

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Derivadas 5º Año

Matemática

Cód. 1502-19

Prof. Mirta Rosito
Prof. Patricia Godino



Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS

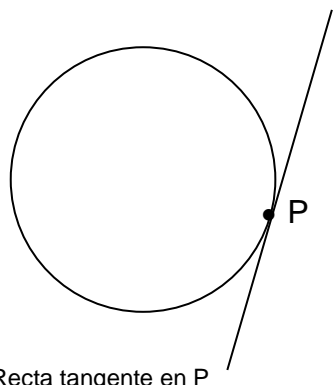
DERIVADAS

I) Introducción

Dos problemas, uno geométrico y otro mecánico, han sido el origen del concepto de derivada. El primero, conocido como el problema de “**la recta tangente a una curva en un punto**”, se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287 – 212 a.C.), y el segundo, más reciente (1500 -1700 d.C), aparece con el intento de describir la velocidad de un cuerpo en movimiento, y es conocido como el problema de “**la velocidad instantánea**”.

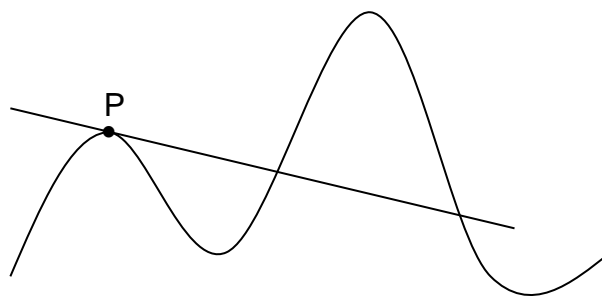
II) El problema de la recta tangente

La noción de Euclides de la recta tangente como una recta que “*toca*” a la curva en un solo punto, está bien dada para la circunferencia (Fig.1), pero es del todo insatisfactoria para la mayoría de las demás curvas (Fig. 2).



Recta tangente en P

Figura 1



Recta tangente en P

Figura 2

Entonces, ¿cómo definimos a la recta tangente a una curva en un punto?

Sea un punto P perteneciente a una curva y sea Q un “*punto móvil*” cercano a P en esa curva. Los puntos P y Q determinan una recta **secante**. La recta **tangente** en P, es la posición límite (si existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva. (Fig. 3)

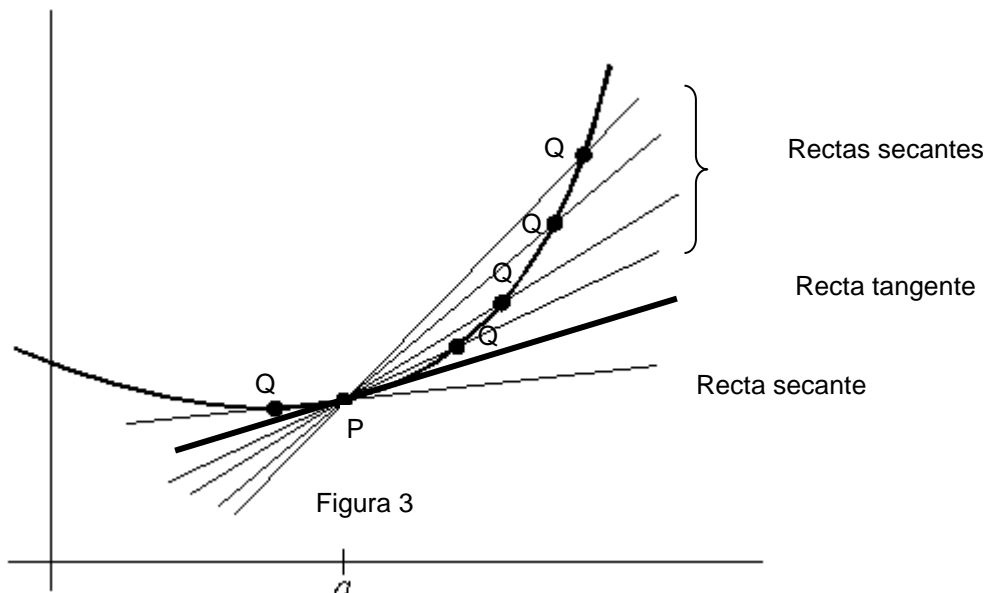


Figura 3



Antes de abordar el problema de la recta tangente debemos definir algunos conceptos previos.

II -1) Cociente incremental

Sea $f: A \rightarrow B$ y sea $c \in A$. Incrementemos c en Δx , de manera que $c+\Delta x \in A$ con $\Delta x \neq 0$. Al pertenecer ambos elementos, c y $c+\Delta x$ al dominio de la función, existen sus correspondientes imágenes como se observa en la figura 4.

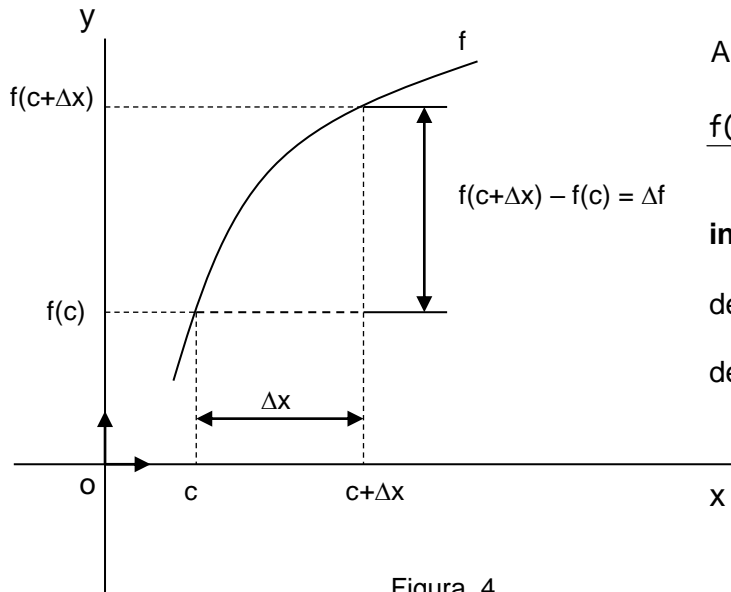


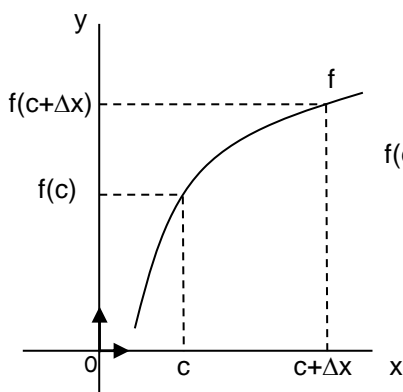
Figura 4

Al cociente,

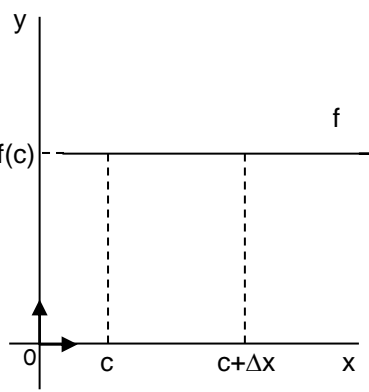
$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ lo llamamos } \mathbf{cociente}$$

incremental, siendo Δf el incremento de la función relativo a un incremento Δx de la variable independiente.

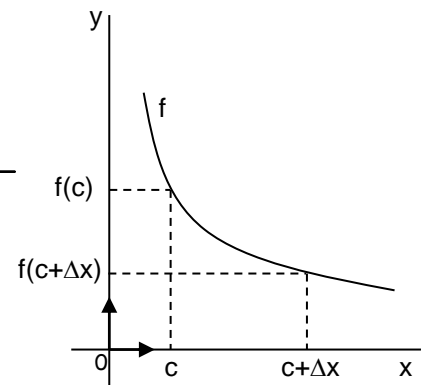
Veamos las distintas situaciones que se pueden presentar:



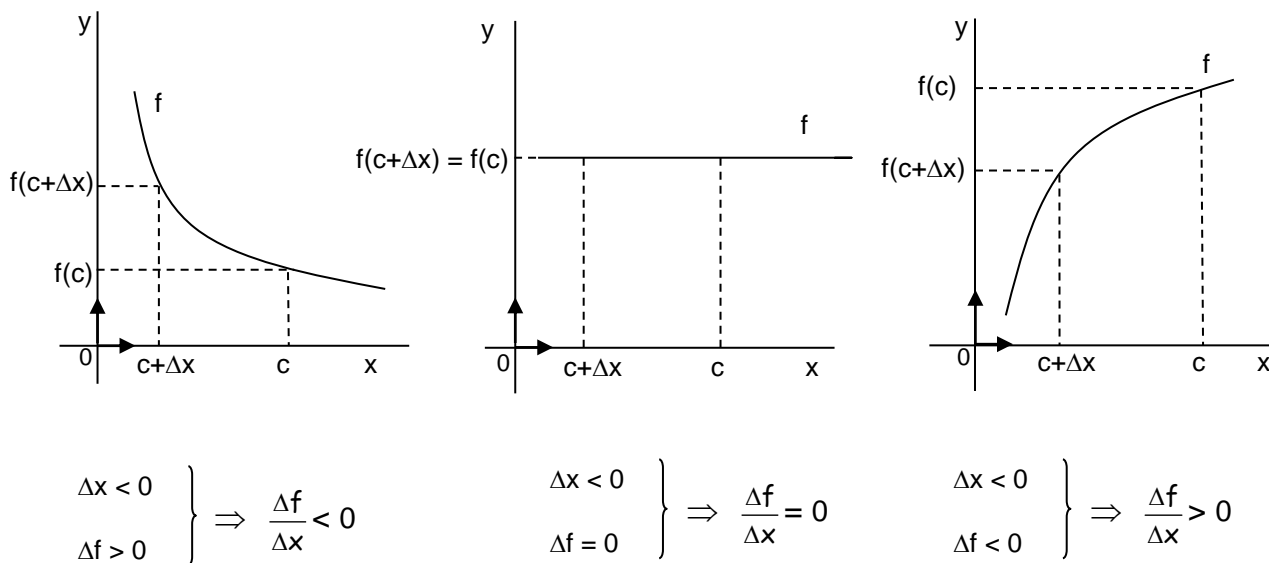
$$\left. \begin{array}{l} \Delta x > 0 \\ \Delta f > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$$



