

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPLO LEVI

AÑO PRIMERO



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1941

QUEDA HECHO EL
DEPOSITO DE LEY

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPLO LEVI

AÑO PRIMERO



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1941

LA APROXIMACION COMO INSTRUMENTO DE CALCULO Y DE DEMOSTRACION

Dijimos alguna vez que la matemática es esencialmente un modo de pensar; las fórmulas matemáticas confieren a la representación de los hechos expresiones sintéticas, a veces si se quiere más de lo cierto abstractas, precisas, simplificadas, pero las únicas que permitan, después de una conveniente preparación, la vista conceptual de fenómenos complejos como los de la naturaleza física. Basta mirar, por ej., en el día de hoy, lo que son las aplicaciones de toda naturaleza de la electricidad, y pensar la importancia que ha tenido en el mismo desarrollo de la física experimental la teoría que lleva el nombre de Maxwell, cuyo mérito esencial fuera quizás sólo el de reunir en dos fórmulas las leyes experimentales que habían sido la gloria de Ampère, Biot, Lenz, Faraday, etc., para comprender esa importancia de la fórmula sin ninguna pretensión de llegar a la traducción numérica. Nada importa si, para contestar a un problema particular, el físico o el ingeniero pueden encontrarse — sea por no estar en posesión de amplios recursos analíticos, o sea porque el poderío práctico de éstos no alcanza a las soluciones numéricas — pueden encontrarse, digo, en condiciones de renunciar al cálculo y dirigirse a la experiencia; lo esencial es que, sin la concepción matemática, esa experiencia no habría surgido.

Sin embargo, muy a menudo el práctico se demuestra de cierta manera desilusionado frente al matemático, propiamente porque sus fórmulas no parecen traducirse en números; y por otra parte el matemático mismo, en su interior, ansía al número. Basta recordar a Euler, Gauss, Bessel, Legendre, ... cuyos nombres están ligados al cálculo de tablas numéricas.

Basta recordar también todas las investigaciones sobre la resolución numérica de las ecuaciones sobre las cuales se detu-

vieron principalmente los matemáticos de la primera mitad del siglo pasado; recordemos para añadir aún nombres: Lagrange, Fourier, etc. . . .

Si alguna vez parece que el matemático esté desarmado frente a la traducción numérica de las fórmulas, se trata mejor de poca confianza en que la fatiga que importa el cálculo numérico sea correspondida por un resultado que no se pueda lograr con medios más simples, sean los de la directa observación. Se puede decir como regla general (que no quiero decir no tenga sus excepciones) que la resolución numérica de problemas prácticos se puede siempre conseguir al precio de cálculos bastante largos. El problema esencial que se pone delante del matemático con respecto al cálculo numérico es más que todo el de encontrar las vías más cortas y, por otra parte, determinar el momento en el cual los números calculados representan el resultado buscado con aproximación suficiente: porque está en la naturaleza de nuestras medidas que casi nunca hay que hablar de exactitud, sino siempre de aproximación.

Ahora bien, cosa muy notable es que esta búsqueda acerca de la aproximación coincide a menudo con los métodos mismos de demostración.

1. Ponemos de lado los problemas de cálculo directo sobre fórmulas más o menos complicadas, formadas mediante las operaciones racionales; bien puede tratarse aquí también del cálculo de aproximaciones, pero en un campo que suponemos resuelto por la aritmética y el álgebra elementales. Por las mismas razones dejamos de lado los problemas que se resuelven con el uso de tablas corrientes como las de logaritmos o de funciones trigonométricas. Más allá se encuentran los problemas que se resuelven en general con los métodos llamados infinitos: resolución de ecuaciones y cálculo de integrales.

Primera hipótesis general que nos ayuda para enfrentar estos problemas es aquella de la continuidad; en los problemas ofrecidos por las aplicaciones físicas tratamos siempre con funciones continuas o que se pueden considerar como tales, a pesar de las teorías cuánticas o de cualquier otro accidente; eso, sea porque sigue todavía valiendo el antiguo lema *natura non facit saltum*, sea porque son funciones continuas las elementales funciones racionales que a lo último son el único medio

para escribir fórmulas matemáticas. Recordemos pues algunas definiciones relativas a la continuidad (1):

Una función $f(x)$ de una variable continua x , se dice continua en un punto x_0 cuando, para cada $\varepsilon > 0$, se puede asignar un δ tal que de ser $|x - x_0| < \delta$ sigue que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se demuestra que si $f(x)$ es continua en todos los puntos de un intervalo finito, fijado ε se puede determinar un valor de δ que sirve para todos los puntos. Se dice entonces que la función es continua en el intervalo y la propiedad recordada se llama *uniforme continuidad*.

Los números ε y δ tienden a 0 simultáneamente, salvo en intervalos donde la función sea constante. Se puede entonces considerar la razón $\varepsilon : \delta$; y, según los modos diferentes de comportarse esta razón, se tienen distintos tipos de continuidad. Se dice que la función $f(x)$ realiza en un punto x_0 una *condición de Lipschitz* si, además de ser continua en el punto x_0 , se puede encontrar un número finito H tal que, para cualquier x (se supone generalmente, dentro de un intervalo convenientemente limitado alrededor de x_0)

$$|f(x) - f(x_0)| < H|x - x_0|.$$

Se dice *condición de Lipschitz generalizada de grado α* una de la forma

$$|f(x) - f(x_0)| < H|x - x_0|^\alpha ;$$

se ve fácilmente que cuando está satisfecha una condición de Lipschitz de grado α , se realizan también todas las de grado menor; por lo tanto interesan sólo, ordinariamente, los valores de $\alpha > 1$.

Si una función admite en un punto derivada finita, realiza siempre la condición de Lipschitz; pero no rige lo inverso, por ej. la función $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es continua en el punto $x=0$ y realiza la condición de Lipschitz con $H=1$ sin tener derivada en ese punto.

(1) Principalmente para las primeras de las cosas siguientes el lector puede referirse útilmente a los tratados fundamentales de álgebra y de cálculo. Continuando en la lectura encontrará posiblemente mayores puntualizaciones y aplicaciones de interés.

Si una función $f(x)$ realiza la condición de Lipschitz (con $\alpha=1$) en todos los puntos de un intervalo, y M es el mínimo valor de H valedero para cualquier punto, llamaremos a M *módulo de continuidad* de la función en dicho intervalo.

2. Sea propuesto de resolver una ecuación

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

donde $f(x)$ es función continua. Si sabemos que en dos puntos a, b la función toma valores de signos opuestos, podemos asegurar que en dicho intervalo existe a lo menos una solución de la ecuación. El método más simple para calcular esta solución y en el mismo tiempo para demostrar su existencia es el *método dicotómico*. Consiste en lo siguiente:

Pongamos $c = \frac{a+b}{2}$ y calculemos $f(c)$; si no es $f(c) = 0$, $f(c)$ tendrá signo opuesto o a $f(a)$ o a $f(b)$. Sea por ej. el signo de $f(c)$ opuesto al signo de $f(b)$; calculemos entonces $d = \frac{b+c}{2}$ y $f(d)$; si no es $f(d) = 0$, $f(d)$ tendrá signo opuesto a $f(c)$ o a $f(b)$; sea por ej. opuesto a $f(c)$; calcularemos $e = \frac{d+c}{2}$ y así siguiendo. Si una primera vez se encuentra entre las medias sucesivas que se van formando una que substituída en f dé por resultado 0, se habrá evidentemente encontrado una solución de la ecuación. En la hipótesis contraria, la sucesión de estas medias, c, d, e, \dots tiende a un límite el cual es solución de la ecuación propuesta.

Para demostrarlo hacemos esta simple observación: mediante la sucesión de los números

$$a \ b \ c \ d \ e \ \dots \quad (2)$$

formamos la serie

$$S = a + (b - a) + (c - b) + (d - c) + (e - d) + \dots \quad (3)$$

de la cual (2) es la sucesión de las sumas parciales; por la definición de los números (2) cada término de esta serie tiene por valor absoluto la mitad del valor absoluto del término ante-

rior; luego la serie es convergente y por tanto converge la sucesión (2). Digo que $f(S) = 0$; en efecto, supongamos que no sea y que sea $|f(S)| \geq \mu$; por ser $f(x)$ continua, existe un δ tal que, para todo x tal que $|x - S| > \delta$, $|f(x) - f(S)| < \mu$. Entre las sumas parciales (2) de (3) hay dos sucesivas m, n tales que $|n - m| < \frac{\delta}{2}$, $|S - n| \leq \frac{\delta}{2}$; recordamos ahora que, por la definición de la sucesión (2) cada uno de sus términos es equidistante del término anterior y de un número (que podría ser este término anterior mismo) en el que la función tiene signo opuesto. Fijando nuestra atención sobre el término n , sea m' este número ($m' = m$ o m' simétrico de m respecto a n); es pues igualmente $|n - m'| < \frac{\delta}{2}$, $|S - m'| \leq |S - n| + |n - m'| < \delta$, $|f(n) - f(S)| < \mu$, $|f(m') - f(S)| < \mu$ y por consiguiente, por la hipótesis que $|f(S)| \geq \mu$, $f(n)$ y $f(m')$ tienen el mismo signo de $f(S)$, en contradicción con la definición de m' . Se concluye que la hipótesis que fuera $f(S) \neq 0$ es absurda.

De (3) resulta enseguida que después de r operaciones se habrá calculado la solución de (1) con error $< 2^{-r} |b - a|$.

