TIRADA APARTE

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPO LEVI

AÑO TERCERO - FASC. 1

ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1943

SOBRE LA RESOLUCION APROXIMADA DE ECUACIONES TRASCENDENTES REPRESENTADAS POR DESARROLLOS DE TAYLOR

1. — La Nota presente deriva su oportunidad del hecho que no sólo las funciones representadas por desarrollos de TAYLOR o series de potencias o funciones analíticas (términos todos esencialmente equivalentes) constituyen una clase de la máxima importancia teórica y puede decirse la más estudiada, sino también que son las que más frecuentemente se presentan en las aplicaciones, sea porque en primera aproximación cualquier función experimental encuentra su representación adecuada en forma de esos desarrollos, sea porque a esas funciones llevan directamente la forma en que están expresadas las leyes físicas y la necesidad de referirse a funciones conocidas y tabuladas. Se sigue de allí que los propios libros que se proponen ex profeso orientar a los técnicos hacia la aplicación del cálculo matemático (¹), dan a menudo fundamental categoría al problema enunciado en el título. Débese notar que el problema está naturalmente resuelto por las reglas generales de cálculo de las soluciones de ecuaciones representadas por funciones continuas, o por funciones derivables de las cuales nos ocupamos en un fascículo anterior de Mathematicae Notae (²); sin embargo es también natural pensar que, al particularizar el problema, otros métodos posiblemente más propios o más rápidos deban presentarse, al mismo modo como ocurre para el caso de las ecuaciones algebraicas. Es

---

(¹) Véase, por ejemplo, KARMAN y BIOT — *Mathematical Methods in Engineering* (McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1940); WHITTAKER y ROBINSON — *The Calculus of Observations* (Blakie and Son, London a. Glasgow, 3 ed., 1940).

A estos libros nos referiremos particularmente en las citaciones siguientes.

(²) B. LEVI. — *La aproximación como método de demostración y de cálculo.* Math. Notae. Año primero, fasc. 2 (1941).

precisamente el pensamiento que evidentemente se transparenta en los libros citados; pero propiamente esa comparación puede considerarse como muy significativa, porque precisamente en el caso de las ecuaciones algebraicas puede observarse que, mientras los métodos propuestos para el cálculo aproximado de las raíces son muchísimos (y aun de verdadera trascendencia teórica), en la mayoría de los casos lo más práctico es todavía referirse a los aludidos métodos generales; y la conclusión no resulta muy diferente en el caso de las ecuaciones trascendentes.

En lo que sigue presentamos un estudio comparativo de los distintos métodos [1].

2. — Empezaremos con la aplicación de los métodos generales explicados en el artículo citado a un ejemplo bastante clásico. Siendo $J_0(x)$ la conocida función de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 . 2!^2} - \frac{x^6}{2^8 . 3!^2} + \dots ;$$

queremos determinar la raíz real y positiva, más próxima a $x = 0$ de la ecuación

$$J_0(x) = 0.$$

(Por cuanto la serie procede según las potencias pares de x, no interesan raíces negativas, que son las simétricas respecto del 0 de las positivas). Tendremos una pequeña ventaja formal tomando por incógnita

$$z = \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

la ecuación resultando entonces

$$f(z) = 1 - z + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^2 . 3^2} + \frac{z^4}{2^2 . 3^2 . 4^2} - \dots = 0. \quad [1]$$

(1) Siendo muy diferente la preparación matemática de nuestros lectores, creemos conveniente advertir que algunas eventuales dificultades teóricas no deben desalentar para proseguir la lectura aprovechando otros detalles más elementales y prácticos.

Se tiene

$$f'(z) = -1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{144} - \dots,$$

$$f''(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{48} - \dots.$$

Se nota inmediatamente que para $z = 0$ estas derivadas son respectivamente negativa y positiva y quedan tales por lo menos en todo el intervalo $0 \,\bar{}\, 2$ (y más allá, pero no va a interesarnos); se sigue que en este intervalo $f(z)$ es decreciente y $f'(z)$ creciente y por lo tanto decreciente su valor absoluto.

Se calcula sin dificultad

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 1 - 2 + 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{36} - \dots < 0 ;$$

concluímos que la ecuación $f(z) = 0$ tiene una (sola) raíz en el intervalo $0 \,\bar{}\, 2$, que es la que se propone calcular.

Para

$$z = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{36} + \dots > \frac{2}{9}$$

$$f'(1) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots > -\frac{7}{12} ;$$

por tanto en el intervalo considerado $|f'(1)| < \frac{7}{12}$ y un nuevo valor aproximado de la solución, pero todavía a la izquierda del verdadero, será

$$z_1 = 1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{12}{7} = 1 + \frac{8}{21} = 1{,}\overline{380952}\,.$$

Hemos calculado este número con muchas cifras porque resultaba cómodo y por tratarse de un decimal periódico; para seguir en el cálculo no tiene interés determinar las primeras aproximaciones con más de dos o tres cifras decimales; tomaremos luego como primera aproximación (1)

$$z_1 = 1{,}381\,;$$

resulta

$$0{,}02266 < f(z_1) < 0{,}02897$$

$$|\,f'(z_1)\,| < 0{,}451,$$

de donde se concluye que otro valor aproximado a la izquierda de la raíz buscada es

$$z_2 = z_1 + \frac{0{,}02266}{0{,}451} = 1{,}4302\,.$$

Luego

$$0{,}0059 < f(z_2) < 0{,}0063$$

$$|\,f'(z_2)\,| < 0{,}4361$$

de donde se obtiene una nueva aproximación:

$$z_3 = z_2 + \frac{0{,}0059}{0{,}4361} = 1{,}4437\,.$$

Se tiene luego

$$0{,}0008 < f(z_3) < 0{,}0013\,;$$

para calcular una nueva aproximación, no vale la pena amejorar la evaluación de $|\,f'\,|$ que, por lo visto, será ciertamente menor de la anterior (2); tendremos luego

$$z_4 = z_3 + \frac{0{,}0008}{0{,}436} = 1{,}4455.$$

(1) Hemos despreciado escribir por extenso cálculos numéricos elementales; el lector hará cosa útil en realizarlos por lo menos parcialmente. Todas las acotaciones siguientes se obtienen sustituyendo simplemente los valores considerados de z en las series correspondientes y teniendo presente la regla que *la suma de una serie de términos de signos alternados, desde el momento en que los valores absolutos de los términos sucesivos sean decrecientes, está comprendida entre dos sumas parciales* (sumas reducidas, segmentos de la serie) *sucesivas.*

(2) Cfr. Math. Notae, Año I, l. c.

Para juzgar de la aproximación obtenida puede notarse que $f(z_4)$ resulta comprendida entre 0,0001 y 0,0006. Un criterio mejor, porque establece un límite para el propio error de la raíz z_4, se obtiene observando que, en todo el intervalo $0 \frown 2$,

$$|f'(z)| > |f'(2)| > \frac{5}{18},$$

de donde resulta que el error de z_4 no puede ser mayor que

$$0{,}0006 : \frac{5}{18} = \sim 0{,}0022.$$

Una comprobación la tenemos en el hecho que la función $J_0(x)$, por su uso en aplicaciones numéricas, está tabulada. Al valor $z = 1{,}4455$ le corresponde

$$x = 2\sqrt{1{,}4455} = 2{,}4045\,;$$

en las tablas (¹) encontramos los valores

$$J_0\,(2{,}40) = 0{,}002508 \quad , \quad J_0\,(2{,}41) = -\,0{,}002683$$

lo que confirma que el resultado obtenido es efectivamente bueno.

El método nos permite determinar, después de esta primera raíz, otras sucesivas; bastará por ej. observar que, por el teorema de Rolle, si una existe, debe ser mayor que la primera raíz de $f'(z)$; ya hemos visto que ésta será ciertamente > 2, y se ve fácilmente que es también > 3. Podrá luego empezarse con aplicar el procedimiento anterior para buscar la raíz más próxima a la derecha de $z = 3$. De las tablas citadas se deduce que esta segunda raíz existe y vale cerca de 7,6 ($x = 5{,}52$). No creemos de interés detenernos aquí sobre este detalle que puede estudiar el lector como ejercicio, y que encontraremos nuevamente en el nº 13.

3. — Uno de los métodos que se proponen a menudo para encontrar soluciones de ecuaciones expresadas por series de potencias se apoya esencialmente en admitir que, por la misma razón que para

(¹) E. Jahnke u. F. Emde. — *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (Leipzig u. Berlin, 1923), p. 112 (existe edición más reciente).

el cálculo aproximado de una serie de potencias uno puede contentarse con el polinomio que se obtiene despreciando los términos después de un cierto grado, igualmente pueda sustituirse a la ecuación trascendente la algebraica resultante de igualar a 0 tal polinomio.

Para mostrar que la ilación, en su forma tan rudimentaria, no es atendible, basta recordar que hay ecuaciones trascendentes sin raíces (tal como $e^x = 0$) mientras cualquier ecuación algebraica que se piense sustituírsele las tendrá. La ecuación

$$1 - z + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^2 \,.\, 3^2} = 0$$

tiene en efecto por raíz aproximadamente 1,42, poco diferente de la raíz 1,445, pero la ecuación

$$1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2 \,.\, 3} = 0$$

que se obtiene análogamente considerando los primeros términos de $e^{-x} = 0$, y que además tiene una raíz muy próxima a la anterior ($z = 1{,}59$) llevaría a evaluar con aproximación una raíz que sabemos no existir.

Para explicar la paradoja demostraremos el teorema siguiente: *Cada solución de una ecuación trascendente cuyo primer miembro es una serie de Taylor es límite de una sucesión de raíces de los polinomios aproximantes constituídos por los grupos de primeros términos de la serie.*

Recíprocamente *si una sucesión de raíces de esos polinomios aproximantes tiene límite dentro del dominio de convergencia de la serie, este límite es solución de la ecuación trascendente.*

Pero en cuanto una sucesión de esas raíces no tenga límite o lo tenga fuera del dominio de convergencia de la serie, ellas dejan de representar cualquier cosa con respecto al problema actual.

