estos puntos una serie de fuerzas paralelas p' , p'' , p''' , etc., y en hallar la resultante R de este sistema para dos posiciones del mismo, salvo que la existencia de algún diámetro permita determinar el centro por su intersección con una sola posición de R .

Para el caso de figuras planas, caso en que se toman las fuerzas p' , p'' , p''' , etc. en el mismo plano de la figura, es muy fácil obtener analíticamente, por medio del teorema de los momentos, una o dos posiciones de la resultante, y, por consiguiente, la posición del centro de gravedad de la figura dada.

Supongamos, p. ej., que se quiere determinar el centro de gravedad de la figura ABCDEFHA (fig. 124); si se la divide en los elementos ABCI, IDJH y JEF; si g' , g'' y g''' son los centros de gravedad de dichos elementos, y si p' , p'' y p''' son las fuerzas paralelas proporcionales a las áreas de los elementos aplicadas en sus respectivos centros de gravedad, se tendrá, si R es la resultante del sistema anterior y O un centro de momentos,

$$RY = p' y' + p'' y'' + p''' y''' \quad (1)$$

ecuación en la que se conocen todas las cantidades menos Y , que se podrá calcular en seguida despejándola de dicha ecuación. Es evidente que conocido Y se tendrá R con trazar una paralela a Ox , situada a una distancia Y de ella.

Si luego se hacen girar todas las fuerzas de un mismo ángulo conservando constantes sus intensidades, por ejemplo hasta ocupar una posición normal a la anterior, se tendrá, si R' es la resultante del sistema en la nueva posición y si se refieren los momentos al mismo punto O .

$$R'X = q' x' + q'' x'' + q''' x''' \quad (2)$$

ecuación que nos permite calcular en seguida el valor de X ,

pues en ella son conocidas todas las demás cantidades. Conocido X se podrá obtener la recta de acción de R' trazando una paralela a Oy , a una distancia X de este eje y .

Determinadas dos posiciones de la resultante, se tendrá en el punto de intersección de ambas el centro de gravedad.

Teniendo presente que las fuerzas que aparecen en las fórmulas (1) y (2) son proporcionales a las áreas de los elementos correspondientes y que la posición de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas no varía cuando todas las fuerzas del sistema varían en la misma proporción, se sustituyen en dichas fórmulas las fuerzas por las áreas correspondientes, resultando así simplificada la determinación.

En resumen, las fórmulas anteriores, sustituyendo las fuerzas por las áreas y llamando s' , s'' , s''' y S estas áreas, dan

$$(3) \quad X = \frac{s' x' + s'' x'' + s''' x'''}{S}$$

y

$$(4) \quad Y = \frac{s' y' + s'' y'' + s''' y'''}{S}$$

Nótese que en geometría analítica se llama coordenadas de los puntos g' , g'' , g''' y G respecto de los ejes x e y las cantidades x' , x'' , ..., y' , y'' , ..., siendo x' , x'' , x''' y X , las abscisas respectivas de aquellos puntos e y' , y'' , y''' , Y , sus respectivas ordenadas. Por eso también se dice que las ecuaciones (3) y (4) dan las coordenadas del centro de gravedad de la figura.

Terminemos ahora de hallar el centro de gravedad de la superficie de la figura 124.

Se tendrá

$$ABCI = s' = 10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$$

$$IDJH = s'' = 10 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2$$

$$JEF = s''' = \frac{1}{2} 10 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$$

$$ABCDEFHIA = S = s' + s'' + s''' = 660 \text{ cm}^2$$

Tomando como ejes coordenados los Ox y Oy , paralelo el x a HF y perpendicular el otro a x , y dando a las fuerzas p' , p'' , p''' primero la dirección del eje x y luego la del eje y , se tendrá

$$\begin{array}{lll} x' = 5 \text{ cm} & x'' = 20 \text{ cm} & x''' = 36,7 \text{ cm} \\ y' = 32 \text{ cm} & y'' = 17 \text{ cm} & y''' = 8 \text{ cm} \end{array}$$

y, sustituyendo estos valores y los de las áreas en las fórmulas (3) y (4) y efectuando los cálculos, resultará:

$$X = \frac{200\text{cm}^2 \times 5\text{cm} + 400\text{cm}^2 \times 20\text{cm} + 60\text{cm}^2 \times 36,7\text{cm}}{660\text{cm}^2} = 17\text{ cm}$$

$$Y = \frac{200\text{cm}^2 \times 32\text{cm} + 400\text{cm}^2 \times 17\text{cm} + 60\text{cm}^2 \times 8\text{cm}}{660\text{cm}^2} = 20,7\text{ cm}$$

Si se traza entonces una paralela a Ox, distante 20,7 cm de este eje, y una paralela a Oy, distante 17 cm de este eje, se tendrá en el punto de intersección de ambas paralelas el centro de gravedad de la figura.

Como ya lo dijimos, en el caso en que la figura tiene un diámetro basta hallar una de las distancias anteriores.

CAPITULO X.

VIGAS CARGADAS

Generalidades. — Viga sometida a cargas aisladas: determinación de las reacciones, de los esfuerzos de corte y de los momentos flectores. — Construcción de los diagramas correspondientes y determinación de los valores máximos. — Caso en que la viga está sometida a una sola carga aislada en cualquier parte de su luz. — Caso en que la viga sostiene una carga aislada en el centro de su luz. — Viga sometida a la acción de una carga continua en toda su luz. — Determinación de las reacciones, de los esfuerzos de corte y de los momentos flectores. — Construcción de los diagramas correspondientes y determinación de los valores máximos. — Caso en que la carga continua uniformemente distribuída actúa sobre parte de la luz solamente. — Caso en que sobre la viga actúan cargas aisladas y cargas continuas simultáneamente. — Caso de carga indirecta.

Llámase viga a toda pieza de forma prismática, destinada a soportar cargas, y una de cuyas dimensiones es muy grande con relación a las otras dos.

Las vigas de madera tienen en general la forma de paralelepípedos alargados (fig. 125); su sección transversal, o sea la sección hecha (fig. 126) por medio de un plano P perpendicular a su longitud, es en este caso un rectángulo. La línea que une los centros de gravedad de todas

las secciones transversales es llamada eje longitudinal de la viga.

Las vigas de hierro no son en general paralelepípedicas, sino que tienen una sección transversal que adopta formas muy diversas según el destino de la viga. Así hay vigas o fierros doble té (fig. 127), vigas o fierros té (fig. 128), vigas o fierros u (fig. 129), vigas o fierros ángulos o cantoneras (fig. 130) y muchas otras formas que serán vistas más adelante.

En las construcciones las vigas descansan, en general, en dos puntos por lo menos (p. ej.: los tirantes de techos o de pisos que descansan sobre dos muros); esos puntos se llaman apoyos de la viga. Estos apoyos son de forma y naturaleza muy variables, pero, a los efectos de los cálculos simples que efectuaremos, no haremos distinción en ellos.

Cuando (fig. 131) una viga descansa simplemente por sus dos extremos se dice que es “una viga simplemente apoyada por sus dos extremidades” y la distancia que hay entre los dos apoyos se llama luz de la viga. Cuando (fig. 132) la viga descansa sobre dos apoyos, no ya por sus dos extremos sino por uno de ellos y por un punto intermedio, se dice que es “una viga simplemente apoyada en dos puntos y con una parte volada”; se llama luz de la viga a la distancia entre apoyos y vuelo de la parte volada a la longitud de viga libre que sobresale del apoyo intermedio. En algunos casos (fig. 133) la viga puede apoyar en dos puntos intermedios; en tal caso tiene ambos extremos volados.

Aunque el contacto entre la viga y cada uno de sus apoyos no sea nunca un punto, sino una superficie más o menos grande, se admite, a los efectos del cálculo, que dicho contacto se establece en un punto para cada apoyo, o sea que cada apoyo es teóricamente un punto, y que la luz de la viga es la distancia entre esos dos puntos. Una viga y sus apoyos se indicarán esquemáticamente como se vé en la figura 134.

Las cargas que actúan sobre las vigas son aisladas o son continuas, indicándose, según lo dicho en los capítulos I y V, por medio de fuerzas aisladas o por medio de superficies de carga respectivamente.

Así en la fig. 135 se representa una viga sometida a la acción de cargas aisladas F' , F'' y F''' ; en la fig. 136 se representa una viga AB sometida en toda su longitud a la acción de una carga continua, uniformemente distribuída, de 100 kilogramos por metro de luz, siendo la superficie de carga en este caso un rectángulo ABCD. La fig. 137 representa una viga sobre la que actúa una carga continua no

distribuída uniformemente, carga que se indica por una superficie ABCDEG irregular. Hay también casos en que sobre una misma viga actúan una carga continua y varias cargas aisladas.

El problema más frecuente en la práctica de las construcciones es el que se propone determinar las dimensiones transversales que deberá tener una viga, de luz dada, para sostener cargas que también son dadas, directa o indirectamente.

Esas dimensiones se calculan sobre la base de los siguientes elementos que aprenderemos a determinar en seguida:

- A.—Reacciones de los apoyos.
- B.—Esfuerzo de corte máximo.
- C.—Momento flector máximo.

VIGAS SOMETIDAS A CARGAS AISLADAS

A.—Reacciones de los apoyos. — Vamos a sintetizar los distintos métodos que se siguen para determinar las reacciones, métodos que se fundan todos en **el principio de que las reacciones de los apoyos son iguales y contrarias a las acciones que la viga ejerce sobre los apoyos**, y en el hecho de que **éstas se obtienen descomponiendo la resultante de todas las cargas en dos fuerzas paralelas a ella y que pasen por los apoyos**.

Como trataremos únicamente de casos sencillos supondremos siempre cargas verticales y reacciones también verticales.

Pudiendo hacerse analítica o gráficamente la descomposición de una fuerza en otras dos paralelas a ella, habrá también dos procedimientos, uno gráfico y otro analítico, para la determinación de las reacciones.

Supongamos que se tiene (fig. 138) una viga AB sometida a la acción de las cargas aisladas F' , F'' , F''' y F^{IV} , cuyas distancias a los apoyos indicamos con las letras que se ven en la figura.

Se procede como sigue: se construye (fig. 138-b) un polígono CDEGL de las cargas F' , F'' , F''' y F^{IV} ; se toma un polo O (conviene tomarlo a distancia entera de centímetros de la línea de cierre del polígono de las fuerzas) y se construye (fig. 138-c) un funicular I-II-III-IV-V de las cargas. Se trazan las verticales de los apoyos, se determina el punto de intersección A' del primer lado del funicular con la vertical del apoyo A, y el punto de intersección B' del último lado del funicular con la vertical del apoyo B,

se unen A' y B' por medio de una recta $A'B'$ obteniéndose la "línea de cierre -VI- del polígono funicular"; se traza por el polo O una paralela a dicha línea de cierre: esta paralela divide el segmento CL , representativo de la resultante de las cargas, en dos segmentos IC y LI que representan las reacciones R' y R'' de los apoyos A y B respectivamente. Para no confundir el segmento representativo de R' con el de R'' , téngase presente la siguiente regla deducida de las reglas para trazar los polígonos funiculares: El segm. repres. de R' será el comprendido entre los radios polares paralelos a los lados del funicular que se cortan sobre R' , y el segm. repres. de R'' será el comprendido entre los radios polares paralelos a los lados del funicular que se cortan sobre R'' . Así se ve en la figura que sobre R' se cortan los lados I y VI del funicular: el segmento representativo de R' será el comprendido entre los radios I y VI o sea entre los puntos I y C .

La construcción que precede se basa en lo siguiente: Para hallar las reacciones de los apoyos basta hallar las acciones de la viga sobre los apoyos y cambiarles el signo, y para hallar esas acciones basta descomponer la resultante de las cargas en dos fuerzas paralelas a ella y que pasen por los apoyos.

Ahora bien, para hacer gráficamente esta descomposición, conocida la resultante R que pasa por K y cuyo segm. repres. es CL , tendremos que tomar un punto de R , p. ej.: el mismo K , trazar por él dos rectas cualesquiera, por ej. las rectas I y V , marcar los p. A' y B' en que estas rectas I y V cortan las paralelas a R trazadas por los apoyos A y B respectivamente, trazar la recta $A'B'$; tomar luego un segm. repres. de R (que es el CL), trazar por sus extremos $\parallel$ a I y V , paralelas que son los radios polares I y V , y trazar finalmente por el punto O de intersección de dichas paralelas una recta paralela a $A'B'$, paralela que dividirá el segm. repres. CL en dos: CI e IL , representativos de las componentes buscadas de R , o sea de las acciones que la viga ejerce sobre los apoyos A y B respectivamente. Cambiándoles el sentido a estas acciones tendremos las reacciones cuyos segmentos representativos serán IC y LI .

Recuérdese que se llama **fuerzas exteriores** en una construcción cualquiera a todas las cargas que actúan sobre ella. al peso propio de la construcción y a las reacciones de los apoyos. Si se supone (fig. 138) que el peso propio de la viga está incluido en las cargas F' , F'' , F''' y F^{IV} , ten-

dreemos como fuerzas exteriores en la viga AB las siguientes: R' , F' , F'' , F''' , F^{IV} y R'' . Recordando además las condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas y que en una construcción en equilibrio (como la viga, por que todas las vigas se calculan de manera que permanezcan en equilibrio cuando actúan sobre ellas las cargas) las fuerzas exteriores deben formar un sistema en equilibrio, se tendrá que las ff. R' , F' , F'' , F''' , F^{IV} y R'' deben estar en equilibrio, y que por lo tanto deben resultar cerrados cualquier polígono de dichas fuerzas y cualquier polígono funicular de las mismas que se construya. En la fig. 138 se tiene el polígono de todas esas fuerzas exteriores en ICDEGLI y un funicular de las mismas en VI-I-II-III-IV-V-VI.

Observando estos polígonos se verá que ellos comprenden el polígono de las fuerzas exteriores que quedan a un lado de una sección cualquiera s de la viga y el funicular correspondiente. Así, p. ej., si tomamos la sección s , tenemos a su izquierda las fuerzas exteriores R' y F' . Pues bien: en ICD se tiene el polígono de las ff. R' y F' , y en VI-I-II un polígono funicular correspondiente al polo O. A la derecha de s quedan las fuerzas exteriores F'' , F''' , F^{IV} y R'' cuyo polígono de fuerzas es DEGLI y cuyo funicular es II-III-IV-V-VI. Si se considera la sección s' , se tiene a su izquierda las fuerzas exteriores R' , F' , F'' y F''' ; en ICDEGL se tiene un polígono de dichas fuerzas y en VI-I-II-III-IV un funicular correspondiente al polo O.

Esta propiedad es utilísima como se verá más adelante.

Las reacciones pueden ser calculadas fácilmente por el procedimiento analítico. Si tenemos en cuenta (fig. 138) que todas las fuerzas exteriores R' , F' , F'' , F''' , F^{IV} y R'' forman un sistema en equilibrio, se tendrá que la suma de sus momentos estáticos respecto de un punto cualquiera será igual a cero. Si se refieren los momentos al apoyo B, como centro, la ecuación de los momentos dará

$$\begin{array}{ccccccccc} B & & B & & B & & B & & B \\ M & + & M & + & M & + & M & + & M & = & 0 \\ R' & & F' & & F'' & & F''' & & F^{IV} \end{array}$$

por ser

$$\begin{array}{c} B \\ M \\ R'' \end{array} = 0$$

Y, si se expresa el momento de cada fuerza por el producto de la misma por su brazo de palanca respecto de B, resultará

$$R' \cdot l - F' \cdot b' - F'' \cdot b'' - F''' \cdot b''' - F_{IV} \cdot b_{IV} = 0$$

de donde

$$R' = \frac{F'b' + F''b'' + F'''b''' + F_{IV}b_{IV}}{l} \quad (1)$$

o también

$$R' = \frac{F'b'}{l} + \frac{F''b''}{l} + \frac{F'''b'''}{l} + \frac{F_{IV}b_{IV}}{l} \quad (2)$$

Si se tiene presente que $\frac{F'b'}{l}$

es la reacción originada en A por la fuerza F' , que

$$\frac{F''b''}{l}$$

es la reacción originada en A por la fuerza F'' , etc., se tendrá que la reacción total en A puede obtenerse por la suma de las reacciones parciales producidas en A por cada una de las cargas.

De la misma manera, si se aplica la ecuación general de los momentos al punto A, se tendrá

$$\begin{matrix} A & A & A & A & A & A \\ M & + M & + M & + M & + M & + M \\ R' & F' & F'' & F''' & F_{IV} & R'' \end{matrix} = 0$$

y, sustituyendo, y teniendo en cuenta que $M_{\frac{A}{R'}} = 0$

$$F'a' + F''a'' + F'''a''' + F_{IV}a_{IV} - R'' \cdot l = 0$$

de donde

$$R'' = \frac{F'a' + F''a'' + F'''a''' + F_{IV}a_{IV}}{l} \quad (3)$$

$$R'' = \frac{F'a'}{l} + \frac{F''a''}{l} + \frac{F'''a'''}{l} + \frac{F_{IV}a_{IV}}{l} \quad (4)$$

fórmula que nos dice que la reacción total en B es igual a la suma de las reacciones parciales producidas en B por cada una de las cargas.

Las fórmulas (1), (2), (3) y (4) permiten calcular rápidamente las reacciones de los dos apoyos de una viga.

Téngase presente que estando en equilibrio el sistema de todas las fuerzas exteriores, se tendrá:

$$R' + F' + F'' + F''' + F^{IV} + R'' = 0 \text{ de donde}$$

$$R' + R'' = - (F' + F'' + F''' + F^{IV}) \quad (5)$$

y que, por lo tanto, conocida una de las reacciones, se podrá obtener fácilmente la otra por esta fórmula (5). Por ejemplo, conocida R' , la (5) nos da

$$R'' = - \text{Suma } F - R'$$

Análogamente se tiene

$R' = - \text{Suma } F - R''$, debiendo tenerse especial cuidado en dar el signo más a las fuerzas que tengan un mismo sentido y el signo menos a las que tengan sentido contrario.

Recuérdese que, en todos los casos, la suma de las reacciones es igual, en valor absoluto, a la suma de las cargas que sostiene la viga (cargas propiamente dichas y peso propio de la viga).

ESFUERZOS DE CORTE

Se llama esfuerzo de corte de una sección a la resultante de todas las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de dicha sección. — Por ejemplo, el esfuerzo de corte de la sección s (fig. 138) de la viga AB es la resultante de las fuerzas exteriores R' y F' que quedan a la izquierda de s ; el esfuerzo de corte de la sección s' es la resultante de las fuerzas exteriores R' , F' , F'' y F''' que quedan a la izquierda de s' .

Nótese que estando en equilibrio todas las fuerzas exteriores, si se consideran las que quedan a la derecha de una sección, su resultante debe ser igual pero contraria a la resultante de las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de la misma sección.

Por lo tanto, el esfuerzo de corte puede obtenerse tomando las fuerzas exteriores que quedan a uno u otro lado de la sección, pero, en el caso de tomarse las que quedan a la derecha, se le obtendrá con el sentido cambiado.

