



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA

CARRERA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA APLICADA

**Incertidumbre en los datos de entrada del Plan de
Requerimientos de Materiales**

Modelización y evaluación de los efectos que la misma tiene sobre
las salidas del sistema

Autor: Leandro Pisaroni

Directora: Dra. Daniela Dianda

Junio de 2025

ÍNDICE

Introducción	1
Objetivos	7
1. Marco Teórico	8
1.1. La Planificación de Requerimientos de Materiales	8
1.1.1. Desarrollo Histórico	8
1.1.2. Características Generales del Sistema	9
1.1.3. Variables del Sistema	12
1.1.4. Incertidumbre en el MRP	15
1.2. La Demanda en el MRP	19
1.2.1. El Plan Maestro de Producción	19
1.2.2. Modelización de la Demanda	21
1.2.3. Naturaleza de la Incertidumbre en la Demanda	25
1.2.4. Replanificación del Plan Maestro de Producción	26
1.3. El Lead Time en la Administración de Operaciones	29
1.3.1. Modelización de los Lead Times	30
1.3.2. Naturaleza de la Incertidumbre en los Lead Times	33
2. Propuestas Metodológicas	35
2.1. Enfoque 1: Determinación de la Distribución Teórica	36
2.1.1. Distribución de las Cantidades	36
2.1.2. Distribución de los Períodos	39
2.1.3. Distribución Conjunta	45
2.2. Enfoque 2: Simulación	47
2.2.1. Definiciones	49
2.2.2. Simulación del MRP	50
2.2.3. Análisis de los Resultados	51
3. Aplicación y Resultados	53
3.1. Algoritmo Tradicional	53
3.2. Distribuciones Teóricas	56
3.2.1. Distribución de las Cantidades	56

3.2.2.	Distribución de los Períodos	57
3.2.3.	Distribución Conjunta de las Cantidades Q_j y los Períodos P_j	59
3.3.	Simulación	62
3.3.1.	Modelo Operativo	63
3.3.2.	Análisis de los Resultados de la Simulación	65
3.4.	Análisis Comparativo	66
Consideraciones Finales		71
Referencias		76
Apéndice		82
A.	Distribuciones de Probabilidad	82
A.1.	Distribuciones de los Requerimientos	82
A.2.	Distribuciones de los Períodos	83
B.	Programa de Simulación	89

INTRODUCCIÓN

Todo producto final es el resultado de un proceso de fabricación que debe ser cuidadosamente planificado. Uno de los aspectos fundamentales de esta planificación es asegurar que se disponga de los materiales y componentes necesarios en los momentos exactos en los que se los requiere. La ausencia de estos insumos puede generar retrasos en la producción, incumplimientos en las entregas y, en definitiva, pérdidas económicas significativas para las organizaciones manufactureras.

La **Planificación de Requerimientos de Materiales** (popularmente conocida como MRP por sus siglas en inglés, *Material Requirements Planning*) es un sistema de planificación de órdenes de compra y producción ampliamente utilizado, con mayor o menor nivel de sofisticación, por casi la totalidad de las industrias. Desde su primera aparición en la década de 1960, este sistema ha ganado popularidad al mismo tiempo que logró crecer tanto como técnica y enfoque de planificación, así como un área o cuerpo de conocimientos y saberes específicos (Orlicky, 1975). Durante esa década, trabajando para IBM, Joseph Orlicky diseñó un programa de computación que gradualmente ganó territorio a lo largo de las industrias norteamericanas. Beneficiados por la disponibilidad comercial de equipos capaces de manejar grandes volúmenes de datos a velocidades solo imaginables para la época (Ptak & Smith, 2011), este *software* permitió mejorar la gestión de inventarios de las empresas, dejando obsoletos otros métodos y técnicas más antiguas, como el del punto de pedido o el de las cantidades periódicas.

El MRP tiene como principal objetivo determinar los requerimientos de cada uno de los componentes y/o materiales que forman un producto en cada uno de los períodos en los cuales se planifica la elaboración de dicho artículo. Estos requerimientos se transforman en órdenes planificadas que permiten generar la información necesaria para comprar de manera correcta los materiales y programar adecuadamente la producción (Sipper & Bulfin, 1998).

Para lograr este objetivo, el MRP se abastece fundamentalmente de tres fuentes básicas de información (F. R. Jacobs et al., 2018): 1) el Plan Maestro de Producción (MPS por sus siglas en inglés, *Master Production Schedule*); 2) la estructura de los productos o lista de materiales (BOM por sus siglas en inglés, *Bill of Materials*); y 3) las existencias disponibles en cada artículo. Dado que los registros de este plan se elaboran período a período, resulta necesaria una cuarta fuente: los tiempos estándar de provisión y/o producción de cada pieza y material, a los cuales se denominará indistintamente *lead times*¹.

1. El término inglés *lead time* puede traducirse al español de varias formas, dependiendo del contexto: tiempo de entrega, tiempo de ciclo, tiempo de producción, tiempo de aprovisionamiento, entre otros. Por sí sola, ninguna

Es, precisamente, en el tratamiento de estas fuentes de información dónde se establecen los supuestos que permiten luego aplicar las técnicas que producen las salidas del sistema, esto es, las órdenes planificadas. Por lo tanto, es necesario concentrar allí la atención para poder construir diferentes modelos que se ajusten a las situaciones particulares de cada industria.

Tradicionalmente los registros del MRP se construyen a partir de los supuestos, no menores, de que las cantidades a fabricar de los productos terminados y los *lead times* de todas las partes y materiales son **conocidos** y **determinísticos** (Louly & Dolgui, 2010). Estos supuestos suelen estar implícitos en la mayor parte de la bibliografía que explica y enseña las técnicas de cálculo de los registros del MRP, o bien pueden aparecer explícitamente mencionadas al comenzar los capítulos dedicados a las mismas.

Independientemente de si se indican o no, la mayoría de los sistemas de producción son estocásticos (Louly & Dolgui, 2013) y los supuestos anteriores suelen alejarse de la realidad. En primer lugar, las cantidades planificadas a producir se elaboran a partir de pronósticos de demanda, contruidos con datos históricos por medio de alguna técnica estadística que involucre el análisis, estudio y modelización de series de tiempo. Es de esperar, por lo tanto, que existan diferencias entre las cantidades planificadas de artículos finales a producir en un determinado período y la demanda real en ese mismo período, especialmente cuando se planifica a mediano plazo o se trabaja con escenarios muy cambiantes. La precisión de estos pronósticos tendrá un fuerte impacto en la estabilidad de los sistemas de producción (Ho & Ireland, 1998).

En segundo lugar, los tiempos de las operaciones necesarias para la elaboración de los productos, en particular en el caso de operaciones manuales, tienen una variabilidad natural e inherente a los mismos, la cual puede ser mayor o menor dependiendo del tipo de proceso. Esto implica que no se insumirá siempre la misma cantidad de tiempo para producir una parte y, en consecuencia, el inicio del proceso siguiente que utilice dicha pieza podría demorarse. Si, además, se tienen en cuenta las posibles roturas de máquina, desperfectos relacionados con cuestiones de calidad, los cuellos de botella, la falta de capacidad y otros factores ambientales (Chaharsooghi & Heydari, 2010), quedan expuestas las limitaciones del supuesto de *lead times* determinísticos a la hora de coordinar los sistemas de producción de manera eficiente (Elhafsi, 2002).

Por último, si el proceso de fabricación involucra la adquisición de partes o materiales provenientes de proveedores externos, es importante considerar que los plazos de entrega pueden sufrir demoras. Esto se debe a que dichos proveedores también son productores y sus propios procesos productivos pueden estar afectados por las mismas condiciones mencionadas en los párrafos anteriores. De esta manera, las demoras en sus procesos pueden ocasionar retrasos en las entregas.

Esto pone de manifiesto que los supuestos sobre los cuales se elaboran los registros del MRP

de estas traducciones logra capturar el núcleo del concepto que el término representa y, además, algunas de ellas pueden generar ambigüedades. Por tal motivo, se decide mantener el anglicismo *lead time* en el presente trabajo.

muchas veces no se verifican, produciendo planes «malos» que no pueden concretarse en la implementación real. Una mala planificación de los materiales trae como consecuencia pérdidas económicas, ya sea porque:

- aumentan los costos de mantenimiento de las existencias: cuando las cantidades a produciras superan la demanda real, se genera un incremento de las existencias de los productos finales y/o piezas en proceso. Estos inventarios tienen asociado costos que son directamente proporcionales a la cantidad de artículos que deben almacenarse, o bien, almacenados.
- se pierden ventas: cuando las cantidades producidas son menores que las demandadas, quedan pedidos sin cubrir. En ocasiones, deben diferirse las entregas a períodos siguientes, incrementando los gastos relacionados con la logística de los productos. Además, pueden tener que afrontarse posibles penalizaciones por estas demoras y se pierde imagen o confianza frente al cliente.

La falta de confianza en los planes generados por sistemas con mucha incertidumbre provoca que se acumule inventario en exceso para poder hacer frente a las variaciones que se puedan producir (Q. Li & Disney, 2017). De esta manera, resulta de vital importancia contar con un MRP que tenga en cuenta esta **incertidumbre** en los datos de entrada del sistema. Más aún, la necesidad de tener en cuenta esta incertidumbre en los planes de producción se puede remontar a la funcionalidad básica de los procesos de planificación, que es asignar los recursos limitados con los que cuentan las industrias basándose en la información actual y las proyecciones futuras (Gupta & Maranas, 2003).

El análisis de la incertidumbre en el MRP no es un tema novedoso, ya que un considerable número de autores lo han investigado durante las últimas décadas. Los antecedentes bibliográficos muestran que gran parte de los trabajos abordan la variabilidad en la demanda y en los *lead times* por separado, siendo las dos fuentes principales de incertidumbre identificadas en la literatura específica. Sin embargo, en raras excepciones se estudia la variabilidad de manera conjunta, tal como describen Rojas et al. (2019). Entre estos casos excepcionales se encuentran los trabajos presentados por Louly & Dolgui (2013), Zhou & Guan (2013) y Y. Zhang et al. (2016), entre otros. Estos autores, al igual que la mayoría de los trabajos previos sobre el tema, utilizan enfoques basados en la resolución de problemas de optimización por medio de algoritmos iterativos que brinden la «mejor planificación» en términos de minimización de costos. Por medio de estos algoritmos se obtienen cotas superiores e inferiores para las salidas, pero no sus distribuciones de probabilidad.

El aporte diferencial de este trabajo consiste en el replanteo del tratamiento de dos formas: 1) proponiendo enfoques para derivar las distribuciones de probabilidad de las variables que representan las salidas del sistema, en lugar de valores óptimos puntuales; 2) considerando simultáneamente la variabilidad en la demanda y en los *lead times*, factores que han sido tratados

de forma separada en la literatura. Dado que el objetivo principal del MRP es poder ayudar a los profesionales a tomar decisiones respecto de los procesos que están planificando y controlando, esta forma de pensar brinda mucha más información sobre los posibles escenarios que se pueden presentar. Por un lado, considerar ambas fuentes de variabilidad en forma simultánea, representa una visión más realista de los procesos de planificación. Por otro lado, poder disponer de una representación del comportamiento probabilístico de las salidas del sistema brinda la posibilidad de plantear y elegir diferentes planes o escenarios de acción.

Se plantea, entonces, como **pregunta general** de investigación «*¿De qué manera se puede considerar la incertidumbre en los datos de entrada en la elaboración del MRP?*», entendiendo a la incertidumbre como las distintas variabilidades que poseen las fuentes de información del MRP. En este sentido, se busca proponer métodos que incorporen explícitamente esta variabilidad en la elaboración de los registros del MRP, permitiendo obtener órdenes planificadas que reflejen de manera más realista el comportamiento del sistema productivo bajo condiciones de incertidumbre.

En particular, la presente tesis se enfoca en la variabilidad de las cantidades planificadas en el MPS (vinculada directamente con la variabilidad de la demanda) y de los *lead times*, ya que son las dos fuentes más importantes de incertidumbre que se pueden encontrar en la bibliografía específica (Dolgui & Prodhon, 2007). Lo que se busca responder es: por un lado, «*¿Cómo obtener o derivar la distribución de probabilidad de las cantidades requeridas de cada pieza y/o material que componen un determinado producto de acuerdo con el sistema MRP?*»; por el otro, «*¿Cómo obtener o derivar la distribución de probabilidad de los lead times para cada una de las piezas y/o materiales anteriores?*» Finalmente, la combinación de las respuestas a los dos interrogantes anteriores permitirá responder la pregunta «*¿Cómo obtener o derivar la distribución de probabilidad conjunta (cantidad y tiempo) para cada pieza?*».

Para abordar este problema, se consideran dos enfoques alternativos. Por un lado, se aborda la derivación teórica de las mencionadas distribuciones de probabilidad y, por otro lado, se propone un enfoque basado en simulaciones. Dado que se espera que dependiendo de la complejidad del proceso a planificar, el enfoque analítico resulte muy costoso o incluso inviable, contar con un procedimiento alternativo basado en simulaciones, ofrece una opción más práctica y flexible.

En función de lo mencionado, se propone un estudio del tipo *cuantitativo*, con un enfoque *exploratorio* y *descriptivo*. Se espera que los métodos propuestos, al incorporar explícitamente la incertidumbre en los datos de entrada del MRP, permitan generar planes más estables, disminuyendo así la necesidad de replanificaciones frecuentes. En particular, se espera que la consideración de la variabilidad en la demanda y en los *lead times* tenga impacto tanto en las cantidades planificadas como en los períodos de ejecución de las órdenes. Asimismo, se prevé que las salidas del sistema puedan ser caracterizadas mediante distribuciones de probabilidad apropiadas, y que la simulación de eventos discretos se constituya como una alternativa práctica

y efectiva para la gran mayoría de los casos.

La presente tesis está dividida en tres capítulos. En el **Capítulo 1** se resumen las ideas más importantes encontradas en el material bibliográfico disponible, principalmente libros especializados y artículos publicados en revistas. Esta revisión bibliográfica sirve para distinguir e identificar métricas que permitan cuantificar la incertidumbre de las entradas y su impacto en las salidas, de tal modo de contar con indicadores claros y precisos. Es importante resaltar que gran parte de este material, y sobre el cual se asientan las últimas investigaciones del tema, son artículos que tienen más de dos décadas de publicados. En los últimos años, poco se ha escrito en la dirección que se pretende seguir con esta tesis. Sin embargo, la excepción a esto es todo lo referido a estudios que incluyen simulaciones como complemento o principal metodología de investigación.

En la primera sección de este capítulo se hace una revisión histórica de la evolución del MRP, exponiendo detalladamente la metodología y el funcionamiento de este sistema. Luego se introducen los conceptos relacionados con la incertidumbre, sus causas y sus efectos. Se tratan en profundidad temas como el nerviosismo y el efecto látigo, y su impacto en el MRP. La segunda sección se concentra en el MPS y su relación con la demanda de los artículos finales. Se presentan los modelos que la bibliografía menciona como habituales para representar el comportamiento aleatorio de la demanda y como su variabilidad se propaga a lo largo de la estructura de los productos. La tercera sección repite el mismo análisis pero en relación a los *lead times*. La revisión de los modelos y métodos propuestos por los diferentes autores hasta la fecha permite identificar las distribuciones que se utilizan con más frecuencia o que son de particular interés para la comunidad académica en temas relacionados con el aprovisionamiento o las cadenas de suministros para modelar el comportamiento de los *lead times*.

El **Capítulo 2** presenta y describe los dos enfoques metodológicos que se proponen en esta tesis para incorporar la incertidumbre en la elaboración de los registros del MRP. En la primera parte del capítulo se aborda el enfoque teórico, en el que, asumiendo conocidas las distribuciones para los datos de entrada del sistema (demanda y *lead times*) se describe cómo pueden deducirse analíticamente las distribuciones de probabilidad de las salidas del sistema (número de órdenes planificadas en cada período). La segunda parte del capítulo está dedicada a la descripción del enfoque basado en simulaciones para la deducción del comportamiento de las salidas del sistema. En este caso, también asumiendo distribuciones conocidas para las variables que representan a las entradas del sistema, se describe cómo construir un procedimiento de simulación que de como resultado la distribución empírica de las variables que representan a las salidas. Se incluyen los detalles de cómo llevar adelante la simulación y todas las recomendaciones necesarias para obtener resultados útiles para la toma de decisiones.

El **Capítulo 3** se ejemplifica la aplicación de los dos métodos propuestos sobre un problema referido en la bibliografía. Sobre ese mismo problema se aplica también el algoritmo tradicional de

elaboración del MRP, con el objetivo de comparar los resultados obtenidos con los tres métodos. Esta comparación se hace en función de la utilidad de la información obtenida para la toma de decisiones, incluyendo el uso de las métricas definidas en los primeros capítulos.

OBJETIVOS

Objetivo General

En esta tesis se plantea como objetivo general *proponer métodos de elaboración del MRP que permitan tener en cuenta la incertidumbre inherente a los datos de entrada del sistema*, específicamente, la variabilidad en las cantidades de artículos demandados (demanda) y en los tiempos de producción y/o aprovisionamiento (*lead times*).

Objetivos Específicos

- Elaborar un marco teórico con los fundamentos del MRP tradicional, identificando sus limitaciones frente a la presencia de variabilidad en los datos de entrada, con énfasis en las principales fuentes de incertidumbre que afectan a la planificación, teniendo en cuenta además cómo la estructura de los productos y la propagación de la incertidumbre a través de los niveles de la lista de materiales.
- Desarrollar un procedimiento analítico para la derivación de las distribuciones de probabilidad de las salidas del MRP (cantidades planificadas y períodos de planificación) y su distribución conjunta, a partir de las distribuciones de las entradas, presentando el marco metodológico general aplicable a diferentes contextos de producción y aprovisionamiento.
- Diseñar un procedimiento basado en simulación de eventos discretos para obtener las distribuciones de las salidas del MRP, definiendo el modelo operativo, las variables de estado y las variables de salida.
- Establecer métricas apropiadas para evaluar y comparar el desempeño de los diferentes enfoques propuestos, considerando indicadores relevantes para la planificación de materiales bajo incertidumbre.
- Aplicar el enfoque tradicional y los dos enfoques propuestos (distribuciones teóricas y simulación) sobre un ejemplo, comparando la consistencia de los resultados obtenidos, la utilidad de la información generada para la toma de decisiones, y estableciendo recomendaciones de uso según las características del sistema productivo, la complejidad analítica y la disponibilidad de información sobre las distribuciones de entrada.

c

MARCO TEÓRICO

1.1. La Planificación de Requerimientos de Materiales

1.1.1. Desarrollo Histórico

La **Planificación de Requerimientos de Materiales** (MRP) aprovechó el avance y el desarrollo de la tecnología de las computadoras de la segunda mitad del siglo pasado. Su creación a fines de la década de 1960 (Koh et al., 2002) se atribuye a varios expertos, pero fue Joseph Orlicky el primero en formalizar y plasmar los conceptos de forma escrita en papel (Orlicky, 1975) y popularizarlo (Thürer et al., 2020).

Previo al desarrollo y utilización de este sistema, los conceptos básicos inherentes al mismo ya eran conocidos. El principal motivo por el cuál no se utilizaba el MRP se debía al costo computacional requerido (Chapman, 2006), especialmente en el caso de productos con estructuras complejas.

Tradicionalmente, las empresas utilizaban algún tipo de variación de un sistema de gestión de las existencias denominado Modelo de Revisión Continua o Modelo de Punto de Pedido (conocido como ROP por sus siglas en inglés, *Reorder Point System*). Estos modelos se basan en la determinación de un tamaño de lote (fijo) a pedir y un nivel mínimo de existencias, llamado punto de pedido, que aseguren cierto nivel de servicio definido por la empresa. El sistema permite que las cantidades de cada artículo y/o material disminuyan hasta el punto de pedido y luego se libera una orden por la cantidad establecida para reabastecer las unidades consumidas (Krueger et al., 1992).

Este enfoque, simple de aplicar y controlar, respondía además al paradigma de competitividad de la época. En la década de 1960 los costos constituían la principal ventaja competitiva y los modelos de optimización de costos, tales como el ROP, satisfacían las necesidades básicas de planificación y control de la producción de las empresas (R. F. Jacobs & Weston, 2007).

El ROP asume que la demanda de los artículos y el plazo de provisión pueden ser constantes o variables aleatorias con distribuciones conocidas, o bien una combinación de ambos. Cualquiera sea el caso, el tamaño del lote óptimo se suele obtener minimizando el costo total de la gestión y el punto de pedido se calcula a partir de la definición de un riesgo de faltante que la empresa fija como objetivo de servicio a sus clientes.

La desventaja de este sistema es que exige que los niveles de las existencias sean controlados continuamente (de allí deriva su nombre). Además, como el tamaño del lote busca minimizar costos, el sistema puede generar existencias excesivas como consecuencia de que el momento en el cual se reabastecen los artículos puede diferir significativamente del momento en el cual se utilizan.

Por el contrario, el MRP busca planificar el abastecimiento de las cantidades exactas de artículos y materiales necesarios para cumplir con la demanda de los clientes. Además, planifica estas cantidades solo en los períodos donde se las requerirán, manteniendo un correcto balance de las existencias. Todo esto presenta una considerable mejora respecto de los modelos de punto de pedido (Vollmann et al., 2011).

En las décadas de 1970 y 1980 las empresas comenzaron a cambiar su enfoque de los costos hacia la comercialización y la calidad, lo que llevó a un mayor énfasis en la integración de los distintos planes de producción. El desarrollo computacional de esos años permitió que el MRP gane cada vez más utilidad y, por lo tanto, popularidad. Además, este sistema comenzó a incluir un número creciente de funciones, al punto tal que se lo empezó a denominar *Planificación de los Recursos de Manufactura*. Para diferenciar el sistema original del nuevo sistema, a fines de la década de 1980 se acuñó el término MRP-II para identificar a este último.

1.1.2. Características Generales del Sistema

En términos generales, un **plan de producción** es una especificación detallada de las cantidades a fabricar de cada producto final y sus partes junto a una estimación de los momentos en los cuales se producirán estas cantidades. El corazón mismo del plan de producción son los pronósticos de demanda (Nahmias & Olsen, 2015), los cuales luego se traducen en el Plan Maestro de Producción (MPS). Este plan indica qué productos finales fabricar en cada período de planificación e incluye, además de los pronósticos, pedidos en firmas de los clientes y requerimientos de inventarios de seguridad, entre otras cosas. En la Sección 1.2 se realizará un tratamiento más profundo del MPS y la demanda.

Los registros del MRP se construyen sobre la idea básica de que existe una **demanda independiente** de productos finales (definida en el MPS) y una **demanda dependiente** de partes y materias primas (Thürer et al., 2020), relacionados a través de la lista de materiales (BOM). El MRP es un plan de control de inventarios de demanda dependiente (Krueger et al., 1992) que transforma la información del MPS en requerimientos de materias primas y productos semielaborados.

En el caso de empresas que ensamblan productos finales a partir de partes elaboradas en lotes, el MRP es un componente central en sus planes de producción (Vollmann et al., 2011). Este plan permite determinar cuáles y cuántos componentes será necesario fabricar en cada período de planificación.

Estos **períodos** son discretizaciones del tiempo que se corresponden con la unidad en la que se miden los plazos de aprovisionamiento o producción de los artículos. Puede tratarse de meses, semanas, días o cualquier otra unidad de tiempo que el analista considere conveniente, siempre y cuando sea consistente con los planes de producción que soportan al MRP.

Lo que se obtiene con el MRP son *órdenes planificadas*, ya sea de compra de materia prima o de producción de partes y/o componentes. La determinación de estas órdenes es lo que se conoce como **explosión** del sistema y se calculan de arriba hacia abajo y de adelante hacia atrás, tal como explican Nahmias & Olsen (2015). Esto es, las cantidades se obtienen partiendo del producto final, al cual se lo va desagregando en componentes cada vez más chicos («arriba hacia abajo»); mientras que los períodos de planificación se van descontando en el tiempo de acuerdo con la duración del proceso de compra o producción («adelante hacia atrás»). Para cada parte se busca responder la pregunta «*Si se quieren obtener n unidades de la parte i en un determinado período, ¿cuántas unidades de los componentes j y k será necesario producir antes? ¿Y en qué momento habrá que comenzar a fabricarlas?*».

Para responder esta pregunta, el MRP se abastece fundamentalmente de cuatro fuentes de información (o datos de entrada):

1. El Plan Maestro de Producción.
2. La estructura de los productos.
3. Los tiempos estándar de provisión y/o producción de cada parte o material (*lead times*).
4. Las existencias disponibles de cada artículo al momento de la planificación.

1.1.2.1. Lista de Materiales

En su forma más simple, la **lista de materiales** es un documento que contiene el listado completo de las materias primas y las piezas que componen un determinado producto, así como las cantidades requeridas de cada una de ellas.

Esta lista suele organizarse en niveles, donde el primer nivel (Nivel 0) corresponde al producto terminado, mientras que el último nivel (Nivel N) se reserva para todas aquellas partes, piezas o materiales que se compran a proveedores. La forma en la que se estructura la lista no es única y varía de empresa en empresa. Por ejemplo, es común utilizar distintas sangrías para indicar los niveles en el listado cuando se quiere preparar la BOM para ser utilizada en algún programa de computadora, tal como se muestra en la Tabla 1.1.

Una forma muy útil de representar la BOM es por medio de lo que se conoce como **árbol de estructura del producto**. Este diagrama puede pensarse como un grafo simple no dirigido en donde cada nodo representa una pieza y/o material, y las aristas relacionan los artículos con los componentes que lo conforman. En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de estructura para un producto hipotético.

Tabla 1.1: Lista de materiales (BOM) del producto hipotético «P-100».

Artículo	Descripción	Cantidad [u]
P-100	Producto final P-100.	1
S-110	Subconjunto S-110.	2
I-111	Pieza I-111.	1
I-112	Pieza I-112.	3
S-120	Subconjunto S-120.	1
I-121	Pieza I-121.	2

Tal como la BOM, el árbol de estructura del producto se suele presentar por niveles. A la cabeza se ubica un único nodo con el producto final. Inmediatamente debajo se colocan los nodos de todas las partes que componen este producto, unidos por aristas al artículo final. En el siguiente renglón se ubican los nodos de los componentes que forman a las partes anteriores, unidos cada uno con la respectiva pieza que conforman. Este proceso se repite hasta que el producto se desglosa por completo y se llega al nivel de las materias primas o artículos comprados a proveedores.

El nombre de «árbol» proviene de la forma más usual en la que la estructura se organiza: como un árbol que crece hacia abajo, cuya raíz es el nodo del producto final. Las aristas que unen los **padres** (nodos superiores) con los **hijos** (nodos inferiores) representan las ramas de este árbol que se expande a medida que aumentan los niveles.

La BOM también puede contener información adicional, como subconjuntos dentro de los productos, características y descripciones de las piezas, proveedores, entre otros. Más aún, la misma lista puede estructurarse siguiendo esta lógica de bloques, agrupando los materiales que forman un componente, los componentes que forman un pieza, las piezas que forman un subconjunto y los subconjuntos que forman al producto final.

Seguendo las ideas de Vollmann et al. (2011), se definen las siguientes variables y coeficientes. Sea X un producto final y sea X_{nj} el artículo j del nivel n , en donde $n = 0, \dots, N$ y $j = 1, \dots, J_n$. Para simplificar la notación, en este trabajo se denominará simplemente X_j a la j -ésima pieza que compone al producto final, con $j = 0, \dots, J - 1$, siendo J la cantidad total de artículos y materiales que forman el producto, esto es, $J = \sum_{n=0}^N J_n$.

Como se expuso anteriormente, el nivel $n = 0$ corresponde al producto final. Por este motivo se reservará la notación X_0 para el mismo. El resto de las partes se numerarán secuencialmente siguiendo el orden de los niveles, tal como muestra el ejemplo de la Figura 1.1. De manera alternativa, podría utilizarse el orden en el que las piezas se listan en la BOM para determinar los subíndices j .

Los coeficientes m_j indican la cantidad de componentes X_j que se requieren para fabricar una unidad de su respectivo padre. Esta definición es muy importante ya que es la base para el cálculo de la explosión del sistema. No debe confundirse m_j con la cantidad de componentes X_j

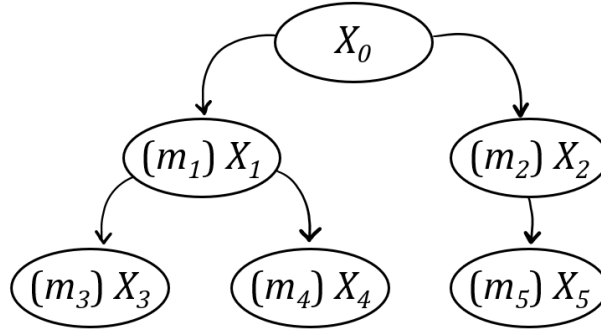


Figura 1.1: Estructura del producto de un artículo final X_0 .

que efectivamente participan en la fabricación del producto final. Por ejemplo, si en la Figura 1.1 X_0 está formado por dos piezas X_1 , entonces $m_1 = 2$. Si, a su vez, X_1 está compuesto por dos partes X_3 , entonces también será $m_3 = 2$, aunque en total se requieran 4 unidades de X_3 para armar el producto final.

En cuanto a m_0 , es decir, el coeficiente correspondiente al producto final, se asume que las BOMs siempre corresponden a una unidad del producto final, esto es, $m_0 = 1$.

1.1.3. Variables del Sistema

El registro básico del MRP del artículo j en el período t se construye a partir de las siguientes variables: los requerimientos brutos ($Q_j(t)$), los ingresos programados ($IP_j(t)$), los disponibles ($S_j(t)$), los requerimientos netos ($RN_j(t)$) y las órdenes planificadas ($R_j(t)$). Estas cinco variables están relacionadas una con la otra y, a su vez, entre los artículos padres e hijos.