Lo más inmediato es demostrar la segunda parte (recíproca) de la proposición enunciada. Llamemos en efecto $P_n(x)$ al polinomio de grado n formado por los primeros $n + 1$ términos de la serie $f(x)$ y sea

$$x_1 \, x_2 \ldots \quad , \quad \text{lím}\, x_n = x_0$$

una sucesión tal que $P_n(x_n) = 0$ y x_0 sea interior al círculo de convergencia de $f(x)$. Sea $|x_0| < r < R$, donde R es el radio de este círculo; existe entonces un N_1 tal que, para todos los $n > N_1$ los puntos x_n están dentro del círculo de radio r. Por otra parte se sabe que, dentro de este círculo, los valores de los polinomios P_n tienden uniformemente a $f(x)$, es decir, que, fijado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, existe un N_2 tal que, para cualquier $n > N_2$ y para cualquier x interior a dicho círculo,

$$| P_n(x) - f(x) | < \varepsilon .$$

Se sigue que, para n mayor que N_1 y N_2,

$$| f(x_n) | = | P_n(x_n) - f(x_n) | < \varepsilon.$$

Dando a ε una sucesión de valores tendiendo a 0, se concluye que, tendiendo n a ∞ la sucesión de los valores $| f(x_n) |$ tiende a 0. Se tiene luego

$$\text{lím}\, x_n = x_0 \ , \ \text{lím}\, | f(x_n) | = 0$$

y por tanto, por la continuidad de $f(x)$,

$$f(x_0) = 0 .$$

Para demostrar la primera parte del teorema, hagamos las observaciones siguientes: se sabe que los puntos que son ceros para una función analítica son aislados; puntualicemos más; sea $f(x_0) = 0$ y consideremos el desarrollo de TAYLOR de $f(x)$ alrededor del punto x_0

$$f(x) = (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2}\,(x - x_0)^2 f''(x_0) + \ldots \ ;$$

escribiendo sólo los términos de este desarrollo que existen efectivamente ($\neq 0$) sea precisamente

$$f(x) = (x - x_0)^p\, [a + (x - x_0)^q\, g(x - x_0)] \ ;$$

$g(x - x_0)$ es una serie de potencias de $(x - x_0)$, convergente dentro de cierto círculo, e indicando con r un número positivo cualquiera menor que el radio de este círculo, podemos determinar un L tal que, para

$$| x - x_0 | < r \ , \ | g(x - x_0) | < L.$$

Si suponemos además

$$| x - x_0 |^q < \frac{| a |}{2 L},$$

será

$$| f(x) | > | x - x_0 |^p . \frac{| a |}{2} ;$$

se sigue que, si indicamos con r_1 un número positivo menor que los dos números r y $(| a | : 2 L)^{1:q}$, para

$$0 < | x - x_0 | \leq r_1 \quad , \quad | f(x) | > 0 ;$$

y, más precisamente, para

$$| x - x_0 | = r_1 \quad , \quad | f(x) | > r_1^p \frac{| a |}{2} .$$

Por cuanto x_0 es interior al círculo de convergencia de $f(x)$, puede elegirse r_1 menor que la distancia de x_0 a la circunferencia de este círculo y por lo tanto, como se dijo en la demostración anterior, fijado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe un N tal que para todos los x considerados y $n > N$

$$| f(x) - P_n(x) | < \varepsilon.$$

Elijamos

$$\varepsilon < \frac{r_1^p \, | a |}{4} ;$$

tendremos $| P_n(x_0) | < \frac{r_1^p \, |a|}{4}$; y para $|x - x_0| = r_1$, $|P_n(x)| > \frac{r_1^p \, |a|}{4}$.

Consideremos ahora los valores de uno cualquiera de los polinomios $P_n(x)$ dentro del círculo con centro x_0 y radio r_1; se sabe que una función analítica, en particular un polinomio, no alcanza en el interior de un dominio un valor mínimo para su módulo, si no es que este mínimo sea 0. En el punto x_0 el módulo de $P_n(x)$ es menor que el módulo en cualquier punto de la circunferencia de radio r_1; se sigue que dentro de esta circunferencia debe existir un punto x_n donde $| P_n(x_n) |$ es mínimo y por tanto $P_n(x_n) = 0$.

Notamos ahora que r_1 puede elegirse arbitrariamente pequeño; esto lleva simplemente a tener que disminuir el valor de ε y por lo tanto elevar el valor de n. El punto x_n, cuya distancia de x_0 es $< r_1$, se aproxima por tanto a x_0; es decir que, como se quería demostrar, el punto x_0, cero de la función $f(x)$, es un punto límite de una sucesión de ceros de los polinomios P_n.

La demostración establece más precisamente que, *fijado arbitrariamente un* δ, *existe un* N *tal que todos los* $P_n(x)$ *para* $n > N$ *tienen una raíz cuya distancia de* x_0 *es menor que* δ.

4. — He aquí algunos ejemplos que aclaran el comportamiento de las raíces de los segmentos de una serie de potencias en cuanto puedan no tener por límites puntos ceros de la función trascendente que ella representa:

1° El segmento de grado m impar [1] de la función

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots$$

puede escribirse

$$P_m = (1 - x) + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)\,!}\left(1 - \frac{x}{m}\right);$$

se ve entonces en seguida que

$$P_m(0) = 1 \qquad P_m(m) < 0\,;$$

luego existe por lo menos una raíz en el intervalo $0 \frown m$; por otra parte existe una sola raíz real porque, una vez pasado a valores negativos, al crecer x el polinomio queda negativo con valor absoluto creciente.

Si $P_m(x) > 0$ (y por tanto $x < m$), también $P_{m+2}(x) > 0$, porque la diferencia

$$P_{m+2} - P_m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,!}\left(1 - \frac{x}{m+2}\right)$$

es en este caso ciertamente positiva; se sigue que el valor de la única raíz positiva de $P_m(x)$ crece con m.

---

(1) Elegimos los segmentos de grado impar para tratar con raíces reales, lo que hace más cómodo el razonamiento. El lector puede estudiar por ejercicio otros casos. Un estudio muy detenido y de curiosos resultados sobre las raíces de los segmentos de la serie e^x (que evidentemente no difiere de e^{-x} sino por un cambio de signo) ha sido hecho por el Sr. Jean Dieudonné. — *Sur les zéros des polynomes-sections de* e^x. Bulletin des sciences mathématiques, 1935. (2eme série. T. 59, p. 333).

Finalmente, por grande que se tome x, $e^{-x} > 0$; por lo tanto para cada valor positivo de x existen valores de m tan grandes que $P_m(x) > 0$; se sigue que dicha raíz tiende a ∞ con m.

El teorema del n. anterior implica en efecto que los módulos de las raíces de los segmentos de e^{-x} deben tender todos hacia ∞ al crecer el grado del segmento, porque en la hipótesis opuesta habría un punto límite de estas raíces al finito, y por ser ∞ el radio de convergencia de la serie, este límite sería cero de e^{-x}, lo que sabemos imposible.

2° Consideremos igualmente los segmentos de grado m impar de la serie

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots ;$$

ellos se escriben

$$P_m(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{3}\left(1 - \frac{3}{4}x\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{x^{m-1}}{m}\left(1 - \frac{m}{m+1}x\right)$$

Se repiten en este caso las observaciones anteriores en cuanto es siempre $P_m(0) = 1 > 0$ y cada polinomio $P_m(x)$, al crecer x, pasa de positivo a negativo para permanecer negativo después; por lo tanto hay una raíz positiva. Más precisamente todos los paréntesis son negativos para $x > 2$, y son todos positivos para $x \leq 1$; se sigue que todas estas raíces están comprendidas en el intervalo $1^{-}2$. Finalmente se nota que la igualdad $P_m(x) = 0$ sólo se realiza por ser cierto grupo de los primeros paréntesis positivos y los siguientes negativos. Se sigue que si, para $x = x_0$, $P_m(x_0) = 0$, será siempre $P_{m+l}(x_0) < 0$ para $l > 0$, es decir que la raíz real única de $P_m(x)$ decrece al crecer m. Dichas raíces tienen, pues, un límite, que es límite inferior, ≥ 1; pero no puede este límite ser > 1 porque para cualquier $x_0 > 1$ existe un m tal que es

$$\frac{m\,x_0}{m+1} - 1 = \alpha > 0;$$

en el cálculo de $P_{m+l}(x_0)$ se presentan $\frac{l}{2}$ términos negativos cuya suma, en valor absoluto, es

$$\geq \alpha \sum_{i=0}^{l:2} \frac{x_0^{m+2i-1}}{m+2i} ;$$

la serie que se obtiene haciendo $l = \infty$ diverge más que la serie armónica; se sigue que, para l bastante grande, la suma de esos términos negativos supera en valor absoluto la suma de los términos positivos que, por lo visto, queda constante.

Se concluye que la sucesión de los ceros considerados de los polinomios $P_m(x)$ tiene límite 1; pero éste no es cero de la serie (que sabemos no tener) por ser punto del círculo de convergencia.

3° Consideremos finalmente la serie [1]

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Los segmentos de la serie

$$P_m(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^m$$

tienen por ceros las raíces complejas de grado $m + 1$ de la unidad; por lo tanto estos ceros están distribuídos sobre la circunferencia de convergencia de la serie y, creciendo m, tienden a llenar esta circunferencia en el sentido que cualquier punto de ésta es punto límite de las raíces de los $P_m(x)$; sin embargo ninguno de estos puntos es cero para la función $\dfrac{1}{1-x}$. Lo interesante de este ejemplo, además de su sencillez, es que en todos los puntos de la circunferencia de convergencia la serie diverge, pero, salvo para $x = 1$, la función tiene valor finito; pero dentro de un entorno prefijado de cada uno de esos puntos se encuentran raíces de todos los P_m, con tal solamente que m sea bastante grande, exactamente como ocurre, por el teorema del n. 3, para los puntos (interiores al círculo de convergencia) que son ceros de la serie.