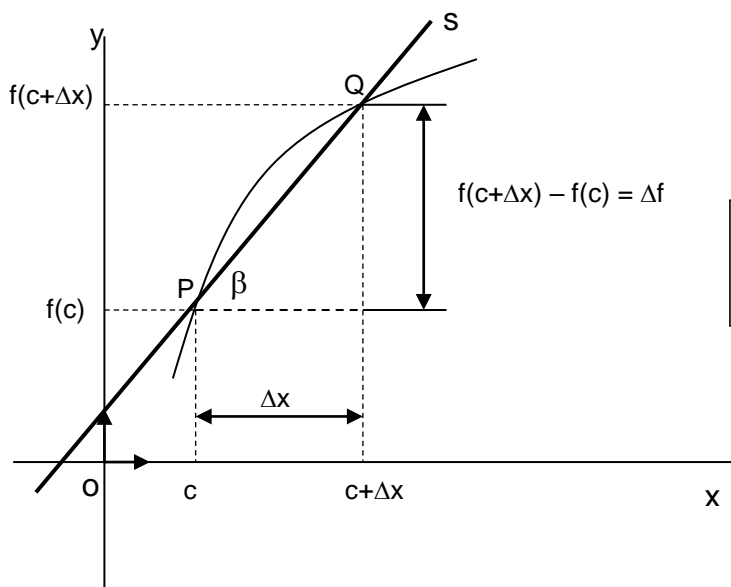
$$\left. \begin{array}{l} \Delta x > 0 \\ \Delta f = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$



$$\left. \begin{array}{l} \Delta x > 0 \\ \Delta f < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$$



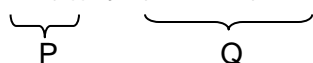
II - 2) Interpretación geométrica del cociente incremental



Si pensamos en la recta secante s determinada por los puntos P y Q su pendiente m_{PQ} es:

$$m_{PQ} = \operatorname{tg} \beta = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Luego, el cociente incremental, es la pendiente de la recta secante determinada por los puntos de coordenadas $(c; f(c))$ y $(c + \Delta x; f(c + \Delta x))$.





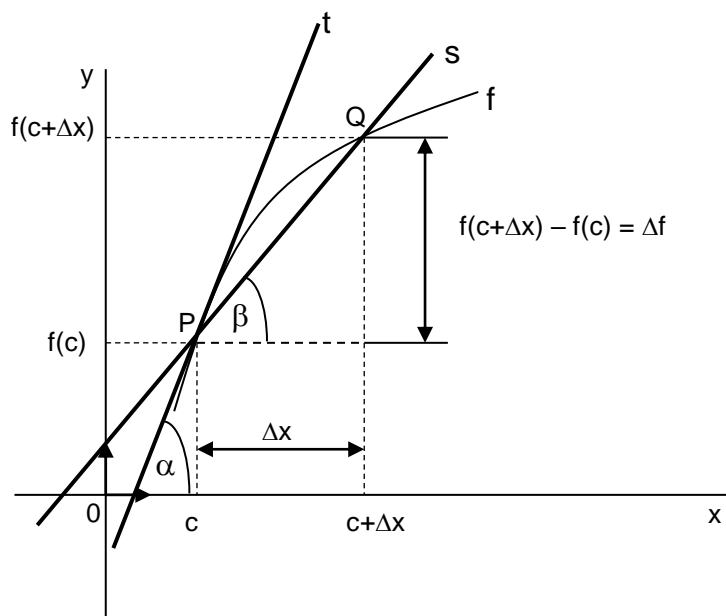
Problemas propuestos:

- 1) Siendo $f(x) = 2x^2 - 1$ y $c = -1$, determina el cociente incremental de la función, correspondiente a un incremento $\Delta x = 3$ de la variable independiente.
- 2) Calcula el ángulo que forma la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, determinada por los puntos de abscisas 2 y 8, con el semieje positivo de las abscisas.

II – 3) Pendiente de la Recta tangente

Trabajando con la gráfica de una función, apliquemos el concepto de recta tangente a una curva.

Sea $f: A \rightarrow B$ con $c \in A$ y $c + \Delta x \in A$



Completa:

Si $\Delta x \rightarrow 0$, el punto móvil $Q \rightarrow \dots\dots\dots$, la recta secante móvil $s \rightarrow \dots\dots\dots$, $\beta \rightarrow \dots\dots$, entonces $\text{tg}\beta \rightarrow \dots\dots\dots$, es decir $m_{PQ} \rightarrow \dots\dots\dots$

Recordando que $m_{PQ} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$, resulta natural definir que $m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Resumiendo:

$$m_t = \text{tg } \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

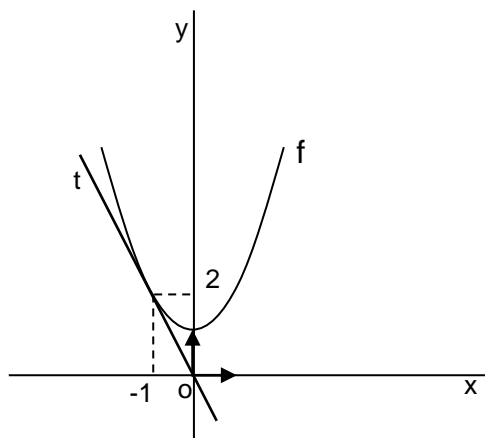
Ejemplos resueltos

- 1) a) Calculemos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto de abscisa igual a (-1).

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + 1] - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-2 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2 + \Delta x) = -2 \Rightarrow \boxed{m_t = -2}$$

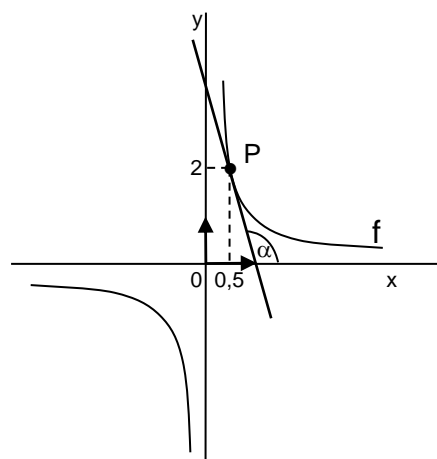
- b) Representemos gráficamente la función y dicha recta. Cotejemos el resultado obtenido en el apartado anterior con lo que observamos en el gráfico.



En el gráfico vemos que la recta tiene pendiente negativa, y que por cada unidad de cambio horizontal, se observan dos de cambio vertical, lo que nos hace concluir que su pendiente es (-2).

- 2) Determinemos el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $P(\frac{1}{2}; 2)$ con el semieje positivo de las abscisas.

Analicemos en forma gráfica la situación:



Hemos simbolizado con α el ángulo que estamos buscando. Sabemos que la $\text{tg } \alpha = m_t$, por lo tanto:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0,5+\Delta x) - f(0,5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{0,5+\Delta x} - \frac{1}{0,5}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{0,5+\Delta x} - 2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - 2(0,5 + \Delta x)}{0,5 + \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - 1 - 2\Delta x}{0,5 + \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2\Delta x}{0,5 + \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{0,5 + \Delta x} = -4 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -4 \end{aligned}$$

luego: $\alpha = 104^{\circ}2'10,48''$

Nota: Observa que la calculadora indica $-75^{\circ}57'49,52'' \Rightarrow \alpha = -75^{\circ}57'49,52'' + 180^{\circ} = 104^{\circ}2'10,48''$. Dicho ángulo se observa en el gráfico en su verdadera amplitud siempre y cuando las escalas en ambos ejes coordenados coincidan.

Problemas propuestos:

- 3) Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en el punto $(1;1)$.
- 4) ¿Qué ángulo forma la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 6$, con el semieje positivo de las abscisas?

II - 4) Derivada de una función en un punto

Definición:

Sea $f: A \rightarrow B$, $c \in A$ y $c+\Delta x \in A \quad \forall \Delta x \neq 0$. Si **existe y es finito** el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$, dicho límite se denomina **derivada de la función f en c** , y se simboliza:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



- Otras notaciones para la derivada:

$$f'(c) = D_f(c) = \frac{d}{dx} f(c)$$

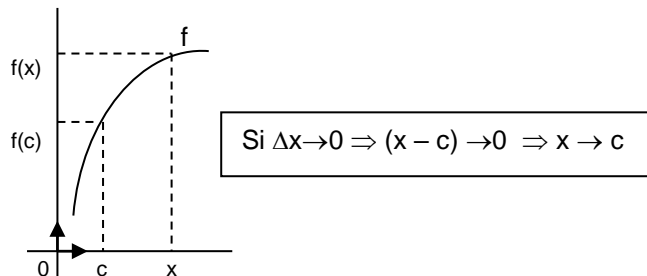
Derivadas

Matemática

- De acuerdo a la definición, la derivada de una función en un punto, si existe, **es un número real**.
- La derivada de una función en un punto, depende de la **función** y del **punto**.

- Es común llamar con "x" a "c+Δx"

$$\text{resultando } f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



Nota: Encontrarás esta definición de derivada en numerosa bibliografía.

- Una función f es **derivable** en un conjunto A si existe $f'(c) \forall c \in A$.
- Podemos interpretar geoméricamente a la derivada de una función en c, si existe, como la pendiente la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (c;f(c)).

En símbolos:

$$f'(c) = m_t$$

Ejemplos resueltos:

- 1) Calculemos $f'(3)$ siendo $f(x) = -3x+1$.