Hemos dicho más arriba que el polígono de fuerzas ICDEGLI (fig. 138-b) y el polígono funicular VI-I-II-III-IV-V-VI (fig. 138-c) de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga comprenden respectivamente el polígono de fuerzas y el polígono funicular del grupo de todas las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de una misma sección cualquiera s de la viga, y, por lo tanto, ellos servirán para hallar gráficamente y con facilidad el esfuerzo

de corte de una sección cualquiera. Así, para la sección s , se tiene que el esfuerzo de corte Q_s será la resultante de las fuerzas exteriores R' y F' que quedan a la izquierda de s . Pues bien, se tiene en ICD (fig. 138-b) un polígono de las ff. R' y F' , en ID su línea de cierre o sea un segm. repres. de Q_s , y en VI-I-II (fig. 138-c) un polígono funicular de las mismas fuerzas (correspondiente al polo O); por lo tanto, se tendrá en U (punto de intersección de II y VI) un punto de la recta de acción de Q_s , y bastará trazar por U una paralela a ID para tener Q_s , cuya intensidad se calculará midiendo previamente la longitud ID. De la misma manera, si se quiere el esfuerzo de corte de s' , o sea la resultante de las fuerzas exteriores R' , F' , F'' y F''' que quedan a la izquierda de s' , obsérvese que ya se tiene en ICDEG un polígono de dichas fuerzas, en IG la línea de cierre de este polígono o sea un segm. repres. de $Q_{s'}$, y en VI-I-II-III-IV un funicular de las mismas fuerzas. Por lo tanto $Q_{s'}$ pasará por el punto N de intersección de VI y IV y tendrá el valor que corresponde al segm. IG.

De lo expuesto se puede deducir la siguiente regla:

El esfuerzo de corte de una sección s de una viga está representando en el polígono de las fuerzas por el segmento interceptado por dos radios polares, uno paralelo a la línea de cierre del polígono funicular y el otro paralelo al lado del polígono funicular que está debajo de dicha sección s . Por el punto de intersección de estos dos lados del polígono funicular pasa la recta de acción del esfuerzo de corte de s .

Se comprenderá entonces fácilmente que si un lado del funicular es $\parallel$ a la línea de cierre de dicho funicular, será nulo el esfuerzo cortante de toda sección situada arriba de aquel lado.

Siendo, en los casos sencillos que consideramos, verticales todas las fuerzas y por lo tanto paralelas entre sí, y siendo la intensidad de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas igual a la suma algebraica de las intensidades de las componentes, puede calcularse con toda facilidad, analíticamente, el valor de Q para cualquiera sección s haciendo la suma algebraica de las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de dicha sección.

Así, para la sección s (fig. 138) se tendría

$$Q_s = R' - F' ,$$

y para s'

$$Q_{s'} = R' - F' - F'' - F'''$$

DIAGRAMA DE LOS ESFUERZOS DE CORTE

Consideremos siempre el caso de la fig. 138 en el que cuatro cargas aisladas actúan sobre una viga AB, y veamos como varía el esfuerzo de corte a lo largo de dicha viga y como se puede construir un diagrama que nos dé inmediatamente el esfuerzo de corte de cualquiera sección.

Para todas las secciones comprendidas entre A y F' el esfuerzo de corte es igual a R' pues para todas ellas no hay a la izquierda sino la fuerza R'.

Para la sección s, como para cualquier otra comprendida entre F' y F'', el esfuerzo de corte es igual a la resultante de R' y de F' o sea a

$$R' - F'$$

Entre F'' y F''' se tiene como esfuerzo de corte, para cualquiera sección, $R' - F' - F''$.

Entre F''' y F^{IV} el esfuerzo de corte es

$$R' - F' - F'' - F'''$$

y finalmente, entre F^{IV} y R'', el esfuerzo de corte es

$$R' - F' - F'' - F''' - F^{\text{IV}} = - R''$$

Todo ello nos dice que el esfuerzo de corte es constante entre dos fuerzas aisladas consecutivas y que varía bruscamente de valor en las secciones en que hay alguna fuerza aislada aplicada.

Si se atribuye signo + a las fuerzas que tienen sentido hacia arriba y signo — a las de sentido contrario, vemos que el esfuerzo de corte es igual a + R' sobre el apoyo A y que cambia de valor a medida que vamos hacia el apoyo B donde es igual a — R'', es decir ha pasado de un valor positivo a uno negativo, lo que no ha podido hacer sin pasar por el valor cero. Por lo tanto, en alguna sección, el esfuerzo cortante pasa por cero; esa sección debe estar necesariamente debajo de una de las cargas, ya que solamente en esas secciones hay variación del esfuerzo cortante.

Esta sección, en la que el esfuerzo de corte pasa por el valor cero, tiene mucha importancia, pues es en ella donde se tiene el momento flector máximo; se la llama "sección peligrosa de la viga".

Si tomamos ahora un eje de abscisas A''B'', prolongamos las verticales de todas las fuerzas exteriores, tomamos A''C' = R', trazamos C'C'' paralela a A''B'' limitándola entre R' y F', tomamos C''D'' = F' y trazamos entre F' y F'' la recta D''D' paralela a A''B'', tomamos D'E'' = F'' y trazamos E''E' paralela a A''B'' limitándola en

tre F'' y F''' , tomamos $E' G'' = F'''$ y trazamos entre F''' y FIV la paralela $G'' G'a A'' B''$, y finalmente tomamos $G'L'' = FIV$ y trazamos $L'' L'$ paralela a $A'' B''$; tendremos en la superficie $A'' C'' C'D'' D'E'' E' G'' G'L'' L'B''$ un diagrama de los esfuerzos de corte de las distintas secciones de la viga AB, es decir una figura tal que para obtener el esfuerzo de corte de una sección cualquiera s basta trazar por ésta una paralela a las cargas y medir a la escala de fuerzas el segmento SS'' interceptado sobre ella por dicho diagrama.

En efecto, se tiene, por construcción:

$$SS'' = I'D'' = I'C'' - C'D'' = R' - F' = Qs.$$

De la misma manera

$$T'T'' = I''G'' = R' - F' - F'' - F''' = Qs'.$$

Nótese que si se tiene el polígono de las fuerzas exteriores construido en frente del espacio en que se quiere construir el diagrama de los esfuerzos de corte, como en nuestro caso, esta construcción se hace rápidamente si se toma como eje de abscisas la horizontal que pasa por el punto de separación de las dos reacciones. La simple inspección de la figura descubre el procedimiento seguido, por lo que no lo describimos.

En el diagrama que hemos construido se ve inmediatamente que el esfuerzo de corte pasa por el valor cero en la sección que está debajo de la carga F''' . Esa sección será por lo tanto la "sección peligrosa" de la viga.

El mismo diagrama nos indica también inmediatamente que el esfuerzo de corte alcanza un valor máximo en uno de los dos apoyos, en este caso el apoyo A en el que es igual a $R' = 5,55$ t.

MOMENTOS FLECTORES

Llámanse momento flector de una sección "s" a la suma algebraica de los momentos estáticos de todas las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de dicha sección, tomados con respecto al centro de gravedad de la misma sección.

Teniendo en cuenta el teorema de los momentos puede enunciarse como sigue la definición del momento flector de una sección: Es el momento estático, con respecto al centro de gravedad de dicha sección, de la resultante de todas las

fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de la sección considerada.

Así (fig. 138) el momento flector de la sección **s** será

$$\text{Mf de } s = \text{MR}' \text{ resp. } s + \text{MF}' \text{ resp. } s$$

y el momento flector de **s'** será

$$\text{Mf de } s' = \text{MR}' \text{ resp. } s' + \text{MF}' \text{ resp. } s' + \text{MF}'' \text{ resp. } s' + \text{MF}''' \text{ resp. } s'$$

Si se da la posición de las cargas y de la sección **s**, se tendrá fácilmente los brazos de palanca de las fuerzas exteriores respecto del e.g. de **s**, y, por lo tanto, se podrá calcular analíticamente el momento flector de **s**, debiendo tener cuidado de expresar cada momento con el signo que le corresponda.

Así

$$\text{Mf de } s = R'.x - F'.x'$$

$$\text{Mf de } s' = R'.e - F'.e' - F''e'' - F'''e'''$$

Se puede obtener gráficamente el valor del momento flector de una sección cualquiera recordando las propiedades del polígono funicular VI-I-II-III-IV-V-VI (fig. 138-c) y el procedimiento gráfico para determinar el momento estático de un sistema de fuerzas respecto de un punto. El momento flector de **s** se obtendrá trazando por **s** una $\parallel$ a las cargas, marcando sobre dicha paralela la ordenada **y** que interceptan sobre ella el primer y último lados del funicular II-I-VI de las ff. **R'** y **F'**, y multiplicando dicha ordenada por la distancia polar **H**, es decir, haciendo el producto

$$\text{Mf de } s = H.y$$

debiendo ser medido con la escala de longitudes uno de los segmentos y con la de fuerzas el otro segmento.

En efecto, las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de **s** son **R'** y **F'**. Ahora bien, el polígono II-I-VI es un funicular de dichas fuerzas, correspondiente al polo **O**, y por lo tanto el momento estático del sistema **R'** y **F'** respecto de **s** se obtendrá multiplicando la distancia polar **H** por el segmento que sobre la $\parallel$ a las fuerzas, trazada por **s**, interceptan el primer y el último lados de dicho funicular, es decir los lados VI y II, o sea el segmento **y**.

De la misma manera se puede demostrar que el momento flector de **s'** se obtendrá trazando por **s'** una $\parallel$ a las cargas, determinando el segmento **y'** que sobre dicha $\parallel$ delimitan los lados IV y VI del funicular y multiplicando dicho segmento por la distancia polar **H**, debiendo medir uno de dichos segmentos en la escala de las ff. y el otro en la de las longitudes.

DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES

Acabamos de ver que

$$Mf \text{ de } s = y \cdot H$$

y que

$$Mf \text{ de } s' = y' \cdot H$$

Dividiendo miembro a miembro, resulta

$$\frac{Mf \text{ de } s}{Mf \text{ de } s'} = \frac{y}{y'}$$

relación que nos dice que en una viga los momentos flectores de dos secciones son directamente proporcionales a las ordenadas correspondientes del polígono funicular de todas las fuerzas exteriores. Por lo tanto el valor máximo del momento flector se tendrá en la sección a la que corresponda la ordenanza máxima (y máx) del polígono funicular, o sea, en nuestro caso, en la sección que está debajo de la fuerza F'' , la que es la “sección peligrosa” de la viga. (Obsérvese que es la misma sección en que Q pasa por cero).

La simple inspección de la figura 138-c nos indica que el momento flector es nulo en los apoyos y que va creciendo a medida que uno se acerca a la región central de la viga, verificándose siempre su máximo debajo de una de las cargas.

Siendo el polígono funicular VI-I-II-III-IV-V-VI una figura tal que sus ordenadas son proporcionales a los momentos flectores, ella será un diagrama de estos momentos flectores. Para obtener el momento flector de una sección cualquiera bastará trazar por ésta una $\parallel$ a las cargas, medir la ordenada correspondiente interceptada sobre ella por el polígono funicular, y multiplicar dicha ordenada por la distancia polar.

OTRO DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES

El diagrama de los esfuerzos de corte, fig. 138-d, es también un diagrama de los momentos flectores, pero éstos se obtienen entonces, no ya por medio de las ordenadas correspondientes a las secciones sino por integración de las áreas que quedan a la izquierda de dichas ordenadas, debiendo considerarse como positivas las áreas de las porciones que quedan arriba del eje de abscisas y como negativas las que quedan debajo del mismo. Así el Mf de s estará dado

por el área de la superficie A''C'C'D''S''SA'', y es positivo: el Mf de s' será igual a la suma algebraica de las superficies

$$A''C'C'D''D'E''E'I''' - I'''G''T''T'$$

de las que la primera es positiva y la segunda negativa.

En efecto, se tiene para la sección s

$$A''C'C'D''S''SA'' = A''C'C''S - D''C''C''S'' \quad (1)$$

pero

$$A''C'C''S = \overline{A''C'} \cdot \overline{A''S} = R' \cdot x$$

y

$$D''C''C''S'' = \overline{C''D''} \cdot \overline{D''S''} = F' \cdot x'$$

y, sustituyendo en (1), resulta

$$A''C'C'D''S''SA'' = R' \cdot x - F' \cdot x' = \text{Mom. flector de } s$$

De la misma manera se tendrá para s'

$$\begin{aligned} A''C'C'D''D'E''E'I''' - I'''G''T''T' &= \\ &= \overline{A''C'} \cdot \overline{A''T'} - \overline{D''C''} \cdot \overline{D''D''} - \\ &\quad - \overline{E''D'} \cdot \overline{E''E''} - \overline{G''E''} \cdot \overline{G''T''} = \\ &= R' \cdot c - F' \cdot c' - F'' \cdot c'' - F''' \cdot c''' = \text{Mom. flector de } s' \end{aligned}$$

ALGUNOS CASOS SENCILLOS Y MUY FRECUENTES EN LA PRACTICA.

A. — Caso de una carga aislada que actúa en un punto cualquiera de la viga.

Sea AB una viga simplemente apoyada por sus extremos y sobre la que actúa una carga aislada P a distancia a del apoyo A. Sean b la distancia al otro apoyo y l la luz de la viga. (fig. 139).

De relaciones anteriores se deduce sucesivamente:

$$R' = \frac{P \cdot b}{l} \quad (7)$$

$$R'' = \frac{P \cdot a}{l} \quad (8)$$

$$Q \text{ máx} = R' \quad \text{si } R' \text{ mayor que } R''$$

$$y \quad M. f. \text{ máx} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \quad (9)$$

Siendo la sección peligrosa de la viga la que está debajo de la fuerza P.

B. — Caso de una carga aislada aplicada en el centro de la luz. (fig. 140).

Este es un caso particular del anterior: el caso en que

$$a = b = \frac{l}{2}$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas anteriores, se tiene

$$R' = R'' = \frac{P}{2} \quad (10)$$

$$Q \text{ máx} = R' = R'' \quad (11)$$

$$y \quad M. f. \text{ máx} = \frac{P.l}{4} \quad (12)$$

Este momento flector máximo corresponde a la sección que está debajo de la carga P, sección que es la “peligrosa” de la viga.

Las fórmulas (7) a (12) deben ser recordadas de memoria por cuanto tienen aplicación continua en los cálculos de las construcciones. Conviene recordar también su deducción, a cuyo efecto será necesario tener bien presente las definiciones de reacción, esfuerzo de corte y momento flector.

VIGA CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA SU LONGITUD.

Este es otro de los casos frecuentes en las construcciones.

Sea una viga AB, simplemente apoyada en sus extremidades, de luz l, y con una carga continua, uniformemente distribuída sobre toda luz, de p kilogramos por metro de luz. (fig. 141).

Según lo dicho al final del capítulo V la resultante de toda esta carga continua será una fuerza $P = pl$, aplicada en el centro de la luz. Las reacciones se obtendrán descomponiendo P en dos fuerzas || a ella, que pasen por A y B. Por estar P en el centro de la luz, se tendrá

$$R' = R'' = \frac{P}{2} = \frac{pl}{2}$$

Gráficamente se hubiera hecho la descomposición tomando CD = segm. repres. de P, tomando un polo O, tra-

zando un funicular IHJ correspondiente a este polo, trazando la línea de cierre A'B' de este funicular y luego, por el polo O, una paralela a esta línea de cierre. Esta paralela dividirá el segm. repres. de la resultante P en dos segmentos que serán los representativos de las reacciones R' y R''.

Un polígono funicular* de la carga continua se obtendrá fácilmente recordando lo que hemos dicho antes sobre ello. Será dicho polígono una curva (parábola) tangente a IH en A' y a HB en B' y que pasará por el punto medio L de KH. (1)

Una vez construída la parábola, ella, con la línea de cierre A'B', da la superficie o diagrama de los momentos flectores. El momento flector de una sección s se obtendrá multiplicando la ordenada ys que le corresponde en el funicular por la distancia polar T.

En dicho diagrama se ve que la ordenada máxima corresponde a la sección central de la viga; por lo tanto es ella la sección peligrosa o sea la de momento flector máximo.

Un diagrama de los esfuerzos de corte se obtiene fácilmente tomando $A''C'' = R'$, $B''D'' = -R''$ y uniendo los puntos C'' y D''. La superficie comprendida entre el eje de abscisas A'B'' y la recta C''D'' es el diagrama de los esfuerzos de corte pues sus ordenadas dan dichos esfuerzos para las secciones correspondientes (demostraremos esto más adelante).

Como A''C'' y B''D'' son iguales, también lo serán A''N y NB'' y por lo tanto N es el punto medio de A''B'', o sea el correspondiente a la sección que está en el centro de la luz. Observando el diagrama vemos que la ordenada que representa el esfuerzo de corte es máxima en cualquiera de los apoyos y que disminuye paulatinamente a medida que vamos hacia el centro de la viga, llegando a anularse en el punto medio. Nótese que aquí también vuelve a veri-

(1) Para obtener dicho arco de parábola divídase AH' y HB' en igual número de partes iguales, p. ej., en cuatro partes cada uno, márchense los puntos de división con la serie de números 1, 2, 3, 4, etc. sobre una de las tangentes empezando por el punto de tangencia, y con la serie 1', 2', 3', etc. sobre la otra tangente empezando por el punto de intersección de las dos tangentes; trácense las rectas 11', 22', 33', etc. las que son todas tangentes al arco de parábola que se busca, el que se obtendrá por eso mismo trazando una curva tangente a dichas rectas, y el que será tanto más exacto cuanto mayor sea el número de partes en que se dividan las tangentes.

ficarse que en la misma sección en que el esfuerzo de corte es nulo el momento flector alcanza su valor máximo.

Puede obtenerse analíticamente los valores del esfuerzo de corte y del momento flector de una sección cualquiera s . En efecto, a la izquierda de s hay, como fuerzas exteriores, la reacción en A y la carga continua que queda entre A y s , carga que tiene por valor px . Por lo tanto el esfuerzo de corte en s será

$$Q_s = R' - px = \frac{pl}{2} - px. \quad (13)$$

o también

$$Q_s = p \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (14)$$

Cualquiera de estas dos fórmulas permitirá calcular Q para una sección situada a una distancia x del apoyo A.

Demostremos ahora que el diagrama que hemos construido antes, da efectivamente en su ordenada SU un segm. repres. de Q_s . Se tiene que

$$SU = SV - UV, \text{ pero } SV = A''C'' = R' = \frac{pl}{2}$$

$$\text{y } UV = XD'' \cdot \frac{C''V}{C''X} = P \frac{x}{l} = pl \frac{x}{l} = px$$

luego, sustituyendo, se tendrá

$$SV = \frac{pl}{2} - px, \text{ fórmula exactamente igual a la (13).}$$

Por lo tanto

$$SU = Q_s.$$

En cuanto al momento flector de s , recordando el teorema de los momentos podremos sustituir el momento de toda la carga continua que hay sobre x por el de su resultante px , y escribir

Mom. fl. de $s = MR'$ resp. $s + Mpx$ resp. s
y, sustituyendo los momentos por los productos de las fuerzas por los respectivos brazos de palanca,

$$M_f \text{ de } s = \frac{pl}{2} \cdot x - \frac{pxx}{2} = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}$$

$$M. f. de s = \frac{p}{2} (lx - x^2) \quad (15)$$

fórmula que permite calcular el momento flector de una sección cualquiera situada a una distancia x del apoyo A.

Hemos dicho ya que el momento flector máximo se produce en la sección central de la viga. Siendo para ella

$$x = \frac{l}{2}$$

la fórmula (15) dará

$$Mf. \text{ máx} = \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{pl^2}{8}$$

$$Mf. \text{ máx} = \frac{pl^2}{8} \quad (16)$$

Recordando que $P = pl$ podrá escribirse también

$$Mf. \text{ máx} = \frac{Pl}{8} \quad (17)$$

También estas fórmulas (16) y (17) deben ser recordadas de memoria, pues el caso a que corresponden es uno de los más frecuentes en la práctica.

VIGA CON CARGA CONTINUA SOBRE PARTE DE LA LUZ SOLAMENTE.