En los párrafos siguientes vamos a enfrentar el problema de la determinación directa de las soluciones de una ecuación trascendente o por lo menos de sus módulos de manera que quedará resuelto también el que, después de lo dicho, se plantea, es decir, si dentro de determinado dominio existen soluciones.

---

(1) Este ejemplo, que, como se ve en el texto, es particularmente elegante y presenta particularidades de interés, me fué señalado por el Dr. L. Santaló.

5. — Un punto de vista que se ha presentado ya muchas veces a los analistas es el siguiente:

Se puede evidentemente suponer que la función $f(x)$ no sea 0 para $x = 0$, porque este hecho está caracterizado por existir un factor de la forma x^m común a todos los términos de la serie de TAYLOR. Dividiendo por este factor y dividiendo si es necesario también por el primer coeficiente, la función $f(x)$ puede escribirse

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad [2]$$

Se determina entonces fácilmente un desarrollo de la forma

$$g(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \qquad [3]$$

para la función

$$g(x) = 1 : f(x)$$

con el método de coeficientes indeterminados; en efecto se tiene

$$\begin{aligned} f(x)\, g(x) = 1 &+ (a_1 + b_1)\, x + (a_2 + a_1 b_1 + b_2)\, x^2 + \dots \\ &+ (a_n + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + b_n)\, x^n + \dots, \end{aligned}$$

de donde, por ser $f(x)\, g(x) = 1$, todos los coeficientes salvo el primer término que ya es 1, deben ser 0; de allí se calculan los b_i con método recurrente

$$\begin{aligned} b_1 &= - a_1 \\ b_2 &= - a_2 - a_1 b_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad [4] \\ b_n &= - a_n - a_{n-1} b_1 - a_{n-2} b_2 - \dots - a_1 b_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Dentro del círculo de convergencia de $f(x)$ la función $g(x)$ adquiere valores finitos y se comporta regularmente, para todos los valores de x para los cuales $f(x) \neq 0$; se concluye de aquí fácilmente que el círculo de convergencia de $g(x)$ será menor que el de $f(x)$ sólo por cuanto existen dentro de este círculo puntos que son ceros para $f(x)$ y en este caso el radio del círculo de convergencia de $g(x)$ es igual al mínimo módulo de esos ceros. Un conocido teorema de CAUCHY-HADAMARD nos permite determinar ese radio de convergencia y por lo tanto dicho mínimo módulo: *si la ecuación*

$f(x) = 0$ tiene raíces dentro del círculo de convergencia de la serie [2], *el mínimo módulo de esas raíces está dado por*

$$1 : \text{lím máx} \left| \sqrt[n]{b_n} \right| \qquad [5]$$

donde las b_n tienen la expresión [4] (¹).

Aplicando, como ejemplo, estas conclusiones a la ecuación [1], resulta

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$b_3 = \frac{1}{4 \,.\, 9} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{36}$$

$$b_4 = \frac{1}{36}\left(-\frac{1}{16} + 1 - \frac{27}{4} + 19\right) = \frac{211}{36 \,.\, 16}$$

$$b_5 = \frac{3649}{14400} \quad , \quad b_6 = \frac{90849}{2^6 \,.\, 8100}$$

(¹) Estas consideraciones y otras que haremos a continuación, o muy estrechamente vinculadas a ellas, se encuentran en la memoria de J. HADAMARD: *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (Journal de Mathématiques, 1892); esta memoria tiene una trascendencia científica mucho mayor que el argumento que estamos tratando; de cualquier manera HADAMARD cita que, para lo que se refiere a la determinación de las raíces de una ecuación, consideraciones equivalentes ya se encuentran en una fórmula de BERNOULLI que enseña a aproximar la raíz de mínimo módulo por medio de la razón entre los coeficientes sucesivos de la derivada logarítmica de $f(x)$.

En muchos libros, en la fórmula [5], en lugar de lím máx se escribe lím sup; no hay diferencia de sustancia y sólo de nombre; sin embargo, puesto que un nombre hay que elegir, y sería deseable que fuese uniforme para todos, creemos conveniente una breve divagación histórica.

El término lím máx (límite máximo) traduce lo más perfectamente y lo más brevemente posible el término usado por CAUCHY al cual se debe la primera enunciación del teorema y que dijo « *la plus grande des limites* »; por otro lado el término « límite superior » es debido al mismo HADAMARD acompañándolo del comentario siguiente: « On pourraît être tenté de prendre les mots *limite superieure* dans le sens qui leur est attribué en d'autres occasions (notamment quand on traite des fonctions d'une variable réelle) et qui est un peu différent de celui-ci... Nous serons donc obligé, lorsqu'on aurait a craindre une confusion, d'employer la locution *limite superieure pour m infini*, qui ne peut prêter à aucune confusion ».

Es evidente la ventaja de una expresión que no deja ambiguidades, siendo en el mismo tiempo más breve y sin la introducción de la variable m que no tiene oficio.

Recordamos que el lím máx se representa por muchos también con $\overline{\text{lím}}$ y l.i.m..

Luego

$$\frac{1}{b_1} = 1 \quad , \quad \sqrt{\frac{1}{b_2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{b_3}} = \sqrt[3]{\frac{36}{19}} = 1{,}2374$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{b_4}} = 2\sqrt[4]{\frac{36}{211}} = 1{,}2854$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{b_5}} = 2\sqrt[5]{\frac{450}{3649}} = 1{,}3160$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{b_6}} = 2\sqrt[6]{\frac{8100}{90849}} = 1{,}33677$$

....

Las diferencias entre términos sucesivos de esta sucesión son

$$0{,}155 \;,\; 0{,}082 \;,\; 0{,}048 \;,\; 0{,}031 \;,\; 0{,}021, \ldots$$

cuyo decrecimiento resulta lo bastante claro para argumentar la convergencia; sin embargo ella es muy poco rápida, lo cual no permite un juicio muy satisfactorio sobre el valor presumible de este límite; si por ej. nos fijamos en el hecho de que estas diferencias decrecen menos rápidamente que una progresión geométrica podríamos estar autorizados a suponer que una estimación por defecto de este límite pueda obtenerse al admitir que prosiga el decrecimiento en la razón $\frac{2}{3}$ que existe entre los dos últimos términos; obtendríamos así una evaluación provisoria

$$> 1{,}338 + \frac{2}{3}\,\frac{0{,}021}{1 - \frac{2}{3}} = 1{,}338 + 0{,}021 \times 2 = 1{,}38$$

que, además de ser un poco arbitraria, los resultados anteriores nos muestran ser todavía muy poco buena. Concluyendo, contra una posible ventaja con respecto al desarrollo automático de los cálculos, apoyados a una regla expresada por fórmulas en las cuales nada más se exige del raciocinio del calculador, se nota que los cálculos tales resultan posiblemente notablemente más largos que con la aplicación del directo razonamiento funcional como en el n. 2.

Débese recordar todavía que el método sólo proporciona el módulo de la raíz buscada (o de las raíces, en el caso de ser varias de mínimo módulo); el inconveniente es evidentemente nulo o casi en el caso, muy común, de interesar sólo raíces positivas o, de cualquier modo, reales. En casos más generales, la evaluación del argumento podrá hacerse fácilmente, por ej. aplicando el teorema del n. 3, en cuanto el resultado obtenido podrá servir para asegurar de la existencia de la raíz y de la posibilidad de aproximarla por medio de raíces de polinomios aproximantes de la función.

6. — Un perfeccionamiento muy importante se consigue en el caso de ser única la raíz de módulo mínimo por medio del teorema siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación [2] *tenga precisamente una raíz de módulo mínimo se expresa por existir*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

tal que, para cierto número positivo $k < 1$, a partir de cierto valor del índice n en adelante, se realice la relación

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| < k^n \text{ [1]}$$

Este límite es entonces la propia raíz, y su módulo es menor que el radio de convergencia de la función $f(x)$.

Empecemos con demostrar que la condición enunciada es necesaria. Supongamos, pues, que la ecuación [2] tenga una sola raíz de módulo mínimo y sea α; será

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x - \alpha} g_1(x) \, ,$$

y la serie $g_1(x)$ tendrá radio de convergencia $\rho > |\alpha|$.

[1] Ver, también para bibliografía, la citada memoria de HADAMARD. HADAMARD generaliza este criterio al caso de varias raíces de módulo mínimo, para el cual nos remitimos al l. c.

