

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO PRIMERO - FASC. 3-4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1941

- El precio de suscripción a “Mathematicae Notae” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “Mathematicae Notae” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

INDICE DEL FASCICULO

—Las leyes de Ohm (C. PLA)	pág. 77
—El porvenir de la física teórica (G. KNIE)	» 105
—Sobre el desenvolvimiento de algunos conceptos de la Física (B. LEVI)	» 109
—Algunas propiedades infinitesimales de las curvas planas (L. A. SANTALÓ)	» 129
—Sobre la acoñación de las funciones trigonométricas (E. O. FERRARI)	» 145
—Ejercicios y problemas. Propuestos (del 14 al 19)	» 149
—Ejercicios y problemas. Soluciones	» 152
—Bibliografía	» 161

LAS LEYES DE OHM

ENSAYO DE HISTORIA CIENTÍFICA Y HUMANA

Llamo al año de 1841 el año de gloria de Jorge Simón Ohm, pues si bien sus inmortales trabajos en electricidad aparecen entre los de 1825 y 1827, sólo cuando la Sociedad Real de Londres le otorga en el año mencionado, la medalla Copley, su obra recibe la consagración y el respeto a que era acreedora.

Jorge Simón Ohm nace el 16 de marzo de 1787 en Erlangen (Alemania). Su niñez transcurre en la placidez de su ciudad natal, donde su padre, cerrajero de profesión, lo mismo que sus antepasados, siguiendo los hábitos de la época, enseña el oficio familiar tanto a Jorge como a su hermano Martín — que luego fuera destacado matemático — y las primeras nociones sobre geometría, aritmética, gramática, etc. Una coincidencia hace que Langsdorff, conocido matemático, pueda apreciar la rapidez de concepción y la inteligencia clara de estos niños e inste a su padre — Wolfgang Ohm — a que les brinde una educación superior, vaticinando encontrarse frente a otra pareja de hermanos como los Bernoulli.

Felizmente para la ciencia, el consejo fué atendido. Y así Jorge Simón Ohm, a la edad de 16 años, ingresa en la universidad de Erlangen, para proseguir luego sus estudios en Gottsdatt (cantón de Berna) y terminarlos en Neufchâtel.

Su vida está llena de privaciones materiales y diríamos también de depresión moral, en el lapso de tiempo que transcurre desde 1804 a 1817, pues si bien es cierto que en 1811 fué admitido como profesor agregado de la Academia de Erlangen, la verdad es que ese cargo casi no lo ocupó y sus únicas entradas consistieron en lo que obtenía mediante el dictado de lecciones particulares.

Sólo en 1817 consigue una posición estable al ser designado profesor de matemática y de física en el Colegio de

los Jesuitas en Colonia donde, por primera vez, encuentra oportunidad de dedicarse a los estudios que tanto le preocupaban y de poder realizar las experiencias que lo harían célebre. Fundamento la afirmación de ese período de miseria en lo que el propio Ohm expresa en el prefacio de sus «Elementos de Geometría», aparecido poco después de ingresar al colegio de Colonia, donde habla «del hielo que recubre su estufa sin fuego».

Espíritu auténticamente científico, creyó terminados sus afanes. Disponía de un laboratorio para experimentar y de tiempo para profundizar sus estudios. Su ideal, largamente soñado — llegar a ser profesor universitario — lo creía casi realizado.

Es ahí donde, entre los años 1825 y 1827, completa sus ideas y arriba a las leyes que llevan su nombre, cuya trascendencia en electricidad resulta casi inoficioso destacar.

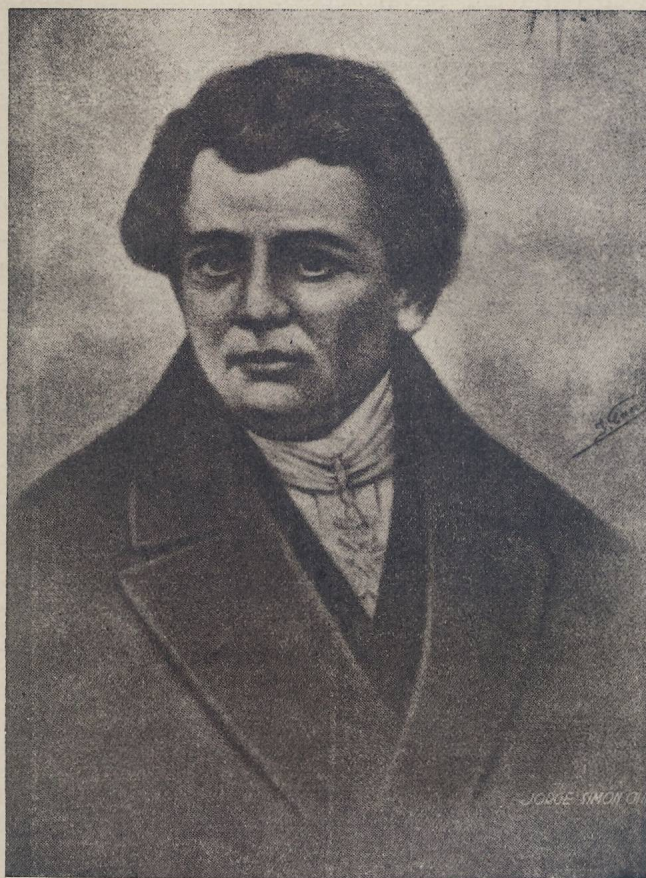
Las experiencias de Ohm. — Los últimos años del siglo XVIII fueron testigos de la enconada polémica mantenida por Galvani y Volta, que llevaría a éste último a enunciar las leyes de la electrización por contacto y al descubrimiento de la pila eléctrica. Surgía así el primer generador de corriente y con ello, el concepto de fuerza electromotriz.

Cuando en 1820, Oersted demuestra la desviación de una aguja imanada por la corriente eléctrica y el 18 de setiembre de ese mismo año, el gran Ampère pone las bases fundamentales del electromagnetismo, la noción de intensidad empieza a desprenderse de la nebulosa que encerraba los conceptos que hoy son primarios en el estudio de la electricidad.

Desde principios de siglo, Davy, Ritter y otros investigadores, atraídos por el efecto químico de la electricidad en los conductores líquidos, inician el estudio de la conductividad de los cuerpos. Particular interés despierta al mismo tiempo, el problema relacionado con los metales. El aumento de temperatura experimentado por éstos al paso de una corriente eléctrica, brinda a Davy la idea de que la rapidez del calentamiento del conductor debe estar en razón inversa de su conductibilidad. Con tal hipótesis mide el tiempo necesario para que metales distintos alcancen una temperatura determinada llegando, a establecer en 1822 la siguiente escala en orden decreciente de conductibilidad: plata, cobre, plomo, oro, zinc, estaño, platino,

paladio, hierro. Comprueba además, que la conductibilidad de los metales disminuye con el aumento de temperatura.

En 1825, Ohm publica sus primeras experiencias sobre este problema en el *Schweigger's Journal f. Chemie u. Physik*



JORGE SIMON OHM
1787 - 1854

(t. 44, p. 110). El camino seguido por él difiere del adoptado por los experimentadores citados. Conocedor de las acciones electromagnéticas que Ampère había puesto en evidencia, utiliza una «balanza de torsión» (que en definitiva no es otra cosa que un galvanómetro), admitiendo — conforme la experiencia ha confirmado — que la desviación de la aguja es proporcional a

la intensidad de la corriente que recorre el circuito. Hizo luego pasar una corriente proveniente de una pila hidroeléctrica por conductores de diferentes metales, todos de igual sección, pero cuyas longitudes fueran tales que provocaran la misma desviación de la aguja del galvanómetro, es decir, que ofrecieran la misma resistencia.

Los resultados que comunicó fueron los siguientes:

Cobre 1000, Oro 574, Plata 536, Zinc 333, Bronce 280, Hierro 174, Platino 171, Estaño 168; Plomo 97 (loc. cit., p. 46).

El orden obtenido por Ohm difiere, como se ve, del que había establecido Davy y que había sido confirmado por otros experimentadores. Especialmente la posición dada a la plata contradice las verificaciones experimentales más precisas. Ohm mismo constató que en ese caso, sus resultados eran falsos, debido a las impurezas que contenía el metal empleado y a que su sección era distinta a la de los otros conductores.

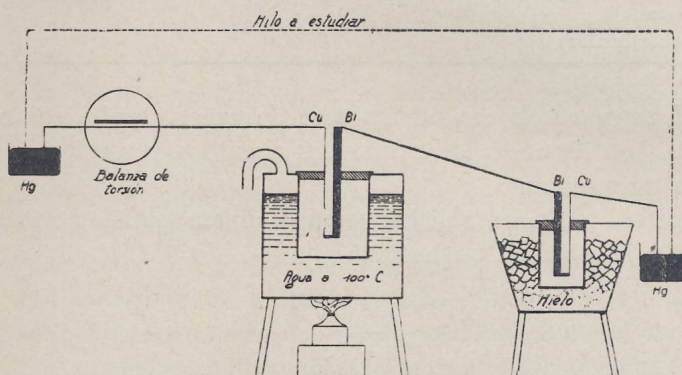
Nuevas experiencias, efectuadas en 1826, lo llevarían más lejos y le suministrarían la base necesaria para poder fundamentar su teoría. Mas antes, será quizás conveniente señalar que la rápida polarización de las pilas hidroeléctricas, casi exclusivamente utilizadas en ese entonces, impedía la obtención de medidas precisas. Sólo en 1829, A. C. Becquerel construye la primera pila apta para producir corrientes de intensidad constante. Esta pila es la conocida corrientemente con el nombre de Daniell.

Sin embargo había un camino abierto para investigaciones de esta naturaleza, a raíz del descubrimiento efectuado por Seebeck en 1821. Como es sabido, Seebeck puso en evidencia el efecto termoeléctrico según el cual, si se tienen dos metales soldados y se hace que las soldaduras impares se encuentren a temperatura distinta de las pares, una corriente se establece. Las pilas termoeléctricas brindaban en esa época en la que la imperfección de los generadores eléctricos era manifiesta, una fuente capaz de mantener cierta intensidad constante.

Poggendorff, que había seguido con interés las experiencias de Ohm, aconseja a éste su repetición utilizando pilas termoeléctricas en lugar de hidroeléctricas. Esa sugerencia es el origen de los nuevos trabajos que realiza Ohm y cuyos resultados aparecieron en 1826 en la misma publicación citada anteriormente (t. 46, p. 144) con el título: «Bestimmung

des Gesetzes, nach welchem Metalle die Kontaktelectricität leiten, etc.» ⁽¹⁾.

La cupla termoeléctrica estaba formada por bismuto-cobre. La figura representa esquemáticamente el dispositivo empleado, tal cual lo concebimos a través de las descripciones que hemos podido consultar. Ohm hizo construir dos recipientes A y B, conteniendo el primero agua que era llevada a la ebu-



llición y el segundo, hielo o nieve. En el recinto interior de ambos colocaba una de las soldaduras con lo que obtenía una diferencia de temperatura de 100° C. El otro extremo del conductor de cobre iba a unos vasos llenos de mercurio. La diferencia de temperatura a que se encontraban las soldaduras daba origen a una corriente eléctrica cuando se cerraba el circuito comunicando los vasos de mercurio con el conductor cuya conductibilidad se deseaba estudiar.

Recurriendo a la habilidad manual que había adquirido por la enseñanza de su padre, Ohm, que construía casi todos los aparatos que utilizaba en sus experiencias, dirigió la construcción de una balanza de torsión cuyas desviaciones medidas sobre un círculo graduado en el sistema centesimal, le permitía determinar la intensidad de la corriente que recorría el circuito.

Prepara luego ocho hilos de cobre de igual diámetro (0.1693 cm.) y de longitudes distintas. Cerrando el circuito con cada uno de ellos y determinando la intensidad de la corrien-

⁽¹⁾ "Determinación de la ley según la cual los metales conducen la electricidad de contacto".

te en cada caso, el 8 de enero de 1826 anuncia los siguientes resultados:

Número del conductor	1	2	3	4	5	6	7	8
Longitud (en cm.)	5,08	10,16	15,24	25,40	45,72	86,36	167,64	330,2
Angulo de torsión (medido en grados centesimales)	326,75	300,75	277,75	238,25	190,75	134,25	83,25	48,5

El 11 y 15 de ese mismo mes de enero, repite sus experiencias, confirmando los resultados obtenidos y condensándolos en esta proposición:

«Estos números pueden compendiarse satisfactoriamente mediante la siguiente ecuación:

$$X = \frac{a}{b + x} \quad (1)$$

Las letras que utiliza tienen el siguiente significado:

X : intensidad del «efecto magnético»

x : longitud del conductor que provoca la intensidad X

a : constante que depende de la «fuerza excitadora»

b : constante determinada por la resistencia de las partes permanentes del dispositivo empleado.

Ampliando sus experiencias, Ohm establece entre las soldaduras de su cupla termoeléctrica una diferencia de 7,5° C colocando una de ellas en el recinto que contiene hielo y la otra a la temperatura del ambiente en que realiza sus trabajos. En esta forma, mientras b mantiene casi exactamente el mismo valor (él lo consideró idéntico), el de a sufre variación notable.

Utiliza luego como conductor a estudiar varillas de bronce y constata que sus resultados satisfacen la ecuación (1).

Se ha dicho repetidas veces que Ohm enunció su ley basándose en una teoría que pecaba de exceso de fantasía y carencia de argumentos. Poulliet que redescubre, en 1834, la ley de Ohm, ha escrito: «Fué él quien primero plantea la cuestión y sin saber que lo hubiese hecho, fuí yo el primero en resolverla...; él había mostrado el fin de una manera vaga por medio del cálculo, yo lo he visto, por mi lado, de una

manera nítida y lo he tocado por la experiencia» (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XX, p. 210, 1845).

Los juicios anteriores se refieren en verdad a la teoría que Ohm enuncia en 1827, y de la cual hablaremos luego, pero expresan la convicción de que el sabio alemán no hubiere sometido sus ideas al control de la experiencia.

Justamente, el camino seguido por Ohm es el inverso de aquél que suponen los que así opinan. Primeramente realizó las experiencias y luego elaboró la teoría explicativa de los resultados obtenidos. Si analizamos la ecuación (1) que no es otra cosa — conviene insistir — que la expresión resultante de los valores obtenidos experimentalmente, nos encontramos que la clásica ley de Ohm queda expresada en aquella relación.

En efecto, ¿qué quiere decirse con los términos intensidad del efecto magnético, sino lo que hoy llamamos intensidad de la corriente? La constante a depende de la fuerza excitadora, en nuestro caso, del par bismuto-cobre y de la diferencia de temperatura, o dicho en los términos actualmente en uso, a es la fuerza electromotriz (E) de la pila utilizada. En cuanto a x es la resistencia exterior (R) del circuito (más adelante veremos que Ohm habla siempre de la «longitud reducida» del conductor o, simplemente, de la longitud y veremos que el significado de esas expresiones no es otra cosa que lo que hoy denominamos resistencia de los conductores) y finalmente, b por razones fáciles de comprender, no es otra cosa que la resistencia propia del generador (r). Si reemplazamos en (1) las letras de la ecuación por las que acabamos de enunciar, resulta

$$I = \frac{E}{r + R}$$

que es la expresión que todo estudiante conoce como representativa de la ley de Ohm en circuito cerrado.

Teoría matemática del circuito galvánico. — Generalizando los resultados obtenidos, Ohm elabora su teoría acerca de las corrientes galvánicas y habiendo conseguido, en 1826, una licencia en el cargo que ocupaba, se traslada a Berlín para dar a publicidad su obra fundamental, que aparece en 1827.

Su Prefacio trasunta la amargura del autor frente a la indiferencia con que sus trabajos han sido acogidos y a la

falta de medios y de estímulos para alentar la prosecución de una obra. Comprenderá mejor el lector el estado de ánimo de Ohm en este momento crucial de su vida, si reproducimos íntegro el texto del mismo. Dice así:

«Ofrezco aquí al público, una teoría de la electricidad galvánica. Esta no es más que una parte especial de la ciencia de la electricidad, pero más tarde, según que el tiempo, la inclinación de mi espíritu y mis medios me lo permitan, me propongo hacer aparecer sucesivamente, otros fragmentos semejantes de manera de componer un todo, suponiendo siempre, que encuentre en la publicación de este primer ensayo una especie de compensación a los sacrificios que me ha costado. Las circunstancias en las cuales yo he vivido hasta aquí, no han sido de naturaleza tal como para estimular mi ardor por los descubrimientos; la indiferencia del público amenaza extinguirlo, y ni he podido siquiera adquirir un conocimiento completo de las obras que contienen trabajos análogos a los míos. Así, he elegido para mi debut un terreno donde la rivalidad fuera menos de temer. Quiera el benévolo lector acoger mi obra con ese amor de la causa que lo ha inspirado!»

Veamos ahora, aun cuando sea en forma un tanto esquemática, las ideas directrices de esta teoría.

Me basaré para mi estudio en la versión francesa de la obra de Ohm, publicada por J. M. Gaugain en 1866 (Imp. L. Hachette et Cie. París).

La idea fundamental perseguida por Ohm es la de elaborar una teoría que establezca la conexión entre los fenómenos eléctricos y calóricos, de manera tal que la teoría formulada por Fourier para estos últimos, resulte de perfecta aplicación en los primeros. Una tentativa de estructurar una unidad entre ramas aparentemente inconexas de la física, es el ideal que pretendía alcanzar el sabio alemán.

Los fenómenos galvánicos, que tan poderosamente habían atraído la atención de los físicos, provocaban descubrimientos insospechados, incitando así con mayor fuerza al establecimiento de una teoría explicativa que los abrazara en su conjunto.

Ohm pretende elaborarla partiendo de tres principios fundamentales; el primero tiene en rigor, el valor de una hipótesis de trabajo, en el sentido de Meyerson. Los otros dos, eran producto de la observación y de la experiencia. Antes de entrar

a su enunciado, advertiremos que la terminología empleada por nosotros difiere de la que utilizó Ohm.

La explicación es simple. La historia de la ciencia nos enseña que siempre que se elabora una nueva teoría, ésta aparece confusa. Luego, el lenguaje se simplifica, los conceptos se aclaran y correlacionando los fenómenos de la misma naturaleza, se ve surgir una teoría coherente, simple. Lo propio sucede en las leyes físicas. ¡Qué difícil resulta para un lector inexperto descubrir el enunciado de la ley de Mariotte, por ejemplo, leyendo su «Discurso sobre la naturaleza del aire», donde da cuenta de sus famosas experiencias!

Lo mismo acaece aquí. El concepto de potencial no había adquirido personalidad en el tiempo en que Ohm elabora su teoría. Esto sucedería unos cuantos lustros después. Recuérdese que el gran físico contemporáneo, Paul Langevin, ha escrito al respecto: «En mi juventud, no había sido aún planteado; luego se comenzó a hablar de él con bastante prudencia. El primero que lo ha introducido aquí en su enseñanza, fué mi antecesor Mascart en el Colegio de Francia; y fué ridiculizado, en particular por el abate Moigno que redactaba una revista científica «Le Cosmos», en la que Mascart era tratado de «Don Quijote» y de «Caballero del Potencial». Actualmente hemos recibido la cultura necesaria y nos hemos habituado. Cuando se habla de diferencia de potencial entre dos bornes eléctricos, sentimos de qué se trata; hemos asociado esta idea a un número suficiente de experiencias intelectuales o fisiológicas para haber coloreado de concreto aquello que, primitivamente, era definido como una integral tomada a lo largo de un recorrido entre dos puntos de un campo» («La notion de corpuscules et d'atomes», p. 45 Ed. Hermann et Cie., París 1934).

Consideraciones similares podríamos formular para otros conceptos eléctricos, cuya existencia hoy «sentimos» claramente. Ohm habla, por ejemplo, de la «fuerza electroscópica» y en ocasiones para expresar lo mismo, emplea los términos de «manifestación electroscópica», «estado eléctrico», «poder eléctrico» o «energía eléctrica». Actualmente todas esas denominaciones las resumimos hablando del potencial, o mejor de la caída de potencial o de tensión. Será esa nuestra terminología.

En lugar de las palabras de Ohm «diferencia de los cuerpos» o «tensión eléctrica», hablaremos de fuerza electromotriz;

en vez de «cambio eléctrico», «variación eléctrica» o «igualación de la fuerza electrosópica», vocablos utilizados por Ohm. diremos flujo y, finalmente, sustituiremos las expresiones «grandor eléctrico» o «cantidad de corriente» por intensidad.

Hechas estas aclaraciones, veamos en qué consisten los principios o leyes fundamentales de la teoría de Ohm.

La primera podría condensarse diciendo que la intensidad del flujo eléctrico entre dos moléculas es proporcional a su diferencia de tensión o de potencial. Se refiere pues a la forma en que tendría que moverse la electricidad en el interior de un cuerpo.

Fundando su hipótesis, Ohm escribe: «Para establecer esta ley, he partido de la suposición que una molécula electrizada no puede comunicar electricidad más que a las moléculas contiguas, de tal manera que no exista nunca cambio inmediato entre moléculas situadas a mayor distancia; he admitido que la intensidad del flujo entre dos moléculas contiguas es proporcional, — en igualdad de condiciones — a la diferencia de tensión que poseen las dos moléculas, de la misma manera que en la teoría del calor se considera el flujo del calor entre dos moléculas como proporcional a la diferencia de sus temperaturas. Se ve que me he apartado de la marcha que Laplace ha adoptado y que ha sido seguida generalmente hasta el presente, para el estudio de las acciones moleculares; creo que la vía que yo he abierto se recomienda por su generalidad, su simplicidad y su claridad y pienso que ella podrá echar luz sobre el verdadero carácter de los métodos precedentemente empleados» (p. 26).

La analogía que pretende estructurar con los fenómenos térmicos, lo lleva a establecer que dos cuerpos en contacto a los que adjudica igual forma y dimensiones, pero con «tensiones» — nosotros diríamos: potenciales — distintas, si están situados a distancia conveniente, experimentan una variación de su estado eléctrico hasta que se llega a establecer la igualación de sus tensiones. Como se ve, el razonamiento es idéntico al que seguíamos para establecer el estado de equilibrio térmico de dos cuerpos, cuando estando dotados de temperaturas desiguales son puestos en contacto. Se llega así a definir el potencial de un conductor en el dominio electrostático.

Este razonamiento lo lleva a admitir que la variación de tensión que dos partículas electrizadas sufren en un tiempo

muy corto, es proporcional a la diferencia de las tensiones que aquellos tenían y al tiempo transcurrido para que se establezca el equilibrio eléctrico.

Ahora bien, los fenómenos galvánicos habían permitido mantener el desequilibrio en las tensiones de las partículas electrizadas y del campo electrostático, se pasa por lo tanto al electrodinámico. Es a estos fenómenos a los cuales Ohm pretende extender su hipótesis, buscando cuál es la ecuación que lo caracteriza.