Si en vez de tener una viga cargada en toda su longitud se tiene una viga cargada solamente en una porción de la luz (fig. 142) se procederá como sigue para la construcción de los diagramas correspondientes y para la obtención de los valores que interesa conocer para el cálculo de la viga:

Se traza la resultante $P = pa$ de la carga continua, se toma un segmento repres. de la misma, p. ej., el CD, se toma un polo O, se trazan los radios polares I y II y luego los lados del funicular GHI; determinando los puntos A'' y B'' en que los lados de ese funicular cortan a las verticales de los apoyos, uniéndolos y trazando por el polo la recta OE paralela a esa línea de cierre A''B'', se tendrá en EC el segmento repres. de R' y en DE el de R''. Si se traza

ahora las verticales v y v' que delimitan la carga, ellas cortarán a los lados I y II del funicular en los puntos J y K respectivamente. La porción de diagrama de momentos flectores entre esos dos puntos es un arco de parábola tangente en esos mismos puntos a las rectas GH y HI, y se la obtendrá siguiendo el procedimiento explicado para el caso anterior. A la izquierda el diagrama estará limitado por la recta A''J y, a la derecha, por la recta KB'', de modo que en definitiva el diagrama representativo de los momentos flectores será el A''JKB''A'' que ha sido rayado para mayor claridad.

En cuanto al diagrama de los esfuerzos de corte es el A'C'C''D'D''B'A' y basta su observación detenida para darse cuenta de cómo se le construye. Se ve que el esfuerzo de corte pasa por el valor cero en la sección s; por lo tanto en esta sección se producirá el momento flector máximo, el que será igual a **y máx. H.**

Construídos los dos diagramas será posible obtener en seguida, para cualquiera sección, el valor del esfuerzo de corte y el del momento flector, bastando para ello trazar la vertical de la sección, medir las ordenanzas que sobre ella interceptarán los dos diagramas y calcular con las escalas los valores correspondientes a dichas ordenadas.

Los mismos valores podrán ser obtenidos analíticamente recordando las definiciones dadas y observando cuales son las fuerzas exteriores que quedan a la izquierda de la sección dada.

En el caso en que sobre la viga hubiera varias porciones con carga continua se construiría un polígono funicular de las resultantes de todas las cargas continuas y luego se reemplazaría el funicular obtenido, debajo de cada carga continua, por un arco de parábola trazado como se acaba de indicar, obteniendo así en definitiva un funicular de las cargas que hay sobre la viga y, trazando previamente la línea de cierre, un diagrama de los momentos flectores en el que se podría determinar cual es la ordenada máxima y por lo tanto cual es la sección peligrosa de la viga, y el que serviría también para calcular el momento flector de cualquiera sección. El diagrama de los esfuerzos de corte se construiría de una manera análoga a la recién descrita.

Viga con carga mixta. — En el caso en que sobre la viga actúen simultáneamente fuerzas aisladas y cargas continuas, se construirán por separado los diagramas correspondientes a las cargas aisladas y a las cargas continuas y luego se construirán diagramas totalizadores de los parcia-

les obtenidos. Es decir que el diagrama final de los esfuerzos de corte se obtendrá sumando los diagramas de esfuerzos de corte correspondientes a las fuerzas aisladas y a las cargas continuas, y el diagrama de los momentos flectores se obtendrá sumando los diagramas de momentos flectores correspondientes a fuerzas aisladas y a cargas continuas. El diagrama de los esfuerzos de corte permitirá determinar en seguida la sección en que el esfuerzo de corte es cero, sección en la que se produce siempre un máximo del momento flector.

Viga con carga indirecta. — Cuando (fig. 143) las cargas no actúan directamente sobre la viga, sino que actúan sobre ésta por intermedio de viguetas C, D, E, H, G, I, se dice que la carga es indirecta o mediata. Para calcular tales vigas basta sustituir cada una de las cargas por dos componentes equivalentes a ella que actúen sobre las dos viguetas que comprendan a dicha carga y calcular luego la viga como sometida a las fuerzas que cada vigueta trasmite a la viga AB. Así, en la fig. 143, se sustituirá F por sus componentes f y f' obtenidas gráficamente o por las fórmulas

$$f = F.b : (a + b) \text{ y } f' = F.a : (a + b)$$

y Q por sus componentes q y q' obtenidas de la misma manera, y se calcularán todos los valores de los esfuerzos de corte y de los momentos flectores de una viga AB sometida a las cargas f , f' , q y q' .

CAPITULO XI.

SISTEMAS RETICULARES

Generalidades. — Distintas formas de apoyos. — Cálculo de las reacciones de los apoyos. — Cálculo de las tensiones de las barras: método de Cremona, método de Culmann, método de Ritter. — Acción del viento. — Aplicación de los métodos anteriores al cálculo de las tensiones de algunos sistemas reticulares simples.

Generalidades. — Llámase sistema reticular plano un conjunto de barras de ejes coplanares unidas entre sí por medio de articulaciones colocadas en sus extremos. Esos sistemas están sometidos generalmente a varias cargas aisladas, cargas que supondremos aplicadas solamente en los **nudos**, es decir, en los puntos de unión o articulaciones. Estos sistemas reticulares descansan en dos o más apoyos

y, bajo la acción de las cargas, nacen en las barras esfuerzos interiores cuyas resultantes coinciden con los ejes de dichas barras y pueden ser determinadas por varios métodos. Nos ocuparemos únicamente de sistemas reticulares sencillos, apoyados en dos puntos y estáticamente determinados, es decir tales que las tensiones de las barras puedan ser determinadas con ayuda de los principios que hemos visto hasta ahora en este curso.

A esos sistemas pertenecen la mayor parte de las armaduras de techo y muchas vigas de enrejado empleadas en puentes, como la viga Warren y la viga en ene (fig. 144), la armadura inglesa (fig. 145), la armadura belga (fig. 146), la armadura Polonceau de una biela (fig. 147) y muchas otras que pueden ser vistas en los manuales. En esas vigas indicamos con 1, 2, 3, 4, 5, etc. las barras, con A, B, C, D, E, etc., los nudos; se dice que las barras superiores de contorno forman el cordón superior y que las barras inferiores forman el cordón inferior; así en la figura 144 izquierda las barras 1, 4, 8 y 11 forman el cordón superior y las barras 2, 6 y 10 forman el inferior; en la figura 144 las barras 4, 8, 12 y 14 forman el cordón superior y las barras 2, 6, 11, 16 forman el cordón inferior.

El problema de los sistemas reticulares se propone determinar las tensiones de las distintas barras, lo que consiguie, una vez calculadas las reacciones, aplicando los principios generales de equilibrio de una construcción y las condiciones generales de equilibrio de un sistema plano de fuerzas.

Lo primero que hay que hacer es determinar las reacciones de los apoyos, determinación que se hace siguiendo exactamente el mismo procedimiento indicado para las vigas cargadas, pues aquí también supondremos que se trata de construcciones de pequeña luz, simplemente apoyadas en sus extremos, en las que las reacciones de los apoyos son paralelas a la resultante de las cargas que actúan sobre la construcción. En construcciones de esta naturaleza las vigas descansan simplemente sobre los apoyos (fig. 148) o están además unidas a éstos por medio de pernos o remaches (fig. 149); la luz teórica l' o sea la distancia entre las reacciones de los dos apoyos es aproximadamente un 4 o/o mayor que la luz libre l cuando los apoyos son muros de fábrica y es igual a la distancia entre ejes de los apoyos cuando éstos están formados por otras vigas o por columnas.

En construcciones de mayor importancia se da a los apoyos formas y disposiciones especiales con el objeto de fijar los puntos de apoyo o la dirección de alguna reacción,

y a veces ambos. Hay apoyos fijos articulados en los que la viga descansa sobre el apoyo por intermedio de un perno de articulación (fig. 150) por cuyo eje pasará siempre la reacción del apoyo; hay apoyos rígidos de resbalamiento en los que la viga descansa sobre el apoyo por intermedio de rodillos que pueden rodar sobre un plano (fig. 151) siendo en este caso la reacción perpendicular a dicho plano; hay la articulación móvil de apoyo en la que la viga es sostenida por una articulación que descansa sobre el plano de apoyo por intermedio de rodillos (fig. 152) siendo en este caso la reacción una fuerza normal al plano de apoyo y que pasa por el eje de la articulación. Las construcciones de importancia tienen casi siempre un apoyo fijo articulado y un apoyo móvil, articulado o no, quedando con ello determinadas las rectas de acción de las reacciones las que podrán ser entonces calculadas descomponiendo la resultante de todas las cargas en dos fuerzas que actúen en dichas rectas. Por ejemplo, si la armadura AB de la figura 153 tiene en A un apoyo articulado móvil sobre un plano horizontal y en B un apoyo articulado fijo, la reacción del apoyo A debe pasar por este punto y ser normal al plano horizontal, es decir ser vertical; la reacción del apoyo B debe, conjuntamente con la de A equilibrar la resultante de las cargas siendo necesario para ello que las dos reacciones se corten en un mismo punto de R. Por lo tanto la reacción del apoyo B pasará por el punto C en que la reacción del apoyo A encuentra a dicha resultante. Determinadas así las rectas de acción de las reacciones, bastará descomponer R en dos fuerzas que actúen en esas dos rectas para obtener las reacciones.

Conocidas las reacciones se pasa a determinar las tensiones de las barras, tensiones que se puede encontrar por varios métodos, entre los que se encuentran los que exponemos a continuación.

METODO DE CREMONA

Este método se funda en los principios de equilibrio de los cuerpos y de los sistemas de fuerzas. Sabemos que para que una construcción cualquiera esté en equilibrio es necesario que cualquiera de sus partes, considerada aisladamente, lo esté también. Por lo tanto para que la armadura de la figura 154 esté en equilibrio será indispensable que cada nudo lo esté bajo la acción de todas las fuerzas que a él concurren. Así el nudo D debe estar en equilibrio bajo la acción de las tensiones que denominamos T^2 , T^3 , T^5 y T^6 .

El nudo E debe estarlo bajo la acción de las fuerzas que a él concurren, que son las F'' , T^4 , T^5 , T^7 y T^8 .

Para que un nudo esté en equilibrio es necesario, por otra parte, que todas las fuerzas exteriores que a él concurren formen un sistema de fuerzas en equilibrio, comprendiendo en esas fuerzas exteriores las cargas y las tensiones de las barras que llegan al nudo. Así el equilibrio del nudo

D exige que las fuerzas tensiones en las barras 2, 3, 5 y 6 formen un sistema de fuerzas en equilibrio. El equilibrio del nudo E exige que las fuerzas F'' , T^4 , T^5 , T^7 y T^8 formen un sistema en equilibrio.

Sabemos también que en un sistema de fuerzas en equilibrio una parte del mismo equilibra la otra parte, o sea la resultante de una parte del sistema es igual y contraria a la resultante de la otra parte.

Si observamos los distintos nudos de la armadura vemos en seguida que en general, en cada uno de ellos, concurren una o más fuerzas conocidas y varias fuerzas desconocidas. (Las tensiones de las barras son las fuerzas desconocidas). Si en un nudo en que concurren fuerzas conocidas y fuerzas desconocidas, agrupamos las primeras en una parte y las segundas en otra parte, tendremos que la resultante de las fuerzas conocidas será igual y contraria a la resultante de las desconocidas, y por lo tanto podrá tenerse en seguida esta resultante de las fuerzas desconocidas hallando la de las conocidas y cambiándole el sentido. Obtenida la resultante de las fuerzas desconocidas, será posible hallar los valores de estas últimas, siempre que sea posible descomponer aquella resultante en fuerzas que actúen en las rectas de acción de las fuerzas desconocidas.

En nuestro caso todas las fuerzas que concurren en un nudo forman un sistema de fuerzas concurrentes, lo mismo que una parte cualquiera de dicho sistema. Por lo tanto la resultante que hay que descomponer y las rectas de acción de las componentes que se buscan (ejes de las barras) concurren en el nudo. Se podrá descomponer esa resultante siempre que las fuerzas desconocidas no sean más de dos, pues hemos visto que la descomposición de una fuerza en más de dos fuerzas que se cortan sobre la fuerza a descomponer es un problema indeterminado. Habrá por lo tanto que empezar por un nudo en el que no haya más de dos incógnitas, o fuerzas desconocidas, y seguir operando con nudos en que se satisfaga siempre esta condición de no haber más de dos fuerzas desconocidas, pudiendo haber cuantas se quiera conocidas.

Así, en el nudo E concurren cinco fuerzas, una conocida,

la F'' , y cuatro desconocidas, las tensiones de las barras 4, 5, 7 y 8. La fuerza F'' será, por lo dicho, igual y contraria a la resultante de las tensiones de las barras 4, 5, 7 y 8, pero no se podrá hallar éstas porque no sabemos descomponer una fuerza en otras cuatro. En el nudo C, para tener las tensiones de las barras 1, 3 y 4, habría que descomponer la fuerza F' en tres fuerzas que actuaran en las rectas 1, 3 y 4 que se cortan en un mismo punto de F' , lo que tampoco sabemos hacer. En cambio en el nudo A tenemos solamente dos fuerzas desconocidas T^1 y T^2 y será posible hallarlas descomponiendo la fuerza R' en dos fuerzas que actúen en las rectas 1 y 2. Resumiendo lo dicho tenemos: Para hallar las tensiones de las barras operaremos con nudos en los que no haya más de dos tensiones desconocidas. Tomando un nudo que satisfaga esta condición, se buscará la resultante de todas las fuerzas conocidas que a él concurren, y se descompondrá esta resultante en dos fuerzas que actúen en las rectas de acción de las fuerzas desconocidas que a él concurren, con lo que se tendrá las tensiones de las dos barras desconocidas. Deberá tenerse presente que la determinación sucesiva de tensiones va transformando en conocidas tensiones antes desconocidas, y que por lo tanto un nudo que al principio no satisface la condición de no existir en él más de dos incógnitas, la satisface después de determinadas por medio de nudos vecinos las tensiones de algunas de las barras que concurren en él.

Para fijar los conceptos y el método exacto que debe seguirse vamos a resolver el problema de calcular las tensiones de las barras de la armadura de la figura 154.

Sea ACDEGNB una armadura que descansa sobre dos apoyos A y B por sus extremos (fig. 154). La armadura está formada por las barras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, las que se unen por sus extremos por medio de articulaciones que constituyen los nudos A, B, C, D, E, G y N. Supongamos que en los nudos superiores C, E y N actúen las cargas aisladas $F' = 2 \text{ t}$, $F'' = 2 \text{ t}$ y $F''' = 1 \text{ t}$.

Previamente se determina las reacciones de los apoyos por medio del procedimiento gráfico indicado para las vigas cargadas. Si IJKL (fig. 155) es un polígono de las cargas F' , F'' y F''' , si A'-I-II-III-IV-B' es un funicular correspondiente al polo O, A'B' su línea de cierre y O-M una paralela a esta línea de cierre trazada por el polo O, se tendrá en MI el segm. repres. de la reacción del apoyo A y en LM el segm. repres. de la reacción del apoyo B. Conocidas las reacciones se construye el Cremona como sigue: Se traza un polígono **e a b c d e** de todas las fuerzas exteriores

que actúan sobre la armadura, (fig. 156), es decir de las cargas y reacciones (suponemos incluido el peso propio en las cargas). Se considera un nudo en el que no concurren más de dos fuerzas desconocidas, p. ej., el nudo A, en el que concurren las fuerzas R' , T^1 y T^2 , de las que R' es ya conocida siendo las demás desconocidas. Debiendo formar estas tres fuerzas un sistema en equilibrio resultará que R' deberá ser igual y contraria a la resultante de T^1 y T^2 y que por lo tanto podrá hallarse el valor de éstas descomponiendo simplemente R' en dos fuerzas que actúen en las rectas 1 y 2 de acción de las tensiones T^1 y T^2 respectivamente. Para efectuar esa descomposición basta tomar un segm. repres. de R' y trazar por cada uno de sus extremos paralelas a las rectas de acción de las componentes que se busca. Siendo ea el segm. repres. de R' , trazaremos por uno de sus extremos, el a , p. ej., una paralela a 1 y por el otro extremo e una paralela a 2. Estas paralelas se cortan en un punto g el que determina dos segmentos eg y ga representativos de las tensiones T^2 y T^1 respectivamente, pero con el signo cambiado. Midiendo estos segmentos y calculando las fuerzas que representan, tendremos los valores de las tensiones de las barras 1 y 2. Para saber ahora cual es la naturaleza de estas tensiones, se escribe sobre las barras y al lado del nudo A con que se opera las flechas de los sentidos de eg y ga , **pero cambiándoles el sentido**; y se aplica la regla siguiente: si la flecha se acerca al nudo, la barra trabajará a la compresión; si se aleja, a la extensión. En nuestro caso resulta que la barra 1 será comprimida, y que la barra 2 será extendida.

Conocidas las tensiones de 1 y 2 se pasa a otro nudo en el que no haya más de dos fuerzas incógnitas, p. ej., al nudo C, en el que concurren las fuerzas F' , T^1 , T^3 y T^4 , de las cuales son desconocidas solamente las dos últimas, pues T^1 ya ha sido determinada y F' está dada. Para hallar las tensiones desconocidas aplicaremos la regla ya expuesta: buscaremos la resultante de las fuerzas conocidas que concurren en el nudo y la descompondremos en dos fuerzas que actúen en las rectas de acción de las fuerzas desconocidas. En este caso buscaremos la resultante de F' y T^1 y la descompondremos en dos fuerzas que actúen en las rectas 3 y 4, ejes de las barras 3 y 4. Construiremos un polígono de las fuerzas conocidas, polígono que ya tenemos en gab , y tendremos en su línea de cierre gb un segm. repres. de su resultante. Para descomponer esta resultante en dos fuerzas que actúen en 3 y 4 bastará trazar por uno de los extremos del segm. repres., p. ej., por g , una paralela a 3, y

por el otro extremo **b** una paralela a 4. Estas dos paralelas se cortan en un punto **h** que determina los segmentos **gh** y **hb** representativos de T^3 y T^4 respectivamente. Tendremos los valores de estas tensiones midiendo sus segms. repres. a la escala de las fuerzas; en cuanto a la naturaleza de las tensiones volveremos a aplicar la regla enunciada: escribiremos las flechas de los sentidos de **gh** y **hb** sobre las barras 3 y 4, al lado del nudo con que operamos, el C en este caso, pero cambiándoles el sentido. Si la flecha se acerca al nudo, la barra será comprimida; si se aleja, extendida. En este caso resulta que ambas barras 3 y 4 trabajarán a la compresión.

Ya conocemos las tensiones de las barras 1, 2, 3, y 4. Se pasa a otro nudo, tratando siempre de elegir uno en el que no haya más de dos fuerzas incógnitas. No podremos pasar al nudo E porque en él tendríamos como desconocidas las tres tensiones de las barras 5, 7 y 8. En cambio, en el nudo D tenemos como desconocidas, o incógnitas, solamente las tensiones de las barras 5 y 6, pues conocemos ya T^2 y T^3 . Debemos pues seguir con el nudo D volviendo a aplicar las distintas reglas que hemos dado para hallar las tensiones en las barras desconocidas. Buscaremos la resultante de las fuerzas conocidas que son T^2 y T^3 ; tendremos en **egh** un polígono de dichas fuerzas conocidas y en **eh** su línea de cierre o sea el segm. repres. de su resultante. Trazando por un extremo, el **e**, p. ej., una paralela a la barra 6, y por el otro extremo **h** una paralela a la barra 5, tendremos en **ei** e **ih** los segms. repres. de las tensiones T^6 y T^5 respectivamente. Escribiendo ahora las flechas sobre las barras, al lado del nudo D, pero invertidas, vemos que la barra 5 será comprimida y que la barra 6 será extendida.