Pongamos

$$g_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{x - \alpha} = -\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\alpha} x + \frac{1}{\alpha^2} x^2 + \ldots\right);$$

las b_n de la fórmula [3] serán los coeficientes de la serie producto de las dos últimas; por la naturaleza del teorema que queremos demostrar nada se cambia al multiplicar todos estos coeficientes por un mismo factor constante; podemos por tanto en el segundo miembro de la última igualdad despreciar el factor $-1 : \alpha$. Calculando luego el producto según la regla de Cauchy, resulta

$$b_{n+1} = \frac{c_0}{\alpha^{n+1}} + \frac{c_1}{\alpha^n} + \ldots + \frac{c_n}{\alpha} + c_{n+1}$$

$$= \frac{1}{\alpha} b_n + c_{n+1}. \qquad [5]$$

Por la hipótesis tenemos

$$\text{lím máx} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\rho};$$

por lo tanto, si con λ indicamos un número cualquiera tal que

$$\frac{|\alpha|}{\rho} < \lambda < 1, \qquad [6]$$

existe un número natural N tal que, para todos los $n > N$,

$$|c_n| < \left(\frac{\lambda}{|\alpha|}\right)^n;$$

por otra parte se tiene

$$\text{lím máx} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{|\alpha|},$$

y por tanto, indicando con μ un número cualquiera tal que

$$\lambda < \mu < 1, \qquad [7]$$

puede todavía suponerse N bastante grande que, para $n > N$, sea

$$| b_n | > \left(\frac{\mu}{| \alpha |} \right)^n .$$

Sustituyendo en [5] resulta luego

$$\left| \alpha - \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \left| \alpha \frac{c_{n+1}}{b_{n+1}} \right| < \left| \alpha \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right| = \left| \left(\frac{\lambda \sqrt[n]{\alpha}}{\mu} \right)^n \right| .$$

Se sabe que, para cualquier número fijo α, $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$; luego, por [7] es posible elegir N tan grande que, indicando con k un número cualquiera tal que

$$\frac{\lambda}{\mu} < k < 1 ,$$

sea, para todo $n > N$,

$$\left| \frac{\lambda \sqrt[n]{\alpha}}{\mu} \right| < k ;$$

se sigue, como fué enunciado,

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} - \alpha \right| < k^n \quad , \quad \lim \frac{b_n}{b_{n+1}} = \alpha ; \qquad [8]$$

y también, sucesivamente,

$$| \, | \alpha | - k^n \, | < \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| < | \alpha | + k^n ,$$

$$| \, | \alpha | - k^n \, |^p < \left| \frac{b_n}{b_{n+p}} \right| < (| \alpha | + k^n)^p ,$$

$$\frac{| \, | \alpha | - k^n \, |}{\sqrt[n+p]{| b_n | \, | \, | \alpha | - k^n \, |^n}} < \sqrt[n+p]{\frac{1}{b_{n+p}}} < \frac{| \alpha | + k^n}{\sqrt[n+p]{| b_n | \, (| \alpha | + k^n)^n}} .$$

Por cuanto se pueden hacer tender a ∞ n y p independientemente, la última desigualdad equivale a

$$\lim \sqrt[n]{\left| \frac{1}{b_n} \right|} = \alpha . \qquad [9]$$

Las [6], [7], [8] ponen de relieve que, como indicación genérica, la tendencia al límite debe presumirse tanto más rápida cuanto más la raíz α está alejada en módulo de una raíz próxima o del radio de convergencia.

Para mostrar que, inversamente, si los coeficientes b_n de la serie $g(x)$ realizan un sistema de relaciones de la forma [8], el número α es raíz de la ecuación $f(x) = 0$, única del mismo módulo, bastará demostrar que la serie $f(x) : (x - \alpha)$ no tiene más raíces con módulo $\leq |\alpha|$, es decir

$$g_1(x) = (x - \alpha)\, g(x) = \frac{x - \alpha}{f(x)}$$

tiene radio de convergencia $> |\alpha|$. Efectuando el producto $(x - \alpha) g(x)$ se obtiene en efecto

$$c_n = - \alpha\, b_n + b_{n-1} \;;$$

luego, por la primera [8], desde que n es bastante elevado,

$$|\, c_n \,| < |\, b_n \,|\, k^{n-1} \;,$$

$$\sqrt[n]{\left| \frac{1}{c_n} \right|} > \frac{1}{k} \sqrt[n]{\left| \frac{k}{b_n} \right|} \;;$$

y, por cuanto se sabe que

$$\text{lím} \sqrt[n]{k} = 1 \quad , \quad \text{lím máx} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{b_n} \right|} = |\, \alpha \,| \quad , \quad k < 1 \;,$$

$$\text{lím máx} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{c_n} \right|} > |\, \alpha \,| \,.$$

Si, volviendo al ejemplo del n. 5, formamos los cocientes de las b_n sucesivas calculadas allí, obtenemos

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{3} = 1{,}333 \ldots , \quad \frac{b_2}{b_3} = \frac{27}{19} = 1{,}42105 \,, \quad \frac{b_3}{b_4} = \frac{16.19}{211} = 1{,}440758$$

$$\frac{b_4}{b_5} = \frac{5275}{3649} = 1{,}445601 \,, \quad \frac{b_5}{b_5} = \frac{36.3649}{90849} = 1{,}44596 \,.$$

Comparando con los resultados del n. 2 y del mismo n. 4, se nota que la convergencia es ahora mucho más rápida que con el método de las raíces, lo que, en cierta medida, podía ser previsto considerando la anterior demostración de la fórmula [9].

Debe recordarse, sin ambargo, que el método de los cocientes, por lo que se ha demostrado, deja de dar resultados satisfactorios cuando la ecuación tenga varias soluciones con el mismo módulo o tan sólo con módulos muy próximos, mientras que el método de las raíces permite aproximar el mínimo módulo de las soluciones en todos los casos en que existen.

Para dar un ejemplo, consideremos la ecuación

$$\frac{1 - x^2}{1 + e^x - x^2 e^x} = 0,$$

la cual tiene evidentemente dos raíces $x = \pm 1$ y ningún otra; puede evidentemente efectuarse la división dando al primer miembro la forma de serie de potencias; pero no es necesario para nuestro objeto. La función recíproca es

$$g(x) = \frac{1 + e^x - x^2 e^x}{1 - x^2} = e^x + \frac{1}{1 - x^2} =$$

$$= 2 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{25}{24} x^4 + \ldots$$

Las razones entre las b_n sucesivas son

$$2 \, , \; \frac{2}{3} \, , \; 9 \, , \; \frac{4}{25} \, , \; 125 \, , \ldots$$

con divergencia pronunciada; por otro lado se ve fácilmente que

$$\text{lím} \sqrt[2n]{b_{2n}} = 1 \quad , \quad \text{lím} \sqrt[2n+1]{b_{2n+1}} = 0 \; ;$$

luego

$$\text{lím máx} \sqrt[n]{b_n} = 1$$

que es el módulo de las dos raíces.

7. — Whittaker (1) ha hecho la siguiente observación notable por su elegancia.

---

(1) Procedings Mathematical Society Edimburg, 36 (1918). Ver Whittaker y Robinson, l. c., p. 120.

Notemos primero que

$$\text{lím}\ \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_1}{b_2} - \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{b_2}{b_3}\right) - \left(\frac{b_2}{b_3} - \frac{b_3}{b_4}\right) - \ldots\ ; \qquad [10]$$

cada paréntesis del segundo miembro se escribe

$$\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} - \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{1}{b_{n-1}\, b_n} \begin{vmatrix} b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} .$$

Por otra parte, si, en lugar de calcular las b_n por recurrencia como están dadas por el sistema [4], resolvemos este sistema con el método de los determinantes, obtenemos:

$$b_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_1 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . & a_1 \end{vmatrix} ; \qquad [11]$$

si en este determinante consideramos el menor complementario del primero o del último elemento, obtenemos, salvo el signo, b_{n-1}, mientras el complemento del elemento a_n vale 1 y el complemento del menor de segundo orden formado por los 4 elementos de los vértices

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

es b_{n-2}; si llamamos por un momento Δ_n al complemento del vértice 0

$$\Delta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 1 & 0 \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ a_2 \end{vmatrix} , \qquad [11']$$

por un conocido teorema tenemos luego

$$\begin{vmatrix} b_{n-1} & \Delta_n \\ 1 & b_{n-1} \end{vmatrix} = b_n\, b_{n-2}$$

de donde

$$-\frac{\Delta_n}{b_n\, b_{n-1}} = \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} - \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

Sustituyendo en [10], resulta, por [11] y [11'], una expresión del valor de la solución α por una serie cuyos té·minos se expresan por cocientes de determinantes que se forman según una ley sencilla, que el lector puede averiguar fácilmente. Sin embargo, desde el punto de vista de los cálculos prácticos, la formación directa de las b_n por las [4] resulta generalmente más rápida que el cálculo de determinantes.

8. — El teorema del n. 3 lleva naturalmente a pensar que para el cálculo de las raíces de una serie de potencias tendrá que poderse aprovechar de un método válido para las ecuaciones algebraicas el cual pudiera aplicarse contemporáneamente a todos los polinomios segmentos de la serie, y que en el mismo tiempo permitiera considerar conjuntamente todas estas raíces y elegir entre ellas las sucesiones que convergen dentro del círculo de convergencia. Características que corresponden en cierta medida a estas exigencias tiene el llamado método de GRAEFFE, que ahora vamos a considerar [1]. En efecto, como se verá a continuación, ese método lleva a calcular los coeficientes de nuevos polinomios (o de nuevas series) — de las cuales se utilizan después cierto número de los primeros — haciendo entrar en cuenta sucesivamente términos más adelantados de la serie propuesta; y esto equivale evidentemente a considerar por un lado, en cada momento del cálculo, sólo un segmento de la serie;

---

[1] El método que se llama de GRAEFFE para el cálculo simultáneo de todas las raíces de una ecuación algebraica fué enunciado a distancia de pocos años parece independientemente por DAUDELIN (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, 1826), LOBACHENSKI (*Algebra*, Kasan, 1834) y GRAEFFE (*Auflösung der höheren numerischen Gleichungen*, Zürich, 1837), el cual último mayormente lo trató en detalles; sucesivamente tuvo profundizaciones y perfeccionamientos por parte de muchos autores. Para ecuaciones cuyo primer miembro es una serie de potencias se encuentra aplicado a veces sin mayor justificación que la señalada de considerar, sin mayor cautela, la ecuación algebraica que se obtiene igualando a 0 un segmento de la serie como una aproximante de la ecuación trascendente propuesta (cfr. por ej.: el tratado de KARMAN y BIOT citado en el n. 1, pág. 303); los ejemplos del n. 4 y los desarrollos que damos a continuación demuestran la necesidad de un análisis más detenido; en el último ejemplo del n. 13 hemos considerado precisamente este caso, poniendo en evidencia un detalle interesante con respecto a las observaciones del texto. Es que, si en el cálculo de la raíz del segmento considerado en lugar de quedarse con la primera aproximación, se hubiera creído ahondar la aproximación con un cálculo más exacto, se habría terminado con alejarse del valor verdadero de la raíz buscada.

pero un segmento que, en cada paso ulterior, va automáticamente extendiéndose.