A continuación se describe cada una de ellas en el orden en el que habitualmente se las presenta en los registros del MRP:

- **Requerimientos Brutos:** es la demanda del artículo j en el período t . En el caso de los productos finales, estas cantidades corresponden a las establecidas por el MPS. Para los artículos o materiales que componen estos productos, las cantidades pueden determinarse a partir de las órdenes planificadas de sus padres por medio de la siguiente expresión:

$$Q_j(t) = m_j \cdot R_k(t) \quad (1.1)$$

en donde se asume que X_k es el padre de X_j .

- **Ingresos Programados:** es la cantidad ya ordenada del artículo j que ingresará al comienzo del período t . Corresponden a órdenes de producción o de compra liberadas en períodos anteriores.

- **Disponible:** es el nivel de existencias que se espera tener del artículo j al final del período t y, por ende, estará disponible al inicio del período $t + 1$. Esta cantidad se calcula de la siguiente manera:

$$S_j(t) = S_j(t - 1) + IP_j(t) - Q_j(t) \quad (1.2)$$

donde $S_j(0)$ indica las existencias del artículo j al momento de la planificación (o revisión del plan) y se asume que es un valor conocido por el planificador.

Para evitar trabajar con existencias negativas, se opta por seguir el enfoque que utilizan autores como Jacobs et al. (2018). De esta manera, en los casos en que resulte $S_j(t) < 0$, se reemplazará este valor por cero. Así, el disponible puede redefinirse como:

$$S_0(t) = \max \{S_j(t - 1) + IP_j(t) - Q_j(t); 0\}, \text{ para } t = 1, \dots, T \quad (1.3)$$

- **Requerimientos Netos:** Es la cantidad neta del artículo j que efectivamente debe ser provista al inicio del período t . Esta variable tomará valores nulos en todos los períodos para los cuales haya existencias suficientes del artículo j , es decir, cuando $S_j(t) \geq 0$. En cambio, cuando estas existencias no sean suficientes, se tendrá faltante del artículo y deberá planificarse la compra o producción de j en ese período por la cantidad equivalente al valor absoluto del resultado (1.2). De esta manera, los requerimientos netos pueden obtenerse como:

$$RN_j(t) = |\min \{S_j(t - 1) + IP_j(t) - Q_j(t); 0\}| \quad (1.4)$$

- **Órdenes Planificadas:** corresponden a los requerimientos netos, pero adelantados¹ un número de períodos igual al *lead time* del artículo j . Esto es:

$$R_j(t) = RN_j(t - L_j) \quad (1.5)$$

en donde L_j representa el tiempo estándar de provisión o producción del artículo j , expresado en períodos de planificación.

En función de las particularidades del sistema de producción analizado, las cantidades definidas por (1.5) pueden ser modificadas para tener en cuenta, por ejemplo, inventarios de seguridad,

1. Los requerimientos netos indican cuántas unidades son necesarias en un período. Para que esas partes estén disponibles al comenzar el período en la cual se las requiere, su producción o compra debe comenzar tantos períodos antes como se demore este proceso (determinado por el *lead time*). Por este motivo es que las órdenes se «adelantan» a los requerimientos.

lotes de compra, piezas defectuosas, entre otros. Estas situaciones están fuera del alcance de la presente tesis y no serán consideradas. Se asume que la Ecuación (1.5) define correctamente las órdenes planificadas y no es necesario realizar ningún ajuste a las mismas.

1.1.3.1. Explosión del Sistema

Una vez obtenidos todos los datos de entrada del MRP, para cada artículo que compone el producto final se construye un registro que contiene las variables definidas en la sección anterior y tienen una forma similar a la que se presenta en la Tabla 1.2, en donde el período 1 corresponde al *período de acción*, definido como el próximo período en ejecución².

Tabla 1.2: Registro MRP para un artículo genérico X_j .

		Períodos												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Artículo: X_j (LT = L_j)	Requerimientos Brutos													
	Ingresos Programados													
	Disponibles													
	Requerimientos Netos													
	Órdenes Planificadas													

Referencia: LT representa el *lead time* del producto en períodos de planificación.

El primer registro que se construye es el correspondiente al del producto final (X_0), debido a que el mismo es el único que tiene una demanda independiente. Todos los conjuntos, piezas y materiales que lo componen poseen una demanda que depende de las cantidades de artículos finales que se planifique producir.

Se supone que se trabaja con una cantidad T de períodos a planificar (*horizonte de planificación*), con $T \in \mathbb{N}$, y que el MPS del producto que se quiere planificar establece las cantidades $Q_0(t)$ para $t = 1, \dots, T$. Por simplicidad, se asume que al momento de la planificación no quedaron órdenes pendientes por ingresar de los períodos anteriores, es decir, $IP_0(t) = 0$ unidades $\forall t$.

En estas condiciones, de acuerdo con (1.3), al final de cada período t se dispondrá de $S_0(t)$ unidades del artículo final. En aquellos períodos en los cuales $S_0(t-1) - Q_0(t) < 0$, será necesario producir $RN_0(t)$ unidades del producto final según (1.4). Finalmente, conociendo el *lead time* L_0 (en períodos) de X_0 , se planifican en el período $t - L_0$ las órdenes $R_0(t)$ correspondientes a la demanda del período t .

2. En las planificaciones que se realizan dentro de las industrias no es poco usual numerar los períodos de manera secuencial en el tiempo manteniendo cierta continuidad en las revisiones de los planes. Por ejemplo, una práctica posible es numerar las semanas dentro de cada año. De esta manera, si el próximo período en ejecución es la semana 35 y se planifican 10 semanas, debajo del título de los períodos se verían los números del 35 al 44 en lugar del 1 al 10.

Una vez que se obtienen las órdenes planificadas de X_0 , se repite este mismo procedimiento con las piezas del nivel $n = 1$, con la única diferencia de que los requerimientos brutos no se toman del MPS sino que se deben calcular según (1.1). El resto del algoritmo se aplica de manera idéntica.

Al finalizar con este nivel, se sigue con el siguiente hasta llegar a X_J , la última pieza del último nivel. Este proceso iterativo es lo que se conoce como **explosión del MRP** y recibe este nombre porque recorre la lista de materiales y descompone los requerimientos del producto final en los de sus componentes o partes.

1.1.4. Incertidumbre en el MRP

El MRP fue pensado y desarrollado para ambientes determinísticos, dentro de los cuales sus planes proporcionan buenos resultados. Más aún, en este tipo de entornos la lógica del sistema permite obtener planes óptimos para producciones del tipo justo a tiempo.

En el caso en que exista incertidumbre o variabilidad, ya sea en la demanda o en los *lead times*, la explosión del sistema debe ajustarse por medio de lo que se denomina parametrización del MRP (Hnaien et al., 2009). En este proceso se busca determinar los valores óptimos de las variables de decisión del sistema que respondan a algún criterio de optimización predefinido, como puede ser, por ejemplo, la minimización de costos.

De acuerdo con Dolgui & Prodhon (2007), algunas de las variables de decisión que permiten mitigar el efecto de la incertidumbre son:

- Las existencias de seguridad;
- Los *lead times* de seguridad;
- Las reglas de dimensionamiento de lotes de compra y producción;
- La longitud del horizonte de planificación.

Dado que el objetivo del MRP es poder contar con las piezas requeridas en las cantidades necesarias y en los momentos en los cuales serán demandadas, el valor de los parámetros buscará un equilibrio entre acumular existencias en exceso e incurrir en faltantes de las mismas para cumplir los criterios de optimización.

Varios autores estudiaron las *causas* que originan la incertidumbre en el MRP. Entre ellos son de particular interés los siguientes trabajos, los cuales sentaron las bases de muchos estudios posteriores. Whybark & Williams (1976) sostienen que hay dos fuentes básicas de incertidumbre que afectan los registros del MRP. La primera es la que involucra cambios en los requerimientos netos de los productos y sus partes. La segunda es la que afecta los momentos (períodos) en los cuales se dispone de estos artículos. A estos tipos de variabilidad los denominaron *incertidumbre en la demanda* y *en el suministro*, respectivamente. Por su parte, Wijngaard & Wortmann (1985) reconocen un tercer tipo de incertidumbre, la relativa a los *rendimientos*, esto es, incertidumbre

en la cantidad y la calidad de los resultados de los procesos. Este tipo de variabilidad no será tomada en cuenta en este trabajo.

1.1.4.1. Nerviosismo y Efecto Látigo

Una de las principales características del funcionamiento del MRP es que debe ser revisado período a período, actualizando los valores de las variables que componen los registros en función de la nueva información obtenida (demanda real, órdenes liberadas, entre otros). La incorporación de aleatoriedad al análisis del sistema introduce un inconveniente que puede afectar la estabilidad del mismo, a saber, el nerviosismo.

El **nerviosismo** (*nervousness* en inglés) es una característica del MRP que describe el comportamiento del sistema cuando pequeños cambios en los registros de los niveles superiores (o en el MPS) producen cambios significativos en los registros de los niveles subsecuentes, especialmente en los últimos. Los sistemas nerviosos, por lo tanto, se caracterizan por la necesidad de replanificar continuamente las órdenes de producción o compra.

Este comportamiento no solo es indeseable por el tiempo que consume recalcularse los registros de manera frecuente, sino que además trae aparejadas varias desventajas, como el aumento en los costos y las pérdidas de ventas. Blackburn et al. (1985) proponen y discuten estrategias para combatir el nerviosismo que se alinean con las variables de decisión definidas por Dolgui & Prodhon (2007). Algunas de estas son:

- No revisar («congelar») los planes durante el horizonte de planificación;
- Trabajar con una política de inventarios del tipo lote por lote;
- Utilizar amortiguadores (conocidos como *buffers*) de artículos para los niveles superiores;
- Pronosticar la demanda más allá del horizonte de planificación.

La variabilidad de los sistemas nerviosos es uno de los factores más importantes que conducen al **efecto látigo** (*bullwhip effect*³ en inglés). Este fenómeno describe cómo cambios lentos en la demanda de los consumidores provoca grandes fluctuaciones en la producción de los proveedores ubicados en el otro extremo de la cadena de suministro (Wang & Disney, 2016). Dicho de otra manera, es la transferencia y amplificación de la variabilidad en la demanda a lo largo de la cadena de suministro.

Disney & Lambrecht (2008) distinguen dos tipos de causas para el efecto látigo, a las cuales denominan causas conductuales y causas operacionales. El primer grupo está relacionado con las decisiones tomadas por los planificadores a la hora de enfrentarse ante situaciones como

3. Este término fue acuñado por primera vez por la compañía Procter & Gamble (P&G) en la década de 1990. También se lo puede encontrar con nombres como «*amplificación de la demanda*», «*amplificación de la varianza*» o «*efecto Forrester*», si bien, en este último caso, no suelen referir a lo mismo.

variaciones en la demanda. En general son muy difíciles de cuantificar y no mucho se puede hacer para aliviar este problema, por lo que no se profundizará sobre ellas.

En cambio, las causas operativas u operacionales están relacionadas con la forma en la cual operan los sistemas. Las cinco principales causas operativas del efecto látigo son (Figura 1.2):

- El procesamiento de las señales de la demanda.
- Los *lead times*.
- El tamaño de los lotes.
- Las fluctuaciones en los precios.
- El intercambio entre el racionamiento de las existencias y su agotamiento.

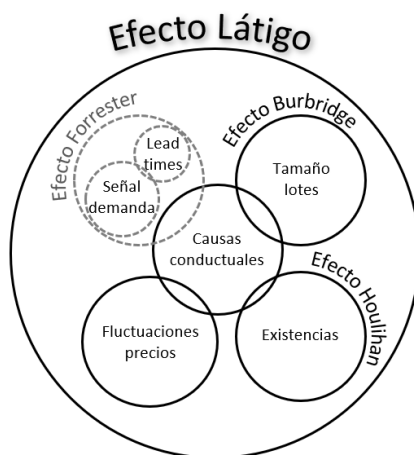


Figura 1.2: Causas del efecto látigo. Adaptada de Disney & Lambrecht (2008), p.12.

La consecuencia más obvia del efecto látigo es la falta de estabilidad en los planes de producción debido a su alta variabilidad, lo cual conduce a un aumento de costos asociados con pérdidas o mal uso de la capacidad y almacenamiento de existencias en exceso. Cuanto más larga y compleja sea la cadena de suministro, peor será esta situación, impactando directamente sobre los plazos de entrega, los niveles de servicio y los niveles de existencias.

1.1.4.2. Formas de Mitigar los Efectos de la Incertidumbre

Dentro de la bibliografía específica, las dos formas más comunes de combatir las consecuencias la incertidumbre son la utilización de inventarios de seguridad y/o de *lead times* de seguridad, dependiendo de la situación. Van Kampen et al. (2010) analizan su conveniencia en tres escenarios de incerteza diferentes: 1) en la demanda, 2) en el aprovisionamiento o 3) en ambos. La conclusión de su trabajo fue que los inventarios de seguridad son más efectivos para mitigar los efectos de variabilidad de la demanda. En cambio, los *lead times* de seguridad son

preferibles cuando la variabilidad está presente en el aprovisionamiento o bien hay incertezas en ambas fuentes de información.

Estos autores también señalan que la desventaja de optar por *lead times* de seguridad sobre las existencias de seguridad es el aumento en el nivel de los inventarios y los requerimientos de capacidad de almacenamiento para los mismos. Esto se debe, entre otras cosas, a que los pedidos se hacen con mayor anticipación y los artículos pueden permanecer más tiempo en los depósitos que cuando se utilizan existencias de seguridad.

La determinación del nivel de inventarios y tiempos de seguridad suele requerir la obtención del valor óptimo de alguna función objetivo, tal como lo plantean Hnaien et al. (2009), Louly & Dolgui (2013) y Zhou & Guan (2013). Sin embargo, no existen antecedentes de trabajos que aborden la planificación de materiales incorporando de manera conjunta la variabilidad de la demanda y los *lead times*. Si bien parte de la literatura tradicional reconoce la variabilidad de estos componentes, los estudios existentes la tratan de forma aislada o independiente, sin considerar que ambos elementos son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad específicas que interactúan simultáneamente en el sistema. Esta simplificación limita la capacidad de análisis de diferentes escenarios y la toma de decisiones informadas respecto de las cantidades a pedir o producir y los momentos en los cuales será necesario abastecerse.

1.1.4.3. Indicadores del Efecto de la Incertidumbre en el MRP

El análisis de la incertidumbre no se limita únicamente al estudio cualitativo del impacto que puede o podría tener la variabilidad de los datos de entrada del MRP en las órdenes planificadas por el mismo. Resulta de sumo interés poder cuantificar de alguna manera el efecto de los fenómenos descritos anteriormente.

Wang & Disney (2016) señalan que, para el efecto látigo, la volatilidad de este fenómeno puede ser medida mediante la varianza, el desvío estándar o el coeficiente de variación del número de órdenes a lo largo de la cadena de suministro. También proponen comparar la varianza de las órdenes y la demanda, ya sea por medio de cocientes o diferencias.

Cachon et al. (2007) utilizan ideas similares para definir el *ratio de amplificación* (A_{rat}) y la *diferencia de amplificación* (A_{dif}) por medio de las siguientes expresiones:

$$A_{rat} = \frac{\sigma_{prod}^2}{\sigma_{dem}^2} \quad (1.6)$$

$$A_{dif} = \sigma_{prod}^2 - \sigma_{dem}^2 \quad (1.7)$$

donde σ_{prod}^2 y σ_{dem}^2 representan la varianza en las órdenes de producción y en la demanda, respectivamente.

Disney & Lambrecht (2008) también indican que la Ecuación (1.6) es la forma más común

de medir la amplificación en las órdenes de producción. Más aún, estos autores denominan al ratio de amplificación simplemente «*bullwhip*», aludiendo a este efecto.

Existen otras métricas en la literatura orientadas a medir el nerviosismo del MRP mediante la comparación entre las órdenes planificadas en cada ciclo de replanificación, como las propuestas por Blackburn et al. (1986), Sridharan et al. (1988) y Kadipasaoglu & Sridharan (1997). Sin embargo, estos indicadores quedan fuera del alcance de la presente tesis, ya que el objetivo es encontrar medidas relativas que permitan visualizar el impacto de la no incorporación de la incertidumbre en la planificación versus una que sí la incorpore. Por tal motivo, se utilizan ratios o diferencias como los propuestos por Cachon et al. (2007).

1.2. La Demanda en el MRP

1.2.1. El Plan Maestro de Producción

La demanda es el puntapié inicial a partir del cual se organiza la producción de las industrias y es el **Plan Maestro de Producción**⁴ (MPS) el encargado de traducir estos requerimientos del mercado en cantidades de bienes a producir. Su importancia dentro de las organizaciones fabriles es tal que se puede afirmar que todas las industrias cuentan con alguna versión del MPS, incluso en aquellas en las que no se desarrolla uno de manera formal (Chapman, 2006).

La función más importante que cumple este plan es la de definir las cantidades a fabricar de cada producto final en cada período de planificación. La forma más común de obtener estas cantidades es usando el criterio de **horizonte deslizante** (Herrera & Thomas, 2009). Esto es, definido un horizonte de T períodos de planificación, se elaboran los registros del MPS para cada uno de ellos. Con una determinada periodicidad Δt predefinida, se recalculan las cantidades para los T períodos futuros incorporando la información de lo sucedido en los que ya transcurrieron, agregando Δt nuevos períodos al final de la planificación.

Bajo el criterio de horizonte deslizante la principal información que debe actualizarse es la relativa a la demanda de los clientes, la cual servirá como base para la elaboración de los pronósticos de demanda (Claisse et al., 2016). Respecto de estos, es fundamental remarcar que no son lo mismo los pronósticos de demanda que el MPS (Sipper & Bulfin, 1998). Un pronóstico es una estimación de una demanda incierta futura, mientras que el MPS es un plan, una decisión de cuántos productos fabricar en cada período que tiene en cuenta limitaciones de capacidad, costos de producción, planes de ventas, entre otras cuestiones (Vollmann et al., 2011).

4. Si bien la traducción literal de *Master Production Schedule* es Programa Maestro de Producción, conceptualmente no es lo mismo hablar de *plan* que de *programa*. El primero establece cantidades a producir por período, mientras que el segundo indica, además, las fechas exactas de inicio y finalización de la producción de cada artículo final. Por este motivo es que se utiliza el término «plan» para referirse al MPS, dado que ese será el uso que se le dará en el presente trabajo.

1.2.1.1. Elaboración del MPS

La elaboración de los registros del MPS puede realizarse siguiendo dos enfoques diferentes, dependiendo de la estrategia de la empresa. Por una lado, se puede optar por un enfoque jerárquico en el cual se construye un plan de producción agregado y, a partir de este, se desagregan las unidades de productos finales para obtener el plan desagregado (MPS). Este es el caso más habitual, o recomendable, para industrias que fabrican una gran diversidad de artículos finales.

En cambio, en aquellas empresas donde la variedad de productos que ofrece al mercado es reducida, o bien vende un único artículo, el MPS se suele elaborar a partir de los pronósticos individuales de estos productos finales.

Dado que el primer enfoque introduce el problema de la consistencia entre los planes de los diferentes niveles y que en la presente tesis se trabajará con un único producto final, se asume que el MPS se elabora a partir del pronóstico de este artículo.

Además de los pronósticos de demanda de los artículos, el MPS utiliza otra información para la construcción de los registros en fase de tiempo, a saber, las órdenes de los clientes (Mula et al., 2007) y las existencias de los productos finales. Las primeras son pedidos en firme, es decir, cantidades que ya fueron ordenadas por los clientes y tienen una fecha de entrega prometida. La incorporación de estas órdenes impone una forma de construir el MPS diferente al registro básico, dado que los pedidos en firme son una demanda que efectivamente ocurrió y, por lo tanto, están contemplados dentro de los pronósticos a partir de los cuales se elabora el MPS. No pueden simplemente sumarse los pedidos en firme con los pronósticos porque se estaría considerando la misma demanda dos veces. Su tratamiento es diferente y escapa a los objetivos de la presente tesis. En este trabajo se considera se considerara al pronóstico de la demanda como el único insumo para la elaboración del MPS.

Teniendo en cuenta esto, asumiendo que las existencias de los productos finales son nulas al momento de la revisión del MPS y planificando con una política de lote por lote, se llega a la conclusión de que las cantidades planificadas en el MPS coinciden numéricamente con los pronósticos de demanda. Si bien conceptualmente no deben confundirse, bajo estas condiciones específicas ambos presentan los mismos valores.

1.2.1.2. El MPS como insumo del MRP

El MPS es una fuente importante de información a partir de la cual se determinan los requerimientos de materiales (Zhu et al., 2021). Este plan se ocupa de la demanda de los productos finales, los cuales son los únicos que poseen **demanda independiente**, entendida como aquella demanda que no está condicionada por la de ningún otro artículo final, sino que proviene directamente del mercado. En cambio, el MRP está diseñado para tratar con la **demanda dependiente**, esto es, aquella que se genera a partir de la de otros artículos. Todos los conjuntos, piezas y materiales que componen los productos finales poseen una demanda que depende de las

cantidades a producir de los mismos. Una vez construido el MPS, el MRP simplemente «calcula» los requerimientos de materiales necesarios para cumplir con ese plan de producción.

El MPS es, en este sentido, el puente que relaciona lo que el mercado demanda y lo que la empresa ofrece y, en consecuencia, lo que necesita para producir esos artículos (Xie et al., 2003). Por lo tanto, la calidad del MPS tiene una influencia significativa sobre el nivel de servicio de la empresa y la administración de los inventarios. Desde luego, existen otras situaciones que introducen variantes en esta relación, como, por ejemplo, el caso de fabricantes que venden repuestos de las partes que componen a sus productos finales. En esos casos, las partes que se comercializan como repuestos también poseen una demanda que depende del mercado, es decir, una demanda independiente que debe ser planificada y luego incorporada al MRP. Este tipo de situaciones añade una nueva fuente de aleatoriedad, producto de este segundo origen de demanda que también debe ser pronosticada. Con el objetivo de simplificar el análisis, en este trabajo se supone que el producto final es el único que tiene una demanda independiente.

1.2.2. Modelización de la Demanda

Los requerimientos brutos del artículo j en el período t , denotados $Q_j(t)$, corresponden a las cantidades establecidas en el MPS cuando se trata de un producto final. En cambio, para las partes que componen este producto, las cantidades requeridas quedan determinadas por la Ecuación (1.1).

Sea $f_{Q_j}(t)$ la función de densidad de probabilidad o la función de probabilidad puntual, según corresponda, de los requerimientos brutos del artículo j en el período t y sea $j = 0$ el único producto final que se analiza. Luego, $f_{Q_0}(t)$ representa la distribución de probabilidad de las cantidades planificadas en el MPS para el período t .

Bajo el supuesto de que las existencias disponibles al momento de la planificación son nulas, los requerimientos brutos y los requerimientos netos $RN_j(t)$ de cada artículo son iguales. Además, trabajando bajo una política lote por lote, y de acuerdo con (1.5), las órdenes planificadas $R_j(t)$ resultan iguales a los requerimientos brutos del artículo j adelantados un número de períodos igual a su *lead time* L_j . Esto es:

$$R_j(t) = RN_j(t - L_j) = Q_j(t - L_j), \text{ para } j = 0, \dots, J - 1 \quad (1.8)$$

En una primera instancia, se va a considerar que los *lead times* se conocen con certeza, es decir, que no tienen variabilidad. Luego, en función de (1.1) y (1.8) se tiene que:

$$Q_j(t) = m_j \cdot Q_k(t - L_j) \quad (1.9)$$

en donde k representa al padre de j .

En lo que sigue se detallan dos de los enfoques más comúnmente utilizados en la bibliografía

específica para modelizar y/o pronosticar la demanda.

1.2.2.1. Enfoque 1: Distribuciones de Probabilidad para la Demanda

El primer enfoque consiste en considerar a la demanda como una variable aleatoria que sigue una **distribución de probabilidad específica**. El problema se reduce a determinar la familia de distribuciones más adecuada, estimar sus parámetros y evaluar la bondad del ajuste.

Este enfoque, si bien es simple de aplicar y fácil de interpretar, asume el fuerte supuesto de que la demanda de cada período es independiente y que, además, no varía su nivel a lo largo del tiempo. Dicho de otra manera, implícitamente se está asumiendo que la demanda es un proceso estocástico (como mínimo) estacionario en covarianza. Claramente, esto puede no ser cierto en algunas situaciones. Por ejemplo, la demanda bien podría presentar una tendencia lineal creciente o una estacionalidad anual, por nombrar solo algunas situaciones. En estos casos ya no se puede asumir que $Q_0(t)$ tiene la misma distribución para todo valor de t o bien que los parámetros de la misma se mantengan constantes. Aún así, el enfoque de considerar una distribución de probabilidad para la demanda, constituye una propuesta superadora a la simple utilización del promedio de la demanda de los períodos anteriores, lo cual ignora la variabilidad que la misma puede tener (Escudero et al., 1993).

Entre todas las familias de distribuciones disponibles, uno de los modelos a los que se recurre ampliamente, según Gupta & Maranas (2003), es el de la demanda normalmente distribuida, con una media y una varianza conocidas. La utilidad de este modelo, de acuerdo con los autores, reside en que no solo logra capturar las principales características de la incertidumbre de la demanda sino que, además, es conveniente debido a las propiedades que posee.

Sean $\mu_0(t)$ y $\sigma_0^2(t)$ la esperanza y la varianza de la demanda del período t , respectivamente. Si se asume que la misma se mantiene estable y no cambia su comportamiento en el tiempo, entonces puede considerarse que $\mu_0(t) = \mu_0$ y $\sigma_0^2(t) = \sigma_0^2$ para todos los períodos. De esta forma, las cantidades planificadas en el MPS resultan:

$$Q_0(t) \sim Normal(\mu_0, \sigma_0) \quad (1.10)$$

Luego, teniendo en cuenta la Ecuación (1.9) y la propiedad reproductiva de la distribución normal, las órdenes planificadas de cada artículo en cada período t también resultan:

$$Q_j(t) \sim Normal(\mu_j, \sigma_j), \text{ con } j = 1, \dots, J - 1 \quad (1.11)$$

Donde, la esperanza y la varianza de $Q_j(t)$ pueden obtenerse fácilmente por medio de las propiedades de estos operadores:

$$\mu_j = \mu_0 \cdot \prod_{k \in \kappa} m_k \quad \text{y} \quad \sigma_j^2 = \sigma_0^2 \cdot \prod_{k \in \kappa} m_k^2 \quad (1.12)$$

en donde κ representa el conjunto de todos los sucesivos padres que tiene el artículo j . El valor medio de la distribución (μ_j) es, usualmente, el valor que se utiliza como estimación de la demanda de cada artículo.

Como m_j indica la cantidad de unidades de j que participan en la fabricación de una unidad de su padre, necesariamente debe ser $m_j \in \mathbb{N}$. El caso más simple se da cuando $m_j = 1$ para cualquier valor de j , es decir, cuando cada artículo se arma con exactamente una unidad de sus hijos. En esta situación, $\mu_j = \mu_0$ y $\sigma_j^2 = \sigma_0^2$ para todo $j = 1, \dots, J - 1$. En cualquier otro caso, resulta siempre $m_j > 1$ para al menos un j y, de esta manera, puede observarse a partir de (1.12) que la varianza de las distribuciones de los artículos en los niveles inferiores rápidamente crece. Esto coincide con lo expuesto en la Sección 1.1.4 sobre el nerviosismo y el efecto látigo.

Si bien las expresiones (1.10) y (1.11) resultan de asumir distribuciones normales para la demanda, este supuesto solo puede ser razonable cuando la demanda pueda tomar un gran número de valores posibles diferentes, como para considerar su modelización mediante una distribución continua. En las industrias manufactureras, donde lo más usual es la producción de unidades discretas, esta aproximación puede no ser adecuada. Por lo tanto, la distribución seleccionada también debería pertenecer a una familia de esta naturaleza.

Siguiendo esta idea, Lin & Krajewski (1992) analizan el caso del MPS de un único producto final a partir de una demanda modelada mediante cualquier distribución discreta con media y varianza conocidas, siempre y cuando se pueda asumir que esta demanda es independiente de un período a otro y que no presente tendencia ni estacionalidad. En este caso la Ecuación (1.12) sigue siendo válida, dado que resulta de las propiedades de la esperanza y la varianza.

Independientemente del enfoque utilizado para modelizar la demanda, ya sea mediante la especificación de una distribución de probabilidad o a través de técnicas de pronóstico basadas en series de tiempo, en la práctica habitual del MRP tradicional se toma el valor esperado o pronosticado como un valor determinístico con el cual se construye la planificación. De esta manera, si bien ambos enfoques reconocen implícitamente la existencia de variabilidad en la demanda, esta información sobre la incertidumbre no se incorpora explícitamente en el proceso de planificación de materiales, sino que se trabaja únicamente con estimaciones puntuales.

1.2.2.2. Enfoque 2: Pronóstico de Demanda con Errores Normales

El segundo enfoque es la construcción de **pronósticos de demanda**. Por pronóstico de demanda se entiende a la estimación estadística de un valor medio y de un intervalo de pronóstico con un nivel de confianza prefijado o, de manera equivalente, la determinación de la variabilidad que tiene el estimador antes mencionado.

Un conjunto muy poderoso de herramientas para pronosticar la demanda a corto plazo son los métodos de suavizado exponencial, los cuales permiten estimar valores futuros tanto de series estacionarias como de series con tendencia y/o estacionalidad. Estas técnicas no se desarrollarán en el presente trabajo porque eso escapa a los objetivos del mismo, sino que solo se limitará a resumir algunas de las características más importantes encontradas en la extensa bibliografía que existe sobre este tema. Las deducciones que se presentan a continuación se apoyan en los trabajos de Hamilton (1994), Makridakis et al. (1998), Diebold (2006) y C. Chatfield & Xing (2019), entre otros autores.