3. Se puede observar que nada impone de dividir siempre el intervalo entre dos valores de x en que $f(x)$ tiene signos opuestos en sólo dos partes iguales; el razonamiento podría repetirse sin modificaciones esenciales con otros modos de división y el hecho que el sistema de numeración en uso es el decimal podría aconsejar la división en décimos. La contestación a esta observación es que *si nada de particular se sabe sobre propiedades de la función $f(x)$, la división dicotómica será la más favorable respecto a la probabilidad de llegar a una mayor aproximación de la solución con un menor número de operaciones*. En efecto, suponemos por sencillez que el intervalo $a-b$ sea $0-1$; a este caso puede uno reducirse siempre por medio de una substitución lineal de la forma: $x' = \frac{x-a}{b-a}$. La sucesión de las operaciones para aproximar el número x , en la hipótesis de que se adopte una división de los intervalos en n partes iguales se puede interpretar en la forma siguiente: Suponiendo escrito el número x en un sistema de numeración de base n ,

$$x = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \dots$$

la determinación de cada cifra c_1, c_2, c_3, \dots implica respectivamente $c_i + 1$ tentativas, salvo el caso de $c_i = n - 1$ en el cual las tentativas son sólo c_i ; cada cifra presenta n casos posibles, $0, 1, 2, \dots, n - 1$, los que implican pues $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ tentativas en total, y, por lo tanto, un número medio de ensayos de $\frac{(n-1)(n+2)}{2n}$. Si se pide calcular x con un error $\leq d$, habrá que determinar un número de cifras igual al mínimo entero $\geq \log d : \log n$; por lo tanto el número medio de los ensayos necesarios para determinar esa aproximación podrá representarse por

$$\frac{\log d}{2} \frac{(n-1)(n+2)}{n \log n} = \frac{\log d}{2} \left(\frac{n+1}{\log n} - \frac{2}{n \log n} \right);$$

dentro el paréntesis el primer término crece con n , el segundo decrece; se tendrá pues el mínimo para el mínimo valor de n , $n = 2$.

En la práctica se conseguirá naturalmente la máxima ventaja templando el método dicotómico con aproximar por su parte en convenientes cifras decimales las determinaciones proporcionadas por las medias sucesivas.

4. Las conclusiones podrían cambiar si algo más se supiera acerca de la función $f(x)$; recordamos para este objeto el método que se llama de las partes proporcionales⁽¹⁾, en el cual a la determinación de puntos medios se substituye la determinación, para cada intervalo, del punto que lo divide en partes proporcionales a los valores absolutos de $f(x)$ en los extremos del intervalo. Se ve fácilmente que este procedimiento llevará a buenas aproximaciones más rápidamente cuando la función $f(x)$ se aproxima a una función lineal.

5. Los métodos señalados se aplican a funciones $f(x)$ absolutamente generales, con la sola condición que sean continuas; pero suponiendo que sean conocidos dos valores iniciales de la variable en los cuales la función toma signos contrarios.

(1) o de falsa posición.

Además tienen el inconveniente de que podrían existir dentro del intervalo $a-b$ varias soluciones; el método hace entonces conocer una sin decirnos si otras quedan olvidadas; y esta una depende, en su elección, de condiciones accesorias respecto a la aplicación del método, de modo que con variaciones accidentales en esa aplicación (por ej. cambiando la regla de subdivisión de los intervalos) podría cambiar la solución elegida.

Supongamos que se proponga todavía determinar las soluciones de la ecuación (1) en un dado intervalo $a-b$ ($a < b$) y supongamos que $f(x)$ tenga en el intervalo $a-b$ el módulo de continuidad M . No podrá ser $f(x) = 0$ para ningún valor de x interno al intervalo

$$a - a + \frac{|f(a)|}{M};$$

pongamos $a_1 = a + \frac{|f(a)|}{M}$; podemos repetir la misma observación sobre el punto a_1 ; poniendo

$$a_2 = a_1 + \frac{|f(a_1)|}{M},$$

no podrá tampoco existir ninguna solución interior al intervalo a_1-a_2 y por tanto tampoco en el intervalo $a-a_2$. Se puede continuar de esta manera agrandando sucesivamente el intervalo en el cual se puede asegurar no encontrarse soluciones. Pero se puede decir algo más: si existen en el intervalo $a-b$ soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, la solución a, a_1, a_2, \dots termina, después de un cierto número de operaciones, con la solución más próxima a a o bien es infinita, creciente, y tiene por límite esa solución más próxima a a . Si no existen soluciones, después de un número finito de operaciones se habrá cubierto todo el intervalo $a-b$. En efecto, en este último caso, existe un mínimo de los valores de $|f(x)|$ en $a-b$: sea m , hasta que los puntos a_i están dentro del intervalo $a-b$, la anchura de los intervalos a_i-a_{i+1} es siempre $\geq \frac{m}{M}$ y luego no podrá $a-b$ comprender a más de $(b-a)M : m$ de estos intervalos. Recíprocamente, si después de n operaciones no se ha salido del intervalo $a-b$, se habrá encontrado algún valor de x para el cual $|f(x)| < (b-a)M : n$.

Si la operación termina después de un cierto número de pasos con haber cubierto todo el intervalo a - b se habrá demostrado la no-existencia de soluciones; en el caso opuesto podrá no llegarse nunca a decidir si una solución existe; pero, de saber que existe, se determinará con toda la aproximación que se quiera la primera solución desde a .

En los casos prácticos, cuando se haya encontrado un a ; para el cual $|f(x)|$ sea bastante pequeño, se podrá generalmente reducirse, por medio de alguna tentativa, a la aplicación del primer método.

6. Si la función $f(x)$ además de ser continua, es derivable y se conoce un límite superior para el valor de la derivada en el intervalo a - b , se puede adoptar este límite superior como valor de M para la aplicación del método del n. anterior. Pero en este caso se puede en otro modo perfeccionar el procedimiento en una dirección que tendrá una aplicación importante a continuación.

Supongamos que en un punto x_0 del intervalo a - b se realice la condición siguiente: existe un número $\eta \geq 2|f(x_0)| : |f'(x_0)|$, tal que, si x es un punto cualquiera puesto con respecto a x_0 , de la parte positiva o de la negativa según sea $-$ o $+$ el signo de $f(x_0) : f'(x_0)$, y a distancia de x_0 no mayor de η , es siempre $|f'(x_0) - f'(x)| \leq \frac{1}{2} |f'(x_0)|$. En estas condiciones *la sucesión de los números*

$$x_0, \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \dots, \quad x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_0)}, \dots \quad (4)$$

si no se cierra con uno que sea raíz de $f(x)=0$, converge hacia un límite que es raíz de dicha ecuación.

De (4) se deduce en efecto, restando dos igualdades sucesivas,

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= x_i - x_{i-1} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(x_0)} \\ &= (x_i - x_{i-1}) \left(1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

donde ξ es un número intermedio entre x_i y x_{i-1} . Si, en parti-

cular, $i = 1$, el punto ξ está entre x_0 y x_1 y luego, por las hipótesis hechas, $|x_0 - \xi| < \eta$; por lo tanto

$$|f'(x_0) - f'(\xi)| < \frac{1}{2} |f'(x_0)|. \quad (6)$$

Más en general, esta misma (6) se realizará si suponemos que, para el valor considerado de i , sea

$$|x_i - x_0| < \eta, \quad |x_{i-1} - x_0| < \eta,$$

y los puntos x_i, x_{i-1} estén respecto a x_0 de la misma parte de x_1 . En estas hipótesis de (6) se deduce

$$\left| 1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)} \right| < \frac{1}{2},$$

y, consiguientemente, de (5),

$$|x_{i+1} - x_i| < \frac{1}{2} |x_i - x_{i-1}|. \quad (7)$$

Dicho esto, consideremos la serie

$$x = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots \quad (8)$$

cuyas sumas parciales son los mismos números x_i . En ella, por hipótesis,

$$|x_1 - x_0| = |f(x_0) : f'(x_0)| \leq \frac{1}{2} \eta;$$

además, pudiéndose aplicar, como hemos visto, la (7) al caso $i = 1$,

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_0| \leq \frac{1}{4} \eta;$$

se sigue que x_2 está respecto a x_0 de la misma parte de x_1 y que

$$|x_2 - x_0| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| \leq \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{4} \eta < \eta.$$

Resulta entonces que se puede aplicar la (7) aún para $i=2$. En general, supongamos que para todos los valores de $i < r$ se haya reconocido que los puntos x_i están respecto a x_0 de la misma parte de x_1 y que $|x_i - x_0| \leq \eta$; se concluye, por la (7), que los términos de la serie (8) hasta aquel de índice $r+1$ decrecen en valor absoluto a lo menos como los términos de una serie geométrica de razón $1:2$ y primer término $\frac{1}{2}\eta$. Se sigue que las condiciones supuestas realizadas hasta $i=r$, se realizan también por $i=r+1$; por tanto, puesto que ya se observó que ellas están realizadas por $i=1$, se concluye que son ciertas para todos los i .

La serie S es pues convergente y

$$\lim x_i = x, \quad \lim (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Siendo además

$$f(x_i) = (x_{i+1} - x_i) f'(x_0),$$

sigue que

$$f(x) = f(\lim x_i) = \lim f(x_i) = \lim (x_{i+1} - x_i) f'(x_0) = 0,$$

con lo cual se acaba la demostración.

Notemos que las propiedades de la serie (8) nos permiten también valuar la aproximación de cada x_i a la raíz x ; el error de aproximación es menor o igual a la diferencia entre la determinación x_i y la anterior x_{i-1} y también es menor del doble de la diferencia entre x_i y la aproximación sucesiva x_{i+1} (esta segunda determinación del error siendo siempre menor o igual que la primera).

Terminamos con algunas observaciones:

1°. Del modo de decrecimiento de los términos de la serie (8) sigue que todos los x_i de índice $i > r$ están respecto de x_r de la misma parte de x_{r+1} ; esta observación permite juzgar también del sentido (por exceso o por defecto) de la aproximación, en cuanto será x_i aproximado por exceso o por defecto según $f(x_i) : f'(x_0)$ sea positivo o negativo.

2°. La raíz de $f(x) = 0$ que el procedimiento determina es la más próxima al punto x_0 de la parte de x_1 ; en efecto, si

entre x y x_0 existiera otra raíz de la ecuación, existiría un punto en el cual $f'(x) = 0$ y para el cual, por consiguiente, no sería $|f'(x) - f'(x_0)| \leq \frac{1}{2} |f'(x_0)|$.

3º. No es obligación usar como divisor constante $f'(x_0)$; por ej. está permitido, cada vez que se ha determinado un punto x_i , considerar este punto como punto x_0 y ver si con ello conviene empezar nuevamente el procedimiento. Se ve fácilmente que esto será siempre posible si $|f'(x_i)| > |f'(x_0)|$ (nótese que por un conocido teorema de Darboux y por las razones dichas en 2º., $f'(x_i)$ y $f'(x_0)$ tendrán siempre el mismo signo); pero no es posible dar reglas generales sobre la conveniencia de tales variantes. De cualquier manera el método, cuando se sustituya siempre $f'(x_i)$ al divisor constante $f'(x_0)$ y se desprecien las advertencias dadas para asegurar la convergencia, se reduce al método clásico llamado de Newton⁽¹⁾.