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[-3(3 + \Delta x) + 1] - (-8)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-9 - 3\Delta x + 1 + 8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-3) = -3 \Rightarrow f'(3) = -3 \end{aligned}$$

- 2) Los siguientes límites son derivadas, pero, ¿de qué función? y ¿en qué punto?

a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^3 - 8}{\Delta x}$

Rta: Una solución posible es $f(x) = x^3$ y $c = 2$, otra solución posible es $f(x) = (2+x)^3$ en $c = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{tg } x - \text{tg } 2}{x - 2}$

Rta: Es la derivada de $f(x) = \text{tg } x$ en $c = 2$



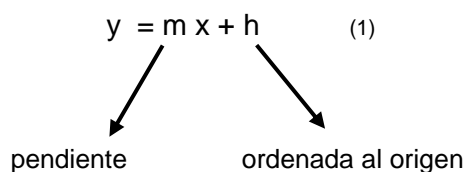
Problemas propuestos:

5) En cada uno de los siguientes apartados, calcula empleando la definición la derivada de la función dada en el valor de **c** indicado:

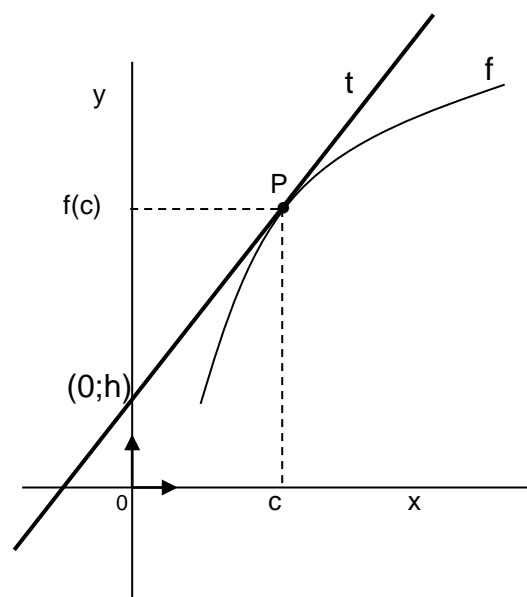
- a) $f(x) = x$ en $c = 4$
- b) $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ en $c = -3$
- c) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ en $c = 2$
- d) $f(x) = \sqrt{x} + 5$ en $c = 7$
- e) $f(x) = x^3 + 5x$ en $c = -1$

II – 5) Ecuación de la recta tangente

Sabemos que la ecuación explícita de una recta no paralela al eje de las ordenadas es:



siendo,



Hemos visto, que la pendiente de la recta tangente a una función **f** en un punto **P (c; f(c))** es $m = f'(c)$, luego reemplazando en (1) resulta:

$$y = \dots\dots\dots + \dots\dots \quad (2)$$

Para calcular **h**, reemplazamos por el punto de tangencia **P**, resultando:

$$f(c) = f'(c) \cdot c + h \Rightarrow h = \dots\dots\dots$$

sustituyendo en (2) :

$$y = \dots\dots x + \dots\dots\dots$$

expresión que se acostumbra a escribir : $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$

Conclusión:

La ecuación de la recta tangente **t** (no paralela al eje de las ordenadas), a la gráfica de una función **f** que pasa por el punto **P(c; f(c))** es:

$$t) \quad y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$$

Derivadas

Matemática

Ejemplo resuelto

Determinemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-3}$ en el punto $P(7; f(7))$.

Para escribir su ecuación necesitamos $f(7)$ y $f'(7)$.

$$\bullet f(7) = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow f(7) = 2$$

$$\begin{aligned} \bullet f'(7) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7+\Delta x-3} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7+\Delta x-3} - 2}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{7+\Delta x-3} + 2}{\sqrt{7+\Delta x-3} + 2} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{7+\Delta x-3})^2 - 2^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{7+\Delta x-3} + 2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7+\Delta x-3-4}{\Delta x \cdot (\sqrt{7+\Delta x-3} + 2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{7+\Delta x-3} + 2)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{7+\Delta x-3} + 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow f'(7) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Luego reemplazando en la ecuación: $t) y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$

$$\text{resulta, } t) y - 2 = \frac{1}{4} (x - 7)$$

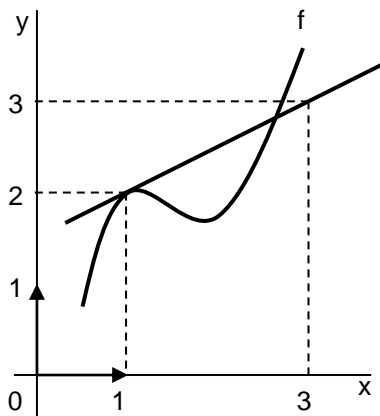
la que es usual expresar en su forma explícita,

$$t) y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

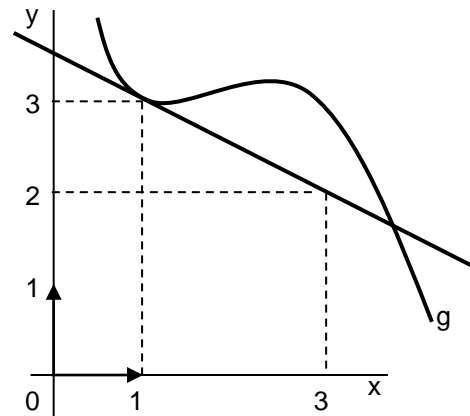
Problemas propuestos:

6) Determina la ecuación de las rectas tangentes a las gráficas de f y g en el punto de abscisa $x = 1$.

a)



b)





- 7) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x+2}$ en el punto de abscisa $x = -1$. Determina el ángulo forma dicha recta con el semieje positivo de las abscisas.

Nota:

Habrás observado cuán laborioso resulta el cálculo de una pendiente o de una derivada por definición. Más adelante retomaremos ambos temas cuando dispongamos de recursos que nos permitirán simplificar el cálculo de las mismas.



- La existencia de derivada de una función en un punto asegura la existencia de recta tangente en el mismo.
(Es evidente que al existir derivada, ese número es la pendiente de la recta, luego la recta existe)
- La no existencia de derivada de una función en un punto no implica la no existencia de recta tangente. Es decir la recta tangente puede existir o no.

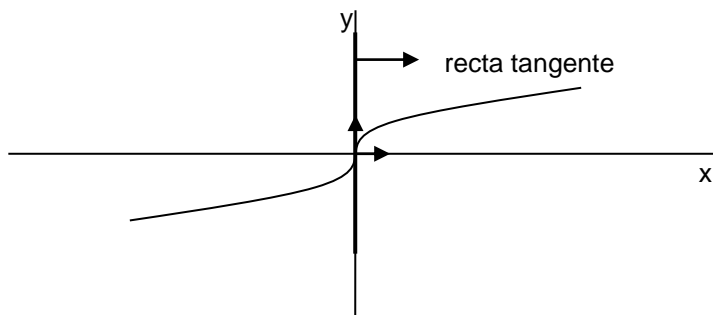
Ejemplos:

- a) Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, observaremos en este ejemplo que en (0;0) la función no es derivable, pero si existe la recta tangente en dicho punto.

Veamos en primer lugar que no es derivable.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x^1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty \text{ (no es finito)} \Rightarrow \text{no existe } f'(0)$$

Observemos que en este caso si existe recta tangente en (0;0)



Es evidente que la recta tangente debe ser paralela al eje y, ya que carece de pendiente.

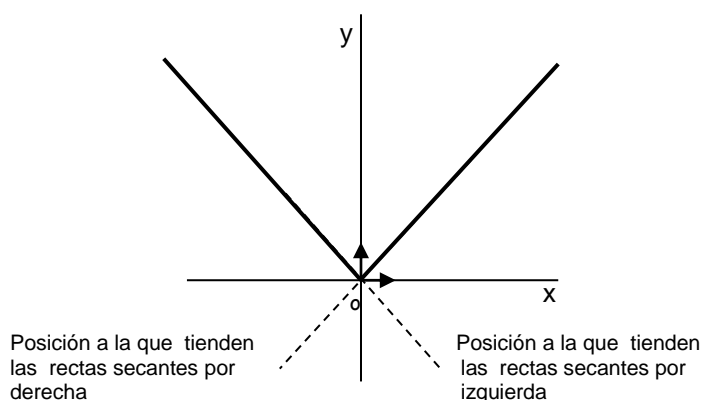
b) Sea $f(x) = |x|$, veamos en primer lugar que esta función no es derivable en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

observemos que este límite no existe, pues $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-1) = (-1), \text{ lo que nos permite concluir que } \mathbf{\text{no existe } f'(0)}$$

En segundo lugar, observemos que en ese punto, tampoco existe recta tangente, ya que no existe una posición límite a la que tiendan las rectas secantes como se ve en la figura.



Un punto como $(0;0)$, donde f es continua, en el cual no existe derivada ni recta tangente, recibe el nombre de **Punto anguloso**.

III) Derivabilidad y continuidad

TEOREMA 1

Se puede demostrar:

Si f es derivable en c , entonces f es continua en c



Observaciones

1) La proposición recíproca no es válida. Veámoslo con un ejemplo.

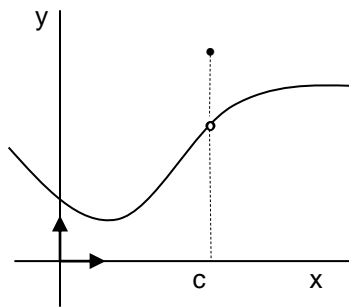
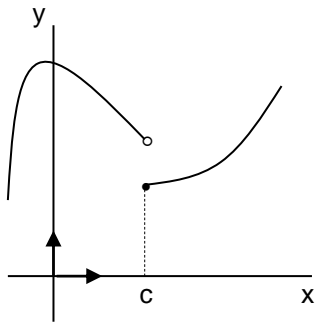
Sabemos que $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$ y por otro lado hemos visto que f no es derivable en $x = 0$. Es decir que sea continua en un punto no asegura que sea derivable en el mismo.

Resumiendo

✓ f derivable en $c \Rightarrow f$ continua en c (por Teorema 1)

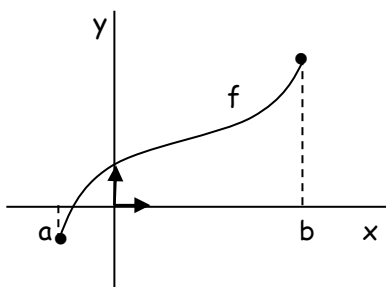
✓ f continua en $c \not\Rightarrow f$ derivable en c (por ejemplo de observación N°1)

2) El teorema 1 también expresa que si f no es continua en c entonces f no es derivable en c .