En forma general, los métodos de suavizado exponencial proponen utilizar la información de los períodos pasados para pronosticar los períodos futuros de la demanda, sin la necesidad de construir un modelo explícito para la serie de datos. Para ello, postulan que la demanda Y_t del período t sigue una curva definida por:

$$Y_t = F(a_t, b_t, I_t) + \varepsilon_t \quad (1.13)$$

donde $F(a_t, b_t, I_t)$ representa la forma particular en la que cada técnica modeliza el nivel, la tendencia y la estacionalidad de la demanda del período t (cuando están presentes estos componentes) y ε_t es el error aleatorio. Respecto a este último término, uno de los supuestos más fuertes que tienen estos métodos es que $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{N}\}$ es un ruido blanco gaussiano, esto es, un proceso estocástico estacionario sin correlaciones para el cual se verifica además que $\varepsilon_t \sim Normal(0, \sigma_\varepsilon^2) \forall t$.

Por su parte, a partir de una serie observada $\Omega_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ los pronósticos F_t dentro de la muestra se obtienen por medio de relaciones de recurrencia del tipo

$$F_{t+1} = \psi(\boldsymbol{\theta}, F_t), \text{ con } t = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

siendo $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros propio de cada modelo, el cual depende del número de componentes presentes en la serie.

A partir de los valores de F_t se obtienen los errores de pronóstico e_t de la siguiente manera:

$$e_t = y_t - F_t, \text{ con } t = 1, \dots, N \quad (1.15)$$

Estos residuos son las estimaciones de ε_t y, por lo tanto, debe verificarse que cumplan con el supuesto que el error es un ruido blanco.

Por fuera de la muestra, esto es, para los períodos futuros $N + 1, N + 2, \dots, N + h$, con $h \in \mathbb{N}$, la relación de recurrencia definida por (1.14) también permite obtener los pronósticos de demanda. En este caso, el primer elemento será F_N y, a partir de este, se calculan todos los posteriores usando una expresión idéntica a la mencionada:

$$F_{N+h} = \psi(\boldsymbol{\theta}, F_{N+h-1}), \text{ con } h = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

Como consecuencia de la relación anterior, una de las grandes particularidades que tienen estos métodos es que la varianza de los errores de pronóstico sigue expresiones del estilo de:

$$V(e_{N+h}) = \phi(\boldsymbol{\theta}, h)\sigma_e^2, \text{ con } h = 2, \dots \quad (1.17)$$

siendo $\sigma_e^2 = V(e_{N+1})$ la varianza del error de pronóstico a una etapa y se suele estimar por la varianza muestral s_e^2 . En todos los casos, fijado el valor de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$, $\phi(\boldsymbol{\theta}, h)$ es una función creciente de h , lo cual implica que la varianza de los errores aumenta con el número de períodos en el futuro que se quiera estimar. Este resultado no solo es razonable dentro del contexto de la planificación de la producción, sino que además refleja en gran medida la realidad de los mismos planes.

Combinando toda la información anterior se puede llegar a la siguiente conclusión. Dado que en (1.13) la variable ε_t es el término aleatorio de la expresión y que los pronósticos para los períodos futuros se construyen recursivamente período a período a partir de los valores observados de la demanda, se puede pensar que F_{N+h} se distribuye normalmente con una media igual a la obtenida por (1.16) y una varianza dada por (1.17). Esto es válido, siempre y cuando h sea pequeño y se verifique el supuesto de que ε_t es un ruido blanco.

1.2.3. Naturaleza de la Incertidumbre en la Demanda

La incertidumbre en la demanda puede atribuirse a varias causas y, a menudo, es el resultado de la interacción de múltiples factores. Retomando las ideas de Whybark & Williams (1976), la demanda puede ser incierta en sus cantidades así como también en sus tiempos. El primer caso se refiere a cambios en las órdenes de los clientes, cuando los mismos aumentan o disminuyen las cantidades solicitadas; o bien cambios en los pronósticos, debido a la aparición de nueva información o a factores externos, tales como nuevas políticas económicas, tendencias del mercado o eventos inesperados, los cuales pueden tener un gran impacto en la demanda real.

Por otro lado, la incertidumbre en los tiempos puede deberse a varios motivos, como retrasos en la producción, problemas logísticos o cambios en las preferencias del cliente. Como consecuencia de esta variabilidad, las fechas de entrega prometidas a los clientes podrían llegar a sufrir modificaciones o postergaciones.

Bartezzaghi & Verganti (1995) identifican como fuentes de incertidumbre tres factores, a saber:

1. El número de productos que la empresa ofrece y el comportamiento de sus demandas individuales. Cuando estas demandas son muy diferentes entre sí, se introduce incertidumbre debido a la heterogeneidad de las mismas.
2. La cantidad y el tamaño de los clientes. En aquellas empresas donde pocos clientes concentran la mayor parte de sus ventas, o bien cuando los pedidos de los mismos son distintos

por cuestiones de personalización de los artículos, la demanda total va a tender a ser poco dispersa, es decir, la misma consiste en un pequeño número de solicitudes independientes.

3. La alternancia entre períodos de alta demanda y baja demanda. Esta erraticidad en los requerimientos produce que la incertidumbre de un mismo producto varíe de un período a otro, acompañando las oscilaciones de los pedidos.

En un entorno así, la demanda es extremadamente incierta. Una estimación confiable de la demanda esperada solo puede lograrse al hacer un pronóstico agregado a lo largo de un amplio período de tiempo para una familia de productos. Por otro lado, los pronósticos a corto plazo de la demanda de un único artículo son difíciles de establecer. De hecho, los métodos basados en el análisis de información de demanda pasada, como los de suavizado exponencial, no pueden evitar errores de pronóstico significativos, ya que en este contexto, la serie de datos históricos se caracteriza por eventos esporádicos e irregulares.

Existen múltiples otros factores que también tienen efecto sobre la demanda de los artículos finales. Entre ellos se puede nombrar la variabilidad misma en la demanda de productos relacionados o bienes sustitutos, así como también factores estacionales y cíclicos. En el caso de estos últimos, se puede asumir que fueron contemplados en la elaboración de los pronósticos o, al menos, eso se esperaría de un buen pronóstico de demanda. Sin embargo, incluso dentro de estos patrones, puede haber variaciones imprevistas debido a factores como condiciones climáticas inusuales o eventos estacionales atípicos.

1.2.4. Replanificación del Plan Maestro de Producción

Definido el horizonte de planificación T y el período de revisión Δt , el MPS se revisa cada intervalos regulares de tiempo en un proceso que se denomina *replanificación del Plan Maestro de Producción*.

Tang & Grubbström (2002) indican que los motivos por los cuales el MPS se replanifica suelen ser dos. El primero es la dinámica propia del criterio del horizonte deslizante. Necesariamente deben incorporarse nuevos períodos para tener siempre un plan de producción para todo el horizonte T definido. El segundo, en cambio, se debe a la incertidumbre en la demanda. En escenarios cambiantes, los planes pierden vigencia con rapidez y la información «vieja» debe modificarse para adaptarse a los cambios y así asegurar un nivel de servicio a los clientes adecuado.

Las diferencias que surjan en las cantidades planificadas para un mismo período en las distintas revisiones están directamente relacionadas con la estabilidad del MPS. Según Herrera & Thomas (2009), cuando estas diferencias no son considerables, se dice que el MPS es *estable*. En caso contrario, el MPS se considera *inestable*. Más aun, estos autores sostienen que la minimización de la inestabilidad del plan maestro reduce el nerviosismo del MRP.

Por lo tanto, la incertidumbre de la demanda y la inestabilidad del MPS tienen un gran impacto sobre el nerviosismo en el MRP. Dado que el plan de materiales toma como punto de partida las unidades de productos finales planificadas en el plan maestro, la variabilidad en estas cantidades se propaga y amplifica rápidamente de un nivel a otro. Mientras menos modificaciones sufre el MPS en sus sucesivas replanificaciones, menor será el impacto que tenga este plan y su incertidumbre sobre el MRP.

Ante esta problemática, surge la necesidad de contar con técnicas, métodos y/o herramientas que permitan obtener planes de producción estables y, en consecuencia, planes de requerimientos materiales poco nerviosos. La bibliografía al respecto es bastante extensa, pero a lo largo de las décadas las estrategias más comúnmente mencionadas son tres: 1) congelar períodos en el MPS, 2) utilizar inventarios de seguridad y 3) seleccionar una regla de definición del tamaño de lote apropiada a la situación que se está analizando.

La congelación de períodos del MPS es, probablemente, una de las herramientas más utilizadas para reducir el impacto de la variabilidad de la demanda. No solo es simple de aplicar, sino que además es una de las más efectivas para reducir el nerviosismo del MRP, tal como señalan Blackburn et al. (1986) y Sridharan et al. (1988) desde hace varias décadas. El método consiste en fijar un horizonte dentro del cual el plan maestro no puede ser modificado, salvo algunos pequeños ajustes que no impliquen la replanificación de los períodos congelados.

El congelamiento proporciona estabilidad al MPS y reduce la inestabilidad causada por cambios constantes en la demanda, lo cual, a su vez, simplifica el proceso de planificación de la producción. Sin embargo, la cantidad de períodos a congelar debe seleccionarse con cuidado porque se corre el riesgo de producir unidades en exceso o insuficientes, dado que se estarían ignorando los cambios que pueda sufrir la demanda. En el primer caso, se estaría incurriendo en un aumento en los costos de almacenamiento; mientras que, en el segundo, no se lograría cumplir con los plazos de entrega y satisfacer la demanda del cliente.

La utilización de inventarios de seguridad consiste en la determinación de un nivel de existencias que se mantienen almacenadas para absorber la variabilidad de la demanda (Herrera & Thomas, 2009). Esto ayuda a evitar retrasos en la entrega cuando la demanda real supera lo pronosticado. Al mismo tiempo, dado que el exceso de demanda de artículos finales es abastecida desde estas existencias, la variabilidad que se propaga a los niveles inferiores en el MRP disminuye, reduciendo de esta forma el nerviosismo del plan (Kadipasaoglu & Sridharan, 1995). Esta técnica, en ocasiones denominada sobreplanificación del MPS (Bartezzaghi & Verganti, 1995), tiene como evidente desventaja el incremento en los costos de almacenamiento. Por tal motivo, solo se recomienda mantener inventarios de seguridad para los artículos finales, o bien, para aquellos materiales que se compran a proveedores que no son confiables. Sin embargo, también se presenta la dificultad de determinar cuántas unidades adicionales almacenar, algo que no siempre resulta simple de hacer. Una cantidad excesiva de las mismas puede inclusive contribuir

a aumentar la inestabilidad del MPS (Sridharan & Lawrence LaForge, 1989).

La última estrategia mencionada es la selección de una regla de loteo que se ajuste a las características del sistema. Existen distintas formas de definir el tamaño de los lotes tanto en el MPS como en el MRP, tales como el lote económico, las cantidades periódicas a producir o el lote por lote, entre otras. Cada una debe ser correctamente aplicada según sea el caso con el que se esté trabajando. Estudios como los de Ho & Ireland (1998) muestran que la selección de una regla de loteo apropiada puede mitigar el impacto de los errores de los pronósticos en la estabilidad de los planes. Esto, además, implica que es preferible optimizar el tamaño de los lotes antes que buscar disminuir la variabilidad en los pronósticos de demanda.

1.2.4.1. Indicadores del Efecto de la Incertidumbre en la Demanda

Teniendo en cuenta la definición de estabilidad del MPS, los diferentes autores han propuesto formas de comparar las modificaciones en las órdenes planificadas al incorporar información adicional, es decir, al replanificar el plan maestro.

Entre las primeras propuestas se destacan la de Blackburn et al. (1985), quienes cuantifican la inestabilidad del MPS por medio de la diferencia entre las órdenes planificadas para el período de acción al utilizar el método del horizonte deslizante. Esto es, calculan el número de órdenes (totales y promedio) que varía el MPS cuando el próximo período al actual se transforma en el período de acción en la siguiente replanificación. Si bien los cambios en los períodos más próximos al actual son más críticos, esta medida ignora, tal como identifican Sridharan et al. (1988), las posibles modificaciones que pueden sufrir los períodos más alejados en el tiempo.

Por tal motivo, los autores anteriores sugieren una medida que contempla tanto la proporción de períodos congelados como la longitud misma del horizonte de planificación. Para esto, ellos calculan la inestabilidad I como un promedio ponderado de los cambios en las órdenes planificadas y obtienen una medida que indica, en promedio, cuántas unidades por orden cambia el MPS debido a la inestabilidad del mismo. Alternativamente, el impacto puede expresarse en términos relativos como la proporción A del promedio de órdenes del MPS que sufren modificaciones.

Siguiendo esta misma línea de trabajo, Herrera & Thomas (2009) construyen dos indicadores para medir la inestabilidad en el MPS y dos para medir el nerviosismo. Estos autores definen la inestabilidad como la diferencia entre las cantidades planificadas para períodos consecutivos dentro de un mismo ciclo de planificación. Para cuantificar la misma, proponen como medidas la Inestabilidad Media (MEI, del inglés *Mean Instability*) y la Inestabilidad Máxima (MAI, del inglés *Maximum Instability*). La primera medida muestra el promedio de las diferencias de las cantidades planificadas entre cada período y los siguientes para cada artículo final, mientras que la segunda indica el valor máximo de estas diferencias.

Por otro lado, estos mismos autores definen el nerviosismo como la diferencia entre las cantidades planificadas para un mismo período en diferentes ciclos. Las medidas que proponen

para cuantificar este fenómeno son el Nerviosismo de Todos los Períodos (NA, del inglés *Nervousness All Periods*) y el Nerviosismo del Primer Período (NF, del inglés *Nervousness First Period*). Estos indicadores promedian las diferencias entre las cantidades planificadas para todos los períodos entre todos los ciclos (NA) o bien únicamente las diferencias en el primero (NF).

En último lugar, resulta interesante destacar las ideas de Sodhi (2005), quien propone dos medidas de riesgo asociadas con la falta o el exceso de inventarios. La primera la denomina *Demanda en Riesgo* (DaR_p , del inglés *demand-at-risk*) y se define, para cada período, como la cota para la cual existe una probabilidad p (previamente seleccionada) de que la demanda no satisfecha exceda ese valor. La segunda se denomina *Inventario en Riesgo* (IaR_p , del inglés *inventory-at-risk*) y se define de forma análoga pero teniendo en cuenta el exceso de inventario que tendrán disponible los clientes al final del período. Esto es, el IaR_p se define como la cota en unidades tal que existe una probabilidad p de que «sobre» esa cantidad de unidades o menos.

A diferencia de los indicadores que buscan medir la estabilidad o el nerviosismo del plan, las medidas definidas por este autor se enfocan en las consecuencias asociadas a la variabilidad de la demanda y pueden fácilmente obtenerse si se conocen las distribuciones de probabilidad de la demanda. Dado que ese es el enfoque que se propone utilizar en esta tesis, estas medidas pueden ser de utilidad para comparar diferentes escenarios a partir de los cuales tomar decisiones respecto de cuánto y cómo producir.

1.3. El Lead Time en la Administración de Operaciones

Un concepto fundamental dentro de la Administración de Operaciones y la Gestión de la Cadena de Suministros es el de *lead time* (LT). De manera muy amplia, se puede definir como el lapso de tiempo entre el inicio y la finalización de un proceso, cualquiera sea su naturaleza. En el contexto de la planificación del MRP, resultan de interés el *lead time* de producción y el *lead time* de entrega.

El primero de ellos puede definirse como el tiempo total requerido para procesar una determinada parte o producto a lo largo de toda la planta (Groover, 2007). En términos de órdenes de producción, este tiempo equivale al intervalo entre que se libera la orden y que la pieza (o el lote de piezas) se finaliza. Esto incluye no solo los tiempos de los procesos, sino también los traslados, esperas en colas, demoras por fallas o cualquier otra ineficiencia (Ben-daya & Hariga, 2003).

Por su parte, el *lead time* de entrega puede ser definido como el tiempo entre que se envía la orden de compra y se recibe el producto por parte del proveedor (Glock, 2012). Al igual que el *lead time* de producción, este tiempo está compuesto por varias partes, tales como el tiempo de transporte, el tiempo de procesamiento de la orden, retrasos en la recepción de la información a lo largo de la cadena de suministros, entre otros (Chaharsooghi & Heydari, 2010). A su vez,

el *lead time* de entrega tiene que contemplar el *lead time* de producción del artículo encargado dentro de la planta del proveedor.

Como puede observarse a partir de sus definiciones, estos tiempos son particulares para cada pieza, parte o producto. Además, también dependen de la forma en la cual se organiza su producción, es decir, la definición y el tamaño de los lotes.

1.3.1. Modelización de los Lead Times

Se analiza por separado la manera en la que la bibliografía específica trata el *lead time* de producción y el de entrega.

1.3.1.1. Lead Time de Producción

Típicamente, el **lead time de producción** (MLT, por *manufacturing lead time*) del artículo j suele descomponerse como (Groover, 2007):

$$MLT_j = \sum_{i=1}^{n_j} [T_{pap}(i) + T_{op}(i) + T_{nop}(i)] \quad (1.18)$$

donde $T_{pap}(i)$ representa el tiempo de puesta a punto (o *set up*, en inglés) de la operación i ; $T_{op}(i)$ y $T_{nop}(i)$ son el tiempo de la parte operativa y no operativa del proceso i , respectivamente; y n_j es el número de operaciones necesarias para completar una unidad del artículo j .

La forma de determinar estos tiempos está fuertemente relacionada con el tipo de operación. Por ejemplo, entre las técnicas tradicionales (Hodson, 2001) para tareas manuales se pueden encontrar:

- *El estudio de los tiempos*: medición directa y sistemática del tiempo requerido para ejecutar una tarea específica bajo condiciones controladas;
- *El análisis de registros históricos*: utilización de datos de producción pasados para estimar tiempos futuros;
- *El muestreo del trabajo*: observación aleatoria de actividades a lo largo del tiempo para determinar la proporción de tiempo dedicado a cada tarea;
- La utilización de *tablas de tiempos predeterminados*: aplicación de estándares de tiempo previamente establecidos para movimientos básicos.

Cualquiera sea la técnica seleccionada, el resultado brinda lo que se conoce como **tiempo estándar de operación**. Esta magnitud no es más que es una estimación del valor medio que toma la variable aleatoria tiempo de operación. Es común que pequeñas industrias se enfoquen en esta estimación, ignorando casi por completo su variabilidad, lo cual suele tener un fuerte impacto en sus planificaciones.

Para las operaciones automatizadas, es decir, aquellas que son realizadas por una máquina sin la intervención de un operario, los tiempos de operación y de puesta a punto suelen ser informados por el fabricante del equipamiento. Además, debido a que estas tareas son ejecutadas por máquinas, es natural esperar que: a) su variabilidad sea considerablemente menor que la de las operaciones manuales; y b) su valor medio se mantenga uniforme a lo largo de la jornada laboral. Por ejemplo, una máquina o robot puede trabajar al mismo ritmo tanto al inicio del turno como al final del mismo, mientras que un operario posiblemente tenga un rendimiento menor al terminar su jornada que al comenzarla.

Christensen et al. (2007) sostienen que generalmente aquellas industrias con alto nivel de automatización suelen tener menor variabilidad en sus *lead times*. Esto los lleva a proponer como hipótesis una relación inversa entre la variabilidad y la automatización, la cual se ve respaldada por los resultados de su investigación. Esto mismo sucede en fábricas que producen pocas variedades de artículos, como es el caso habitual de la producción en masa, debido al alto grado de repetitividad en las tareas que se realizan. Los autores, a su vez, aclaran que también podría pensarse que productos más simples de elaborar están sujetos a menor variabilidad en sus *lead times*, pero que no hay evidencia que apoye esta hipótesis.

La Ecuación (1.18) no contempla las posibles variaciones en los tiempos de cada una de las partes que los componen. Como el *MLT* está fuertemente asociado al tipo de operación, pensar en modelos generales que consideren el gran abanico de situaciones posibles es muy complicado o, simplemente, imposible. Un enfoque proveniente del «Estudio de Métodos y Tiempos» descrito por Hodson (2001), propone tomar una muestra de tiempos cronometrados del tipo de interés y utilizar el promedio de los mismos (\bar{T}) como estimación del tiempo estándar de operación. Si puede asumirse que las observaciones de los tiempos son no correlacionadas y que la muestra es de un tamaño n lo suficientemente grande, puede utilizarse el Teorema Central del Límite (TCL) para concluir que \bar{T} está normalmente distribuido, con media y varianza estimables a partir de la muestra.

Como la distribución normal goza de la propiedad reproductiva, asumiendo independencia entre cada una de las partes que componen el *MLT*, esta también distribución normal. Esto es:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{pap} &\sim Normal(\mu_{pap}; \sigma_{pap}) \\ \bar{T}_{op} &\sim Normal(\mu_{op}; \sigma_{op}) \\ \bar{T}_{nop} &\sim Normal(\mu_{nop}; \sigma_{nop})\end{aligned}\tag{1.19}$$

se tiene que, según (1.18), el estimador del valor medio del *MLT* resulta:

$$\overline{MLT} \sim Normal(\mu_{MLT}; \sigma_{MLT})\tag{1.20}$$

donde $\mu_{MLT} = \mu_{pap} + \mu_{op} + \mu_{nop}$ y $\sigma_{MLT}^2 = \sigma_{pap}^2 + \sigma_{op}^2 + \sigma_{nop}^2$. Los valores de cada uno de los parámetros de (1.19) pueden estimarse a partir de los datos muestrales.

1.3.1.2. Lead Time de Entrega

Para el caso del **lead time de entrega** (DLT, por *delivery lead time*, o SLT, por *supply lead time*), no se cuenta con una expresión similar a (1.18) para calcular su valor. En parte esto se debe a que las partes que componen el MLT son «internas» a las organizaciones y, en consecuencia, más sencillas de medir y controlar.

En las últimas décadas, la importancia que se le ha dado al DLT, a su variabilidad y a su impacto en diversos costos dentro de las organizaciones ha ido aumentando. De la mano de este crecimiento, también se incrementaron los modelos que se utilizan para explicar su comportamiento.

Por un lado, un conjunto de autores proponen un modelo exponencial de parámetro λ_{DLT} para la distribución del DLT. Ryu & Lee (2003) no buscan dar una explicación detallada del motivo por el cual asumen esta distribución para su modelo. La selección se debe a las ventajas analíticas que la distribución exponencial presenta en los desarrollos matemáticos. En las conclusiones de su trabajo proponen futuras investigaciones con otros modelos para el DLT, tal como la distribución Normal o de Weibull, las cuales consideran que serían representaciones más realistas.

En el caso de Hayya et al. (2011), la justificación de la selección de la distribución también responde a motivos de conveniencia. En este caso, es debido a que disminuyendo el valor medio se logra reducir, al mismo tiempo, el desvío estándar. Como bien señalan Fang et al. (2013), este es solo un caso particular de un modelo en el cual la media y la varianza están relacionadas, pero no es la situación más habitual: en los más de 7000 pedidos realizados a 22 proveedores analizados por ellos, el coeficiente de variación del DLT de cada proveedor que con mayor frecuencia se presentó oscilaba entre 0.20 y 0.40, mientras que para la distribución exponencial esta medida es igual a 1. Por tal motivo, estos últimos autores proponen un modelo en el cual el DLT es una variable aleatoria para la cual su media μ_L y su desvío estándar σ_L están correlacionados según la relación $\mu_L = \beta\sigma_L^\alpha$, donde $\alpha \neq 0$ y $\beta > 0$.

En cuanto a Mohebbi & Posner (1998), los autores comienzan su investigación adoptando el modelo exponencial. Luego generalizan sus resultados empleando la distribución de Erlang y la hiperexponencial.

Por otra parte, D. Chatfield et al. (2004) proponen trabajar con la distribución gamma. Si bien no especifican los valores de los parámetros que utilizan, sí indican la relación entre los mismos al definir diferentes escenarios según el valor del coeficiente de variación (C_V), entre los cuales se encuentran 0.25, 0.50 y 0.75. La distribución exponencial empleada por los primeros autores mencionados es un caso particular de la distribución gamma utilizada por este segundo grupo de investigadores.

Otros autores, como Duc et al. (2008), proponen un modelo estocástico en el cual los DLT_t de cada período de planificación t son variables aleatorias independientes e idénticamente distri-

buidas, que, además, constituyen un proceso estacionario con una media μ_{DLT} y una varianza σ_{DLT}^2 conocidas. Este tipo de enfoque tiene la ventaja que permite analizar el comportamiento del modelo para distintas distribuciones de probabilidad, tal como hacen los investigadores antes mencionados.

Finalmente, es importante mencionar que el MRP se elabora utilizando períodos de tiempo discretos y, en consecuencia, los LT de los artículos deben ajustarse debidamente para ser consistentes con estas unidades de tiempo. Sin embargo, existen muy pocos estudios en los cuales se modele el DLT (o el MLT) por medio de una distribución discreta, tal como identificaron Ammar et al. (2013).

1.3.2. Naturaleza de la Incertidumbre en los Lead Times

La incertidumbre en los LT, manifestada a través de su variabilidad, tiene diferentes orígenes. Chaharsooghi & Heydari (2010) identifica factores internos y externos. Los primeros son aquellos atribuibles a la organización, como la velocidad a la que procesan sus órdenes. En cambio, los externos se deben a factores ambientales, como puede ser el clima. Christensen et al. (2007) también identifican implícitamente factores internos y externos. Ellos analizan la media y la varianza de los LT estudiando el tiempo que demoran en llegar los productos a los clientes, el tiempo de producción y el tiempo que demoran en llegar los productos de los proveedores.

Otros autores, como Heydari et al. (2009) prefieren clasificar las causas de la incertidumbre en: controlables, como las ineficiencias en los transportes, deficiencias en los sistemas de información, entre otras; o incontrolables, como cambios climáticos, eventos repentinos, por nombrar algunas. Dentro de la primera categoría también se podrían incluir las paradas no programadas por fallas en las máquinas que Yavuz Acar & Schipperijn (2010) incorporan en su modelo.

En la Tabla 1.3 se resumen las principales fuentes de incertidumbre en los LT.

Tabla 1.3: Principales motivos de incertidumbre en los *lead times*.

Internas	Externas
Tiempos de producción variables.	Demoras en las entregas de proveedores.
Errores en los sistemas de información.	Variaciones en la demanda.
Mala gestión de las existencias.	Problemas aduaneros.
Fallas en las máquinas y los transportes (propios).	Cambios climáticos.
Ruteo de los transportes.	Problemas políticos y económicos.

Las industrias tienen dos formas de lidiar con la incertidumbre:

1. Intentar tomar medidas para mejorar el LT, tanto reduciendo su valor medio como minimizando su variabilidad. Por ejemplo, mejorar los procesos para disminuir los tiempos de producción o buscar proveedores con tiempos más confiables.

2. Adaptar su producción para incorporar estas incertezas. Esto sería el caso de planificar utilizando un LT de seguridad que contemple posibles demoras debido a causas internas o externas a la organización.

Christensen et al. (2007), entre otros autores, se preguntan si resulta más conveniente enfocar las energías (y los recursos) en reducir la media o la varianza de los LT. De acuerdo con las conclusiones de su investigación, la reducción en la varianza tiene impacto directo sobre el rendimiento financiero de las empresas manufactureras. En cambio, disminuir el valor medio de los LT sin modificar también su varianza no muestra mejoras en este rendimiento.

Estos resultados son congruentes con los de otras investigaciones. Chaharsooghi & Heydari (2010) estudiaron la reducción del valor medio y la varianza del LT, concluyendo que la disminución de esta última tiene mejores efectos que la primera sobre el rendimiento de la Cadena de Suministros. Duc et al. (2008), por su parte, analizaron el comportamiento del efecto látigo para distintas distribuciones del LT y observaron que a mayor variabilidad en el LT, mayor era este efecto.

A pesar de los beneficios que presenta la reducción de la variabilidad de los LT, gran parte de los estudios se han enfocado en el análisis de su valor medio. Hopp & Spearman (2011) atribuyen esta falta de enfoque, en parte, a que algunos investigadores interpretan de manera incorrecta o errónea los fenómenos asociados con las varianzas de los procesos y es por eso que prefieren no investigarlos.

No obstante, tampoco debe concluirse que la reducción de los LT en valores medios no tiene beneficio alguno. Por ejemplo, Chandra & Grabis (2008) señalan que la disminución del LT le permite a los planificadores tomar mejores decisiones respecto de sus sistemas de gestión de las existencias, lo cual se traduce en menores inventarios de seguridad y mayor nivel de servicio de atención al cliente. Glock (2012) también llega a las mismas conclusiones y, además, hace especial hincapié en la reducción del LT cuando la demanda es incierta. D. Chatfield et al. (2004) también concluyen que un menor LT permite reducir los picos de amplificación del efecto látigo y los niveles de inventarios de seguridad.

1.3.2.1. Indicador del Efecto de la Incertidumbre en los Lead Times

La gran heterogeneidad de situaciones, causas y factores que pueden incorporar incertidumbre y aleatoriedad en los LT propone dificultades a la hora de definir medidas que permitan evaluar esta variabilidad. Por ese motivo, casi con absoluta exclusividad, los trabajos que se han realizado sobre este tema utilizan como medida de incertidumbre la *varianza* del LT, asumiendo que esta varianza incluye cualquier y toda forma de variabilidad e incertidumbre presente en el sistema.

PROPUESTAS METODOLÓGICAS

Como se explicó en la Introducción, en este trabajo se proponen dos enfoques para considerar la incertidumbre en los datos de entrada, al construir los registros del MRP. El primero consiste en la **derivación analítica de la distribución conjunta** de los períodos y cantidades que deben planificarse de cada pieza y/o parte, asumidas las distribuciones marginales de tanto períodos como cantidades. El segundo enfoque plantea la utilización de una metodología de **simulación del sistema MRP** para derivar el comportamiento del sistema, asumiendo diferentes comportamientos para los datos de entrada. Estas herramientas son complementarias y pueden emplearse juntas, lo cual permite aportar aún más información valiosa a la hora de tomar decisiones respecto a la planificación de los materiales.

En lo que sigue se describen estos enfoques, especificando casos de uso, bondades y limitaciones de cada uno. El capítulo se completa con el desarrollo de un esquema de simulación del MRP, en el cual se detallan los pasos a seguir para implementar esta herramienta.