De la misma manera se van determinando sucesivamente las tensiones de todas las demás barras de la armadura con lo que queda resuelto el problema.

La figura 156 formada por los segmentos representativos de las fuerzas exteriores y de las tensiones de las barras se llama el Cremona y para construirlo debe tenerse especial cuidado de seguir ciertas reglas que facilitan muchísimo su construcción y que son las siguientes:

1.º — Si tres barras forman un triángulo, en el Cremona sus paralelas deben concurrir en un mismo punto. Así p. ej., las barras 1, 2, 3 forman un triángulo; sus paralelas deben concurrir en un punto. Vemos que efectivamente las paralelas a esas barras se cortan en el punto **g**. De la misma manera las barras 5, 6 y 7 forman un triángulo; sus paralelas se cortan en el Cremona en el punto **i**.

2.º — Si en la armadura varias barras y fuerzas exteriores concurren en un mismo punto, en el Cremona sus paralelas deben formar un polígono cerrado (este polígono puede ser cóncavo o convexo). Así las barras 2, 3, 5 y 6 concurren en el nudo D; sus paralelas en el Cremona deben formar una figura cerrada: efectivamente, vemos que forman la figura **eghie**. En el punto E de la armadura concurren las barras 4, 5, 7 y 8 y la carga F'' ; sus paralelas en el Cremona forman el polígono cerrado **bckihb**.

Como regla derivada de las anteriores se tiene la siguiente: Cuando una barra de cordón está entre dos cargas aisladas, su paralela debe pasar en el Cremona por el punto de separación de los segms. repres. de esas cargas. Así la barra 4 está entre las cargas F' y F'' ; su paralela deberá ser trazada por el punto **b** que separa los segms. repres. de esas cargas. De la misma manera la paralela a la barra 8 debe ser trazada por el punto **c** que separa los segms. repres. de F'' y F''' , y la paralela a la barra 11 debe pasar por el punto **d** de separación o unión de los segms. repres. de las fuerzas exteriores F''' y R'' .

Aplicando con cuidado estas reglas se puede tener la seguridad de que en el Cremona van resultando, de por sí los polígonos de fuerzas que se va necesitando sucesivamente para obtener los segmentos representativos de las resultantes de las fuerzas conocidas aplicadas a cada nudo.

MÉTODOS DE CULMANN Y DE RITTER

Estos métodos se fundan también en los principios de equilibrio ya recordados: 1º. En una construcción en equilibrio debe estar en equilibrio cualquier parte de la misma bajo la acción de las fuerzas exteriores que sobre esa parte actúan, debiendo hacerse entrar entre esas fuerzas exteriores las reacciones del resto de la construcción sobre la parte considerada. 2º. Para que un cuerpo cualquiera esté en equilibrio es necesario que todas las fuerzas exteriores que sobre él actúan formen un sistema de fuerzas en equilibrio. 3º. En un sistema de fuerzas en equilibrio una parte cualquiera del mismo equilibra la otra parte, o sea, la resultante de una parte es igual y contraria a la resultante de la otra parte.

Supongamos (fig. 154) cortada la armadura por una sección **ss** y consideremos la porción de armadura que queda a la izquierda de dicha sección. Esta porción debe estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que sobre ella actúan, que son R' , F' y las reacciones que el resto

de la armadura ejerce sobre esta porción, reacciones que son justamente las tensiones de las barras cortadas por la sección **ss**, es decir, las tensiones T^2 , T^3 y T^4 . Para que esa porción de armadura esté en equilibrio es necesario que dichas cinco fuerzas exteriores que actúan sobre ella formen un sistema de fuerzas en equilibrio, o sea que las fuerzas R' , F' , T^2 , T^3 y T^4 formen un sistema en equilibrio. Entre estas fuerzas tenemos dos conocidas, R' y F' , y tres desconocidas, las tensiones de las barras 2, 3 y 4. Como una parte de un sistema de fuerzas en equilibrio equilibra la otra parte, resultará que la resultante de las fuerzas conocidas R' y F' será igual y contraria a la resultante de las desconocidas T^2 , T^3 y T^4 , y por lo tanto éstas podrán ser obtenidas descomponiendo la resultante de las fuerzas conocidas en tres fuerzas que actúen en las rectas de acción de las tensiones desconocidas, es decir en las rectas 2, 3 y 4, lo que podrá hacerse siempre que las rectas de acción de las fuerzas desconocidas no sean concurrentes ni se corten dos de ellas sobre la resultante de las fuerzas conocidas.

Así, en nuestro caso, buscaríamos la resultante de R' y F' , resultante que tenemos en **Qs**, siendo **MJ** un segm. repres. de la misma. Obtenida esta resultante la descompondremos en tres fuerzas que actúen sobre las barras 2, 3 y 4, para lo que seguiremos el procedimiento explicado en el capítulo cuarto: Prolongamos una de las tres rectas, p. ej., la 2, hasta cortar la fuerza **Qs** que se quiere descomponer (fig. 154), determinamos el punto **C** en que se cortan las otras dos rectas 3 y 4, unimos **Q** con **C** y tenemos la recta auxiliar **x**; descomponemos ahora **Qs** en dos fuerzas que actúen una en **x** y la otra en 2, y finalmente descomponemos la fuerza auxiliar **x** en dos que actúen una en 3 y la otra en 4. Si **e'b'** es un segm. repres. de **Qs** (fig. 157) y trazamos por **b'** una paralela a **x** y por **e'** una paralela a 2, tendremos en **e'g'** el segm. repres. de la tensión T^2 y en **g'b'** el de la fuerza auxiliar **x**; trazando por **g'** una paralela a 4 y por el otro extremo **b'** una paralela a 3 tendremos en **g'h'** el segm. repres. de la tensión T^4 y en **h'b'** el de la tensión T^3 , quedando así determinadas las tres tensiones incógnitas, o sea las tensiones de las barras cortadas por la sección **ss**, por el método llamado de Culmann. Téngase bien presente que para que el problema sea determinado es necesario que la sección **ss** no corte sino tres barras y que éstas no sean concurrentes.

De la misma manera que hemos hallado las tensiones de las barras 2, 3 y 4 podríamos hallar las de otras tres barras, p. ej., las de 6, 7 y 8, para lo que bastaría hacer un

corte que interesara estas tres barras y considerar la porción de armadura que queda a la izquierda de este corte, aplicándole el método recién expuesto.

El método de Ritter aplica los mismos principios de equilibrio ya expuestos, pero, para calcular las tensiones de las barras, hace uso del teorema de los momentos. Así, una vez efectuada la sección **ss**, y considerada la porción de armadura que queda a la izquierda, se tiene que sobre esa porción actúan las fuerzas exteriores R' , F' , T^2 , T^3 y T^4 , fuerzas que deben formar un sistema en equilibrio. Si forman un sistema en equilibrio se tendrá que la suma algebraica de sus momentos con respecto a un punto cualquiera de su plano debe ser igual a cero, es decir

$$MR' + MF' + MT^2 + MT^3 + MT^4 = 0 \quad (1)$$

Aplicando esta ecuación a tres puntos distintos tomados como centros de momentos, tendremos tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, sistema por medio del cual podrá determinarse el valor de dichas incógnitas T^2 , T^3 y T^4 .

Más simple es elegir los centros de momentos de manera que en la ecuación anterior se anulen dos de los términos que contienen incógnitas, porque entonces la ecuación (1) se reduce a una ecuación de primer grado con una sola incógnita, la que podrá ser despejada en seguida. Así, si hecha la sección **ss** queremos la tensión de la barra 2, tomaremos como centro de momentos el punto C en que se cortan las otras dos barras 3 y 4 interesadas por el corte, y, refiriendo a él la ecuación (1), tendremos

$$MR' \text{ resp. C} + MF' \text{ resp. C} + MT^2 \text{ resp. C} = 0 \quad (2)$$

pues los otros dos términos $MT^3 \text{ resp. C}$ y $MT^4 \text{ resp. C}$ son nulos por estar C sobre T^3 y T^4 .

Observando que V-I-II es un funicular de R' y F' se tendrá

$$MR' \text{ resp. C} + MF' \text{ resp. C} = y'' \cdot H$$

y si h'' es el brazo de palanca de T^2 respecto de C resultará

$$MT^2 \text{ resp. C} = T^2 \cdot h''$$

y podrá escribirse la ecuación (2) como sigue

$$y'' \cdot H + T^2 \cdot h'' = 0 \quad (3)$$

de donde

$$T^2 = - \frac{y'' \cdot H}{h''} \quad (4)$$

ecuación que permite obtener el valor de la tensión de 2 pues las demás cantidades pueden ser medidas en seguida en el dibujo.

Si se quiere la tensión de la barra 4 se aplicará la ecuación de los momentos al nudo D en que se cortan las otras dos barras 2 y 3 y se tendría sucesivamente

$$MR' \text{ resp. D} + MF' \text{ resp. D} + MT^4 \text{ resp. D} = 0 \quad (5)$$

$$MR' \text{ resp. D} + MF' \text{ resp. D} = y'.H$$

$$MT^4 \text{ resp. D} = T^4.h'$$

$$y'.H + T^4.h' = 0 \quad (6)$$

y finalmente

$$T^4 = - \frac{y'.H}{h'} \quad (7)$$

Por último, si se quisiera la tensión de la barra 3 habría que referir la ecuación de los momentos al punto P en que cortan las dos barras 2 y 4, lo que dará sucesivamente

$$MR' \text{ resp. P} + MF' \text{ resp. P} + MT^3 \text{ resp. P} = 0 \quad (8)$$

$$MR' \text{ resp. P} + MF' \text{ resp. P} = y'''.H$$

$$MT^3 \text{ resp. P} = T^3.h'''$$

$$y'''.H + T^3.h''' = 0$$

de donde, finalmente,

$$T^3 = - \frac{y'''.H}{h'''}$$

En cuanto a la naturaleza del esfuerzo que sufren las barras, se determina como sigue:

En el método de Culmann, efectuada la descomposición (fig. 157), se escribe sobre las barras cortadas, al lado del corte y a la derecha del mismo, las flechas de los sentidos de $e'g'$, $g'h'$ y $h'b'$, pero invirtiéndolas, y se aplica la regla: si la flecha se acerca a la sección, hay compresión; si se aleja, extensión.

Así en nuestro caso resultan comprimidas las barras 3 y 4, extendida la barra 2.

En el método de Ritter se deduce la naturaleza de las tensiones por consideración de los signos de los momentos.

En general, en una armadura que descansa por sus extremos en dos apoyos y que está sometida a cargas verticales aplicadas en los nudos, las barras del cordón superior (son las barras 1, 4, 8, y 11) trabajan a la compresión, las del cordón inferior (barras 2, 6 y 10) trabajan a la extensión; las demás trabajan a uno u otro esfuerzo según su posición y la de las cargas.

Debe hacerse notar que cuando se trata de armaduras simétricas con respecto a la vertical que pasa por el centro de la luz, cargadas simétricamente con respecto a la misma

vertical, las tensiones de barras simétricas son iguales, por lo que basta entonces calcular las tensiones de una mitad de armadura. Así, si en la armadura belga de la figura 145 F y V son iguales, Q y T también lo son entre sí, y la armadura es simétrica respecto del eje vertical CD al que son paralelas todas las cargas, se tendrá que las tensiones de 1 y 17 serán iguales entre sí, así como las de 4 y 14, de 2 y 16, de 3 y 15, las de 5 y 13, las de 7 y 11, etc.

Armaduras de techo. Cargas. Acción del viento. — Las armaduras de techo (figs. 145, 146 y 147) y las cimbras son en general sistemas reticulados planos estáticamente determinados, que satisfacen la relación que debe existir entre el número l de barras y el n de nudos para que un sistema reticular sea estrictamente indeformable, es decir, la relación

$$l = 2n - 3$$

Aunque la mayor parte de las armaduras usuales tienen sus nudos formados por remachaduras que constituyen enlaces rígidos, calcularemos las tensiones de las barras siguiendo alguno de los métodos que acabamos de exponer para los sistemas reticulares articulados.

Las cargas que actúan sobre las armaduras comprenden los pesos propios de la armadura, del entramado del techo y de la cubierta del mismo, y las sobrecargas accidentales que en ciertas ocasiones pueden actuar sobre el techo, como la acción del viento y, para ciertas localidades, el peso de la nieve.

El peso propio p de las distintas parte constituye siempre cargas verticales y depende de la naturaleza de la cubierta y del material con que serán construídas las armaduras, siendo más livianas las armaduras metálicas que las de madera y que las mixtas de madera y de hierro. Se le expresa en general en kilogramos por metro cuadrado de vertiente o cubierta y se le encuentra en los manuales.

La acción de la nieve constituye una carga vertical n que actúa casi siempre sobre todo el techo; depende de la inclinación que tiene la cubierta sobre la horizontal siendo tanto menor cuanto mayor es dicha inclinación. Se la encuentra en los manuales expresada en kilogramos por metro cuadrado de superficie cubierta.

Las tensiones originadas en las barras por cargas debidas al peso propio y al de la nieve se determinan de un golpe aplicando en cada nudo una carga vertical proporcional a la superficie de cubierta correspondiente a dicho nudo y a la suma $(p + n)$.

En cuanto al viento, se supone que sopla formando un ángulo de 10° con la horizontal y que su acción produce, en los nudos, cargas de igual dirección (fig. 158) que actúan de un solo lado del techo, ya que en espacio reducido el viento no sopla en un momento dado sino de un solo lado. Las tensiones originadas en las barras por la acción del viento pueden ser calculadas de varias maneras:

1°. Se calculan las cargas que corresponden a los nudos de un lado, se les da la dirección indicada en el párrafo anterior y se determinan las tensiones originadas por dichas cargas. Es el procedimiento más exacto.

2°. Suponiendo siempre que el viento carga solamente un lado se descomponen las cargas correspondientes en componentes normales al techo y componentes tangenciales al mismo (fig. 159), y, admitiendo que estas últimas no tienen influencia sobre la armadura, se determinan las tensiones originadas en las barras por la acción de aquellas componentes normales. En otros casos (fig. 160) se descomponen las cargas producidas por el viento en componentes verticales y componentes tangenciales y se determinan las tensiones originadas por dichas componentes verticales.

Cualquiera de los dos procedimientos anteriores que se haya seguido, será necesario, en ambos, calcular primero las tensiones producidas en las barras por el viento actuando de un lado, y luego las producidas por el viento actuando del otro lado. De los dos valores obtenidos para cada barra se tomará el máximo como valor de la tensión originada por el viento, siendo indudable que cuando la armadura sea simétrica y simétricamente cargada bastará efectuar la determinación de las tensiones para una sola dirección del viento.

Una vez determinadas las tensiones máximas producidas por el viento en las barras se obtendrá la tensión total máxima de cada barra agregando a la tensión originada en ella por las cargas permanentes y por el peso de la nieve la tensión máxima originada en la misma barra por la acción del viento.

3°. Con el objeto de facilitar los cálculos se sustituye la acción del viento por una carga vertical equivalente v que actúe sobre toda la cubierta y que se expresa también en kilogramos por metro cuadrado. En tal caso, para obtener las tensiones máximas que sufrirán las barras bajo la acción de todas las cargas permanentes y accidentales, se aplica en cada nudo una carga vertical que comprende el peso de la construcción correspondiente a dicho nudo y las sobrecargas producidas por la nieve y el viento en la por-

ción de cubierta correspondiente a ese mismo nudo. La carga de cada nudo será así proporcional al área de cubierta que le corresponde y a la suma $(p + n + v)$.

En los manuales y en la “Mecánica Aplicada a las Construcciones”, de Marvá y Mayer, se encontrarán los valores más convenientes de p , n , y v para cada caso, es decir según sea el material de armaduras y de cubierta, la inclinación de las vertientes y el lugar en que se ha de levantar la construcción.

Para los cálculos que efectuaremos en nuestros cursos se pueden aceptar los siguientes valores para la determinación de las cargas a aplicar a cada nudo:

VALORES DE $(p + n + v)$ POR METRO CUADRADO DE CUBIERTA

Cubierta de	Armaduras de fierro	Armaduras de madera y mixtas
	kg/m ²	kg/m ²
Pizarra	130 a 160	150 a 180
Tejas varias	190 a 220	210 a 240
Vidrio de 5 mm.	105 a 135	130 a 150
Zinc	100 a 130	120 a 150
Fierro galvanizado	100 a 130	120 a 150
Fierro galvanizado con tejuela inferior.	150 a 180	170 a 200

Si, por ejemplo, se tiene en lugar abrigado un techo de armaduras de hierro y de cubierta de fierro galvanizado acanalado en el que las armaduras distan 5 m entre sí y los nudos superiores están a 3 m uno de otro, (fig. 161), se tendrá que la carga vertical correspondiente a cada nudo intermedio será de

$$5m \times 3m \times 100 \text{ kg. m}^{-2} = 1500 \text{ kg.}$$

Si la misma construcción debiera ser levantada en lugar aislado (en el campo por ejemplo) se tomaría, para la determinación de las tensiones, en cada nudo intermedio

$$5m \times 3m \times 130 \text{ kg. m}^{-2} = 1950 \text{ kg}$$

En algunos manuales se da el peso propio y las sobrecargas producidas por la nieve y el viento en kilogramos por metro cuadrado de superficie cubierta; es decir por metro cuadrado de piso cubierto por el techo: en tal caso se obtiene la carga vertical que corresponde a cada nudo mul-

tiplicando el valor total dado en las tablas para todas las cargas por el área de suelo cubierto por la porción de vertiente que corresponde a dicho nudo, o, lo que es lo mismo, por la proyección horizontal de dicha porción de cubierta o vertiente.

CAPITULO XII.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1. — Representar una fuerza $F = 50$ kg, de cualquier dirección, a la escala 1 cm. representa 10 kg.

2. — Determinar la intensidad de una fuerza cuyo segmento representativo tiene, a la escala 1 cm repres. 1t, 3 cm de longitud.

3. — Calcular el momento estático de una fuerza horizontal $F = 100$ kg. de sentido de derecha a izquierda, respecto de un punto situado arriba de la misma y a 30 cm de ella.

4. — Sobre una misma recta vertical actúan las fuerzas $F = 30$ kg y $F'' = 100$ kg con sentido hacia abajo, y las fuerzas $F' = 50$ kg y $F''' = 20$ kg con sentido hacia arriba. Determinar la resultante de todas las fuerzas indicadas.

5. — Un bote se mueve en el río Paraná impulsado aguas arriba por remeros que ejercen un esfuerzo total de impulsión igual a 50 kg. La corriente ejerce sobre el bote un esfuerzo de 20 kg. Determinar el esfuerzo resultante que actuará sobre el bote.

6. — Un elevador para construcción de edificios, formado por travesaños sostenidos por una doble cadena de barras, eleva en un momento dado cuatro cargas de 45 kg cada una. Suponiendo que la posición de las cargas es tal que los travesaños las reparten por igual a los eslabones que los sostienen, determinar el esfuerzo total máximo que sufre cada cadena. (fig. 162).

7. — Determinar la resultante de dos fuerzas coplanares $F = 2t$ y $F' = 3t$ que se cortan formando un ángulo de 45° .

8. — Calcular la proyección de cada una de las fuerzas del problema anterior sobre un eje paralelo a la recta de acción de F .

9. — Calcular el momento de la resultante obtenida en el problema N° 7 respecto de un punto situado sobre la bi-

sectriz del ángulo que forman F y F' y a 2 metros del vértice de dicho ángulo.