Recordemos primero el concepto fundamental del método, en su forma clásica, que se refiere únicamente a las ecuaciones algebraicas, sin entrar, sin embargo, en puntualizaciones inútiles para nuestro objeto. Sea $P(x)$ un polinomio de grado m y supongamos que sus raíces puedan distribuirse en grupos tales que las de cada grupo tengan módulos relativamente próximos entre sí, pero los módulos de las raíces de grupos distintos sean entre sí muy distantes. Para fijar las ideas supondremos tratarse de dos grupos; y sean $a_1, a_2, \ldots, a_p$ las raíces de módulo menor y $b_1, b_2, \ldots b_q$ $(p + q = m)$ las de módulo mayor. Si, por razón de la comodidad con respecto a lo que diremos sucesivamente, suponemos escritos los polinomios ordenados según las potencias crecientes de x y con el primer término 1, poniendo

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{a_p}\right) = M(x) = 1 + m_1 x + \ldots + m_p x^q$$

$$\left(1-\frac{x}{b_1}\right)\left(1-\frac{x}{b_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{b_p}\right) = N(x) = 1 + n_1 x + \ldots + n_q x^q$$

tendremos

$$P(x) = M(x)\,N(x) = 1 + (m_1 + n_1)\,x + \ldots +$$
$$+ (m_p + n_1\, m_{p-1} + \ldots)\, x^p + \ldots + m_p\, n_q\, x^q.$$

Por la hipótesis hecha acerca de los módulos de las raíces, los coeficientes n_i $\left(\text{que se expresan como sumas de productos de las } \frac{1}{b_i}\right)$ tienen todos los módulos notablemente menores que $m_p = \dfrac{1}{a_1\, a_2 \ldots a_p}$ (y de los otros coeficientes m_i que no sean eventualmente despreciables en comparación de este m_p). Se sigue que el polinomio formado por los términos de $P(x)$ de grado $\leq p$

$$1 + (m_1 + n_1)\,x + (m_2 + m_1\, n_1 + n_2)\,x^2 + \ldots +$$
$$+ (m_p + n_1\, m_{p-1} + \ldots)\, x^p \qquad [12]$$

tiene coeficientes que difieren muy poco de los coeficientes m_1,

$m_2, \ldots, m_p$ de $M(x)$ y la diferencia resulta despreciable, tanto más cuanto mayor es la diferencia entre los módulos de las a_i y las b_i. Análogamente, considerando el polinomio de grado q que se obtiene dividiendo el grupo de los términos de $P(x)$ de grado $\geq p$ para el término de grado p:

$$1 + \frac{n_1 m_p + n_2 m_{p-1} + \ldots}{m_p + n_1 m_{p-1} + \ldots} x + \ldots + \frac{n_p m_p}{m_p + n_1 m_{p-1} + \ldots} x^q, \quad [13]$$

se nota que sus coeficientes difieren en poco de los de $N(x)$. Las dos ecuaciones obtenidas igualando a 0 los polinomios [12] y [13] proporcionan luego valores aproximados de las raíces a_i y b_i, respectivamente.

Es claro que la observación resulta particularmente interesante en el caso de que las raíces se puedan ordenar según módulos crecientes en modo que cada una tenga módulo notablemente superior al de la precedente, porque en este caso cada grupo se compone de una sola raíz y los pares de términos sucesivos del polinomio $P(x)$ permiten escribir otras tantas ecuaciones lineales cuyas soluciones son los valores aproximados de las distintas raíces; pero, en cuanto se quiera determinar sólo la raíz o las raíces de módulo menor (o mayor), bastará que sea notable la diferencia entre este módulo y los de las demás.

Para realizar esta condición fundamental de que los módulos de las raíces difieran notablemente entre sí, basta notar que si números dados tienen módulos diferentes, la razón entre sus potencias de igual exponente crece muy rápidamente, con crecer este exponente, tendiendo a ∞. Se sigue que, siendo dada una ecuación, con tal solamente que sus raíces sean de módulos diferentes, se obtendrá otra en la cual las razones entre los módulos de las raíces serán tan grandes como se quiera, simplemente con formar la ecuación cuyas raíces son las potencias de orden bastante elevado de las de la ecuación dada. GRAEFFE (y, antes de él, DANDELIN y LOBACHEVSKI) realizan esta operación con la simple observación que, dado un polinomio $P(x)$, el producto $P(x)\, P(-x)$ es un polinomio en x^2, de igual grado; y si en lugar de x^2 se escribe nuevamente x, las raíces del nuevo polinomio son los cuadrados de las de $P(x)$. Repitiendo cuanto sea necesario esta operación se forman luego las ecuaciones cuyas raíces son las potencias de exponentes 2, 2^2, 2^3, $2^4, \ldots$ de las de $P(x)$ y se nota en seguida que a la cuarta operación ya a dos raíces cuya razón fuera 2 corresponden dos cuya razón es $2^{16} > 10^4$.

9. — Para realizar la extensión de estos conceptos al caso de ecuaciones trascendentes, nos conviene modificarlos ligeramente (1).

Empecemos con las consideraciones siguientes:

Sea $f(x)$ una función representada por una serie de potencias, en la cual el primer término (constante) sea 1. Supongamos que su radio de convergencia sea $r > 1$ (no excluímos que pueda ser ∞) y que dentro de un círculo de radio r_1 (con $r_1 < r$) (incluída la circunferencia) $f(x)$ no tenga ceros. Consideremos también la función $\varphi(x) = \log f(x)$; ella será regular dentro y sobre la circunferencia de radio r_1, siendo luego representada por una serie de TAYLOR convergente en un círculo de radio $> r_1$ y tomará en el origen el valor 0.

---

(1) Por cuanto, según lo anteriormente explicado, el concepto director del método se funda esencialmente sobre el anterior conocimiento de la descomposición en factores lineales, parece en efecto que el éxito deba esperarse únicamente para las series a las cuales esta descomposición se aplica, es decir a las series enteras o, más precisamente, a una clase particular de ellas (series de género 0). Con esta limitación el método fué estudiado desde 1910 por E. CARVALLO (*Méthode pratique pour la résolution numerique des équations algébriques ou trascendantes*). En 1913, por sugestión de C. RUNGE, se ocupó del problema general G. POLYA, publicando una nota preliminar de los *Comptes rendus de l'Académie de Sciences*, T. CLIII, París, 1913, y posteriormente una extensa memoria « *Ueber das Graeffesche Verfahren* » (*Sobre el procedimiento de Graeffe*) en la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (T. 63, 1915, p. 275-290). En la introducción de ese trabajo el autor parece señalar el camino en buscar un artificio que permita reducir a aquel caso simple los casos más generales; este artificio se presenta muy claro para cierta clase de series enteras (series de género finito). De este detalle depende probablemente el hecho que en el libro citado de WHITTAKER y ROBINSON (p. 119) se alude a la memoria de POLYA como si el único resultado fuese precisamente sólo esta última extensión. La demostración que sigue fué originada por el hecho que, por efecto de la falta de muchos recursos bibliográficos, el problema general lo creímos nuevo; la memoria citada de POLYA sólo pudimos examinarla cuando esta nota estaba en imprenta. Por la identidad del problema existen analogías entre el camino elegido y algunos detalles de los razonamientos de POLYA; pero existen también diferencias notables por las cuales el procedimiento nuestro resultó en fin más corto y exigiendo un poco menos de conocimientos previos. También el teorema en el cual puede resumirse el resultado de la investigación difiere en detalles. Recordamos todavía, para terminar, que en 1940 A. OSTROWSKI publicó en los *Acta Mathematica* (T. 72) una memoria titulada *Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent*, de la cual, por razón de la guerra, sólo pudo llegar a nuestro conocimiento la primera parte, pero cuyo contenido se aleja de las consideraciones de aquí.

Tratamos de formar sucesivamente las funciones

$$(f(x)\,f(-x))^{\frac{1}{2}}$$

$$(f(x)\,f(-x)\,f(ix)\,f(-ix))^{\frac{1}{4}} \qquad [14]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En lugar de operar sobre las $f(x), f(-x), \ldots$ por multiplicación, podemos actuar por suma sobre los logaritmos formando las funciones

$$\frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x))$$

$$\frac{1}{4}(\varphi(x) + \varphi(-x) + \varphi(ix) + \varphi(-ix)) \qquad [15]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Poniendo $x = \rho e^{i\theta}$, pueden escribirse estas funciones en forma genérica:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=0}^{2^\sigma-1}\varphi\left(\rho\, e^{i\left(\theta+\frac{2\pi\lambda}{2^\sigma}\right)}\right)\frac{2\pi}{2^\sigma}\ ; \qquad [16]$$

al crecer σ indefinidamente esta expresión tiende al valor constante (independiente de θ)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\rho\, e^{i\zeta})\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(x)\, dx}{x}\ ; \qquad [16']$$

la última integral está tomada a lo largo de la circunferencia de radio $\rho \leq r_1$; por ser φ regular dentro de esta circunferencia, este valor constante es, pues, $\varphi(0) = 0$.

Resulta que el módulo de las funciones de la sucesión [15] sobre la circunferencia de radio ρ tiende uniformemente a 0 (1); recor-

---

(1) En cuanto a la uniformidad de este límite, ella resulta de la uniformidad, con respecto a σ, de la tendencia de [16] al límite [16']; el cálculo de [16'] directamente como límite de una suma entra en los métodos tradicionales de la teoría de funciones analíticas. Ver, por ej. SERRET. — *Cours de calcul différentiel et intégral*, París, Gauthier-Villars, 1879, T. I, cap. XI. Más reciente: VIVANTI. — *Teoria delle Funzioni Analitiche* (*Manuali Hoepli*), o la edición alemana, más amplia: VIVANTI-GUZMER. — *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*. (Leipzig, Teubner, 1906).

dando además que una función analítica en un círculo (en general en un campo) adquiere el máximo módulo sobre el contorno, se concluye que *la sucesión de las funciones* [15] *tiende uniformemente, dentro de la circunferencia de radio* r_1, *a la función cero,* y por consiguiente *la sucesión de las funciones* [14] *tiende a la función* 1.