En el análisis del MRP, al igual que en otros estudios, el incremento en el nivel de generalidad conlleva una mayor complejidad en la construcción del modelo, dado que resulta necesario contemplar un mayor número de variantes. Por ello, con el fin de simplificar el abordaje de la problemática, se establecen ciertos *supuestos* o *consideraciones* que permiten reducir la dificultad inherente al tratamiento de la situación analizada.

Por un lado, no se imponen condiciones respecto a la capacidad de los procesos. Esto es, se asume que en todos los períodos de planificación la capacidad es suficiente para poder producir todas las piezas y productos planificados. Esto equivale a suponer que se trabaja con *capacidad infinita* (Sipper & Bulfin, 1998). Además, se trabaja con una política de aprovisionamiento del tipo *lote por lote*, es decir, se planifican las cantidades exactas requeridas por los procesos para cada período.

En cuanto a la BOM, la cual se considera como una lista simplificada de piezas y materiales, se asume que existe un único producto final X sin restricciones en el tamaño de su estructura ($N + 1 \in \mathbb{N}$ niveles y $J \in \mathbb{N}$ componentes en total). La única condición adicional que se impone es que ninguna de las partes o materiales X_j (con $j = 1, \dots, J - 1$) sea compartido por más de un padre. De esta forma se evita tener que considerar los requerimientos conjuntos de piezas que puedan introducir fuentes adicionales de covarianza y/o correlación entre las órdenes planificadas.

En cuanto a la calidad de los procesos, no se tienen en cuenta desperdicios, fallas o productos

defectuosos. Además, se asume que el rendimiento de las operaciones es del 100%.

Finalmente, en relación a la demanda, no se incluyen pedidos en firme de los clientes en el MPS, sino que se los considera incluidos en los pronósticos de la demanda. Y el producto final es el único que tiene una *demanda independiente*.

2.1. Enfoque 1: Determinación de la Distribución Teórica

Cada pieza X_j tiene un *lead time* $L_j(t)$ y, para cada una de ellas, es necesario determinar la cantidad requerida $Q_j(t)$ y el período $P_j(t)$ en el cual deben comenzar a producirse para cada período de planificación t . Tanto $Q_j(t)$ como $L_j(t)$ y, por lo tanto $P_j(t)$, son variables aleatorias con alguna *función de distribución acumulada* (*fda*) F .

En lo que sigue, se asume que las *fda* de las cantidades y los LT se mantienen a lo largo de todo el horizonte de planificación. Dicho de otra forma, estas *fda* no cambian con el período de planificación t . Por lo tanto, se escribe simplemente Q_j , L_j y P_j para indicar las variables aleatorias bajo análisis.

2.1.1. Distribución de las Cantidades

Según lo detallado en la Sección 1.2, las cantidades Q_j pueden obtenerse a partir de las relaciones establecidas en la estructura de los productos y las órdenes planificadas R_j . Si X_k es el padre de X_j , entonces se verifica que:

$$Q_j(t) = m_j \cdot R_k(t - L_k), \text{ con } j = 1, \dots, J - 1 \quad (2.1)$$

Recordando que se asume que las existencias iniciales de todas las partes son nulas y que no existen ingresos programados, las órdenes planificadas de cada artículo coinciden con sus requerimientos brutos¹. De esta forma se tiene que:

$$Q_j = m_j \cdot Q_k, \text{ con } j = 1, \dots, J - 1 \quad (2.2)$$

Para $k = 0$, la cantidad Q_0 corresponde al registro MPS (o pronóstico de demanda) del producto final y se asume que tiene una distribución acumulada F_{Q_0} . A partir de esta última puede obtenerse F_{Q_j} realizando sucesivos cambios de variables (Meyer, 1992).

1. En este primer análisis de las cantidades, se omite el adelanto que sufren las órdenes planificadas con respecto a los requerimientos netos. En el tratamiento conjunto de las cantidades y los períodos se retoma y profundiza sobre este tema.

2.1.1.1. Caso A: Variables Discretas

Si Q_0 es discreta, entonces Q_j también resulta discreta, para todo valor de $j = 1, \dots, J - 1$. Suponiendo, además, que los posibles valores de Q_0 pueden ordenarse y enumerarse como $q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, \dots, q_0^{(i)}, \dots$, puede hacerse lo mismo con los valores de Q_j , obteniendo la lista $q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, \dots, q_j^{(i)}, \dots$.

Para determinar la probabilidad del evento $\{Q_j = q_j^{(i)}\}$ es necesario encontrar el evento equivalente en el recorrido de su padre Q_k y sumar las probabilidades puntuales correspondientes.

En el caso particular del MRP, la relación entre las cantidades requeridas del padre, X_k , y del hijo siempre es biunívoca, es decir, a cada $q_j^{(i)}$ le corresponde un único $q_k^{(i)}$, y viceversa. De esta forma, se concluye que:

$$P \{Q_j = q_j^{(i)}\} = P \{Q_k = q_k^{(i)}\}, \text{ con } i = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Así pues, la *función de probabilidad puntual (fpp)* de Q_j , denotada por p_{Q_j} , se obtiene a partir de la función p_{Q_k} de su padre por medio de la relación establecida por (2.2):

$$p_{Q_j}(q) = p_{Q_k} \left(\frac{q}{m_j} \right) \quad (2.4)$$

Caso 2.1. Un caso común en la industria es la venta de productos en paquetes cerrados de determinadas cantidades. Supóngase, por ejemplo, que un productor vende un artículo que se ensambla a partir de dos partes. Para obtener este producto final X_0 se requiere una unidad de la parte X_1 y otra de la parte X_2 .

Por otro lado, X_0 se comercializa en lotes de tamaño $q_0^{(i)}$, todos estos lotes igualmente probables de ser vendidos. Si existen n tamaños de lotes diferentes, entonces la probabilidad de que se demande un lote de $q_0^{(i)}$ unidades es:

$$p(q_0^{(i)}) = P \{Q_0 = q_0^{(i)}\} = \frac{1}{n}, \text{ con } i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Luego, de acuerdo con (2.3), la probabilidad de que se planifique una orden de $q_1^{(i)}$ unidades de X_1 y de $q_2^{(i)}$ de X_2 resulta:

$$p(q_1^{(i)}) = p(q_2^{(i)}) = p(q_0^{(i)}) = \frac{1}{n} \quad (2.6)$$

La relación anterior se mantiene aún si las cantidades vendidas de X_0 no son equiprobables. En ese caso, se sustituye el cociente $1/n$ por su probabilidad correspondiente.

2.1.1.2. Caso B: Variables Continuas

Si se asume, como es de costumbre, que Q_0 es continua, entonces Q_j también resulta continua. Para este tipo de variables, la equivalencia de eventos se establecerá en función de las *fda*. Es decir, para determinar la probabilidad del evento $\{Q_j \leq q_j^{(i)}\}$ será necesario encontrar el evento equivalente en el recorrido de su padre. A partir de estas equivalencias puede luego encontrarse la *función de densidad de probabilidad (fdp)* de la variable transformada.

Sea la variable aleatoria X con *fdp* f_X y sea $Y = g(X)$ continua y derivable, en donde g representa una función estrictamente monótona de X . Luego, la *fdp* de Y resulta (Meyer, 1992):

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) \right| \quad (2.7)$$

Como la función establecida por la Ecuación (2.2) entre un artículo padre y sus partes es monótona, (2.7) se transforma en:

$$f_{Q_j}(q_j) = \frac{1}{m_j} \cdot f_{Q_k} \left(\frac{q_j}{m_j} \right) \quad (2.8)$$

De esta forma, mediante el proceso iterativo definido por la Ecuación (2.8), conociendo la *fdp* de las cantidades requeridas del producto final Q_0 , pueden deducirse las distribuciones de las cantidades requeridas Q_j para cada componente o materia prima que forma parte del producto.

Caso 2.2. Retomando las ideas de Gupta & Maranas (2003), quienes proponen una demanda normalmente distribuida, considérese el mismo producto X_0 que en el Caso 2.1, pero asumiendo ahora que $Q_0 \sim Normal(\mu_0, \sigma_0)$. Usando (2.8) se obtiene que, para X_1 y X_2 resulta:

$$f_{Q_1}(q_1) = f_{Q_0}(q_1) \quad \text{y} \quad f_{Q_2}(q_2) = f_{Q_0}(q_2) \quad (2.9)$$

esto es, tanto X_1 como X_2 también estarán normalmente distribuidas con parámetros μ_0 y σ_0 .

Caso 2.3. Si, por ejemplo, para ensamblar el producto final se requirieran n unidades de X_1 , con $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, entonces la conclusión anterior se mantiene, pero parcialmente: f_{Q_1} sigue siendo Normal, pero sus parámetros no coinciden con los de f_{Q_0} . Reemplazando m_j por n en la Ecuación (2.8) se obtiene:

$$f_{Q_1}(q_1) = \frac{1}{n} \cdot f_{Q_0} \left(\frac{q_1}{n} \right) = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\frac{q_1}{n} - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n\sigma_0)^2}} e^{-\frac{(q_1 - n\mu_0)^2}{2(n\sigma_0)^2}} \quad (2.10)$$

De esta manera, se concluye que $Q_1 \sim Normal(\mu_1 = n\mu_0, \sigma_1 = n\sigma_0)$.

2.1.2. Distribución de los Períodos

El análisis de los períodos de planificación requiere de la determinación de los momentos en los cuales deben comenzar a producirse los artículos finales y sus partes. El MPS provee, para cada período t planificado (con $t = 1, 2, \dots, T$), los requerimientos brutos $Q_0(t)$ del producto final X_0 . A partir de los mismos, y teniendo en cuenta los *lead times*, se deben obtener los períodos $P_j(t)$ en los cuales es necesario comenzar a producir los artículos X_j (con $j = 0, 1, \dots, J - 1$), tal como muestra la Figura 2.1.

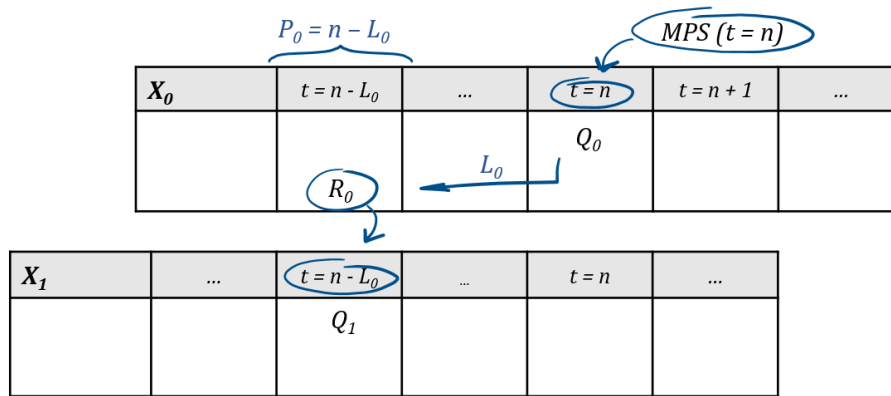


Figura 2.1: Relación entre los requerimientos y los períodos del padre X_0 y su hijo X_1 .

Es importante entender la diferencia entre t y $P_j(t)$, ya que los dos indican momentos en el tiempo. Con t se hace referencia al período de planificación en general, esto es, los «encabezados» de los registros del MRP. En cambio, $P_j(t)$ indica el período en el cual se planifican las órdenes del artículo j para cubrir los requerimientos brutos correspondientes al período t .

Por ejemplo, supóngase que para el período $t = n$ (con $1 < n \leq T$) se tiene una demanda $Q_0(t = n)$ del producto final, el cual demora un *lead time* L_0 en ensamblarse. Sin existencias de este producto, se tiene un requerimiento neto $R_{N0}(n) = Q_0(n)$ en el período $t = n$. Para que estas unidades estén listas en el momento que se las requiere, su producción debe comenzar en $t = n - L_0$. Por lo tanto, $P_0(n) = n - L_0$.

En el ejemplo anterior se pueden observar dos cuestiones importantes:

1. $P_j(t)$ es, en sí mismo, un período t .
2. Las naturalezas de estas dos variables no son las mismas. Mientras que $P_j(t)$ es una variable aleatoria, t no posee aleatoriedad, ya que queda completamente definida al determinar el valor del primer período y el horizonte de planificación.

Teniendo en cuenta que el algoritmo de explosión del MRP es el mismo para cualquier $t \in \mathbb{N}$, para simplificar la notación en el resto del capítulo se considera únicamente el desarrollo correspondiente al primer período de planificación. Para el resto basta con repetir este procedimiento reemplazando el valor de $Q_0(t)$ por el correspondiente valor del MPS para cada período.

Los P_j en los cuales se planifican las cantidades Q_j del artículo X_j van a depender de sus correspondientes *lead times* L_j . Para simplificar su cálculo y sin perder ningún tipo de generalidad, se considera que el primer período planificado en el MPS es el período 0^2 .

Por otro lado, para evitar trabajar con períodos negativos, los tiempos se suman, entendiendo que en realidad deben restarse porque se planifica «hacia atrás». Es decir, si para el componente X_j se tiene que $P_j = p$, esto significa que las cantidades Q_j correspondientes a esta parte deben planificarse p períodos antes que su padre. En función de esto, el período de planificación del producto final X_0 resulta $P_0 = L_0$. Todos los demás períodos se deben obtener a partir de este.

Al igual que los valores de las variables Q_j , los P_j pueden obtenerse a partir de las relaciones establecidas en la BOM. Si X_k es el padre de X_j , entonces se verifica que:

$$P_j = L_j + P_k \quad (2.11)$$

Cada *lead time* L_j tiene una *fda* F_{L_j} . Teniendo en cuenta (2.11), los períodos de planificación P_j constituyen variables aleatorias que resultan de la suma de los L_j de los sucesivos padres. Esto es, por recurrencia se concluye que:

$$P_j = \sum_{k \in \kappa} L_k \quad (2.12)$$

en donde κ representa el conjunto de los nodos (subíndices) del recorrido del árbol de estructura del producto que conecta el nodo (pieza) j con X_0 . Por lo tanto, las distribuciones de los períodos P_j dependerán de la naturaleza y el comportamiento de los *lead times*³.

2.1.2.1. Caso A: Variables Continuas

Sea f_{L_j} la *fdp* de L_j , con $j = 0, \dots, J - 1$, donde $f_{L_j}(u) = 0$ para $u < 0$. En función de (2.12), P_j es una variable aleatoria que surge de la suma de variables aleatorias. Para X_0 , se tiene simplemente que:

$$P_0 = L_0 \quad (2.13)$$

con lo cual $f_{P_0} = f_{L_0}$. Para X_1 , uno de los hijos de X_0 , el período resulta:

$$P_1 = P_0 + L_1 = L_0 + L_1 \quad (2.14)$$

Si se asume que los *lead times* de las piezas son independientes entre sí, un supuesto lógico en la mayoría de las aplicaciones, entonces la *fdp* de P_1 puede expresarse en función de f_{L_0} y

2. Conceptualmente $t = 0$ se suele reservar para indicar el momento de la planificación y no un período en particular. Sin embargo, resulta conveniente utilizar este valor como período inicial para no tener que incluir una constante (igual a t) en todas las expresiones que se presentarán.

3. En general, $|\kappa|$ no suele ser lo «suficientemente grande» como para poder hacer uso del TCL.

f_{L_1} de la siguiente manera (Hogg et al., 2019):

$$f_{P_1}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{L_0}(u_1) f_{L_1}(p - u_1) du_1 \quad (2.15)$$

La Ecuación (2.15) puede utilizarse repetidamente para obtener la f_{dp} de cualquier P_j ($j \geq 1$), ya que resultan de sumas de un número finito de L_j (Meyer, 1992). Por ejemplo, si X_2 es un hijo de X_1 , entonces se tiene que:

$$P_2 = P_1 + L_2 = (L_0 + L_1) + L_2 \quad (2.16)$$

y su f_{dp} resulta:

$$f_{P_2}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{P_1}(u_2) f_{L_2}(p - u_2) du_2 \quad (2.17)$$

Reemplazando f_{P_1} por (2.15), se obtiene que:

$$f_{P_2}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{L_0}(u_1) f_{L_1}(u_2 - u_1) f_{L_2}(p - u_2) du_1 du_2 \quad (2.18)$$

Al llegar a las partes del último nivel de la BOM, la expresión de la f_{dp} de los X_j se vuelve rápidamente compleja. Si se asume, sin perder generalidad y tal como muestra la Figura 2.2, que X_1, X_2, \dots, X_n constituyen una rama de sucesivos hijos de X_0 , entonces la f_{dp} de P_n puede expresarse como (Cox, 1970):

$$f_{P_n}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{L_0}(u_1) f_{L_1}(u_2 - u_1) \cdots f_{L_n}(p - u_n) du_1 du_2 \cdots du_n \quad (2.19)$$

A la Ecuación (2.19) se la denomina **convolución de las f_{L_j}** y existen varias formas de simplificar su tratamiento para obtener expresiones para las diferentes distribuciones, tales como la utilización de la transformada de Laplace. A continuación se presentan algunos casos particulares de interés.

Caso 2.4. Como se explicó en el capítulo anterior, la estimación de los tiempos estándar de operación suele concluir con un *lead time* normalmente distribuido, producto del TCL. Teniendo en cuenta que este tipo de mediciones son muy comunes en las industrias, resulta de interés obtener la convolución de esta familia de distribuciones.

Gnedenko & Kolmogorov (1968) demuestran que dadas las variables $L_1 \sim Normal(\mu_1, \sigma_1)$ y $L_2 \sim Normal(\mu_2, \sigma_2)$, entonces $L_1 + L_2 \sim Normal(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Johnson et al. (1994), generalizando este resultado, explican que si L_1, L_2, \dots, L_n son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas, cualquier combinación lineal de ellas también tiene una distribución normal. Esto implica que la P_j definida por (2.12) resulta normalmente distribuida con

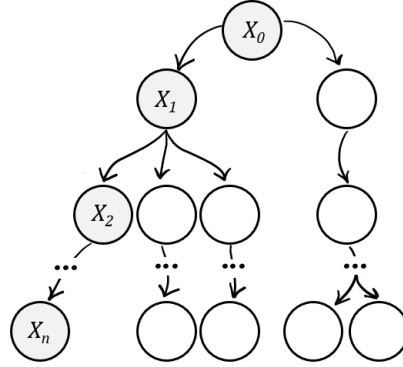


Figura 2.2: BOM de un producto genérico X_0 con una rama de sucesivos hijos señalados.

parámetros:

$$\mu_j = \sum_{k \in \kappa} \mu_k \quad \text{y} \quad \sigma_j^2 = \sum_{k \in \kappa} \sigma_k^2 \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la Ecuación (2.19) se transforma en:

$$f_{P_j}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(p - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \quad (2.21)$$

en donde μ_j y σ_j están dados por (2.20).

Caso 2.5. Un segundo grupo importante de distribuciones recurrentes en la bibliografía consultada sobre LT son las pertenecientes a la familia gamma, en particular la distribución exponencial.

Si las L_j son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*iid*) con distribución exponencial de parámetro $\lambda_j = \lambda > 0$, con $j = 1, \dots, n$, entonces su suma sigue una distribución de Erlang de parámetros n y λ . Este resultado se debe a Erlang (1909), quien dedujo la ley de la distribución que lleva su nombre. En función de esto, se tiene que:

$$f_{P_j}(p) = \frac{\lambda^n p^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda p}, \quad \text{con } p > 0 \quad (2.22)$$

El resultado anterior, si bien muy útil en campos de estudios como el de los procesos estocásticos, es poco razonable en el ámbito de los procesos industriales. Suponer que todos los *lead times* están idénticamente distribuidos, impone una restricción muy grande a la aplicabilidad de (2.22). El siguiente ejemplo propone una modificación a esta hipótesis.

Caso 2.6. Si las L_i tienen todas distribución exponencial, pero cada una con un parámetro

$\lambda_i > 0$, con $i = 1, \dots, n$, entonces su suma⁴ produce una nueva variable que tiene distribución *hipoexponencial*⁵ (K. H. Li & Li, 2019) o de *Erlang generalizada* (Cox, 1970) de parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. La *fdp* de esta suma es un promedio ponderado de las *fdp* individuales de las L_i :

$$f_{P_j}(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i e^{-\lambda_i p} \quad (2.23)$$

donde los pesos ω_i ⁶ se definen como:

$$\omega_i = \prod_{l=1, l \neq i}^n \frac{\lambda_l}{\lambda_l - \lambda_i}, \text{ con } i = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

La expresión anterior solo es válida cuando todos los λ_i son diferentes entre sí. En el caso que se presenten valores repetidos de estos parámetros, Amari & Misra (1997) demuestran que, renumerando los λ_i apropiadamente:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \dots = \lambda_{b_1} = \beta_1 \\ \lambda_{b_1+1} &= \dots = \lambda_{b_1+b_2} = \beta_2 \\ &\vdots \\ \lambda_{b_1+b_2+\dots+b_{a-1}+1} &= \dots = \lambda_{b_1+b_2+\dots+b_a} = \beta_a \end{aligned} \quad (2.25)$$

la *fdp* puede obtenerse por medio de la siguiente expresión:

$$f_{P_j}(p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f_{P_j}^*(s) \right\} \quad (2.26)$$

en la cual \mathcal{L} indica la transformada de Laplace y $f_{P_j}^*$ es:

$$f_{P_j}^*(s) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{s + \lambda_i} = \prod_{i^*=1}^a \left(\frac{\beta_{i^*}}{s + \beta_{i^*}} \right)^{b_{i^*}} \quad (2.27)$$

siendo todos los β_{i^*} distintos, a y b_{i^*} enteros mayores o iguales a 1 y la suma de todos los b_{i^*} igual a n .

4. También se obtiene una distribución hipoexponencial en el caso de una combinación lineal. En este caso, los parámetros de la distribución serán λ_i/c_i , donde $c_i \in \mathbb{R}^+$ son los coeficientes que acompañan a las variables en la combinación lineal.

5. Yanev (2020) explica que esta distribución recibe el nombre de **hipoexponencial** porque tiene un coeficiente de variación menor que uno, en comparación con las distribuciones **hiperexponencial** y exponencial que tienen un coeficiente de variación mayor e igual a uno, respectivamente.

6. Sen & Balakrishnan (1999) explican que los pesos de la ponderación en (2.23) pueden ser tanto positivos como negativos y que suman 1. Además, a partir de su misma definición, los identifican como bases polinómicas de Lagrange asociadas a los parámetros λ_i .

2.1.2.2. Caso B: Variables Discretas

Si bien el tiempo es una variable de naturaleza continua, cuando se consideran los períodos en la Gestión de Operaciones, es más usual pensar en términos discretos que continuos. Por ejemplo, se suele hablar de «mes de planificación 7» o «semana de planificación 11». Por este motivo, resulta útil contar con resultados análogos a los anteriores para variables de esta naturaleza.

Para el caso de variables aleatorias discretas, (2.15) toma la forma (Meyer, 1992):

$$p_{P_1}(z) = \sum_{u=0}^z p_{L_0}(u)p_{L_1}(z-u), \text{ con } z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

donde $p_{L_0}(l_0) = P\{L_0 = l_0\}$ y $p_{L_1}(l_1) = P\{L_1 = l_1\}$, con l_0 y l_1 enteros no negativos. Este resultado puede extenderse a n variables aleatorias por un proceso de recurrencia, obteniéndose la siguiente expresión:

$$p_{P_n}(z) = \sum_{u_n=0}^z \cdots \sum_{u_1=0}^{u_2} p_{L_0}(u_1)p_{L_1}(u_2-u_1) \cdots p_{L_n}(z-u_n), \text{ con } z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

A la Ecuación (2.29) se la denomina **convolución de las p_{L_j}** . Uno de los principales usos que puede hacerse de este resultado se presenta en el siguiente ejemplo.

Caso 2.7. Supóngase que los *lead times* L_i son variables aleatorias continuas con funciones de densidad de probabilidad f_{L_i} , para todo $i = 1, \dots, n$. Se definen las variables L_i^* como el mínimo número entero que no sea menor⁷ a L_i , esto es:

$$L_i^* = [L_i] = \min \{l \in \mathbb{Z} : l \geq L_i\}, \text{ con } i = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

De (2.30) se concluye que las L_i^* son variables aleatorias discretas las cuales, al tratarse de tiempos, toman valores enteros no negativos. Su distribución de probabilidad puede obtenerse a partir de la misma transformación que las origina. Dados dos enteros consecutivos z y $(z-1)$ dentro del dominio de f_{L_i} , la probabilidad de que L_i^* tome el valor z es equivalente a la probabilidad de que L_i tome cualquier valor real dentro del intervalo $(z-1; z]$. Esto es:

$$P\{L_i^* = z\} = P\{z-1 < L_i \leq z\}, \text{ con } i = 1, \dots, n \text{ y } z = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

La probabilidad definida en (2.31) puede expresarse en términos de las *fdp* de las L_i , obteniéndose el siguiente resultado:

7. En varios *software* y lenguajes de programación a esta función se la denomina «techo» (*ceiling* en inglés), ya que para cualquier número real devuelve el entero más próximo por exceso.

$$p_{L_i^*}(z) = P\{L_i^* = z\} = \int_{z-1}^z f_{L_i}(u) du, \text{ con } i = 1, \dots, n \text{ y } z = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

donde $f_{L_i^*}(z) = 0$ para cualquier entero no positivo. La Figura 2.3 ilustra la relación entre la distribución de probabilidad de la variable L_i y su transformada L_i^* .

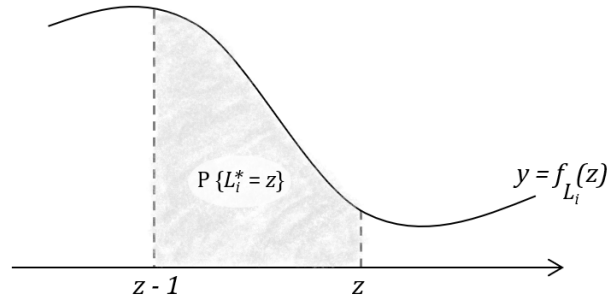


Figura 2.3: Representación gráfica de la relación entre las distribuciones de probabilidad de L_i^* y L_i .

Utilizando estas nuevas variables aleatorias, puede emplearse la Ecuación (2.29) para obtener la distribución de los períodos de la piezas X_j en entornos de tiempos discretos.

2.1.3. Distribución Conjunta

Ya obtenidas las *fda* de las cantidades Q_j y los períodos P_j para las J partes que componen al producto X se está en condiciones de responder el siguiente interrogante: para el período de planificación t , ¿cuál es la distribución de las unidades de X_j que se requieren y de los momentos en los cuales deben comenzar a producirse? Si se asume que el tiempo en el que se realiza cada operación no depende de la cantidad de unidades requeridas, esto es, que Q_j y P_j son independientes, entonces resulta:

$$F_{(QP)_j}(q, p) = F_{Q_j}(q) \cdot F_{P_j}(p), \text{ con } j = 0, \dots, J - 1 \quad (2.33)$$

Este supuesto es razonable para el caso que se estén planificando órdenes de producción, ya que, antes de comenzar con cualquier proceso de planificación, es de esperar que las operaciones hayan sido definidas y sus tiempos estandarizados para poder trabajar de manera eficiente. En cambio, para las órdenes de compra, cuyos LT dependen de los proveedores, no siempre puede asumirse que el tamaño de la orden no impacte sobre la demora en la entrega. Sin embargo, existen alternativas, como las entregas parciales, que pueden ayudar a sostener el supuesto de independencia.

Por otro lado, la Ecuación (2.33) tiene la bondad de ser matemáticamente conveniente, dado que permite analizar por separado a Q_j y P_j . Este resultado es muy útil para reducir la

complejidad analítica que tiene el estudio de las distribuciones conjuntas. En caso que no pueda sostenerse (2.33), se deben tener en cuenta las posibles asociaciones entre las variables, lo cual impacta en la forma de determinar su comportamiento conjunto.

Resulta oportuno, en este momento, retomar la Ecuación (2.1). Es importante no perder de vista que todos los resultados presentados hasta el momento corresponden a un único período de planificación. Normalmente, cualquier MRP considera en simultáneo varios períodos. Al incluir esta nueva información, es posible que, debido a la variabilidad de los LT, para un mismo período t se tengan requerimientos netos provenientes de diferentes requerimientos brutos. Esto significa que $Q_j(t)$ resulta de la suma de todas las órdenes de sus padres que se planifiquen en el período t , las cuales pueden provenir de uno o varios períodos. Lo mismo sucede con $P_j(t)$.

Por ejemplo, si el artículo X_0 no tiene existencias, se produce una demanda de 10 unidades en la semana 10 y su LT resulta de 1 semana, entonces se tienen 10 órdenes de producción planificadas en la semana 9:

$$Q_0(10) = 10 \text{ u} \quad \text{y} \quad L_0(10) = 1 \text{ sem} \quad \Rightarrow \quad R_0(10) = 10 \text{ u} \quad \text{y} \quad P_0(10) = 9 \quad (2.34)$$

Si, además, en la semana 11 se tiene una demanda de 15 unidades pero ahora su LT es de 2 semanas, debido a la variabilidad en los tiempos, entonces tienen que agregarse 15 órdenes de producción a las 10 que ya había planificadas en la semana 9, dando un total de 25 órdenes planificadas:

$$Q_0(11) = 15 \text{ u} \quad \text{y} \quad L_0(11) = 2 \text{ sem} \quad \Rightarrow \quad R_0(11) = 15 \text{ u} \quad \text{y} \quad P_0(11) = 9 \quad (2.35)$$

De esta manera, el artículo X_1 , hijo de X_0 , tienen un requerimiento bruto de 25 u en la semana 9:

$$Q_1(9) = R_0(10) + R_0(11) = 25 \text{ u} \quad (2.36)$$

Si bien las Ecuaciones (2.4) y (2.8) siguen siendo válidas, lo que cambia es la distribución de probabilidad de $Q_j(t)$, de la misma manera que también cambia la de $P_j(t)$.