10. — Un bote cruza un tramo recto del río Paraná bajo la acción de unos remeros que le comunican un esfuerzo total perpendicular a la corriente de 50 kg. La corriente ejerce sobre el bote un empuje total de 30 kg. Suponiendo constante en magnitud y dirección las dos fuerzas que actúan sobre el bote, determinar el camino resultante que seguirá. (fig. 163).

11. — Un soporte vertical AB (fig. 164) sostiene en A dos jabalones AC y AD que ejercen sobre A una presión de 500 kg cada uno. Determinar el esfuerzo resultante ejercido sobre el soporte.

12. — Sobre un muro de contención que pesa 8t actúa una fuerza lateral $E = 5t$ (fig. 165). Se desea saber si el muro conservará su estabilidad bajo la acción de las dos fuerzas que sobre él actúan (para ello es necesario que la resultante de todas las acciones encuentre la superficie de apoyo).

13. — Descomponer la fuerza $F = 1500$ kg (fig. 166) en dos fuerzas que actúan en las rectas a y b .

14. — Una carga $P = 1t$ está suspendida de un nudo A sostenido por dos barras AB y AC . Determinar la fuerza o tensión que extenderá cada una de dichas barras. (fig. 167).

15. — Una armadura de alero, formada por las barras AB y AC (fig. 168), sostiene en su extremo libre A una carga vertical $F = 500$ kg. Determinar las tensiones originadas en las barras por la acción de dicha carga.

16. — Un cuerpo C descansa por una de sus caras sobre un plano AB que forma un ángulo de 30° con el horizonte. Siendo 2t el peso del cuerpo, determinar la fuerza que comprime normalmente el cuerpo contra el plano de apoyo y la fuerza que tiende a hacerlo resbalar sobre él. (fig. 169).

17. — Si el coeficiente de frotamiento entre el cuerpo y el plano de apoyo del problema anterior es 0.40, determinar: 1°. Si el cuerpo resbalará solo sobre el plan de apoyo. 2°. En caso negativo ¿cuál será la fuerza tangencial necesaria para hacer resbalar el cuerpo sobre el plano AB en sentido ascendente y cuál para moverlo en sentido contrario?

18. — Un vapor está amarrado a dos postes de amarrazón A y C por medio de dos cables AB y BC . Si la corriente del río actúa sola sobre el vapor con una resultante de 1t, determinar las tensiones que dicha acción desarrolla en los cables AB y BC . (fig. 170).

19. — El mismo vapor del problema anterior recibe en

cierto momento la acción de un fuerte viento normal a la corriente. Bajo la acción de dicho viento el vapor se atraviesa a aquélla; y, a medida que se va atravesando, la acción de la corriente aumenta mientras que la del viento disminuye, por cuanto el vapor se va enfilando con él; en cierto momento se establece el equilibrio. Suponiendo que en este momento la acción de la corriente sobre el vapor sea igual a $2t$ y la del viento igual a $1t$, determinar las tensiones que en el mismo momento sufren los cables de amarrazón.

20. — Con los datos del problema anterior determinar el valor que debe alcanzar la acción del viento sobre el vapor para que trabaje solamente uno de los cables de amarrazón.

21. — Determinar la resultante de las fuerzas coplanares concurrentes $F = 500$ kg, $Q = 300$ kg, $Z = 800$ kg y $T = 600$ kg. (fig. 171).

22. — Determinar las tensiones de las barras de la armadura de alero dibujada en la figura 172 y sometida en su extremo libre a una carga vertical de $3t$.

23. — Determinar si el sistema de fuerzas concurrentes F , F' y F'' está en equilibrio. (fig. 173).

24. — Hallar la resultante de cuatro fuerzas cualesquiera no concurrentes.

25. — Tres caballos ejercen sobre un mismo vehículo esfuerzos paralelos, de tracción, iguales a 45 kg cada uno. ¿Cuál es el esfuerzo total de tracción ejercido sobre el vehículo?

26. — Tres fuerzas paralelas actúan simultáneamente sobre un cuerpo C con las intensidades y en las condiciones indicadas en la figura 174. ¿Cuál es el momento de la resultante de ese sistema respecto del punto C ?

27. — Sobre una barra (fig. 175) fija en un punto C alrededor del cual puede girar, actúan las fuerzas $F = 20$ kg y $F' = 40$ kg. Se desea saber si la barra permanecerá en equilibrio bajo la acción de esas dos fuerzas.

28. — Si la barra anterior no está en equilibrio bajo la acción de las dos fuerzas que sobre ella actúan, determinar el punto en que debería ser ella apoyada para que permanezca en equilibrio.

29. — Descomponer una fuerza $F = 3t$ en dos fuerzas paralelas a ella y situadas: una de un lado de F y a dos metros de ella, la otra del otro lado y a cuatro metros de F .

30. — Sobre una viga horizontal AB , apoyada en los puntos A y B , de 5 m de luz, actúa una carga vertical aislada $F = 4t$ a dos metros del apoyo A . Se desea conocer las acciones ejercidas por la viga sobre los apoyos y las reacciones de éstos.

31. — Un tablón AB está sostenido en sus extremos por dos escaleras de tijera, de piernas iguales, exactamente iguales e igualmente abiertas. El tablón sostiene una carga de 300 kg., dispuesta como indica la figura 176, figura en la que se indica también la disposición de las escaleras. Determinar las reacciones de los apoyos del tablón, la fuerza que comprimirá cada pierna de escalera y la fuerza de compresión de cada zanca.

32. — Determinar las reacciones de los apoyos de una viga horizontal AB simplemente apoyada por sus extremos y sometida a la acción de cuatro cargas aisladas verticales cualesquiera.

33. — Dadas (fig. 177) las fuerzas F, Q y Z determinar gráficamente si están en equilibrio.

34. — Dadas (fig. 178) las fuerzas F, Q, Z y T determinar analíticamente si forman un sistema en equilibrio.

35. — AB es una palanca de primer orden apoyada en C y sometida en sus extremos A y B a las fuerzas F y F' respectivamente. (fig. 179). Determinar si bajo la acción de esas dos fuerzas la palanca conservará el equilibrio.

36. — El juego de palancas ABCE gira alrededor de los puntos H y E, y está sometido en A a una fuerza $F=10$ kg. ¿Qué fuerza vertical habrá que aplicar en D para que dicho juego no se mueva? (fig. 180).

37. — Haciendo uso de las condiciones de equilibrio de los cuerpos y de las de los sistemas planos de fuerzas determinar las reacciones que sufrirá el armazón de grúa dibujado en la figura 181.

38. — Determinar el centro de gravedad de varias figuras planas simples e indicar para que cada una de ellas la distancia de dicho centro a uno de los lados de la figura correspondiente.

39. — Determinar gráficamente el centro de gravedad de las superficies dibujadas en la figura 182.

40. — Determinar analíticamente la posición del centro de gravedad de cada una de las superficies de la figura 182.

41. — Determinar el centro de gravedad de varios cuerpos simples indicando para cada uno la distancia de dicho centro a una de las caras del cuerpo y una recta sobre la que esté el centro de gravedad.

42. — Determinar gráfica y analíticamente la posición del centro de gravedad del cuerpo de revolución dibujado en la figura 183.

43. — Determinar las reacciones de los apoyos, el esfuerzo de corte máximo y el momento flector máximo de la

viga del problema 30, del tablón del problema 31 y de la viga del problema 32.

44. — Construir los diagramas de los esfuerzos de corte y los de los momentos flectores para las vigas del problema anterior.

45. — Determinar las reacciones de los apoyos, los esfuerzos de corte máximos y los momentos flectores máximos que sufren las palancas del problema 36 cuando están en equilibrio bajo la acción de las fuerzas aplicadas en A y D.

46. — Una viga horizontal de 8 m de luz, simplemente apoyada por sus extremos, sostiene en el medio de su luz una carga aislada de 3t. Determinar las reacciones, el esfuerzo de corte máximo y el momento flector máximo, y construir el diagrama de esfuerzos de corte y el de momentos flectores.

47. — La viga AB (fig. 184), simplemente apoyada en sus extremos, sostiene dos columnas que le transmiten cargas de 3t y 5t respectivamente. Determinar las reacciones, el esfuerzo de corte máximo, el momento flector máximo; construir los diagramas de esfuerzos de corte y de momentos flectores, y determinar el esfuerzo de corte y el momento flector de una sección situada a un metro del apoyo B.

48. — La viga ABC (fig. 185) tiene una parte volada BC y está sometida a las cargas verticales F, Q y Z. Determinar las reacciones, los momentos flectores debajo de las cargas, el momento flector máximo, y construir los diagramas de los esfuerzos de corte y de los momentos flectores.

49. — Una viga AB horizontal, de 5 metros de luz, sostiene en toda su longitud un muro de 30 cm de espesor y de 4 metros de altura. Siendo 1600 kg por metro cúbico el peso unitario de la fábrica que integra el muro, determinar las reacciones (la viga está simplemente apoyada en sus extremos), el esfuerzo de corte máximo, el momento flector máximo, y construir los diagramas de esfuerzos de corte y de momentos flectores.

50. — Una viga horizontal AB, de 10 metros de luz, sostiene a partir del apoyo A un muro de 5 metros de largo, 6 m de alto y 0.45 m de espesor. Si la fábrica con que ha sido construido el muro pesa 1800 kg. por metro cúbico, determinar las reacciones de los apoyos, el esfuerzo de corte máximo y el momento flector máximo así como la sección en que se produce, construir los diagramas de esfuerzos de corte y de momentos flectores, y determinar el esfuerzo de corte y el momento flector de la sección media de la viga.

51. — Determinar las tensiones que sufrirán las barras

de la armadura de alero de la figura 172 en el supuesto de que en cada uno de los nudos del cordón superior, menos en el B, actúa una carga vertical de 1t.

52. — Determinar las tensiones que sufrirán el tirante y el puntal de la grúa de la figura 181 en el supuesto de que la carga está simplemente colgada de A. Calcular también la fuerza de compresión de la columna y el momento flector máximo de la misma.

53. — Calcular las tensiones de la armadura dibujada en la figura 186.

54. — Determinar las tensiones de las barras de la armadura de la figura 187.

55. — Calcular las tensiones de las barras de la armadura Polonceau de la figura 188 suponiendo que el techo tenga cubierta de palastro de fierro galvanizado acanalado y que las armaduras están a 4 metros una de otra.

56. — Determinar las tensiones de las barras de la armadura de la figura 189. El techo tiene cubierta de vidrio de 5mm y las armaduras distan cuatro metros una de otra.

57. — La armadura de la figura 190 tiene una parte volada y está sometida en sus nudos superiores a las cargas verticales que se indica en la misma figura. Determinar las tensiones originadas en las barras por la acción de dichas cargas.

58. — Una armadura Shed ABC (fig. 191) sostiene sobre la vertiente AC una cubierta de tejas y sobre la CB una de vidrio. Determinar: 1º. Las cargas que hay que aplicar en los nudos para calcular las tensiones de las barras. 2º. Las tensiones originadas en las barras por dichas cargas. (Las armaduras distan 3,5 m entre sí).

59. — Un cuchillo o armadura lateral de pila está sometido a la acción de un viento que produce en los nudos las cargas horizontales indicadas en la figura 192. Determinar las tensiones originadas en las barras de dicho cuchillo por la acción del viento.

60. — ABC es el esqueleto de una grúa mural con polea simple para izar las cargas (fig. 193). Suponiendo que el cable sea paralelo al puntal, determinar las tensiones originadas en las barras de la carga Q.

61. — Admitiendo que la grúa de la figura 181 tenga polea simple en A y que la carga está suspendida de un cable que corre paralelamente al tirante AB, determinar las tensiones originadas en las piezas de la armazón por la acción de P.

62. — AB es una viga de puente rodante (fig. 194) para 10t. Suponiendo que la carga esté en el punto medio de

la luz, determinar las tensiones que origina en ese momento en las barras de dicha viga.

63. — El esqueleto de una grúa está constituido según se indica en la figura 195. La suspensión de la carga se hace por medio de una polea móvil y el cable de iza corre paralelamente al cordón inferior AHIC. Determinar las tensiones originadas en las barras por la carga Q , las reacciones de los apoyos y la carga que habría que aplicar en B para mantener en equilibrio la armazón de la grúa.

INDICE

PROLOGO	Pág. 1
-------------------	--------

CAPITULO I.

INTRODUCCION

Reposo y movimiento. — Principio de inercia. — Fuerza: definición y clasificación. — Obstáculos opuestos a la acción de una fuerza. — Acción y reacción; igualdad de las mismas. — Caracteres de las fuerzas aisladas. — Unidades de intensidad. — Representación gráfica de las fuerzas. — Segmentos representativos. — Sistemas de fuerzas. — Polígono de fuerzas. — Fuerzas equivalentes: resultante y componentes. — Fuerzas en equilibrio; fuerzas equilibrantes. — Momento estático de una fuerza Pág. 5

CAPITULO II.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTATICA GRAFICA

Objeto de la Estática. — Problemas principales que ella resuelve. — Principios en que se funda. — Fuerzas congruentes, fuerzas concurrentes, fuerzas paralelas, fuerzas cualesquiera. — Sistemas de fuerzas coplanares o no Pág. 14

CAPITULO III.

FUERZAS CONGRUENTES Y FUERZAS COPLANARES CONGRUENTES

Composición de fuerzas que actúan sobre una misma recta. — Composición de dos fuerzas concurrentes. — Propiedades de la resultante. — Teorema de las proyecciones. — Teorema de los momentos. — Descomposición de una fuerza en otras dos que actúen en rectas que se cortan sobre la fuerza dada. — Composición de más de dos fuerzas concurrentes coplanares. — Propiedades de la resultante. — Condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes Pág. 17

CAPITULO IV.

COMPOSICION DE FUERZAS COPLANARES, NO CONCURRENTES

Composición de fuerzas coplanares no concurrentes. — Polo y polígono funicular. — Teorema de las proyecciones y teorema de los momentos. — Cálculo del momento de un sistema por medio del polígono funicular. — Descomposición de una fuerza en otras tres no concurrentes que actúen en rectas dadas . . . Pág. 27

CAPITULO V.

FUERZAS COPLANARES PARALELAS

Composición de fuerzas paralelas coplanares. — Teorema de las proyecciones y teorema de los momentos. — Composición de dos fuerzas paralelas. — Relación entre las intensidades de las fuerzas y sus distancias a la resultante. — Generalización de dicha relación para el grupo de tres fuerzas formado por dos fuerzas paralelas y su resultante. — Determinaciones gráfica y analítica de la resultante de dos fuerzas paralelas. — Descomposición de una fuerza en otras dos paralelas a ella; procedimiento gráfico y analítico.—Nociones de fuerzas continuas paralelas. Pág. 35

CAPITULO VI.

PAIRES COPLANARES DE FUERZAS

Par de fuerzas. — Momento estático de un par. — Constancia de dicho momento para todos los puntos de su plano. — Valor del momento. — Sustitución de un par por otro. — Resultante de dos o más pares de fuerzas. — Momento del par resultante. — Pares equilibrantes. — Resultante de un par y de una fuerza coplanares. — Efecto producido por la introducción de un par de fuerzas en un sistema de resultante única. — Par y fuerza equilibrantes. Pág. 48

CAPITULO VII

FUERZAS EN EL ESPACIO (1)

Fuerzas del espacio, su representación. — Composición de fuerzas concurrentes. — Composición de fuerzas paralelas. — Composición de los sistemas anteriores por medio de los métodos de Geometría descriptiva. — Lema fundamental: la proyección de la resultante es la resultante de las proyecciones de las componentes. — Propiedades de la resultante de los sistemas anteriores;

teoremas de las proyecciones y de los momentos. — Pares de fuerzas en el espacio. — Constancia de su momento respecto de una serie de ejes paralelos. — Valor del momento de un par respecto de un eje cualquiera. — Movimiento de un par en planos paralelos. — Pares equivalentes. — Pares equilibrantes. — Resultante de dos o más pares. — Resultante de un par de fuerzas y de una fuerza única. — Sustitución de una fuerza por un par y otra fuerza. — Composición de fuerzas cualesquiera no coplanares. — Sistema resultante. Pág. 56

CAPITULO VIII

RESULTANTE DE UN SISTEMA CUALQUIERA DE FUERZAS CUALESQUIERA Y CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

Resultantes de un sistema cualquiera de fuerzas coplanares. — Condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares. — Condiciones analíticas de equilibrio de dicho sistema. — Resultante de un sistema cualquiera de fuerzas no coplanares. — Condiciones de equilibrio de tal sistema. — Cuerpo en equilibrio. — Condiciones de equilibrio de un cuerpo. — Fuerzas exteriores. Pág. 69

CAPITULO IX.

CENTROS DE GRAVEDAD

Centro de un sistema de fuerzas paralelas. — Centro de gravedad de un cuerpo. — Centro de gravedad de superficies y de líneas homogéneas. — Principios que facilitan la determinación del centro de gravedad de cuerpos, superficies y líneas. — Plano diametral; diámetro; centro de figura. — Determinación del centro de gravedad de los siguientes cuerpos, superficies y líneas: segmento de recta, quebrada cualquiera, porción de polígono regular, arco de circunferencia, triángulo, paralelógramos varios, trapecio, cuadrilátero cualquiera, sector circular, círculo, segmento de círculo, segmento de corona circular, figura cualquiera, paralelepípedo cualquiera, prisma, tetraedro, pirámide, cilindro, cono, esfera, zona esférica, casquete esférico, sector esférico, cuerpo cualquiera. — Determinación analítica del centro de gravedad de las figuras planas. Pág. 74

CAPITULO X.

VIGAS CARGADAS

Generalidades. — Viga sometida a cargas aisladas: determinación de las reacciones, de los esfuerzos de corte y de los momentos flectores. — Construcción de los diagramas correspondientes y determinación de los valores máximos. — Caso en que la viga está sometida a una sola carga aislada en cualquier parte de su luz. — Caso en que la viga sostiene una carga aislada en el centro de su luz. — Viga sometida a la acción de una carga continua en toda su luz. — Determinación de las reacciones, de los esfuerzos de corte y de los momentos flectores. — Construcción de los diagramas correspondientes y determinación de los valores máximos. — Caso en que la carga continua uniformemente distribuida actúa sobre parte de la luz solamente. — Caso en que sobre la viga actúan cargas aisladas y cargas continuas simultáneamente. — Caso de carga indirecta. . Pág. 91

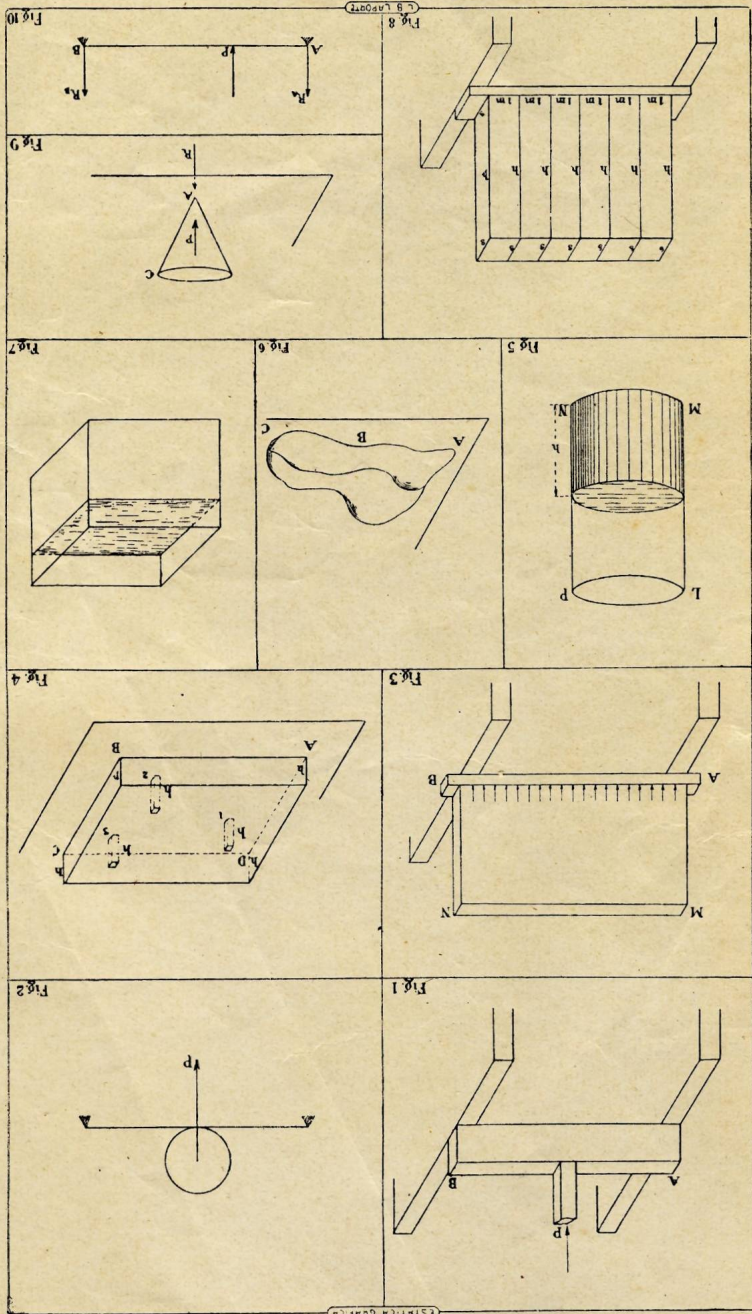
CAPITULO XI.