Para la aplicación siguiente nos conviene limitarnos a considerar el campo formado por el círculo unitario incluso la circunferencia; al sustituir en las funciones sucesivas (como se hizo en el n. anterior) las potencias $x^2, x^4, \ldots$ por la variable x, no varía entonces el dominio de la variable. Llamando, pues, $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ a las funciones de la sucesión [14] después de esta sustitución, obtenemos que ellas tendrán la forma

$$f^{(\nu)}(x) = 1 + n_{\nu 1}\, x + n_{\nu 2}\, x^2 + \ldots \qquad [17]$$

con

$$\lim_{\nu \to \infty} n_{\nu i} = 0 \qquad [18]$$

siendo todavía este límite uniforme con respecto a i (1).

Estas conclusiones se extienden de inmediato al caso en que el radio del círculo en el cual (incluída la circunferencia) se supone ser la función $f(x)$ regular y no nula fuese uno cualquiera $R \neq 0$. En efecto nos reducimos al caso anterior por medio de la sustitución

$$x = R\, \xi\,;$$

si indicamos con

$$g^{(\nu)}(\xi) = 1 + p_{\nu 1}\, \xi + p_{\nu 2}\, \xi^2 + \ldots$$

los desarrollos análogos a [17] calculados respecto de la nueva variable, existe la relación

$$p_{\nu i} = R^{2^\nu \cdot i}\, n_{\nu i}\,;$$

(1) Para la demostración rigurosa de este detalle basta considerar las funciones $f^{(\nu)}(x) - 1 = n_{\nu 1}\, x + n_{\nu 2}\, x^2 + \ldots$; el coeficiente $n_{\nu i}$ se expresa, como se sabe, por

$$n_{\nu i} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^{(\nu)}(x) - 1}{x^{i+1}}\, dx\,,$$

donde la integral se toma por ej. a lo largo de la circunferencia de radio 1; sobre esta circunferencia sabemos que $|f^{(\nu)}(x) - 1| \to 0$, de donde resulta lo enunciado.

y, por cuanto debe ahora aplicarse a las $g^{(\nu)}$ las conclusiones anteriores referidas a las $f^{(\nu)}$, a [18] tendremos que sustituir

$$n_{\nu i} = \frac{p_{\nu i}}{R^{2^\nu i}} \quad , \quad \lim_{\nu \to \infty} p_{\nu i} = 0 \ (^1) \qquad [19]$$

Notamos todavía que la extracción de las raíces de orden 2^ν en la definición de las funciones $f^{(\nu)}$ tiene en la deducción un oficio esencial para llegar a la integral [16′]; pero, mientras hubiese que efectuar efectivamente los cálculos, esa extracción induciría complicaciones casi no enfrentables. La observación siguiente nos permite pasarnos de ella; pongamos

$$\begin{aligned} F^{(\nu)}(x) = (f^{(\nu)}(x))^{2^\nu} &= 1 + 2^\nu n_{\nu 1} x + 2^\nu \left[\frac{2^\nu - 1}{2} n^2_{\nu 1} + n_{\nu 2}\right] x^2 + \dots \\ &= 1 + n'_{\nu 1} x + n'_{\nu 2} x^2 + \dots ; \qquad [20] \end{aligned}$$

Puntualicemos un poco la formación de los coeficientes $n'_{\nu i}$; si pensamos efectuar por la regla de Cauchy el producto de p series de la forma

$$1 + a_{11} x + a_{12} x^2 + \dots, 1 + a_{21} x + a_{22} x^2 + \dots, \dots, 1 + a_{p1} x + \dots,$$

vemos en seguida que el término de grado i del producto tendrá por coeficiente una suma de productos de la forma

$$a_{\alpha\xi}\, a_{\beta\eta}\, a_{\gamma\zeta} \dots$$

donde α, β, $\gamma, \dots$ son elegidos entre los índices $1, 2, \dots, p$ y $\xi + \eta + \zeta + \dots = i$; se calcula fácilmente el número de estos productos que forman dicho coeficiente suponiendo que todos los a_{lm} se reduzcan al valor 1, en cuyo caso el número de dichos términos

(1) Puede notarse que en el caso de ser $R < 1$

$$\lim_{\nu \to \infty} R^{2^\nu \cdot i} = 0$$

por lo cual los coeficientes $n_{\nu i}$ pueden entonces no más realizar relaciones del tipo [18]; en el caso de $R > 1$ la fórmula [19] caracteriza para las $n_{\nu i}$ un orden de infinitésimo.

será el propio valor del coeficiente; para $a_{lm} = 1$ el producto de series se reduce a

$$(1 + x + x^2 + \ldots)^p$$

y se calcula fácilmente que esta potencia vale

$$1 + \binom{p}{1} x + \binom{p+1}{2} x^2 + \binom{p+2}{3} x^3 + \ldots .$$

Puede demostrarse esta fórmula por inducción porque, admitiéndola para el exponente p y multiplicando luego para la serie $1 + x + x^2 + \ldots$ para formar la potencia $p + 1$ se obtiene

$$1 + \left[\binom{p}{1} + 1\right] x + \left[\binom{p+1}{2} + \binom{p}{1} + 1\right] x^2 + \ldots ;$$

basta entonces aplicar una fórmula conocida sobre los coeficientes binomiales.

Notemos todavía que claramente

$$\binom{p+m-1}{m} < p^m .$$

Concluímos que en la fórmula [20] cada uno de los coeficientes $n'_{\nu i}$ se forma como suma de términos, cada uno de los cuales es un producto de coeficientes $n_{\nu j}$ tales que la suma de los índices j vale i y cuyo número es $< 2^{\nu \cdot i}$. Teniendo en cuenta la [19] se obtiene

$$n'_{\nu i} = \left(\frac{2^\nu}{R^{2^\nu}}\right)^i q_{\nu i} \quad , \quad \lim_{\nu \to \infty} q_{\nu i} = 0 .$$

Teniendo ahora en cuenta que, como es conocido, $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, resulta que, indicando con R_1 un número cualquiera $< R$, es siempre, para ν, bastante grande,

$$\frac{2^\nu}{R^{2^\nu}} = \frac{1}{R_1^{2^\nu}} \left(\frac{\sqrt[2^\nu]{2^\nu}\, R_1}{R}\right)^{2^\nu} < \frac{1}{R_1^{2^\nu}} ;$$

se sigue que aun valen las relaciones

$$n'_{\nu i} = \frac{p'_{\nu i}}{R_1^{2^\nu i}} \qquad \lim_{\nu \to \infty} p'_{\nu i} = 0 . \qquad [21]$$

Las funciones $F^{(\nu)}(x)$ se forman ahora a partir de $f(x)$ sin extracción de raíces, con la misma regla con la cual, según establece el método de GRAEFFE para el caso algebraico, se forman los sucesivos polinomios a partir de $P(x)$ (cmp. n. 8 y 12).

10. — Volvamos ahora a considerar una serie de potencias cualesquiera $f(x)$ con radio de convergencia $r > 0$. Dentro de una circunferencia de radio $r_1 < r$, ella tiene a lo sumo un número finito de ceros; si no tuviera ninguno estaríamos en el caso del n. anterior; supongamos, pues, que tenga precisamente los ceros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; no se excluye que alguno de estos ceros pueda ser múltiple, es decir, que algunos α_i puedan ser iguales; además se puede siempre excluir que sobre la circunferencia de radio r, se encuentre algún cero; por lo tanto será para todos los i, $|\alpha_i| < r_1$.

Será

$$f(x) = \left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_s}\right)f_1(x)$$

donde la función $f_1(x)$, convergente en el círculo de radio r, no tiene ceros dentro ni sobre la circunferencia de radio r_1. Si a la función $f(x)$ aplicamos el mismo procedimiento de deducción de las funciones $F^{(\nu)}(x)$:

$$F^{(\nu)}(x) = \prod_{\lambda} f\left(e^{\frac{2\pi i}{2^\nu}\lambda} x^{\frac{1}{2^\nu}}\right) \text{ (1)},$$

y con $F_1^{(\nu)}$ indicamos las funciones análogas formadas a partir de la $f_1(x)$, resulta

$$F^{(\nu)}(x) = P_s^{(\nu)}(x)\, F_1^{(\nu)}(x), \qquad [22]$$

donde

$$P_s^{(\nu)}(x) = \left(1-\frac{x}{\alpha_1^{2^\nu}}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2^{2^\nu}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_s^{2^\nu}}\right)$$

(Se tiene, en efecto, por lo antedicho,

$$P_s^{(1)}(x) = \prod_i\left(1-\frac{x^{1:2}}{\alpha_i}\right)\left(1+\frac{x^{1:2}}{\alpha_i}\right) = \prod\left(1-\frac{x}{\alpha_i^2}\right)$$

$$P_s^{(2)}(x) = \prod\left(1-\frac{x^{1:2}}{\alpha_i^2}\right)\left(1+\frac{x^{1:2}}{\alpha_i^2}\right) = \prod\left(1-\frac{x}{\alpha_i^4}\right)$$

....)

(1) Esta fórmula resume analogamente a [16] la regla expresada en los n. 8, 9, consistiendo en sucesivas multiplicaciones de la forma $f(x)\, f(-x)$ y sustituciones de x^2 por x; aquí no tiene mayor interés que de recordar la definición.