El ejemplo anterior, si bien sencillo, permite comprender la manera en la que aumenta la dificultad del análisis cuando se comienzan a considerar varios períodos al mismo tiempo y los LT dejan de ser determinísticos⁸. Sin embargo, al analizar todos los períodos por separado, el

8. Esta conclusión ya quedaba a la vista al analizar en detalle la Ecuación (2.1) en la cual se puede ver claramente cómo en el cálculo de los requerimientos brutos de los hijos intervienen las órdenes planificadas y el *lead time* de sus padres.

supuesto de independencia todavía puede sostenerse. Una alternativa a situaciones como las descritas en el ejemplo es estudiar de forma individual las cantidades y los períodos, tal como se hizo en esta sección. Luego, utilizar las distribuciones para obtener los valores buscados y, finalmente, sumar aquellos para los cuales se superpongan los períodos de planificación.

Otra forma de estudiar estos casos es por medio del enfoque que se describe a continuación, el cual permite abordar este tipo de situaciones con mayor facilidad.

2.2. Enfoque 2: Simulación

La **simulación por computadora**, tal como la entienden Kelton et al. (2014), es un conjunto de técnicas y/o métodos que se utilizan para ejercitar numéricamente diferentes modelos de sistemas reales por medio de programas de computación diseñados para imitar el comportamiento y las características de esos sistemas. Dicho de otra manera, la simulación consiste en la utilización de computadoras para «imitar» las operaciones de los sistemas que se quieren estudiar.

Los motivos por los cuales los analistas optan por esta herramienta son múltiples, pero se pueden destacar los siguientes (Law, 2015):

- La mayoría de los sistemas reales son demasiado complejos como para ser descritos y/o estudiados de forma analítica por medio de modelos matemáticos.
- La simulación permite controlar mejor las condiciones experimentales bajo las cuales se analiza el sistema. Además, pueden alterarse estas condiciones (por ejemplo, suponer un aumento en la demanda de los clientes) para evaluar su efecto sobre el comportamiento del sistema.
- Es posible estudiar el impacto que pueden tener diseños alternativos del sistema (por ejemplo, un cambio en una política de aprovisionamiento) antes de su implementación. Esto permite elegir la alternativa que mejor se ajuste a cada situación.

La utilización de esta herramienta ha ido creciendo y evolucionando desde mediados del siglo pasado, impulsada por factores tales como el desarrollo del *hardware*, los avances de los programas y las redes de computación (Nance & Sargent, 2002). Durante la década de 1990, promovida por estos cambios, la simulación comenzó a madurar y su uso se propagó entre muchos pequeños productores (Kelton et al., 2014). Sin embargo, la extensión en la utilización de estas técnicas se topó con impedimentos que se constituyeron como algunas de sus principales desventajas (Law, 2015):

- El desarrollo de modelos de simulación es muy costoso en términos de tiempo.
- La aplicación de la simulación requiere de conocimientos específicos y personas capacitadas en su metodología.

- Cada ejercitación de los modelos estocásticos elaborados produce únicamente estimaciones puntuales de sus parámetros, por lo que resulta necesario realizar muchas ejecuciones independientes para poder luego concluir respecto de la precisión de estas estimaciones.

Este último punto puede no ser muy importante en la mayoría de las aplicaciones, pero el tratamiento de las muestras obtenidas durante la ejecución de los modelos precisa de saberes propios de la disciplina, reforzando lo que se menciona en el segundo punto.

A pesar de que el proceso de construcción y validación del modelo de simulación es laborioso y demanda de una gran inversión de tiempo y esfuerzo, los beneficios suelen ser mayores que sus costos. Esto se ve reflejando en el creciente número de artículos relacionados que se publicaron en la última década, entre los cuales se pueden destacar los siguientes:

- Jeon & Kim (2016) realizaron una revisión crítica de las aplicaciones de técnicas de simulación a problemas de Planificación y Control de la Producción entre los años 2002 y 2014. Dicha revisión muestra la idoneidad de la metodología para resolver este tipo de problemas, demostrando, según los autores, que la simulación es una de las técnicas más prácticas para investigar y evaluar problemas de producción.
- Zandieh & Motallebi (2018) desarrollaron un modelo de simulación por eventos discretos para determinar el tipo de política de producción óptima para industrias de procesos, como la química. Este modelo les permitió evaluar simultáneamente cuatro políticas distintas y seleccionar aquella de menor costo.
- Z. Zhang et al. (2018), impulsados por los cambios introducidos por la Industria 4.0⁹ y las fábricas virtuales, construyen el marco de una metodología basada en la simulación para diseñar líneas de producción de manera eficiente. La combinación de esta metodología con algoritmos matemáticos y modelos heurísticos ya existentes les permitió a los autores concluir, a través del análisis de un caso práctico, que la simulación es útil para probar la practicidad de los diseños de plantas elaborados.
- de Paula Ferreira et al. (2020) revisaron los estudios publicados entre principios 2011 y finales de 2019 para identificar aquellos que involucraban simulaciones en la Industria 4.0. Por medio del análisis de las publicaciones consultadas concluyeron, entre otras cuestiones, que las técnicas y programas tradicionales de simulación son aplicables a este nuevo tipo de industrias, tanto para problemas de ingeniería de procesos como de programación de la producción, siendo su principal objetivo la determinación de mejoras en los modos de operación.

9. Sin pretender dar una definición, por *Industria 4.0* o *4ª Revolución Industrial* se entiende a la integración de tecnologías digitales en la producción de bienes y servicios. Son soluciones que están enfocadas en la interconectividad, en la automatización y la utilización de los datos en tiempo real.

- Lee et al. (2020) propusieron un modelo de simulación por eventos discretos para planificar las actividades de producción en la industria de construcción naval, la cual se caracteriza por tener programas considerablemente largos (de 3 a 6 meses). El modelo construido tuvo como objetivo poder mejorar el proceso de planificación al evaluar cuantitativamente el impacto que los cambios en los programas tenían en el proceso de producción.

Si bien limitada, la lista anterior permite apreciar las múltiples aplicaciones que la simulación tiene en las diversas industrias y la planificación de la producción. Por este motivo es que se seleccionó esta metodología como un segundo enfoque para abordar la problemática de la incorporación de la incertidumbre en el MRP.

2.2.1. Definiciones

Entre las variadas técnicas de simulación, la más adecuada para diseñar un marco operativo para simular el desarrollo de los registros del MRP es la de **simulación por eventos discretos** (DES por sus siglas en inglés, *Discrete Event Simulation*). En este tipo de modelos, el reloj de la simulación avanza de evento en evento y solo se observan las variables del sistema en esos momentos (Nance & Sargent, 2002).

En este contexto, y siguiendo las ideas de Law (2015) y de Kelton et al. (2014), se definen los siguientes términos:

- Las **entidades** son los objetos y/o sujetos que componen y se mueven a través del sistema. Estas entidades poseen *atributos*, esto es, características que son comunes a todas ellas, pero con un valor específico que puede diferir de una a otra. En muchas aplicaciones, las entidades son denominadas *clientes*, dado que son las receptoras de los servicios que brinda el sistema. Para la simulación del MRP, las entidades son las órdenes de compra o producción de las distintas piezas que componen el producto final.
- Los **recursos** son los objetos (por ejemplo, maquinarias) y/o sujetos (por ejemplo, operarios) que atienden a las entidades a medida que avanzan por el sistema. Sin hacer distinciones o entrar en demasiados detalles, es común denominar a los recursos como *servidores*, considerando que son los que sirven a los clientes. Para la simulación del MRP, los recursos son los centros de trabajo¹⁰ donde se realizan las operaciones de las partes.
- Las **variables** son propiedades de las entidades y/o el sistema, las cuales son susceptibles de ser cuantificadas y pueden tomar diferentes valores. Para la simulación del MRP, las variables son las que se definieron en las Secciones 1.2 y 2.1.

10. Se utiliza el término *centro de trabajo* en un sentido muy amplio, ya que dependiendo del tipo de sistema de producción es posible que no haya definido ninguno. Por ejemplo, en una línea de producción el concepto de centro de trabajo se reemplaza por el de estación de trabajo.

- El **reloj de simulación** es una variable que indica el tiempo en la simulación, esto es, el período de planificación en curso. La naturaleza de esta variable estará directamente ligada a la de los *lead times*, coincidiendo en su unidad de medida.
- Los **eventos** son sucesos aleatorios de ocurrencia instantánea que pueden modificar el valor de las variables de estado del sistema. Típicamente, los sucesos están asociados con el movimiento de las entidades por el sistema, esto es, el *arribo* y la *partida* de los clientes al sistema y a los servidores. Para la simulación del MRP, se pueden identificar los siguientes tipos de eventos:
 - *Arribo de las Órdenes al Sistema*: corresponde al arribo de las órdenes planificadas en el MPS, las cuales ingresan al sistema en el período de planificación t .
 - *Partida del Servidor k y Arribo al Servidor j* : ocurre cuando la pieza padre X_k fue planificada y deben comenzar a planificarse las órdenes de producción de su hijo X_j .
 - *Partida de las Órdenes del Sistema*: indica la finalización de la planificación de las órdenes de compra de los productos en el último nivel de la BOM.

2.2.2. Simulación del MRP

El esquema metodológico propuesto está dividido en dos etapas o niveles, a los cuales se los denominará «Nivel MPS» y «Nivel MRP». En el primer nivel, se determinarán los períodos t del MPS para los cuales hay planificada producción y las cantidades de $Q_0(t)$ de artículos finales a fabricar en cada uno. El procedimiento es el siguiente:

1. En el período $t = 1$ generar un pedido (demanda) aleatorio de $Q_0(t = 1)$ unidades del artículo final.
2. Avanzar al siguiente período y generar la demanda $Q_0(t)$ correspondiente.
3. Repetir el paso anterior hasta llegar al período $t = T$, donde T representa el horizonte de planificación del MPS.

El esquema del Nivel MRP consiste en pensar la BOM en sentido inverso, como si se desmontara el producto nivel por nivel. A partir del arribo de las órdenes de artículos finales del MPS se van «desarmando» los subconjuntos y las partes hasta llegar al último nivel. Para cada período t del Nivel MPS, el proceso en el segundo nivel es el siguiente:

1. Tomar la demanda $Q_0(t)$ generada en el nivel anterior. Dado que t está fijo, para simplificar notación se escribirá simplemente Q_0 .
2. «Dividir» o «desarmar» el artículo X_0 en sus partes componentes, consumiendo un tiempo aleatorio L_0 , generado a partir de la distribución que se asuma para los mismos. Se obtienen las órdenes planificadas R_0 de X_0 y el período P_0 en el cual se las debe planificar. Esto es, se obtiene la dupla $(P_0; R_0)$.

3. Utilizando la BOM, identificar los hijos de X_0 y los coeficientes m_j de cada uno de ellos. Al conjunto de los subíndices de estos hijos se los representará con Υ_0 .
4. A partir de la relación establecida por la Expresión (2.2), determinar los requerimientos brutos Q_j de cada X_j , con $j \in \Upsilon_0$.
5. Repetir los tres pasos anteriores para cada una de las piezas que componen el artículo final hasta llegar al último nivel del a BOM, obteniendo las duplas formadas por P_j y R_j para todo $j = 1, \dots, J - 1$.

Como se puede observar, el esquema combina dos variaciones: en el Nivel MPS se produce el avance del período de planificación t y en el Nivel MRP se realiza el desglose de los artículos j . Una corrida de simulación se completa cuando se recorre simultáneamente t de 1 a T y j de 0 a $J-1$ para cada t . La experimentación con el modelo finalizará al cabo de C corridas, las cuales sean suficientes para asegurar la precisión deseada de los estimadores de cantidades R_j y los períodos P_j .

2.2.3. Análisis de los Resultados

La base del análisis de los resultados obtenidos en cada corrida consiste en la independencia de las condiciones en las cuales se realiza cada una de ellas. Si para cada repetición del esquema propuesto se utiliza una nueva sucesión de *números pseudoaleatorios*¹¹, entonces puede considerarse que los resultados obtenidos constituyen muestras aleatorias de las variables de salida del sistema. Además, estas muestras son independientes entre sí, una característica que juega un rol fundamental en la estimación de las medidas de rendimiento.

Tradicionalmente, al cabo de C corridas independientes, para cada t planificado en el Nivel MPS se estiman los valores de $P_j(t)$ y $R_j(t)$ de los artículos como el promedio de los valores obtenidos a lo largo de todas las corridas. Es decir:

$$\hat{P}_j(t) = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C P_j^c(t), \text{ con } j = 0, \dots, J - 1 \text{ y } t = 1, \dots, T \quad (2.37)$$

$$\hat{R}_j(t) = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C R_j^c(t), \text{ con } j = 0, \dots, J - 1 \text{ y } t = 1, \dots, T \quad (2.38)$$

donde $P_j^c(t)$ indica el período de planificación en el Nivel MRP del artículo j en la corrida c correspondiente al período de planificación t en el Nivel MPS. Análogamente se interpreta $R_j^c(t)$.

11. En la presente tesis no se profundizará sobre el concepto de **número pseudoaleatorio**, las propiedades de las cuales goza y los algoritmos a partir de los cuales se generan sucesiones de estos números. Autores como Ripley (1987) y Law (2015) dedican capítulos específicos en sus libros para abordar estos temas.

Dado que usualmente la cantidad de corridas suele ser grande y que, además, las variables $P_j^c(t)$ y $R_j^c(t)$ son independientes entre corridas, es aplicable el TCL. A partir de esto, se concluye que los estimadores definidos por (2.37) y (2.38) convergen en distribución a las siguientes distribuciones:

$$\sqrt{C} \cdot \frac{\hat{P}_j(t) - \mu_P}{\sigma_P} \xrightarrow[C \rightarrow \infty]{dist} Normal(0; 1) \quad (2.39)$$

$$\sqrt{C} \cdot \frac{\hat{R}_j(t) - \mu_R}{\sigma_R} \xrightarrow[C \rightarrow \infty]{dist} Normal(0; 1) \quad (2.40)$$

En función de estas distribuciones es posible, definido un nivel de confianza $1 - \alpha$, obtener intervalos de confianza (*IC*) para las estimaciones de las variables anteriores. Para ello puede emplearse la siguiente expresión:

$$IC_\theta = \left(\hat{\mu}_\theta \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_\theta}{\sqrt{C}} \right) \quad (2.41)$$

donde θ es la variable de salida de interés y $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el valor de la distribución normal estándar que acumula un área bajo la curva igual a $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Aunque esta es la práctica habitual en la industria, puede ser más conveniente analizar las distribuciones empíricas de $P_j(t)$ y $R_j(t)$ al finalizar la simulación. Esto es especialmente útil para períodos discretos, ya que los mismos requerimientos pueden planificarse en diferentes períodos, dependiendo de la variabilidad de los *lead times* de los artículos.

Una forma de estimar estas distribuciones de probabilidad es utilizar la definición frecuentista o frecuentista de las mismas, según la cual la probabilidad de ocurrencia de un suceso es la frecuencia relativa del mismo en una secuencia de ensayos repetidos cuando la cantidad de ensayos tiende a infinito. Para los períodos de planificación $P_j(t)$ esto se traduce como:

$$P \{P_j(t) = p\} = \lim_{C \rightarrow \infty} h(p) \quad (2.42)$$

en donde $h(p)$ representa la frecuencia relativa de $P_j(t) = p$, esto es, el cociente entre el número de veces que $P_j(t)$ tomó el valor p y la cantidad de corridas C .

Desde el punto de vista frecuentista, a medida que aumenta el número de ensayos (corridas de simulación), el cambio en la frecuencia relativa de ocurrencia de cada evento disminuirá. Como C es usualmente grande o, por lo menos, lo suficientemente grande para que se produzca esta disminución, se puede considerar a las frecuencias relativas de los sucesos como una estimación de la probabilidades correspondientes. De esta manera:

$$\hat{P} \{P_j(t) = p\} = h(p), \text{ con } j = 0, \dots, J-1 \text{ y } t = 1, \dots, T \quad (2.43)$$

APLICACIÓN Y RESULTADOS

Para comprender mejor las metodologías descritas en el Capítulo 2, se presenta un ejemplo que se resuelve de tres maneras diferentes: 1) utilizando el algoritmo tradicional de explotación del MRP; 2) determinando las distribuciones teóricas de los requerimientos y los *lead times*; 3) simulando la elaboración de los registros del MRP a partir de estas mismas distribuciones.

Siguiendo ideas como las de Eisenhardt (1989) y Yin (2017), el objetivo del ejemplo es contextualizar el conocimiento teórico, es decir, aplicar los conceptos a una situación (ficticia) concreta, proporcionando un marco práctico en el que estas teorías puedan ser analizadas y entendidas. Esto, a su vez, ayuda a reducir la brecha entre la teoría y la práctica, lo cual es sumamente necesario para el caso de situaciones que requieren análisis complejos.

Por su parte, también permite refinar los desarrollos teóricos presentados, ya que se ponen a prueba en un contexto específico. Esto puede sostener la validez de las hipótesis iniciales o señalar áreas donde las teorías necesitan ser ajustadas para reflejar mejor la realidad.

Repitiendo este procedimiento en múltiples contextos, se cuenta con un mayor conjunto de datos que ayude a describir y evaluar la ideas postuladas. Además, es posible identificar patrones, relaciones y fenómenos que no habían sido considerados previamente, lo que contribuye a la formulación de nuevos conceptos.

Finalmente, aunque no menos importante, los ejemplos claros y accesibles sirven como ilustración pedagógica para explicar conceptos abstractos, haciéndolos más comprensibles para los lectores. Este es, probablemente, el principal objetivo que se tuvo en cuenta al seleccionar el ejemplo particular que se presenta.

3.1. Algoritmo Tradicional

El caso que se va a analizar es una adaptación del ejemplo que F. R. Jacobs et al. (2018) utilizan para explicar y desarrollar los conceptos relacionados con la planificación de los requerimientos de materiales y la elaboración de sus registros. En su libro, los autores proponen estudiar el ensamble de una pala para nieve, la cual está formada por 3 subconjuntos y un total de 11 piezas distribuidas en 4 niveles. Dado que el objetivo del ejemplo es comparar los enfoques propuestos, se considera únicamente el subconjunto de la manija o asa de la pala. Este módulo (13122) se obtiene al unir la manija de madera (457) con un soporte metálico (11495) por medio

de dos clavos (082). A su vez, el soporte (129) tiene soldado un acople (1118) que permite colocar el asta de la pala. En la Figura 3.1 se muestra la BOM recién descrita, mientras que en la Tabla 3.1 se presenta la información relativa a cada una de las partes.

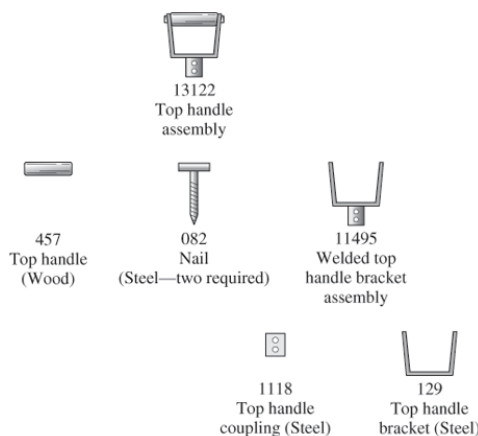


Figura 3.1: Estructura de producto de la manija de la pala de nieve. Adaptada de Jacobs et al. (2018).

Tabla 3.1: Lista de materiales de la manija de la pala de nieve.

Pieza	Código	Descripción	Cantidad	Lead Time	Stock
X_0	13122	Módulo manija	1 u	2 sem	25 u
X_1	457	Manija de madera	1 u	2 sem	22 u
X_2	082	Clavo	2 u	1 sem	4 u
X_3	11495	Ensamble soporte	1 u	2 sem	27 u
X_4	129	Soporte metálico	1 u	1 sem	15 u
X_5	1118	Acople soporte	1 u	3 sem	39 u

Originalmente, los requerimientos del subconjunto 13122 se obtienen a partir de la demanda de la pala de nieve. Para el análisis que sigue, se considera que el módulo tiene una demanda independiente, proveniente del mercado, tal como si se tratara de un producto final.

Los autores proponen planificar la producción para satisfacer una demanda de 100 unidades distribuida en un horizonte de $T = 10$ semanas. Para contextualizar mejor la situación, se considera que la primera semana de planificación es la primera semana de octubre de 2024, la cual corresponde a la semana 40 de dicho año. Tomando esta referencia, en la Tabla 3.2 se presentan los registros del MRP resultantes del algoritmo tradicional de explosión de este sistema.

Como puede observarse, partiendo de una demanda supuesta fija y conocida, y conocidos los LT de cada artículo, se tienen las órdenes planificadas de cada uno para todo el horizonte de planificación. Por ejemplo, en la semana 43 se planifica producir (Demanda) 10 unidades

Tabla 3.2: Registros MRP de la manija de la pala de nieve elaborados con el algoritmo tradicional.

		Semanas									
		40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Módulo Manija (13122)	Demanda	0	20	0	10	0	20	5	0	35	10
	Disponibles	25	5	5	0	0	0	0	0	0	0
	Requerimientos Netos	0	0	0	5	0	20	5	0	35	10
	Órdenes Planificadas	0	5	0	20	5	0	35	10	0	0
Manija de Madera (457)	Requerimientos Brutos	0	5	0	20	5	0	35	10	0	0
	Disponibles	22	17	0	0	0	0	0	0	0	0
	Requerimientos Netos	0	0	0	3	5	0	35	10	0	0
	Órdenes Planificadas	0	3	5	0	35	10	0	0	0	0
Clavos (082)	Requerimientos Brutos	0	10	0	40	10	0	70	20	0	0
	Disponibles	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Requerimientos Netos	0	6	0	40	10	0	70	20	0	0
	Órdenes Planificadas	6	0	40	10	0	70	20	0	0	0
Ensamble Soporte (11495)	Requerimientos Brutos	0	5	0	20	5	0	35	10	0	0
	Disponibles	27	22	22	2	0	0	0	0	0	0
	Requerimientos Netos	0	0	0	0	3	0	35	10	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	3	0	35	10	0	0	0	0
Soporte Metálico (129)	Requerimientos Brutos	0	0	3	0	35	10	0	0	0	0
	Disponibles	15	15	12	12	0	0	0	0	0	0
	Requerimientos Netos	0	0	0	0	23	10	0	0	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	23	10	0	0	0	0	0
Acople Soporte (1118)	Requerimientos Brutos	0	0	3	0	35	10	0	0	0	0
	Disponibles	39	39	36	36	1	0	0	0	0	0
	Requerimientos Netos	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0

del módulo de la manija. Como al finalizar la semana 42 solo de dispone (Disponibles) de 5 unidades de este conjunto, se requieren (Requerimientos Netos) 5 unidades de la misma, las cuales deben comenzar a producirse (Órdenes Planificadas) en la semana 41 para que estén disponibles en el momento que se las requiere, puesto que su LT es de 2 semanas. Estas órdenes generan los requerimientos (Requerimientos Brutos) de sus hijos: 5 manijas de madera, 10 clavos y 5 ensamblajes del soporte en la semana 41.

Si por algún motivo la demanda original variase o bien algún LT se modificara, la Tabla 3.2 puede perder por completo su validez, dependiendo de la magnitud del cambio, y es necesario volver a elaborarla íntegramente.

3.2. Distribuciones Teóricas

La aplicación de este enfoque requiere de la definición de la distribución de la demanda $Q_0(t)$ del módulo 13122 para todos los períodos y de los *lead times* L_j ($j = 0, \dots, 5$) de todos los artículos. Estas distribuciones se proponen a partir de los modelos presentados en los capítulos anteriores y los valores de la Tabla 3.1.

Para facilitar la lectura y el análisis del ejemplo, en las siguientes secciones solo se presentan el razonamiento seguido y los resultados obtenidos. Los desarrollos matemáticos y deducciones analíticas correspondientes pueden consultarse en el Apéndice A.

3.2.1. Distribución de las Cantidades

En su ejemplo, F. R. Jacobs et al. (2018) suponen que el subconjunto de la manija (originalmente la pala de nieve) tiene una demanda ya definida de 100 unidades distribuidas en 10 períodos, tal como se observa en el primer registro de la Tabla 3.2.

Se puede considerar que esta demanda es la realización de 10 variables aleatorias $Q_0(t)$ (con $t = 40, \dots, 49$) que seguirán una determinada distribución de probabilidad (conocida o asumida). Además, se asume aquí que todas estas variables tienen la misma distribución, en cuyo caso, obteniendo la distribución de una de ellas se puede conocer la del resto. En función de esto, se hablará simplemente de la demanda Q_0 .

Retomando las ideas expuestas en la Sección 1.2, se propone utilizar la distribución normal para modelar el comportamiento de Q_0 , proponiendo el valor de los parámetros en función de los datos del ejemplo. Inicialmente, una opción es utilizar los valores de la media y del desvío muestral como parámetros de la distribución, con lo cual se obtiene $\mu_0 = 10$ u y $\sigma_0 = 11,76$ u. Sin embargo, de hacer esto, la dispersión de la distribución resultara excesivamente grande en comparación a la media e, incluso, debe truncarse la cola izquierda para evitar trabajar con valores negativos.

Otra opción posible en el siguiente razonamiento alternativo. Haciendo uso del hecho de que para una distribución normal el intervalo $[\mu_0 - 3\sigma_0; \mu_0 + 3\sigma_0]$ comprende más del 99% de la distribución, se propone tomar los valores (no nulos¹) mínimo y máximo de la demanda del ejemplo como extremos de este intervalo y, a partir de ellos, obtener los valores de los parámetros de la distribución. De esta manera, considerando $\mu_0 - 3\sigma_0 = 5$ u y $\mu_0 + 3\sigma_0 = 35$ u, se obtiene:

$$Q_0 \sim Normal(\mu_0 = 20 \text{ u}, \sigma_0 = 5 \text{ u}) \quad (3.1)$$

A partir de esta distribución, utilizando los resultados (2.9) y (2.10), se concluye que las

1. La exclusión del 0 (cero) como posible valor de la demanda se realiza con la idea de evitar tener que truncar la cola izquierda de la distribución, dado que las demandas negativas son ilógicas en el contexto del ejemplo.

distribuciones de las demandas (iguales a los requerimientos brutos) de los seis artículos son normales y sus parámetros se resumen en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Parámetros asumidos para las distribuciones normales de los requerimientos Q_j de cada pieza.

Pieza	Descripción	Cantidad	μ	σ
X_0	Módulo manija	Q_0	20 u	5 u
X_1	Manija de madera	Q_1	20 u	5 u
X_2	Clavo	Q_2	40 u	10 u
X_3	Ensamble soporte	Q_3	20 u	5 u
X_4	Soporte metálico	Q_4	20 u	5 u
X_5	Acople soporte	Q_5	20 u	5 u

Es importante volver a remarcar que las distribuciones continuas no son las más indicadas para representar demandas o requerimientos de piezas o artículos de naturaleza discreta. Sin embargo, el problema de las cantidades no enteras puede solucionarse ajustando las órdenes planificadas de cada período una vez obtenidas las estimaciones de las cantidades Q_j . Por medio de transformaciones, como la función mayor entero, pueden lograrse unidades discretas a partir de las estimaciones reales que se obtienen con las distribuciones que modelizan las demandas. En la mayoría de las aplicaciones el error que se puede cometer con estos redondeos se ve compensado por el beneficio de contar con información que contemple la posible variabilidad del mercado.

3.2.2. Distribución de los Períodos

Para definir distribuciones para los LT de las operaciones se recurre a los modelos descritos en la Sección 1.3. Las operaciones de ensamble de la manija (13122) y soldadura del soporte (11495) son actividades manuales, por lo cual los modelos más adecuados para los MLT son, por ejemplo, distribuciones normales (Hodson, 2001). Mientras que para la adquisición de las demás piezas (457, 082, 1118 y 129) lo apropiado es modelizar los DLT por medio de, por ejemplo, distribuciones exponenciales (Hayya et al., 2011).

Enfatizando nuevamente el objetivo comparativo del ejercicio, se opta por utilizar la distribución exponencial como modelo para el LT de todas las operaciones, ya sean de producción o de entrega. Si, además, se considera que los tiempos presentados en el ejemplo por F. R. Jacobs et al. (2018) corresponden, en realidad, a los valores esperados de estas variables, entonces los LT de la Tabla 3.1 son el recíproco de los parámetros² de las distribuciones exponenciales de los

2. Teniendo en cuenta que L_j es el tiempo en semanas que se demora en completar la operación j , el parámetro λ_j de la distribución representa el número promedio de operaciones finalizadas por unidad de tiempo y su unidad es operaciones/semana.

tiempos de cada artículo. En la Tabla 3.4 se resumen estos resultados.

Tabla 3.4: Parámetro asumidos para las distribuciones exponenciales de los *lead times* de cada pieza.

Pieza	Descripción	Tiempo	λ
X_0	Módulo manija	L_0	$1/2$
X_1	Manija de madera	L_1	$1/2$
X_2	Clavo	L_2	1
X_3	Ensamble soporte	L_3	$1/2$
X_4	Soporte metálico	L_4	1
X_5	Acople soporte	L_5	$1/3$

En función de estos tiempos se pueden obtener las distribuciones de los períodos $P_j(t)$ (con $j = 0, \dots, 5$) de todos los artículos para todo t con la siguiente consideración: para evitar tener que incorporar una constante a las expresiones de $P_j(t)$ que represente el período inicial, se asume que este es cero, tal como se hizo en el Capítulo 2. De esta manera, $P_j(t)$ se puede interpretar como la cantidad de períodos de anticipación a t con la que deben planificarse las órdenes de X_j para cubrir los requerimientos $Q_j(t)$. Luego, descontando $P_j(t)$ de t pueden obtenerse los períodos de planificación de los artículos.

En vista de lo anterior, para el módulo X_0 se tiene que $P_0 = L_0$ y los períodos resultan exponencialmente distribuidos con parámetro $\lambda_0 = 1/2$ operación por semana.