Podemos interpretar esta observación desde el punto de vista geométrico. Al no ser continua en c la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto $(c; f(c)) \Rightarrow$ no existe $f'(c)$.

3)



Observa que f no es derivable en los extremos del intervalo pues no es posible determinar:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad \text{ni} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

debido a que tanto en a como en b , sólo existe un límite lateral.

Luego, siendo f derivable en el intervalo abierto $(a; b)$, no lo es en el intervalo cerrado $[a; b]$.

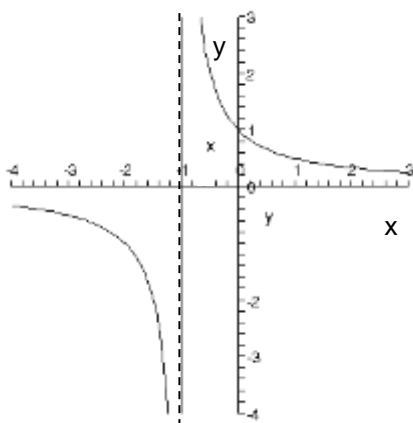
Derivadas

Matemática

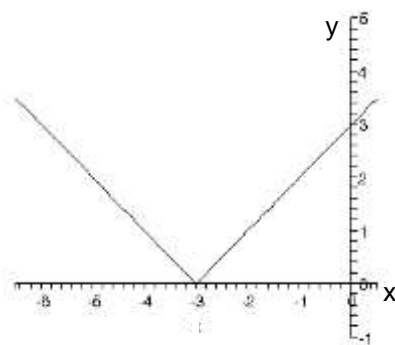
Problemas propuestos:

8) Indica en qué puntos es f derivable.

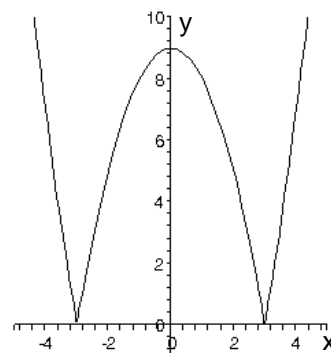
a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$



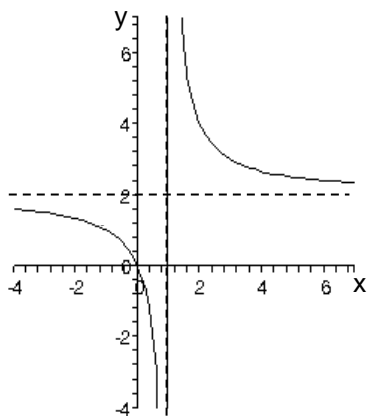
b) $f(x) = |x+3|$



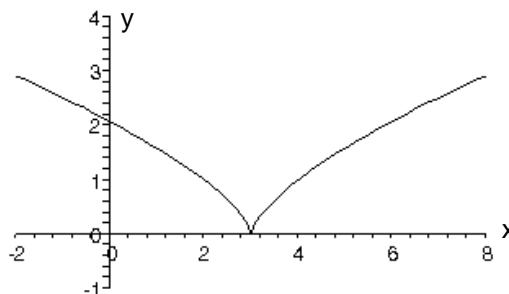
c) $f(x) = |x^2 - 9|$



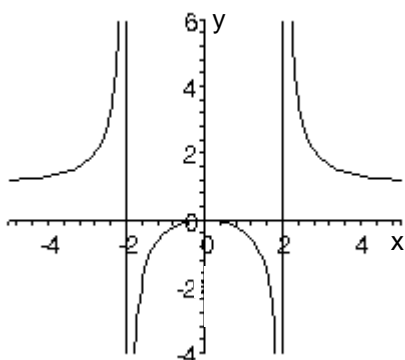
d) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$



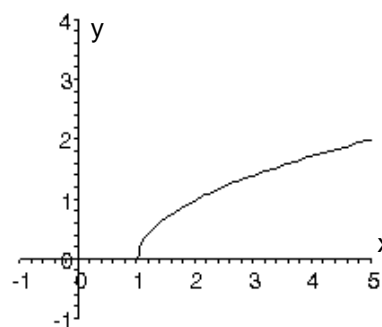
e) $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}}$



f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$



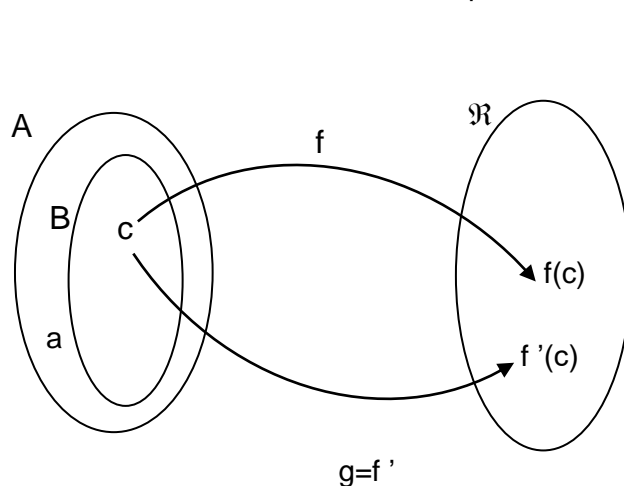
g) $f(x) = \sqrt{x-1}$





IV - Función derivada

Sea $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$, siendo f derivable en $B \subset A$. Se define la función $g : B \rightarrow \mathfrak{R}$ como la función primera derivada de f y se la simboliza $g(x) = f'(x)$, a la función que asigna como imagen, a cada $x \in B$, el valor de la derivada de f en ese punto.



Observa

$a \notin B$, significa que no existe $f'(a)$
 $c \in B$, significa que existe $f'(c)$

Ejemplo resuelto

Determinemos la función derivada de $f(x) = x^2 - 2x$ y luego calculemos $f'(3)$, $f'(0)$ y $f'(-2)$.

Apliquemos la definición de derivada de una función en un punto y calculemos $f'(c)$, para un c genérico del dominio de f .

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(c + \Delta x)^2 - 2(c + \Delta x)] - [c^2 - 2c]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[c^2 + 2 \cdot c \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2c - 2\Delta x] - [c^2 - 2c]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c^2 + 2 \cdot c \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2c - 2\Delta x - c^2 + 2c}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot c \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2c + \Delta x - 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2c + \Delta x - 2) = 2c - 2 \Rightarrow f'(c) = 2c - 2 \end{aligned}$$

Reemplazando c por x , obtendremos la ley de la función derivada.

$$f'(x) = 2x - 2 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Ahora obtengamos:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 2 = -6$$

Observación

Esta función es derivable en su dominio.

IV- 1) Derivada de algunas funciones

IV-1-1) Derivada de la función constante

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Demostración

Sean c y $c+\Delta x \in \mathbb{R}$

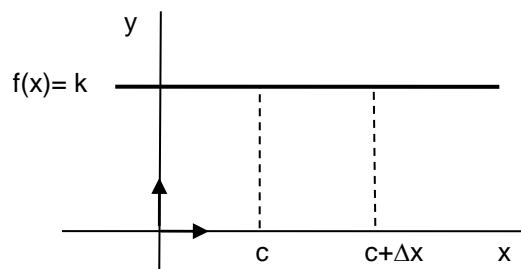
$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

entonces :

$$\text{si } f(x) = k \Rightarrow f'(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} ,$$

generalizando:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Observaciones

- La derivada de la función constante es la función nula.
- La función constante es derivable en su dominio.

Ejemplo resuelto:

Siendo $f(x) = \sqrt{5}$, calculemos $f'(x)$ y $f'(3)$.

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{por ser una función constante}) \Rightarrow f'(3) = 0$$

Problemas propuestos:

9) Completa:

- $f(x) = -5 \Rightarrow f'(x) = \dots \Rightarrow f'(-1) = \dots$
- $g(x) = \text{sen } \pi \Rightarrow g'(x) = \dots \Rightarrow g'(\frac{\pi}{4}) = \dots$
- $h(x) = \ln 8 \Rightarrow h'(x) = \dots \Rightarrow h'(5) = \dots$

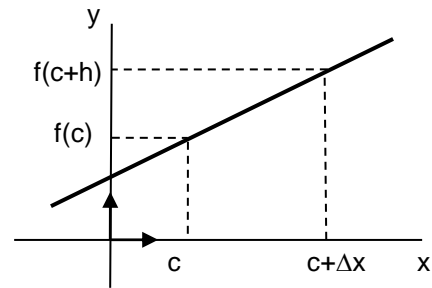
10) ¿Cómo interpretas geoméricamente que la derivada de la función constante es cero?

.....
.....



IV-1- 2) Derivada de la función lineal

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = m x + h \Rightarrow f'(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Demostración

Sean c y $c+\Delta x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 f'(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(c+\Delta x) + h - (mc + h)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{mc + m\Delta x + h - mc - h}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = m
 \end{aligned}$$

Observaciones

entonces :

$$\text{si } f(x) = m \cdot x + h \Rightarrow f'(c) = m \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

generalizando: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = m \cdot x + h \Rightarrow f'(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- La derivada de la función lineal es una función constante. Dicha constante es la pendiente m .
- La función lineal es derivable en su Dom.

Observación

En el caso particular de que $f(x) = x$ resulta $f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La derivada de la función identidad es la función constante $y = 1$.

Problemas propuestos:

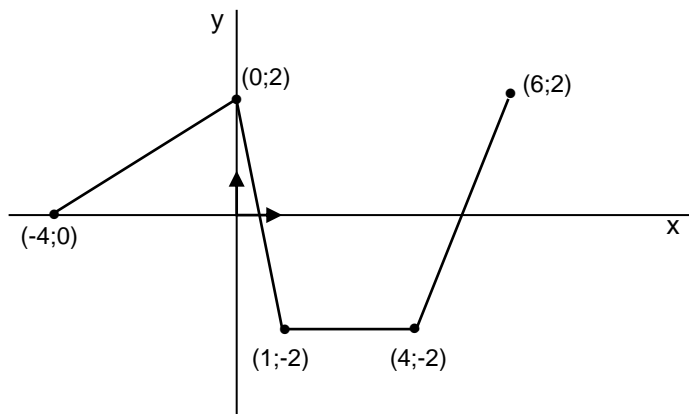
11) Completa:

- $f(x) = -5x + 2 \Rightarrow f'(x) = \dots \Rightarrow f'(-5) = \dots$
- $g(x) = 3 + 4x \Rightarrow g'(x) = \dots \Rightarrow g'(2) = \dots$
- $h(x) = -x \Rightarrow h'(x) = \dots \Rightarrow h'(-3) = \dots$

12) ¿Cómo interpretas geoméricamente que la derivada de la función lineal es la pendiente m ?