4º. Comparando lo dicho en los Nos. 5, 6, se nota que el primer método nos permite siempre de aproximar una solución de la ecuación si apenas se sabe que la función $f(x)$ es continua, pero pide que se conozca un par de valores de la variable en los cuales la función tiene signos opuestos; el segundo nos permite siempre de aproximar una solución, si existe en un intervalo finito, pero pide que se conozca un módulo de continuidad de la función (nada, al contrario, sobre sus valores inicial y final) y no puede asegurar (sin consideraciones complementarias) de la efectiva existencia de la solución; el tercero finalmente pide que la función tenga derivada y, en lo que tiene de análogo al segundo método, permite generalmente una aproximación más rápida a la solución buscada; además asegura la existencia de esta solución; pero pide que de ella ya se conozca un valor bastante aproximado. Sobre este último punto se debe sin embargo observar que las condiciones enunciadas por la convergencia del procedimiento son condiciones máximas y prácticamente el procedimiento converge en muchos casos en los que ellas no se realizan, a lo menos desde un principio.

En las aplicaciones convendrá frecuentemente alternar la

⁽¹⁾ Recordamos que muchas otras variantes se dan en los tratados para garantizar la convergencia del método de Newton; ver p. ej. B. LEVI, *Analisi algebrica e infinitesimale*. E. NETTO, *Vorlesungen über Algebra*.

aplicación de los distintos métodos, para aprovechar de sus ventajas respectivas.

7. Consideremos como ejemplo la ecuación

$$f(x) = 17x^4 + 44x^3 + 24x^2 + 8x - 15 = 0. \quad (9)$$

Una conocida regla del álgebra (*regla de Descartes*) nos permite afirmar que existe una y sólo una raíz positiva. Pero lo podemos ver independientemente por la observación siguiente: se tiene, derivando,

$$f'(x) = 4(17x^3 + 33x^2 + 12x + 2)$$

que, para valores positivos de x es siempre positiva; por lo tanto $f(x)$ es creciente. Puesto que $f(0) = -15 < 0$, $f(x)$ pasará por el valor 0 para cierto $x > 0$, y seguirá después con valores siempre positivos. Se ve enseguida por la simple inspección de los coeficientes, que $f(1) > 0$; por lo tanto la raíz estará en el intervalo $(0, 1)$. Pero se nota que, por ser los coeficientes relativamente grandes, a la aplicación inmediata del método del n. 6 se opone la dificultad que el número señalado con η resultará muy pequeño; tampoco se presenta conveniente el método del n. 5, porque, por la misma razón, habría que dar a M un valor demasiado grande con la consiguiente probabilidad de aproximarse a la raíz extremadamente despacio; buscaremos pues de reducir ante todo el intervalo, con el método dicotómico. Poniendo $x = \frac{0+1}{2} = 0,5$ se calcula $f(0,5) = 1,6$ (1), $f'(0,5) = 72,5$, $f''(0,5) < 240$. Según las reglas del n. 6 resulta que poniendo $x_0 = 0,5$ habrá que tomar $\eta \geq 3,2 : 72,5$; por simpli-

(1) Recordamos que para el cálculo numérico de una función racional

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$$

para un determinado valor α de x , conviene generalmente, mejor que hacer directamente las operaciones de elevación a potencias, multiplicación y suma indicadas, calcular sucesivamente las expresiones

$$f_1 = a_0\alpha + a_1, f_2 = f_1\alpha + a_2, f_3 = f_2\alpha + a_3, \dots$$

Así, en el caso del texto,

$$\begin{aligned} 17 : 2 + 44 &= 52,5, & 52,5 : 2 + 24 &= 50,25, & 50,25 : 2 + 8 &= 33,125 \\ 33,125 : 2 - 15 &= 1,5625 = f(0,5). \end{aligned}$$

cidad se podrá elegir $\eta = \frac{1}{2,0}$; en este intervalo, de la parte de $x < 0,5$, la variación de $f'(x)$ será $< 240 : 20 = 12 < 72,5 : 2$. Por lo tanto se puede aplicar el método del n. 6 con $x_0 = 0,5$. Obtenemos

$$x_1 = 0,5 - \frac{1,6}{72,5} = 0,5 - 0,022 = 0,478$$

$$f(0,478) = 0,0005754 \dots$$

Una ulterior aproximación sería proporcionada por

$$x_2 = 0,78 - \frac{0,0005754}{72,5}$$

y eso nos permite de afirmar que el número $x_1 = 0,478$ ya representa la raíz buscada con error $< 2 \frac{0,0005754}{72,5} < 1,7 \cdot 10^{-5}$.

8. El procedimiento del n. 6 adquiere una importancia mayor por el hecho que en él no tiene ningún oficio la hipótesis que la función dependa de la sola variable x . Supongamos dada una función $f(x; t_1 t_2 \dots t_n)$ dependiente de la variable x y de los parámetros t_1, t_2, \dots, t_n , derivable respecto a x y continua respecto al grupo de los parámetros t_r . Supongamos además que respecto a estos parámetros sea continua también la derivada parcial

$$f'(x; t_1 t_2 \dots t_n) = \frac{\partial f(x; t_1 t_2 \dots t_n)}{\partial x}$$

Supongamos finalmente que, fijado convenientemente un sistema de valores de las variables que indicaremos con $x_0, t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0$, se pueda elegir un número

$$\eta > 2 |f(x_0; t_1^0 \dots t_n^0) : f'(x_0; t_1^0 \dots t_n^0)| \quad (10)$$

y tal que para $|x - x_0| < \eta$

$$|f'(x; t_1^0 \dots t_n^0) - f'(x_0; t_1^0 \dots t_n^0)| < \frac{1}{2} |f'(x_0; t_1^0 \dots t_n^0)|; \quad (11)$$

a consecuencia de haber puesto aquí los signos $<$ en lugar de los

≡ del n. 6 y de la supuesta continuidad de las funciones consideradas, todas las desigualdades escritas siguen valiendo si, en lugar de poner valores fijos para los parámetros t_r , se suponen estos parámetros variables dentro de un campo bastante reducido alrededor del punto $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0)$. Aplicando las conclusiones anteriores se puede pues afirmar que para estos valores de las t_r la sucesión de las funciones

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1}; t_1 \dots t_n)}{f'(x_0; t_1 \dots t_n)} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

o también la sucesión de las funciones

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1}; t_1 \dots t_n)}{f'(x_0; t_1^0 \dots t_n^0)} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

tienden a una función límite la cual realiza la ecuación

$$f(x; t_1 \dots t_n) = 0. \quad (14)$$

Es el conocido teorema de las funciones implícitas, demostrado por aproximaciones sucesivas⁽¹⁾.

Se puede notar una diferencia con el enunciado más corriente del teorema, por el hecho de que no se supone explícitamente de conocer desde un principio una solución numérica de la dada ecuación (14); es evidente sin embargo que, si fuera necesario, una tal solución numérica podría calcularse aplicando uno de los procedimientos anteriormente recordados a la ecuación

$$f(x; t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0) = 0. \quad (15)$$

Si esta solución se conoce, y se fija como x_0 el correspondiente valor de x , las condiciones enunciadas anteriormente se simplifican en algo, en tanto que la condición (10) resulta sa-

(1) La demostración también está conocida, salvo diferencias secundarias (Cfr. por ej. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique* Tome I); en otras demostraciones se supone en más la existencia de alguna derivada parcial respecto a los parámetros que, como se ve, resulta ineficiente (Cfr. por ej. PINCHERLE, *Lezioni di calcolo infinitesimale*. — DINI, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Vol. I).

tisfecha para cualquier valor de $\eta > 0$ si apenas $f'(x_0; t_1^0 \dots t_n^0) \neq 0$; a consecuencia de la hipótesis de continuidad se puede entonces siempre elegir η de manera de satisfacer a (11) y queda demostrado el teorema en su enunciado habitual: *del hecho de conocer una solución de (15) (sin otras condiciones de las enunciadas de continuidad y derivabilidad respecto a la sola x) se puede afirmar la existencia de la función implícita definida por (14).*

La determinación del campo de los valores de los parámetros t_r para los cuales la sucesión (12) ó (13) es convergente puede hacerse depender de la teoría general del n. 6; pero se obtendrán en general resultados más expresivos, con el análisis directo de los casos particulares, como vamos a mostrar sobre un ejemplo.

9. Antes merece observar todavía que, dada una ecuación como (14), se puede a menudo sujetarla a transformaciones que hacen más cómoda la aplicación del procedimiento del n. 6. Una de estas transformaciones que hay que señalar es la siguiente:

Supongamos, como ya anteriormente, que la función f tenga la derivada $\frac{\partial f}{\partial x} = f'$ continua, y supongamos además que esta derivada sea $\neq 0$ para $x = x_0$ y para todos los valores de los parámetros t_r que hay que considerar. Pongamos

$$\Phi(x; t_1 t_2 \dots t_n) = f(x; t_1 \dots t_n) - f(x_0; t_1 \dots t_n) - (x - x_0) f'(x_0; t_1 \dots t_n) \quad (16)$$

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = f'(x; t_1 \dots t_n) - f'(x_0; t_1 \dots t_n);$$

por (16), la (14) puede escribirse

$$(x - x_0) f'(x_0; t_1 \dots t_n) + f(x_0; t_1 \dots t_n) + \Phi(x; t_1 \dots t_n) = 0$$

o, por la hipótesis que $f'(x_0; t_1 \dots t_n) \neq 0$,

$$(x - x_0) - g(x; t_1 t_2 \dots t_n) = 0 \quad (17)$$

habiendo puesto

$$g = \frac{-f(x_0; t_1 \dots t_n) - \Phi(x; t_1 \dots t_n)}{f'(x_0; t_1 \dots t_n)}.$$

La función g tiene derivada

$$g' = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-\Phi'}{f'(x_0; t_1 \dots t_n)},$$

la que es cero para $x = x_0$ (y para valores arbitrarios de las t_r) como resulta de la anterior expresión de Φ' . Por la continuidad de f' , también g' es continua.