Suponiendo que los elementos considerados no son iguales, imagina a éstos descompuestos en partículas elementales exactamente iguales entre sí. En el caso de dos elementos, uno de ellos tendrá m y el otro m' de esas partículas y si se estudian las acciones que cada una de ellas ejerce sobre las del otro elemento, consideradas individualmente o en su conjunto, resulta, según Ohm, que la suma de todas las acciones de un elemento sobre el conjunto de las del otro, será mm' veces mayor que la ejercida por una partícula de uno sobre una del otro. Llegado a este punto, Ohm se expresa así: «Según esto, es evidente que la expresión que representa la acción mutua de dos elementos diferentes debe ser proporcional, no solamente a la diferencia de las tensiones y al tiempo transcurrido, sino también al producto de los volúmenes relativos de los elementos» (p. 76). Conviene decir que con el propósito de asignar un nombre a esa suma de tensiones con relación a las dimensiones de los elementos, Ohm la llama «cantidad de electricidad», sin que esto — se apresura a agregar — signifique «pronunciarnos en nada sobre la naturaleza material de la electricidad».

Asímilo esa definición de cantidad de electricidad obtenida como el producto de la tensión por la dimensión del elemento sobre el cual aquella tiene el mismo valor en cualquier punto que se considere, con la definición electrostática que surge de la cantidad de electricidad (o como la llamamos ahora casi exclusivamente: de la carga eléctrica), si se considera la capacidad y el potencial de un conductor. En efecto, resulta la carga igual al producto del potencial (tensión en el lenguaje de Ohm) por la capacidad del conductor (que no sería otra cosa que aquello llamado un tanto confusamente por Ohm: grandor del elemento y que yo he nombrado siempre como «dimensión»).

Cuando se considera la influencia de la distancia mutua de

los elementos, se plantea la cuestión de si las acciones se ejercen entre partículas o no. Ya hemos dicho que Ohm postula lo primero. Es aquí, donde éste se separa del camino seguido por Laplace.

Según la definición de Ohm la cantidad de electricidad que fluye de uno a otro elemento quedaría en este caso expresada por

$$dq = \alpha m m' (u' - u) dt \quad (2)$$

donde u y u' representan las tensiones de los dos elementos, dt el intervalo de tiempo muy pequeño transcurrido para que la cantidad de electricidad fuera transportada de un elemento a otro, supuestos a distancia invariable y α un coeficiente que depende en cierta medida de la distancia entre los centros de los dos elementos contiguos considerados. Si las tensiones cambian continuamente de valor, es claro que lo mismo sucederá con dq ; en cambio, si las tensiones son constantes, q varía solamente con dt . Refiriéndonos a una unidad de tiempo y haciendo $u' - u$ igual a la unidad la expresión anterior se simplifica:

$$q = \alpha m . m'$$

Ohm introduce el concepto de conductibilidad entre dos puntos como el producto de la cantidad de electricidad transmitida en un determinado tiempo por la distancia que separa a los centros de los elementos considerados finitos; o sea

$$K = q . s$$

siendo s la distancia mencionada. Resulta pues:

$$K = \alpha m . m' . s$$

y teniendo en cuenta la expresión general (2), la cantidad variable de electricidad que en un instante dt pasa de un elemento a otro, es:

$$\frac{K (u' - u)}{s} dt$$

Esta expresión tiene para Ohm la importancia de que aun cuando la esfera de actividad que asigna a las acciones eléctricas puede ser infinitamente pequeña — lo que a su juicio es también la verdadera posición de Laplace, pues aun

cuando éste admita operar sólo en intervalos finitos, al despreciar las potencias de grado superior por considerarlas despreciables frente a las primeras, en rigor ha adoptado el camino seguido ahora por él — y teniendo presente los otros dos principios fundamentales que sirven de base a su teoría, le permiten arribar a una ecuación diferencial que representaría la expresión matemática del fenómeno estudiado.

Ya señalamos antes que el segundo y tercer principio admitidos como fundamentos de la teoría, eran de carácter experimental. Ellos son:

2ª. ley: La pérdida de electricidad experimentada por un conductor en contacto con el aire es en un tiempo dado, proporcional a la tensión y a un coeficiente que depende del estado atmosférico. Esta ley es el resultado de las experiencias realizadas por Coulomb en 1785, para determinar la forma en que se descargaba un conductor aislado por la acción del aire y de la naturaleza del aislador ⁽¹⁾.

3ª. ley: Dos cuerpos diferentes puestos en contacto presentan siempre en el punto de contacto, tensiones que tienen entre sí una diferencia constante y cuyo valor depende de la naturaleza de los cuerpos empleados. Como se observa, esta ley es la obtenida por Volta en sus memorables experiencias.

Ohm establece que en los circuitos galvánicos la pérdida originada por el aire que rodea al conductor es sumamente pequeña, lo que no permite decir que «recíprocamente los conductores galvánicos no ejerzan influencia apreciable sobre el estado eléctrico del aire» (p. 85).

En cuanto a la tercera ley, recuerda que el origen de las corrientes eléctricas debe buscarse en los elementos que están en contacto inmediato y por lo tanto la diferencia de tensión que aparece se efectúa en un espacio infinitamente pequeño.

El razonamiento anterior y las leyes mencionadas, llevan a Ohm a deducir su famosa ecuación diferencial, que le permite determinar el valor de la tensión en función del tiempo y de la distancia que separa a los elementos considerados cuando la electricidad está en movimiento en un cuerpo homogéneo,

⁽¹⁾ Puede verse la memoria de Coulomb a que aludimos, en "Collection de Mémoires relatifs a la Physique, publiés par la Société Française de Physique", t. 1º, p. 147 a 172, Ed. Gauthier-Villars. París. 1884.

cilíndrico o prismático. No seguimos a Ohm en su desarrollo, por cuanto, como lo demostró Gaugain, es posible llegar a ella siguiendo exactamente el mismo camino que señaló Fourier para obtener la ecuación relativa al movimiento del calor⁽²⁾.

El mismo Gaugain — su traductor y apologista — ha escrito en el prefacio de la obra de Ohm: «Yo no soy competente para emitir una opinión sobre un problema de matemática, y además, el método de Ohm no está expuesto en términos bastante claros para que pueda ser sometido a una discusión bien rigurosa; pero como éste no me parece al abrigo de toda objeción, creo útil hacer notar que en definitiva es poco importante que ese método sea o no exacto; la idea que constituye el principal descubrimiento de Ohm es que las leyes que rigen la propagación del calor son comunes a la electricidad. Ahora, admitido este principio, es claro que para llegar a la ecuación diferencial fundamental, no es necesario cambiar nada a la marcha seguida por Fourier. Es suficiente reemplazar, en la demostración que él ha dado, la palabra «temperatura» por la de «tensión» y las palabras «flujo de calor» por «flujo de electricidad»; la ecuación diferencial es exactamente la misma en el caso del calor y en el caso de la electricidad» (p. 14-15). Debo agregar que Ohm había visto ese camino, aun cuando no lo hubiera seguido. Confirmo esta aseveración transcribiendo estas palabras suyas: «Las ecuaciones diferenciales que se obtienen son de la misma forma que aquellas que han sido establecidas por Fourier y Poisson para la propagación del calor y ellas pueden ser tratadas de una manera análoga» (p. 27). Por qué razones utilizó un procedimiento diferente, es pregunta que no sabría responder. Quizás enamorado de su propia deducción matemática, prefirió consignar en el texto, el resultado de su esfuerzo.

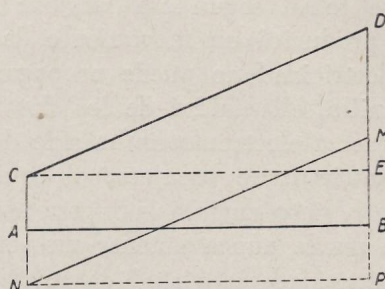
Mas lo importante es que su tentativa de conexión entre los fenómenos calóricos y eléctricos, dejando de lado su trascendencia filosófica, constituía un progreso de gran valor para el desarrollo de la física. Pero, por importante que resulte ese esfuerzo, quiero señalar cómo, en el desarrollo de su teoría se encuentran las leyes que conocemos con el nombre de Ohm.

(²) Puede verse esta demostración de Gaugain en el Apéndice A de la obra que comentamos.

Para dar una idea clara de que debe entenderse por circuito galvánico, recurriendo a la primera y tercera ley de su teoría, Ohm razona en la siguiente forma: «Imaginemos, por ejemplo, un anillo homogéneo de espesor uniforme y supongamos que una fuerza electromotriz uniforme viene a ser desarrollada en toda la extensión del anillo, es decir, que se establece una desigualdad determinada en el estado eléctrico de las superficies que se tocan según esa sección; el equilibrio será destruído y se producirá un movimiento destinado a restablecerlo y si la electricidad no puede propagarse más que en la extensión del anillo, ella saldrá de los dos lados de la superficie donde la fuerza electromotriz ha sido desarrollada. Si esta fuerza electromotriz fuese pasajera, el equilibrio se restablecería prontamente, pero cuando la fuerza electromotriz es permanente, no se puede nunca obtener un verdadero equilibrio; entonces, la electricidad, en virtud de su fuerza de expansión, que no encuentra resistencia sensible, llega en un intervalo de tiempo, cuya duración escapa casi siempre a nuestros sentidos, a constituir un estado que se aproxima bastante al de equilibrio y que consiste en esto: como consecuencia de la transmisión constante de la electricidad, el estado eléctrico de todas las partes del cuerpo que la corriente atraviesa es sensiblemente invariable; esta especie de equilibrio, que se encuentra frecuentemente en la transmisión de la luz y del calor, depende de esta circunstancia: que, en un instante dado, cada molécula reciba de un lado exactamente tanta electricidad como abandona por el otro y por lo tanto, conserva constantemente la misma cantidad; ahora, según el primer principio fundamental, el flujo eléctrico no puede establecerse más que entre dos moléculas contiguas y en igualdad de condiciones, es proporcional a la diferencia de tensión de estas moléculas; resulta de aquí que la fuerza electromotriz, siendo uniforme en todo el espesor de la sección donde ella está en juego y estando el anillo exactamente constituído de la misma manera en todas sus partes, la tensión debe variar en todas partes de la misma manera; cuando se parte del punto de excitación para volver recorriendo todo el anillo, se debe encontrar en todas partes un crecimiento o un decrecimiento uniforme, en tanto que en el punto mismo de excitación se produce un salto brusco que constituye, como nosotros lo hemos dicho, la fuerza electromotriz; esta

distribución de la electricidad, tan simple, suministra la clave de los fenómenos más variados» (p. 29-30).

Admitido lo precedente, si consideramos ahora que desarrollamos ese anillo y representamos la tensión en cada punto por ordenadas cuyos segmentos correspondan a los valores respectivos, tendremos una representación geométrica del fenómeno. Sea AB la longitud del anillo desarrollado. En A



y en B levantamos normales que representan las tensiones en esos puntos que son los de contacto del anillo. La recta CD indicará la forma en que la electricidad estaría distribuida en el anillo, o mejor, la «caída» de tensión entre A y B . Si desde C trazamos CE paralela a AB , el segmento ED medirá la diferencia de tensión entre los puntos A y B . Esta representación es exactamente la que encontramos en los textos actuales como interpretación gráfica de la ley de Ohm relativa a una porción de conductor. Empleando nuestra terminología actual, diríamos que DE es la diferencia de potencial entre A y B y si AB es geoméricamente la representación de la resistencia del conductor considerado, la tangente del ángulo DCE es numéricamente igual a la intensidad de la corriente que recorre el circuito considerado.

Ohm subraya que el valor de DE es únicamente determinado por «la naturaleza de la excitación galvánica», y complica la representación anterior, suponiendo que la «distribución de la electricidad» podría también ser interpretada por una recta tal como MN paralela a CD en el caso que no se conocieran los valores absolutos AC y BD . Se deduce inmediatamente de la figura que el segmento MP que representa la nueva distribución es igual al DE obtenido anteriormente. Es claro, que procediendo con el mismo criterio, podríamos trazar infinidad de

rectas cuya diferencia de potencial entre los extremos A y B sea siempre igual a DE , lo cual quiere decir, que a priori sería imposible determinar la caída de potencial en una resistencia dada. El problema admite una solución única sólo cuando conocemos (como podemos hoy saberlo), los potenciales de A y B .

Si se considera el caso en que el anillo está formado por dos partes de naturaleza distinta y de secciones diferentes, se llega a la representación que obtenemos cuando imaginamos en el circuito una fuerza electromotriz que origina una caída brusca de potencial en un punto dado del conductor. El problema lo plantea Ohm en los términos enunciados al principio del párrafo y llega a la conclusión de que en circuitos formados por dos porciones de sección y naturaleza diferente, en los puntos de contacto se produce una caída brusca en la tensión, debida a la fuerza electromotriz originada por cada contacto que se establece en estas partes heterogéneas del circuito y además que las inclinaciones de las líneas que representan la variación gradual y uniforme de la tensión en el resto del circuito, son inversamente proporcionales a los productos de las conductibilidades por las secciones.

Finalmente, Ohm generaliza su razonamiento al caso de un anillo formado por un número cualquiera de partes prismáticas heterogéneas y de secciones distintas. Este análisis le permite establecer la ley que rige el fenómeno en todos los casos, cuya expresión matemática es la que conocemos como ecuación generalizada de la ley de Ohm en una porción de conductor, deducida de su representación gráfica.

El cálculo de la intensidad de la corriente que recorre el conductor, lo lleva al siguiente enunciado:

«La intensidad de la corriente en una parte homogénea del circuito es igual al cociente que se obtiene dividiendo por la longitud reducida de esta parte, la diferencia de tensión que presenta en sus dos extremidades» (p. 45). Matemáticamente expresa esta ley en la siguiente forma:

$$S = \frac{A}{L} \quad (3)$$

donde S es la intensidad de la corriente, A la diferencia de tensión y L la longitud reducida del anillo.

Si comparamos la expresión anterior, con la tan conocida ecuación de la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R}$$

vemos que en realidad la diferencia entre la fórmula de Ohm y la que hoy empleamos, es simplemente debida a los símbolos utilizados. En efecto: S es la intensidad I ; A es la diferencia de potencial V y la longitud reducida L es lo que hoy llamamos resistencia. Conviene destacar que lo que Ohm llamaba — y antes y después que él, los físicos de la época —, «longitud reducida» no es en verdad, una longitud en el sentido geométrico, sino un segmento representativo de la forma en que variaba el fenómeno galvánico según la naturaleza del cuerpo considerado, es decir, de la resistencia propia del conductor.

Cabalmente, de la definición que de «longitud reducida» da Ohm, surge a nuestro juicio, la otra ley relativa a la resistencia de un conductor homogéneo y cilíndrico en función de sus dimensiones. «Nosotros entendemos — dice en la pág. 46 — por longitud reducida la suma de todos los cocientes obtenidos dividiendo las longitudes reales de las diversas partes homogéneas del circuito por los productos de sus conductibilidades y de sus secciones respectivas».

Para simplificar el razonamiento supongo un anillo homogéneo. Según la definición anterior, el valor de la longitud reducida será:

$$L = \frac{l}{KS}$$

si considero que la conductibilidad es la inversa de la resistividad, resulta

$$L = \rho \frac{l}{S} = R$$

siendo ρ la resistividad. Esta ecuación es como se sabe, la que representa matemáticamente lo que llamamos segunda ley de Ohm, ó ley de la resistencia de un conductor homogéneo y cilíndrico en función de sus dimensiones.

En el caso que se desee generalizar la expresión anterior a circuitos heterogéneos, bastará sumar las resistencias de cada porción de conductor para tener la resistencia total, o — en términos de Ohm — la longitud reducida total.

La trascendencia de la fórmula (3) es puesta bien de manifiesto por Ohm. Repetidas veces afirma que la intensidad de la corriente es igual en todos los puntos del circuito y que su valor depende exclusivamente de los factores que aparecen en la ecuación. Se preocupa de hacer notar como no existe variación alguna si las fuerzas electromotrices y las longitudes reducidas varían en igual proporción y llega a establecer que la diferencia característica entre los circuitos termoelectricos y los hidroelectricos se debe a que en los primeros la fuerza electromotriz es constante operando con los mismos metales, lo que no sucede con los conductores líquidos y de ahí la variación que estos últimos presentan en el valor de la intensidad de la corriente.

Estableció además que, en el caso de un circuito abierto, la resistencia del conductor toma un valor infinito, y por lo tanto la intensidad de la corriente es nula, o sea que no existe corriente eléctrica. Destacó que si se reemplaza un conductor por otro sin hacer variar el valor de la fuerza electromotriz ni de la intensidad, los dos conductores tienen la misma resistencia o longitud reducida, resultando que «sus longitudes reales están entre sí como los productos de sus conductibilidades por sus secciones, y en consecuencia, las longitudes reales están en la relación de las conductibilidades cuando las partes tienen la misma sección y en la relación de las secciones cuando la conductibilidad es la misma» (p. 56).

Todas estas consecuencias — así como otras que enuncia en las páginas 126 a 128 — evidencian que Ohm comprendía claramente el extraordinario valor de la ley que había descubierto.

Ohm extiende su estudio a los multiplicadores y explica porqué varía la intensidad de la corriente según el número de vueltas y la sección del conductor, apelando a su fórmula fundamental. Demuestra que las «acciones límites de dos multiplicadores cuyos hilos tienen el mismo diámetro y están formados por metales diferentes, están en la misma relación que las conductibilidades de esos metales y que las acciones límites de dos multiplicadores contruídos con hilos de la misma naturaleza están en la misma relación que las secciones de dichos hilos», relaciones que se obtienen si aplicamos la ecuación representativa de la resistencia de un conductor en función de

sus dimensiones, circunstancia que ratifica lo que dijimos anteriormente: que esa ley está ya enunciada en la obra de Ohm.

Interesante es el estudio que realiza sobre las corrientes derivadas por cuanto, si bien es cierto que los enunciados de sus leyes no aparecen con la claridad que Kirchhoff lo hace en 1847 (Poggendorff *Annalen* t. LXXII, p. 497), es también exacto que podemos encontrar en la obra de Ohm perfectamente identificada la primera ley de Kirchhoff y algunas consecuencias interesantes de las corrientes derivadas.

Ohm empieza por recordar que la ley representada por la ecuación

$$S = \frac{A}{L}$$

la ha deducido teniendo presente que se trata de un circuito homogéneo y agrega que, por un razonamiento similar al estudiado en aquella oportunidad, es posible extenderla a los circuitos derivados. Admite que en un punto cualquiera de un circuito éste se bifurque en tres ramales. La intensidad en cada derivación estará dada por la fórmula (3) donde el valor de A es el mismo para los tres ramales pues no puede variar, cualquiera sea el camino seguido, la diferencia de potencial entre los nudos considerados. Resulta, pues, que «las intensidades de la corriente en las tres ramas son recíprocamente proporcionales a sus longitudes reducidas», escribe Ohm y agrega que «cada una de estas intensidades podrá ser determinada cuando la suma de las tres intensidades sea conocida. Pero esta suma es evidentemente igual a la intensidad que posee la corriente en la parte no bifurcada del circuito; de otra manera el estado de este circuito, que hemos supuesto siempre invariable, sería alterado» (p. 65).

¿Qué otra cosa significa este enunciado final, sino el que establece la primera ley de Kirchhoff? Y en cuanto a la primera parte, ¿no es acaso, la primera consecuencia que se deduce al estudiar las corrientes derivadas, después de haber enunciado las dos leyes de Kirchhoff? Más aún; hay textos que, impropriamente, llaman a esa consecuencia la segunda ley de Kirchhoff.

Es suficiente, a nuestro entender, lo precedente para demostrar cuán claramente veía Ohm los fenómenos que estudiaba. Sin embargo, llegó aún más lejos al establecer la ecuación según la cual la inversa de la resistencia de un conductor equi-

valente es igual a la suma de las inversas de las resistencias de los conductores derivados. Aquí también recurre a su ecuación fundamental y define al conductor que hoy llamamos equivalente como un «conductor único que no modifique ni la intensidad de la corriente ni las fuerzas electromotrices del circuito» (p. 66).

Añadiremos, finalmente, que en toda su obra, Ohm estudia conductores metálicos. Conocía el fenómeno de electrólisis, cuya explicación estaba reservada a Faraday, quien en 1834 iba a revelar su esencia y a formular la terminología que usamos actualmente. Quizás el estado embrionario del conocimiento de los fenómenos electrolíticos, hizo que separara perfectamente las consideraciones sobre los conductores sólidos y los líquidos.

Amargura y triunfo de Ohm. Trascendencia de la actitud de la Sociedad Real de Londres. — Hemos visto en el Prefacio cuántas esperanzas había cifrado el sabio alemán en su trabajo.

La realidad no correspondió a las ilusiones forjadas. Muy al contrario, los círculos científicos oficiales no prestaron atención alguna a sus descubrimientos, pese al apoyo de Berzelius, Poggendorff y otros sabios. Causará sorpresa — y quizás dolor en espíritus más comprensivos — saber que esta obra inmortal brindó a su autor seis años de miseria en el más hondo sentido del vocablo.

No se trata de un juicio apasionado. Digo la cruda verdad. Renunció a su cátedra de Colonia porque su hombría de bien no le permitió acatar en silencio el recibimiento desdeñoso, hostil, que se le hizo en el ministerio de educación, a donde concurrió esperando obtener medios que le permitieran proseguir sus investigaciones o quizás la soñada cátedra universitaria. Así transcurrieron los seis años que median desde la aparición de su obra hasta que el gobierno bávaro lo designa profesor de la Escuela Politécnica de Nuremberg en 1833.

En esa época ya sus ideas habían sido confirmadas por Fechner en 1831. Años después, Pouillet, en Francia, llega a resultados similares a los que había obtenido Ohm. Este hecho es el que ha llevado a Bordeaux, en su libro: *«Histoire des sciences au XIX siècle»*, a emitir el siguiente juicio: «En el fondo, estas tres leyes (se refiere a las adoptadas por Ohm

como fundamentos de su teoría) eran un poco vagas. Es en 1827. Faltaban los trabajos de Pouillet en 1835 para demostrar experimentalmente las leyes de Ohm en forma clara y utilizable. La ley de las resistencias es, pues, más bien la ley de Pouillet que la ley de Ohm» (p. 410, Ed. Ch. Beranger. París, 1920). Sólo podemos justificar ese juicio como un exceso de mal entendido patriotismo. Negar la claridad del pensamiento de Ohm y la prioridad en el enunciado de las leyes que llevan su nombre, es faltar a la verdad histórica. Creemos haber evidenciado con transcripciones del propio texto de Ohm, la justicia de nuestro crudo juicio acerca de la expresión de Bordeaux.

Cierto es que la indiferencia más mortificante o el despectivo comentario, fué lo que recibió Ohm en compensación de su trabajo. Su teoría, calificada de pura fantasía, sin asidero alguno con la experiencia, fué sepultada en el olvido. Al menos así se creía.

La rehabilitación que el gobierno bávaro brinda al incomprendido físico no es suficiente para divulgar su nombre y sus ideas.

Es a la Sociedad Real de Londres a la que corresponde la gloria de haber justipreciado el valor de las experiencias y de la teoría de Ohm. Fué ella la que brindó la alegría más intensa al sabio herido en lo más íntimo de sus sentimientos y la que, con gallarda hidalguía pronunció las palabras que servirían para que el nombre de Ohm brillara con el resplandor que tiene en la actualidad.