Para los artículos del nivel 1, a saber, la manija de madera (X_1), los clavos (X_2) y el soporte ensamblado (X_3), en función de (2.12) sus períodos resultan de la suma entre L_0 y L_j (con $j = 1, 2, 3$). Esto es:

$$P_j = L_0 + L_j, \text{ para } j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Para la manija de madera y el ensamble del soporte se puede utilizar (2.22), dado que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_3 = 1/2$ operación por semana. De esta manera, se concluye que P_1 y P_3 tienen distribuciones de Erlang de parámetros $n = 2$ y $\lambda = 1/2$ operación por semana (Apéndice A.2).

En el caso de los clavos, P_2 ya no resulta suma de variables aleatorias *iid*, con lo cual tiene una distribución hipoexponencial o de Erlang generalizada de parámetros $\lambda_0 = 1/2$ y $\lambda_2 = 1$ operación por semana. De acuerdo a (2.23) y (2.24), la *fdp* de P_2 resulta (Apéndice A.2):

$$f_{P_2}(p) = e^{-\frac{1}{2}p} - e^{-p}, \text{ con } p > 0 \quad (3.3)$$

Finalmente, para determinar la distribución de los períodos del soporte metálico (P_4) y el acople (P_5) tiene que recurrirse a la Ecuación (2.11), según la cual:

$$P_j = L_0 + L_3 + L_j, \text{ para } j = 4, 5 \quad (3.4)$$

Al igual que con los períodos de los clavos, estos P_j son sumas de variables aleatorias exponenciales independientes de distintos parámetros y tienen distribuciones de Erlang generalizadas de parámetros $\lambda_0 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/2$ y λ_j operaciones por semana. Como $\lambda_0 = \lambda_3$, corresponde utilizar (2.25), (2.26) y (2.27) para obtener las siguientes f_{dp} :

$$f_{P_4}(p) = -e^{-\frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}pe^{-\frac{1}{2}p} + e^{-p}, \text{ con } p > 0 \quad (3.5)$$

$$f_{P_5}(p) = -3e^{-\frac{1}{2}p} - \frac{1}{2}pe^{-\frac{1}{2}p} + 3e^{-\frac{1}{3}p}, \text{ con } p > 0 \quad (3.6)$$

En la Tabla 3.5 se resumen los resultados mencionados en los párrafos anteriores.

Tabla 3.5: Distribuciones derivadas (con λ_j en operaciones por semana) para los períodos de planificación P_j de cada pieza.

Pieza	Descripción	Período	Distribución	Parámetros
X_0	Módulo manija	P_0	Exponencial	$\lambda_0 = 1/2$
X_1	Manija de madera	P_1	Erlang	$n = 2$ y $\lambda_1 = 1/2$
X_2	Clavo	P_2	Hipoexponencial	$\lambda_0 = 1/2$ y $\lambda_2 = 1$
X_3	Ensamble soporte	P_3	Erlang	$n = 2$ y $\lambda_3 = 1/2$
X_4	Soporte metálico	P_4	Hipoexponencial	$\lambda_0 = \lambda_3 = 1/2$ y $\lambda_4 = 1$
X_5	Acople soporte	P_5	Hipoexponencial	$\lambda_0 = \lambda_3 = 1/2$ y $\lambda_5 = 1/3$

3.2.3. Distribución Conjunta de las Cantidades Q_j y los Períodos P_j

Ya habiendo definido las distribuciones de los requerimientos Q_j y los períodos P_j , asumiendo independencia entre estas variables, usando (2.33) su distribución conjunta viene dada por:

$$f_{(QP)_j}(q, p) = f_{Q_j}(q)f_{P_j}(p), \text{ con } j = 0, \dots, 5, q > 0 \text{ y } p > 0 \quad (3.7)$$

A continuación, se reconstruyen los registros de la Tabla 3.2 utilizando las distribuciones conjuntas de cada pieza. Esto es, las distribuciones cantidad-período se utilizan para obtener las cantidades Q_j que se espera sean demandadas o requeridas en cada período, junto con el período P_j en el que hay que empezar a procesarlas. Para las cantidades Q_j se decide utilizar los valores esperados de las distribuciones marginales de estas variables, es decir, se asume $Q_j = \mu_j$.

En cambio, para los períodos, se calculan las probabilidades de que los requerimientos netos sean planificados en cada semana en particular bajo la distribución de los períodos. Es decir, se transforman las variables aleatorias continuas P_j en nuevas variables discretas, denotadas P_j^* , por medio de la transformación definida por la Ecuación (2.30). Según (2.32) la f_{pp} de los P_j^* resulta:

$$pP_j^*(p) = P \{P_j^* = p\} = \int_{p-1}^p f_{P_j}(u)du, \text{ con } j = 1, \dots, 5 \text{ y } p \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

En la Figura 3.2 se muestra la relación entre los registros del MRP que se elaborarán y estas nuevas variables. El eje de las abscisas, correspondiente al tiempo, se grafica en sentido opuesto al convencional dado que en el MRP los períodos se descuentan del inicial.

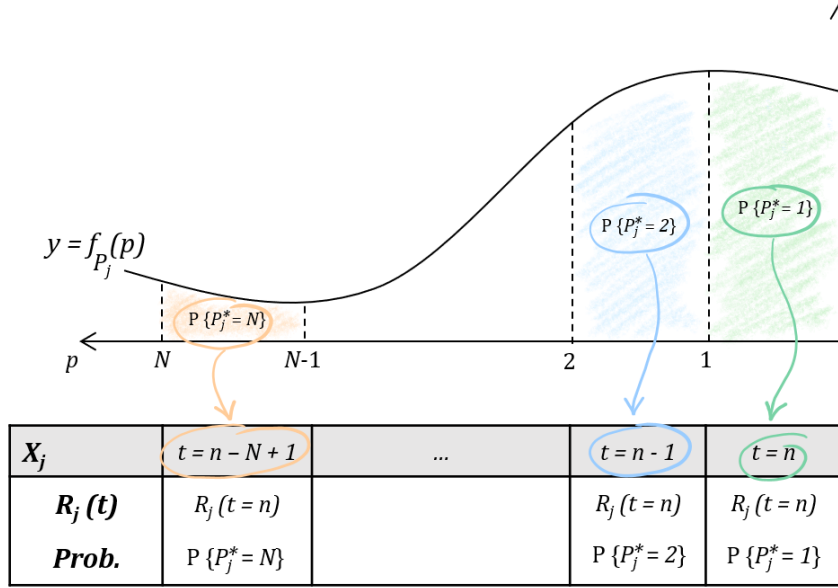


Figura 3.2: Relación entre las distribuciones de los períodos y los registros del MRP.

Para poder comparar los resultados con los del algoritmo tradicional, se considera la demanda únicamente de la semana 49, ya que todos los artículos agotaron las existencias iniciales para dicho período. Planificar un único período, además, permite poder sostener el supuesto de independencia entre $Q_j(t)$ y $P_j(t)$.

Comenzando con X_0 , en la semana 49 es de esperar se tenga una demanda de $\mu_0 = 20$ unidades. Como las existencias ya se agotaron, los requerimientos netos resultan también 20 unidades y deben ser planificados p semanas antes que la inicial según indique P_0^* . Su f_{pp} es (Apéndice A.2):

$$f_{P_0^*}(p) = \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}p}, \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

De esa manera se construyen los registros de la Tabla 3.6. Como puede observarse en la misma, los valores de la fila correspondiente a los disponibles son siempre nulos, mientras que los de los requerimientos netos coinciden con los de la demanda. Dado que no aportan información útil para el análisis que se quiere realizar, ambas filas se omitirán cuando se elaboren los próximos registros.

Tabla 3.6: Registros MRP del módulo de la manija de la pala de nieve elaborados a partir de las distribuciones teóricas.

		Semanas									
		40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Módulo	Demanda	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
	Disponibles	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Manija (13122)	Requerimientos Netos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
	Órdenes Planificadas	20	20	20	20	20	20	20	20	20	-
	Probabilidad [%]	<1	1	2	3	5	9	14	24	39	-

Como puede observarse, debido a la variabilidad del LT del producto final, existe probabilidad positiva de tener órdenes planificadas de X_0 en cualquiera de las semanas 40 a 48.

Para los siguientes tres artículos, X_1 , X_2 y X_3 , las *fpp* de sus períodos transformados resultan (Apéndice A.2):

$$f_{P_1^*}(p) = f_{P_3^*}(p) = -\frac{1}{2}(2+p)e^{-\frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}(1+p)e^{-\frac{1}{2}(p-1)}, \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

$$f_{P_2^*}(p) = -2\left(1 - e^{\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}p} + (1 - e)e^{-p}$$

Luego, para estos artículos se tienen los registros que se muestran en la Tabla 3.7. Recordando que para X_0 hay probabilidades positivas de tener órdenes planificadas en todos los períodos, esto se traslada a los requerimientos brutos de sus hijos, los cuales también muestran cantidades no nulas en todas las semanas. Al finalizar todo el proceso de planificación se ajustará esta situación.

Tabla 3.7: Registros MRP de los hijos del módulo de la manija de la pala de nieve elaborados a partir de las distribuciones teóricas.

		Semanas									
		40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Manija de Madera (457)	Requerimientos Brutos	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	Órdenes Planificadas	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	Probabilidad [%]	2	3	4	6	9	12	15	18	17	9
Clavos (082)	Requerimientos Brutos	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
	Órdenes Planificadas	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
	Probabilidad [%]	<1	1	2	4	6	9	14	20	24	15
Ensamble Soporte (11495)	Requerimientos Brutos	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	Órdenes Planificadas	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	Probabilidad [%]	2	3	4	6	9	12	15	18	17	9

En el caso de los artículos del último nivel, X_4 y X_5 , las *fpp* de sus períodos transformados resultan (Apéndice A.2):

$$f_{P_4^*}(p) = \left[\left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) p - e^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\frac{1}{2}p} + (e - 1) e^{-p}, \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (3.11)$$

$$f_{P_5^*}(p) = \left[\left(1 - e^{\frac{1}{2}} \right) p + 8 - 7e^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\frac{1}{2}p} + 9 \left(e^{\frac{1}{3}} - 1 \right) e^{-\frac{1}{3}p}$$

Utilizando esta información, en la Tabla 3.8 se muestra la planificación de los requerimientos de materiales de estos artículos.

Tabla 3.8: Registros MRP de la artículos del último nivel elaborados a partir de las distribuciones teóricas.

		Semanas									
		40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Soporte	Requerimientos Brutos	20	20	20	20	20	20	20	20	20	-
Metálico	Órdenes Planificadas	20	20	20	20	20	20	20	20	20	-
(129)	Probabilidad [%]	5	7	9	12	14	16	15	10	3	-
Acople	Requerimientos Brutos	20	20	20	20	20	20	20	20	20	-
Soporte	Órdenes Planificadas	20	20	20	20	20	20	20	20	20	-
(1118)	Probabilidad [%]	7	9	10	11	12	11	8	5	1	-

Teniendo en cuenta que puede resultar muy confuso la lectura de la Tabla 3.8, una posible alternativa es planificar las órdenes utilizando el *período más probable*, entendiéndose por esto al período con la mayor probabilidad puntual. La Tabla 3.9 muestra las órdenes planificadas de todas las piezas considerando el valor más probable de cada P_j^* .

Otra alternativa que puede considerarse, aunque no se contempla aquí, es reemplazar el valor medio de los Q_j por algún intervalo de confianza previamente definido. De esta manera, no solo se está considerando la variabilidad de los períodos sino también de los requerimientos.

Como puede verse, existen múltiples formas de construir y presentar los registros del MRP a partir de las distribuciones de las variables estudiadas. La elección de qué mostrar y cómo dependerá de la aplicación, el nivel de instrucción de los planificadores y las necesidades particulares de cada industria, entre otras cosas. Por ejemplo, en contextos con demandas poco variables, puede resultar más útil analizar la distribución de los períodos. Lo opuesto sucedería si las variables que tienen muy baja dispersión son los *lead times* y los períodos.

3.3. Simulación

Para construir el modelo de simulación que permita elaborar los registros del MRP teniendo en cuenta la incertidumbre en los tiempos y las cantidades, se utilizan las distribuciones de las Tablas 3.3 y 3.4.

El modelo conceptual, esto es, el esquema metodológico, fue detallado en el Capítulo 2 junto con todos los conceptos necesarios para comprenderlo. En las siguientes páginas se describen las

Tabla 3.9: Registros MRP de la manija de la pala de nieve elaborados a partir de las distribuciones teóricas, considerando el valor más probable de cada P_j^* .

		Semanas									
		40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Módulo	Demanda	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
Manija (13122)	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	-	-	39	-
Manija de Madera (457)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	18	-	-	-
Clavos (082)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	-	24	-	-
Ensamble Soporte (11495)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	18	-	-	-
Soporte Metálico (129)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	16	-	-	-	-
Acople Soporte (1118)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	12	-	-	-	-	-

consideraciones que se tuvieron en cuenta y los resultados obtenidos. El modelo operativo y el código del programa construido se presentan en el Apéndice B.

Nuevamente, para poder comparar los resultados de este enfoque con los dos anteriores, se simula un único período, la semana 49. De esta manera, se tiene que $t = 49$ y que $T = 1$.

Por otro lado, como no se busca ninguna precisión particular para los estimadores de los períodos y las cantidades, se define correr el modelo 1000 veces, es decir, $C = 1000$. Este valor tiene como objetivos: 1) aplicar el TCL en la estimación de los requerimientos medios; y 2) utilizar las frecuencias relativas de los resultados como estimaciones de las probabilidades de los períodos.

3.3.1. Modelo Operativo

Como se mencionó anteriormente, la técnica más adecuada para simular los registros del MRP es la simulación por eventos discretos. Para poder llevar adelante una simulación de este tipo, es necesario construir lo que se denomina una *lista de eventos futuros*, la cual contiene los eventos que todavía no sucedieron y el momento (dentro de la simulación) en el cual ocurrirá cada uno.

Utilizando esta lista, el reloj de simulación avanza de evento en evento, eliminando del listado

los que ya sucedieron y agregando los próximos eventos generados. Este mecanismo de avance del tiempo es simple de entender, pero la escritura del programa puede ser compleja. Para que se respete el orden de los eventos es necesario diseñar una rutina principal que contenga subrutinas para cada tipo de evento. La lista de eventos, ordenada cronológicamente, está formada por el próximo evento de cada clase y se recorre fila por fila. Cuando el reloj avanza al momento en el cual sucede un evento, se genera la ocurrencia del próximo de la misma naturaleza, el cual debe incluirse en la lista de eventos en el orden que le corresponda.

Una alternativa a este mecanismo, mucho más simple de codificar, es generar los valores de las variables aleatorias todos juntos, en lugar de hacerlo de a uno por vez. Esto puede hacerse de dos maneras distintas:

1. Generar todos los valores de cada variable aleatoria al mismo tiempo, es decir, generar un vector de valores de cada variable aleatoria para todo el horizonte de planificación T .
2. Generar los valores de las variables aleatorias de manera secuencial, período a período. Esto es, generar los valores correspondientes a $t = 1$, luego los de $t = 2$ y así, sucesivamente, hasta llegar a $t = T$, respetando siempre el orden de las variables.

Seguir el primer procedimiento significa generar un vector de valores de las variables aleatorias a partir de un vector de números pseudoaleatorios. Al hacer esto, si se utiliza un algoritmo generador que no esté correctamente validado, se corre el riesgo de introducir una posible dependencia entre las componentes de estos últimos vectores y, por lo tanto, entre los valores de las variables aleatorias. Esto se debe a que se utiliza un conjunto de números pseudoaleatorios que se generan cada uno a partir de su predecesor. Lo anterior también es aplicable si se utiliza la lista de eventos futuros para avanzar en el tiempo, pero el efecto de esta posible dependencia no resulta tan evidente. En este mecanismo, los números pseudoaleatorios también se generan recursivamente, pero los valores de las variables aleatorias no.

Si, en cambio, se opta por el segundo método, estos efectos también serán menos notorios en comparación al primero. Además, la simplificación que se logra en el código del programa con respecto a la simulación por eventos discretos es tal que el riesgo de introducir posibles dependencias entre los valores de las variables se ve compensando por esta ganancia. Por tal motivo es que se opta por construir un modelo siguiendo esta alternativa.

Teniendo en cuenta estas aclaraciones, el programa diseñado opera de la siguiente manera:

1. Utilizando la distribución de Q_0 definida en (3.1) se generan los valores de las cantidades demandadas del módulo de la manija (13122) para la semana 49. Como el disponible inicial es nulo, estas unidades son también los requerimientos netos del producto final (R_0).
2. Con las distribuciones exponenciales de parámetros definidos en la Tabla 3.4, se generan los valores aleatorios de los *lead times* de cada artículo (L_j , con $j = 0, \dots, 5$).
3. En función de la estructura presentada en la Figura 3.1 y la lista de la Tabla 3.1, se utiliza el valor generado de Q_0 para calcular los requerimientos brutos de todas las piezas (Q_j ,

- para $j = 1, \dots, 5$). Tal como sucede con el artículo final, como no se cuenta con unidades de ninguna parte, resulta $R_j = Q_j$ (para todo j).
4. Partiendo de la semana $t = 49$, se calculan los valores de los períodos de planificación P_j descontando a t los valores de los L_j previamente generados.
 5. Se discretizan los períodos utilizando una transformación análoga a la definida por (2.32): si $P_j \in (n - 1; n]$, donde $n \in \mathbb{N}$, entonces se define $P_j^* = n$.
 6. Se repiten los cinco pasos anteriores $C = 1000$ veces, almacenando en cada iteración y para cada artículo los valores de la corrida, R_j^C y P_j^{C3} .

Al finalizar el experimento de simulación, se contará con un conjunto de 1000 ternas⁴ para cada una de las 6 piezas.

3.3.2. Análisis de los Resultados de la Simulación

A partir del conjunto de datos obtenidos en el procedimiento de simulación se estiman los valores medios de los requerimientos netos y de los períodos de planificación para cada una de las partes que componen el subconjunto de la manija (13122).

Del modelo operativo se desprende que las variables R_j y P_j son independientes entre sí, para $j = 0, \dots, 5$. Esto se debe a que:

- Los requerimientos netos se obtienen únicamente a partir del valor simulado de Q_0 y de los coeficientes m_j , que representan la cantidad de unidades de cada hijo que se requieren para sus respectivos padres.
- Los períodos de planificación se calculan tomando en cuenta el período inicial $t_0 = 49$ y los valores simulados de L_j de cada artículo.

De esta manera, en este enfoque todavía sigue siendo válido estudiar el comportamiento de las variables por separado. Luego, aplicando (2.37) y (2.38) se obtienen las estimaciones (sin redondear) que se presentan en la Tabla 3.10.

A partir de estos valores es posible construir una tabla análoga a la Tabla 3.9. Para ello, primero es necesario estimar las probabilidades de ocurrencia de cada período de planificación para cada artículo. Utilizando los valores de P_j^* resultantes de la simulación, se calculan las frecuencias relativas de los eventos $\{P_j^* = t\}$ (con $t = 40, \dots, 49$) como:

$$h_{P_j^*}(t) = \frac{\#(P_j^* = t)}{C}, \text{ para } j = 0, \dots, 5 \quad (3.12)$$

3. En caso de decidir trabajar con los períodos transformados, en lugar de almacenar el valor de P_j se debería registrar el valor de P_j^* .

4. Si se quisiera simular más de un período, se debería almacenar también el valor de t , ya que cambia a lo largo del experimento.

donde $\#(P_j^* = t)$ representa el número de veces que P_j^* tomó el valor t , es decir, que se planificaron cantidades en dicho período. En la Tabla 3.11 se muestran dichas frecuencias relativas, las cuales se adoptan como estimaciones de las probabilidades de que los períodos transformados tomen los primeros 10 valores de t , en orden descendente desde el período inicial ($t_0 = 49$).

Tabla 3.10: Medidas resumen de las variables de salida obtenidas por medio de la simulación.

Pieza	Descripción	\bar{R}_j	$s(R_j)$	\bar{P}_j	$s(P_j)$	\bar{P}_j^*
X_0	Módulo manija	19.60 u	4.85 u	46.00 sem	2.09 sem	46.50 sem
X_1	Manija de madera	19.60 u	4.85 u	44.00 sem	2.97 sem	44.50 sem
X_2	Clavo	39.20 u	9.71 u	45.00 sem	2.36 sem	45.50 sem
X_3	Ensamble soporte	19.60 u	4.85 u	44.00 sem	2.98 sem	44.50 sem
X_4	Soporte metálico	19.60 u	4.85 u	43.00 sem	3.11 sem	43.50 sem
X_5	Acople soporte	19.60 u	4.85 u	41.00 sem	4.31 sem	41.60 sem

Referencia: $s(\theta)$ representa el desvío estándar de la variable θ .

Tabla 3.11: Frecuencias relativas de los períodos transformados P_j^* .

t	$h_{P_0^*}(t)$	$h_{P_1^*}(t)$	$h_{P_2^*}(t)$	$h_{P_3^*}(t)$	$h_{P_4^*}(t)$	$h_{P_5^*}(t)$
48	0.389	0.084	0.151	0.092	0.024	0.011
47	0.252	0.184	0.262	0.183	0.097	0.050
46	0.146	0.189	0.215	0.182	0.166	0.105
45	0.086	0.146	0.134	0.150	0.146	0.118
44	0.052	0.115	0.096	0.105	0.150	0.115
43	0.032	0.091	0.059	0.089	0.117	0.100
42	0.010	0.066	0.026	0.074	0.085	0.097
41	0.008	0.034	0.019	0.042	0.076	0.082
40	0.010	0.022	0.010	0.015	0.046	0.074

Sobre la base de estas probabilidades, se planifican las órdenes de todos los artículos utilizando el período más probable, tal como se muestra en la Tabla 3.12. Cabe mencionar, que los valores de R_j fueron ajustados redondeando las estimaciones de la Tabla 3.10 por exceso. Por otro lado, para el caso de X_3 y X_5 la diferencia entre las frecuencias relativas de algunos períodos es casi nula y es posible optar por cualquiera de los valores de P_j^* correspondientes a estas $h_{P_j^*}$. Para poder construir los registros, se utilizaron los maximales de estos conjuntos de valores.

3.4. Análisis Comparativo

La comparación de las Tablas 3.2, 3.9 y 3.12 permite rápidamente observar los efectos que la variabilidad tiene sobre los registros del MRP. Para el algoritmo tradicional, el adelantamiento

Tabla 3.12: Registros MRP (más probables) de la manija de la pala de nieve elaborados a partir de la simulación.

		Semanas									
		40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Módulo	Demanda	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
Manija (13122)	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	-	-	39	-
Manija de Madera (457)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	19	-	-	-
Clavos (082)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	-	26	-	-
Ensamble Soporte (11495)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	-	18	-	-
Soporte Metálico (129)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	-	17	-	-	-
Acople Soporte (1118)	Requerimientos Brutos	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0
	Órdenes Planificadas	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0
	Probabilidad [%]	-	-	-	-	-	12	-	-	-	-

de las órdenes planificadas con respecto a los requerimientos netos siempre se mantiene constante en el tiempo para cada artículo. Sin embargo, esto puede alejarse rápidamente de la situación real de la empresa.

Por ejemplo, en la Tabla 3.2 los requerimientos netos del módulo de la manija (13122) correspondientes a la semana 49 fueron planificados en la semana 47. En cambio, para los dos nuevos enfoques propuestos (Tablas 3.9 y 3.12), la semana con mayor probabilidad puntual resultó ser la semana 48. Según estos enfoques, si se planifican las órdenes en esta semana, se tiene una probabilidad de aproximadamente 39% de tener el producto terminado al inicio de la semana 49. Si las órdenes se planifican en la semana 47 o en la 46, entonces la probabilidad de que se complete su procesamiento al iniciar la semana 49 asciende al 64% y al 78%, respectivamente (ver Tablas A.1 y B.2 en el Apéndice).

Lo anterior presenta una posible forma de utilizar las distribuciones de los períodos (teóricas o simuladas) para planificar las órdenes de producción: dependiendo del riesgo que se esté dispuesto a incurrir, se puede seleccionar la semana que supere el nivel de servicio al cliente fijado, entendiendo por este a la probabilidad de cumplir con las fechas de entrega. Para X_0 , por ejemplo, si se fija un nivel igual al 80%, entonces las órdenes de producción deben planificarse en la semana 45. Esto mismo puede aplicarse a cualquier parte o pieza.

En cuanto a las dos metodologías propuestas, las Tablas 3.9 y 3.12 muestran que los registros elaborados con una y con la otra son muy similares. Las únicas dos diferencias son las semanas en las cuales se planificaron los órdenes de X_3 y de X_5 . Sin embargo, como se indicó antes, podrían haberse planificado en otras semanas. Por ejemplo, para X_3 las probabilidades estimadas para la semana 46 y 47 (ver Tabla 3.11) son aproximadamente iguales. En función de esto, los órdenes de producción del ensamble del soporte (11495) se podrían haber planificado en la semana 46, tal como se hizo en la Tabla 3.9.

Profundizando en el análisis comparativo entre los diferentes enfoques, resulta oportuno retomar algunos de los indicadores definidos en los capítulos iniciales para cuantificar la incertidumbre en el MRP, en la demanda y en los *lead times*.

Comenzando con la **incertidumbre en el MRP**, Cachon et al. (2007) proponen el *ratio de amplificación* (A_{rat}) y la *diferencia de amplificación* (A_{dif}) definidos por (1.6) y (1.7), respectivamente. En función de las consideraciones que se tuvieron al momento de delimitar la situación problemática, los órdenes de producción resultaron siempre iguales a la demanda. Por lo tanto, bajo las condiciones asumidas en este trabajo, $\sigma_{prod}^2 = \sigma_{dem}^2$ y no tiene sentido el análisis de los indicadores propuestos por estos autores, ya que la conclusión a la que se llega es que no existe ningún tipo de amplificación en la variación de los órdenes de producción inducida por la variación en la demanda. De forma equivalente se puede decir de que no existe efecto látigo en este sistema.

En cuanto a la propuesta de Wang & Disney (2016), para el enfoque de distribuciones teóricas, los órdenes planificados de todos los artículos tienen el mismo *coeficiente de variación*:

$$C_{Vj} = \frac{\sigma_j}{\mu_j} = \frac{\sigma_0}{\mu_0} = \frac{5 \text{ u}}{20 \text{ u}} = 0.25, \text{ con } j = 0, \dots, 5 \quad (3.13)$$

Esto implica que los órdenes de todos los artículos tienen la misma dispersión relativa con respecto a sus valores medios y que, además, esta dispersión es moderada o baja.

Para la simulación, los parámetros μ_j y σ_j se pueden reemplazar por la media muestral y el desvío estándar muestral de la Tabla 3.10, respectivamente. De esta manera, se tiene que:

$$C_{Vj} = \frac{s(R_j)}{\bar{R}_j} \cong 0.25, \text{ con } j = 0, \dots, 5 \quad (3.14)$$

lo cual coincide con los valores obtenidos por medio de las distribuciones teóricas.

En relación a la **incertidumbre en la demanda**, resultan interesantes los indicadores propuestos por Sodhi (2005): la *demanda en riesgo* (DaR_p) y el *inventario en riesgo* (IaR_p). Para la DaR_p , si se fija una probabilidad p de no cubrir la demanda⁵ igual a 0.10, entonces:

5. Formalmente, la interpretación que se hace de los indicadores propuestos por el autor no respetan completamente la definición brindada por el mismo, sino que son adaptaciones que se ajustan mejor al ejemplo estudiado.

$$P \{R_j \geq DaR_{10\%,j}\} = \int_{DaR_{10\%,j}}^{\infty} f_{Q_j}(q) dq = 0.10 \quad (3.15)$$

de donde se obtiene $DaR_{10\%,j} \cong 26.41$ unidades para todos los artículos excepto para los clavos (082), en cuyo caso resulta $DaR_{10\%,2} \cong 52.82$ unidades. Esto significa que si, por ejemplo, en la semana 48 se planifica una orden de producción de 26 unidades para X_0 , existe una probabilidad de aproximadamente 10% de que parte de la demanda que se produzca en ese período quede desatendida.

Para la simulación, el valor de la $DaR_{10\%}$ tiene que ser estimado utilizando las muestras. En este caso, ya no se cuenta con una distribución de probabilidad a partir de la cual poder calcular el valor que cumple la condición buscada, pero sí es posible estimarlo utilizando los percentiles de la distribución muestral. Fijado $p = 0.10$, corresponde buscar el percentil 0.90 de las muestras. Luego, se tiene que $DaR_{10\%,j} = 25.80$ unidades para todos los artículos excepto para los clavos, en cuyo caso resulta $DaR_{10\%,2} = 51.70$ unidades. Al igual que con el C_V , estos valores son muy similares a los obtenidos con el enfoque de distribuciones teóricas.

El DaR_p también puede utilizarse para determinar las cantidades a producir en cada período definiendo el valor de la probabilidad p igual al nivel de servicio que se desea mantener, entendiendo a este último como la probabilidad máxima de desabastecimiento de la demanda que se está dispuesto a tolerar. En estas condiciones, el $DaR_{p,j}$ provee la cantidad mínima de unidades de la pieza j que se tienen que planificar para mantener el nivel de servicio buscado.

Por su parte, en función de todos los supuestos con los que se trabajó, el IaR_p no resulta útil como indicador de desempeño. Esto se debe principalmente a dos razones: 1) se definió trabajar con una política de lote por lote y 2) se consideró que los inventarios iniciales eran nulos. En estas condiciones, fijar una probabilidad $p = 0.10$ de producir en exceso es equivalente a pensar en una probabilidad de 0.90 de que la demanda sea menor a las órdenes planificadas. En consecuencia, para el ejemplo analizado se tiene que $IaR_p = DaR_p$ y su interpretación se vuelve redundante.

Finalmente, en cuanto a la **incertidumbre en los lead times**, se definió como única medida de rendimiento a la varianza de los mismos. Tomando esta idea y teniendo en cuenta que es más sencillo interpretar el desvío estándar, en la Tabla 3.13 se muestran los valores de estos parámetros para las distribuciones teóricas de los períodos P_j y sus estimaciones a partir de las muestras simuladas.