Aplicando a la ecuación (17) el método del número anterior, habrá que notar en primer lugar que, para $x = x_0$ el primer miembro de (17) se reduce a $-g(x_0; t_1 \dots t_n) = f(x_0; t_1 \dots t_n) : f'(x_0; t_1 \dots t_n)$; si por lo tanto se habrá elegido x_0 de modo que, para cierto sistema de valores de los parámetros $t_0^1 t_0^2 \dots t_0^n$, la ecuación (15) esté realizada (o, más generalmente, el valor de $f(x_0; t_0^1 \dots t_0^n)$ resulte bastante pequeño como para la aplicación del método), lo mismo ocurrirá, para el mismo sistema de valores de los parámetros, respecto a (17). La fórmula recurrente (12) que expresa la sucesión de las funciones aproximantes toma entonces la forma

$$x_i = g(x_{i-1}; t_1 t_2 \dots t_n). \quad (18)$$

10. Daremos a continuación un ejemplo concreto para mostrar juntamente con las dificultades que se presentan en la aplicación numérica de la teoría, también algún artificio que el caso particular aconseja para su superación y que podrán imitarse en otras oportunidades.

Es conocido que la intensidad i de la corriente inducida en un circuito eléctrico de resistencia R por una fuerza electromotriz E , cuando en el circuito está intercalada una inductancia de coeficiente de autoinducción constante L , se expresa por la fórmula

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{c^2 R}{L} t} \right),$$

donde t es el tiempo calculado del momento de la imposición

de la fuerza electromotriz, en el cual se supone que la corriente fuese 0. Esta fórmula resulta de la resolución de la ecuación diferencial

$$E = Ri + \frac{L}{c^2} \frac{di}{dt}.$$

Pero si la inductancia es debida a un solenoide con masa ferromagnética (lo que ocurre efectivamente en la práctica), la ecuación diferencial se complica, porque el coeficiente de autoinducción resulta función de la misma intensidad de corriente. Para el caso de un núcleo de hierro al silicio la forma siguiente nos fué señalada por el prof. G. Sartori

$$E = Ri + k \frac{d}{dt} \frac{i}{a+bi}. \quad (19)$$

La ecuación se resuelve muy fácilmente por separación de variables, como vamos a ver; pero no es más fácil dar una expresión explícita de la corriente en función del tiempo, y el problema está en dar un procedimiento para el cálculo de esa función.

Efectuando la derivación indicada en (19), la ecuación se escribe

$$E = Ri + \frac{ka}{(a+bi)^2} \frac{di}{dt}$$

o

$$dt = \frac{ka \cdot di}{(a+bi)^2 (E - Ri)},$$

de donde, integrando con la condición inicial $i = 0$ para $t = 0$,

$$t = \frac{kbi}{(aR+bE)(a+bi)} - \frac{kaR}{(aR+bE)^2} \log \frac{a}{E} \frac{E-Ri}{a+bi}.$$

Es de esta ecuación que se quiere explicitar la i . Para hacer los cálculos un poco menos trabajosos convendrá hacer las sustituciones siguientes. Ponemos

$$J = \frac{E-Ri}{a+bi}, \quad i = \frac{E-aJ}{R+bJ},$$

$$\frac{(aR+bE)^2}{Rka} = \vartheta, \quad \frac{b}{R} = \beta, \quad \frac{E}{a} = J_0. \quad (20)$$

La ecuación anterior se escribe entonces

$$f(J, t) = \vartheta t + \beta (J - J_0) + \log \frac{J}{J_0} = 0. \quad (21)$$

Para $t=0$ se tiene la solución $J = J_0$. Además se calcula enseguida

$$f' = \frac{\partial f}{\partial J} = \beta + \frac{1}{J}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \vartheta, \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{-\vartheta J}{1 + \beta J} \quad (22)$$

lo que demuestra que $J(t)$ es decreciente siempre que $J > 0$.

A $J=0$ corresponde $t = \infty$; por lo tanto, para valores positivos de t se tendrá siempre

$$J_0 \geq J > 0.$$

De la expresión de f' sigue entonces que

$$\beta + \frac{1}{J_0} \leq f' < \infty.$$

La sucesión de las funciones que, según el método de los n^{os}. 6, 8, tendrían que aproximar a $J(t)$, resulta, aplicando las fórmulas (4):

$$\begin{aligned} J_0 &= J_0 \\ J_1 &= J_0 - \frac{J_0}{1 + \beta J_0} \vartheta t \\ J_2 &= J_1 + \frac{J_0}{1 + \beta J_0} \left(\beta J_0 - \vartheta t - \beta J_0 \frac{J_1}{J_0} - \log \frac{J_1}{J_0} \right) \\ &= J_0 - \frac{J_0 (2 + \beta J_0)}{(1 + \beta J_0)^2} \vartheta t - \log \left(1 - \frac{\vartheta t}{1 + \beta J_0} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

.....

Pero, antes de seguir en los cálculos conviene hacer algunas observaciones. Lo dicho al n. 8 nos asegura que esta sucesión de funciones converge a la función $J(t)$ para valores de t bastante próximos al valor inicial $t=0$. Una valuación de este in-

tervalo de valores de t la obtenemos determinando el número llamado η en el n. 6. A este fin notemos que f' crece con disminuir J , es decir, con crecer t ; por lo tanto, siempre conservando a las letras los significados del n. 6, tenemos que poner $\mu = |f'(J_0, 0)| = \beta + \frac{1}{J_0}$. Por otra parte, de

$$|f'(J_1) - f'(J_2)| = |J_1 - J_2| |f''(\bar{J})|$$

(donde \bar{J} representa un valor intermedio entre J_1 y J_2) y por ser

$$f'' = -\frac{1}{J^2},$$

resulta que se obtendrá un valor de η tal que para $|J_1 - J_2| \leq \eta$ sea $|f'(J_1) - f'(J_2)| \leq \frac{1}{2} \mu$, poniendo la condición que, para todos los valores de J en el intervalo, sea

$$\eta \frac{1}{J^2} \leq \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{J_0} \right);$$

finalmente, observando que, por las consideraciones de los n^{os}. 6—8, podemos fijar que el intervalo corresponda a valores decrecientes de J y tenga por un extremo J_0 , llamando J^* al otro extremo, tendremos la condición

$$J_0 - J^* = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{J_0} \right) J^{*2}. \quad (24)$$

Se trata de una ecuación de segundo grado con una única solución positiva que será el valor de J^* . Una vez determinado J^* , la ecuación (17) nos permitirá calcular el valor correspondiente de t .

Pero para llegar a conclusiones útiles que permitan juzgar los resultados obtenidos y obtenibles, conviene pasar a un caso numérico concreto. Los valores siguientes de las constantes corresponden a un caso práctico⁽¹⁾:

⁽¹⁾ Son los valores que nos señaló el prof. G. Sartori según recordamos arriba.

$$E = 23,75 \quad R = 4,75 \quad k = 49,18 \quad a = 5,8 \quad b = 21,3$$

Calculamos entonces, por (20),

$$\vartheta = 210,008 \quad \beta = 4,484 \quad J_0 = 4,095 \quad \beta J_0 = 18,36$$

La ecuación (24) resulta así:

$$\frac{19,36}{8,19} J^{*2} + J^* - 4,095 = 0,$$

de donde se obtiene, como solución positiva,

$$J^* = 1,121$$

El correspondiente valor de t está dado por

$$\vartheta t = (J_0 - J^*) + \log \frac{J_0}{J^*} = 14,72$$

$$t = 0'',07.$$

La sucesión de las aproximaciones (23) converge pues ciertamente dentro de un intervalo de tiempo de 0,07 segundos.

Para valuar un límite superior por el tiempo de validez de esta aproximación podemos notar que la expresión $\log [1 - \vartheta t : (1 + \beta J_0)]$ que comparece en J_2 pierde todo sentido real cuando $\vartheta t : (1 + \beta J_0) \geq 1$, es decir, con los valores numéricos propuestos,

$$\vartheta t \geq 19,36 \quad t \geq 0'',09.$$

Por otra parte hemos visto que, para $t = \infty$, $J = 0$, al cual corresponde la intensidad de corriente $i = E : R$. Prácticamente se considera alcanzada la marcha de régimen cuando i difiere de este valor límite en menos de 10^{-3} , lo que corresponde, en el caso considerado, a ser

$$J < 4,23 \cdot 10^{-5} \quad t > 0'',142$$

El tiempo al cual corresponde la convergencia de la suce-

sión (23) es pues acerca de la mitad del tiempo dentro del cual puede interesar el estudio del fenómeno. Notemos además que no hemos tenido en ninguna consideración la eventual lentitud de la convergencia, la que resultará cierto un inconveniente apreciable para valores relativamente elevados de t (dentro de dicho intervalo 0-0,07).

Un expediente para obviar al menos parcialmente a estos inconvenientes podría ser, en el caso que estamos tratando, de tomar como valores iniciales, en lugar de $J = J_0$, $t = 0$, un valor de J próximo al calculado J^* y el correspondiente valor de t , que se calcula inmediatamente por la ecuación (21) (1). Pero queremos ahora mostrar como, según lo hemos señalado en el n. 8, es posible de cambiar radicalmente las condiciones de convergencia con cambiar la forma de la ecuación propuesta en otra equivalente.

11. La ecuación (21) puede escribirse, pasando de logaritmos a números,

$$\frac{J}{J_0} e^{\beta t} = e^{\beta(J_0 - J)}.$$

Pongamos por brevedad

$$J : J_0 = x, \quad \beta J_0 = \lambda;$$

resulta

$$x e^{\beta t} = e^{\lambda(1-x)} = -\lambda x + (e^{\lambda(1-x)} + \lambda x) = -\lambda x + g(x). \quad (25)$$

La función $g(x)$ es, a menos de un factor numérico, la misma función que hemos llamado g en la teoría general del n. 8; en efecto, para $t = 0$ la (25) se realiza por $x = 1$; además

$$g'(x) = -\lambda e^{\lambda(1-x)} + \lambda;$$

luego $g'(1) = 0$. De (25) se deduce

$$x = \frac{g(x)}{e^{\beta t} + \lambda}$$

(1) Repitiendo cálculos análogos a los anteriores se verifica que el provecho resultante sería muy pequeño.

y, según la teoría general del n. 8, la sucesión de las funciones

$$x_0 = 1 \quad x_i = \frac{g(x_{i-1})}{e^{\theta t} + \lambda} = \frac{e^{\lambda(1-x_{i-1})} + \lambda x_{i-1}}{e^{\theta t} + \lambda} \quad (26)$$

converge hacia la solución de la ecuación (25) o de su equivalente (24) para valores de t bastante próximos a 0.