Sucedía eso hace exactamente un siglo. Al otorgarle la medalla Copley, dice la Sociedad Real, entre otras cosas:

«El Consejo ha discernido la medalla de Copley por el presente año, al doctor G. S. Ohm de Nuremberg, por sus investigaciones relativas a las leyes de las corrientes eléctricas. Estas investigaciones están contenidas en diversas memorias que han sido insertadas en el Journal de Schweigger y los Annales de Poggendorff y en una obra separada que ha sido publicada en Berlín en el año 1827, bajo el título: *Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet*. En estas obras, el doctor Ohm ha establecido, *por primera vez* (el subrayado es mío) las leyes del circuito eléctrico, tópico de una importancia inmensa y hasta entonces envuelto en la más grande oscuridad (subrayo

yo). Ha hecho ver que las distinciones vagas establecidas entre la tensión y la cantidad no tienen fundamento y que todas las explicaciones sacadas de esas consideraciones son absolutamente erróneas. Ha demostrado, todo a la vez, por la teoría y la experiencia, que la acción de un circuito es igual a la suma de las fuerzas electromotrices divididas por la suma de las resistencias y que el efecto permanece siempre el mismo cuando este cociente permanece igual, cualquiera sea la naturaleza de la corriente, que sea voltaica o termoeléctrica. Ha dado también los medios de medir con precisión las resistencias separadas y las fuerzas electromotrices del circuito. Estas investigaciones han arrojado gran luz sobre la teoría de las corrientes eléctricas y aun cuando los trabajos de Ohm hayan permanecido en el olvido durante más de diez años (Fechner ha sido el único físico que, en este espacio de tiempo, ha admitido y confirmado sus vistas), en estos cinco últimos años Gauss, Lenz, Jacobi, Poggendorff, Henry y bastantes otros sabios eminentes han reconocido la importancia considerable de sus investigaciones y han sacado un partido muy grande para la conducción de sus propios trabajos... Los sabios de este país, que tienen mayor experiencia en las investigaciones relativas a la acción voltaica, rinden testimonio de los servicios que les ha prestado la teoría de Ohm y certifican la concordancia perfecta que existe siempre entre esta teoría y los fenómenos observados» (Proceedings of the Royal Society, t. IV, p. 336, 1841).

No puede ser más terminante la declaración precedente. Es de hidalgos reconocer que la resolución de la Sociedad Real en cuyo seno estaba el inmenso Faraday, constituye la rehabilitación más completa que podía esperar el sabio alemán. Y cabalmente, data de esta fecha la aparición del nombre de Ohm en todos los escritos científicos y textos de estudio, cada vez que debía estudiarse la intensidad de una corriente en un circuito galvánico.

En su patria, la sensación que causa el premio otorgado a Ohm hace que enseguida se lo considere uno de los físicos más eminentes. Se le adjudica la dirección de la Escuela Politécnica de Nuremberg, hasta que en 1849 pasa a Munich como conservador de las colecciones de física.

Durante ese plazo, y posteriormente, los trabajos realizados para verificar y extender la ley de Ohm se intensifican cada

vez más. Wheatstone en 1843 idea su famoso puente; Kirchhoff (a los 21 años de edad) en 1845 enuncia las leyes de corrientes derivadas; Kolhrausch en 1848, 1849 y 1854 verifica y amplía la ley de Ohm midiendo resistencias líquidas; Helmholtz en 1851 extiende su dominio a las corrientes inducidas alternadas; Gaugain (1860) verifica la ley en el caso de cuerpos malos conductores; una comisión inglesa estudia detalladamente en 1876 la cuestión y emite su juicio definitivo acerca de la validez de las leyes de Ohm; en 1877, Hoppe demuestra que es aplicable a los gases cuando las corrientes de polarización y térmicas que actúan son compensadas o determinadas; etc.

Por mucho que representara para el espíritu de Ohm el reconocimiento de su obra, debía perdurar seguramente en su espíritu la profunda amargura de una ilusión insatisfecha: me refiero a su ambición juvenil de llegar a catedrático universitario.

Es sólo en 1852, a los 65 años de edad, que recibe su nombramiento de profesor ordinario de física experimental en la Universidad de Munich. Dos años después, el 7 de julio de 1854, un ataque de apoplejía terminaba con esa vida que fué tan útil al progreso de la ciencia.

¡Poco tiempo duró, pues, la satisfacción de haber alcanzado la meta soñada en los años juveniles!

Nos hemos referido en nuestro estudio, exclusivamente a los trabajos de Ohm relacionados con las leyes llevan su nombre. Debemos dejar constancia que su contribución en otros dominios de la electricidad, de la óptica, de la acústica, etc., ha sido valiosa. Pretendió crear una teoría que abrazara los fenómenos calóricos, eléctricos, magnéticos y acústicos, habiendo publicado en 1849 la primer parte de su trabajo con el título de «Contribuciones a la física molecular» («Beiträge zur Molecularphysik». I Band). Desgraciadamente, su muerte truncó la obra en gestación.

La historia de la ciencia nos pone muchas veces, frente a hombres de recia envergadura, cuya vida es una permanente

lucha por el triunfo de una idea, una teoría, un hecho, que tiende a develar las leyes de la naturaleza.

Ohm es un ejemplo de estas existencias. Conoció las amarguras de la incomprensión, sintió el estileta de la envidia y saboreó el placer del triunfo. Ninguna sensación tuvo secretos para él. Quizás, en su digna e intensa miseria material, en los días largos del invierno crudo y del hambre insastifecha, añoró la dulce y plácida existencia de sus antepasados, cultivando su oficio sin mayores preocupaciones. Malgrado ello, perseveró en su tarea con la fé de un iluminado. El escepticismo no se anidó en su espíritu, ni lo anuló en su labor.

He imaginado a Ohm, pletórico de esperanza, hondamente alborozado, al iniciar sus estudios superiores; lo veo, joven, pujante, creyendo haber conquistado la meta de sus ensueños, ambular paulatinamente con mayor empeño al par que con creciente dolor, tras una posición que por lo menos le permita subsistir y proseguir sus investigaciones. Tras años de privaciones llega el cargo en el Colegio de Jesuitas de Colonia. Dispone — al fin — de un laboratorio. Realiza sus memorables experiencias, edifica su teoría. Ya está convencido de haber realizado su propósito y alcanzado su anhelo. La terca oposición de un funcionario incapaz de comprender el valor de la ciencia y el esfuerzo que reclama su creación, derrumba de un golpe el débil castillo de ilusiones. Transcurren catorce años hasta que la Sociedad Real de Londres le da el espaldarazo que lo lleva a la gloria. El día del triunfo, del reconocimiento, ha llegado. Muy tardíamente por cierto. Pero, por lo menos, pudo saborearlo. El desconocido pasa a ser el hombre eminente y la cátedra universitaria — meta ansiada durante tantos años — le es adjudicada cuando la vida está huyendo de su cuerpo.

¿A qué atribuir esa constancia, esa férrea determinación que lo mantiene en el curso de su larga existencia?

Encuentro una única explicación: Ohm poseía en alto grado un espíritu científico.

Conviene precisar el alcance del término. Tener espíritu científico no significa dedicarse a investigar. Muchos ejemplos podríamos citar de hombres dedicados a esa actividad que no son científicos. Extiéndese el concepto a los docentes.

Concibo al científico como un enamorado de la verdad a

cuyo resplandecimiento dedica su vida. No le interesa el aspecto material, no busca la fortuna, ni la prosperidad económica. Se satisface ampliamente con la obtención de un resultado, con el descubrimiento de una ley, con la explicación de un fenómeno. Solicita elementos de trabajo, aparatos, bibliografía, colaboración. A lo sumo, exige libertad para trabajar. Ignora el cansancio. No sabe de horas en blanco. Persigue su ideal — tantas veces inalcanzable — con el amor y la perseverancia más grandes.

El fracaso no lo amilana. Al contrario, le infunde nuevos bríos. Y prosigue su lucha. Hay un fuego inextingible en estos espíritus selectos, una especie de adivinación acerca del final inexorable. Vencerán, porque han empezado por vencerse a sí mismos.

Quien tiene ese espíritu científico es capaz de sobrellevar serena, estoicamente, tanto el dardo de la indiferencia o la calumnia, como la baba traicionera de la adulación.

Será un hombre de ciencia, porque atesora y cultiva ese espíritu y porque siente la obligación, que es a la vez placer, de trabajar y estudiar sin descanso. Concibe y comprende su tarea. Y la ejecuta.

Porque supo ejercitar esas cualidades y fortalecer esos sentimientos, la desesperación no se anidó en el espíritu de Ohm. Su fortaleza moral, su capacidad de trabajo, su tenacidad admirable y su intuición sagaz, alimentaron sus esperanzas y confió en el éxito de sus trabajos. Pienso que creía como Einstein que «la misión más alta del físico es la investigación de las leyes elementales más generales, desde las cuales se parte para alcanzar, por simple deducción, la imagen del mundo» (A. Einstein: «Comment je vois le monde», p. 155, París, 1937). Por ello, después de descubrir las leyes fundamentales que vinculan la resistencia de un conductor con sus dimensiones o con la fuerza electromotriz del generador y la intensidad de la corriente, intentó elaborar una teoría que diera cuenta de fenómenos tan aparentemente inconexos como la luz, el sonido, el calor, el magnetismo y la electricidad.

No interesa que el esfuerzo se malograra. Su contribución efectiva al desarrollo de la electricidad, brindando una de las leyes más fundamentales, lo clasificaba entre los hombres que habían arrancado un secreto a los fenómenos de la naturaleza.

El afán del sabio en todas las edades ha tendido a postular esas leyes básicas, sobre las cuales puede edificarse todo el edificio de una rama de la ciencia, recurriendo simplemente al método deductivo.

Seguimos ignorando aún esa ley de la cual puedan derivarse todas las otras como consecuencias lógicas y necesarias de esa premisa fundamental. Y sin que ello implique una desesperanza nociva, es dable afirmar que el hombre, en su avance gigantesco, está todavía lejos de aproximarse a ese ideal.

La ciencia, felizmente, es infinita en su variedad y en sus posibilidades. Cada nuevo descubrimiento abre insospechados senderos que nos hacen vislumbrar nuevos progresos. Así, indefinidamente, a medida que avanzamos en el conocimiento de las leyes de la naturaleza, más nos apercebimos de su belleza y de la insuficiencia de las leyes conocidas.

Esa variabilidad de las teorías y leyes ha conducido a algunos a hablar de la bancarrota de la ciencia. Nada más falso ni antojadizo. Descubrir que la ley de Mariotte o las de Gay Lussac no son válidas sino en casos ideales, es acumular un elemento positivo al conocimiento humano. Los fracasos en ciencia tienen un valor tan positivo como los éxitos. Toda experiencia, toda ley, que conduce a un resultado opuesto a nuestros conocimientos, puede entrañar el germen de nuevos descubrimientos. He ahí el auténtico hallazgo.

Si las teorías fueran inmutables, sería signo de haber alcanzado la explicación rigurosa de la verdad, y ello todavía está distante. De ahí que las modificaciones introducidas a conceptos clásicos, la presencia de una nueva teoría cuyo valor se exagera por ese espíritu innato aún en el hombre de ciencia de sobre-justipreciar el valor de sus propios descubrimientos, no representen una destrucción total de lo ya adquirido, sino un eslabón más hacia la perfección.

La historia de la física ratifica plenamente esa aseveración. Las teorías se modifican; las leyes se retocan. Sólo algunas permanecen como pilares del edificio construido. Entre ellas, en electricidad están las debidas a Ohm.

El sabio auténtico sabe perfectamente que su obra es siempre incompleta. Por eso persevera. Por eso también, acostumbrado a ceñirse a la verdad que le revela la naturaleza, a seguir los rumbos que la experiencia marca o las deduccio-

nes que la observación le presenta, se muestra circunspecto al juzgar la obra ajena y manifiesta en sus actos — conscientes o no — una modestia ejemplar.

Ohm fué de esa estirpe. Cedió siempre que se trataba de una ventaja de índole personal porque tenía fe en su obra. Fué modesto en la propia valoración. Fué justo, noble, pleno de equidad, cuando se trataba de comentar los trabajos de otros científicos, aún de aquellos cuya actitud tantos sinsabores le había aparejado. Supo olvidar el agravio y la envidia para alentar a quienes podían contribuir al progreso del saber.

Esas cualidades morales realzan su personalidad. Luchó con el medio ambiente y triunfó de él gracias a su capacidad y a su esfuerzo. Tome ejemplo aquel que cree fácil lograr la consagración o la busca en el apoyo extraño o la influencia palaciega.

En todas las etapas de la humanidad como en todos los órdenes de actividades, hay muchas formas de llegar. No perdura la obra de aquel que simula capacidad, finge labor y confía en su audacia para escalar posiciones. Sólo la obra hecha con amor y con trabajo, con honradez mental y moral, con capacidad y altruismo, resiste los embates del tiempo y de la crítica.

Ohm fué de éstos últimos. Tributo respetuoso de homenaje a sus valores éticos y a su producción científica es éste trabajo que pretende actualizar la gloria del sabio alemán y presentar su vida como ejemplo a las generaciones actuales, un tanto presurosas para imponerse y demasiado expuestas a un pesimismo venenoso que carcome voluntades y anula temperamentos.

Cortés Plá

EL PORVENIR DE LA FISICA TEORICA ⁽¹⁾

El físico en el estudio de la naturaleza tiene dos métodos: el método del experimento y de la observación y el método del razonamiento matemático. Las ideas sobre la relación que existe entre estos dos métodos se han modificado gradualmente por la evolución reciente de la física y seguirán modificandose en los tiempos venideros. Tomemos como punto de salida el esquema de la física que era generalmente aceptado en el último siglo — el esquema mecanístico. Este considera todo el universo como un sistema dinámico extremadamente complicado sujeto a leyes de movimiento que son esencialmente del tipo Newtoniano. La física teórica representa estas leyes por ecuaciones matemáticas. De todas las soluciones que tienen estas ecuaciones ella elige aquéllas que se refieren a condiciones observadas. La idea dominante en esta aplicación de las matemáticas es que las ecuaciones que representan las leyes de movimiento sean de una forma sencilla. El gran éxito de esta idea se debe a su eficacia. Parece que en gran escala ecuaciones de forma sencilla rigen los fenómenos físicos. Sin embargo el método tiene sus límites. Pues el principio de sencillez se aplica solamente a las leyes fundamentales del movimiento y no a los fenómenos naturales en general. Hay fenómenos que parecen a primera vista sencillos, que no están conectados de manera directa con las leyes fundamentales del movimiento. Así parece ineludible modificar el principio de la sencillez. El descubrimiento del principio de la relatividad ha contribuido a esta revisión de las ideas.

Una de las leyes fundamentales del movimiento es la ley de la gravitación. Según Newton esta ley está representada por una ecuación muy sencilla. Pero según Einstein, se necesita el desarrollo de una técnica refinada para poder escribir su

⁽¹⁾ El artículo refleja ideas manifestadas por P. A. Dirac en diversas ocasiones.

ecuación. Con la mejor voluntad del mundo no se puede hablar más de sencillez en este caso.

A pesar de ir contra el principio de sencillez los físicos han aceptado casi unánimemente la teoría de la relatividad por su belleza matemática. Esta cualidad no puede ser definida, pero la gente que se ocupa de matemática comprende lo que se quiere decir con eso. El espacio ordinario fué substituído por un espacio de cuatro dimensiones el cual permite una formulación mucho más simétrica y hermosa de las leyes de la naturaleza. Matemáticamente, el espacio de tres dimensiones es nada más que una forma degenerada del espacio relativista. Vemos ahora que tenemos que cambiar el principio de sencillez por un principio de belleza matemática. El investigador en sus esfuerzos para expresar las leyes fundamentales de la naturaleza en forma matemática, debería aspirar sobre todo a la belleza matemática.

Una segunda revolución se produjo en la física de este siglo con el advenimiento de la mecánica cuantista. Esta mecánica tiene un tipo muy diferente de la Newtoniana. La diferencia se puede expresar de una manera concisa, pero un poco abstracta, diciendo que en la nueva mecánica la multiplicación no es más conmutativa. Mientras la teoría de la relatividad ha introducido una nueva geometría en la física, la mecánica cuantista exige la aplicación de un vasto dominio de la matemática pura — el álgebra no-conmutativa. Esto nos indica el rumbo que la física teórica probablemente seguirá en el futuro. Grandes ramas de matemática pura serán introducidas para poder cimentar los adelantos fundamentales de la física. La matemática pura y la física se conectarán cada vez más, aunque sus métodos quedan diferentes. Se puede expresar esta diferencia diciendo que el matemático juega un juego en el cual él mismo inventa las reglas, mientras el físico juega un juego en el cual la naturaleza le proporciona las reglas. Pero en la medida en la cual avanza el tiempo se hace cada vez más evidente que las reglas que el matemático encuentra interesantes son las mismas que la naturaleza ha elegido. El resultado de esta evolución es difícil de prever. Posiblemente las dos ciencias se unificarán finalmente. Cada rama de la matemática pura tendrá su aplicación física, siendo su importancia en la física proporcional a su interés en la matemática. Actual-

mente estamos todavía lejos de esta situación. Por ej. el único espacio verdaderamente importante en física, es el de cuatro dimensiones, mientras los matemáticos estudian con el mismo interés los espacios de un número de dimensiones cualquiera. La tendencia hacia la unificación de matemática y física podrá, según Dirac, proveer al físico con un nuevo método poderoso de investigación. Este método consiste en elegir una rama de la matemática de la cual uno piensa que tiene buenas perspectivas para la aplicación en la física. Habiéndose decidido para una, el investigador debería proceder a desarrollarla buscando constantemente la manera de la cual ella se prestaría para la interpretación física.

Para la descripción completa de la naturaleza no se necesita solamente un sistema completo de ecuaciones de movimiento, sino también el conocimiento de las condiciones iniciales. Pero las teorías matemáticas se aplican al primero, mientras las últimas son accesibles solamente a la observación. Esta posición es poco satisfactoria filosóficamente, puesto que va contra la idea de la unidad de la naturaleza. Además si la descripción matemática se aplica solamente a una parte de la naturaleza, esta parte debería ser distinguida claramente del resto. Pero en la realidad no parece existir una línea natural de separación. Por ej. ¿está la masa de las partículas elementales sujeta a la teoría matemática o hay que considerarla como condición inicial? Esta situación poco satisfactoria es empeorada todavía por la mecánica cuantista. Según la mecánica clásica, el resultado de una observación está determinado y puede ser calculado teóricamente de las condiciones iniciales. En cambio, en la mecánica cuantista hay generalmente una indeterminación en el resultado de una observación que tiene su origen en la posibilidad de una variación discontinua, incontrolable e imprevisible del objeto observado.

El máximo que se puede calcular teóricamente es la probabilidad de que se obtenga un resultado particular. Esta situación ambigua no se debe atribuir a una imperfección de la teoría, sino es esencial para la aplicación del formalismo usado por la mecánica cuantista. Por consiguiente de acuerdo con la mecánica cuantista necesitamos para una descripción completa del universo no solamente las leyes del movimiento y las condiciones iniciales, sino también información sobre las

variaciones discontinuas, espontáneas de los sistemas atómicos.

Este aumento de la parte no-matemática de la descripción del universo provoca una reacción filosófica contra la mecánica cuantista y es, posiblemente la razón, porque algunos físicos de gran fama encuentran difícil aceptarla. La objeción muestra claramente que los fundamentos de la física están todavía lejos de su forma definitiva.

El tercer gran movimiento de la física del siglo actual es la nueva cosmología. Posiblemente ella resultará filosóficamente más revolucionaria todavía que la relatividad o la mecánica cuantista aunque por ahora es difícil comprender todo su alcance. Su punto de salida es el desplazamiento de las líneas espectrales de cuerpos celestes lejanos que nos indica que ellos están retrocediendo de nosotros con velocidades proporcionales a su distancia. Las velocidades de los más distantes son tan enormes que es evidente que tenemos aquí un hecho de la mayor importancia, no una condición temporaria o local, sino algo fundamental para nuestro concepto del universo. Cualquiera que sea la interpretación teórica que la ciencia dará definitivamente a este fenómeno, siempre resultará de ello una revolución de los conceptos clásicos de nuestro universo.

Guillermo Knie

30 junio 1941.

SOBRE EL DESENVOLVIMIENTO DE ALGUNOS CONCEPTOS DE LA FÍSICA

Aprovecho la cortesía del señor Guillermo Knie al permitirme manifestar a continuación del artículo anterior algunos puntos de vista personales y no completamente conformes con algunas de las ideas expuestas en dicho artículo y corrientes entre los cultores de la Física Teórica.

Considero como una de las finalidades de «*Mathematicae Notae*» la de fomentar el espíritu crítico de nuestro lector. Por otra parte digo sinceramente que me siento acaso un poco más fiel que muchos sabios contemporáneos a aquella filosofía positiva que ha inspirado el maravilloso florecimiento de las ciencias físicas durante tres o cuatro siglos; por lo cual me parece prudente que a algunas interpretaciones más o menos fiadas en la imaginación, sea conservado por el momento en lo posible el nombre de sus propios autores, antes de afirmar su definitiva ciudadanía científica.

Ya no debe aceptarse sin reserva la afirmación que se encuentra repetida frecuentemente y por voces de las más significativas de que pueda caracterizarse como mecanístico el esquema que está como fundamento de la física teórica del siglo pasado; y esto a pesar quizás de las propias declaraciones de los mismos autores. En una muy perfecta exposición del estado de las teorías atómicas modernas hasta los años muy recientes (*Arthur Haas - Materienwellen und Quantenmechanik - 4/5 Auflage - Leipzig - 1934*) encuentro recordadas las palabras de HUYGHENS (*Traité de la lumiere - Leyden 1690*) «Dans la vraye philosophie on conçoit la cause de tous les effets naturels par des raisons de mécanique; ce qu'il faut faire a mon avis, ou bien renoncer a toute espérance de jamais rien comprendre dans la physique». Estas las palabras; pero no creo que el significado que le daba Huyghens fuese efectivamente muy restringido, cuando pensamos que es el mismo autor de la interpreta-

ción ondulatoria del fenómeno luminoso, opuesto a la teoría de la emisión de Newton. Hay que recordar también que es del mismo tiempo el «hipótesis non fingo», (no quiero enunciar hipótesis) del mismo Newton. En los siglos sucesivos el éxito deslumbrante de la mecánica celeste puede bien haber justificado expresiones excesivamente confiadas y deterministas, como las que se recuerdan de Laplace que el pasado y el futuro del mundo podría ser conocido por una mente matemática bastante poderosa para tener en cuenta el estado mecánico actual (coordenadas y velocidad) de todos los puntos del universo, o de Helmholtz señalando como meta final de la ciencia física la de reducir todos los fenómenos al juego de fuerzas de atracción y de repulsión entre puntos materiales. Sin embargo, pueden considerarse éstas como manifestaciones sobre todo literarias de ciertas corrientes filosóficas que muy poca influencia han tenido sobre las propias concepciones de la física teórica; la cual creo que, con mayor exactitud, pueda decirse que al final del siglo pasado estaba caracterizada por ser esencialmente eclectica, admitiendo en el mismo plano: las teorías de interacciones moleculares como las teorías de medios continuos, las hipótesis sobre el éter, las de fluidos ficticios, las teorías estadísticas, energéticas y termodinámicas. Se admitían estas teorías tan imparcialmente sobre igual plano, que a menudo los problemas eran tratados según concepciones aparentemente opuestas por los mismos investigadores. Se explica por otro lado este estado de ánimo, comparándolo con la teoría del conocimiento puramente economista de la cual fué campeón un mecánico, Ernesto Mach, y con la actitud de los lógicos matemáticos en considerar plenamente justificado encarar la construcción lógica de una determinada teoría, indiferentemente sobre los más diversos sistemas de ideas primitivas y de postulados.