Nuevamente, tal como se puede observar, los valores obtenidos por medio de los dos nuevos enfoques son muy similares, con una diferencia promedio de menos del 5%. Por otro lado, en ambos casos los desvíos estándar aumentan a medida que se desciende nivel a nivel en la BOM, lo cual era un resultado esperable, respaldando la validez de las metodologías propuestas como herramientas para considerar la incertidumbre en el MRP.

Tabla 3.13: Desvíos estándar teóricos (σ_j) y estimados por simulación (s_j) de los períodos de planificación.

Pieza	Descripción	Período	σ_j	s_j
X_0	Módulo manija	P_0	2.00 sem	2.09 sem
X_1	Manija de madera	P_1	2.83 sem	2.97 sem
X_2	Clavo	P_2	2.24 sem	2.36 sem
X_3	Ensamble soporte	P_3	2.83 sem	2.98 sem
X_4	Soporte metálico	P_4	3.00 sem	3.11 sem
X_5	Acople soporte	P_5	4.12 sem	4.31 sem

Resumiendo todos los resultados expuestos, se pudo observar que:

- Para la semana analizada, los registros elaborados por los tres métodos son similares (en valores medios).
- Los indicadores definidos para cuantificar la incertidumbre toman valores semejantes cuando se planifica utilizando las distribuciones teóricas o la simulación.
- La incorporación de variabilidad en la demanda y en los LT permitió plantear nuevas formas de planificar a partir de considerar el riesgo de no cumplir con las fechas de entrega o de no abastecer completamente la demanda.
- Las métricas analizadas permiten concluir que los modelos teóricos propuestos y la simulación dan cuenta del nerviosismo que se produce en el MRP como consecuencia de la variabilidad en la demanda y en los LT.

CONSIDERACIONES FINALES

La inclusión de variables aleatorias y el análisis explícito de la incertidumbre en los datos de entrada del MRP representan un avance significativo en la gestión de la producción. Tradicionalmente, el MRP ha operado bajo el supuesto de información determinística, donde tanto la demanda como los *lead times* se consideran conocidos y fijos. Sin embargo, esta visión simplificada no refleja las condiciones reales de la operación industrial, en donde las fluctuaciones en la demanda del cliente, los retrasos de proveedores y las variaciones en los procesos internos son hechos cotidianos. Incorporar la incertidumbre dentro del MRP permite que el sistema sea más representativo de la realidad, facilitando una toma de decisiones más robusta y adaptable ante la variabilidad inevitable.

Uno de los principales beneficios de modelar la incertidumbre es la posibilidad de cuantificar y gestionar el *nerviosismo* del MRP. En sistemas tradicionales, este fenómeno puede generar un efecto dominó que impacta en la planificación de la producción, incrementa los costos logísticos y desestabiliza a los proveedores. Al reconocer explícitamente la incertidumbre mediante la utilización de distribuciones probabilísticas o simulación, es posible suavizar este nerviosismo. Por ejemplo, planificar las órdenes considerando no solo el requerimiento neto puntual sino también la dispersión esperada en los datos permite asignar márgenes de seguridad más inteligentes, reduciendo la necesidad de constantes ajustes de último momento.

Relacionado al nerviosismo, otro fenómeno importante es el *efecto látigo*. La ausencia de consideración de la incertidumbre en el MRP tradicional contribuye a exacerbar este efecto, dado que cualquier cambio menor se traduce automáticamente en modificaciones en los planes de aprovisionamiento y producción, amplificándose en cada eslabón. Al modelar explícitamente la variabilidad y al utilizar indicadores como el *coeficiente de variación* o la *demanda en riesgo* (DaR_p), los responsables de planificación pueden anticipar los rangos de variabilidad aceptables, diseñando políticas más estables que atenúen la propagación de las fluctuaciones a lo largo de la cadena de suministro.

Por otro lado, el análisis de la incertidumbre en los datos de entrada permite adoptar una visión basada en niveles de servicio, en lugar de cumplir rígidamente con fechas o cantidades fijas. Este enfoque más flexible habilita la planificación basada en riesgos: se pueden definir niveles admisibles de incumplimiento y, en función de ello, ajustar dinámicamente las órdenes de producción y aprovisionamiento. Esto no solo optimiza la eficiencia de los recursos internos sino que también mejora la resiliencia ante imprevistos, como aumentos inesperados de la demanda o retrasos en la entrega de insumos críticos. Por ejemplo, en la situación original, el $DaR_{20\%,0} =$

23,7 unidades y el $DaR_{10\%,0} = 25,8$ unidades. Esto significa que, si se quiere cumplir con la demanda con una probabilidad superior al 90 %, entonces es necesario planificar al menos 26 unidades. Si la demanda sufriera un aumento en su valor medio del 10 %, en este caso resulta $DaR_{20\%,0} = 25,7$ unidades y $DaR_{10\%,0} = 27,8$ unidades. Ahora resulta necesario planificar al menos 28 unidades para mantener el mismo nivel de servicio.

El ejemplo anterior muestra una forma en la que pueden utilizarse las distribuciones de las variables de entrada del sistema para obtener información respecto de las órdenes de compra y/o producción de los partes y componentes que forman el producto final, permitiendo tomar mejores decisiones a la hora de administrar los recursos de las empresas.

Otro beneficio importante es que la introducción de variables aleatorias en el MRP y su análisis posterior permiten priorizar de manera más efectiva los esfuerzos de mejora en la cadena de suministro. Al identificar piezas o procesos con mayores desvíos estándar o mayores niveles de DaR_p , los planificadores pueden focalizarse en reducir la variabilidad precisamente donde su impacto será más significativo. Esto contribuye a una mejora continua más dirigida y eficiente, orientada a fortalecer la confiabilidad del sistema general.

Desde una perspectiva de toma de decisiones estratégicas, contar con modelos que consideren la incertidumbre ayuda a construir escenarios más realistas para la planificación de capacidades, la asignación de recursos y la evaluación de riesgos. Las empresas que logran integrar estas prácticas en sus sistemas de MRP pueden reaccionar más rápidamente ante cambios en el entorno, identificar oportunidades de optimización que de otro modo pasarían desapercibidas y, en definitiva, ganar una ventaja competitiva en mercados cada vez más volátiles y exigentes.

El análisis de la incertidumbre en el MRP, como se mencionó anteriormente, no es un tema novedoso porque un considerable número de autores lo han investigado durante las últimas décadas. Sin embargo, el enfoque presentado en la tesis difiere de estos trabajos previos en dos aspectos:

1. Se consideraron simultáneamente las dos fuentes de incertidumbre, esto es, la variabilidad en la demanda y en los *lead times*.
2. No se propuso la resolución de problemas de optimización por medio de algoritmos iterativos que brinden la «mejor planificación» en términos de costos, sino que se buscó estudiar el comportamiento probabilístico del sistema bajo condiciones de incertidumbre.

El análisis comparativo de los resultados obtenidos bajo el MRP clásico y los enfoques que consideran distribuciones teóricas o simulaciones permite visualizar claramente el impacto de la variabilidad en la planificación. Como se observó en la Tabla 3.2, bajo el algoritmo tradicional, la planificación de las órdenes se realizó de manera rígida y predeterminada, manteniendo un adelantamiento constante. Sin embargo, en los enfoques que incorporan incertidumbre (Tablas 3.9 y 3.12), este adelantamiento dejó de ser fijo y pasó a ser una variable dependiente de la

probabilidad de cumplimiento deseada. Esto permite ajustar la planificación de acuerdo al nivel de riesgo que la empresa esté dispuesta a asumir en función de su política de servicio al cliente.

Por ejemplo, los registros del módulo de la manija (13122) evidencian que la planificación bajo incertidumbre ofrece alternativas flexibles. Dependiendo del porcentaje de cumplimiento deseado, se puede decidir anticipar o no la orden, entendiendo el intercambio que esto implica entre costos de inventario y niveles de servicio. Esto brinda a los planificadores una herramienta poderosa para balancear sus decisiones operativas.

Adicionalmente, la comparación entre las dos nuevas metodologías (distribuciones teóricas y simulación) mostró que los resultados obtenidos son notablemente similares, con diferencias menores y razonables atribuibles a la naturaleza estadística de los procesos de muestreo. La coincidencia en los valores de las probabilidades y en los períodos sugeridos para las órdenes, refuerza la utilidad de ambos enfoques y valida, al menos, bajo las condiciones asumidas en este trabajo, la viabilidad de la simulación como alternativa práctica frente a la dificultad de derivar analíticamente las distribuciones exactas.

A pesar de la similitud entre los resultados de estos dos enfoques, se encontraron algunas diferencias que vale la pena remarcar. A lo largo de este trabajo se ha evidenciado que, frente al problema de modelar el comportamiento de la demanda y los *lead times*, la simulación representa una herramienta más práctica que el intento de derivar distribuciones teóricas. Esta afirmación se sostiene en varias razones de peso, tanto teóricas como prácticas, que resultan claras al analizar las dificultades y limitaciones asociadas a los métodos tradicionales basados en distribuciones.

Por un lado, es importante señalar que para ciertos casos particulares no están definidas las distribuciones necesarias para modelarlos. Mientras que para algunas situaciones muy específicas se pueden formular distribuciones teóricas, éstas corresponden casi siempre a casos de aplicación limitada en la práctica real. En problemas más generales, que son justamente los que enfrentan las organizaciones día a día, la complejidad matemática para obtener una distribución exacta crece rápidamente, volviéndose no solo impráctica, sino en muchos casos inviable. Esta situación pone de manifiesto la necesidad de métodos alternativos que sean capaces de abordar la realidad de manera más directa y menos demandante en cuanto a supuestos y desarrollos teóricos. La escasa bibliografía disponible sobre el tema es un síntoma claro de la dificultad intrínseca que implica tratar de construir distribuciones teóricas para estos sistemas complejos. A pesar de ser un problema altamente relevante en la gestión de inventarios y producción, la cantidad limitada de trabajos académicos que abordan la deducción formal de distribuciones para artículos de niveles inferiores dentro de una estructura de demanda dependiente, muestra que se trata de un campo de desarrollo extremadamente arduo.

La simulación, frente a este panorama, emerge como una herramienta mucho más simple y accesible. Uno de sus grandes atractivos es que, para su implementación, no se requiere conocer la distribución de la demanda de todos los componentes («hijos») dentro de la estructura de

los productos, ni tampoco las distribuciones de los períodos de planificación. Basta con disponer de la distribución de la demanda del producto final y de los *lead times* de cada uno de los componentes involucrados. Esta ventaja es fundamental, dado que en la práctica es mucho más sencillo y confiable estudiar o modelar los *lead times* (a través de datos históricos, registros de producción o tiempos de entrega de proveedores) que intentar deducir las distribuciones de los períodos para cada nivel del sistema productivo. Además, la simulación permite obviar la necesidad de formular suposiciones complejas sobre el comportamiento de las variables intermedias. Al trabajar directamente sobre la base de la demanda del producto final y los *lead times*, se reduce significativamente la carga matemática y se minimizan las fuentes de error asociadas a suposiciones poco realistas. Esto facilita una aplicación práctica mucho más rápida, robusta y alineada con las condiciones reales del entorno empresarial.

Otra ventaja clave de la simulación es que ofrece una flexibilidad metodológica notable. No solo se puede trabajar con distribuciones probabilísticas conocidas y estimadas, sino que además es posible utilizar técnicas de muestreo alternativo. Por ejemplo, se pueden extraer valores directamente de observaciones reales obtenidas en el sistema, generando así simulaciones basadas en datos empíricos. Si bien esta última modalidad no siempre es recomendable —principalmente debido a los riesgos asociados a sesgos en los datos o a muestras no representativas— sigue siendo una opción disponible y válida en contextos donde no se cuenta con información suficiente para ajustar una distribución teórica confiable. Esta capacidad de adaptar el enfoque según la disponibilidad y la calidad de los datos añade un nivel adicional de versatilidad a la simulación que los métodos analíticos tradicionales simplemente no ofrecen.

Por otro lado, cabe reiterar que las distribuciones teóricas solo son viables en escenarios muy controlados y de características altamente específicas, en los cuales las condiciones asumidas son poco frecuentes en la práctica. Para la inmensa mayoría de los casos reales, intentar construir estas distribuciones no solo demanda un esfuerzo considerable, sino que además es un proceso plagado de dificultades que, en última instancia, puede derivar en modelos poco útiles debido a la necesidad de introducir simplificaciones excesivas para poder llegar a resultados manejables.

En función de lo anterior, puede considerarse a la simulación del MRP como una alternativa que supera ampliamente a los métodos teóricos tradicionales en cuanto a su capacidad de adaptarse a contextos reales, su simplicidad de aplicación, su menor requerimiento de información específica difícil de obtener y su flexibilidad para trabajar con datos observados o estimaciones razonables. Esta superioridad no implica, sin embargo, que la simulación esté libre de desafíos: como toda técnica, requiere un diseño cuidadoso, un conocimiento adecuado de los datos involucrados y una interpretación crítica de los resultados. Sin embargo, estos requisitos son considerablemente más alcanzables que los que exige la determinación o deducción de distribuciones teóricas en sistemas de demanda y de tiempos de entrega variables.

Por último, resulta conveniente mencionar algunos de los interrogantes que se plantearon

durante el desarrollo de la presente tesis y que pueden constituir posibles líneas de futuras investigaciones:

- Si se pretende implementar el enfoque de la determinación de las distribuciones teóricas, es necesario profundizar sobre el estudio de la demanda como variable aleatoria discreta. La gran mayoría de los sistemas industriales producen o elaboran unidades discretas, por lo que resulta necesario construir modelos de dicha naturaleza.
- La escalabilidad de los nuevos enfoques puede llegar a ser un problema en muchos contextos reales. Cuando las estructuras de los productos poseen cientos o miles de componentes, la determinación de todas las distribuciones necesarias no es una cuestión a subestimar. Es importante probar estas metodologías con productos cuyas estructuras vayan aumentando gradualmente de tamaño para encontrar el punto de inflexión en el cual la inversión supera al beneficio.
- La independencia entre demanda y *lead times* puede que no se sostenga para algunos sistemas de producción, como por ejemplo aquellos que trabajan con una producción intermitente en lotes de tamaño variable. Para estas industrias, se plantea la necesidad reconsiderar el supuesto de independencia para poder analizar cómo se comportan las distribuciones conjuntas cantidad-período.

REFERENCIAS

- Amari, S., & Misra, R. (1997). Closed-form expressions for distribution of sum of exponential random variables. *IEEE Transactions on Reliability*, 46(4), pp. 519-522.
- Ammar, O. B., Dolgui, A., Hnaïen, F., & Louly, M. A. (2013). Supply planning and inventory control under lead time uncertainty: A review. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(9), pp. 359-370.
- Bartezzaghi, E., & Verganti, R. (1995). Managing demand uncertainty through order overplanning. *International Journal of Production Economics*, 40(2), pp. 107-120.
- Ben-daya, M., & Hariga, M. (2003). Lead-time reduction in a stochastic inventory system with learning consideration. *International Journal of Production Research*, 41(3), pp. 571-579.
- Blackburn, J. D., Kropp, D. H., & Millen, R. A. (1985). MRP System Nervousness: Causes and Cures. *Engineering Costs and Production Economics*, 9(1), pp. 141-146.
- Blackburn, J. D., Kropp, D. H., & Millen, R. A. (1986). A Comparison of Strategies to Dampen Nervousness in MRP Systems. *Management Science*, 32(4), pp. 413-429.
- Cachon, G. P., Randall, T., & Schmidt, G. M. (2007). In Search of the Bullwhip Effect. *Manufacturing & Service Operations Management*, 9(4), pp. 457-479.
- Chaharsooghi, S., & Heydari, J. (2010). LT variance or LT mean reduction in supply chain management: Which one has a higher impact on SC performance? *International Journal of Production Economics*, 124, pp. 475-481.
- Chandra, C., & Grabis, J. (2008). Inventory management with variable lead-time dependent procurement cost. *Omega*, 36(5), pp. 877-887.
- Chapman, S. N. (2006). *Planificación y control de la producción*. Pearson Educación.
- Chatfield, C., & Xing, H. (2019). *The Analysis of Time Series: An Introduction with R* (7th ed.). CRC Press.
- Chatfield, D., Kim, J., Harrison, T., & Hayya, J. (2004). The Bullwhip Effect—Impact of Stochastic Lead Time, Information Quality, and Information Sharing: A Simulation Study. *Production and Operations Management*, 13, pp. 340-353.
- Christensen, W., Germain, R., & Birou, L. (2007). Variance vs average: supply chain lead-time as a predictor of financial performance. *Supply Chain Management*, 12(5), pp. 349-357.
- Claisse, M., Chu, C., & Jemai, Z. (2016). Production planning under uncertainties and forecasts updates. *2016 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, pp. 490-495.
- Cox, D. (1970). *Renewal Theory*. Methuen & Co.

- de Paula Ferreira, W., Armellini, F., & De Santa-Eulalia, L. A. (2020). Simulation in industry 4.0: A state-of-the-art review. *Computers & Industrial Engineering*, *149*, 106868.
- Diebold, F. X. (2006). *Elements of Forecasting* (4th ed.). Thomson South-Western.
- Disney, S., & Lambrecht, M. (2008). On Replenishment Rules, Forecasting, and the Bullwhip Effect in Supply Chains. *Foundations and Trends® in Technology Information and Operations Management*, *2*, pp. 1-80.
- Dolgui, A., & Prodhon, C. (2007). Supply planning under uncertainties in MRP environments: A state of the art. *Annual Reviews in Control*, *55*(7), pp. 1992-2012.
- Duc, T. T. H., Luong, H. T., & Kim, Y.-D. (2008). A measure of the bullwhip effect in supply chains with stochastic lead time. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, *38*, pp. 1201-1212.
- Eisenhardt, K. M. (1989). Closed-form expressions for distribution of sum of exponential random variables. *The Academy of Management Review*, *14*(4), pp. 532-550.
- Elhafsi, M. (2002). Optimal leadtimes planning in serial production systems with earliness and tardiness costs. *IIE Transactions*, *34*(3), pp. 233-243.
- Erlang, A. K. (1909). The Theory of Probabilities and Telephone Conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, *B*, *20*, pp. 33-39.
- Escudero, L. F., Kamesam, P. V., King, A. J., & Wets, R. J.-B. (1993). Production planning via scenario modelling. *Annals of Operations Research*, *43*, pp. 311-335.
- Fang, X., Zhang, C., Robb, D. J., & Blackburn, J. D. (2013). Decision support for lead time and demand variability reduction. *Omega*, *41*(2), pp. 390-396.
- Glock, C. (2012). Lead time reduction strategies in a single-vendor–single-buyer integrated inventory model with lot size-dependent lead times and stochastic demand. *International Journal of Production Economics*, *136*, pp. 37-44.
- Gnedenko, B. V., & Kolmogorov, A. N. (1968). *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-wesley.
- Groover, M. P. (2007). *Automation, Production Systems, and Computer-Integrated Manufacturing* (4th ed.). Prentice Hall.
- Gupta, A., & Maranas, C. D. (2003). Managing demand uncertainty in supply chain planning [2nd Pan American Workshop in Process Systems Engineering]. *Computers & Chemical Engineering*, *27*(8), pp. 1219-1227.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hayya, J. C., Harrison, T. P., & He, X. J. (2011). The impact of stochastic lead time reduction on inventory cost under order crossover. *European Journal of Operational Research*, *211*(2), pp. 274-281.

- Herrera, C., & Thomas, A. Formulation for less master production schedule instability under rolling horizon. En: International Conference on Industrial Engineering y Systems Management. Montréal, Canada, 2009, mayo.
- Heydari, J., Kazemzadeh, R., & Chaharsooghi, S. (2009). A study of lead time variation impact on supply chain performance. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 40, pp. 1206-1215.
- Hnaien, F., Dolgui, A., & Louly, M. A. O. (2009). MRP Parameterization Under Lead Times Uncertainties: Case of Multilevel Serial Production Systems. *2009 International Conference on Computers & Industrial Engineering*, pp. 863-868.
- Ho, C.-J., & Ireland, T. (1998). Correlating MRP system nervousness with forecast errors. *International Journal of Production Research*, 36(8), pp. 2285-2299.
- Hodson, W. K. (2001). *Maynard. Manual del Ingeniero Industrial* (4ta ed.). McGraw-Hill.
- Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematica Statistics* (8th ed.). Pearson.
- Hopp, W. J., & Spearman, M. L. (2011). *Factory Physics* (3rd ed.). Waveland Press.
- Jacobs, F. R., Berry, W. L., Whybark, D. C., & Vollmann, T. E. (2018). *Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management: The CPIM Reference* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- Jacobs, R. F., & Weston, F., Jr. (2007). Enterprise resource planning (ERP)—A brief history. *Journal of Operations Management*, 25(2), pp. 357-363.
- Jeon, S. M., & Kim, G. (2016). A survey of simulation modeling techniques in production planning and control (PPC). *Production Planning & Control*, 27(5), pp. 360-377.
- Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* (2nd ed., Vol. 1). Houghton Mifflin.
- Kadipasaoglu, S. N., & Sridharan, S. V. (1997). Measurement of instability in multi-level MRP systems. *International Journal of Production Research*, 35(3), pp. 713-737.
- Kadipasaoglu, S. N., & Sridharan, V. (1995). Alternative approaches for reducing schedule instability in multistage manufacturing under demand uncertainty. *Journal of Operations Management*, 13(3), pp. 193-211.
- Kelton, W. D., Sadowski, R. P., & Zupick, N. B. (2014). *Simulation with Arena* (6th ed.). McGraw-Hill.
- Koh, S. C. L., Saad, S. M., & Jones, M. H. (2002). Uncertainty under MRP-planned manufacture: Review and categorization. *International Journal of Production Research*, 40(10), pp. 2399-2421.
- Krueger, R., Galletly, J. E., & Bicheno, J. (1992). Simulating MRP – A New Perspective for Training. *Industrial Management & Data Systems*, 92(1), pp. 7-13.
- Law, A. M. (2015). *Simulation Modeling and Analysis* (5th ed.). McGraw-Hill.

- Lee, Y. G., Ju, S., & Woo, J. H. (2020). Simulation-based planning system for shipbuilding. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 33(6), pp. 626-641.
- Li, K. H., & Li, C. T. (2019). Linear Combination of Independent Exponential Random Variables. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 21, pp. 253-277.
- Li, Q., & Disney, S. M. (2017). Revisiting rescheduling: MRP nervousness and the bullwhip effect. *International Journal of Production Research*, 31(2), pp. 269-279.
- Lin, N.-P., & Krajewski, L. (1992). A model for master production scheduling in uncertain environments. *Decision Sciences*, 23(4), pp. 839-861.
- Louly, M. A., & Dolgui, A. (2010). MRP Offsetting for Assembly Systems with Random Component Delivery Times: A Particular Case. En B. Vallespir & T. Alix (Eds.), *Advances in Production Management Systems. New Challenges, New Approaches* (pp. 144-151). Springer.
- Louly, M. A., & Dolgui, A. (2013). Optimal MRP parameters for a single item inventory with random replenishment lead time, POQ policy and service level constraint. *International Journal of Production Economics*, 143, pp. 35-40.
- Makridakis, S. G., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. (1998). *Forecasting: Methods and Applications* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
- Meyer, P. L. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Mohebbi, E., & Posner, M. J. (1998). A continuous-review inventory system with lost sales and variable lead time. *Naval Research Logistics*, 45(3), pp. 259-278.
- Mula, J., Poler, R., & Garcia-Sabater, J. (2007). Material Requirement Planning with fuzzy constraints and fuzzy coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(7), pp. 783-793.
- Nahmias, S., & Olsen, T. L. (2015). *Production and Operation Analysis* (7th ed.). Waveland Press.
- Nance, R. E., & Sargent, R. G. (2002). Perspectives on the Evolution of Simulation. *Operations Research*, 50(1), pp. 161-172.
- Orlicky, J. A. (1975). *Material Requirements Planning*. McGraw-Hill.
- Ptak, C. A., & Smith, C. J. (2011). *Orlicky's Material Requirements Planning* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Ripley, B. D. (1987). *Stochastic Simulation*. John Wiley & Sons.
- Rojas, F., Leiva, V., Wanke, P., Lillo, C., & Pascual, J. (2019). Modeling lot-size with time-dependent demand based on stochastic programming and case study of drug supply in Chile. *PLOS ONE*, 14(3), e0212768.
- Ryu, S. W., & Lee, K. K. (2003). A stochastic inventory model of dual sourced supply chain with lead-time reduction. *International Journal of Production Economics*, 81-82, pp. 513-524.
- Sen, A., & Balakrishnan, N. (1999). Convolution of geometrics and a reliability problem. *Statistics & Probability Letters*, 43(4), pp. 421-426.

- Sipper, D., & Bulfin, R. L., Jr. (1998). *Planeación y control de la producción* (M. González Osuna, Trad.). McGraw-Hill.
- Sodhi, M. S. (2005). Managing Demand Risk in Tactical Supply Chain Planning for a Global Consumer Electronics Company. *Production and Operations Management*, 14(1), pp. 69-79.
- Sridharan, S. V., Berry, W. L., & Udayabhanu, V. (1988). Measuring master production schedule stability under rolling planning horizons. *Decision Sciences*, 19, pp. 147-166.
- Sridharan, S. V., & Lawrence LaForge, R. (1989). The impact of safety stock on schedule instability, cost and service. *Journal of Operations Management*, 8(4), pp. 327-347.
- Tang, O., & Grubbström, R. W. (2002). Planning and replanning the master production schedule under demand uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 78(3), pp. 323-334.
- Thürer, M., Fernandes, N. O., & Stevenson, M. (2020). Production planning and control in multi-stage assembly systems: An assessment of Kanban, MRP, OPT (DBR) and DDMRP by simulation. *International Journal of Production Research*, 60(3), pp. 1036-1050.
- Van Kampen, T. J., van Donk, D. P., & van der Zee, D.-J. (2010). Safety stock or safety lead time: coping with unreliability in demand and supply. *International Journal of Production Research*, 48(24), pp. 7463-7481.
- Vollmann, T. E., Jacobs, F. R., Berry, W. L., & Whybark, D. C. (2011). *Manufacturing planning and control for supply chain management* (6th ed.). McGraw-Hill.
- Wang, X., & Disney, S. (2016). The Bullwhip Effect: Progress, Trends and Directions. *European Journal of Operational Research*, 250, pp. 691-701.
- Whybark, D. C., & Williams, J. G. (1976). Material Requirements Planning under Uncertainty. *Decision Sciences*, 7(4), pp. 595-606.
- Wijngaard, J., & Wortmann, J. (1985). MRP and inventories. *European Journal of Operational Research*, 20, pp. 281-293.
- Xie, J., Zhao, X., & Lee, T. (2003). Freezing the master production schedule under single resource constraint and demand uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 83(1), pp. 65-84.
- Yanev, G. P. (2020). Exponential and Hypoexponential Distributions: Some Characterizations. *Mathematics*, 8(12), 2207.
- Yavuz Acar, S. K., & Schipperijn, P. (2010). A decision support framework for global supply chain modelling: an assessment of the impact of demand, supply and lead-time uncertainties on performance. *International Journal of Production Research*, 48(11), pp. 3245-3268.
- Yin, R. K. (2017). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6th ed.). SAGE Publications.

- Zandieh, M., & Motallebi, S. (2018). Determination of production planning policies for different products in process industries: using discrete event simulation. *Production Engineering Research and Development*, *12*, pp. 737-746.
- Zhang, Y., Shen, Z. M., & Song, S. (2016). Distributionally robust optimization of two-stage lot-sizing problems. *Production and Operations Management*, *21*, pp. 2116-2131.
- Zhang, Z., Wang, X., Wang, X., Cui, F., & Cheng, H. (2018). A simulation-based approach for plant layout design and production planning. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, *10*, pp. 1217-1230.
- Zhou, Z., & Guan, Y. (2013). Two-stage stochastic lot-sizing problem under cost uncertainty. *Annals of Operations Research*, *209*, pp. 207-230.
- Zhu, B., Li, Y., & Zhang, F. (2021). A Credibility-Based MPS/MRP Integrated Programming Model Under Complex Uncertainty. *International Journal of Fuzzy Systems*, *23*, pp. 1414-1430.

APÉNDICE

A. Distribuciones de Probabilidad

En las siguientes páginas se encuentran los desarrollos matemáticos que permitieron definir las distribuciones mencionadas en el Capítulo 3.

A.1. Distribuciones de los Requerimientos

Para la variable X_0 se decidió utilizar una distribución normal de parámetros μ_0 y σ_0 , los cuales debían cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \mu_0 - 3\sigma_0 = 5 \\ \mu_0 + 3\sigma_0 = 35 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, se obtiene que:

$$2\mu_0 = 40 \text{ u} \quad (\text{A.2})$$

y, luego, sigue que $\mu_0 = 20$ u.

En cambio, si se resta miembro a miembro la segunda ecuación con la primera, lo que se obtiene es:

$$6\sigma_0 = 30 \text{ u} \quad (\text{A.3})$$

De esta manera, resulta que $\sigma_0 = 5$ u y, en consecuencia, se obtiene la distribución de la Ecuación (3.1):

$$Q_0 \sim Normal(\mu_0 = 20 \text{ u}, \sigma_0 = 5 \text{ u}) \quad (\text{A.4})$$

Las distribuciones del resto de las piezas se obtuvieron a partir de la anterior. En efecto, para los artículos X_1 y X_3 se tiene que $m_1 = m_3 = 1$, con lo cual, reemplazando estos valores en (2.8) se tiene que:

$$f_{Q_1}(q_1) = \frac{1}{1} f_{Q_0} \left(\frac{q_1}{1} \right) = f_{Q_0}(q_1) \quad (\text{A.5})$$

$$f_{Q_3}(q_3) = \frac{1}{1} f_{Q_0} \left(\frac{q_3}{1} \right) = f_{Q_0}(q_3) \quad (\text{A.6})$$

de donde se sigue que Q_1 y Q_3 tienen la misma distribución que Q_0 .