En lugar de aplicar las fórmulas generales para acotar el campo en el cual se realiza esta convergencia, nos convendrá (y será instructivo) estudiar directamente la fórmula (26).

Notamos en primer lugar que los únicos valores de x que nos interesan son los contenidos en el intervalo $1-0$, correspondiendo, por nuestra ecuación (24), los valores $x=1$ y $x=0$ respectivamente a los valores $t=0$ y $t=\infty$, de t . Para estos valores de x

$$\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{e^{\theta t} + \lambda} = \frac{-\lambda(e^{\lambda(1-x)} - 1)}{e^{\theta t} + \lambda} < 0;$$

de donde sigue que, si en (26) ponemos, en lugar de x_{i-1} , dos valores $x' < x''$, los valores correspondientes de la expresión serán el primero mayor del segundo. Notando además que si conociéramos el valor buscado de x , poniendo en la (26) $x_{i-1} = x$, resultaría $x_i = x$, se concluye que, mientras los valores tomados por x_{i-1} estén comprendidos entre 1 y 0, será siempre $x_i \geq x$ según sea $x_{i-1} \leq x$; y, sin conocer x , los dos casos se distinguen por ser $x_i \geq x_{i-1}$. Poniendo

$$x_{i-1} = x_0 = 1,$$

obtenemos

$$x_1 = \frac{1 + \lambda}{e^{\theta t} + \lambda} \leq 1,$$

realizándose el signo = sólo para $t=0$. Por la observación anterior será pues

$$x_0 > x > x_1. \quad (27)$$

Formando ahora

$$x_2 = \frac{g(x_1)}{e^{\theta t} + \lambda},$$

en razón de (27) será

$$x_1 < x < x_2$$

Supongamos que sea además $x_2 < x_0$; si en este caso aplicamos la regla expresada por (26) para calcular los números x_3, x_4, \dots , obtendremos sucesivamente

$$x_2 > x > x_3 > x_1,$$

$$x_1 < x_3 < x < x_4 < x_2,$$

y así siguiendo.

Resulta por consecuencia definida una sucesión de aproximaciones x_i tal que las de índice impar y las de índice par constituyen dos sucesiones respectivamente creciente y decreciente; por lo tanto (en cuanto cada una de ellas constituye una acotación para la otra) cada una tiende a un límite y entre estos dos límites queda comprendido el valor x , solución de (25). Las dos sucesiones aproximan este x respectivamente por defecto y por exceso, si podemos mostrar que el límite sea único. Para establecer este último punto, indiquemos respectivamente con X_1 y X_2 los dos límites, suponiéndolos por un momento distintos. Por razón de continuidad se realizarán las dos igualdades

$$X_1 = \frac{e^{\lambda(1-X_2)} + \lambda X_2}{e^{\eta t} + \lambda}, \quad X_2 = \frac{e^{\lambda(1-X_1)} + \lambda X_1}{e^{\eta t} + \lambda}$$

y por lo tanto también la ecuación (independiente de t)

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{e^{\lambda(1-X_2)} + \lambda X_2}{e^{\lambda(1-X_1)} + \lambda X_1}.$$

Considerando X_1, X_2 como dos variables cartesianas, esta ecuación representa una curva que se compone de dos ramas, una formada por la recta $X_1 - X_2 = 0$ y la otra cuya ecuación se escribiría muy fácilmente como desarrollo en serie; pero, sin

tampoco escribirla, se puede ver que será simétrica en $X_1 X_2$ ⁽¹⁾; de esta simetría resulta que, en los eventuales puntos de intersección de esta segunda rama con la dicha recta, su tangente le será perpendicular. Resulta de acá que, si para un particular valor de t los límites X_1, X_2 coinciden, lo mismo debe ocurrir para cualquier valor t . En efecto, variando t con continuidad, variarán con continuidad también X_1 y X_2 , sus derivadas respecto a t satisfaciendo a las relaciones

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{-\lambda(e^{\lambda(1-X_2)} - 1)}{e^{\theta t} + \lambda} \frac{dX_2}{dt} - \theta e^{\theta t} \frac{X_1}{e^{\theta t} + \lambda}$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{-\lambda(e^{\lambda(1-X_1)} - 1)}{e^{\theta t} + \lambda} \frac{dX_1}{dt} - \theta e^{\theta t} \frac{X_2}{e^{\theta t} + \lambda},$$

la segunda de las cuales se obtiene de la primera simplemente cambiando X_1 y X_2 . Se sigue que, para $X_1 = X_2$, será también $\frac{dX_1}{dt} = \frac{dX_2}{dt}$, es decir, que la curva recorrida, al variar t , por el punto (X_1, X_2) , en un punto donde las coordenadas sean iguales, debe tener por tangente la recta $X_1 = X_2$; es decir que, saliendo de una posición en la que $X_1 = X_2$ nuestro punto (X_1, X_2) debe seguir moviéndose sobre la rama rectilínea.

Se tiene ciertamente $X_1 = X_2$ cuando t es suficientemente grande. En efecto de (26) se calcula enseguida

$$x_{i+1} - x_i = \frac{e^{\lambda}(e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i-1}}) + \lambda(x_i - x_{i-1})}{e^{\theta t} + \lambda}$$

$$= \frac{(e^{\lambda} - \lambda e^{-\lambda \xi} + \lambda)(x_i - x_{i-1})}{e^{\theta t} + \lambda}$$

donde ξ es un número medio entre x_i y x_{i-1} ; siendo por tanto $0 < \xi < 1$, resulta $-\lambda(e^{\lambda} - \lambda e^{-\lambda \xi} + \lambda) = -\lambda(e^{\lambda(1-\xi)} - 1) < 0$, lo que ante todo demuestra nuevamente que $x_{i+1} - x_i$ y $x_i - x_{i-1}$ tienen signos opuestos, es decir que cada x_i está comprendido entre el que precede y el que sigue. Resulta además que

$$|x_{i+1} - x_i| < \frac{\lambda(e^{\lambda} - 1)}{e^{\theta t} + \lambda} |x_i - x_{i-1}|,$$

⁽¹⁾ Basta notar que, reduciendo a forma entera la ecuación anterior, resulta antisimétrica, y que igualmente es antisimétrico el factor $X_1 - X_2$.

de donde se sigue que, a lo menos por t bastante grande, las distancias $|x_i - x_{i-1}|$ decrecen más que los términos de una progresión geométrica de razón tan pequeña como se quiera, lo que asegura la convergencia de las x_i hacia un límite único.

12. La condición $x_2 < x_0 = 1$ se realiza ciertamente si $\vartheta t \geq \lambda$, porque, en este caso es siempre (para $x < 1$)

$$g(x) < e^\lambda + \lambda \leq e^{\vartheta t} + \lambda;$$

pero podría no realizarse si $\vartheta t < \lambda$; más podría en este caso la fórmula recurrente (26) resultar divergente⁽¹⁾. Nos sirve empero entonces notar que la misma fórmula anterior nos permite afirmar que será siempre

$$x > 1 - \frac{\vartheta t}{\lambda} \quad (27)$$

$$x < 1 - \frac{\vartheta t}{\lambda} + \begin{cases} \frac{1}{\lambda} (\log \lambda : \log e)^{(2)} & \text{si } \lambda \geq e \\ \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda < e. \end{cases} \quad (27')$$

En efecto, sustituyendo las dos acotaciones en la fórmula (26) se reconoce con pocos cálculos que las segundas aproximaciones resultantes son respectivamente mayor y menor del valor de partida. Puesto que la diferencia entre las dos acotaciones resulta casi siempre muy pequeña, bastarán entonces pocos ensayos, los que podrán regularizarse por inserción de términos medios, análogamente al método dicotómico estudiado en los n.ºs. 3-4 (o aplicando una observación que haremos más adelante (n. 13)) para encontrar una conveniente aproximación de la solución.

Para aclarar estas observaciones con la aplicación numérica, volvemos al ejemplo del n. 11, considerando valores de t , alrededor de los cuales el primer procedimiento resulta poco convergente o también divergente. Para $t \geq 0,088$ es $\vartheta t > \lambda$ y por tanto es sin más convergente el procedimiento del n. 11. Con-

⁽¹⁾ Ocorre esto cuando $|g'(x)| > e^{\vartheta t} + \lambda$ para x igual a la solución de nuestra ecuación; se dice entonces que este x es punto de repulsión para la fórmula recurrente (26):

⁽²⁾ Nótese que en las fórmulas del n. 10 el \log . se entendía, según acostumbra en las transformaciones analíticas, logaritmo neperiano; aquí escribimos una razón entre logaritmos válida respecto a cualquier sistema y por tanto adecuada a los cálculos numéricos.

sideremos al contrario los casos $\vartheta t = 17$ ($t = 0'', 081$) y $\vartheta t = 9$ ($t = 0'', 043$); siendo $\lambda = 18,36 > e$, calculamos

$$\log. \lambda : \log. e = 2,9, \quad \frac{\log \lambda : \log e}{\lambda} = 0,158;$$

para $\vartheta t = 17$, x está comprendido entre 0,075 y 0,233;

para $\vartheta t = 9$, x » » » 0,51 y 0,668.

Notemos que, maximamente para las primeras tentativas, tratándose principalmente de averiguar si, por dado valor de la x la fórmula recurrente (26) lleva a un valor mayor o menor del valor de partida, pueden hacerse cálculos muy groseros. Teniendo en cuenta además, en nuestro ejemplo, que tratamos con valores de ϑt bastante elevados nos convendrá escribir nuestra fórmula recurrente en la forma aproximada

$$e^{\lambda(1-x)} - \vartheta t - \lambda e^{-\vartheta t} (e^{\lambda(1-x)} - \vartheta t - x)$$

en la cual el segundo término tendrá, para los dos valores de ϑt el orden de magnitud respectivamente de 10^{-6} y 10^{-3} o menor y por lo tanto se puede despreciar.