Desarrollando

$$P_s^{(\nu)}(x) = 1 + \sigma_{\nu 1}\, x + \sigma_{\nu 2}\, x^2 + \ldots + \sigma_{\nu, s-1}\, x^{s-1} \pm \frac{1}{(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s)^{2^\nu}}\, x^s, \quad [23]$$

donde $\sigma_{\nu j}$ son, salvo el signo, las funciones simétricas elementales de los números $1 : \alpha_i^{2^\nu}$. Si, para fijar las ideas, suponemos las α_i ordenadas según los módulos no decrecientes,

$$|\, \alpha_1 \,| \leqq |\, \alpha_2 \,| \leqq \ldots \leqq |\, \alpha_s \,|, \quad [24]$$

los términos que componen la suma $\sigma_{\nu k}$ pueden repartirse en dos grupos: los que contienen el máximo número posible de factores de módulo $\geq 1 : |\, \alpha_k \,|$ y ningún factor de módulo $< 1 : |\, \alpha_k \,|$ (pudiendo tener cierto número de factores de este módulo) y los términos restantes; indicando por un momento con a un término cualquiera del primer grupo y con b uno cualquiera del segundo grupo, se tiene evidentemente

$$|\, a \,|\, |\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s \,|^{2^\nu} = |\, \alpha_{k+1} \ldots \alpha_s \,|^{2^\nu}$$

$$|\, b \,|\, |\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s \,|^{2^\nu} \leq |\, \alpha_{k+1} \ldots \alpha_s \,|^{2^\nu}\, h^{2^\nu}$$

donde $h < 1$ es el máximo de las razones entre términos sucesivos no iguales de la sucesión [24]. Se tiene luego

$$\lim_{\nu \to \infty} h^{2^\nu} = 0,$$

y, teniendo presente que el número de los términos de cada grupo es acotado ($\leq \binom{s}{k}$), y recordando que el módulo de una suma es menor o igual a la suma de los módulos de los términos, se concluye

$$|\, \sigma_{\nu k} \,|\, |\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_k \,|^{2^\nu} = |\, \alpha_{k+1} \ldots \alpha_s \,|^{2^\nu}\, (q_k + \tau_{\nu k}) \quad [25]$$

donde

$$0 \leq q_k \leq \binom{s}{k}, \quad \lim_{\nu \to \infty} \tau_{\nu k} = 0\,. \quad [26]$$

Por fin, sustituyamos en [22] $F_1^{(\nu)}(x)$ por su expresión [20] y $P_s^{(\nu)}(x)$ por su expresión [23]; realizando el producto se obtiene por $F^{(\nu)}(x)$ una expresión de la forma

$$F^{(\nu)}(x) = 1 + c_{\nu 1}\, x + c_{\nu 2}\, x^2 + \ldots \quad [27]$$

donde

$$c_{\nu l} = \sigma_{\nu l} + \sigma_{\nu, l-1}\, n'_{\nu 1} + \sigma_{\nu, l-2}\, n'_{\nu 2} + \ldots + n'_{\nu l} \quad \text{para } l < s \qquad [28]$$

$$c_{\nu s} = \pm \frac{1}{(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s)^2} + \sigma_{\nu, s-1}\, n'_{\nu 1} + \ldots + n'_{\nu s} \qquad [29]$$

$$c_{\nu l} = \pm \frac{1}{(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s)^{2^\nu}}\, n'_{\nu, l-s} + \sigma_{\nu, s-1}\, n'_{\nu, l-s+1} + \ldots + n'_{\nu l}$$

$$\text{para } l > s. \qquad [30]$$

De [21] (donde se escribirá r_1 en lugar de R_1) y de [25] se sigue, para todos los $k \leq s$ y para l cualquiera, teniendo presente que $r_1 > |\alpha_i|$

$$|\sigma_{\nu k}\, n'_{\nu l}|\, |\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s|^{2^\nu} = \frac{|\alpha_{k+1} \ldots \alpha_s|^{2^\nu}}{r_1^{2^\nu . l}}\, \theta_1 = \begin{cases} |\alpha_{k+l+1} \ldots \alpha_s|^{2^\nu} \theta_2 \text{ para } l < s-k \\ \dfrac{1}{r_1^{2^\nu (l-s+k)}}\, \theta_2 \text{ para } l \geq s-k \end{cases} \qquad [31]$$

donde θ_1, θ_2 representan infinitésimos con $\nu \longrightarrow \infty$.

Sustituyendo en los distintos términos de [29], resulta

$$|c_{\nu s}|\, |\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s|^{2^\nu} = 1 + \theta \quad , \quad \lim_{\nu \to \infty} \theta = 0\,; \qquad [32]$$

sustituyendo análogamente en [30] resulta

$$|c_{\nu l}|\, |\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_s|^{2^\nu} = \frac{\theta}{r_1^{2^\nu (l-s)}} \quad , \quad \lim_{\nu \to \infty} \theta = 0, \ (l > s). \qquad [33]$$

De [32], [33] sacamos las conclusiones siguientes:

Si en la sucesión [24] se realiza precisamente que

$$|\alpha_t| < |\alpha_{t+1}| = |\alpha_{t+2}| = \ldots = |\alpha_{t+\tau}| < |\alpha_{t+\tau+1}| \leqq \ldots \qquad [34]$$

$$1^\circ \ \lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu, t+\tau}} \right| \frac{1}{|\alpha_{t+1}|^{\tau . 2^\nu}} = 1 \ , \ |\alpha_{t+1}| = \sqrt[\tau]{\lim \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu, t+\tau}} \right|}} \qquad [35]$$

2° Para cualquier $l > t + \tau$

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{c_{\nu, l}}{c_{\nu, t+\tau}} \right| r_1^{2^\nu (l-t-\tau)} = 0$$

y, recordando que $|\alpha_{t+1}| < r_1$,

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{c_{\nu,l}}{c_{\nu,t+\tau}} \right| |\alpha_{t+1}|^{2^\nu(l-t-\tau)} = 0, \qquad [36]$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{c_{\nu,l}}{c_{\nu,t}} \right| |\alpha_{t+1}|^{2^\nu(l-t)} = 0$$

$$\sqrt[l-t]{\liminf_{\nu \to \infty} \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu l}} \right|}} > |\alpha_{t+1}| \qquad [37]$$

3º Por las [31], [28], [25], [26] se tiene todavía, por $l < s$,

$$|c_{\nu l}| \, |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s|^{2^\nu} = |\alpha_{l+1} \ldots \alpha_s|^{2^\nu} (q_k + \theta) \; ;$$

volviendo a la hipótesis [34], e indicando con ρ un entero tal que $1 \leqq \rho < \tau$, resulta por [32]

$$\frac{|c_{\nu t}|}{|c_{\nu,t+\rho}|} = |\alpha_{t+1}|^{\rho . 2^\nu} \frac{1+\theta}{q_{t+\rho} + \tau_{\nu,t+\rho}},$$

$$\frac{|c_{\nu,t+\rho}|}{|c_{\nu,t+\tau}|} = |\alpha_{t+1}|^{(\tau-\rho)2^\nu} \frac{q_{t+\rho} + \tau_{\nu,t+\rho}}{1+\theta} \; ;$$

por cuanto el número $q_{t+\rho}$ es desconocido y puede también ser 0, de la primera igualdad se deduce únicamente que

$$\sqrt[\rho]{\liminf_{\nu \to \infty} \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu_1 t+\rho}} \right|}} \geq |\alpha_{t+1}| \; ; \qquad [38]$$

la segunda sólo es complementaria de ésta con respecto a [35] y no da resultado útilmente enunciable.

Del conjunto de estas observaciones concluímos con el teorema siguiente:

Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente t raíces de módulo $\leqq \mu$, para todos los $l > t$ rige la desigualdad

$$\sqrt[l-t]{\liminf_{\nu \to \infty} \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu l}} \right|}} > \mu$$

$$\left(\text{o, lo que es lo mismo, } \sqrt[l-t]{\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu l}}{c_{\nu t}} \right|}} < \frac{1}{\mu} \right).$$

No existirán raíces de la ecuación de módulo $> \mu$ *si, para todos los* $l > t$,

$$\sqrt[l-t]{\lim_{\nu \to \infty} \min \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu l}} \right|}} \geq r$$

donde r *es el radio de convergencia de* $f(x)$. *En caso contrario, considerando la sucesión de los números*

$$\sqrt[\tau]{\lim_{\nu \to \infty} \min \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu, t+\tau}} \right|}} \qquad (\tau = 1, 2, 3, \ldots),$$

después de un número finito de términos cuyos valores pueden presentar oscilaciones de cualquier forma se llega a un mínimo, en el sentido que los términos anteriores son todos mayores o iguales, los posteriores son todos mayores; si este número corresponde a $t + \tau = s$, *la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene exactamente* $s - t$ *raíces de módulo igual a*

$$\sqrt[s-t]{\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu t}}{c_{\nu s}} \right|}} \quad (> \mu).$$

Resulta evidente que este teorema proporciona una regla para determinar uno después de otro todos los módulos de las raíces de $f(x)$, en cuanto para cada uno pueda asignarse (independientemente de esa misma determinación) una acotación para el número de las raíces del mismo módulo; bastará considerar primero una sucesión de términos

$$\lim \min \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{1}{c_{\nu 1}} \right|}, \quad \lim \min \sqrt[2.2^\nu]{\left| \frac{1}{c_{\nu 2}} \right|}, \quad \lim \min \sqrt[3.2^\nu]{\left| \frac{1}{c_{\nu 3}} \right|}, \ldots$$

comprendiendo un número de términos igual o mayor del máximo de las posibles raíces de mínimo módulo; el valor mínimo en esta sucesión será el módulo mínimo de las raíces, y el número de los términos de la sucesión hasta alcanzar el mínimo más avanzado será el correspondiente número de raíces.