SISTEMAS RETICULARES

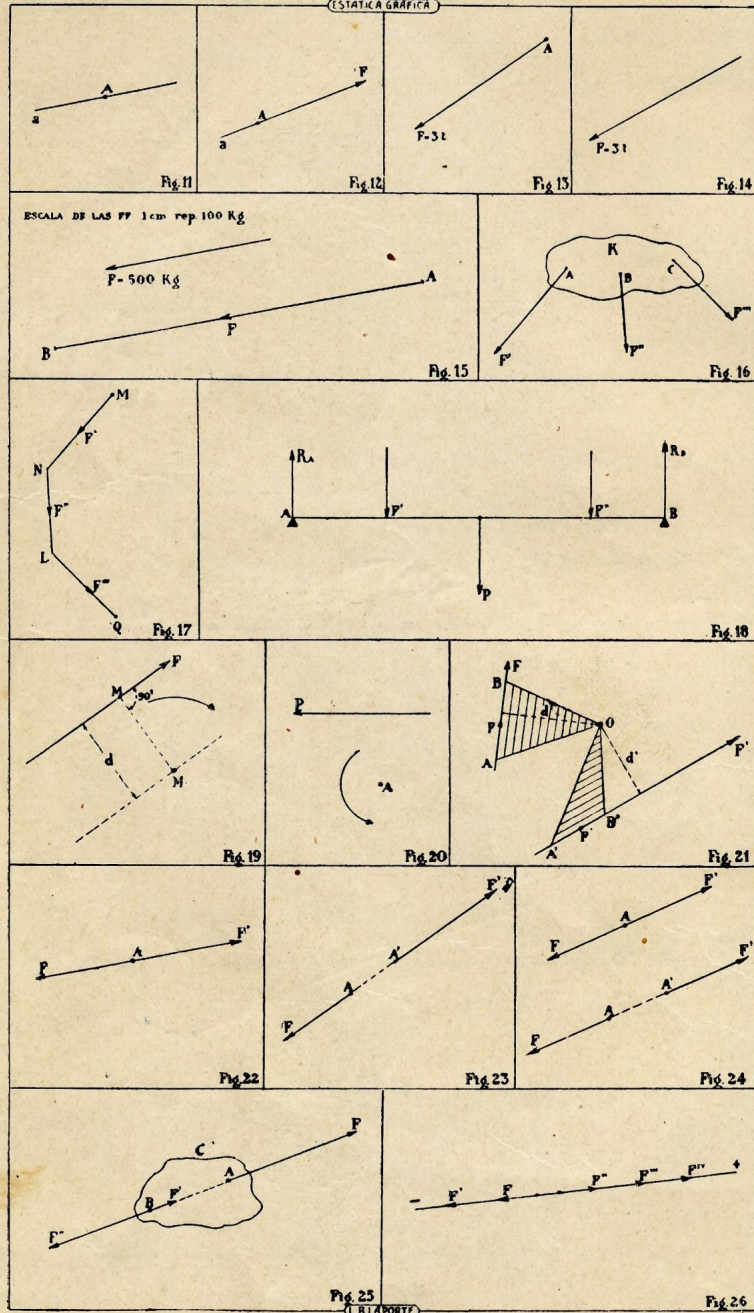
Generalidades. — Distintas formas de apoyos. — Cálculo de las reacciones de los apoyos. — Cálculo de las tensiones de las barras: método de Cremona, método de Culmann, método de Ritter. — Acción del viento. — Aplicación de los métodos anteriores al cálculo de las tensiones de algunos sistemas reticulares simples. Pág. 109

CAPITULO XII.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS . . . Pág. 123



ESTÁTICA GRÁFICA



ESTÁTICA GRÁFICA

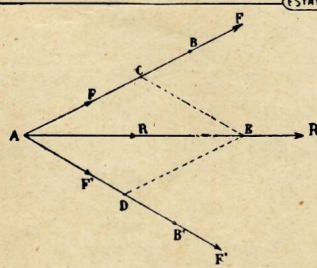


Fig. 27

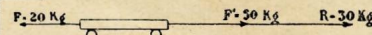


Fig. 28

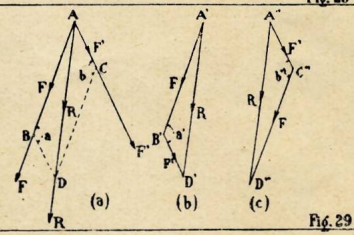


Fig. 29

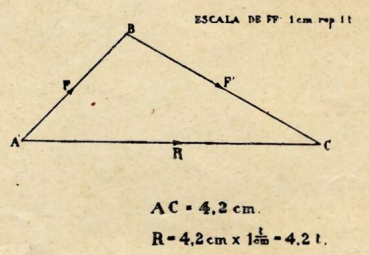
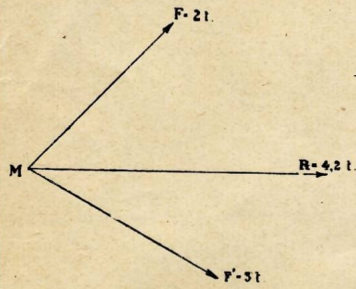


Fig. 30

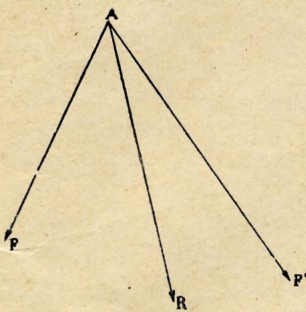


Fig. 31

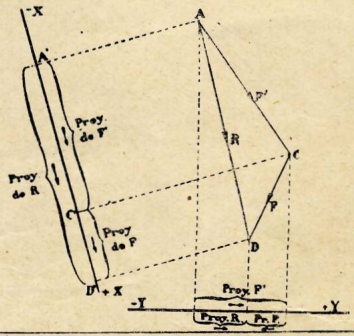


Fig. 32

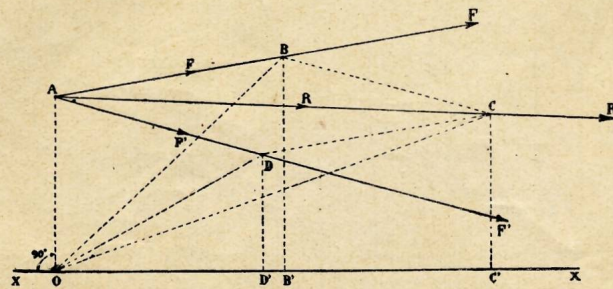


Fig. 33

ESTÁTICA GRÁFICA

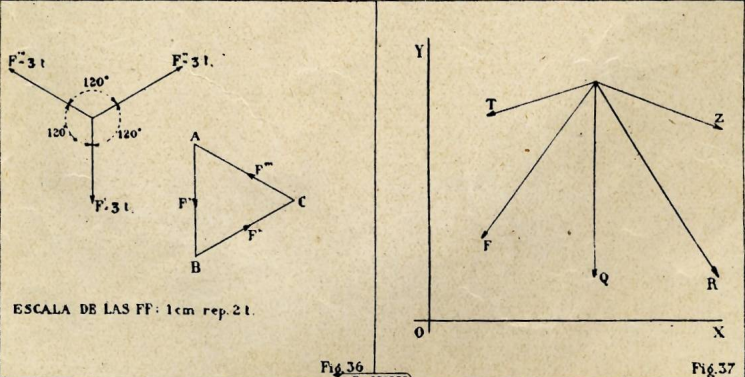
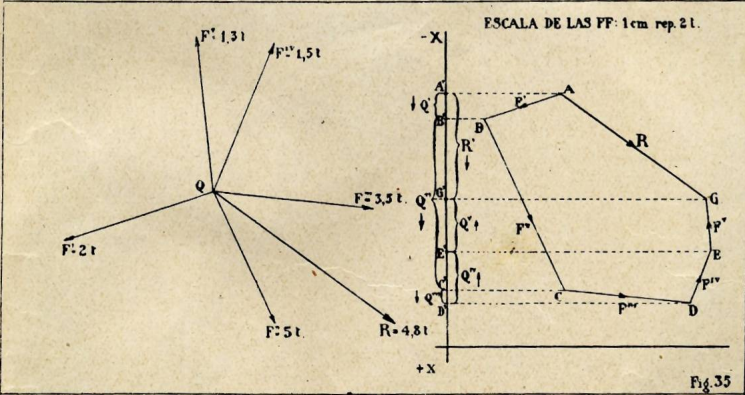
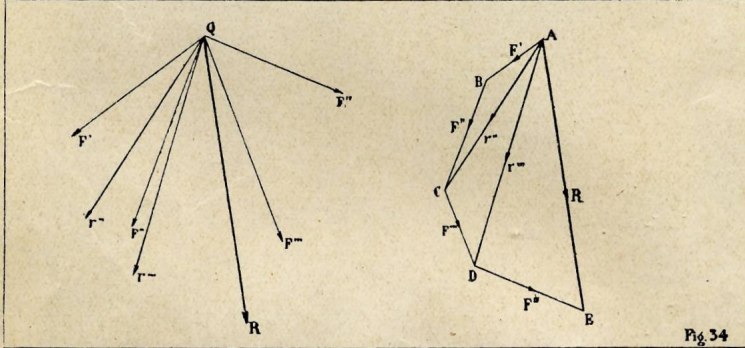
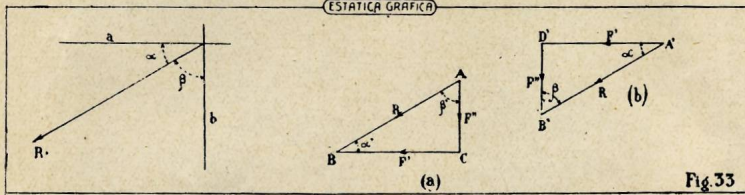
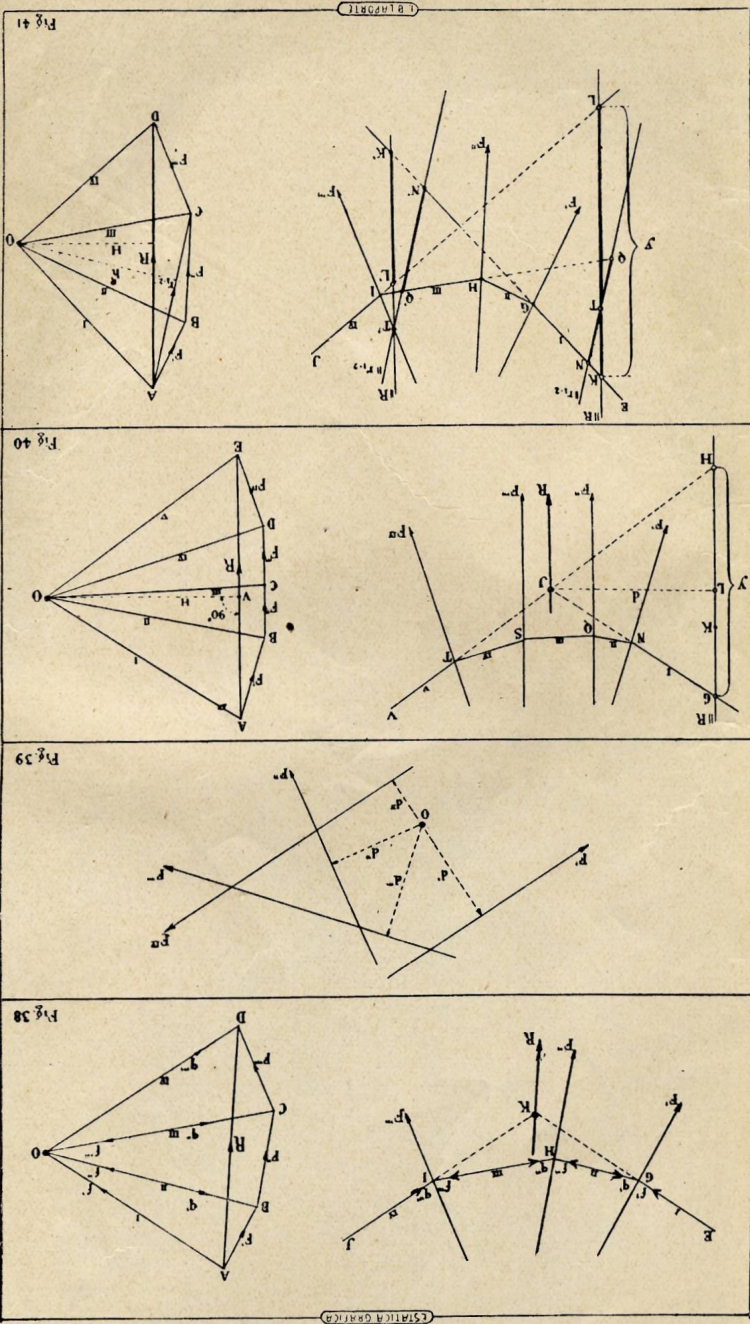
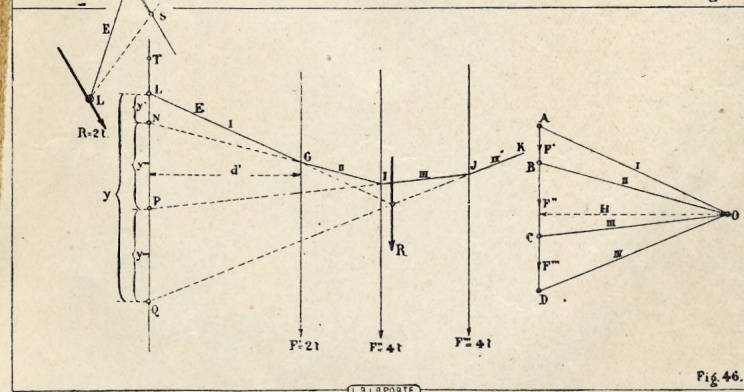
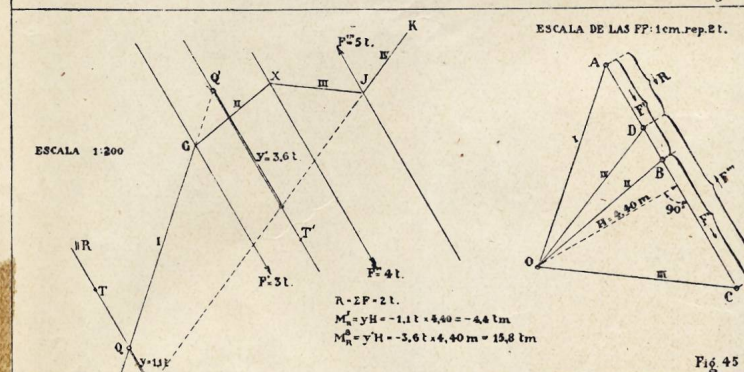
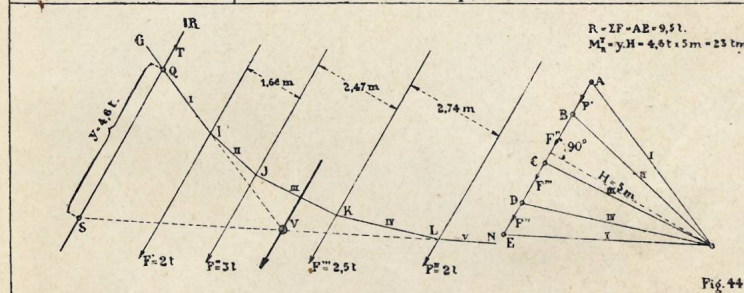
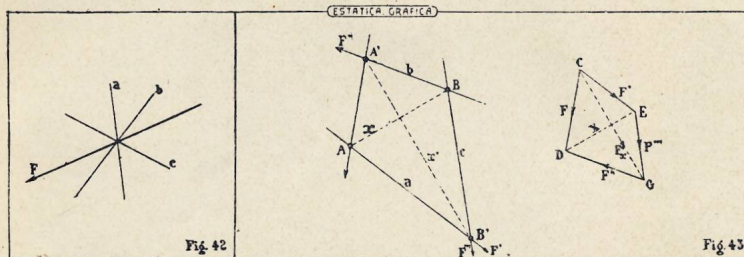