Para X_2 el razonamiento es similar, excepto que se tiene que utilizar el resultado (2.10). Tomando $n = m_2 = 2$ se obtiene:

$$f_{Q_2}(q_2) = \frac{1}{2} f_{Q_0}\left(\frac{q_2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma_0)^2}} e^{-\frac{(q_2 - 2\mu_0)^2}{2(2\sigma_0)^2}} \quad (\text{A.7})$$

Llamando $\mu_2 = 2\mu_0$ y $\sigma_2 = 2\sigma_0$, la ecuación anterior resulta:

$$f_{Q_2}(q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(q_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (\text{A.8})$$

lo cual corresponde a la *fdp* de una distribución normal de media μ_2 y desvío estándar σ_2 .

En cuanto a Q_4 y Q_5 , la obtención de sus distribuciones es idéntica a las de X_1 y X_3 . Dado que $m_4 = m_5 = 1$, reemplazando en (2.8) se tiene:

$$f_{Q_4}(q_4) = \frac{1}{1} f_{Q_3}\left(\frac{q_4}{1}\right) = f_{Q_3}(q_4) = f_{Q_0}(q_4) \quad (\text{A.9})$$

$$f_{Q_5}(q_5) = \frac{1}{1} f_{Q_3}\left(\frac{q_4}{1}\right) = f_{Q_3}(q_5) = f_{Q_0}(q_5) \quad (\text{A.10})$$

De esta manera, quedan definidas las distribuciones de los requerimientos de cada artículo que se presentaron en la Tabla 3.3.

A.2. Distribuciones de los Períodos

A diferencia de lo anterior, la obtención de la distribución de los períodos implicó la suma de variables aleatorias, lo cual complejizó su desarrollo matemático. El punto de partida fue la definición de la distribución del *lead time* de cada artículo. En el ejemplo analizado se asumió que las variables L_j (con $j = 0, \dots, 5$) eran independientes y estaban exponencialmente distribuidas cada una con un parámetro λ_j , con valor esperado igual a los *lead time* (LT_j) de la Tabla 3.1. Si se utiliza la siguiente parametrización para la *fdp* de la distribución exponencial:

$$f_{L_j}(x) = \lambda_j e^{-\lambda_j x}, \text{ para } j = 1, \dots, 5 \text{ y } x \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

entonces se tiene que:

$$E[L_j] = \frac{1}{\lambda_j} = LT_j, \text{ para } j = 1, \dots, 5 \quad (\text{A.12})$$

Luego, se sigue que:

$$\lambda_j = \frac{1}{\text{LT}_j}, \text{ para } j = 1, \dots, 5 \quad (\text{A.13})$$

que son los valores presentados en la Tabla 3.4.

Según lo explicado en el Capítulo 2, para el artículo final X_0 el período de planificación P_0 resulta siempre igual a su *lead time* L_0 . En consecuencia, se tiene que:

$$P_0 = L_0 \sim \text{Exp} \left(\lambda_0 = \frac{1}{2} \frac{\text{operación}}{\text{semana}} \right) \quad (\text{A.14})$$

El resto de los períodos se obtuvieron a partir de éste por medio de las Ecuaciones (2.11) y (2.12) descendiendo nivel por nivel en la BOM de X .

Los períodos de los artículos del segundo nivel se obtuvieron sumando el LT de X_0 y el de cada uno de ellos, tal como se indica en (3.2). Para los casos particulares de los artículos X_1 y X_3 , dado que sus LT tienen la misma distribución que el de X_0 , los períodos de planificación correspondientes resultaron ser sumas de variables aleatorias independientes con distribución exponencial de igual parámetro. En consecuencia, P_1 y P_3 tienen distribución de Erlang de parámetros $n = 2$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_0 = 1/2$ operación por semana. Según (2.22), sus *fdp* son:

$$f_{P_1}(p) = f_{P_3}(p) = \frac{\lambda_0^2 p^{2-1}}{(2-1)!} e^{-\lambda_0 p} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 p}{1!} e^{-\frac{1}{2}p} = \frac{1}{4} p e^{-\frac{1}{2}p}, \text{ con } p > 0 \quad (\text{A.15})$$

En cambio, dado que el parámetro de la distribución exponencial de L_2 difiere del de L_0 , su suma, es decir, P_2 tiene una distribución hipoexponencial o de Erlang generalizada de parámetros $\lambda_0 = 1/2$ y $\lambda_2 = 1$ operación por semana. Utilizando (2.23) su *fdp* resulta:

$$f_{P_2}(p) = \sum_{i \in \{0;2\}} \omega_i \lambda_i e^{-\lambda_i p} = \omega_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 p} + \omega_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 p}, \text{ con } p > 0 \quad (\text{A.16})$$

donde los pesos ω_i están definidos por medio de la Ecuación (2.24), con lo cual:

$$\omega_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_0} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_2} \quad (\text{A.17})$$

Reemplazando (A.17) en (A.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} f_{P_2}(p) &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_0} \right) \lambda_0 e^{-\lambda_0 p} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_2} \right) \lambda_2 e^{-\lambda_2 p} = \\ &= \frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_0} \left(e^{-\lambda_0 p} - e^{-\lambda_2 p} \right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{1 - \frac{1}{2}} \left(e^{-\frac{1}{2}p} - e^{-1p} \right) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}p} - e^{-p}, \text{ con } p > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Para los artículos del último nivel los períodos de planificación resultaron de la suma del LT de X_0 , el de X_3 y sus respectivos LT, como muestra (3.4). Nuevamente, estos períodos se obtuvieron como suma de variables aleatorias exponenciales independientes con distintos parámetros. Por lo tanto, los P_j (con $j = 4, 5$) tienen una distribución de Erlang generalizada de parámetros $\lambda_0 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/2$ y λ_j operaciones por semana, respectivamente.

Sin embargo, a diferencia de P_2 , los parámetros de las funciones exponenciales no son todos distintos entre sí. En efecto, $\lambda_0 = \lambda_3$ y, en consecuencia, no pudo hacerse uso (2.23). En su lugar, fue necesario aplicar el procedimiento descrito por Amari & Misra (1997). En lo que sigue, se detalla la obtención de la distribución de P_4 . La distribución de P_5 se consiguió simplemente reemplazando λ_4 por λ_5 en los resultados que se mostrarán.

Sean $\beta_1 = \lambda_0 = \lambda_3$ y $\beta_2 = \lambda_4$. Luego, resulta $a = 2$, $b_1 = 2$ y $b_2 = 1$, con lo cual, reemplazando en (2.27) se tiene:

$$f_{P_4}^*(s) = \prod_{i^*=1}^2 \left(\frac{\beta_{i^*}}{s + \beta_{i^*}} \right)^{b_{i^*}} = \left(\frac{\beta_1}{s + \beta_1} \right)^2 \left(\frac{\beta_2}{s + \beta_2} \right) = \frac{\beta_1^2 \beta_2}{(s + \beta_1)^2 (s + \beta_2)} \quad (\text{A.19})$$

Para poder calcular la transformada inversa de Laplace de $f_{P_4}^*$ se utilizó una propiedad muy útil que establece que:

$$\mathcal{L}^{-1} \{c_1 F_1 + \dots + c_n F_n\} = c_1 \mathcal{L}^{-1} \{F_1\} + \dots + c_n \mathcal{L}^{-1} \{F_n\} \quad (\text{A.20})$$

siempre que F_1, \dots, F_n sean transformaciones de Laplace y c_1, \dots, c_n sean constantes. Para hacer uso de esta propiedad, fue necesario expresar (A.19) como sumas. Para lograr esto, se utilizaron fracciones parciales con factores lineales repetidos y se planteó la siguiente igualdad:

$$\frac{\beta_1^2 \beta_2}{(s + \beta_1)^2 (s + \beta_2)} = \frac{A}{s + \beta_1} + \frac{B}{(s + \beta_1)^2} + \frac{C}{s + \beta_2} \quad (\text{A.21})$$

a partir de la cual se obtuvo:

$$\beta_1^2 \beta_2 = A (s + \beta_1) (s + \beta_2) + B (s + \beta_2) + C (s + \beta_1)^2 \quad (\text{A.22})$$

Desarrollando los productos del lado derecho de la igualdad y agrupando las potencias equivalentes de base s , se tiene:

$$\beta_1^2 \beta_2 = (A + C) s^2 + [A (\beta_1 + \beta_2) + B + 2C\beta_1] s + (A\beta_1\beta_2 + B\beta_2 + C\beta_1^2) \quad (\text{A.23})$$

Para que los polinomios de s a ambos lados de (A.23) sean iguales es necesario que tengan los mismos coeficientes, de donde sigue:

$$\begin{cases} A + C = 0 & (i) \\ A(\beta_1 + \beta_2) + B + 2C\beta_1 = 0 & (ii) \\ A\beta_1\beta_2 + B\beta_2 + C\beta_1^2 = \beta_1^2\beta_2 & (iii) \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

De (i) resulta:

$$C = -A \quad (\text{A.25})$$

Reemplazando (A.25) en (ii) se tiene:

$$A(\beta_1 + \beta_2) + B + 2C\beta_1 = A(\beta_1 + \beta_2) + B - 2A\beta_1 = A(\beta_2 - \beta_1) + B = 0 \quad (\text{A.26})$$

con lo cual:

$$B = A(\beta_1 - \beta_2) \quad (\text{A.27})$$

De esta manera, reemplazando (A.25) y (A.27) en (iii) se obtiene:

$$\begin{aligned} A\beta_1\beta_2 + B\beta_2 + C\beta_1^2 &= \beta_1^2\beta_2 \\ A\beta_1\beta_2 + A(\beta_1 - \beta_2)\beta_2 - A\beta_1^2 &= \beta_1^2\beta_2 \\ A(-\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) &= \beta_1^2\beta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

y así resulta:

$$A = \frac{\beta_1^2\beta_2}{-\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 - \beta_2^2} = -\frac{\beta_1^2\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)^2} \quad (\text{A.29})$$

Luego, recordando que $\beta_1 = \lambda_0 = \lambda_3 = 1/2$ y $\beta_2 = \lambda_4 = 1$ operación por semana, se tiene que $A = -1$, $B = 1/2$ y $C = 1$, con lo cual:

$$f_{P_4}^*(s) = -\frac{1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{s + 1} \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, teniendo en cuenta que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+c}\right\} = e^{-ct} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+c)^2}\right\} = te^{-ct} \quad (\text{A.31})$$

para $c \in \mathbb{R}$, utilizando la propiedad definida en (A.20), la *fdp* de P_4 resulta:

$$\begin{aligned}
f_{P_4}(p) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{s + 1} \right\} = \\
&= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1} \right\} = \\
&= -e^{-\frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}p} + e^{-p}, \text{ con } p > 0
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para P_5 , se tiene que $\beta_2 = \lambda_5 = 1/3$ semanas, con lo cual, en función de las Ecuaciones (A.25), (A.27) y (A.29), resultan $A = -3$, $B = -1/2$ y $C = 3$. Luego, reemplazando en (A.21) se tiene:

$$f_{P_5}^*(s) = -\frac{3}{s + \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{3}{s + \frac{1}{3}} \tag{A.33}$$

y la *fdp* de P_5 resulta:

$$f_{P_5}(p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f_{P_5}^*(s) \right\} = -3e^{-\frac{1}{2}p} - \frac{1}{2}pe^{-\frac{1}{2}p} + 3e^{-\frac{1}{3}p}, \text{ con } p > 0 \tag{A.34}$$

A.2.1. Períodos Discretos

A lo largo de todo el razonamiento anterior se asumió, como es habitual con las dimensiones temporales, que las variables P_j eran de naturaleza continua. Sin embargo, al tratarse de períodos de planificación, lo correcto es considerarlos de forma discreta.

Sin necesidad de modificar los resultados ya obtenidos, esto se puede lograr por medio de la transformación definida por (2.30). De esta manera, en función de (2.32), la *fpp* de los períodos transformados P_j^* resulta:

$$f_{P_j^*}(p) = P \{P_i^* = p\} = \int_{p-1}^p f_{P_j}(u)du, \text{ con } j = 0, \dots, 5 \text{ y } p \in \mathbb{N} \tag{A.35}$$

Recordando que $P_0 \sim Exp(\lambda_0 = 1/2)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
f_{P_0^*}(p) &= P \{P_0^* = p\} = \int_{p-1}^p \lambda_0 e^{-\lambda_0 u} du = \\
&= \left[-e^{-\lambda_0 u} \right]_{p-1}^p = e^{-\lambda_0 p} (e^{\lambda_0} - 1) = , \text{ con } p \in \mathbb{N} \\
&= \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}p}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

En el caso de P_1 y P_3 , ambas tienen la misma distribución de Erlang, definida por (A.15). La *fpp* de sus períodos transformados resulta:

$$\begin{aligned}
f_{P_1^*}(p) = f_{P_3^*}(p) &= \text{P}\{P_1^* = P_3^* = p\} = \int_{p-1}^p \lambda_0^2 u e^{-\lambda_0 u} du = \\
&= \left[-e^{-\lambda_0 u} (1 + \lambda_0 u) \right]_{p-1}^p = \quad , \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (\text{A.37}) \\
&= -\frac{1}{2} (2 + p) e^{-\frac{1}{2}p} + \frac{1}{2} (1 + p) e^{-\frac{1}{2}(p-1)}
\end{aligned}$$

Por su parte, P_2 tiene una distribución de Erlang generalizada con f_{dp} dada por (A.18). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
f_{P_2^*}(p) &= \text{P}\{P_2^* = p\} = \int_{p-1}^p \left(e^{-\frac{1}{2}u} - e^{-u} \right) du = \\
&= \left[-2e^{-\frac{1}{2}u} + e^{-u} \right]_{p-1}^p = \quad , \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (\text{A.38}) \\
&= -2 \left(1 - e^{\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{1}{2}p} + (1 - e) e^{-p}
\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que P_4 y P_5 también tienen distribuciones de Erlang generalizadas y que sus f_{dp} están dadas por (A.33) y (A.34), se tiene que:

$$\begin{aligned}
f_{P_4^*}(p) &= \text{P}\{P_4^* = p\} = \int_{p-1}^p \left(-e^{-\frac{1}{2}u} + \frac{1}{2} u e^{-\frac{1}{2}u} + e^{-u} \right) du = \\
&= \left[-u e^{-\frac{1}{2}u} - e^{-u} \right]_{p-1}^p = \quad , \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (\text{A.39}) \\
&= \left[\left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) p - e^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\frac{1}{2}p} + (e - 1) e^{-p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{P_5^*}(p) &= \text{P}\{P_5^* = p\} = \int_{p-1}^p \left(-3e^{-\frac{1}{2}u} - \frac{1}{2} u e^{-\frac{1}{2}u} + 3e^{-\frac{1}{3}u} \right) du = \\
&= \left[(u + 8) e^{-\frac{1}{2}u} - 9e^{-\frac{1}{3}u} \right]_{p-1}^p = \quad , \text{ con } p \in \mathbb{N} \quad (\text{A.40}) \\
&= \left[\left(1 - e^{\frac{1}{2}} \right) p + 8 - 7e^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\frac{1}{2}p} + 9 \left(e^{\frac{1}{3}} - 1 \right) e^{-\frac{1}{3}p}
\end{aligned}$$

En la Tabla A.1 y la Figura A.1 se muestran las distribuciones de probabilidad de los períodos transformados para los primeros 20 valores de p . Como puede observarse, la suma de las probabilidades correspondientes a cada variable se aproxima a uno. Para que las expresiones derivadas para cada variable transformada puedan considerarse f_{pp} , es necesario que cumplan la condición:

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{P_j^*}(p) = 1, \text{ con } j = 1, \dots, 5 \quad (\text{A.41})$$

En efecto, todas las funciones presentadas cumplen con (A.41). La demostración de este resultado no se incluye en el presente trabajo, pero puede verificarse fácilmente por medio de calculadoras de series.

Tabla A.1: Distribuciones de probabilidad de los períodos transformados P_j^* .

p	$P\{P_0^* = p\}$	$P\{P_1^* = p\}$	$P\{P_2^* = p\}$	$P\{P_3^* = p\}$	$P\{P_4^* = p\}$	$P\{P_5^* = P\}$
1	0.3935	0.0902	0.1548	0.0902	0.0256	0.0100
2	0.2387	0.1740	0.2448	0.1740	0.1033	0.0480
3	0.1447	0.1779	0.2040	0.1779	0.1519	0.0855
4	0.0878	0.1518	0.1441	0.1518	0.1595	0.1081
5	0.0533	0.1187	0.0949	0.1187	0.1425	0.1156
6	0.0323	0.0881	0.0603	0.0881	0.1160	0.1118
7	0.0196	0.0633	0.0376	0.0633	0.0889	0.1012
8	0.0119	0.0443	0.0232	0.0443	0.0654	0.0875
9	0.0072	0.0305	0.0142	0.0305	0.0468	0.0731
10	0.0044	0.0207	0.0087	0.0207	0.0327	0.0594
11	0.0027	0.0139	0.0053	0.0139	0.0225	0.0474
12	0.0016	0.0092	0.0032	0.0092	0.0152	0.0371
13	0.0010	0.0061	0.0019	0.0061	0.0102	0.0287
14	0.0006	0.0040	0.0012	0.0040	0.0068	0.0220
15	0.0004	0.0026	0.0007	0.0026	0.0045	0.0167
16	0.0002	0.0017	0.0004	0.0017	0.0029	0.0125
17	0.0001	0.0011	0.0003	0.0011	0.0019	0.0094
18	0.0001	0.0007	0.0002	0.0007	0.0012	0.0069
19	0.0000	0.0004	0.0001	0.0004	0.0008	0.0051
20	0.0000	0.0003	0.0001	0.0003	0.0005	0.0038

B. Programa de Simulación

El programa de simulación que se presenta a continuación fue construido utilizando el lenguaje de programación R en su versión 4.4.2. Si bien se aplica para simular una sola semana, el código puede utilizarse para horizontes más largos.

Además de los paquetes que ya se cargan por defecto con el programa, se hizo uso principalmente del paquete *dplyr*:

```
## PAQUETES ##
library(dplyr)
```

El primer paso consistió en la inicialización de los contadores y la definición de los valores de los parámetros que definen el modelo, como la cantidad de corridas y período inicial. De esta forma, se estableció que la primera semana (τ_0) fuese la 49 y un horizonte (T) igual a un único período.

Por otro lado, se realizaron 1000 corridas del modelo (C) y se estableció una semilla (`set.seed`) que permita replicar el estudio en las mismas condiciones. Además, se establecieron las cantidades disponibles iniciales de cada pieza (S0):

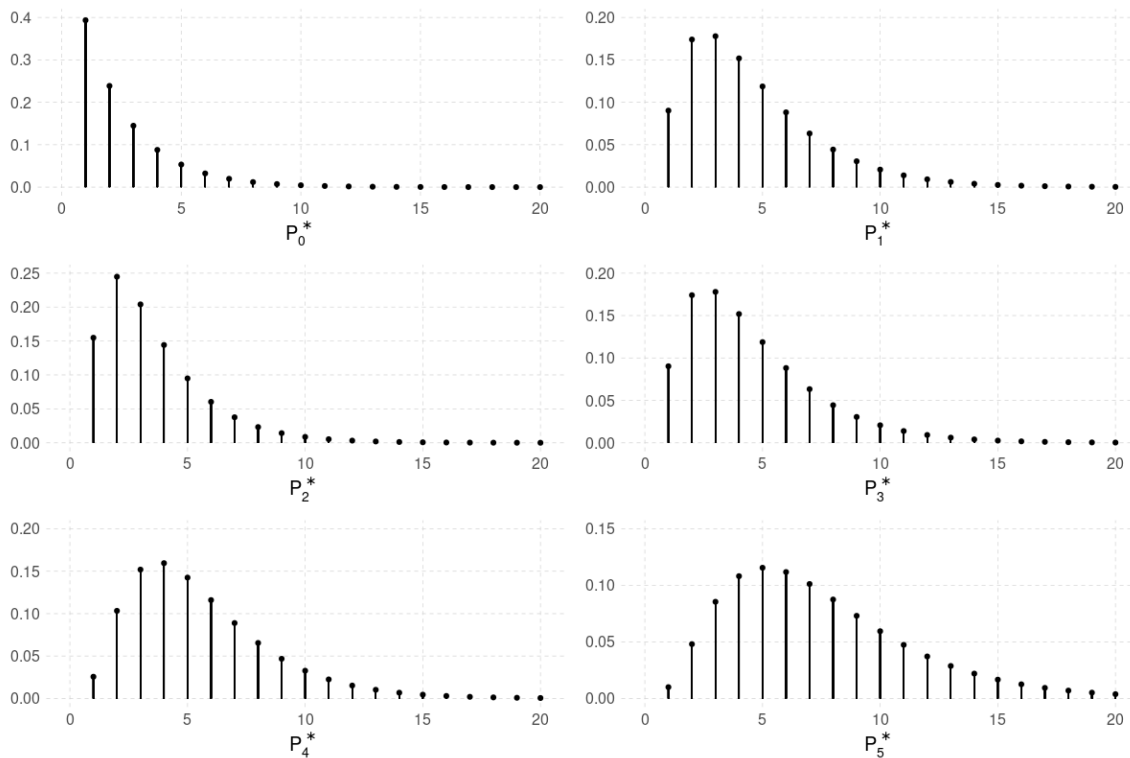


Figura A.1: Distribuciones de probabilidad de los períodos transformados P_j^* .

```
## INICIALIZACIÓN DE VARIABLES ##
t0 <- 49
T <- 1
C <- 1000
set.seed(100)
S0 <- c(0,0,0,0,0,0)
```

El segundo bloque de código correspondió a la creación de las estructuras bidimensionales (tabla o *data.frame*⁶) que contuvieron las salidas de cada una de las corridas del modelo, a saber, el número de la corrida (*corrida*), el período de planificación del MPS (*periodo_mps*), el período de planificación del MRP (*periodo_mrp*), el período transformado (*periodo_mrp_disc*) y las órdenes planificadas de cada artículo (*neto*):

6. Técnicamente, un *tibble* y un *data.frame* son estructuras de datos diferentes en R. Sin embargo, dado que su tratamiento es muy similar, se utilizará el término *data.frame* por ser más genérico.

```
## CREACION DE DATA FRAMES PARA ALMACENAR DATOS ##
lista_ds <- lapply(0:5, function(i) {
  tibble(corrida = 0, periodo_mps = 0, periodo_mrp = 0, periodo_mrp_disc =
0, neto = 0)
})
names(lista_ds) <- paste0("X", 0:5, "_completo")
X0_completo <- lista_ds$X0_completo
X1_completo <- lista_ds$X1_completo
X2_completo <- lista_ds$X2_completo
X3_completo <- lista_ds$X3_completo
X4_completo <- lista_ds$X4_completo
X5_completo <- lista_ds$X5_completo
```

El programa consiste en un bucle que se repitió C veces. En cada réplica se crean los *data.frames* que representan los registros del MRP con los valores generados en esa corrida (X0 a X5).

```
## PROGRAMA ##
for (c in 1:C) {
  ## CONSTRUCCIÓN DE LOS REGISTROS A COMPLETAR ##
  X0 <- tibble(periodo_mps = t0:(t0+T)-1),
    demanda = 0,
    disponible = S0[1],
    neto = 0,
    periodo_mrp = 0)
  ...
}
```

Dentro de un segundo bucle, el cual simula el avance de los períodos del MPS (t), se realizó la explosión de cada artículo. Comenzando por el producto final, se generó el valor para la demanda (Q_0) del período t y el valor del *lead time* (L_0) correspondiente a ese mismo período. A partir de estas cantidades se calcularon los requerimientos netos y los períodos de planificación de X_0 (almacenados en X0).

Para evitar trabajar con cantidades de artículos negativos (**demanda**), se incorporó una línea adicional en el código que trunca las colas de las distribuciones de la demanda: si el valor generado para esta variable es menor a cero, entonces se lo reemplaza por un cero.

```

for (t in 1:T) {
  ## CONJUNTO MANIJA SUPERIOR (13122) ##
  Q0 <- rnorm(n = 1, mean = 20, sd = 5)
  L0 <- rexp(n = 1, rate = 1/2)
  disp_aux <- X0$disponible[t]
  X0$demanda[t] <- if_else(Q0 >= 0, Q0, 0)
  X0$disponible[t:T] <- max(disp_aux-Q0, 0)
  X0$neto[t] <- if_else(disp_aux-Q0 < 0, -(disp_aux-Q0), 0)
  X0$periodo_mrp[t] <- X0$periodo_mps[t]-L0
  ...
}

```

Este mismo procedimiento se repitió para todos los demás artículos, descendiendo nivel por nivel en la estructura de producto. Para los hijos de X_0 :

1. los requerimientos netos se calcularon a partir de las órdenes planificadas de X_0 , es decir, en base a la demanda (Q_0);
2. los períodos de planificación se obtuvieron tomando el período del producto final y restando el *lead time* que correspondía en cada caso.

Por ejemplo, para X_2 se tiene el siguiente fragmento de código:

```

## CLAVOS (082) ##
L2 <- rexp(n = 1, rate = 1/2)
disp_aux <- X2$disponible[t]
X2$bruto[t] <- X0$neto[t]*2
X2$disponible[t:T] <- max(disp_aux-X2$bruto[t], 0)
X2$neto[t] <- if_else(disp_aux-X2$bruto[t] < 0, -(disp_aux-X2$bruto[t]), 0)
X2$periodo_mrp[t] <- X0$periodo_mrp[t]-L2

```

Una vez generados los registros para todos los artículos, se almacenaron en los *data.frames* creados durante la inicialización de las variables ($X_0_completo$ a $X_5_completo$) y se eliminó el primer registro de cada estructura, ya que solo contenía valores nulos. En la Tabla B.2 y la Figura B.2 se muestran las frecuencias relativas de los períodos transformados para los primeros 15 valores de p a partir de las muestras simuladas.

Tabla B.2: Frecuencias relativas de los períodos transformados P_j^* para las muestras simuladas.

t	$f_{P_0^*}(p)$	$f_{P_1^*}(p)$	$f_{P_2^*}(p)$	$f_{P_3^*}(p)$	$f_{P_4^*}(p)$	$f_{P_5^*}(p)$
1	0,389	0,084	0,151	0,092	0,024	0,011
2	0,252	0,184	0,262	0,183	0,097	0,050
3	0,146	0,189	0,215	0,182	0,166	0,105
4	0,086	0,146	0,134	0,150	0,146	0,118
5	0,052	0,115	0,096	0,105	0,150	0,115
6	0,032	0,091	0,059	0,089	0,117	0,100
7	0,010	0,066	0,026	0,074	0,085	0,097
8	0,008	0,034	0,019	0,042	0,076	0,082
9	0,010	0,022	0,010	0,015	0,046	0,074
10	0,005	0,020	0,011	0,018	0,020	0,047
11	0,002	0,016	0,005	0,014	0,020	0,053
12	0,003	0,012	0,001	0,011	0,017	0,033
13	0,002	0,007	0,004	0,007	0,011	0,024
14	0,000	0,002	0,004	0,008	0,006	0,023
15	0,000	0,000	0,000	0,004	0,009	0,019

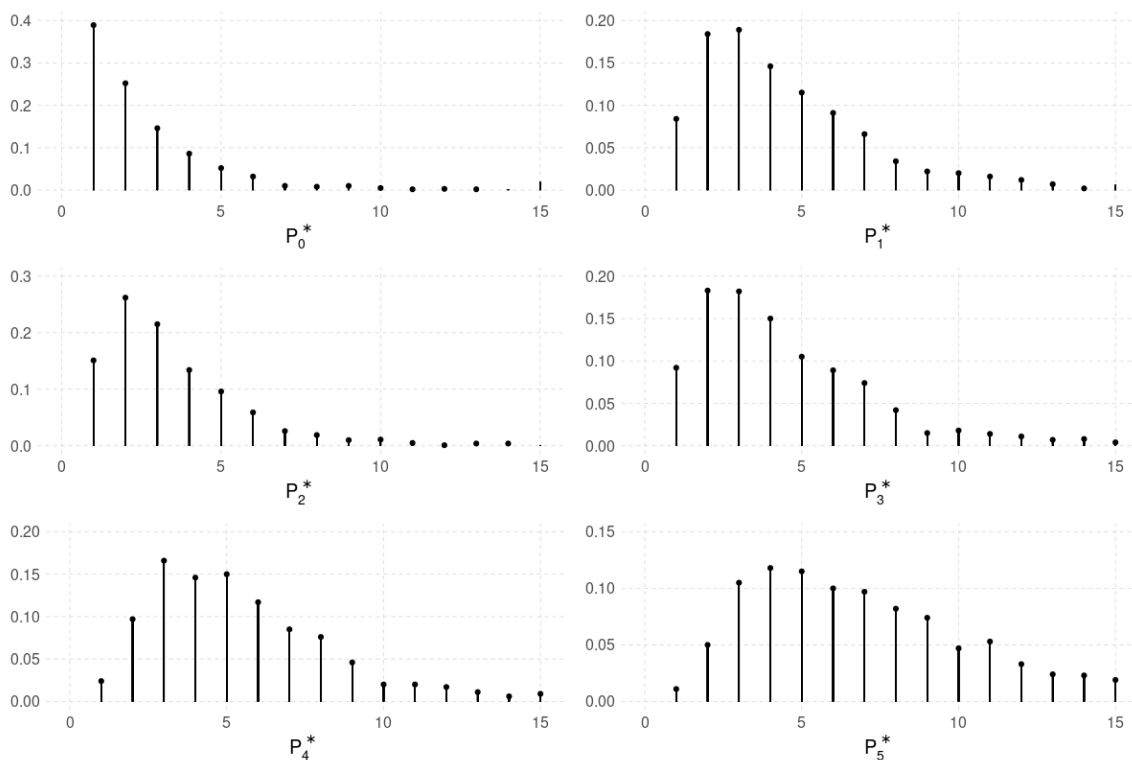


Figura B.2: Frecuencias relativas de los períodos transformados P_j^* para las muestras simuladas.