Se ve entonces muy rápidamente que

para $\vartheta t = 17$

$$\begin{aligned} 0,075 + 0,158 : 2 &= 0,154 < x < 0,232 \\ 0,154 + 0,158 : 4 &= 0,194 > x > 0,1131 \\ 0,194 - 0,158 : 8 &= 0,174 > x > 0,160 \end{aligned}$$

para $\vartheta t = 9$

$$\begin{aligned} 0,51 + 0,079 &= 0,589 > x > 0,234 \\ 0,589 - 0,04 &= 0,549 > x > 0,487 \\ 0,549 - 0,02 &= 0,529 < x < 0,703 \\ 0,529 + 0,01 &= 0,539 < x < 0,585 \\ 0,539 + 0,005 &= 0,544 > x > 0,534. \end{aligned}$$

13. Terminamos este estudio con pocas observaciones complementarias; notamos primero que cualquiera que sea un número positivo μ , la expresión

$$x_i = \frac{e^{\lambda(1-x_{i-1})} + \mu x_{i-1}}{e^{\vartheta t} + \mu} \quad (28)$$

proporciona una fórmula recurrente sobre la cual se pueden repetir consideraciones análogas y que, de converger la sucesión obtenida, tiende a x ; observando que el segundo miembro es una media entre los números $e^{\lambda(1-x_{i-1})}$: $e^{\vartheta t}$ y x_{i-1} , resulta inmediatamente que, si se supone $x_{i-1} < x$, habrá siempre algún valor de μ para el cual resulta todavía $x_i < x$; pero siempre más próximo a x por ser entonces el primer término de la media $> x_{i-1}$. Se verifica fácilmente que se consigue este resultado poniendo

$$\mu = \lambda e^{\lambda(1-x_i-1)},$$

con lo cual (28) se reduce a

$$x_i = \frac{1 + \lambda x_{i-1}}{e^{\vartheta t - \lambda(1-x_{i-1})} + \lambda}.$$

Resulta pues, por aplicación recurrente de esta fórmula, una sucesión que tiende monótonamente a x , sin necesidad de distinguir los casos de $\vartheta t \geq \lambda$ y $\vartheta t < \lambda$, pero con la desventaja de faltar ese criterio para juzgar a cada momento la aproximación lograda que deriva de hacer dicha aproximación por los dos lados; a cada momento bastará sin embargo aplicar lo dicho en el n. 11 por obtener acotaciones superiores.

14. Los procedimientos expuestos se extienden a la resolución de sistemas de ecuaciones de varias variables y a la determinación de funciones implícitas definidas por tales sistemas. Por otra parte los métodos de aproximación penetran por todo lado, como lo dice el título del artículo, en las aplicaciones matemáticas. Pensamos pues volver nuevamente sobre el argumento en números sucesivos del Boletín.

B. Levi

GEOMETRIA Y EXPERIENCIA

En 1657 se había instituido en Florencia la «Accademia del Cimento», cuyo lema fué el conocido *provando e riprovando*, es decir, la búsqueda experimental; porque, si bien en la investigación de las cosas naturales «non v' à miglior mano di quella della geometria, ..., il fatto è ch' ella ci conduce un pezzo innanzi nel cammino delle filosofiche speculazioni, ma poi ella ci abbandona in sul bello: non perchè la geometria non cammini spazi infiniti ..., ma perchè noi, di questa sì lunga e sì spaziosa via, per anche non le tenghiamo dietro che pochi passi». Encontramos estas palabras en el prólogo de la obra *Saggi di Naturali Esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*, en la cual están resumidas una serie de experiencias hechas durante varios años por aquellos académicos. Para dar una idea de sus medios experimentales y de su modo de entender la investigación física,

damos un resumen de experiencias hechas para decidir acerca de la compresibilidad del agua, según aquel relato.

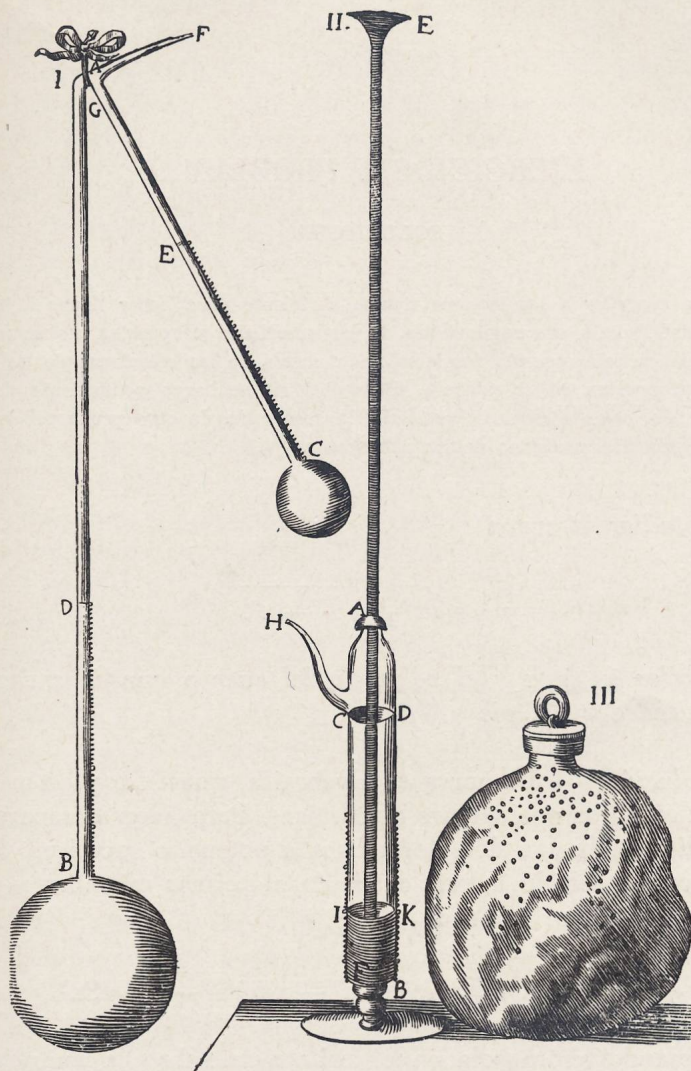
Primera experiencia. Dos esferas de cristal, una mayor que la otra, están unidas en las extremidades de dos tubos A B y A C, se llenan ambas de agua hasta D, E y se colocan en sendos recipientes de hielo. Se cierra luego el orificio F y sacando la esfera B del hielo se calienta sucesivamente del agua templada al agua hirviente, manteniendo la esfera C sumergida en hielo. Si el agua se comprime, expresan los académicos, la presión del vapor que sale de A deberá hacer descender el nivel del agua en C por debajo del punto E. Pero a nosotros ha sucedido de otro modo, pues dicha presión, primeramente no ha ganado nada y al ir aumentando se ha roto el fondo de la esfera C, sin disminuir en nada apreciable el nivel E.

Segunda experiencia. Un vaso de vidrio A B se llenaba de agua hasta C D y se sumergía en él el tubo E F, por el cual se empezaba a verter mercurio. Empujada por el mercurio, el nivel del agua subía hasta llenar totalmente el vaso de vidrio. Cerrado entonces el orificio H, vertiendo más mercurio por el tubo E F el agua soportará una mayor presión y, caso de comprimirse, debería variar el nivel I K. Nosotros, dicen, por una carga de 80 libras de mercurio a lo largo de 4 brazos de tubo, no hemos logrado modificar el nivel I K del grueso de un cabello.

Tercera experiencia. Se hizo construir una grande, pero delgada, esfera de plata, la cual después de llenarla totalmente de agua enfriada al hielo se cerraba herméticamente. Golpeándola ligeramente por todos lados, la esfera tenía que disminuir su capacidad, reduciendo el volumen del agua. Pero sucedió que a todo golpe se veían transpirar gotas de agua a través de los poros del metal.

No queremos comentar estas experiencias, cuyos puntos débiles (de la primera principalmente) podrían sernos señalados por algún lector. La segunda experiencia es la más próxima a nuestro piezómetro. En la lámina de al lado reproducimos en tamaño reducido una de las láminas del libro citado en la edición hecha en Nápoles en 1714; reproducimos también, por su interés histórico-filosófico, el párrafo final de la descripción, cuya traducción es:

He aquí lo que de estas tres experiencias hemos sabido recoger. Si pues, repitiendo las mismas dentro de vasos de mayor resistencia, y sí, por crecer en la primera la rarefacción del agua e igualmente la fuerza de presión del aire en la segunda el largo del cilindro de mercurio y en la última haciendo más y más gruesa la plata de la esfera, se llegase una vez a comprimir el agua, eso no podemos decir. Lo siguiente es indudable, que el agua a comparación del aire resiste, por decirlo así, infinitas veces más a la presión; lo cual confirma lo que desde el principio se dijo, que aun cuando la experiencia no llegue siempre a la última verdad que buscamos, sería absurdo pensar que no nos enseñe alguna pequeña luz.



Ecco quanto da queste tre esperienze abbiamo saputo racorre. Se poi replicate le medesime dentro a vasi di maggior resistenza, e se crescendo nella prima la rarefazione dell'acqua, e sì la premente forza dell'aria, nella seconda l'altezza del cilindro dell'argento vivo, e nell'ultima facendo successivamente più, e più ricca d'argento la grossezza della palla, s'arrivasse una volta a comprimer l'acqua, ciò non possiam noi dire. Questo è infallibile, che l'acqua in paragone dell'aria resiste, per così dire, per infinite volte più alla compressione, il che conferma ciò che s'è detto da principio, che quantunque l'esperienza non giunga sempre all'ultima verità ricercata, vuol ben dir cattivo, che alcun piccolo lume non ne dimostri.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

Para conceder a los lectores tiempo suficiente para hacer llegar a la dirección del Boletín sus resoluciones de las cuestiones propuestas, no se publica todavía en este segundo fascículo nada acerca de las soluciones de los problemas propuestas en el primero. Pensamos sin embargo conveniente dar a continuación, como ejemplo y estímulo, la resolución de otro problema de naturaleza parecida a alguno de los propuestos.

Estudiar la curva

$$y = 2\sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (1)$$

Hallar su área y el volumen del cuerpo que engendra al girar alrededor del eje y ⁽¹⁾.