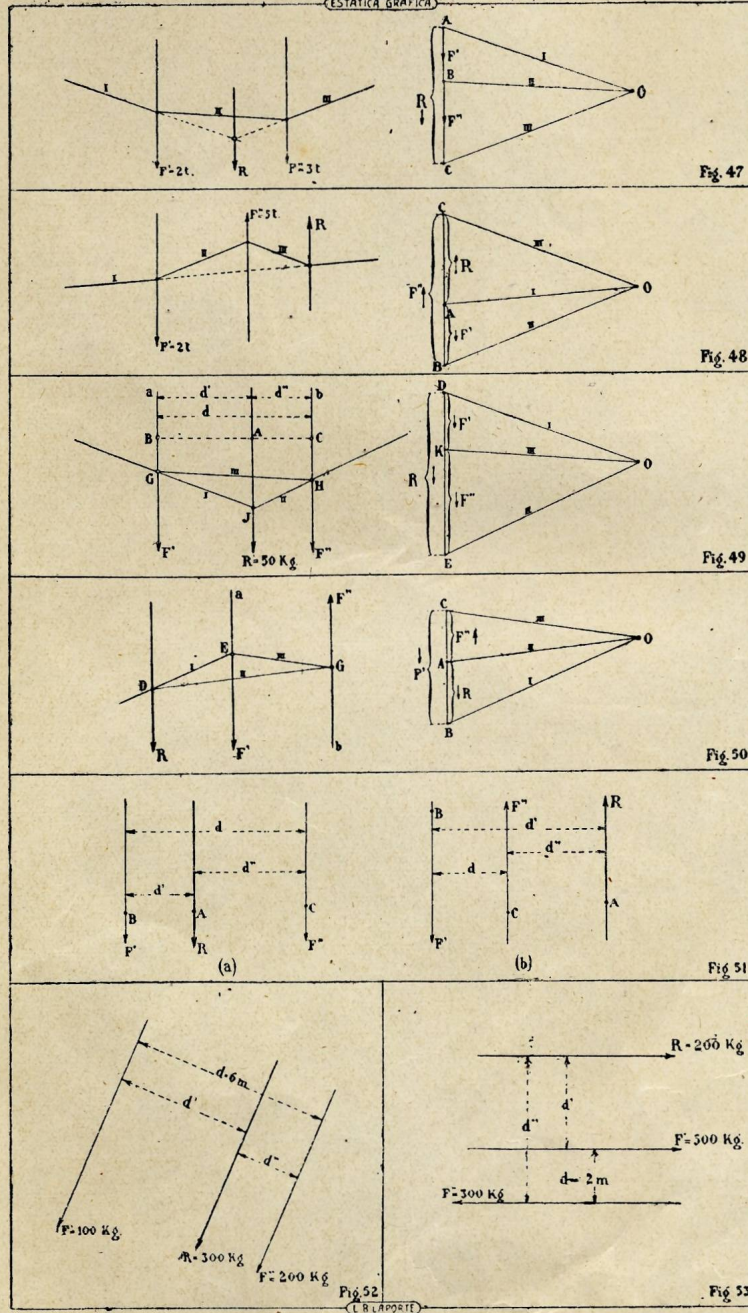
Fig. 36

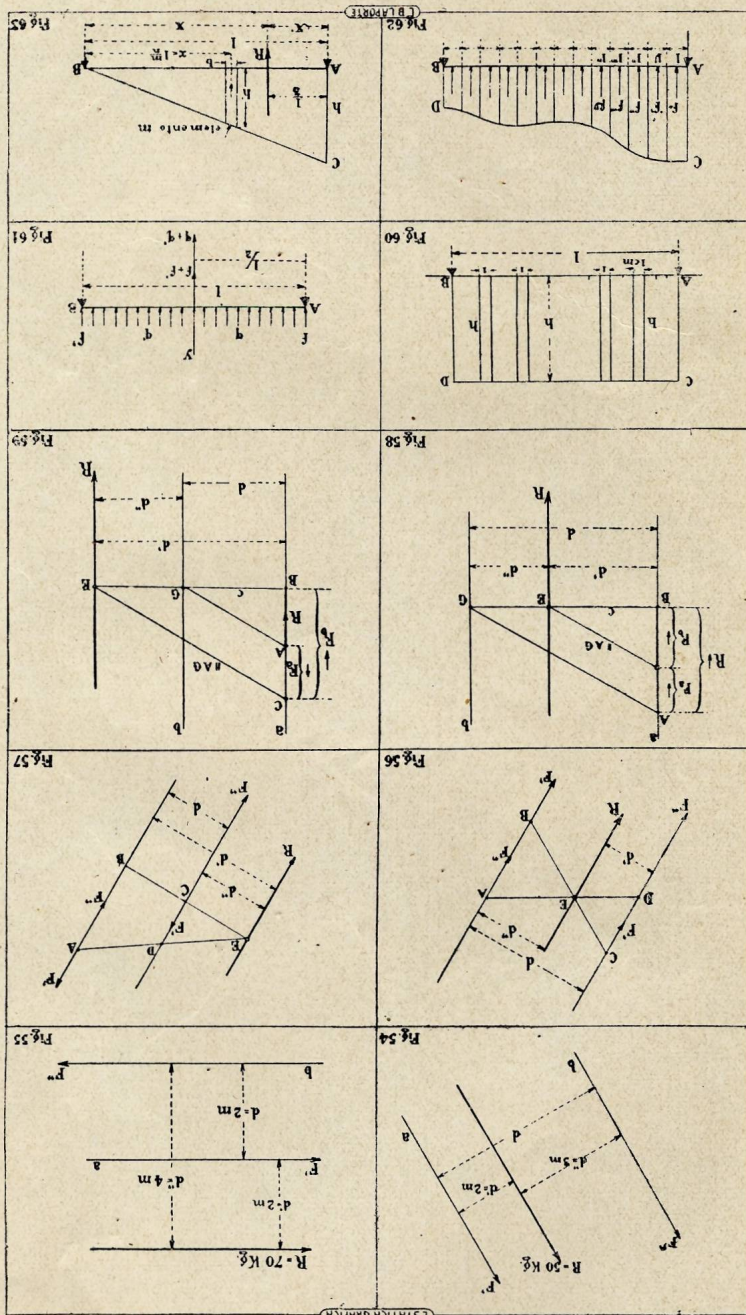
Fig. 37



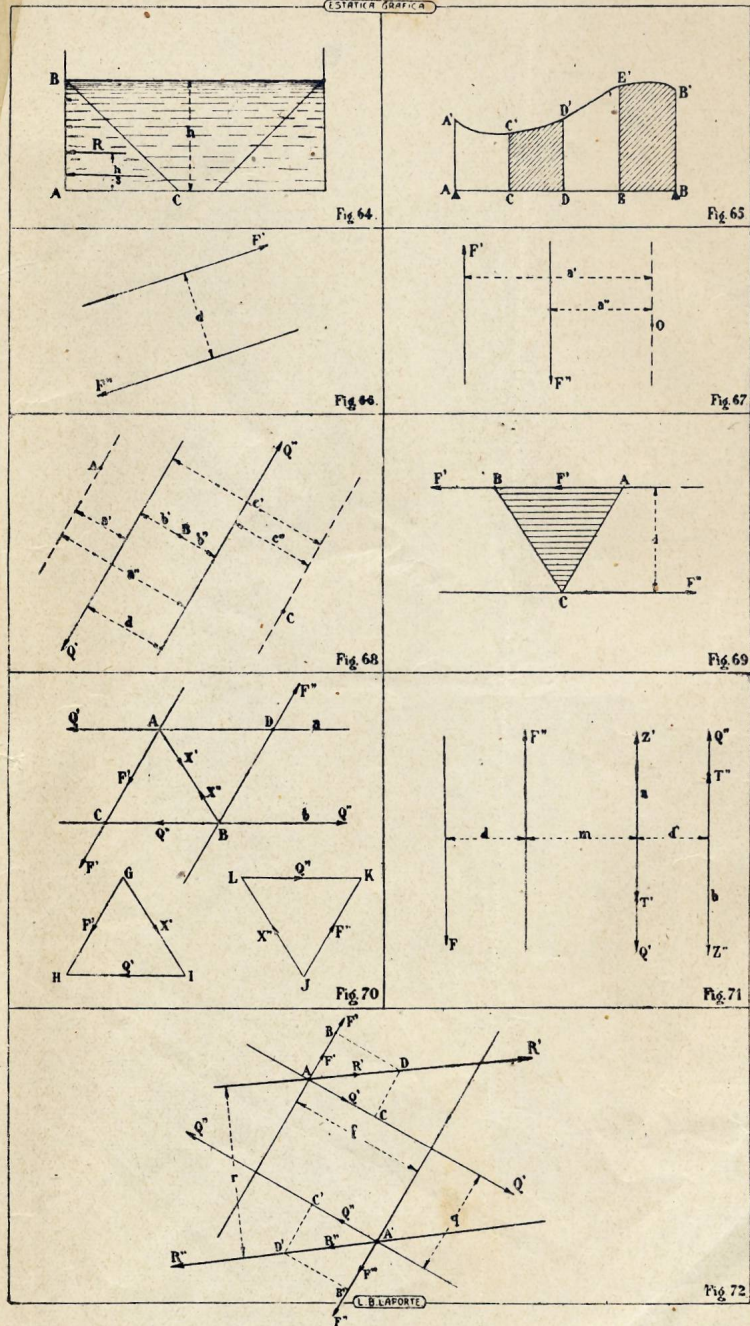


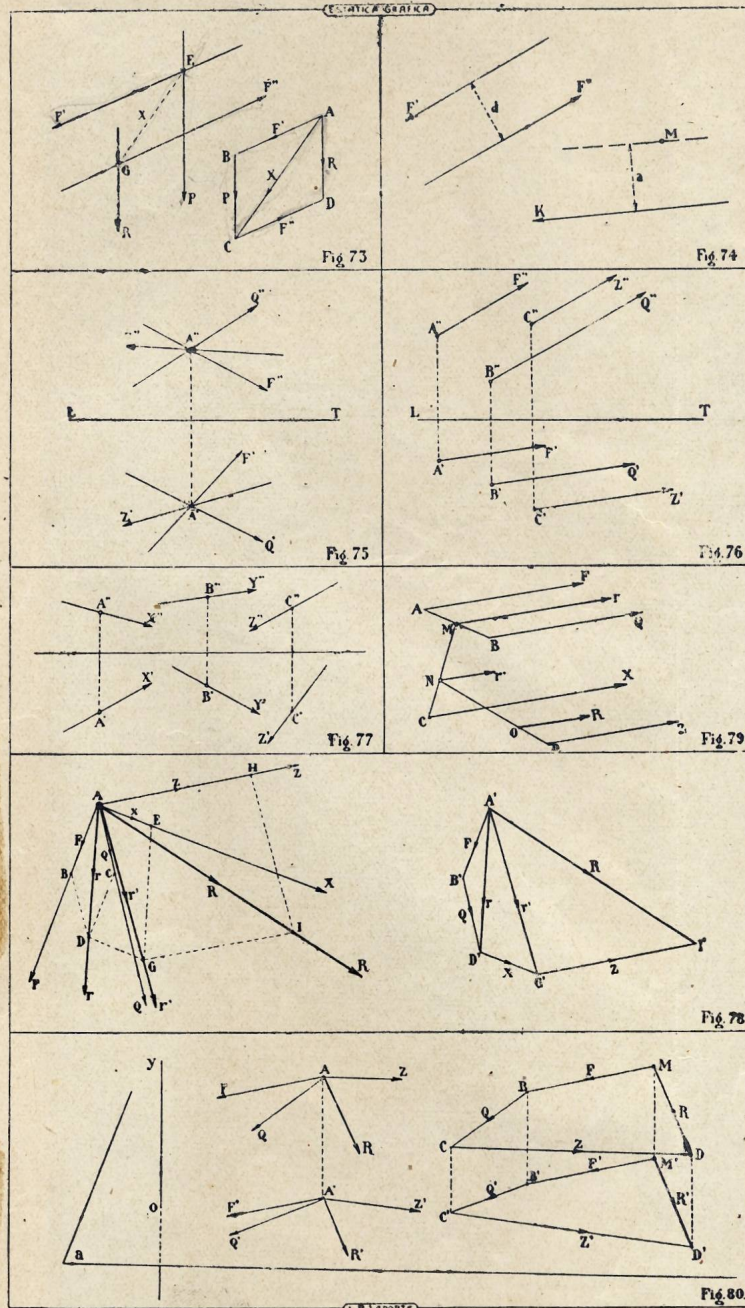
ESTÁTICA GRAFICA

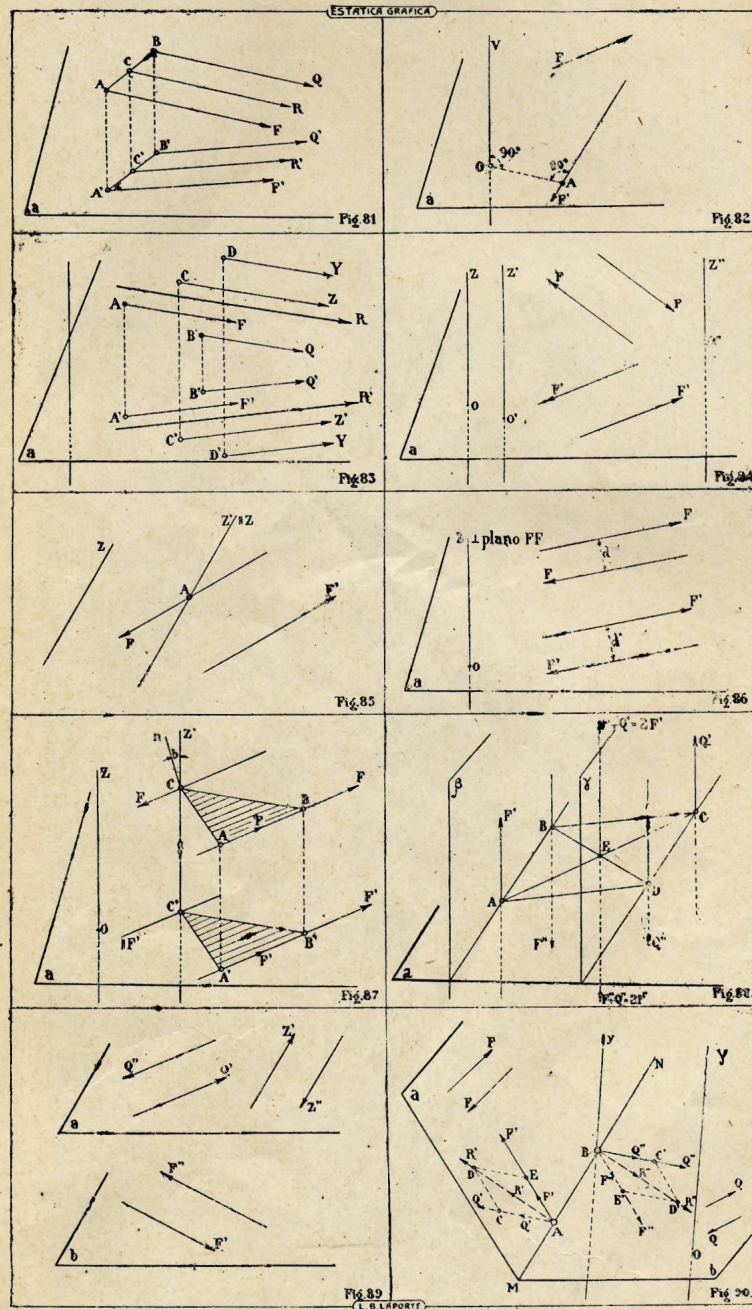




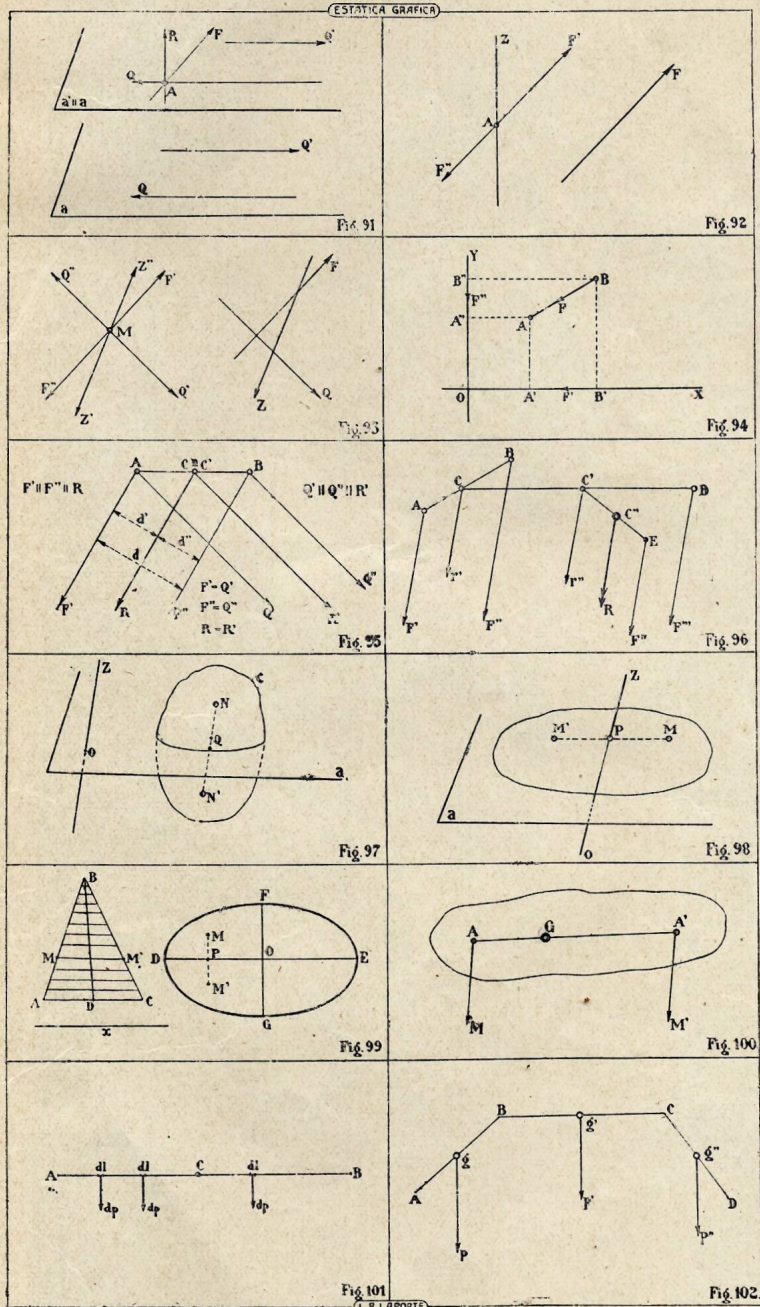
ESTÁTICA GRÁFICA





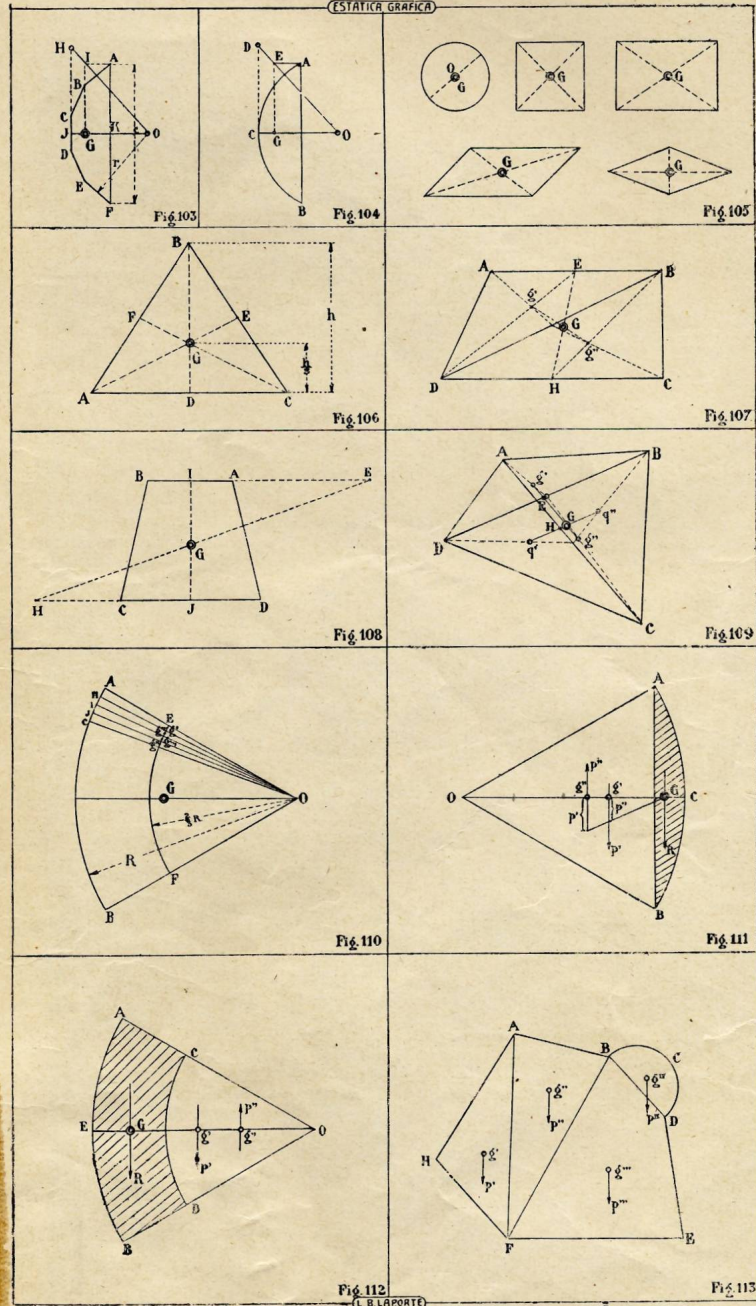


ESTÁTICA GRÁFICA



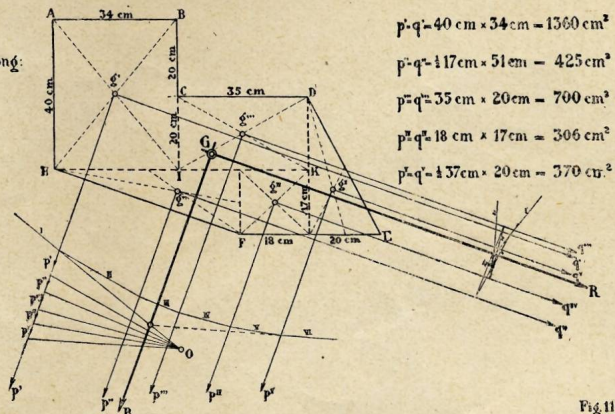
(L. B. L. A. P. O. R. T. O.)