.....

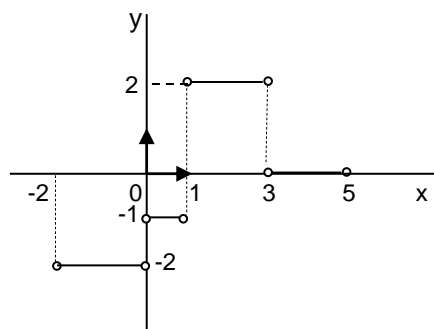
- 13) La gráfica de la siguiente función se compone de segmentos de rectas unidos en sus extremos.



- a) ¿En qué puntos del intervalo $[-4, 6]$ la función no es derivable?
b) A partir de la gráfica de $f(x)$ obtiene la ley y la gráfica de $f'(x)$.

- 14) Usa la siguiente información para graficar la función f en el intervalo $[-2, 5]$:

- $f(-2) = 4$
- f es continua en $[-2, 5]$
- la gráfica de $f'(x)$ es la siguiente:



IV-1- 3) Derivada de la función potencial

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{R}$, se puede demostrar:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^n \text{ con } n \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nota

En lo sucesivo consideraremos las funciones y sus derivadas en sus respectivos dominios de definición.



Ejemplos resueltos:

- $g(x) = x^7 \Rightarrow g'(x) = 7 \cdot x^6$
- $h(x) = x^{-5} \Rightarrow h'(x) = (-5) \cdot x^{-5-1} = -5 x^{-6}$
- $m(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $t(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow t'(x) = -1 \cdot x^{-2}$
- $j(x) = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow j'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$
- $t(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} = y^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow t'(y) = (-\frac{2}{3}) \cdot y^{-\frac{2}{3}-1} = (-\frac{2}{3}) \cdot y^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{y^5}}$
- $k(z) = z^{\sqrt{2}} \Rightarrow k'(z) = \sqrt{2} \cdot z^{\sqrt{2}-1}$

Problema propuesto:

15) Completa:

- $f_1(x) = x^{-3} \Rightarrow f_1'(x) = \dots\dots\dots$
- $f_2(x) = x^{\frac{8}{3}} \Rightarrow f_2'(x) = \dots\dots\dots$
- $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^{-7}}} \Rightarrow f_3'(x) = \dots\dots\dots$
- $f_4(x) = e^{-4} \Rightarrow f_4'(x) = \dots\dots\dots$

IV -1- 4) Derivada de la función seno

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{sen } x$, se puede demostrar:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \text{cos } x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La función seno es derivable en su dominio.

IV- 1- 5) Derivada de la función coseno

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{cos } x$, se puede demostrar:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{cos } x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La función coseno es derivable en su dominio.

Derivadas


Matemática

Problemas propuestos:

- 16) Siendo $f(x) = \sin x$, calcula: $f'(0)$, $f'(\frac{\pi}{2})$ y $f'(\pi)$. Confecciona la gráfica de f en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ y traza las tangentes en los puntos de abscisas 0 , $\frac{\pi}{2}$ y π .
- 17) Determina en qué puntos la tangente a la gráfica de $f(x) = \cos x$ es horizontal.
- 18) Demuestra que el área del triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta tangente a la curva $y = \sin x$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$ es igual a $\frac{(3\sqrt{3} - \pi)^2}{36} \cong 0,12$
- 19) Demuestra que la tangente a la senoide $y = \sin x$ en el origen de coordenadas es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

IV-1- 6) Derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = e^x$, se puede demostrar:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$		La función e^x es derivable en su dominio.
--	---	--

Ejemplo resuelto:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \text{y} \quad f'(2) = e^2$$

Problema propuesto

- 20) Demuestra que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = e^x$ en el punto $(0;1)$ es paralela a la gráfica de la función identidad.

Tabla de derivadas

Resumimos en una tabla las derivadas que hemos visto anteriormente.

FUNCIÓN	$f(x)$	$f'(x)$
Constante	$k \quad \forall k \in \mathbb{R}$	0
Lineal	$mx+h$	m
Potencial	$x^n \quad \forall n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$



Seno	sen x	cos x
Coseno	cos x	- sen x
Exponencial (de base e)	e ^x	e ^x

Sabemos que la mayoría de las funciones con que trabajamos, están formadas por operaciones entre funciones elementales, por ejemplo:

$$f(x) = 4 \operatorname{sen} x + x^2, \quad g(x) = \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}} + 4 \quad \text{ó} \quad h(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^3 + 2x))$$

Pero, ¿cómo derivar estas funciones? Veremos a continuación una serie de Teoremas que nos permitirán resolver este interrogante.

V) Álgebra de las derivadas

V-1) Derivada del producto de una constante por una función

TEOREMA 2:

Sea $g(x) = k \cdot f(x)$ con $k \in \mathbb{R}$ y sea f derivable en A entonces :

$$g'(x) = k f'(x) \quad \forall x \in A$$

Demostración:

Sean c y $c + \Delta x \in A$,

$$\begin{aligned}
 g'(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \stackrel{\text{por hipótesis}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(c + \Delta x) - g(c)}{\Delta x} \stackrel{\text{sacando factor común}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{kf(c + \Delta x) - kf(c)}{\Delta x} \stackrel{\text{álgebra de los límites}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k[f(c + \Delta x) - f(c)]}{\Delta x} \\
 &= \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} k}_{k} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(c + \Delta x) - f(c)]}{\Delta x}}_{f'(c)} = k f'(c)
 \end{aligned}$$

Derivadas

Matemática

entonces:

$$\text{si } g(x) = k \cdot f(x) \quad g'(c) = k \cdot f'(c) \quad \forall c \in A$$

Generalizando:

$$g(x) = k \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = k \cdot f'(x) \quad \forall x \in A$$

Ejemplos resueltos:

- $g(x) = 3 \cdot x^4 \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot (4 \cdot x^3) = 12 \cdot x^3$
- $h(x) = -\frac{3}{5} \cdot e^x \Rightarrow h'(x) = -\frac{3}{5} \cdot (e^x)' = -\frac{3}{5} e^x$
- $k(x) = \sqrt{7} \cos x \Rightarrow k'(x) = \sqrt{7} \cdot (\cos x)' = \sqrt{7} \cdot (-\sin x) = -\sqrt{7} \sin x$

Problemas propuestos:

21) Completa:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \sin x \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{x} \quad \Rightarrow \quad f_2'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f_3(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sqrt[5]{x^4} \quad \Rightarrow \quad f_3'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f_4(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f_4'(x) = \dots\dots\dots$$

V - 2) Derivada de la suma de dos funciones

TEOREMA 3:

Sea $h(x) = f(x) + g(x)$ con f y g derivables en A entonces:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in A$$

Demostración:

Sean c y $c + \Delta x \in A$,

por hipótesis

$$h'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(c + \Delta x) - h(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(c + \Delta x) + g(c + \Delta x)] - [f(c) + g(c)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) + g(c + \Delta x) - f(c) - g(c)}{\Delta x} \stackrel{\text{conmutando y asociando}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(c + \Delta x) - f(c)] + [g(c + \Delta x) - g(c)]}{\Delta x} \stackrel{\text{álgebra de los límites}}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(c + \Delta x) - f(c)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(c + \Delta x) - g(c)]}{\Delta x} = f'(c) + g'(c)$$

↑ por hipótesis f y g son derivables en A



entonces: si $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(c) = f'(c) + g'(c)$

generalizando: $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in A$

V - 3) Derivada de la diferencia de dos funciones

TEOREMA 4

Siendo $h(x) = f(x) - g(x)$ con f y g derivables en A , se puede demostrar

$$h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) \quad \forall x \in A$$

Observación

Los teoremas 3 y 4 se pueden ampliar a la suma algebraica de un número finito n de funciones, resultando:

$$\text{Si } f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots + f_n'(x)$$

Nota: Estamos bajo las hipótesis de los teoremas donde cada f_i es derivable en A .

Ejemplos resueltos:

- $f(x) = \text{sen } x + x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = (\text{sen } x)' + (x^2)' + (5)' = \cos x + 2x + 0 = \cos x + 2x$
- $g(x) = e^x + \sqrt[4]{x} - \cos x \Rightarrow g'(x) = (e^x)' + (\sqrt[4]{x})' - (\cos x)' = e^x + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} - (-\text{sen } x) = e^x + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} + \text{sen } x$
- $h(x) = x^5 - \sqrt[3]{x^2} - x^{-3} \Rightarrow h'(x) = (x^5)' - (\sqrt[3]{x^2})' - (x^{-3})' = 5x^4 - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - (-3)x^{-4} = 5x^4 - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-4}$

Consecuencia de los teoremas anteriores

Toda función que es combinación lineal de funciones derivables es derivable.

Nota

Una función f es combinación lineal de un conjunto de funciones $\{ f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4 ; \dots ; f_n \}$ si existen $k_1 ; k_2 ; k_3 ; \dots ; k_n \in \mathbb{R} / f = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \dots + k_n f_n$

Derivadas

Matemática

Sea $f(x) = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \dots + k_n f_n$, $\forall x \in A$ con $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ derivables en A y $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$,

aplicando la definición de derivada se puede demostrar que:

$$f'(x) = k_1 f_1' + k_2 f_2' + k_3 f_3' + \dots + k_n f_n'$$

entonces:

$$\text{si } h(x) = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \dots + k_n f_n \Rightarrow h'(x) = k_1 f_1' + k_2 f_2' + k_3 f_3' + \dots + k_n f_n' \quad \forall x \in A$$

Problemas propuestos:

22) Obtiene la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{x}$$

$$k(x) = \frac{4x^3 + 7x - 4}{x}$$

$$g(x) = \sin x - 4 \cos x + \sin 3$$

$$l(x) = \sqrt{x} (5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$$

$$h(x) = \frac{5}{x^5} - 3\sqrt[4]{x^{-3}}$$

$$m(x) = \ln 2 - 8x^4$$

23) ¿En qué punto/s la función $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ tiene recta tangente horizontal?