Solución. — La curva es algebraica, pues x e y están enlazadas sólo por operaciones algebraicas. Para hacer desaparecer los radicales, bastan dos elevaciones a potencias sucesivas. Primeramente, pasando la raíz cuadrada al primer miembro y elevando al cubo se obtiene

$$y^3 + 3y(a^2 - x^2) \mp (3y^2 + a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} = 8x^2 \quad (2)$$

Dejando ahora sola en el primer miembro la única raíz que ha quedado y elevando al cuadrado, queda finalmente

$$(3y^2 + a^2 - x^2)^2 (a^2 - x^2) = (8x^2 - y^3 - 3a^2y + 3yx^2)^2 \quad (3)$$

⁽¹⁾ La curva aquí estudiada es una, salvo el coeficiente 2 del primer radical, de las que están dibujadas como ejemplo de figuras decorativas obtenidas por ecuaciones algebraicas, en las láminas de *Algebraic ornaments* publicadas en *SCRIPTA MATHEMATICA*. Vol. VII (1940).

En esta forma se ve que la ecuación de la curva es de grado 6, o sea, es una *séxtica*.

Conviene sin embargo notar que no todos los puntos de la curva (3) realizan a (1). En efecto, por la primera elevación al cubo se han introducido las soluciones que resultan de considerar los tres valores de la raíz cúbica $\sqrt[3]{x^2}$, y por tanto la curva (3) contendrá los puntos de (1) y además los que satisfacen las ecuaciones

$$y = 2\omega \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad \left(\omega = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right) \quad (4)$$

lo cual se puede comprobar observando que, operando sobre cualquiera de estas expresiones (4) tal como se hizo con (1), se llega siempre a (2) y por tanto a (3).

Para ver la posición de la curva respecto la recta del infinito, consideremos la ecuación racionalizada (3).

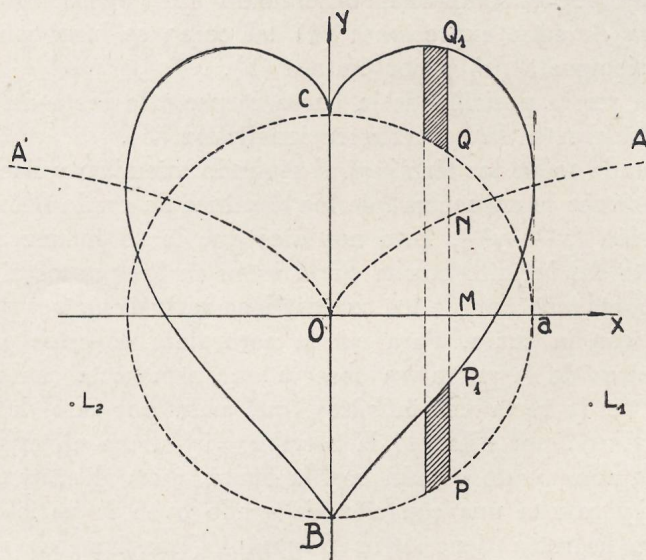
Pasando todos los términos al segundo miembro y haciendo las operaciones se encuentra que los términos de grado 6 forman la expresión $(x^2 + y^2)^3$. Esto nos dice que las 6 intersecciones de la recta del infinito con la curva están en los puntos cíclicos del plano, en cada uno de los cuales dicha recta tiene tres puntos comunes con la curva. Para ver la naturaleza de estos puntos como puntos de la curva, se observa que otra recta cualquiera (distinta de la recta del infinito), que pasa por uno de ellos (sea $(i, 1, 0)$) por ejemplo la recta $x = iy$, tiene en el punto cíclico un solo punto común con la curva, pues al sustituir en (1) $x = iy$ resulta una ecuación de grado 5 en la variable y ; por tanto la recta tiene otros 5 puntos (imaginarios) a distancia finita comunes con la curva. Esto nos dice que los puntos cíclicos son puntos simples para la curva y el hecho de que en ellos la recta del infinito corte triplemente la curva indica que esta recta es tangente y que además los puntos son de inflexión.

Los puntos de la curva con coordenadas reales nos dan las ramas reales de la misma, es decir, lo que se llama la forma de la curva.

Consideremos primero la ecuación de la curva en su forma explícita (1). Se observa que, por contener sólo potencias pares de x , la curva es simétrica respecto al eje y . Además y

toma únicamente valores reales para $-a \leq x \leq a$ y por tanto bastará estudiar la curva en el intervalo $0 \leq x \leq a$.

La curva se compone de la adición de la cúbica $y_1 = 2 \sqrt[3]{x^2}$ y la circunferencia $y_2 = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Para dibujar la primera se observa que y_1 toma siempre valores positivos y que $y'_1 = \frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ vale infinito en el origen, manteniéndose en los demás puntos de signo constante para $x > 0$ y también para $x < 0$; además esta derivada es monótona y decreciente en valor absoluto en las dos ramas; la curva tiene pues la forma A'O A indicada de puntos en la figura.



Una vez dibujada la cúbica y_1 , la curva del enunciado se obtiene por puntos, tomando a partir de los de la circunferencia de radio a , segmentos como PP_1 , QQ_1 iguales al valor correspondiente MN de la cúbica y_1 . En los puntos $C(c, a)$ y $B(0, -a)$ la derivada

$$y' = y'_1 + y'_2 = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

vale infinito y por tanto la tangente es paralela al eje y . Por ser la curva simétrica respecto el eje y , en cada uno de estos

puntos dicho eje tendrá por lo menos 3 puntos comunes con la curva; pero por ser la curva de sexto orden no puede ser cortada por ninguna recta en más de 6 puntos y por consiguiente en B y C la curva y el eje y tendrán tres puntos comunes confundidos: B y C son por tanto puntos *cuspidales*.

Resulta así en definitiva la curva en forma de corazón dibujada en la figura de un trazo continuo.

Si en lugar de considerar la curva definida por (1) se considera la definida por (3), hemos visto que se añadían los puntos cuyas coordenadas satisfacen a alguna de las ecuaciones (4). Para ver si entre estos puntos hay alguno con coordenadas reales, observemos que para que la ordenada y dada por (4) sea real es necesario que $\sqrt{a^2 - x^2}$ sea imaginario y tenga el mismo valor, con signo cambiado, que la parte imaginaria del primer sumando, o sea

$$\sqrt{3} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Debe por tanto primero ser $x^2 > a^2$; poniendo $x^2 = \xi + a^2$ y racionalizando, esta ecuación se reduce a

$$\xi^3 - 27(\xi + a^2)^2 = 0$$

la cual, según se ve inmediatamente por la regla de Descartes, tiene una sola raíz positiva. Llamando ξ_1 a esta raíz, le corresponderán dos valores para la abscisa x:

$$x = \pm \sqrt{\xi_1 + a^2}; \quad (5)$$

pero para cada una de las ramas representadas por (4) le corresponderá un solo valor para la ordenada y en cuanto, para obtener un valor real, habrá de elegir el signo en (5) siempre de manera que se reduzcan entre sí los términos imaginarios provenientes del primero y del segundo término. El valor real de y resultará expresado en todo caso por

$$y = -\sqrt[3]{x^2} = -\sqrt[3]{\xi_1 + a^2}.$$

Se obtienen así dos puntos L_1, L_2 , simétricos respecto al eje y que son puntos aislados de la curva de ecuación (3) y son los únicos puntos reales cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (3) pero no a la (1). Para cada uno pasan ambas

ramas (4), es decir que se trata de puntos dobles de la curva. Se sabe, por otra parte, que es esta una propiedad general de los puntos aislados.

Se pueden también obtener los puntos aislados L_1 y L_2 observando que, siendo necesariamente positivo, por valores reales de x y de y , el segundo miembro de (3) y el primer factor del primer miembro, los únicos puntos reales de la curva de ecuación (3) para los cuales es $x > a$ son aquellos que anulan por separado a los dos miembros; es decir, los puntos de intersección de la cónica $3y^2 - x^2 + a^2 = 0$ y la cúbica $8x^2 - y^3 - 3a^2y + 3yx^2 = 0$, o también de la misma cónica y la cúbica $y^3 + x^2 = 0$ por ser esta última ecuación una consecuencia de las dos primeras. Es fácil comprobar que los puntos así obtenidos son los mismos que se obtienen por el primer procedimiento.

Para hallar el área encerrada por la curva se puede proceder por cálculo integral: El área total F será el doble del área de la parte correspondiente a valores positivos de x , o sea,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F &= \int_0^a (2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}) dx - \int_0^a (2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}) dx \\ &= 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$

y por tanto $F = \pi a^2$. El área buscada es por tanto igual al área del círculo de radio a .

Se podría haber obtenido directamente este resultado, sin necesidad de verificar la integración, observando que, por ser $PP_1 = QQ_1$, para cada valor de la abscisa, el área elemental que se quita del círculo de radio a por su parte inferior, se añade a su parte superior, y por tanto el área no debe variar.

Por la misma razón, siendo el volumen engendrado al girar alrededor del eje y por el elemento de área del círculo correspondiente a PP_1 igual al engendrado por el elemento QQ_1 , resulta que el volumen engendrado por la curva del problema será igual al volumen engendrado por la circunferencia, es decir, igual al volumen de la esfera $\frac{4}{3} \pi a^2$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

7. A partir de un valor arbitrario $a_1 = a$ y siendo A una constante dada, estudiar la sucesión a_1, a_2, a_3, \dots definida por

$$a_{n+1} + \frac{a_n}{r} = A$$

donde r es un número constante. Discutir los casos posibles según sea $|r|$ mayor, igual o menor que 1, indicando cuando dicha sucesión tiene límite. Determinar este límite.

8. Sumar la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$$

(Se aconseja descomponer el término general en partes más simples).