Estímese esta observación sólo como una debida puntualización; pero no queremos luchar con palabras. En un libro reciente de A. Einstein y L. Infeld⁽¹⁾ que tendremos que

(1) *“L'évolution des idées en physique, des premiers concepts aux théories de la relativité et des quanta”* - FLAMMARIÓN - París.. Cito de la traducción francesa, por no tener el original inglés. Existe una edición castellana con

volver a citar, se identifica la concepción mecanista con una mecánica de fuerzas centrales que por cierto desde hace mucho no interesaba ya particularmente ni a los físicos, ni a los físicos-matemáticos del siglo pasado. Pero justamente llaman la atención los Autores sobre la importancia que ha tenido en el desarrollo de la física matemática de los años más recientes la noción de «campo de fuerzas».

En mecánica clásica, la noción dinámica de la fuerza es, hablando el lenguaje de la lógica, una *idea derivada*; la experiencia no nos enseña nada sobre las fuerzas dinámicas; lo que únicamente en este campo nos está dado averiguar son aceleraciones. La misma experiencia nos aconseja atribuir a cada cuerpo una masa característica y *definir* la fuerza como producto de masa por aceleración. Ciertamente que a esta *definición*, nosotros agregamos enseguida algunos postulados como el de la independencencia de los efectos de fuerzas distintas (composición de las fuerzas) y el de la comparabilidad estática de las fuerzas dinámicas; pero en la mayoría de los casos estos postulados actúan como definiciones de aquellas ficciones que son las fuerzas. Si una piedra, puesta sobre la mesa, no cae, decimos que la mesa actúa sobre la piedra con una fuerza igual y opuesta al peso; pero, si no hubiesen otras razones para inducirnos a dar al fenómeno esa expresión, sería igualmente justificado decir que, por la presencia de la mesa, deja de actuar la gravedad; hasta tanto que nos limitamos al fenómeno en cuestión, la única noticia que tenemos de aquella fuerza (dinámica) que atribuimos a la mesa es el hecho de anular la aceleración de la piedra; o, si queremos, imprimirle una aceleración complementaria igual y contraria a la de la gravedad.

«Campos de aceleraciones» eran conocidos desde la fundación de la mecánica por Galileo y Newton; eran los de la gravedad y de la gravitación; pero las fuerzas correspondientes (pesos y atracciones siderales) tienen todavía aquel carácter derivado. La situación ha ido cambiando cuando vinieron a

el título un poco excesivo “*La física, aventura del pensamiento*”; pero hay que notar que con las mismas palabras se inicia un libro de varios años anterior (1929) de JEAN PERRIN (*Les éléments de la physique - Bibliothèque d'éducation par la science*): “Preface - L'Aventure merveilleuse où l'Humanité se trouve engagée depuis une génération à peine...”.

agregarse los campos eléctrico y magnético donde el coeficiente llamado masa inercial se complica con otra masa (eléctrica o magnética). Volviendo a hablar el lenguaje de la lógica, podemos decir que la noción de campo se vuelve en *idea primitiva*, la cual, dejando de lado algunos particulares de la terminología en uso en la física, podemos enunciar de la manera siguiente: *Las condiciones físicas ambientales* (no queremos ahora precisar su consistencia) *determinan* (tampoco queremos en este momento decir como, y aquí está el carácter de idea primitiva) *un sistema de vectores* (el *campo*) *definidos uno para cada punto del espacio*; y eso en modo independiente de ser o no ser ocupados estos puntos geométricos por determinados puntos materiales. Pero, en cuanto efectivamente un punto material venga a encontrarse en un determinado lugar, por efecto del campo adquirirá una aceleración; queda todavía por determinar la ley (física) que transforma el vector campo en el vector aceleración y esta ley podrá depender de las condiciones físicas del punto material considerado. El caso en que esta transformación se reduzca a la multiplicación por un número (es decir que el vector aceleración sea paralelo al vector campo) es el más simple y es aquel al cual preferentemente⁽¹⁾ se re-

(²) Pero no únicamente. Considerando, para dar un ejemplo, el caso del campo eléctrico, del conocimiento experimental de aceleraciones electrostáticas en el aire, considerado a comparación con otros cuerpos como un buen representante del vacío, nace la *abstracción* de un campo de vectores (desplazamiento eléctrico) $\mathcal{D}$: de esa abstracción se hace depender un campo de vectores $\mathcal{E}$ (el cual en verdad representa el primer contacto con la experiencia) por una relación simbolizada en $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$; ϵ , que llamamos *constante dieléctrica*, es un operador el cual transforma un campo de vectores en otro campo de vectores; en la mayoría de los casos el acuerdo con la experiencia se obtiene considerando esta ϵ como un multiplicador numérico; sin embargo en algunos estudios sobre cristales dieléctricos conviene considerarla como una homografía vectorial, (o, como también se dice, como un tensor); para llegar al vector aceleración es necesario todavía tener en cuenta dos números, los que llamamos carga eléctrica e y masa inercial m , resultando la aceleración expresada por $\frac{e\mathcal{E}}{m}$ y la fuerza por $e\mathcal{E}$. Se ve, en la comparación con las palabras del texto que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son ideas abstractas, de simple contenido geométrico, aunque definidas por las *condiciones ambientales*. Apenas es de notar que, para interpretar exactamente en el ejemplo lo que en el texto está indicado como multiplicación por un número, hay que llevar ϵ al denominador escribiendo $\mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{D}$; en el caso de ser ϵ una homografía, $\frac{1}{\epsilon}$ es

fieren las consideraciones físicas hasta la actualidad. El hecho que la física, en su desarrollo, nos ha acostumbrado a atribuir a los puntos materiales una *masa inercial* nos pone sobre la ruta para separar en el operador que efectúa dicha transformación dos factores, uno dependiente de la masa inercial, el otro independiente; el inverso del primer factor tiene el lugar de la *masa dinámica*, si se llama fuerza al vector que queda por su supresión. Con la introducción del *campo* como idea primitiva, la fuerza se ha desvinculado de la aceleración y ya no debe extrañar que pueda entonces la masa dinámica depender de otras variables, distintas de la masa inercial. Los fenómenos vinculados con las grandes velocidades electrónicas han sido responsables de que, aun antes de la enunciación de la teoría de la relatividad, se introdujera sin demasiado asombro la idea de una masa dinámica dependiente de la velocidad; en el principio se la consideró, por verdad, como una masa ficticia de origen electromagnético; pero desde el punto de vista conceptual el paso estaba hecho y se debe por tanto considerar como accidental que la aplicación a masas materiales haya acontecido en coincidencia con la teoría de la relatividad einsteiniana ⁽³⁾.

la homografía inversa. Se puede notar también que en este escalonamiento de campos y de operadores talvez compruébese un poco lo de la "belleza matemática" de la cual hablaremos más adelante; pero no es la belleza que se sobrepone a los hechos, sino la belleza que compone el ramo de los hechos.

Notemos finalmente que en el momento en que en la física relativista se presenta conveniente distinguir una masa longitudinal y una transversal, la misma componente que llamamos más abajo masa dinámica deja de ser factor numérico por volverse en transformación vectorial.

(³) Merece recordar que las primeras consideraciones que podían llevar a la concepción de una masa electromagnética parecen ser de J. J. Thomson en 1881; las primeras determinaciones experimentales de masas electromagnéticas funciones de la velocidad, fueron hechas por Kaufmann en 1904 estudiando el recorrido de los rayos catódicos bajo la influencia de un campo eléctrico y uno magnético; recién en 1904-6 siguieron desarrollos teóricos en el marco del electromagnetismo clásico por Bucherer, Abraham, Lorentz, Poincaré; los valores numéricos deducidos de estas teorías concuerdan muy bien con la experiencia. Las primeras enunciaciones del concepto relativista de Einstein son de 1905. Leyendo libros modernos, parece alguna vez que esta historia tan reciente sea generalmente olvidada. Así CASTELFRANCHI (*Física Moderna*) en el Cap. VI — *La relatividad y la masa*, dice en el párrafo 77: Comprobaciones experimentales: La variabilidad de la masa prevista (!) por Einstein sólo es sensible para velocidades del mismo orden de la velocidad de la luz... Experimentos meticulosos de numerosos físicos han comprobado la exactitud de la ley...

Pero las palabras velocidad y aceleración suponen un sistema de referencia; es verdad que, para la interpretación mecánica del universo, la determinación de este sistema de referencia tenía una importancia secundaria con la primera concepción de la fuerza; si un cambio en la elección de los elementos de referencia que se suponían en reposo hacía cambiar las aceleraciones, cambiaban simultáneamente las fuerzas; es decir, cambiaban algunos términos en la representación del fenómeno, pero la mecánica seguía aplicándose; podía una fuerza centrífuga volverse en fuerza real o viceversa sin que nada cambiara esencialmente; y ocurría en efecto este caso sin que nadie se asombrara, por ej. cuando se pasaba de la teoría de la gravedad, aplicada a los cuerpos terrestres, a la teoría de la gravitación universal. Uno de los argumentos en favor de la teoría copernicana fué ciertamente la inmensidad de las fuerzas que habrían tenido que contrastar a las fuerzas centrífugas desarrolladas por la rotación de la capa celeste; pero cuando se piensa en lo infinito del cosmos, no hay más razón para suponer que el hecho de que estas fuerzas sobrepasaran nuestra imaginación fuese por sí mismo un obstáculo insalvable; mucho mayor importancia tuvo por cierto la disposición del pensamiento científico a evitar la necesidad de imaginar hechos (en este caso las fuerzas en cuestión) que no tienen otro objeto que el hecho mismo, sin mayor influencia en la explicación de los fenómenos; y lo peor, en este caso, es que estas fuerzas habrían tenido que variar continuamente en tanto que se perfeccionaban nuestros conocimientos sobre las distancias estelares. Esto por lo que se refiere a la rotación de la tierra respecto al cosmos; por lo que se refiere a la traslación, se sabe que las razones de Copernico eran más que todo de sencillez geométrica y que el trabajo evolutivo pudo completarse sólo a principio del siglo XVIII con el descubrimiento de la aberración estelar.

Lo que en tiempos más recientes pudo hacer parecer urgente una decisión acerca del sistema de referencia fué la intervención de los campos magnéticos y eléctricos; a fines del siglo pasado se le llamaba a este sistema de referencia ideal, el cuerpo «alfa»; pero aún eran escasas las discusiones para darle

Son célebres los experimentos de Kaufmann y Bucherer...'' ¡En tanto que faltan fechas, el lector está inducido a entender la historia según el orden de la exposición!

una determinación concreta. La contestación que daba a la cuestión la teoría «economista» de la ciencia era ésta: «el sistema de referencia es aquel en el cual son ciertas las leyes de la física»; ni tampoco se debe considerar como una necesidad que este sistema pueda identificarse con ningún sistema definible en términos de los objetos que nos rodean; aun cuando no se olvide que, por el modo mismo de la formación de nuestras ideas, diciendo sistema de referencia pensamos en algo que, dentro de la aproximación de los asuntos diarios, debe poderse sustituir por un sistema experimentalmente identificable y ligado a la tierra o a determinado campo físico (gravitacional, eléctrico, magnético, etc.). Esto no impide que, cuando las leyes adquieren, en virtud de una abstracción, un valor absoluto, diríamos de reglas del pensamiento, sean los sistemas de referencia objetivamente determinables que tendrán que adaptarse al sistema ideal que está definido por aquella abstracción⁽⁴⁾.

En las últimas páginas del libro citado de Einstein e Infeld encontramos palabras muy parecidas:

«La ciencia no es una colección de leyes, un catálogo de hechos no vinculados entre sí. Ella es una creación del espíritu humano, por medio de ideas y de conceptos libremente inventados. Las teorías físicas intentan formar una imagen de la realidad y ponerla en contacto con el extenso mundo de las impresiones sensibles. Es así que nuestras construcciones mentales sólo se justifican si y en cuanto nuestras teorías constituyen ese vínculo».

Como decíamos, muchas palabras no son muy distintas de las nuestras anteriores; sin embargo es el acento que se pone sobre la creación por el espíritu humano de ideas y de conceptos libremente inventados, aquel que puede variar las interpretaciones.

Y justamente el señor Knie nos hace observar que en el desarrollo de algunas teorías modernas la interpretación de la «belleza matemática» pueda parecer la más propia. Pero como matemáticos nos parece honesto afirmar que toda la matemá-

(4) Se lee frecuentemente en la introducción de los tratados de física que el sistema de referencia es aquel de las estrellas fijas. No creo sean necesarias palabras para asegurar que cuando el físico experimental se propone establecer una ley cualquiera, puede pensar en el aparato con el cual trabaja, en la pieza donde trabaja, en la tierra..., pero nunca en las estrellas.

tica es bella cuando ilumina en nuestra mente los nexos lógicos de las cosas; la belleza matemática no es criterio y sobre este hecho negativo nos permitimos insistir un poco.

No es probablemente aventurado afirmar que en los desarrollos de la teoría de la relatividad quizás se inicie por primera vez un fundamental desplazamiento de valores entre experiencia, intuición y matemática, que posiblemente se refleja en aquella expresión de los conceptos libremente inventados que hemos subrayado. Observa todavía muy bien el Sr. Knie que un criterio dominante en la idealización matemática de los hechos experimentales que se ha concretado en la mecánica y la física clásica ha sido la sencillez; si queremos puntualizar esta sencillez podemos decir que consiste en mantener en lo posible la analogía *intuitiva* con otros hechos conocidos que ya han encontrado su expresión satisfactoria. La relatividad especial rompe primero esta continuidad intuitiva aceptando como explicación de un hecho experimental que parece sorprendente, la postulación de una fórmula; pero Einstein y otros buscan soldar nuevamente esa continuidad con consideraciones antropomórficas de observadores y relojes que transponen el problema conceptual de describir los fenómenos para el uso del sujeto, en el problema real de describirlos para el uso de los objetos mismos. A la noción abstracta del sistema de referencia definida, como decíamos, por el conjunto de las leyes físicas, se substituye ahora otra noción, la del *sistema de referencia inercial*, que cumple la misma función⁽⁵⁾, pero con un substratum objetivo menos claro⁽⁶⁾.

(5) La novedad reside en que, mientras en la concepción antigua no se excluía que el conjunto de las leyes pudiera individualizar el sistema de referencia (pero, como decía, efectivamente la cosa no interesaba), en la nueva se afirma la indiferencia entre toda una familia de sistemas de referencia en movimiento traslatorio uno por respecto al otro, a la cual se asigna un oficio privilegiado en la determinación de las leyes físicas. (cfr. p. ej. E. e I. l.e. Cap. III: *Le système de référence*). Resulta así que la teoría de la relatividad (por lo menos hasta que es la llamada relatividad especial —relatividad de la primera forma—; y a pesar del entusiasmo que en sus primeros tiempos ha despertado en medio a los filósofos) supone en realidad un absoluto. Este absoluto, según J. Perrin en el libro citado (nota (1)), es todavía la capa celeste supuesta rígida; pero no puede ser tal para el temperamento más abstracto de Einstein.

(6) Esta falta de claridad está puesta en evidencia por Einstein e Infeld en el párrafo “Temps, distance, relativité” del libro citado (Cap. III).

Poniéndose el problema de la relatividad general, Einstein se propone rechazar también este residuo; al resolverlo, el principio de analogía sigue valiendo en puntos de interés trascendental.

Si volvemos a las consideraciones anteriores sobre fuerzas y campos y tratamos de aplicarlas a la gravitación, es fundamental el hecho de que la aceleración depende sí de la posición del punto, pero no de sus características físicas; depende sí de las condiciones ambientales (cuerpos presentes); pero ya anteriormente habíamos estado inducidos a clasificar como geométricos campos en estas condiciones; la comparación con el modo de tratar los vínculos en la mecánica clásica (por ej. el movimiento geodésico de un punto libre sobre una superficie) justifica aún más este punto de vista. Por tanto Einstein se propone de transportar en lo geométrico los campos de tales características⁽⁷⁾ interpretando el campo como una modificación de la métrica del espacio en el cual un punto se mueve libremente; la intuición analógica, aunque en forma que sólo podía producirse por una mente genialmente matemática, mantiene por completo su dominio. Donde la intuición cede la dirección al arbitrio matemático está en fijar el carácter riemanniano de la nueva geometría; está además en una serie casi ilimitada de decisiones arbitrarias que sigue a la introducción de funciones, en principio no mayormente determinadas, en la definición de aquella métrica.

Pasamos ahora a la más reciente física cuántica.

Creo necesario empezar con aclarar, para el lector de «*Matematicae Notae*», algunos fundamentos matemáticos. Quizás el lector se encuentre un poco sorprendido al leer que la diferencia entre la nueva mecánica y la newtoniana pueda expresarse de una manera concisa diciendo que en ella la multiplicación no es más conmutativa. El lector tiene pues el derecho de preguntarnos de qué manera la multiplicación podría no ser conmutativa, pues la propiedad conmutativa de la multiplicación *se demuestra* partiendo de su definición; y una

(7) Una característica importante del campo gravitacional acentuando su carácter geométrico, la de no tener tiempo de propagación, ha sido abandonada admitiendo que la geometría fuese cuatridimensional, del cronotopo.

multiplicación no conmutativa no puede por lo tanto ser multiplicación; hay luego que explicar lo que es.

En verdad, propiamente en la mecánica clásica se encuentran operaciones que llevan el nombre de multiplicación, pero no son multiplicaciones en el sentido común y no son conmutativas; tal es el producto vectorial. El momento-vector de una fuerza respecto a un punto O es el producto vectorial del vector-fuerza por el vector que une su punto de aplicación al punto O ; el producto vectorial no es conmutativo, pero tampoco podría uno pensar de conmutar los factores al calcular un momento-vector porque si se conmutaran los factores se consideraría el momento de otra fuerza respecto a otro punto. Igualmente, refiriéndonos a la noción de campo recordada más arriba, el vector intensidad en un punto dado del campo magnético generado por un elemento de corriente se expresa, salvo un factor numérico, sobre el cual no queremos insistir ahora, por el producto vectorial del elemento de corriente por el vector que lo une al punto dado. Estos productos no conmutativos no son productos, sino operaciones determinadas sobre objetos determinados a los cuales se ha dado el nombre de producto para recordar que gozan de ciertas propiedades de los productos de números, propiedades que a la verdad se reducen únicamente a la distributiva. La diferencia entre estas operaciones no conmutativas y las que se usan en la mecánica cuántica es que en ésta se llama producto a operaciones que no se definen más que como figuras gráficas, entre magnitudes que tampoco se definen y que no se pueden medir.

Los ejemplos que hemos recordado de operaciones que se llaman multiplicaciones y que no son conmutativas pueden considerarse como casos particulares de los productos de matrices o, sólo cambiando la interpretación, productos de sustituciones lineales, y es precisamente en esta forma que por primera vez se han introducido en la mecánica cuántica multiplicaciones no conmutativas. Fué W. Heisenberg el que, observando que, en aplicación de la ley de Rydberg-Ritz y del esquema atómico de Bohr, las frecuencias de las radiaciones que un átomo emite se pueden ordenar en un cuadro dependiente de dos variables que toman sucesivos valores enteros, consideró que ciertos sistemas de números interpretables como

señales de correspondientes estados de magnitudes mecánicas vinculadas a las condiciones dinámicas de los sistemas de partículas que forman el átomo pudiesen componerse en una matriz ordenados por filas y columnas según los valores de dichas variables. Hace falta notar que la idea misma de esos estados de las magnitudes mecánicas y de los números que deberían representarlos es extremadamente fluctuante a orillas de la fantasía; pero también aceptando esa representación matricial, lo que nos enseña la mecánica analítica está muy lejos de justificar porque a las relaciones conocidas entre las magnitudes físicas aludidas correspondan determinadas operaciones entre las matrices. Heisenberg reemplaza el vínculo lógico ausente con unas *reglas* más o menos arbitrarias, precisadas después por otros autores como Born y Jordan, por los cuales pudo desarrollarse la llamada *mecánica de las matrices*, donde, por lo dicho, se presenta en efecto una multiplicación no conmutativa. Pero el hecho mismo de que la interpretación numérica de los elementos de las matrices se apoya en una base demasiado inestable, es acaso la razón por la cual al poco tiempo de las publicaciones de Heisenberg, Born y Jordan, Dirac propuso una interpretación totalmente simbólica donde también la terminología varía y la noción de «magnitud» se desdobra en dos términos: «estados» y «observables». La multiplicación no tiene otro sentido que no sea la figura resultante de escribir símbolos uno a continuación del otro con salvedad de aplicar la propiedad distributiva. Dice exactamente Dirac⁽⁸⁾: «Nosotros introducimos ciertos símbolos que decimos representar cosas físicas tales como estados de un sistema de variables dinámicas. Usaremos estos símbolos en un análisis algebraico de conformidad con ciertos axiomas que vamos a explicar». Símbolos, axiomas, convenciones; no idealizaciones matemáticas de datos de experiencia; es lo que nos dice también el Sr. Knie en su bosquejo de la obra del futuro físico-matemático.

No recuerdo en este momento dónde he leído, hace poco tiempo, un análisis psicológico del juego, el cual sería un artificio para satisfacer un natural empuje hacia la lucha (lucha contra nosotros o contra los elementos) eliminando de esta lucha

(8) *The principle of Quantum - mechanics*, p. 18.

la parte del peligro y del sufrimiento. Me parece ver algo de semejante en esta física, de la cual es ciertamente propio decir que se aplican en ella las ramas más nuevas de la matemática, pero mucho menos propio que se trate de la matemática más elevada en el sentido de aplicar los recursos del intelecto logizante para llegar a una descripción orgánica de la naturaleza.

Uno de los puntos más salientes de estas teorías es la llamada mecánica ondulatoria; la idea de De Broglie de asociar a la noción de partícula elemental una propagación de onda no sale por completo del cuadro de las concepciones tradicionales; quiero decir que acaso no se aparta de otras imágenes expresadas en oportunidades anteriores, más que por ejemplo, el átomo de Dalton, (para no decir el nuestro) del de Demócrito. Lo importante es el desarrollo; y mientras la imagen del átomo se ha desarrollado bajo la guía estricta de hallazgos experimentales, ésta imagen ondulatoria ha seguido la huella más de lo razonable del capricho de la fórmula. Empieza Schrödinger con escribir una ecuación a derivadas parciales en la cual la función incógnita no se sabe lo que es y, tanto para darle un nombre, pasa de una densidad eléctrica a una probabilidad; los símbolos diferenciales se ponen no por un razonamiento, sino por simple sustitución tipográfica de letras a letras según una receta.