24) Determina tres funciones distintas f , g y h tales que $f'(x) = g'(x) = h'(x) = 1$

25) Conociendo $h'(x)$, determina $h(x)$. En caso de haber más de una solución, indícala.

$$h_1'(x) = x^2 + x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^7} + 1 \Rightarrow h_1(x) = \dots\dots\dots$$

$$h_2'(x) = 3 - \cos x + e^x \Rightarrow h_2(x) = \dots\dots\dots$$

$$h_3'(x) = \sin x - \frac{4}{x^3} \Rightarrow h_3(x) = \dots\dots\dots$$

26) Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$, evalúa la siguiente expresión: $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} - f'(x)$.

27) Determina los números reales a , b y c para los cuales las gráficas de las funciones: $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se intersecan en el punto $(1;2)$ y en él poseen la misma recta tangente.

28) Sea $f(x) = x + \sin x$, determina todos los puntos de la misma para los cuales la gráfica de f en $(x; f(x))$ tiene pendiente cero.

29) Calcula el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.



V - 4) Derivada del producto de dos funciones

TEOREMA 5

Siendo $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ con f y g derivables en A , se puede demostrar:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in A$$

Ejemplos resueltos:

- $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = (\text{sen } x)' \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)$
 $= \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
- $g(x) = 5x^2 \cdot e^x \Rightarrow g'(x) = 5(x^2 \cdot e^x)' = 5[(x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'] = 5[2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x] = 5x \cdot e^x (2+x)$

Problemas propuestos:

30) Deriva cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 \cdot \text{sen } x$$

$$g(x) = (x^4 + 2)(x^3 + 5x^{-1}) \cos x$$

$$h(x) = \sqrt{x} \cdot x^3 + \log_3 5$$

$$k(x) = 5 \cos x \cdot \sqrt{x} - \sqrt{2} x$$

$$l(x) = \frac{e^x}{x^5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$m(x) = \text{sen}^2 x$$

31) Demuestra que:

si $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ siendo f_1, f_2 y f_3 derivables en A , entonces,

$$f' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \forall x \in A$$

32) Siendo $f(x) = \cos^3 x - 1,25 \cos^2 x + 0,225$, determina el o los valores de $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{3}{2}\pi\right]$ para los cuáles la recta tangente es paralela al eje x .

V - 5) Derivada del cociente de dos funciones

TEOREMA 6

Siendo $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con f y g derivables en A y $g(x) \neq 0$ se puede demostrar:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \forall x \in A / g(x) \neq 0$$

Ejemplo resuelto

Utilizaremos la regla de derivación del cociente para demostrar que la derivada de la función:

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{es} \quad f'(x) = \sec^2 x \quad \forall x \in \{x / x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x (\operatorname{cos} x)'}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cos}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} = \sec^2 x \quad \forall x \in \{x / x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

Problemas propuestos

33) Demuestra que:

- a) $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x, \quad \forall x \in \{x / x \neq k \cdot \pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
- b) $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in \{x / x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
- c) $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x, \quad \forall x \in \{x / x \neq k \cdot \pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$

34) Obtiene la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

- a) $f_1(x) = \frac{3x-5}{x^2+7}$
- b) $f_2(x) = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} + x^{-4}$
- c) $f_3(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x}$
- d) $f_4(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^3+4}} + 5^3$
- e) $f_5(x) = \frac{x^2+1}{x \cdot \operatorname{cos} x}$
- f) $f_6(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x}{\pi \cdot \operatorname{cos} x} - \frac{1}{x}$

35) Determina el o los puntos donde la gráfica de la función $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ tiene tangente horizontal.



VI - 6) Derivada de una función compuesta – Regla de la cadena

TEOREMA 7

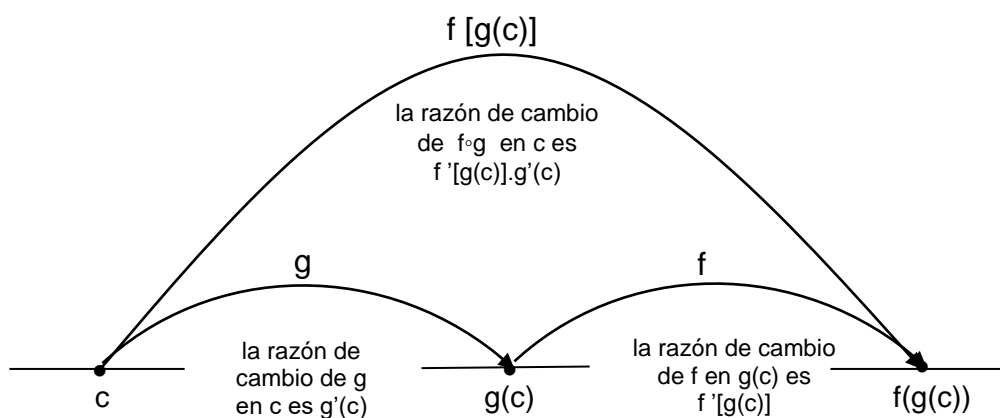
Sea $h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ con g derivable en A , f derivable en B , $g(A) \subset B$ y sea $c \in A$ se puede demostrar que:

$$h'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c) \quad \forall c \in A$$

generalizando:

$$h(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \forall x \in A$$

Nota: No efectuaremos su demostración



La razón de cambio de la función compuesta es la multiplicación de razones de cambio.

Observación

Al emplear la regla de la cadena, se avanza desde el exterior hacia el interior, es decir, se deriva en el orden inverso en que se compone la función.

$$h'(x) = \underbrace{f}_{\text{función externa}} \left(\underbrace{[g(x)]}_{\text{evaluada en la función interna}} \right)' = \underbrace{f'}_{\text{derivada de la función externa}} \cdot \underbrace{[g(x)]}_{\text{evaluada en la función interna}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivada de la función interna}}$$

Ejemplos resueltos

- $f(x) = \text{sen}(x^2) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\cos}_{\text{derivada de la función externa}} \left(\underbrace{x^2}_{\text{evaluada en la función interna}} \right) \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada de la función interna}}$
- $g(x) = (x^3 - 5x)^4 \Rightarrow g'(x) = 4 \cdot \underbrace{(x^3 - 5x)^3}_{\text{evaluada en la función interna}} \cdot \underbrace{(3x^2 - 5)}_{\text{derivada de la función interna}}$

Derivadas

Matemática

- $h(x) = e^{\sin x} \Rightarrow h'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$
- $k(x) = 7\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} \Rightarrow k'(x) = 7 \cdot \frac{1}{3}(\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sec^2 x$
- $m(x) = \cos\left(\sin \frac{1}{x}\right) \Rightarrow m'(x) = -\sin\left(\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \cos \frac{1}{x}$

Problemas propuestos

36) Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \cos^3(x) \qquad f_7(x) = \sqrt[4]{\frac{x^3+1}{x^3-1}} \qquad f_{13}(x) = \sin(\sin(\sin x))$$

$$f_2(x) = \sin(\operatorname{tg} x) \qquad f_8(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}} \qquad f_{14}(x) = e^{3x} \cdot \cos^2(\pi x)$$

$$f_3(x) = (2x^2 - 6x + 1)^{-8} \qquad f_9(x) = x \cdot e^{\sqrt[3]{x}} \qquad f_{15}(x) = \cos(e^x \cdot \sqrt{x})$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2 - 7x} \qquad f_{10}(x) = \sin \sqrt{x^2 + 1} \qquad f_{16}(x) = e^2 \cdot \sin(2x)$$

$$f_5(x) = \operatorname{cotg}\left(\pi - \frac{1}{x}\right) \qquad f_{11}(x) = \sqrt[4]{3x^2 + 1} \qquad f_{17}(x) = e^{\frac{x^3-x}{5x-1}}$$

$$f_6(x) = \operatorname{tg}^2(2x) \qquad f_{12}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

37) Utiliza la información de la tabla para obtener las derivadas de las siguientes funciones en el valor de x indicado.

x	f(x)	g(x)	f'(x)	g'(x)
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

a) $2f(x)$ $x = 2$ b) $f(x) + g(x)$ $x = 3$

c) $f(x) \cdot g(x)$ $x = 3$ d) $\frac{f(x)}{g(x)}$ $x = 2$



e) $f[g(x)]$	$x = 2$	f) $\sqrt{f(x)}$	$x = 2$
g) $\frac{1}{g^2(x)}$	$x = 3$	h) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$	$x = 2$

38) Demuestra que:

- a) La derivada de una función par es una función impar.
- b) La derivada de una función impar es una función par.

39) Si $g(t) = [f(\sin t)]^2$ y f es una función derivable, determina $g'(t)$.

40) Si $g(x) = f(b + mx) - f(b - mx)$ y $f'(b) = 3$, halla $g'(0)$.

41) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas $y = \sin(2x)$ e $y = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ en el origen.

VI - 7) Derivadas de las funciones circulares inversas

Se puede demostrar que:

$$\text{Si } f(x) = \arcsen x \quad \forall x \in [-1;1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1;1)$$

Observación

La función arcoseno no es derivable en su dominio.

$$\text{Si } f(x) = \arccos x \quad \forall x \in [-1;1] \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1;1)$$

Observación

La función arccoseno no es derivable en su dominio.

Observación

$$\text{Si } f(x) = \text{arctg } x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La función arcotangente x es derivable en su dominio.