ESTÁTICA GRÁFICA



ESTÁTICA GRÁFICA

Escala de long.
1:20.



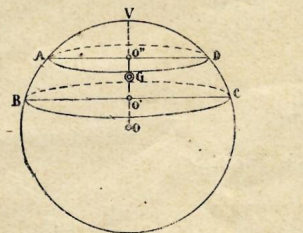
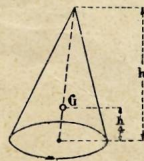
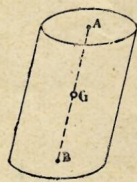
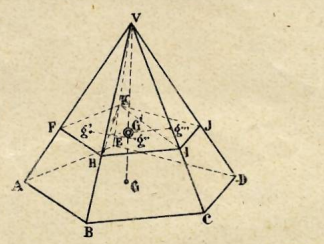
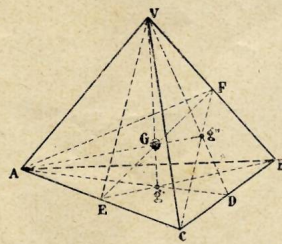
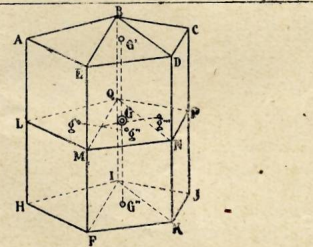
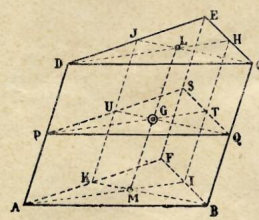
$$p \cdot q = 40 \text{ cm} \times 34 \text{ cm} = 1360 \text{ cm}^2$$

$$p \cdot q = 117 \text{ cm} \times 51 \text{ cm} = 425 \text{ cm}^2$$

$$p \cdot q = 35 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 700 \text{ cm}^2$$

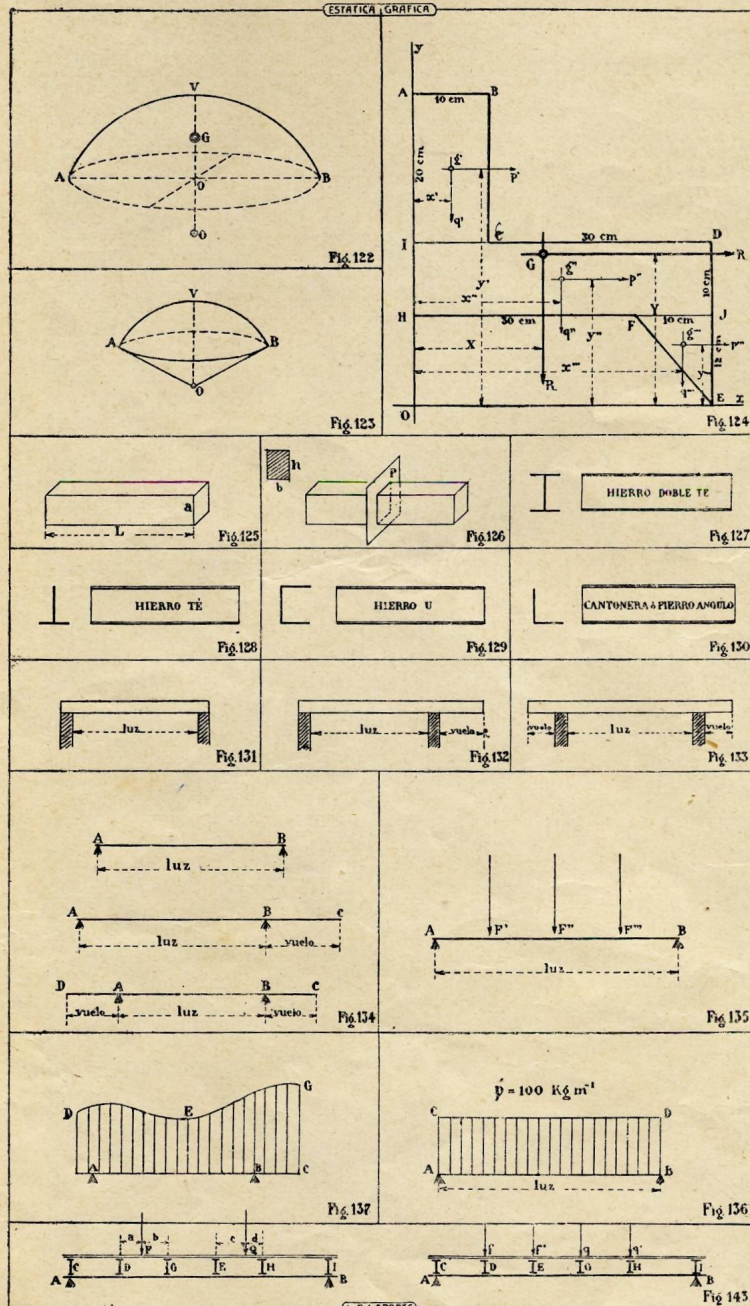
$$p \cdot q = 18 \text{ cm} \times 17 \text{ cm} = 306 \text{ cm}^2$$

$$p \cdot q = 4.37 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 370 \text{ cm}^2$$



L. B. LAPORTE

ESTÁTICA GRÁFICA



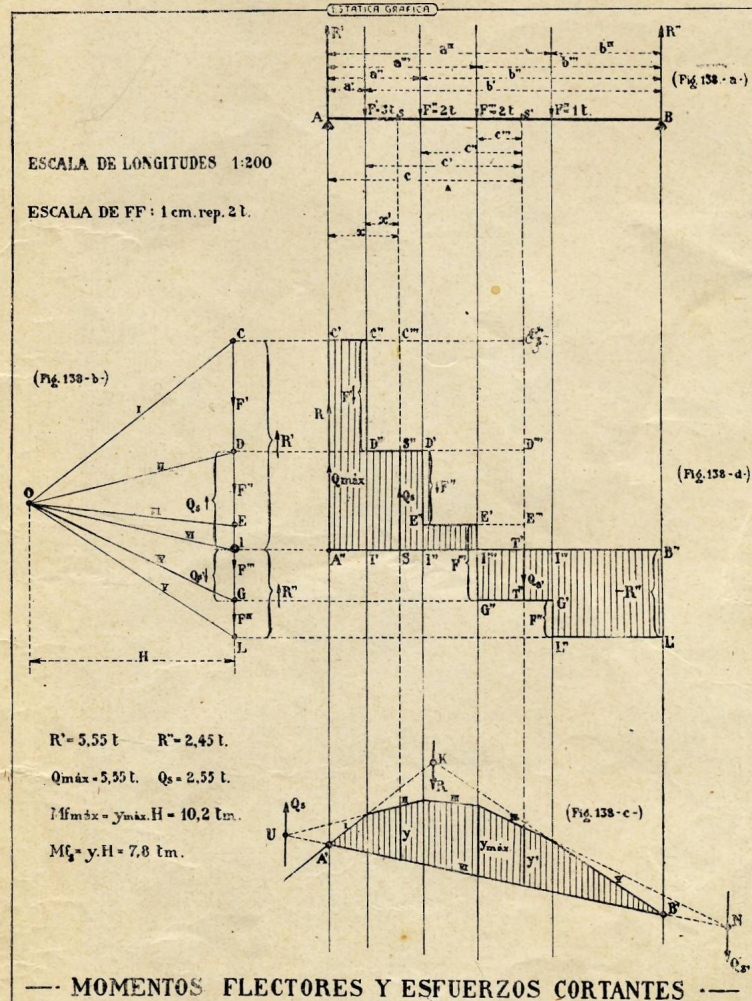
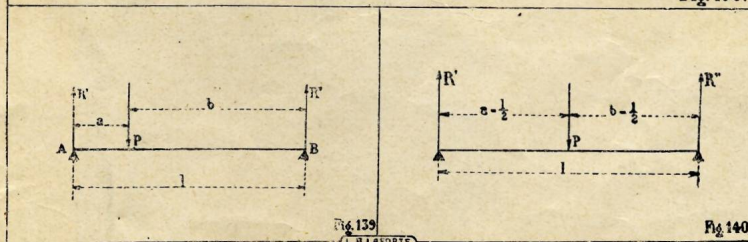
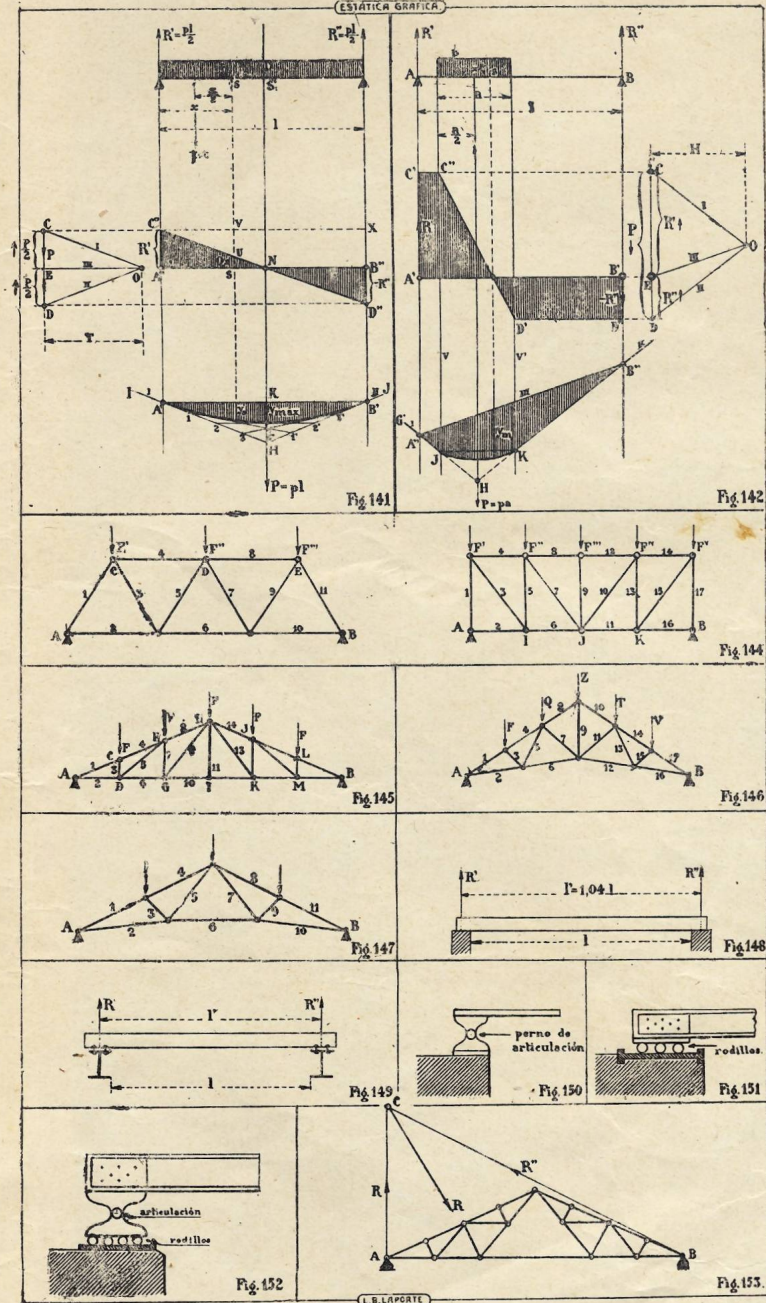


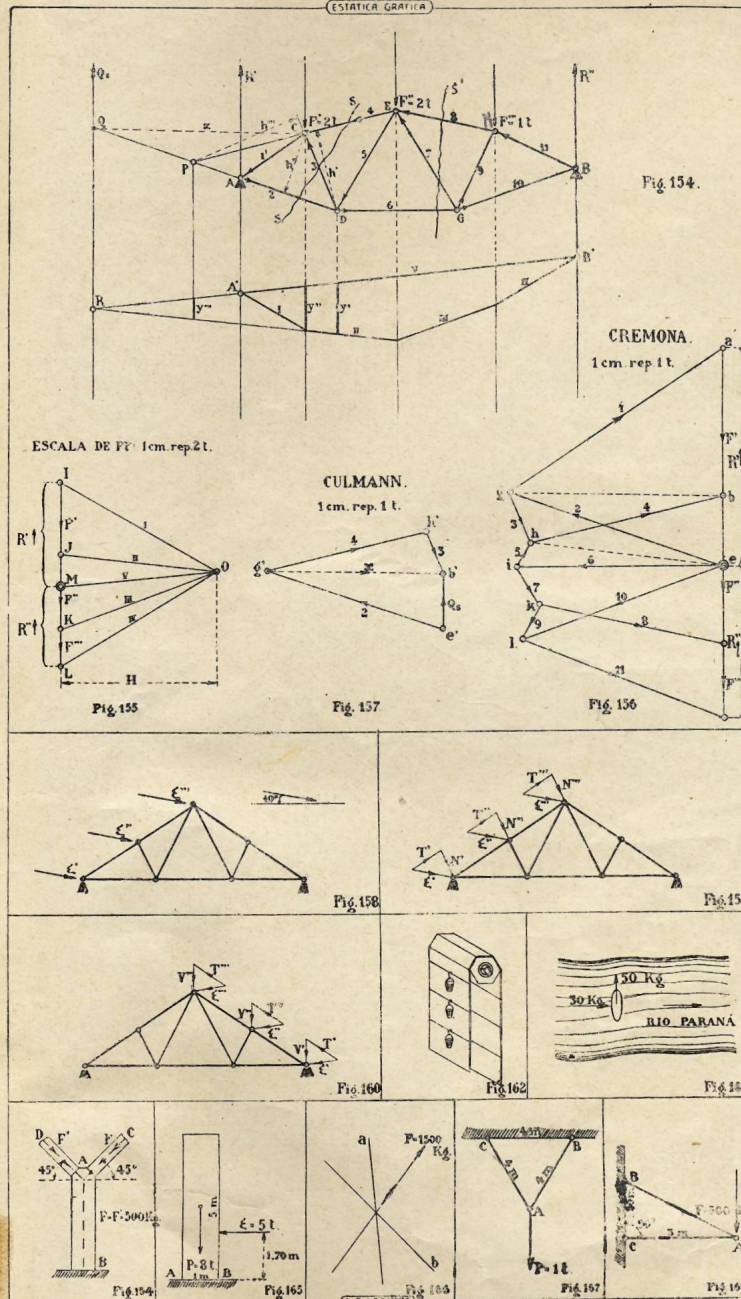
Fig. 138.



ESTÁTICA GRÁFICA



ESTÁTICA GRÁFICA



Vo = V(14 at. Vo = V(14 + 32) Vo = V(150)

ESTADÍSTICA GRÁFICA

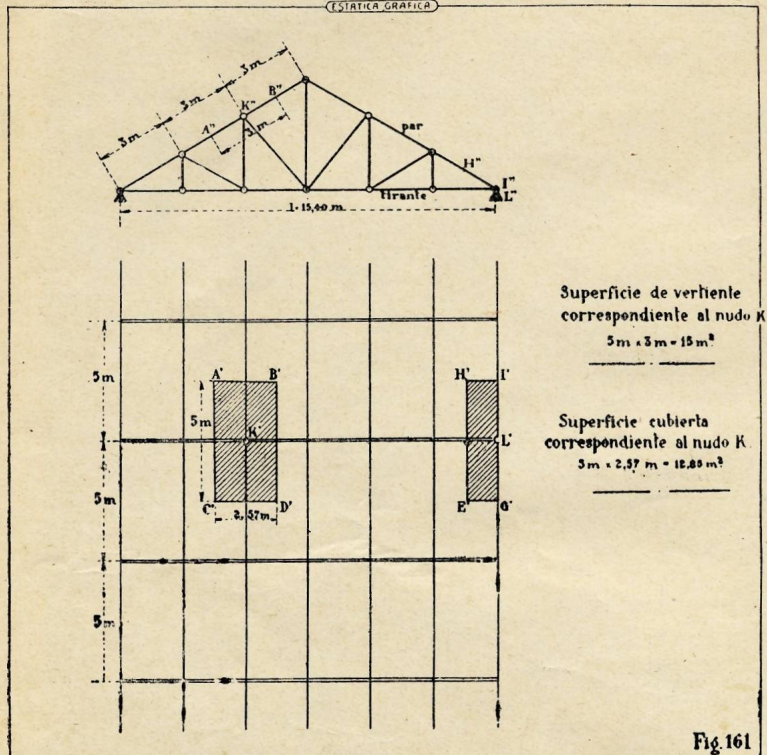
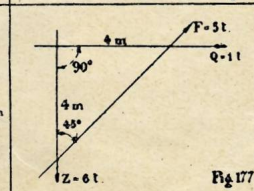
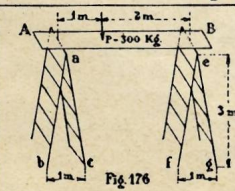
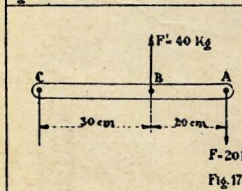
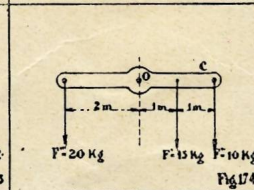
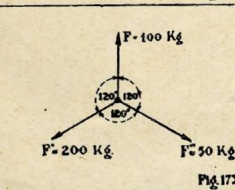
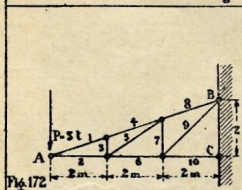
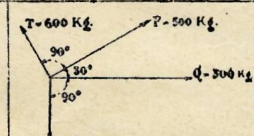
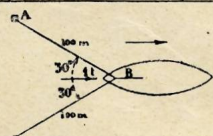
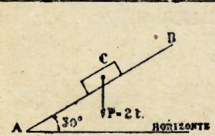


Fig. 161



U. S. LAPORE