Dirac, aceptando substancialmente la receta, modifica repetidamente la ecuación, en parte por razones formales, en parte por razones de analogía; las razones formales pueden inscribirse dentro de la belleza matemática; las razones de analogía que recuerda Haas estarían en la comparación con la ecuación fundamental de las ondas electromagnéticas, ecuación de segundo orden que se obtiene por eliminación entre dos del primero (las ecuaciones de Maxwell); Dirac señala una razón un poco más en el marco de las hipótesis de la física, es decir de respetar cierta invariancia respecto a los cambios de coordenadas de acuerdo con la teoría de la relatividad⁽⁹⁾; me-

(⁹) Las deducciones matemáticas, por la obra de varios autores, se han hecho sucesivamente, en este sentido, mucho más completas y elegantes, Véase por ej. T. LEVI - CIVITA - *Dirac'sche und Schroedinger'sche Gleichungen*. Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1933.

rece notar la coincidencia de que este esfuerzo matemático conduce por una parte a cambiar todavía el sentido de la función incógnita que, después de haber pasado por las cualificas de densidad eléctrica, probabilidad, estado, debe identificarse ahora con un cuadvivector cuyo significado físico no vale más discutir; en el mismo tiempo se viene efectivamente a calcular con vectores y matrices, cuyos productos son bien, como hemos explicado, operaciones no conmutativas; pero, en cuanto a la interpretación física, efectuando un nuevo salto en una dirección del todo inesperada, con un sentido distinto e independiente de aquel que había servido como punto de partida. Desde el punto de vista filosófico no hay duda que la ruta, que, por reconocimiento de los mismos autores⁽¹⁰⁾ empieza quizá en el ejemplo dado primero por Einstein al fijar a priori una forma analítica para la métrica del cronotopo, se ha ido internando extraordinariamente en el bosque de la imaginación.

Diré, para terminar, unas palabras sobre las teorías probabilistas. Sería perfectamente equivocado pensar que las concepciones atómicas o cuánticas, de cualquier manera que se quiera llamarlas deban constituir por sí mismas una discontinuidad, un punto de separación entre dos físicas matemáticas, la clásica y la moderna, siendo para la primera algo extraño y repugnante, y al contrario algo característico para la segunda; la llamada teoría cinética de los gases o generalmente la termodinámica estadística que todavía pertenecen a la física matemática clásica pueden servir como prueba, y merece notar por otra parte que la idea que guía a la mecánica ondulatoria (al contrario de lo que ocurre en la simple mecánica de las matrices cuyo éxito parece haberse apagado rápidamente) está exactamente en buscar en lo continuo mismo una justificación

⁽¹⁰⁾ Así dice, por ej. MAX BORN en el libro *Probleme der Atomdynamik* (') (Berlin-Springer-1926) p. 56: "Tenemos que persuadirnos que delante de un caso difícil a poco sirven medios débiles, sino que tenemos que referirnos nuevamente a los fundamentos. Es necesario, según un principio general, ponerse en un punto de vista filosófico que ya en casos análogos haya sido útil. Acá miramos al tiempo antes de la teoría de la relatividad...; entonces Einstein encontró un modo de salvar las dificultades..."

(') Existe de este libro una primera edición inglesa, que no he podido consultar, en las publicaciones del Massachusetts-Institute of Technologie (Cambridge-Mass.).

para la cuantificación. Es conocida por otra parte desde mucho tiempo la observación que en nuestra concepción del cosmos se alternan continuamente el continuo y el discontinuo; no podemos concebir el átomo sin concebir partes en el átomo; no podemos justificar cuantos sin imaginar osciladores; las ecuaciones de Schrödinger y de Dirac, por el hecho solo de escribir derivadas con respecto a variables que se dicen coordenadas y tiempo llaman la atención sobre algo que está difundido en el espacio y que tiene duración, si bien lo que es este algo no lo saben decir.

El punto de separación entre las dos físicas está posiblemente en el modo de usar la palabra probabilidad; la clásica física atomística (comprendiendo en ella la teoría de la radiación de Planck) admite que cada partícula de un conjunto actúa independientemente de las demás, pero obedeciendo a leyes físicas determinadas que busca precisar con hipótesis convenientes de acuerdo con las leyes experimentales macroscópicas; estudia en consecuencia leyes de distribución y considera efectos colectivos olvidando las acciones individuales; es física estadística. En tanto que no creemos en una ciencia absoluta y creemos que el objeto de la ciencia sea darnos una representación de las cosas lógicamente plausible, podemos contentarnos, para considerar aceptable la teoría cinética de los gases, de saber que la probabilidad de presentarse el caso que dos gases, después de mezclados, se separasen espontáneamente es del mismo orden de magnitud que aquella que todas las casas de una gran ciudad se quemasen el mismo día ⁽¹¹⁾ (lo que no excluye que cuando uno u otro caso se verificara lo quitaríamos de la cuenta de las probabilidades y le buscaríamos una causa, buena o mala).

Al contrario en la física moderna es la probabilidad misma que se pretende sujetar a cálculo sobre la base de combinaciones algorítmicas; una probabilidad de hechos no bien definidos, por la cual pueden leerse expresiones como la siguiente: «Esta probabilidad tiene la naturaleza de una densidad eléctrica» ⁽¹²⁾.

⁽¹¹⁾ Esta comparación está recordada por Boltzmann y Nabl, (*Kinetische Theorie der Materie* — *Encyklopädie der Math. Wiss.* V 8 521) atribuyéndolo a Lord Kelvin (*Nature*, 9).

⁽¹²⁾ “This probability is of the nature of an electric density” - DIRAC. *The principle of Quantum-mechanics*, p. 243.

Se llega por tanto a la situación siguiente, lógicamente contradictoria: que, mientras se afirma que la ley de causalidad ha perdido valor, se dan leyes a la probabilidad, definidas por ecuaciones que, si bien sin un nexo lógico perfectamente claro, tendrían que ser determinadas por condiciones físicas que otra vez tenían sentido determinado; es decir se afirma la existencia de una causa. Para quienes creen que nada podemos conocer sobre la realidad de las causas, pero que las causas son una ficción necesaria de nuestro espíritu para poner orden en nuestros conocimientos, esta observación no es una crítica, sino sólo una constatación de que todavía las leyes del pensamiento no han sufrido derrumbe. Lo que al contrario no puede dejar de sorprendernos es que, en el intento de buscar o a lo menos representarnos una causa, una especie de magia algorítmica parece haberse sustituido al trabajo evolutivo que, según la historia nos enseña, presidió en el pasado a la formación de las hipótesis y leyes físicas.

Repito, lo sorprendente no es que la ley no sea estrictamente experimental y sea una idealización matemática; es que, siendo una idealización, no sea matemática sino sólo un juego de fórmulas. En cuanto a las leyes físicas, ninguna es verdaderamente experimental; una determinación experimental muy cuidadosa de la marcha de un determinado fenómeno físico (pongamos la variación de la presión del vapor de agua con la temperatura) puede proporcionar una tabla importante para determinadas aplicaciones prácticas, nunca proporcionará una ley física; los números que comparecen en la expresión matemática de la ley, son ellos mismos idealizaciones cuyos valores resultan de todo un conjunto de observaciones, hipótesis, deducciones; por lo tanto también el famoso principio de indeterminación, en cuanto enuncia la imposibilidad de determinar con seguridad y *con medidas directas* la posición y la velocidad de una partícula no dice nada que no fuese conocido por el sentido común; pero los razonamientos que se hacen no tienen valor contra la eventualidad de atribuir a dicha posición y a dicha velocidad valores convenientes para que el desarrollo de determinado fenómeno ocurra de conformidad a las leyes físicas. Para darnos una demostración teórica del principio dice Dirac:

Según las hipótesis de de Broglie a cada elemento mate-

rial de momento p ⁽¹³⁾, está ligada una onda cuya longitud se expresa por $\lambda = \frac{h}{p}$ (h constante de Planck); se admite que una partícula (por ej. un fotón) esté constituida por un grupo (se dice ordinariamente *paquete*) de estas ondas correspondientes a valores de λ próximos ⁽¹⁴⁾; estas ondas se componen en un

⁽¹³⁾ Acostumbra la física atómica hablar con preferencia de momentos en lugar de velocidades; si el punto material tiene una masa m y una velocidad v , su momento es $p=mv$. El cambio aventaja en algo para la simplicidad de las fórmulas, máximamente cuando haya que tener en cuenta la variabilidad de la masa; en la aplicación presente no tiene importancia alguna; pero, y también preciiamente por eso, conviene atenernos a la misma forma.

⁽¹⁴⁾ Damos acá algunos detalles para una exacta interpretación del texto. Para la sencillez de los cálculos imaginamos un grupo de ondas que se propagan sobre el eje x con la velocidad uniforme μ , diferentes por tanto sólo por la longitud de onda que suponemos pueda tomar todos los valores en cierto intervalo $\lambda_0(1-\epsilon) \leq \lambda \leq \lambda_0(1+\epsilon)$; supongamos también que las ondas tengan todas la misma amplitud a ; es evidente que se podría suponer la amplitud y la velocidad función de λ ; pero podemos considerar nuestro caso como una aproximación suficiente. Representando el desplazamiento correspondiente a una onda elemental por

$$dy = a \cos 2\pi \frac{x - \mu t}{\lambda} d\lambda, \quad (1)$$

el desplazamiento y para el movimiento compuesto podrá representarse por

$$y = \int_{\lambda_0(1-\epsilon)}^{\lambda_0(1+\epsilon)} a \cos 2\pi \frac{x - \mu t}{\lambda} d\lambda, \quad (2)$$

Supondremos también $\epsilon \ll 1$; podemos entonces sustituir

$$\lambda = \lambda_0(1 + \xi) \quad (|\xi| \leq \epsilon), \quad d\lambda = \lambda_0 d\xi$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{1}{1 + \xi} \sim \frac{1}{\lambda_0} (1 - \xi)$$

y resulta

$$y = a \lambda_0 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \cos \frac{2\pi(x - \mu t)}{\lambda_0} (1 - \xi) d\xi$$

$$= - \frac{a \lambda_0^2}{2\pi(x - \mu t)} \left[\text{sen} \frac{2\pi(x - \mu t)}{\lambda_0} (1 - \epsilon) - \text{sen} \frac{2\pi(x - \mu t)}{\lambda_0} (1 + \epsilon) \right]$$

$$= \frac{a \lambda_0^2}{2\pi(x - \mu t)} \text{sen} \frac{2\pi(x - \mu t)}{\lambda_0} \epsilon \cos \frac{2\pi(x - \mu t)}{\lambda_0}. \quad (3)$$

Comparando con (1) se ve que el movimiento compuesto tiene aspecto similar a la onda elemental (1), pero con una amplitud variable

$$\frac{a \lambda_0^2}{2\pi(x - \mu t)} \text{sen} \frac{2\pi(x - \mu t)}{\lambda_0} \epsilon;$$

movimiento oscilatorio complejo cuya amplitud alcanza a valores apreciables sólo en una región reducida del espacio; nosotros localizamos la partícula en ésta región. Se demuestra que el ancho de esta región puede estimarse inversamente proporcional al del intervalo de valores de λ que constituyen el paquete y por lo tanto también inversamente proporcional al ancho del intervalo de los valores correspondientes de p . Todo esto es muy claro y supone precisamente que podamos razonar sobre aquellos valores de p y de λ , sobre aquellas ondas; no contiene nada de indeterminación; si un día nuestros conocimientos, por cierto siempre indirectos, sobre la estructura del átomo nos permitieran llegar a tanto, podríamos pensar en describir las coordenadas de todos los puntos de nuestras ondas sin encon-

esta amplitud es máxima para $x = ut$ con el valor $2 a \lambda_0 \varepsilon$ y se reduce a cero para

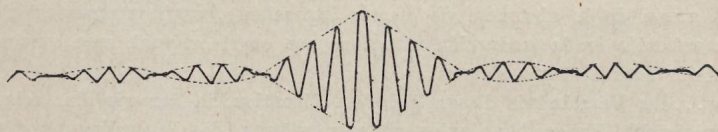
$$x - \mu t = \pm \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}.$$

Para $|x - \mu t| > k \lambda_0 : 2\varepsilon$ (k entero ≥ 1) esta amplitud resulta, por lo demás

$$< \frac{2 a \lambda_0 \varepsilon}{k \pi}.$$

Alejándose del punto $x - ut = 0$ la máxima amplitud tiende pues a 0, y la rapidez del decrecimiento puede considerarse proporcional a $\lambda_0 : 2\varepsilon$.

La figura siguiente corresponde a la hipótesis $\lambda_0 : 2\varepsilon = \frac{1}{4}$.



Notamos que si se llama $\Delta\lambda$ a la anchura del intervalo de variación de las longitudes de onda en el paquete, es precisamente

$$2\varepsilon = \Delta\lambda : \lambda_0, \quad \lambda_0 : 2\varepsilon = \lambda_0^2 : \Delta\lambda,$$

Si convenimos de despreciar la perturbación debida al paquete de ondas en la región donde la amplitud es constantemente $< \frac{4 a \lambda_0 \varepsilon}{\pi}$, la región restante tiene exactamente la anchura

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}.$$

Siendo $p = h \lambda$, $\Delta p = (h : \lambda^2) \Delta\lambda$, resulta

$$\Delta x \Delta p = h,$$

que es la relación llamada de indeterminación.

trar un obstáculo por el hecho que nunca estas ondas serán más que una hipótesis o una representación talvez muy acertada; todos los cálculos de los libros y entre otros los de la nota al pie de la página ya son una pequeña parte de dicha descripción. Si el paquete contiene ondas cuyas longitudes estén todas dentro de un intervalo muy reducido, la partícula podrá presentarse como una vara bastante larga, pero nunca una vara corta o larga ha constituido una indeterminación.

Para obtener la indeterminación es necesario abandonar la imagen de la partícula-paquete de ondas y volver a la imagen partícula-punto material afirmando que ello podrá encontrarse sin que sepamos exactamente dónde, en cualquier punto geométrico de dicha vara; es decir hay que *afirmar* la indeterminación con una nueva hipótesis parcialmente contradictoria con la anterior.

Creo interesante terminar reproduciendo una página de una conferencia reciente de Werner Heisenberg sobre «*Prinzipielle Fragen der moderne Physik*» (*Cuestiones de principio en la fisica moderna*)⁽¹⁵⁾ las cuales me parecen puntualizar

⁽¹⁵⁾ La conferencia fué dictada en la Universidad de Viena en 1936 y se encuentra publicada en el opúsculo: *Neuere Fortschritte in die Exakten Wissenschaften* - F. Deuticke - Leipzig u. Wien - 1936.

A razón de lo abstracto de ciertas expresiones, cuya interpretación pide cierta reflexión en la traducción no menos que en el original, creo conveniente reproducir aquí el texto alemán:

“...das Verständnis dieser logischen Situation, in der wir eine scheinbar richtig gestellte Frage für sinulos erklären müssen, die Vorbedingung für das Verständnis der modernen Physik ist. Andererseits zeigt eben die moderne Physik auch, dass die Verurteilung einer Frage zum Scheinproblem erst möglich ist und erst fruchtbar werden kann, wenn die abstrakten Zusammenhänge gefunden sind, für die hindurch die nötige Freiheit geschaffen wurde. Denn, wenn auch alle Begriffe, mit denen wir an eine Beschreibung der Natur herantreten, notwendig unscharf sind, und zwar an Stellen, an die wir es zunächst nicht wissen könnten, so gewinnt man doch durch die Feststellung dieser Unklarheit erst neue Erkenntnis, wenn man sie in bestimmter Weise zur Verständnis neuartigen Zusammenhänge ausnutzen kann. Solange dies nicht gelungen ist, gibt es kein zuverlässiges Kriterium dafür, ob ein Problem sinnvoll gestellt ist, und wir müssen uns ganz allgemein damit bescheiden, dass auch die mathematisch formulierten Behauptungen der Physik, da wir die Reichweite der in ihnen vorkommenden Begriffe nicht genau kennen, gewissermassen nur Wortgemälde sind, mit denen wir versuchen, unsere Er-

muy bien, por parte de uno de los más autorizados representantes de la dirección discutida, los puntos esenciales de divergencia entre la física clásica y la moderna.

«La condición preliminar para comprender la física moderna está en entender ésta situación lógica en la cual debemos declarar como sin sentido una cuestión aparentemente bien puesta. Por otra parte, la física moderna muestra también que sólo es posible declarar una cuestión como problema ilusorio y sólo puede resultar útil, después que hayan sido encontradas las conexiones abstractas por las cuales háyase forjado antes la necesaria libertad. Porque, aún cuando todos los conceptos por medio de los cuales nos adelantamos hacia una descripción de la naturaleza resultan de manifiesto improductivos, y eso precisamente en puntos en los cuales no podíamos prever, apenas logramos un nuevo conocimiento por el reconocimiento de esa oscuridad, si ella puede ser utilizada en cierto modo para concebir dependencias de nuevas formas. Hasta que esto no se haya conseguido no tenemos ningún criterio suficiente para decidir si un problema está puesto sensatamente, y debemos con toda generalidad afirmar que también los principios físicos enunciados matemáticamente, en cuanto no conocemos exactamente la extensión del campo en el cual imperan los conceptos contenidos, no son en cierto modo nada más que imágenes verbales por medio de las cuales buscamos hacer conocidas e inteligibles a nosotros mismos y a los demás hombres nuestras experiencias sobre la naturaleza.

Pero el descubrimiento de nuevas conexiones lleva a una nueva situación la cual nos da la posibilidad de introducirnos

fahrungen über die Natur uns und den anderen Menschen bewusst und verständlich zu machen.

“Das Auffinden der neuen Zusammenhänge selbst führt jedoch zu einer neuen Lage, die uns die Möglichkeit gibt, in eine Begriffswelt vordringen, die von der früheren qualitativ verschieden ist. So stellen die Relativitätstheorie und die Quantentheorie die ersten entscheidenden Schritte aus dem Gebiet der anschaulichen Begriffe in ein abstrakteres Neuland dar, und der Character der hier entdeckten Zusammenhänge lässt keinen Zweifel darüber zu, dass diese Schritte nie wieder zurückgekommen werden können..... Im Grunde bedeutet ja die Entdeckung eines neuen Begriffssystems nichts anderes als die Entdeckung einer neuen Denkmöglichkeit, die als solche niemals rückgängig gemacht werden kann”.

en nuevas concepciones distintas de las anteriores también cualitativamente. Por tanto las teorías de la relatividad y de los cuantos representan los primeros pasos decisivos fuera del dominio de los conceptos intuitivos en un nuevo terreno de mayor abstracción, y el carácter de las conexiones por ellas descubiertas deja fuera de duda que este paso pueda en ningún tiempo rehacerse en opuesto sentido... Esencialmente la descubierta de un nuevo sistema de conceptos significa nada más que la descubierta de una nueva capacidad de pensamiento que, como tal, nunca podrá ser abandonada».

Ahí está, me parece, el punto esencial de la cuestión; mientras que el punto de salida se expresaba por una posición crítica contra la necesidad en que la física teórica se encontraba de fijar números y coordenadas para objetos no controlables experimentalmente⁽¹⁶⁾, las nuevas concepciones habrían de introducirnos a través de una especie de revelación en algún conocimiento esencial de las cosas, más allá de la lógica, más allá del hacer nuestras experiencias inteligibles a nosotros y comunicables a los demás hombres.

B. Levi

⁽¹⁶⁾ Se lee por ej. en el libro de Max Born citado en la nota 11: "El éxito (Erfolg) ha justificado de considerar como principio que las verdaderas leyes de la naturaleza establezcan relaciones entre magnitudes las cuales, por principio, tienen que ser observables".

ALGUNAS PROPIEDADES INFINITESIMALES DE LAS CURVAS PLANAS

I. PROPIEDADES MÉTRICAS

Se dice que una curva plana posee en un punto A *círculo osculador*, cuando considerando el círculo que pasa por A y otros dos puntos B, C de la curva, este círculo tiende siempre al mismo límite de cualquier manera que los puntos B y C tiendan al punto A recorriendo independientemente la curva.

Según se sabe, representando la ecuación de la curva por $y = y(x)$, y suponiendo que la función $y(x)$ tenga en el punto A primera y segunda derivadas continuas, el radio del círculo osculador o radio de curvatura está dado por la fórmula

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (1)$$

o bien, si la curva está definida en ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ es

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \quad (2)$$

Supongamos ahora un cálculo o una construcción que pueda determinarse dando únicamente los tres puntos A, B, C y supongamos además que los puntos B y C elegidos sobre la curva considerada que pasa por A puedan darse por medio de los valores de ciertos parámetros independientes de la curva, con lo cual los resultados del cálculo o de la construcción se expresarán en función de éstos parámetros. Si los valores de tales parámetros tienden a límites determinados cuando B y C tienden a A, sin que haga falta precisar la curva por la cual se acercan a A, y si además el límite del cálculo o construcción considerados está determinado por estos valores límites, entonces el límite de dicho cálculo o construcción es indepen-

diente de la curva y por tanto es el mismo si se sustituye ésta por su círculo osculador.

De esta observación vamos a obtener, simplemente, algunas relaciones infinitesimales de las curvas planas, válidas para los puntos en los cuales exista el círculo osculador.

1. Sea A un punto de la curva dada (fig. 1). A un lado y a otro de este punto se toman respectivamente las cuerdas $AB = c_1$, $AC = c_2 = \lambda c_1$, siendo λ una constante. Por A se traza la perpendicular $AH = h$ a la cuerda BC. Se quiere hallar el valor de

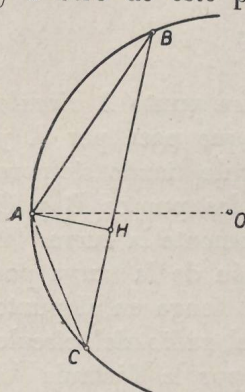


Fig. 1

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0} \frac{BC^2}{h}.$$

Para el cálculo de este límite, además del parámetro c_1 , introduzcamos el radio r del círculo que pasa por A, B, C. Se obtiene así

$$BC = 2r \sin \left(\arcsin \frac{c_1}{2r} + \arcsin \frac{c_2}{2r} \right) = c_1 \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{4r^2}} + c_2 \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{4r^2}}$$

$$h = c_1 \sin \left(\arcsin \frac{c_2}{2r} \right) = \frac{c_1 c_2}{2r} \quad (2)$$

y de aquí, puesto que cuando B y C tienden a A, r tiende al radio R del círculo osculador, resulta

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0} \frac{BC^2}{h} = 2R \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda}. \quad (3)$$

En particular si se toma $\lambda = 1$, o sea $c_1 = c_2$, se obtiene que el límite anterior vale $8R$.

Observamos de paso que, de (2), multiplicando ambos miembros por BC se deduce $c_1 c_2 BC = 2rh BC$ y llamando por simetría $BC = c_3$ y representando por T el área del triángulo ABC se tiene la fórmula (*)

(*) Esta fórmula es conocida, ver por ej. DARBOUX, *Théorie des Surfaces* Vol. IV pág. 426. Es probable, además, que otras fórmulas obtenidas en esta nota sean también conocidas; pretendemos únicamente hacer una exposición elemental y sistemática.

4. Es curioso comparar este resultado con aquel que se obtiene cuando sobre la tangente en A, en lugar de la *cuerda* AB se lleva el *arco* de curva AB y se hace la misma construcción de unir el extremo obtenido con B, tratándose de hallar la posición límite del punto P.

Para este caso conviene recordar algunas fórmulas analíticas. Si la curva está dada por sus ecuaciones paramétricas en función del arco s , es decir por $x = x(s)$, $y = y(s)$ con la condición $x'^2 + y'^2 = 1$, eligiendo por eje x la tangente y por y la normal, en el punto origen será $y'_0 = 0$, $x'_0 = 1$. Además de (2) se deduce que $R = \frac{1}{y''_c}$. Derivando $x'^2 + y'^2 = 1$ se tiene $x'x'' + y'y'' = 0$ que nos dice, según los valores anteriores, que en el punto A es $x''_0 = 0$.