9. Se corta una figura convexa del plano por n rectas tales que nunca pasen dos por un mismo punto del contorno de la figura ni tres por un mismo punto interior a la misma. Sea p el número de puntos de intersección de estas rectas que son interiores a la figura y r el número de regiones en que queda dividida. Demostrar que

$$r = n + p + 1.$$

10. Sean fijos sobre un plano una recta r y un punto O distante de ella h . Se traza una circunferencia cualquiera que pase por O y corte a r en dos puntos A y B . Llamando R al radio de la circunferencia, demostrar que se verifica

$$OA \cdot OB = 2Rh.$$

11. Hallar el radio del círculo para el cual a un arco de longitud dada corresponde un segmento de área máxima.

12. Se considera la curva representada paramétricamente por

$$x = \frac{2a}{\lambda^2 + 1} \quad y = \frac{2a}{\lambda(\lambda^2 + 1)}$$

Determinar la ecuación cartesiana y los puntos del infinito de la curva; expresar paramétricamente la condición para que tres puntos de la curva sean alineados o cuatro de ellos concíclicos; determinar la envolvente de las cuerdas comunes a la curva y a sus círculos osculadores, y observar la relación que esta envolvente guarda con la curva primitiva. Hallar el área comprendida entre la curva y la recta $x=2a$ y el volumen engendrado por esta área al girar alrededor de la misma recta.

13. Demostrar: si las tres raíces de la ecuación $x^3 - 3qx + r = 0$ son reales, cada una de ellas es menor que $2\sqrt{q}$; pero si una sola de las raíces es real, su valor es superior a $2\sqrt{q}$.

CUESTIONES

4. Sobre los puntos medios de los lados de un triángulo se trazan las perpendiculares a los lados y se consideran sobre ellas tres puntuales semejantes, siendo puntos correspondientes los puntos medios de los lados, razón de semejanza la razón entre los lados correspondientes y sentidos homólogos los dirigidos hacia el exterior del triángulo. Sean M_1, M_2, M_3 tres puntos homólogos.

Demstrar que las rectas AM_1, BM_2, CM_3 , que unen estos tres puntos respectivamente con los vértices opuestos, pasan por un punto.

Determinar el lugar geométrico de estos puntos al variar la terna M_1, M_2, M_3 .

Generalizaciones proyectivas.

FLORES Y HOJAS

I. Un coche se mueve con la velocidad v ; un viajero deja caer del coche una piedra de masa m ; al llegar a tierra la piedra golpeará el suelo con una energía $\frac{1}{2} m v^2$ (abstracción hecha de la energía adquirida por efecto de la gravedad). Si empero el viajero imprime a la piedra una velocidad v respecto al coche (empleando por esto una energía $\frac{1}{2} m v^2$) la piedra golpeará el suelo con la energía $\frac{1}{2} m (2v)^2 = 2 m v^2$. En el caso de ser cierta la conclusión, ¿de dónde proviene la mayor energía adquirida por la piedra?

II. Dónde está equivocado el razonamiento siguiente:

Se sabe que para cada punto de una cuádrica pasan dos generatrices (reales o imaginarias); consideremos una cuádrica de revolución y uno de sus puntos sobre el eje de rotación; consideremos también por este punto una de las generatrices. Haciendo girar la figura alrededor del eje, la cuádrica gira sobre sí misma y la generatriz considerada recorre un cono o, por lo menos, un plano. Se concluye que de cada cuádrica de rotación son partes conos o planos.

ERRATA

En el último término del primer miembro de la fórmula en el ejercicio 1 (fase. 1º p. 34) el último factor debe leerse $2/1$, como aparece claramente de la estructura de dicho término.

BIBLIOGRAFIA

C. E. WEATHERBURN. *An introduction to Riemannian Geometry and Tensor Calculus*. Cambridge University Press, 1938. Un volumen de 192 pág.

Los propósitos del Autor al escribir el presente libro están claramente expresados por el mismo en el prólogo: "suministrar un puente entre la geometría diferencial del espacio euclidiano de tres dimensiones y los trabajos más avanzados sobre geometría diferencial de espacios generalizados. El instrumento empleado es el cálculo tensorial, habiendo procurado conservar los desarrollos analíticos en la forma más simple posible y hacer resaltar el aspecto geométrico de los problemas".

Los dos primeros capítulos están dedicados a exponer algunos preliminares que luego han de utilizarse (determinantes, matrices, ecuaciones lineales, formas cuadráticas) junto con los principios y reglas operatorias del cálculo tensorial y del cálculo vectorial en el espacio de n dimensiones.

En el Cap. III empieza la geometría de los espacios de Riemann, estudiando la métrica sobre una hipersuperficie y algunas nociones sobre sistemas ortogonales de hipersuperficies y congruencias de curvas.

Los Cap. IV y V están dedicados: uno a la definición de los símbolos de Christoffel y operaciones con ellos y otro a la aplicación de este simbolismo al estudio de las líneas geodésicas y del paralelismo de Levi-Civita.

El Cap. VI trata de las congruencias de curvas; y enunplas ortogonales.

En el Cap. VII estudia la curvatura de los espacios de Riemann siguiendo el método clásico y usual en la mayoría de los libros que tratan de la materia.

En el Cap. VIII se expone de manera muy interesante la generalización a hipersuperficies de las principales propiedades que suelen estudiarse en la teoría elemental de las superficies del espacio de tres dimensiones. Obtiene la expresión de la curvatura de una curva sobre una hipersuperficie y de la curvatura de las secciones normales, generalizando los teoremas de Meusnier y de Euler. Define y obtiene las ecuaciones de las líneas de curvatura y de las líneas asintóticas de una hipersuperficie y finalmente deduce las relaciones de Mainardi-Codazzi.

El Cap. IX está dedicado a las hipersuficies del espacio euclidiano y a los espacios de curvatura constante. Dedicó especial atención al estudio de las euádricas de un espacio de n dimensiones, basándose en anteriores trabajos del autor.

El último capítulo (Cap. X) se refiere a los subespacios de un espacio de Riemann, estudiando de nuevo la curvatura de sus líneas y secciones normales (teorema de Meusnier e indicatriz de Dupin) y las direcciones asintóticas, conjugadas y principales que pasan por un punto.

Como final trae una nota histórica con la evolución, a grandes rasgos, de la geometría diferencial de espacios de más de tres dimensiones, desde los trabajos fundamentales de Gauss y Riemann hasta las generalizaciones más recientes, inclusive las geometrías no riemannianas.

Un índice bibliográfico bastante extenso, ordenado por años, completa la nota histórica y termina el libro.

Como introducción a la geometría riemanniana la obra puede ser útil a quienes conozcan ya la parte fundamental de la geometría diferencial clásica de tres dimensiones. También puede ser útil, como iniciación, a los estudiantes que piensen dirigirse al estudio del aspecto matemático de la teoría de la relatividad.

Cada capítulo termina con bastante numerosos ejemplos, en general muy interesantes, para practicar las materias tratadas, y entre los cuales se encuentran también, expuestas brevemente, cuestiones de interés no comprendidas en la parte expositiva.

L. A. SANTALÓ

S. STOÏLOW. *Leçons sur les principes topologiques de la theorie des fonctions analytiques*. Collection de monographies sur la theorie des fonctions publiées sous la direction de M. E. Borel. — París, Gauthier Villars, 1938. Un volumen de 148 páginas.

El hecho de que a cada función analítica se le pueda hacer corresponder una superficie (superficie de Riemann) sobre la cual la función sea uniforme, constituye el punto por donde la teoría de funciones analíticas se enlaza con la topología. El presente libro constituye un estudio de las superficies de Riemann y sus relaciones con las funciones que las determinan.

El capítulo primero consta de dos partes. En la primera se exponen las definiciones fundamentales referentes a conjuntos de puntos y sus distintas clases, espacios abstractos y transformaciones topológicas. La segunda parte está dedicada a la demostración del importante teorema de Brouwer referente a la conservación de los conjuntos abiertos en toda transformación topológica. Como consecuencia queda establecida la imposibilidad de que exista una correspondencia topológica entre dos espacios euclidianos de distinto número de dimensiones.

El título del segundo capítulo es "Las superficies de Riemann y las funciones correspondientes". Empieza por definir las superficies de Riemann como espacios abstractos, viendo luego como a toda función analítica de una variable compleja se le puede hacer corresponder una de tales superficies. La última parte, la más extensa de este capítulo II, está dedicada a la demostración de la propiedad inversa, es decir, que a toda superficie de Riemann dada, corresponde una función analítica (y aún una infinidad de ellas) cuya superficie de Riemann es la dada.

El Cap. III trata de las propiedades topológicas de las superficies de Riemann. Empieza por exponer las definiciones y propiedades principales de la topología de superficies. Llama "superficie topológica" a toda variedad de dos dimensiones que es *triangulable* (Una variedad V de dos dimensiones

se dice *triangulable* cuando se puede descomponer en un número finito o en una infinidad numerable de triángulos sin otros puntos comunes que los vértices o aristas y de tal manera que todo conjunto de puntos *compacto* interior a V únicamente pueda tener puntos en un número finito de dichos triángulos). Expone un ejemplo, debido a Prüfer, de una variedad de dos dimensiones que no es triangulable. Demuestra que las superficies de Riemann son superficies topológicas de acuerdo con la definición anterior, que son además orientables y finalmente la propiedad inversa, de que toda superficie topológica orientable es homeomorfa con una superficie de Riemann.

En el Cap. IV se estudia la clasificación de las superficies de Riemann en tipos topológicos. Cuando se trata de superficies cerradas, el resultado es relativamente simple, obteniéndose que la condición necesaria y suficiente para que dos superficies orientables cerradas sean homeomorfas, es que tengan el mismo género. Para las superficies abiertas hay que añadir a dicha condición (según Kérékjarto) la de que los elementos frontera de primera especie de las dos variedades se correspondan en un homeomorfismo.

En el Cap. V introduce el concepto de *transformación interior* de una variedad V en otra W , llamando de esa manera a toda transformación continua que hace corresponder a todo conjunto abierto de V otro también abierto de W y con la condición, además, de que no transforme ningún continuo de V en un punto único de W . Con esta definición el Autor demuestra el notable teorema siguiente: Si V es una variedad topológica cualquiera (cuyo punto variable sea p) y $W = J(p)$ es una transformación interior de V sobre el plano complejo W , existe siempre una transformación topológica que transforma V en una superficie de Riemann R y a $W = J(p)$ en una función analítica cuya superficie de Riemann sea R'' .

El VI y último capítulo está dedicado a mostrar diversos desarrollos y aplicaciones de la noción de transformación interior a cuestiones de teoría de funciones y topología de superficies.

La obra, escrita con mucha claridad, será seguramente asequible y de gran interés para completar sus distintos puntos de mira, tanto a los cultivadores de la topología como disciplina puramente geométrica, como a quienes se hayan dedicado más especialmente a la teoría de funciones analíticas.