VI - 8) Derivada de la función logaritmo natural

Se puede demostrar que:

$$\text{Si } f(x) = \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Observación

La función $\ln x$ es derivable en su dominio

Ejemplo resuelto:

$$h(x) = \ln x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad h'(2) = \frac{1}{2}$$

Problemas propuesto:

42) Demuestra que:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x} = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^+$$

43) Completa:

$$h(x) = \log_3 x \Rightarrow h'(x) = \dots \Rightarrow h'(4) = \dots$$

$$k(x) = \log x \Rightarrow k'(x) = \dots \Rightarrow k'(7) = \dots$$

44) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \log_5 x$ en el punto de abscisa $x = 5$.

45) Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \arcsen x \cdot \log_3 x$

b) $f_2(x) = \frac{\text{arctg}(\text{sen } x)}{\pi \ln(2x)}$

c) $f_3(x) = -2 \arccos \sqrt{x}$



Observaciones

- Podemos agregar a la tabla de derivadas las últimas que hemos obtenido.

FUNCIÓN	$f(x)$	$f'(x)$
Tangente	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
Cotangente	$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
Secante	$\sec x$	$\operatorname{tg} x \cdot \sec x$
Cosecante	$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x$
Arco seno	$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arco coseno	$\operatorname{arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arco tangente	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo en base e	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Logaritmo en base a	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log_a e}{x}$

- Los teoremas (desde el Teorema 2 al Teorema 7), podemos resumirlos en la siguiente tabla:

Algebra de las derivadas

Función	Derivada
$k \cdot f(x)$ con $k \in \mathbb{R}$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

VI - 9) Derivación logarítmica

Este método nos permite derivar funciones de la forma $h(x) = f(x)^{g(x)}$, es decir derivar funciones que son una función elevada a otra función. En el procedimiento se utilizan propiedades de los logaritmos para derivar funciones no necesariamente logarítmicas.

Ejemplo resuelto:

$$f(t) = t^{2t}$$

aplicando logaritmo natural a ambos miembros: $\ln f(t) = \ln (t^{2t})$

aplicando propiedad del logaritmo $\ln f(t) = 2t \cdot \ln t$

derivando m. a m. $\frac{1}{f(t)} \cdot f'(t) = 2 \cdot \ln t + 2t \cdot \frac{1}{t}$

despejando $f'(t)$ $f'(t) = f(t) [2 \ln t + 2]$

sustituyendo $f(t)$ $f'(t) = t^{2t} [2 \ln t + 2]$

luego: $f'(t) = 2 t^{2t} [\ln t + 1]$

Problemas propuestos

46) Demuestra que:

La derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$ es $f'(x) = \ln a \cdot a^x$

47) Completa:

• $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \dots \Rightarrow f'(-2) = \dots$

• $g(x) = 5^x \Rightarrow g'(x) = \dots \Rightarrow g'(3) = \dots$

• $h(x) = 3^x \Rightarrow h'(x) = \dots \Rightarrow h'(4) = \dots$



48) Obtiene la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll}
 f_1(x) = 4^x \arcsen x & f_2(x) = 8^{\arctg(\sen x)} & f_3(x) = \ln(\arccos x) - \arccos(\ln x) \\
 f_4(x) = \log_3 \frac{2^x}{2x} & f_5(x) = \frac{x \cdot 5^x}{5x^5} & f_6(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x} \right) \\
 f_7(x) = \sen^x x & f_8(x) = x^{\sen x} & f_9(x) = \sqrt[3]{x} \\
 f_{10}(x) = x^x & f_{11}(x) = x^{\log x} & f_{12}(x) = (\sen x)^{\cos x} \\
 f_{13}(x) = (x^2 + x + 1)^x & f_{14}(x) = x^{\arctg x} & f_{15}(x) = e^{x^x}
 \end{array}$$

VII) Derivadas de orden superior al primero.

Hemos visto que si una función $f(x)$ definida en un conjunto A tiene derivada en cada uno de los puntos pertenecientes a un subconjunto B de A , queda definida en B una nueva función g , que se llama "función derivada de f ", indicando la función g por cualquiera de las siguientes notaciones:

$$g = f' = \frac{df}{dx} = Df$$

Si ahora, esta función g , tiene derivada en cada uno de los puntos de un subconjunto C de B , esta última recibe el nombre de función derivada de g , o función derivada segunda de f , notándose:

$$g' = f'' = \frac{d^2f}{dx^2} = D^2f$$

y así sucesivamente.

En general, dada una función f llamaremos derivada de orden n de f a la derivada de la derivada de orden $n-1$ de f . En símbolos:

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)}f}{dx^{n-1}} \right) = D(D^{n-1}f)$$

Ejemplos resueltos

- $f(x) = \cos x$
- $f'(x) = -\sen x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sen x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x$
- $f^{(5)}(x) = -\sen x$



- $g(x) = x^5 - 3x^2 + 1$
- $g'(x) = 5x^4 - 6x$
- $g''(x) = 20x^3 - 6$
- $g'''(x) = 60x^2$
- $g^{(4)}(x) = 120x$
- $g^{(5)}(x) = 120$

Problemas propuestos:

49) Dada

Determina

$$\checkmark f(x) = 2x^2 - 2$$

$$f''(x)$$

$$\checkmark f'(x) = x^2$$

$$f''(x)$$

$$\checkmark f'''(x) = 2\sqrt{x-1}$$

$$f^{(5)}(x)$$

$$\checkmark f^{(4)}(x) = 2x^3 - 1$$

$$f^{(8)}(x)$$

50) Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado que verifique simultáneamente:

$$P(2) = 3, P'(2) = 5 \quad \text{y} \quad P''(2) = 4$$

51)



Si se deja caer una bala de cañón desde la torre de Pisa, de 179 pies de altura, la altura h de la bala a t segundos después de la caída es:

$$h(t) = 179 - 16t^2$$

¿Cuál es la velocidad y la aceleración de la bala en cada instante t ?

Nota

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo. Si la posición de un cuerpo en el tiempo t es $s(t)$, entonces su aceleración es:

$$a(t) = [v(t)]' = [(s(t))']' = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$



Respuestas:

1) 2

2) 13° 15' 45,63"

3) 3

4) 14° 2' 10,48"

5) a) 1 b) -7 c) -3 d) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ e) 8

6) a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

7) t) $y = -x ; 135^\circ$

8) a) $\forall x \neq -1$

b) $\forall x \neq -3$

c) $\forall x \neq \pm 3$

d) $\forall x \neq 1$

e) $\forall x \neq 3$

f) $\forall x \neq \pm 2$

g) $\forall x > 1$

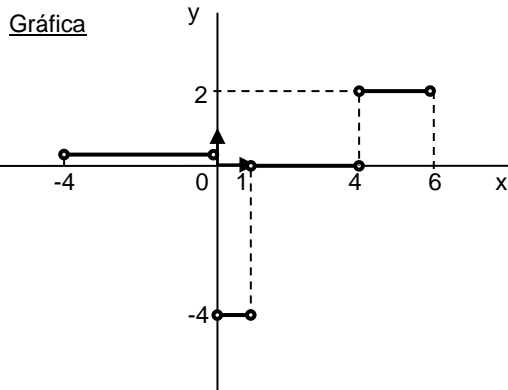
9) $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(-1) = 0$ | $g'(x) = 0 \Rightarrow g'(\pi/4) = 0$ | $h'(x) = 0 \Rightarrow h'(5) = 0$

10) La recta tangente en cada punto coincide con la gráfica de la función.

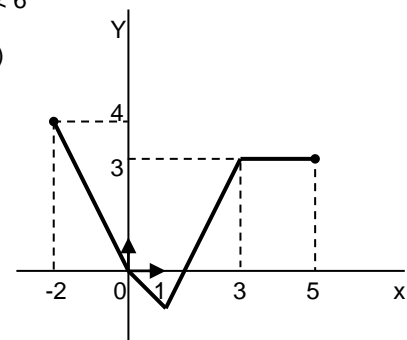
11) $f'(x) = -5 \Rightarrow f'(-5) = -5$ | $g'(x) = 4 \Rightarrow g'(2) = 4$ | $h'(x) = -1 \Rightarrow h'(-3) = -1$

12) La recta tangente en cada punto coincide con la gráfica de la función.

13) a) En los puntos de abscisas: -4 ; 0 ; 1 ; 4 y 6 b) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -4 < x < 0 \\ -4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x < 6 \end{cases}$



14)



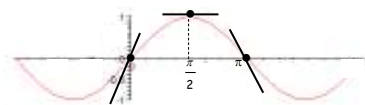
15) $f_1'(x) = -3x^{-4}$ $f_2'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$ $f_3'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$ $f_4'(x) = 0$

16) $f'(x) = \cos x$

$f'(0) = 1$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f'(\pi) = -1$



17) $P(2k\pi ; 1) \vee P((2k+1)\pi ; -1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

18) Verifica lo enunciado.

Derivadas

Matemática

19) $t) y = m x + h$
 $f(0) = 0 \Rightarrow (0;0) \in t \Rightarrow h = 0$
 $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow m = 1$ } $\Rightarrow t) y = 1 \cdot x + h \Rightarrow t) y = x \rightarrow$ es la ecuación de la bisectriz del I_c y III_c

20) Bastará demostrar que la pendiente de la recta tangente en el punto (0;1) es $m = 1$
 $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow m = 1$

21) $f_1'(x) = \frac{1}{2} \cos x$ $f_2'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{x^2}$ $f_3'(x) = -\frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}}$ $f_4'(x) = \sen x$

22) $f'(x) = 2x + 4x^{-2}$ $g'(x) = \cos x + 4 \sen x$ $h'(x) = -25x^{-6} + \frac{9}{4} x^{-\frac{7}{4}}$

$k'(x) = 8x + 4x^{-2}$ $l'(x) = \frac{5}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{4} x^{-\frac{1}{4}}$ $m'(x) = -32x^3$

23) $(0;2)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4})$ y $(\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4})$

24) Por ejemplo: $f(x) = x + 3$; $g(x) = x - 1$ y $h(x) = x - \sqrt{2}$ 27) $a = 1$ $b = 0$ $c = -1$

25) $h_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{20} x^{\frac{10}{3}} + x + k$ con $k \in \mathbb{R}$ 28) $((2k+1)\pi; f(2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$