Las coordenadas de B son (x, y) y las de B' son $(s, 0)$. La distancia AP será

$$AP = \frac{sy}{s-x}.$$

Aplicando la regla de l'Hospital sucesivamente para hallar el límite de esta expresión para s tendiendo a cero, se obtiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} AP = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sy}{s-x} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y + sy'}{1 - x'} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2y' + sy''}{-x''};$$

de la igualdad $x'x'' + y'y'' = 0$ se deduce que el último cociente puede escribirse $\frac{2y'x' + sx'y''}{y'y''} = \frac{2x'}{y''} + \frac{sx'}{y'}$; el primer sumando, para s tendiendo a cero tiende a $\frac{2}{y''_c} = 2R$ y para el segundo, aplicando de nuevo la regla de l'Hospital, es $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sx'}{y'} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x' + sx''}{y'} = \frac{1}{y''_c} = R$.

En definitiva es por tanto

$$\lim_{s \rightarrow 0} AP = 3R, \quad (7)$$

resultado distinto del (6) obtenido anteriormente, aunque a primera vista podría parecer que debía obtenerse el mismo.

5. Más generalmente podemos proponernos el problema de hallar la posición límite del punto P cuando la cuerda o

el arco AB se llevan, no sobre la tangente, sino sobre otra curva tangente a la primera en el punto A.

El caso de la cuerda se puede resolver fácilmente observando que el límite debe ser el mismo si se sustituyen las curvas dadas por sus círculos osculadores. Este método fracasa únicamente en el caso de que estos círculos osculadores

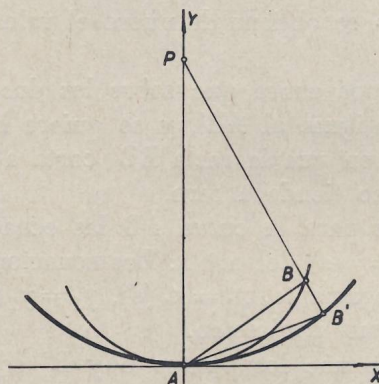


Fig. 3

sean uno mismo, es decir, en el caso en que las dos curvas tengan en el punto A la misma curvatura; entonces hay que introducir los valores de las derivadas superiores a la segunda de las funciones que representan las curvas en el punto A y seguir un método análogo al que seguiremos en el número siguiente para el caso de los arcos.

Prescindiendo de este caso, y considerando los círculos que pasan por B y B' respectivamente (siendo la longitud c de la cuerda AB igual a la AB') y tienen en A la tangente dada se obtiene que las coordenadas de B y B' son (siendo r y r' los radios de los dos círculos):

$$B \left(\frac{c}{2r} \sqrt{4r^2 - c^2}, \frac{c^2}{2r} \right), B' \left(\frac{c}{2r'} \sqrt{4r'^2 - c^2}, \frac{c^2}{2r'} \right)$$

y por tanto la ordenada AP del punto en que la recta que los une corta a la normal a la curva vale

$$\begin{aligned} AP &= \frac{c^2 (\sqrt{4r'^2 - c^2} - \sqrt{4r^2 - c^2})}{2r\sqrt{4r'^2 - c^2} - 2r'\sqrt{4r^2 - c^2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{4r'^2 - c^2} - \sqrt{4r^2 - c^2}) (r\sqrt{4r'^2 - c^2} + r'\sqrt{4r^2 - c^2})}{2(r'^2 - r^2)} \end{aligned}$$

Cuando c tiende a cero los radios r y r' tienden respectivamente a los radios R y R' de los círculos osculadores a las curvas dadas. Queda pues

$$\lim_{c \rightarrow 0} AP = \frac{4 RR' (R' - R)}{R'^2 - R^2} = \frac{4 RR'}{R + R'}. \quad (8)$$

Para $R' = \infty$ se obtiene de nuevo el valor (6).

6. Supongamos ahora que sobre las dos curvas se llevan los arcos, el AB igual al AB' , y se quiere hallar la posición límite del punto en que la recta BB' corta a la normal en A , cuando dicho arco tiende a cero.

Conservemos para la curva AB las ecuaciones paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$ del n.º 4. Las ecuaciones de la segunda curva sean, análogamente, $x_1 = x_1(s)$, $y_1 = y_1(s)$ referidas también al arco como parámetro.

La recta que une los puntos B y B' correspondientes al mismo valor de s , corta al eje y , o sea a la normal a ambas curvas en A , en el punto P tal que

$$AP = \frac{x y_1 - x_1 y}{x - x_1}.$$

Para hallar la posición límite del punto P para s tendiendo a cero, apliquemos sucesivamente la regla de l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} AP &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x' y_1 + x y'_1) - (x'_1 y + x_1 y')}{x' - x'_1} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x'' y_1 + 2 x' y'_1 + x y''_1) - (x''_1 y + 2 x'_1 y' + x_1 y'')}{x'' - x''_1} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x''' y_1 + 3 x'' y'_1 + 3 x' y''_1 + x y'''_1) - (x'''_1 y + 3 x''_1 y' + 3 x'_1 y'' + x_1 y''')}{x''' - x'''_1} = \end{aligned} \quad (9)$$

Siendo las derivadas respecto el arco s , vimos en el n.º 4 que en el punto $s=0$ era $x'(0)=1$, $x''(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=\frac{1}{R}$. Ahora necesitamos además el valor de $x'''(0)$; para encontrarlo, derivando la expresión $x'x'' + y'y''' = 0$, se obtiene

$$x' x''' + x''^2 + y''^2 + y' y''' = 0 \quad (10)$$

que, para $s=0$, (suponiendo que $y''(0)$ es finito) nos da $x'''(0) = -\frac{1}{R^2}$.

Con esto resulta

$$\lim_{s \rightarrow 0} AP = \frac{3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right)}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}} = \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}}, \quad (11)$$

que para $R_1 = \infty$ coincide con el valor (7) como debe ser.

Esto supone $R \neq R_1$, es decir, que las dos curvas tienen en A distinto radio de curvatura. Si fuese $R = R_1$, deberíamos aplicar en (9) todavía una vez más la regla de l'Hospital, quedando

$$\lim_{s \rightarrow 0} AP = \lim_{x'''' - x''''_1} \frac{1}{(x''''_1 y + 4 x'''_1 y' + 6 x''_1 y'' + 4 x'_1 y''' + x_1 y'''') - (x''''_1 y_1 + 4 x'''_1 y'_1 + 6 x''_1 y''_1 + 4 x'_1 y'''_1 + x_1 y''''_1)}$$

Para hallar el valor de $x''''(0)$, observemos que, siendo, según (2), $x' y'' - x'' y' = \frac{1}{R}$, se sigue que $x' y''' - y' x''' = -\frac{R'}{R^2}$ que en el origen $s=0$ nos da $y'''(0) = -\frac{R'}{R^2}$. Derivando de nuevo (10) se obtiene, además,

$$x' x'''' + 3 x'' x''' + 3 y'' y''' + y' y'''' = 0$$

que (suponiendo $y''''(0) \neq \infty$) nos da $x''''(0) = 3 \frac{R'}{R^3}$, y por tanto

$$\lim_{s \rightarrow 0} AP = \frac{-4 \frac{R'_1}{R_1^2} + 4 \frac{R'}{R^2}}{3 \left(\frac{R'}{R^3} - \frac{R'_1}{R_1^3} \right)}$$

o bien, siendo por hipótesis $R = R_1$, pero suponiendo $R' \neq R'_1$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} AP = \frac{4}{3} R. \quad (12)$$

Este resultado, junto con (11), presenta un curioso caso de no invertibilidad de límites. Consideremos, en efecto, dos curvas tangentes en un punto A y con radios de curvatura distintos R y R_1 . Tomemos sobre cada curva a partir de A arcos iguales $AB = AB' = s$. Tendremos así determinados los

puntos B y B'; supongamos que la recta BB' que los une corta a la normal a la curva en A en el punto P. Consideremos la segunda curva AB' como variable de manera que su radio de curvatura R_1 en el punto A tienda a R y supongamos que se quiera hallar la posición límite del punto P para s tendiendo a cero y R_1 tendiendo a R. Según (11), si primero se hace $s \rightarrow 0$ y luego $R_1 \rightarrow R$ se obtiene que la posición límite está dada por $\lim AP = \frac{3}{2} R$; en cambio (12) nos dice que si primero se hace tender R_1 a R y luego se hace $s \rightarrow 0$, se obtiene $\lim AP = \frac{4}{3} R$.

7. El problema anterior se puede plantear de otra manera. Supongamos dos curvas tangentes en un punto A. Se desea encontrar un punto P (α, β) del plano, tal que, proyectando desde él una de las curvas sobre la otra, la diferencia entre los arcos AB' y AB obtenidos, sea un infinitésimo del mayor orden posible cuando B tiende al punto de tangencia A.

En el entorno del punto A, las ecuaciones $x = x(s)$, $y = y(s)$ de la curva AB, admitiendo la existencia de las 4 primeras derivadas de las funciones $x(s), y(s)$ en el punto $s = 0$ (la última continua), se pueden escribir

$$x = s + b s^3 + c s^4 + o(s^4), \quad y = a' s^2 + b' s^3 + c' s^4 + o(s^4) \quad (13)$$

representando por $o(s^4)$ infinitésimos de orden superior a s^4 . En (13) falta el término en s^2 del desarrollo de $x(s)$ y el término en s del de $y(s)$ puesto que, tomando la tangente y la normal como ejes coordenados, los coeficientes de dichos términos valen respectivamente $\frac{1}{2} x''(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Análogamente, las ecuaciones de la segunda curva AB', si representamos por σ su arco, serán de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma + b_1 \sigma^3 + c_1 \sigma^4 + o(\sigma^4), \\ y_1 &= a'_1 \sigma^2 + b'_1 \sigma^3 + c'_1 \sigma^4 + o(\sigma^4). \end{aligned} \quad (14)$$

Los coeficientes de (13) y (14) están relacionados con los radios de curvatura respectivos R y R_1 por:

$$b = \frac{1}{6} x'''(0) = -\frac{1}{6 R^2}, \quad a' = \frac{1}{2} y''(0) = \frac{1}{2 R}, \quad b' = \frac{1}{6} y'''(0) = -\frac{R'}{6 R^2}$$

$$c = \frac{1}{24} x''''(0) = \frac{R'}{8R^3}, \quad c' = \frac{1}{24} y''''(0) = -\frac{1}{24} \left[\left(\frac{R'}{R^2} \right)' + \frac{3}{R^2} \right] \quad (15)$$

y análogamente para la segunda curva.

La recta que une el punto $P(\alpha, \beta)$ con el punto $B(x, y)$ cortará a la curva x_1, y_1 en el punto B' cuyo valor correspondiente de σ estará dado por la ecuación de la recta PB:

$$(y - \beta) x_1(\sigma) - (x - \alpha) y_1(\sigma) + x\beta - y\alpha = 0.$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores (13) y (14) queda, para s suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} & (a's^2 + b's^3 + c's^4 + o(s^4) - \beta)(\sigma + b_1\sigma^3 + c_1\sigma^4 + o(\sigma^4)) \\ & - (s + bs^3 + cs^4 + o(s^4) - \alpha)(a'_1\sigma^2 + b'_1\sigma^3 + c'_1\sigma^4 + o(\sigma^4)) \\ & + (s + bs^3 + cs^4 + o(s^4))\beta - (a's^2 + b's^3 + c's^4 + o(s^4))\alpha = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Pongamos

$$\sigma = s + Ms^2 + Ns^3 + Qs^4 + \dots \quad (17)$$

El problema consiste en determinar α, β (coordenadas de P) de manera que este desarrollo (17) tenga el mayor número posible de coeficientes $M, N, Q, \dots$ nulos, con lo cual $\sigma - s$ será un infinitésimo del mayor orden posible.

Sustituyendo (17) en (16) y ordenando respecto las potencias de s , queda

$$\begin{aligned} & ((a'_1 - a')\alpha - \beta M)s^2 + \\ & (a' - \beta N - \beta b_1 - a'_1 + 2\alpha a'_1 M + b\beta + \alpha b'_1 - b'\alpha)s^3 + \\ & (b' - \beta Q + a'M - 3\beta b_1 M - \beta c_1 + 2\alpha a'_1 N - 2Ma'_1 + \\ & \quad 3\alpha b'_1 M - b'_1 + \alpha c'_1 + c\beta - c'_1\alpha)s^4 + o(s^4) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Si supusiéramos α y β conocidos, esta expresión, igualando a cero los coeficientes sucesivos, nos iría dando los coeficientes $M, N, Q, \dots$ de la expresión (17) y por tanto el valor de σ correspondiente al punto B' . Pero el problema propuesto no es éste, sino el de determinar α, β con la condición de que sean iguales a cero el mayor número posible de coeficientes $M, N, Q, \dots$

Para ello, el primer coeficiente de la identidad última, nos dice al igualarlo a cero que, si $a'_1 \neq a'$, para que sea $M=0$, debe ser también $\alpha=0$, es decir, el punto P debe estar sobre la normal común. Con esta condición, al igualar a cero el segundo coeficiente, para que sea $N=0$ debe ser

$$\beta = \frac{a'_1 - a'}{b - b_1} = \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}}.$$

Es decir, el punto P es precisamente el mismo punto obtenido en el problema del n.º 6. Como, con estos valores de α y β , los coeficientes sucesivos del desarrollo (17) ya vendrán determinados y en general serán distintos de cero, resulta que, tomando P como centro de proyección, en el caso de ser $a'_1 \neq a'$ o sea $R \neq R_1$, el infinitésimo $\sigma - s$ es de 4.º orden.

Si $a'_1 = a'$ el primer coeficiente de (18) se anula para $M=0$ cualquiera que sea α . Podemos entonces disponer de α y β para anular al 2.º y 3er. coeficiente de (18) para $M=N=Q=0$. Como, según (15), siendo $R_1=R$ es también $b_1=b$, el segundo coeficiente de (18) nos dice que debe ser $\alpha=0$ y el tercer coeficiente da

$$\beta = \frac{b' - b'_1}{c_1 - c} = \frac{-\frac{R'}{6R^2} + \frac{R'_1}{6R_1^2}}{\frac{1}{8} \left(\frac{R'_1}{R_1^3} - \frac{R'}{R^3} \right)} = \frac{4}{3} R$$

lo mismo que se obtuvo en (12).

Esto supone $R'_1 \neq R'$. Si todavía estos valores son iguales, se deben tomar más términos de los desarrollos (13), (14) y el orden del infinitésimo $\sigma - s$ resulta superior a 5.

8. Dados tres puntos A, B, C sobre la curva, consideremos la cuerda $BC=c$ y el ángulo $BAC=\theta$ (fig. 4). Cualquier función de c y θ valdrá lo mismo para la curva que para el círculo que pasa por A, B y C. Para el caso del círculo es $c=2r \operatorname{sen} \theta$ y por tanto, considerando el límite para B y C tendiendo al punto A en cuyo caso r tiende al radio R del círculo osculador, de cualquier manera como tiendan a este punto es

$$\lim \frac{c}{\theta} = 2R. \quad (19)$$

En particular, si B y A coinciden desde un principio, lla-

mando c a la longitud de una cuerda que sale de A y θ al ángulo que ella forma con la tangente, al tender este ángulo a cero, se verifica también (19).

9. Interesante, porque se presta a una generalización que luego veremos, es el caso siguiente (fig. 5).

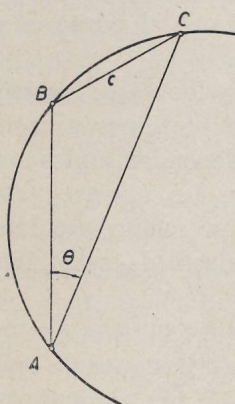


Fig. 4

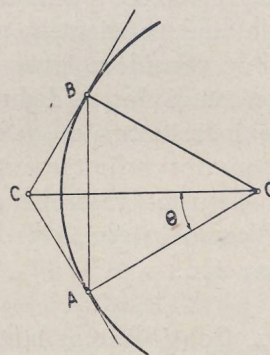


Fig. 5

Consideremos el punto A y la tangente en él. Tomemos un punto B próximo a A y sea O el punto de intersección de la normal a la curva en A y la mediatriz de AB ; sea C el punto en que la misma mediatriz corta a la tangente. Sea T el área del triángulo AOB y t la del triángulo ABC . Toda la figura está determinada por 3 puntos: dos confundidos en A y el B . Por tanto, toda operación con los triángulos T y t conduce al mismo resultado si se consideran A y B puntos de la curva dada o puntos del círculo tangente en A y que pasa por B , el cual, en el límite para B tendiendo a A , tiende al círculo osculador en este punto.

Para dicho círculo, llamando θ al ángulo AOC es

$$T = r^2 \sin \theta \cos \theta; \quad t = r^2 \tan \theta \sin^2 \theta$$

y por tanto, como el límite de r es el radio R del círculo osculador, se tiene

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{T^3}{t} = R^4. \quad (20)$$

mando c a la longitud de una cuerda que sale de A y θ al ángulo que ella forma con la tangente, al tender este ángulo a cero, se verifica también (19).

9. Interesante, porque se presta a una generalización que luego veremos, es el caso siguiente (fig. 5).

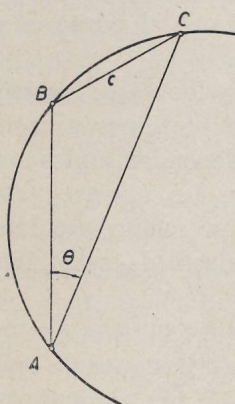


Fig. 4

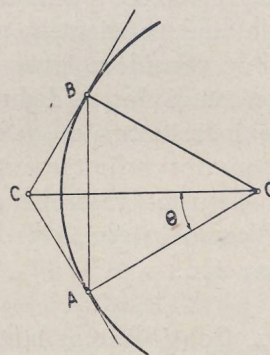


Fig. 5

Consideremos el punto A y la tangente en él. Tomemos un punto B próximo a A y sea O el punto de intersección de la normal a la curva en A y la mediatriz de AB ; sea C el punto en que la misma mediatriz corta a la tangente. Sea T el área del triángulo AOB y t la del triángulo ABC . Toda la figura está determinada por 3 puntos: dos confundidos en A y el B . Por tanto, toda operación con los triángulos T y t conduce al mismo resultado si se consideran A y B puntos de la curva dada o puntos del círculo tangente en A y que pasa por B , el cual, en el límite para B tendiendo a A , tiende al círculo osculador en este punto.

Para dicho círculo, llamando θ al ángulo AOC es

$$T = r^2 \sin \theta \cos \theta; \quad t = r^2 \tan \theta \sin^2 \theta$$

y por tanto, como el límite de r es el radio R del círculo osculador, se tiene

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{T^3}{t} = R^4. \quad (20)$$

II. PROPIEDADES AFINES.

Se llama *cónica osculatrix* a una curva plana en un punto, a la cónica límite, cuando existe, de aquellas determinadas por 5 puntos de la curva cuando todos estos puntos tienden a coincidir en el punto considerado. Se entiende que, para que exista cónica osculatrix, este límite debe ser el mismo de cualquier manera como los puntos tiendan a coincidir en el punto considerado, independientemente unos de otros.

Por consideraciones análogas a las de los casos anteriormente estudiados se deduce que todas las expresiones o propiedades infinitesimales de una curva que dependan únicamente de 5 puntos infinitamente próximos, serán las mismas y tendrán el mismo valor para la curva y para su cónica osculatrix.

Veamos algunas propiedades que derivan de esta simple observación.

1. Consideremos la cuerda BC paralela a la tangente en un punto A de la curva y la recta r que une A con el punto medio de BC (fig. 6). El conjunto de la figura está determinado por 4 puntos: dos confundidos en A (que dan la tangente) y los B y C. Por tanto la posición límite de la recta r, cuando la cuerda BC tiende a la tangente, será la misma para la curva dada que para cualquier otra curva que tenga con ella 4 puntos confundidos en A; en particular, para cualquier cónica que tenga en A cuatro puntos confundidos con la curva dada. Pero, para las cónicas, la recta r que une uno de sus puntos con el punto medio de una cuerda paralela a la tangente, es un diámetro. Por tanto: la posición límite de la recta r es el diámetro de cualquier cónica que tenga en A cuatro puntos comunes con la curva, en particular el diámetro de la cónica osculatrix.

Se llama *parábola osculatrix* a una curva en un punto, a la parábola que tiene en este punto 4 puntos confundidos comunes con la curva. Como por 4 puntos pasan en general 2 parábolas (es el problema de las cónicas determinadas por 4 puntos y una tangente), parecería que hay dos parábolas osculatrices, pero una de ellas degenera en la tangente contada dos veces y por tanto sólo queda una parábola propiamente dicha. Por consiguiente, la propiedad anterior puede enunciarse tam-

bién: la posición límite de la recta r es el diámetro de la parábola osculatriz a la curva en el punto considerado.

La importancia en geometría diferencial de la posición límite de la recta r estriba en que, transformando la curva por una *afinidad*, la parábola osculatriz en un punto se transformará en la parábola osculatriz de la transformada en el punto homólogo y por tanto un diámetro de la primera en un diámetro de la segunda; la recta límite r , tal como se ha definido, es, por tanto, invariante por afinidades y por esta razón se llama *normal afín* a la curva en el punto A .

2. Una expresión que depende únicamente de 5 puntos próximos de la curva es la siguiente:

Consideremos el punto A y la tangente en él (fig. 7). Por un punto próximo B tracemos la paralela BC a dicha tangente y la tangente BE a la curva. Uniendo A con el punto medio de BC se obtienen los puntos H y E ; unamos A y E con C . Toda la figura está determinada por 5 puntos: dos confundidos en A , dos confundidos en B y el punto C . Por consiguiente, cualquier relación entre los triángulos que aparecen en la figura será la misma para la curva dada que para la cónica que pasa por estos 5 puntos, la cual en el límite para B tendiendo a A tiende a la cónica osculatriz.

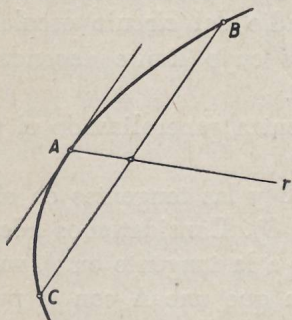


Fig. 6

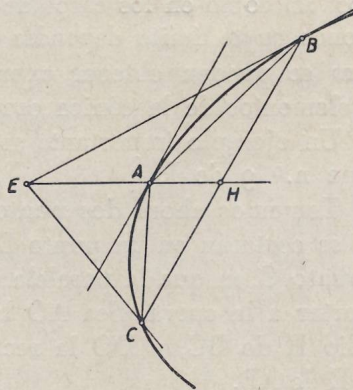


Fig. 7

Si se quiere, por ejemplo, calcular el límite del cociente entre las áreas de los triángulos ABH y EBH para B tendiendo a A , bastará hallar este límite para las cónicas.

Para una cónica, los triángulos ABH y EBH tienen la misma altura y en cuanto a las bases, por ser la recta BC la polar de E, los puntos E y H separan armónicamente al punto A y al punto A' (no dibujado en la figura) en que EH corta de nuevo a la cónica; por tanto, en valor absoluto, es

$$\frac{HA}{EA} = \frac{HA'}{EA'}.$$

Cuando B tiende a A, H y E tienden al mismo punto A y por tanto el cociente anterior tiende a 1. Luego el límite del cociente de las áreas de los triángulos ABH y EBH es igual a 1/2.

Por tratarse de triángulos respectivamente de área doble de los anteriores, es también

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{ABC}{EBC} = \frac{1}{2}, \quad (21)$$

relación válida para cualquier curva, en todo punto que admita cónica oscultriz.

3. En el caso anterior, el valor límite encontrado es una constante, independiente del punto y de la curva. En otros casos, así como en los casos de la primera parte se obtenían relaciones cuyo límite dependía del radio del círculo osculador, ahora se pueden obtener expresiones cuyo límite dependa de los elementos de la cónica oscultriz.

Un ejemplo importante se encuentra generalizando el problema n.º 9 de I.

Tomemos ahora dos puntos A, B y las tangentes en ellos, que se cortarán en un punto D (fig. 8). Consideremos además el punto C en que la paralela por B a la tangente en A vuelve a cortar a la curva. Sea AO la recta que une A con el punto medio H de BC, y DO la recta que une D con el punto medio E de AB.

Tenemos de esta manera los triángulos ABO de área T y ADB de área t análogos a los del caso del n.º 9 de la primera parte. La novedad está en que ahora las construcciones hechas, consistentes en trazar tangentes y fijar puntos medios de segmentos, se conservan por afinidades; es decir, transfor-

mando toda la figura por una afinidad, los elementos de la misma se corresponden.

Consideremos en particular las *afinidades equivalentes*, es decir, aquellas que conservan las áreas. Entonces, si podemos obtener una relación entre las áreas T y t que tenga límite finito al tender B hacia A , este límite será un invariante de la curva en el punto A , respecto las afinidades equivalentes.

Para calcular el límite de cualquier expresión formada con los elementos de la figura se puede proceder como en los ejemplos del caso I. Se calcula la expresión de que se trata para la cónica que pasa por A , B , C y tiene en A y B las mismas tangentes que la curva; si esta expresión es una función de los parámetros que fijan los puntos A , B , C y de los elementos de la cónica (por ejemplo las longitudes de los ejes), al hacer tender los parámetros a los valores necesarios para que B y C vayan a confundirse con A , los elementos de la cónica tenderán a los elementos de la cónica oscultriz. Si con ello la expresión considerada tiene límite determinado, éste vendrá expresado únicamente en función de los elementos de la cónica oscultriz y será por tanto el mismo para cualquier curva con la misma cónica oscultriz, en particular, para esta misma cónica.

Bastará, pues, relacionar T y t para el caso de una cónica. En este caso, mediante una afinidad equivalente que conserve la cónica, se puede llevar el punto A a uno de los vértices y entonces T y t se calculan directamente sin dificultad.

Así, para el caso de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ poniendo $AH = h$, es (fig. 9)

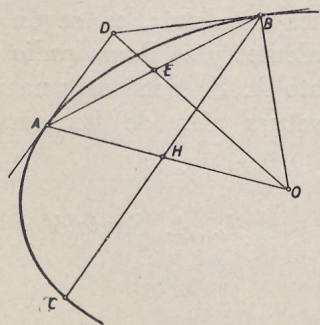


Fig. 8

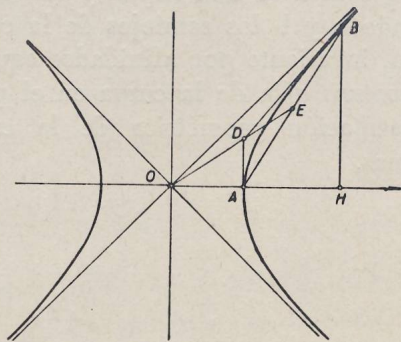


Fig. 9

$$HB = \frac{b}{a} \sqrt{2ah + h^2} ; \quad AD = \frac{b}{2a+h} \sqrt{2ah + h^2}$$

y de aquí

$$T = \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{1}{2} b \sqrt{2ah + h^2},$$

$$t = \frac{1}{2} AD \cdot AH = \frac{1}{2} \frac{bh}{2a+h} \sqrt{2ah + h^2}$$

de donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T^3}{t} = (ab)^2. \quad (22)$$

Para el caso de una elipse, procediendo de la misma manera, o bien observando que se puede reducir el problema al caso del círculo por afinidad, se obtiene el mismo valor límite, siendo ahora a y b los semiejes de la elipse. Para el caso de la parábola el límite anterior es infinito.

Cualquiera que sea la curva, si en el punto A tiene una cónica oscultriz cuyos semiejes sean a y b , valdrá esta relación (22).

En lugar del límite anterior se suele considerar

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{T}{\sqrt[3]{t}} = (ab)^{\frac{2}{3}}.$$

Esta expresión (que se acostumbra a tomar con signo $+$ si la cónica es una elipse, y con signo $-$ si es una hipérbola), siendo a y b los semiejes de la cónica oscultriz, es, según se dijo, invariante por afinidades equivalentes y se llama *radio de curvatura afín* de la curva en el punto A . Se tiene así una representación geométrica de la curvatura afín de las curvas planas.

L. A. Santaló

SOBRE LA ACOTACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Nos proponemos en esta Nota contestar con cierta amplitud a la primera cuestión planteada en el fasc. 1 de Mathematicae Notae.

Es evidente que la cuestión no tiene propiamente interés práctico ni teórico, porque en cuanto se presente la necesidad de acotar las funciones trigonométricas, podrán siempre servir los conocidos desarrollos en series de potencias citados en dicha cuestión.

Tiene al contrario un interés didáctico, por cuanto al enseñar a los estudiantes el uso de tablas de funciones, conviene hacerles comprender como estas tablas hayan podido ser calculadas sin excesiva dificultad, dado que los alumnos que estudian trigonometría no tienen generalmente la preparación analítica suficiente como para conocer racionalmente los desarrollos en serie.

Sabemos que si $x < \frac{1}{2} \pi$ se realiza la desigualdad

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad (1)$$

y tomando un submúltiplo del ángulo x tendremos:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{n} < \frac{x}{n} < \operatorname{tg} \frac{x}{n} \quad (2)$$

de donde resulta

$$x = n \frac{x}{n} > n \operatorname{sen} \frac{x}{n} \quad (3)$$

$$x = n \frac{x}{n} < n \operatorname{tg} \frac{x}{n} \quad (4)$$

Recordemos además una conocida limitación para el coseno; de $\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2} x\right)$, teniendo presente la primera parte de (2), donde hacemos $n=2$, resulta:

$$\cos x > 1 - 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}. \quad (a)$$

Pasemos ahora a establecer algunas limitaciones para el seno. Según (4), en la que hacemos $n=4$, y (1) podemos escribir

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{4 \operatorname{tg} \frac{x}{4}} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}.$$

Ahora bien, de (a) obtenemos $\cos \frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{8}$; $\cos \frac{x}{4} > 1 - \frac{x^2}{32}$; entonces:

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} &> \left(1 - \frac{x^2}{8} \right) \left(1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{1024} \right) = \\ &= 1 - \frac{3}{16} x^2 + \frac{9}{210} x^4 - \frac{1}{213} x^6. \end{aligned}$$

Siendo $\frac{9}{210} x^4$; $\frac{1}{213} x^6 = \frac{7^2}{x^2}$, se ve que para $x < \sqrt{72} = 8, \dots$ ($> \frac{\pi}{2}$), el valor absoluto del último término es menor que el del anterior. Por lo tanto, para $x < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\sin x}{x} > \cos \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{4} > 1 - \frac{3}{16} x^2. \quad (b)$$

Consideremos por otra parte la igualdad

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} \quad (5)$$

y notemos que, si $x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ y $\sin \frac{x}{3}$ crecen conjuntamente; al contrario, para $x > \frac{\pi}{2}$, creciendo $\sin \frac{x}{3}$ disminuye $\sin x$; concluimos que la expresión $3z - 4z^3$ es creciente para $z < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; (lo que por otra parte se podría también ver fácilmente por medio de una derivación). Por lo tanto, si en el segundo miembro de (1) sustituimos en lugar de $\sin \frac{x}{3}$ el número $\frac{x}{3} > \sin \frac{x}{3}$, obtenemos un resultado $> \sin x$, a lo menos hasta tanto $\frac{x}{3} \leq \frac{1}{2}$, $x \leq 1,5$; con esta limitación concluimos pues

$$\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6,75}.$$

En el intervalo $1,5 < x < \frac{\pi}{2} = 1,57 \dots$, la demostración no es más válida, y en efecto, no cabe duda que, siendo el segundo miembro $= 1$ para $x = 1,5$, resultará $< \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ para $x = 1,57$; por lo tanto aún la desigualdad deja de ser cierta para los valores de x mayores de cierto número entre $1,5$ y $1,57$. Obtenemos una mayoración de $\operatorname{sen} x$ válida en todo el primer cuadrante, notando que, por la (3), donde ponemos $n=3$, se puede escribir

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{\operatorname{sen} x}{3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}} = \frac{\operatorname{sen} 3(\frac{x}{3})}{3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}} = 1 - \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3};$$

ahora, de la (b) resulta

$$\operatorname{sen} \frac{x}{3} > \frac{x}{3} - \frac{3}{16} \frac{x^3}{27},$$

según lo cual

$$1 - \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3} < 1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{9} + \frac{1}{162} x^4 - \frac{1}{\dots} x^6$$

y como $\frac{1}{\dots} x^6 > 0$ el quitarlo del segundo miembro hace que éste aumente de valor, luego:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 - \frac{4}{27} x^2 + \frac{1}{162} x^4. \quad (b')$$

Reuniendo (b) y (b') resulta:

$$x - \frac{x^3}{6,75} + \frac{x^5}{162} > \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{5,33} \quad (B)$$

o también, como se ve fácilmente mayorando el término de corrección del primer miembro

$$x - \frac{x^3}{7,5} > \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{5,33}. \quad (B')$$

Completemos ahora las limitaciones para el coseno.

De $\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ deducimos, teniendo presente la (b)

$$\cos x < 1 - 2 \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{16} \frac{x^3}{8} \right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{64} x^4 - \frac{9}{32 \times 16^2} x^6$$

y quitando $\frac{9}{32 \times 16^2} x^6$ el último miembro aumenta de valor y más aún si sustituimos $\frac{3}{64} x^4$ por $\frac{x^4}{21}$.

En definitiva, completando con (a) tenemos:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{21}. \quad (A)$$

Volvamos a las limitaciones para el seno.

Siempre por la (3) podremos escribir:

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{4 \sin \frac{x}{4}} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4}$$

y según (A) se tiene:

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} &< \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{21 \times 16}\right) \left(1 - \frac{x^2}{32} + \frac{x^4}{21 \times 4^4}\right) = \\ &= 1 - \frac{5}{32} x^2 + \frac{38}{5376} x^4 - k x^6 + h x^8; \end{aligned}$$

pero si $x < \frac{\pi}{2}$ podemos verificar que $k x^6 > h x^8$, luego el no tomar en cuenta $-k x^6 + h x^8$ aumenta el valor del segundo miembro y mayor aún resulta si tomamos $\frac{1}{140}$ en lugar de $\frac{38}{5376}$.

Por tanto:

$$x - \frac{x^3}{6,4} + \frac{1}{140} > \sin x > x - \frac{x^3}{5,33}. \quad (B_1)$$

Nótese que si tomamos $\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{8 \sin \frac{x}{8}} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8}$,

efectuando sustituciones semejantes a las anteriores se llega a:

$$\frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{21}{128} x^2 + (\dots) x^4 - (\dots)$$

resultando valores más próximos a los de la serie del $\sin x$, como se podía prever notando que el procedimiento equivale a sustituir el arco de amplitud x por la suma de las cuerdas (dobles del seno) de arcos submúltiplos y claro está que cuanto menores sean los submúltiplos considerados tanto más próxima al arco estará la suma de las cuerdas de esos submúltiplos.

Para la tangente se pueden encontrar limitaciones recordando su expresión por seno y coseno y aplicando las acotaciones anteriores; pero es evidente que nunca se obtendrá una

acotacion superior válida en todo el intervalo o $-\frac{\pi}{2}$ por ser $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$. Para dar un ejemplo, de (A) y (B₁) se obtiene

$$\operatorname{tg} x > \frac{x - \frac{x^3}{5,33}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{21}}.$$

Si en el numerador sumamos y restamos $\frac{3,33}{10,66} x^2$ y $\frac{x^4}{21}$ se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} x \frac{1 - \frac{x^2}{5,33}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{21}} &= x \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{21} + \left(\frac{3,33}{10,66} x^2 - \frac{x^4}{21} \right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{21}} = \\ &= x \left(1 + \frac{\frac{3,33}{10,66} x^2 - \frac{x^4}{21}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{21}} \right); \end{aligned}$$

para $x < \frac{\pi}{2}$ el denominador es menor que 1, por lo tanto si tomamos 1, el cociente disminuye, en definitiva

$$\operatorname{tg} x > x \left(1 + \frac{3,33}{10,66} x^2 - \frac{x^4}{21} \right) = x + \frac{x^3}{3,2} - \frac{x^5}{21} \quad (c)$$

Enrique O. Ferrari

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

14. Encontrar un número entero tal que pueda escribirse en las tres formas $3x + 5$, $8y + 1$, $7z + 5$, siendo x , y , z números enteros.

15. Sean n números reales positivos ordenados en orden creciente

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n.$$

Llamemos

$$p_i = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Demostrar que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} = 0.$$

16. Sean dos puntos A y B sobre una recta y C , D otros dos puntos de la misma interiores al segmento AB . Entre todas las proyectividades sobre la recta dada que tienen A y B como puntos unidos y transforman el segmento AB en sí mismo, ¿cuál será la que transformará el segmento CD en uno de longitud máxima y cual es el valor de esta máxima longitud?

17. Sea la superficie cuya ecuación respecto un sistema de ejes coordenados cartesianos es

$$xyz = a.$$

Siendo O el origen de coordenadas y A , B , C los puntos en que el plano tangente a la superficie en un punto P corta a los tres ejes, demostrar que: 1º. El punto P es el baricentro del triángulo ABC . 2º. El volumen del tetraedro $OABC$ es constante.

18. Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve una cónica dada bajo un ángulo constante φ . Considerar el caso particular $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

19. Siendo A y B dos puntos fijos y X un punto variable e indicando con r' , r'' las distancias AX, BX, calcular la integral

$$\int \frac{e^{-K(r'+r'')}}{r' r''} d\omega$$

(donde $d\omega$ es el diferencial de volumen) cuando el punto X recorre todo el espacio.

El Sr. KNIE nos ha señalado, como interesante ejercicio, esta integral que se le ha presentado al desarrollar una teoría del mesón.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 1.—“Probar que si n es un número entero impar

$$1 + \frac{n-1}{n-2} + \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} + \dots + \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} \dots \frac{2}{1} = n \quad [1]$$

¿Cómo hay que modificar la fórmula para el caso de n par?”.

Solución. El caso $n=1$ es ciertamente excepcional, porque en este caso el último término de la suma del primer miembro no tiene sentido.

Para $n=3$ la fórmula se verifica en seguida

$$1 + \frac{2}{1} = 3.$$

Aceptando que la fórmula valga para un número impar n , demostraremos que también es válida para el siguiente, esto es $n+2$. En este caso, para $n+2$, el primer miembro de [1] queda:

$$1 + \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} + \dots + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} \dots \frac{2}{1};$$

y, factorizando,

$$1 + \frac{n+1}{n} \left[1 + \frac{n-1}{n-2} + \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} + \dots \frac{2}{1} \right],$$

Pero la suma entre corchetes es igual a n por hipótesis; por tanto nuestra expresión resulta

$$1 + \frac{n+1}{n} \cdot n = n + 2.$$

Con lo cual queda demostrado que si vale para el número n impar vale también para el siguiente $n+2$; en virtud del principio de inducción completa, vale pues la [1] para cualquier número entero impar.

La fórmula, cuando n es par, debe ser:

$$2 + \frac{n-2}{n-3} + \frac{n-2}{n-3} \cdot \frac{n-4}{n-5} + \dots + \frac{2}{1} = n$$

y se prueba que es general, en forma análoga a la anterior.

Esta solución es del Sr. MODESTO GONZÁLEZ, profesor en San Luis.

N.º 2. — Demostrar que entre los triángulos que tienen el mismo perímetro $2p$ el triángulo equilátero tiene máximo radio del círculo inscripto. Establecer la relación $p^2 \geq 27 r^2$.

Solución. El valor del radio de la circunferencia inscripta a un triángulo de área S vale

$$r = \frac{S}{p} \quad (1)$$

y por tanto será máximo cuando lo sea S .

Por la fórmula de Heron es $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ y el valor de este radical será máximo cuando lo sea el producto $(p-a)(p-b)(p-c)$ ya que el otro factor p es constante.

Observemos que la suma $(p-a) + (p-b) + (p-c)$ vale lo mismo para cualquier triángulo de perímetro $2p$. Ahora bien, sabemos que, para n factores cuya suma es constante, el producto es máximo cuando dichos factores son iguales. Luego, para que el radicando sea máximo debe ser $p-a = p-b = p-c$, de donde $a=b=c$, es decir: el área S es máxima cuando el triángulo es equilátero, y según (1) este triángulo será también aquel para el cual r es máximo.

Pasemos ahora a demostrar que para el triángulo equilátero es

$$p^2 = 27 r^2$$

en efecto en el triángulo equilátero el centro del círculo inscripto es el punto de encuentro de las alturas y medianas; llamando h a la altura y a al lado se tiene pues

$$r = \frac{1}{3} h, \quad h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad a = \frac{2}{3} p$$

de donde

$$r = \frac{1}{3\sqrt{3}} p, \quad p^2 = 27 r^2.$$

Si esto se verifica para los triángulos equiláteros para los cuales r tiene un valor máximo, para otro triángulo cualquiera, r es menor y por tanto se verifica $p^2 > 27 r^2$, como se quería demostrar.

Esta solución es debida salvo pequeñas modificaciones de forma al Sr. OSCAR P. SIMIAN de la Facultad de Ingeniería de Rosario. Otras soluciones del mismo problema han enviado la Srta. MABEL MOLINELLI WELLS del Instituto del Profesorado de Buenos Aires, el Sr. PEDRO E. ZADUNAISKY de la Facultad de Ingeniería de Rosario y el Sr. MODESTO GONZÁLEZ, de San Luis.

N. DE LA R. En la demostración anterior se ha utilizado el teorema de que el producto de n factores de suma constante es máximo cuando los factores son iguales.

Este teorema se demuestra fácilmente como inmediata aplicación de las reglas de cálculo diferencial para máximos y mínimos, pero se dan también demostraciones elementales en libros de álgebra; con este objeto se observa generalmente que si hubiera dos factores diferentes el producto que se obtiene con substituir cada uno de los dos por su media aritmética sería mayor, mientras no habría cambiado la suma de los factores. A esta demostración se hace comúnmente la objeción que ella sólo demuestra que un producto donde los factores no sean iguales no podría ser máximo, pero ello no diría nada en el caso que el máximo no existiera. El complemento deseado puede darse en varios modos:

1º. El producto de n términos positivos cuya suma sea s no puede evidentemente superar s^n ; en tanto que, considerando como función de $n-1$ factores (el factor restante siendo determinado por éstos) es función continua acotada, tiene máximo; el cual, por lo dicho no puede realizarse si el producto tiene factores desiguales.

2º. Pero esta observación se basa sobre consideraciones no algebraicas, como la de la continuidad. Para evitar esta crítica notemos primero que el valor $(s : n)^n$ es ciertamente un máximo relativo; indicamos en efecto con $a_1 a_2 \dots a_n$ una partición de s en n términos, cada uno bastante próximo a $s : n$, y pongamos

$$a_i = \frac{s}{n} + \varepsilon_i, \quad \sum \varepsilon_i = 0;$$

resulta

$$\prod a_i = \left(\frac{s}{n}\right)^n + \sum \varepsilon_i \left(\frac{s}{n}\right)^{n-1} + \sum \varepsilon_i \varepsilon_j \left(\frac{s}{n}\right)^{n-2} + \dots$$

El segundo término del segundo miembro es cero; se tiene

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon_i \varepsilon_i &= \sum_{i, j < n} \varepsilon_i \varepsilon_i + \left(\sum_{i < n} \varepsilon_i\right) \varepsilon_n = \sum_{i, j < n} \varepsilon_i \varepsilon_j - \left(\sum_{i < n} \varepsilon_i\right)^2 \\ &= -\left[\sum_{i < n} \varepsilon_i^2 - \sum_{i, j < n} \varepsilon_i \varepsilon_j\right] = -\frac{1}{2} \sum_{i, j < n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2; \end{aligned}$$

por lo tanto el tercer término es ciertamente negativo; los términos siguientes tienen cada uno tres o más factores ε y por lo tanto pueden despreciarse cuando los valores absolutos de los ε son bastante pequeños; se sigue

$$\prod a_i \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n,$$

Pero $(s : n)^n$ no es solo máximo relativo, sino absoluto; en efecto, si, suponiendo ordenados los términos $a_1 a_2 \dots a_n$ en orden decreciente, se substituye a los dos extremos su media $b = \frac{a_1 + a_n}{2}$, notando que $a_1 - \frac{s}{n}$ y $a_n - \frac{s}{n}$ tienen signos opuestos, se concluye,

$$\left|b - \frac{s}{n}\right| < \frac{1}{2} \left|a_1 - \frac{s}{n}\right|, \quad \left|b - \frac{s}{n}\right| < \frac{1}{2} \left|a_n - \frac{s}{n}\right|;$$

de acá sigue en seguida que, a lo más después de hacer sucesivamente $n - 1$ de estas operaciones de medias, el intervalo conteniendo los factores de nuestro producto, siempre conteniendo en su interior $s : n$, habrá reducido su anchura a menos de la mitad de la primitiva. Por lo tanto el procedimiento de media, que, según la observación inicial hace crecer el producto, tiende a la repartición en n partes iguales.

N.º 3.— Calcular el área del triángulo inscripto en una elipse de semiejes a y b , el cual tiene un vértice en el vértice $(0, b)$ de la elipse y el lado opuesto sobre la recta $y = \eta$. ¿Para cual valor de η esta área es máxima?

Solución. La recta $y = \eta$ corta a la elipse en dos puntos simétricos respecto del eje menor y cuyas coordenadas son $P(x, \eta)$ y $P'(-x, \eta)$. El área S del triángulo que tiene por vértices estos puntos y además el punto $B(0, b)$, vale $S = x(b - \eta)$.

Debemos calcular la abscisa x de P . Por pertenecer el punto P a la elipse debe verificar a la ecuación de la misma, o sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

de donde

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \eta^2}$$

y por tanto el área pedida será

$$S = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \eta^2} (b - \eta)$$

Falta calcular el valor de η que hace máxima a esta área. Para que el triángulo sea inscripto en la elipse, η debe valer entre b y $-b$.

Si $\eta = b$ o $\eta = -b$, el área S se anula, conservándose en cambio siempre positiva en el intervalo $-b, b$. Luego, en virtud del teorema de Rolle, hay por lo menos un valor de η que anula la derivada y hace máxima a la función. Derivando S como función de η se obtiene

$$S' = \frac{a}{b} \left[\frac{-\eta}{\sqrt{b^2 - \eta^2}} (b - \eta) - \sqrt{b^2 - \eta^2} \right]$$

e igualando esta derivada a cero resulta (en la hipótesis $\eta \neq \pm b$)

$$2\eta^2 - b\eta - b^2 = 0$$

de donde se obtiene la solución $\eta = -\frac{b}{2}$.