$h_2(x) = 3x - \sen x + e^x + k$ con $k \in \mathbb{R}$

$h_3(x) = -\cos x + 2x^{-2} + k$ con $k \in \mathbb{R}$ 29) 4

26) 0

30) $f'(x) = 3x^2 \sen x + x^3 \cos x$ $g'(x) = (-11x^{-2} - 25x^{-6} + 6x^2) \cos x - (11x^{-1} + 5x^{-5} + 2x^3) \sen x$
 $h'(x) = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}}$ $k'(x) = -5\sqrt{x} \sen x + \frac{5}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{2}$
 $l'(x) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot e^x (x^{-5} - 5x^{-6})$ $m'(x) = 2 \sen x \cos x$

31) $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3 \Rightarrow f' = [(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3]' = (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3' = (f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2') \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$

32) $\pi \vee \frac{\pi}{2}$

33) a) $(\cotg x)' = \left(\frac{\cos x}{\sen x}\right)' = \frac{-\sen x \cdot \sen x - \cos x \cdot \cos x}{\sen^2 x} = \frac{-1}{\sen^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

b) $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{0 - (-\sen x)}{\cos^2 x} = \frac{\sen x}{\cos^2 x} = \tg x \cdot \sec x$

c) $(\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\sen x}\right)' = \frac{0 - \cos x}{\sen^2 x} = -\cotg x \cdot \operatorname{cosec} x$

34) a) $f_1'(x) = \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$ b) $f_2'(x) = \frac{e^x (\sen x - \cos x)}{\sen^2 x} - 4x^{-5}$ c) $f_3'(x) = \frac{-1}{(\sen x - \cos x)^2}$



$$d) f_4'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{7}{2}} + 12x^2}{\left(\sqrt{x^3 + 4}\right)^2} \quad e) f_5'(x) = \frac{\cos x \cdot (x^2 - 1) + \operatorname{sen} x \cdot (x^3 + x)}{x^2 \cos^2 x}$$

$$f) f_6'(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} x + 2x \operatorname{sec} x + 2x \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x} \cos^2 x} \right] + \frac{1}{x^2}$$

35) (0;0)

$$36) \begin{array}{l} f_1'(x) = -3 \operatorname{sen} x \cos^2 x \\ f_4'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x}} \\ f_7'(x) = \frac{-\frac{3}{2}x^2}{(x^3+1)^{\frac{3}{4}}(x^3-1)^{\frac{5}{4}}} \\ f_{10}'(x) = \frac{x \cos \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} f_2'(x) = \cos(\operatorname{tg} x) \operatorname{sec}^2 x \\ f_5'(x) = -\frac{1}{x^2} \operatorname{cosec}^2 \left(\pi - \frac{1}{x} \right) \\ f_8'(x) = \frac{14-3x}{2\sqrt{(7-3x)^3}} \\ f_{11}'(x) = \frac{3}{2} x(3x^2+1)^{\frac{3}{4}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f_3'(x) = -8(2x^2-6x+1)^{-9}(4x-6) \\ f_6'(x) = 4 \operatorname{tg}(2x) \operatorname{sec}^2(2x) \\ f_9'(x) = e^{\sqrt[3]{x}} \left(1 + \frac{x^3}{3} \right) \\ f_{12}'(x) = -\operatorname{sec}^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_{13}'(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \\ f_{15}'(x) = -e^x \cdot \operatorname{sen}(e^x \sqrt{x}) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ f_{17}'(x) = e^{\frac{x^3-x}{5x-1}} \left(\frac{10x^3-3x^2+1}{(5x-1)^2} \right) \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} f_{14}'(x) = e^{3x} \cos(\pi x) [3 \cos(\pi x) - 2\pi \operatorname{sen}(\pi x)] \\ f_{16}'(x) = 2e^2 \cdot \cos(2x) \end{array} \right.$$

37) a) $\frac{2}{3}$ b) $2\pi + 5$ c) $-8\pi + 15$ d) $\frac{37}{6}$ e) -1 f) $\frac{1}{12\sqrt{2}}$ g) $\frac{5}{32}$ h) $-\frac{10}{3\sqrt{68}}$

38) a) Si f es par $\Rightarrow f(x) = f(-x)$
 Derivando m.a.m resulta:
 $f'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x) \Rightarrow f'(x)$ es impar

b) Si f es impar $\Rightarrow f(x) = -f(-x)$
 Derivando m.a.m resulta:
 $f'(x) = -f'(-x)(-1) = f'(-x) \Rightarrow f'(x)$ es par

39) $2 f(\operatorname{sent}) \cdot f'(\operatorname{sent}) \cdot \cos t$

40) $6m$

41) $y = 2x$ $y = -\frac{1}{2}x$

Derivadas

Matemática

$$42) f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$43) h'(x) = \frac{1}{x \ln 3} \quad y \quad h'(4) = \frac{1}{4 \ln 3} \quad \parallel \parallel \quad k'(x) = \frac{1}{x \ln 10} \quad y \quad k'(7) = \frac{1}{7 \ln 10}$$

$$44) t) y - 1 = \frac{1}{5} \log_5 e \cdot (x - 5)$$

$$45) a) f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \log_3 x + \frac{\arcsen x}{x \ln 3} \quad \parallel \parallel \quad b) f_2'(x) = \left(\frac{\cos x \ln(2x)}{1 + \sen^2 x} - \frac{\arctg(\sen x)}{x} \right) \cdot \frac{1}{\pi \ln^2(2x)}$$

$$c) f_3'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{1-e^x}}$$

46)

$$f(x) = a^x$$

aplicando logaritmo natural a ambos miembros: $\ln f(x) = \ln(a^x)$

aplicando propiedad del logaritmo $\ln f(x) = x \cdot \ln a$

derivando m. a m. $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln a$

despejando $f'(x)$ $f'(x) = f(x) \ln a$

sustituyendo $f(x)$ $f'(x) = a^x \ln a$

$$47) f'(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^x \ln \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow f'(-2) = 4 \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$g'(x) = 5^x \ln 5 \Rightarrow g'(3) = 125 \ln 5$$

$$h'(x) = 3^x \ln 3 \Rightarrow h'(4) = 81 \ln 3$$

$$48) f_1'(x) = 4^x \left(\ln 4 \cdot \arcsen x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$f_3'(x) = \frac{-1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$f_5'(x) = \frac{5^{x-1}}{x^5} (\ln 5 \cdot x - 4)$$

$$f_7'(x) = \sen^x x [\ln(\sen x) + x \cotg x]$$

$$f_8'(x) = x^{\sen x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sen x}{x} \right]$$

$$f_2'(x) = \frac{8^{\arctg(\sen x)} \cdot \ln 8 \cdot \cos x}{1 + \sen^2 x}$$

$$f_4'(x) = \frac{x \ln 2 - 1}{x \ln 3}$$

$$f_6'(x) = -\frac{\log_2 e}{x}$$

$$f_9'(x) = \sqrt[x]{x} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$



$$f_{10}'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

$$f_{11}'(x) = \ln x^2 \cdot x^{\ln x - 1}$$

$$f_{12}'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]$$

$$f_{13}'(x) = (x^2 + x + 1)^x \left[\ln(x^2 + x + 1) + \frac{2x^2 + x}{(x^2 + x + 1)} \right]$$

$$f_{14}'(x) = x^{\arctg x} \left(\frac{\ln x}{1 + x^2} + \frac{\arctg x}{x} \right)$$

$$f_{15}'(x) = e^{-x^x} x^x (\ln x + 1)$$

$$49) f''(x) = 4$$

$$f''(x) = 2x$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

$$f^{(8)}(x) = 0$$

$$50) P(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$51) v(t) = -32t \quad a(t) = -32$$

Bibliografía

- ✓ Apunte "Derivadas" – IPS – Código 1202
Autoras: Ada Gil – Mirta Rosito – Nora Pareja
- ✓ Apunte "Derivada de una función" – UTN
Autoras: Ada Nasini – Roberto López
- ✓ "Cálculo - Una variable" – Undécima edición 2006
Autor: George B. Thomas, Jr
Pearson Educación
- ✓ "Cálculo – Volumen 1" – Quinta edición 1996
Autores: Roland Larson – Robert Hostetler – Edwards Bruce
Mc Graw Hill
- ✓ "Cálculo – Diferencial e integral" – Sexta edición
Autores: Edwin Purcell – Dale Varberg
Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
- ✓ "El cálculo diferencial" – Segunda edición 2006
Autoras: A. Engler – D. Müller – S. Vrancken – M. Hecklein
Universidad Nacional del Litoral
- ✓ "Matemáticas para Administración y Economía" – Décima edición 2006
Autores: Ernest Haeussler, Jr – Richard Paul
Pearson Educación
- ✓ "Análisis Matemático"
Autores: Julio Rey Pastor - Pedro Pi Calleja - César A. Trejo

- ✓ “Cálculo -Trascendentes tempranas” – Tercera edición 1999
Autor: James Stewart
Thomson Editores

- ✓ “Matemática II” – Primera edición 2000
Autores: N. Buschiazzi – E. Fongi – Ma. I. González – L. Lagreca
Santillana

“ Las autoras expresan su agradecimiento a la Prof. Silvia Amicozzi y a la Dra. Beatriz Introcaso por su colaboración en la revisión del apunte, y a la Prof. María Fernanda Otaño por su colaboración en la resolución de los ejercicios propuestos.”



Tabla de Derivadas

FUNCIÓN	f(x)	f'(x)
Constante	$k \quad \forall k \in \mathfrak{R}$	0
Lineal	$mx+h$	m
Potencial	$x^n \quad \forall n \in \mathfrak{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
Seno	$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
Coseno	$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$
Exponencial (de base e)	e^x	e^x
Exponencial	a^x	$\ln a \cdot a^x$
Tangente	$\text{tg } x$	$\text{sec}^2 x$
Cotangente	$\text{cotg } x$	$-\text{cosec}^2 x$
Secante	$\text{sec } x$	$\text{tg } x \cdot \text{sec } x$
Cosecante	$\text{cosec } x$	$-\text{cotg } x \cdot \text{cosec } x$
Arco seno	$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arco coseno	$\text{arccos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arco tangente	$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo en base e	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Logaritmo en base a	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\log_a e}{x}$