Por tanto existe un solo valor de η en el intervalo $-b, b$ que anula a la derivada y el cual corresponderá por tanto a

un máximo de la función; este valor es $\eta = -\frac{b}{2}$ y el valor máximo del área será

$$S = \frac{3\sqrt{3}ab}{4}$$

Esta solución ha sido enviada por la Srta. MARÍA ESTHER GAZZOLO, alumna del Instituto N. del Profesorado de Buenos Aires. Otras soluciones análogas se han recibido de las Srtas. MA. DEL MILAGRO SILVA y MABEL MOLINELLI WELLS del mismo Instituto N. del Profesorado de Buenos Aires y de los Sres. LORENZO O. COPELLO, RAIMUNDO FAJARDO, MOISÉS GRILL, OSCAR P. SIMIAN y PEDRO E. ZADUNAISKY de la Facultad de Ingeniería de Rosario, FÉLIX EDUARDO HERRERA alumno del Profesorado en Matemáticas de Tucumán, ROLANDO J. WEIDENBACH de la Facultad de Ingeniería de Buenos Aires y MODESTO GONZÁLEZ de San Luis.

N. DE LA R. Cuando se tiene expresada el área S en la forma (1) se puede hallar el máximo sin necesidad de acudir a la derivación observando que

$$S^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - \eta^2) (b - \eta)^2 = \frac{a^2}{b^2} (b + \eta) (b - \eta)^3 = \frac{a^2}{3b^2} (3b + 3\eta) (b - \eta)^3$$

y prescindiendo del coeficiente, el último miembro se puede considerar como un producto de 4 factores cuya suma vale $6b$, es decir, es constante; en tal caso, como ya recordamos en la resolución del n. 2, se sabe que el producto es máximo cuando los factores son iguales entre sí, o sea, $3b + 3\eta = b - \eta$, de donde $\eta = -\frac{b}{2}$.

Esta segunda parte del problema consistente en hallar el valor de η para que el área del triángulo sea máxima, se puede resolver también recordando que una elipse puede transformarse en un círculo por una afinidad, y se sabe que la afinidad conserva la razón entre las áreas homólogas. Con esto el problema se reduce a resolverlo para el caso del círculo, debiéndose entonces demostrar que el triángulo equilátero es el que cumple la condición de máximo pedida.

Como en el triángulo equilátero inscrito cada lado es perpendicular al diámetro que pasa por el vértice opuesto en el punto medio del radio de este diámetro que no contiene el vértice, se deduce, al pasar a la elipse, que el lado opuesto

al vértice dado debe pasar por el punto medio del segundo semidiámetro del diámetro que pasa por este vértice. Con esto se ve que la solución obtenida es más general. Es decir, que, dado el vértice B en una posición cualquiera sobre la elipse, se puede pedir de trazar el lado opuesto del triángulo inscrito, de área máxima que tiene este vértice; este lado tendrá la dirección del diámetro conjugado de aquel que pasa por B y cortará a éste en el punto medio del semidiámetro que no contiene a B.

Se deduce también que el área de este triángulo de área máxima y vértice B vale lo mismo para cualquier punto B, porque en el círculo afín los triángulos equiláteros inscritos tienen la misma área. Llamemos a' , b' a las longitudes respectivas del semidiámetro que pasa por B y de su conjugado y θ el ángulo que forman entre sí. Respecto el sistema de ejes oblicuos formado por estos dos diámetros conjugados la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$, de donde se deduce que la base del triángulo considerado vale (poniendo $x = \frac{a'}{2}$) $y = \frac{\sqrt{3}}{2} b'$ y por tanto su área

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} a' b' \sin \theta.$$

Se concluye, como es conocido, que el producto $a' b' \sin \theta$ es constante para cualquier par de diámetros conjugados, de manera que puede sustituirse por el producto de los semiejes, obteniéndose la solución anteriormente expuesta de este problema.

Sin cálculo, se obtiene el valor de esta área máxima observando que para el círculo el área del triángulo equilátero es igual al producto de $\frac{3\sqrt{3}}{4} \pi$ por el área del círculo. Al hacer la transformación afín, esta razón debe conservarse bastando sustituir el área del círculo por el área de la elipse que vale πab ; se obtiene así de nuevo el mismo resultado anterior.

N.º 4 — Demostrar que toda cuerda de una parábola pasante por el foco es igual a cuatro veces el radio vector desde el foco al punto de contacto de la tangente paralela a la cuerda.

1ª. *Solución.* Refiriendo la parábola a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales elegido de modo que el

origen coincida con el vértice y el eje x con el diámetro que pasa por el foco, la ecuación de la parábola será $y^2 = 2px$, en la cual p es el duplo de la distancia del foco al vértice. Las coordenadas del foco serán $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y una secante cualquiera que pase por él tendrá por ecuación

$$y = m \left(x - \frac{p}{2} \right). \quad (1)$$

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ los puntos de intersección de esta secante con la parábola; las coordenadas x_1, y_1 ; x_2, y_2 serán las soluciones del sistema formado por la ecuación (1) y la ecuación de la parábola

$$y^2 = 2px. \quad (2)$$

Sustituyendo en esta segunda ecuación el valor de y deducido de la primera, resulta una ecuación de 2º. grado en x que resuelta da

$$x = \frac{pm^2 + 2p \pm \sqrt{(pm^2 + 2p)^2 - m^4 p^2}}{2m^2}$$

Tomando el signo $+$ se tiene x_1 y con el signo $-$ se tiene x_2 . De aquí

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{(pm^2 + 2p)^2 - m^4 p^2}{m^4}.$$

Conocidos x_1 y x_2 , de (1) se obtiene

$$y_1 = \frac{2p + \sqrt{(pm^2 + 2p)^2 - m^4 p^2}}{2m}, \quad y_2 = \frac{2p - \sqrt{(pm^2 + 2p)^2 - m^4 p^2}}{2m}$$

de donde

$$(y_1 - y_2)^2 = \frac{(pm^2 + 2p)^2 - m^4 p^2}{m^2}$$

y por tanto

$$c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{4p^2}{m^4} (1 + m^2)^2$$

o sea

$$c = \frac{2p}{m^2} (1 + m^2). \quad (I)$$

Sea ahora $R(x_3, y_3)$ el punto de contacto de la tangente a la parábola cuya pendiente es m (igual pendiente que la cuerda). La pendiente de la tangente a la parábola en un punto está dada por

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$$

y si en el punto x_3, y_3 esta pendiente vale m , debe ser

$$\sqrt{\frac{p}{2x_3}} = m, \quad \text{de donde} \quad x_3 = \frac{p}{2m^2}$$

y por tanto

$$y_3^2 = 2px_3 = \frac{p^2}{m^2}.$$

La medida del radio vector que va del foco al punto $R(x_3, y_3)$ es

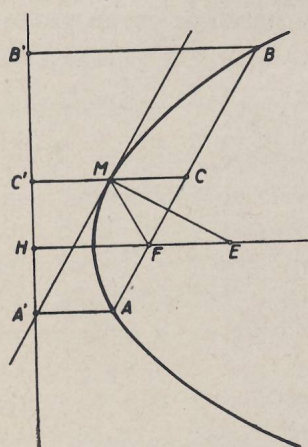
$$\rho = \sqrt{\left(x_3 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_3^2} = \sqrt{\left(\frac{p - pm^2}{2m^2}\right)^2 + \frac{p^2}{m^2}} = \frac{p}{2m^2}(1 + m^2) \quad (\text{II})$$

De (I) y (II) se sigue que $c = 4\rho$, como se quería demostrar.

Esta demostración deja de valer para el caso de la cuerda perpendicular al eje de la parábola, pues entonces es $m = \infty$. Pero en este caso, haciendo $x = \frac{p}{2}$, de (2) se deduce que $y = p$ y por tanto la longitud de la cuerda es $2p$. Como p es el duplo de la distancia del foco al vértice, (punto de contacto de la tangente perpendicular al eje), la afirmación del problema es también válida en este caso.

Esta solución corresponde al Sr. RAIMUNDO FAJARDO de la Facultad de Ingeniería de Rosario. Soluciones análogas se han recibido de los Sres. LORENZO O. COPELLO, MOISÉS GRILL y PEDRO E. ZADUNAISKY, también de la Facultad de Ingeniería de Rosario y del Sr. MODESTO GONZÁLEZ de San Luis.

2ª. Solución. Sea la parábola de la figura en la cual F es el foco y HB' la directriz. Consideremos la cuerda AB y sea



M el punto de contacto de la tangente paralela. Trazando AA' y BB' perpendiculares a la directriz, por definición de la parábola es $AA' = AF$ y $BB' = BF$ de donde

$$AB = AA' + BB'. \quad (1)$$

Trazando por M la paralela al eje de la parábola, MC será la polar del punto del infinito de la recta AB y por tanto C es el punto medio de AB . El segmento CC' es por tanto la paralela media del trapecio $AA'B'B$ y por consiguiente $AA' + BB' = 2CC'$ o bien, según (1)

$$AB = 2CC' \quad (2)$$

La perpendicular en el punto M a la cuerda AB será la altura del triángulo PMC y por una propiedad bien conocida de la parábola, también es la bisectriz del ángulo PMC ; por tanto el triángulo PMC es isósceles, de donde $PM = MC$. Como también $PM = MC'$, resulta $CC' = 2PM$, lo cual, junto con (2) demuestra que $AB = 4PM$.

Esta solución geométrica es, salvo ligeras modificaciones de redacción, del Sr. JUAN B. ESCALANTE GIACOMETTI, alumno del Profesorado de Matemáticas (Tucumán).

N. DE LA R. Para demostrar que el punto M es el punto medio de CC' es posiblemente más elemental observar que la polar de C' por estar este punto sobre la directriz debe pasar por F y por estar en la recta CC' , que es la polar del punto del infinito de la recta AB , debe pasar por este punto; luego la polar de C' es la recta AB y por tanto, sobre la recta CC' , el grupo $(CC'M\infty)$ es armónico, o sea $MC = MC'$.

BIBLIOGRAFIA

E. BOREL. *Valeur pratique et philosophie des Probabilités*. Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications (Tomo IV, fasc. III). Gauthier-Villars, París 1939.

Con este fascículo III del tomo IV dedicado a las "Aplicaciones diversas y conclusión" termina el "Tratado de Cálculo de Probabilidades y de sus aplicaciones" que, bajo la dirección de E. Borel y con la ayuda de ilustres colaboradores, ha ido publicando la casa Gauthier-Villars durante los últimos 15 años.

En este fascículo final el Autor pasa una rápida revista a los motivos por los cuales la teoría de probabilidades ha alcanzado una tan grande extensión y ha invadido regiones tan vastas de la matemática y de la física moderna. Estos progresos del cálculo de probabilidades y sobre todo de sus aplicaciones, han hecho que, aún antes de terminar el Tratado de Cálculo de Probabilidades a que hemos hecho referencia, se ha empezado a publicar ya, bajo la dirección del mismo Borel, una Colección de Monografías destinadas a completar y profundizar más los aspectos y desarrollos modernos de estas disciplinas.

En la introducción empieza el Autor por recordar que, si bien en los estudios teóricos se puede llegar a resultados exactos, en la vida práctica todos los conocimientos son constatados solamente con una cierta probabilidad, la cual se considera despreciable cuando llega a ciertos valores de pequeñez. Estos valores por debajo de los cuales la probabilidad de que se produzca un hecho se puede considerar como despreciable y por tanto el hecho como "imposible", dependen de la escala comparativa en la cual se considera intercalado el hecho. Borel considera útiles tres escalas de referencia: 1º La *escala humana*, para las acciones o sucesos que se refieren a un solo individuo; en ella considera como despreciables las probabilidades de orden inferior a 10^{-6} 2º La *escala terrestre*, para fenómenos referentes a todos los hombres de la Tierra; como el número de estos es del orden de 10^9 la probabilidad despreciable será del orden de $10^{-6} : 10^9 = 10^{-15}$ 3º La *escala cósmica*, para fenómenos que puedan referirse a toda la porción de universo que nos es accesible; la probabilidad despreciable se supone, en esta escala, del orden de 10^{-50} es decir, cuando la probabilidad de que un hecho no se produzca es inferior a 10^{-50} el hecho se puede considerar como absolutamente cierto.

El Capítulo I se titula "Valor práctico y científico del cálculo de probabilidades". En él, con las definiciones dadas de probabilidades despreciables a las diversas escalas, se dan distintos ejemplos de hechos tales que,

aun cuando teóricamente pueden producirse, deben ser considerados como completamente imposibles. Con ello el cálculo de probabilidades, si bien no puede conducir a una certeza absoluta, puede muy bien darnos una certeza práctica más que suficiente.

El Capítulo II se titula “El cálculo de probabilidades y el método científico”. Hay que distinguir entre los hechos de los cuales solo puede juzgarse por el resultado de experiencias anteriores y los hechos que derivan de una explicación científica. Para los primeros, la afirmación o negación de que el hecho va a producirse en condiciones determinadas se puede hacer únicamente con la probabilidad estadística que resulta de la observación de como se haya producido anteriormente el hecho en circunstancias análogas. Para los segundos, en cambio, no es lícito equiparar la probabilidad de realización del suceso a un esquema de urnas con bolillas diversas, pues por encima de la probabilidad experimental se posee del hecho la explicación y justificación científica. Analiza el Autor a este respecto la probabilidad de que salga el Sol en un día determinado (tratando las diversas opiniones de Laplace y Bertrand sobre el mismo problema) y diversas probabilidades, empíricas y subconscientes, sobre la durabilidad de la vida humana.

En el Cap. III titulado “La incompreensión de los jugadores y de los espíritus supersticiosos” se juzgan y discuten los fundamentos, o la falta de los mismos, de las reglas o martingalas para ganar en los juegos de azar, así como de las supersticiones y paradojas referentes a los mismos.

En el Cap. IV “Reflexiones sobre algunos errores y paradojas” se propone el Autor “estudiar ciertas críticas justificadas a las cuales han dado lugar algunos errores debidos a una aplicación incorrecta del cálculo de probabilidades, y estudiar igualmente ciertas críticas injustificadas y ciertas paradojas”. Con este propósito analiza y discute ampliamente la clásica Paradoja de San Petersburgo. Comenta diversas particularidades sobre la aplicación del cálculo de probabilidades a las decisiones judiciales y a otras cuestiones en las cuales hay que tener muy en cuenta la complejidad de las circunstancias que intervienen, siendo peligroso y muchas veces conducente a resultados falsos, el aplicar las reglas generales de manera demasiado simplificada. Tampoco debe perderse de vista el carácter *subjetivo* de la probabilidad, sobre el cual ha insistido mucho J. M. Keynes hasta llegar, tal vez exageradamente, a negar la existencia de probabilidades objetivas. Según Keynes, no se puede hablar nunca de probabilidad de un suceso, si no únicamente de la probabilidad del juicio que una persona determinada posee sobre dicho suceso.

El título del Cap. V es “Crítica de la noción de probabilidad”. Hay la crítica de los matemáticos que se resisten a admitir el valor de opiniones que no puedan darse con toda exactitud; para ellos hay una diferencia esencial entre la posibilidad de un suceso, por pequeña que sea su probabilidad, y la imposibilidad. El Autor sostiene que esta objeción, lógicamente irrefutable, es, sin embargo, sin valor práctico alguno “ella se aplicaría, por otra parte, a toda ciencia experimental (cuyos resultados tampoco se conocen exactamente, si no tan solo dentro de cierta aproximación) y no prueba más que una cosa: que el cálculo de probabilidades es una ciencia análoga a la física, a

la geometría o a la mecánica, y no a la aritmética o al álgebra''. Para salvar esta objeción se ha utilizado el método axiomático, sentando un cierto número de axiomas y desarrollando todo el cálculo de probabilidades a partir de ellos; se tiene así una ciencia perfecta desde el punto de vista de la matemática pura; sin embargo, todas las dificultades prácticas se encuentran de nuevo cuando se quiere aplicar la ciencia así construida a un fenómeno real cualquiera. Analiza el Autor brevemente la noción de colectivo de von Mises. Sostiene la existencia de la probabilidad de un caso aislado, examinando las objeciones a esta existencia hechas por Reichenbach en un trabajo de 1937.

El Cap. VI, titulado "Las probabilidades y el infinito" es el más interesante desde el punto de vista matemático. En las probabilidades en que intervienen una infinidad de casos posibles, hay que distinguir entre el punto de vista de las probabilidades numerables y el de las probabilidades continuas. La probabilidad de que un punto del intervalo $0-1$ cumpla determinadas condiciones, se puede considerar desde estos dos puntos de vista. Si se considera como problema de probabilidades continuas, la probabilidad será igual a la medida del conjunto E de los puntos que cumplen las condiciones dadas. Si se considera como problema de probabilidades numerables, debe suponerse el número dado, por ejemplo, en su desarrollo decimal $0,abcd\dots$ y suponiendo que se va obteniendo cada cifra sucesiva sacándola de una urna con probabilidad $\frac{1}{10}$, hallar la probabilidad de que el número así obtenido cumpla las condiciones dadas. Muchas veces estas dos maneras de plantear el problema conducen a los mismos resultados; en otras, sin embargo, se llega a conclusiones distintas. Para poner ejemplos de los dos casos recuerda el Autor el concepto introducido por él mismo en publicaciones anteriores de los *números normales*. Se dice que un número, escrito en el sistema decimal es "normal" cuando la frecuencia con que aparece cada cifra tiene el valor límite $\frac{1}{10}$, si la propiedad análoga se verifica para todo sistema de numeración cuya base sea una potencia de 10 el número se llama "completamente normal"; si se verifica para el desarrollo del número en cualquier base de numeración, se dice "absolutamente normal". Es fácil demostrar que los números normales, y aún los completamente y absolutamente normales, del intervalo $0-1$ forman un conjunto de medida uno; es decir, la probabilidad de que un número sea absolutamente normal es igual a 1. Esto conduce al Autor a considerar y señalar la importancia y dificultad de ciertos problemas, no resueltos, que aparecen en este orden de ideas. Tales son, por ejemplo, el demostrar si un número irracional dado es o no normal, o bien alguna definición simple de números absolutamente normales particulares.

El ejemplo dado por Borel de un caso que conduce a resultados distintos según se considere desde el punto de vista de las probabilidades continuas o numerables, es el siguiente. Sea x un número normal en el sistema de base 4 (sabemos que la medida de los puntos x con esta propiedad en el intervalo $0-1$ vale 1); por un ligero artificio se le descompone en la suma de otros dos $x = \alpha + \beta$, también normales, α en el sistema de base 3 y β en el sistema de base 2. Se tiene de aquí: dentro de los puntos $\alpha + \beta$ obtenidos sumando los números normales de base 3 con los normales de base 2,

está el conjunto de los números x de medida 1. En cambio, definiendo los números α y β sacando al azar cifras sucesivas y formando las sumas $\alpha + \beta$, se vé fácilmente que la probabilidad de que un número obtenido entre estos sea normal, es igual a cero. La aparente contradicción la explica el Autor por el hecho de que, en el 2º caso, se tiene en cuenta nada más una sucesión numerable de número α y β , como ocurre forzosamente siempre que se consideren solamente números obtenidos sacando al azar las cifras de una urna.

El Cap. VII como indica su título "Conclusión" es el último del libro y en él se insiste brevemente sobre la importancia de la idea de probabilidad en las ciencias, vida práctica individual y en la vida social.

Como apéndice, el fascículo contiene 6 notas, 5 de ellas reproducción de trabajos anteriores del mismo Borel y una de G. Darmon sobre "La verdad concreta y la teoría de las probabilidades".

El libro, escrito en el estilo claro y siempre lleno de ideas, muchas solamente apuntadas, que caracteriza a Borel, tiene el interés doble de los conceptos matemáticos del cap. VI y de la discusión desde su personal punto de vista, de las cuestiones más debatidas de los fundamentos de la teoría de la probabilidad.

Referente a este último aspecto se comprende que muchas apreciaciones pueden no ser compartidas y aun discutidas por ciertos lectores. El mismo Autor lo reconoce en la pág. 125 diciendo: "deseo que las polémicas que pudieran nacer sobre los conceptos vertidos, tengan por resultado el aclarar puntos oscuros y hacer progresar los conocimientos. Si así fuese, tan solo se tratase de un reducido número de puntos, no habría perdido el tiempo al escribir este libro". De todas maneras dé o no origen a polémicas, la lectura del libro no creemos sea para nadie una pérdida de tiempo, sino que cualquier lector, en uno u otro capítulo, encontrará ideas que le harán seguir la lectura con interés y placer.

L. A. SANTALÓ

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma y, los de primer año, además la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

INDICE DE LOS FASCICULOS 1 Y 2

Fascículo 1.

—Antecedentes de la creación de las "Mathematicae Notae". . .	pág.	3
—Concursos - Reglamento.	»	5
—Facsímile de la portada de "La Nova Scientia" de Nicoló Tartaglia.	»	6
—Prólogo.	»	7
—Los polígonos planos y el teorema de Jordán (B. LEVI). . . .	»	9
—Nicoló Tartaglia y la resolución de la ecuación de tercer grado (L. A. SANTALÓ).	»	26
—Ejercicios y problemas (del nº 1 al 6).	»	34
—Cuestiones (del nº 1 al 3).	»	35
—Flores y hojas.	»	36

Fascículo 2.

—La aproximación como instrumento de cálculo y de demostración (B. LEVI).	pág.	37
—Geometría y Experiencia.	»	63
—Ejercicios y Problemas. Soluciones.	»	66
—Ejercicios y Problemas. Propuestos (del nº 7 al 13). . . .	»	71
—Cuestiones (nº 4).	»	72
—Flores y hojas.	»	73
—Bibliografía.	»	74

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$n.
1 - B. LEVI — <i>Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$</i>	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — <i>Geometría integral de figuras ilimitadas</i>	1.80
3 - F. AMODEO — <i>Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva.</i> Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — <i>Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable</i>	1.00

Año 1940 - Vol. II.

1 - P. MONTEL — <i>Funciones armónicas y subarmónicas</i>	1.00
2 - G. FUBINI — <i>La ley de la media para funciones no derivables.</i> B. LEVI — <i>Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini</i>	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — <i>Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo</i>	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — <i>Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas</i>	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — <i>Origen y propósitos del Instituto.</i> J. REY PASTOR — <i>La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella.</i> B. LEVI — <i>Evolución del pensamiento matemático</i>	1.50
6 - E. GASPAR — <i>Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables</i>	1.50
7 - A. ROSENBLATT — <i>Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad</i>	1.00
8 - M. COTLAR — <i>Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue</i> - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — <i>La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas</i>	1.50

Año 1941 - Vol. III.

1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — <i>Semblanza de Sir Joseph J. Thomson.</i> B. LEVI — <i>La personalidad de Vito Volterra</i>	1.00
2 - G. FUBINI — <i>Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos</i>	2.50
3 - B. LEVI — <i>Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida</i>	3.00
4 - B. LEVI — <i>Sobre la inversión de una integral definida</i>	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — <i>Curvas extremales de la torsión total y curvas - D.</i>	2.00