Si este mínimo corresponde al coeficiente $c_{\nu h_1}$, el número de dichas raíces será h_1; se repetirá luego el procedimiento considerando una sucesión de la forma

$$\lim \min \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu h_1}}{c_{\nu, h_1+1}} \right|}, \quad \lim \min \sqrt[2.2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu \nu_1}}{c_{\nu, h_1+2}} \right|}, \ldots$$

cuyo mínimo será el segundo módulo de raíces de la ecuación y el grupo de términos hasta alcanzar el mínimo más avanzado será el número de raíces con este módulo; siendo $c_{\nu\, h_2}$ el denominador en este mínimo más avanzado, se empezará nuevamente con la sucesión

$$\text{lím mín} \sqrt[2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu\, h_2}}{c_{\nu,\, h_2+1}} \right|} \;, \quad \text{lím mín} \sqrt[2.2^\nu]{\left| \frac{c_{\nu\, h_2}}{c_{\nu,\, h_2+2}} \right|} \;, \ldots$$

siguiendo de la misma manera hasta alcanzar (si a eso se llega) el radio de convergencia de la serie $f(x)$. Evidentemente este último caso se presenta únicamente cuando el número de ceros de la serie sea finito (o nulo). Es importante notar que el método supone que de alguna manera se conozca por anticipado el radio de convergencia de la serie (que se podrá calcular por ej. aplicando el teorema de CAUCHY-HADAMARD) porque sólo de esta manera es posible juzgar si los límites mínimos arriba considerados definen efectivamente el módulo de ceros de la función o bien ese mismo radio de convergencia (1).

El procedimiento indicado es ciertamente largo y de mucha indeterminación por el hecho de que, de no conocer *a priori* el número de raíces para cada módulo, los grupos de términos a considerar podrían sólo estimarse en cuanto por razones cualesquiera pudiera argüirse que la sucesión no vuelve más a bajar al mínimo. Sin embargo esta insuficiencia del método puede considerarse como en su naturaleza por cuanto, para ecuaciones trascendentes, no hay límite *a priori* para el número de raíces y por cuanto se sabe que, aun en el caso de ecuaciones algebraicas, al existir varias raíces del mismo módulo corresponde el presentarse términos intermedios de comportamiento irregular.

---

(1) En el caso de saber *a priori* que la función no tiene ceros en el círculo de convergencia de la serie, podría evidentemente utilizarse el teorema para calcular el radio de este círculo; pero igualmente sería generalmente menos ventajoso que el teorema de CAUCHY-HADAMARD, porque queda indeterminado cuál de los límites mínimos que vamos calculando brindará efectivamente el valor del radio de convergencia. En la memoria citada de G. POLYA el método está generalizado al considerar, no solamente las series que corresponden a potencias de las raíces con exponente potencia de 2, sino con exponentes enteros cualesquiera, y esto da modo de salvar esta dificultad. Pero esta generalización, muy interesante desde el punto de vista teórico, lleva, en el caso de querer hacer los cálculos numéricos, a complicaciones que quitan toda practicidad.

La regla resulta relativamente simple en el caso de que el problema sea solamente de separar las raíces de una ecuación para la cual se sepa *a priori* que hay una sola de cualquier módulo dado (las aplicaciones llevan fácilmente a este caso, por ej. en los problemas de oscilaciones, autovalores, etc.) porque en este caso cada grupo se compone de su primer término únicamente y al signo lím mín puede sustituirse el simple lím. Se tiene entonces que *los módulos de las raíces sucesivas, están dados por la sucesión*

$$\lim \sqrt[2^\nu]{\frac{1}{|c_{\nu 1}|}}\ , \quad \lim \sqrt[2^\nu]{\left|\frac{c_{\nu 1}}{c_{\nu 2}}\right|}\ ; \ldots$$

hasta alcanzar uno de estos límites mayor o igual que el radio de convergencia.

11. — En el caso de varias raíces con el mismo módulo el método puede completarse de manera que permita, por lo menos teóricamente, la determinación de cada uno singularmente (salvo las incertidumbres respecto del signo y en general de un factor de la forma $e^{\pi i : 2^\nu}$ que son intrínsecas del método) por una observación análoga a la que se hace con respecto a las ecuaciones algebraicas. En efecto de [28] y [31] se deduce todavía que

$$|c_{\nu l} - \sigma_{\nu l}|\ |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s|^{2^\nu} = |\alpha_{l+1} \ldots \alpha_s|^{2^\nu} \theta \ , \quad \lim \theta = 0; \qquad [39]$$

esta relación expresa que los términos del polinomio que se obtiene al cortar la serie $F^{(\nu)}(x)$ al término $c_{\nu s} x^s$ difiere *relativamente* poco de los términos del polinomio $P_s^{(\nu)}(x)$ de donde se argumenta, por la continuidad de las raíces de las ecuaciones algebraicas con respecto a los coeficientes, que, tendiendo $\nu \longrightarrow \infty$ las raíces de la ecuación obtenida igualando a 0 aquel segmento tienden a las propias raíces de $P_s^{(\nu)}(x) = 0$ (1). Según lo dicho en el n. 8, los términos de la

(1) Esta argumentación necesita evidentemente ser puntualizada; puede servir para este objeto el teorema siguiente de A. Ostrovski [*Sur la continuité relative des racines d'équations algébriques.* C. R. de l'Ac. de France. T. 209, 1939, p. 777]. *Si x_ν, y_ν son las raíces respectivamente de los dos polinomios*

$$f(z) = z^n + a_s z^{n-1} + \ldots a_n \ , \quad y(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots b_n$$

tomadas en un orden conveniente, poniendo

$$T = \max_{\nu = 1, 2, \ldots, n} (1, |a_\nu|^{1:\nu}, |b_\nu|^{1:\nu}) \ , \quad \delta = \sqrt{|a_1 - b_1|^2 + \ldots + |a_n - b_n|^2}$$

es siempre

$$|x_\nu - y_\nu| \leq 4\, n\, T\, \delta^{1/n}.$$

forma $c_{\nu t} x^t$, $c_{\nu s} x^s$ (según el significado dado a los índices t, s en el n. anterior) dividen dicho segmento de la serie $F^{(\nu)}(x)$ en trozos que, igualados a 0, permiten con las correspondientes raíces, aproximar las raíces de la serie de los sucesivos módulos.

12. — Para el cálculo efectivo de los coeficientes $c_{\nu i}$ se tiene la fórmula recurrente

$$c_{\nu i} = (-1)^i [c^2_{\nu-1\, i} - 2\, c_{\nu-1,\, i-1}\, c_{\nu-1,\, i+1} + 2\, c_{\nu-1,\, i-2}\, c_{\nu-1,\, i+2} - \cdots \pm 2\, c_{\nu-1,\, 2i}], \qquad [40]$$

como se demuestra inmediatamente al observar que el producto $f(x)\, f(-x)$ es la diferencia de los cuadrados de las series (eventualmente polinomios) formadas respectivamente por los términos de $f(x)$ de orden par y por los términos de orden impar y al recoger luego los términos de orden i de los dos cuadrados, calculados por la regla de Cauchy.

Una observación importante que resulta de esta fórmula es que, para el completo cálculo del término de grado i de $F^{(\nu)}(x)$ será necesario haber calculado la serie $F^{(\nu-1)}(x)$ hasta el término de grado $2\,i$; por lo tanto la aplicación del método de Graeffe, en comparación de los métodos anteriores, presenta el inconveniente aparente de obligar a poner en cálculo desde los primeros pasos un gran número de términos de la serie. Para explicar este hecho, en la apariencia paradójico (porque es evidente que cualquiera que sea el método adoptado el efecto sobre los resultados finales del despreciar dados términos tiene que ser el mismo) hay que notar que el juicio de obtener una determinada aproximación se hace en todos los casos por la admisión, explícita o menos, de que los términos de los cuales no se ha tenido cuenta se sigan según una ley o por lo menos con una regularidad determinada. Es evidente entonces que un método menos automático puede permitir más fácilmente argumentar sobre dadas características generales de los coeficientes, mientras otro más automático podrá exigir que sobre estos coeficientes sean ejecutados cálculos determinados. Es evidente, por otra parte, que cuando los términos elevados de la serie sean tales de no dar contribución apreciable, podrán despreciarse a juicio del calculador, aun cuando estén en las fórmulas como [40].

Contra esta desventaja nuestro método actual tiene la ventaja, propiamente inherente a la misma característica de poner en cuenta muchos términos contemporáneamente, de que, al mismo tiempo que se calculan algunas raíces de los módulos más bajos, se obtienen informes sobre un grupo más o menos extenso de otros ceros de la función.

13. — He aquí unos ejemplos.

1° Poniendo

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

resulta

$$F^{(1)}(x) = e^x \,.\, e^{-x} = 1 \qquad F^{(\nu)}(x) = 1 \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

$$\sqrt[2^\nu]{\frac{1}{|c_{\nu 1}|}} = \sqrt[2^\nu]{\frac{1}{0}} = \infty$$

Se sabe, en efecto, que e^x no tiene ceros.

2° Poniendo

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots,$$

resulta

$$F^{(1)}(x) = 1 + \frac{5}{12}x + \frac{47}{180}x^2 + \frac{319}{1680}x^3 + \frac{1879}{12600}x^4 + \ldots$$

$$F^{(2)}(x) = 1 + \frac{251}{720}x + \frac{383}{1600}x^2 + \ldots$$

$$F^{(3)}(x) = 1 + \frac{185183}{2^8 \,.\, 5^2 \,.\, 9^2} + \ldots$$

$$\sqrt{\frac{12}{5}} = 1{,}59\ldots \qquad \sqrt[4]{\frac{720}{251}} = 1{,}3\ \ldots \qquad \sqrt[8]{\frac{2^8 \,.\, 5^2 \,.\, 9^2}{185183}} = 1, \ldots\ ;$$

claramente todos estos números son > 1, radio de convergencia de la serie; a pesar de que la sucesión claramente converja, se concluye todavía que la serie no tiene ceros, como por otra parte es conocido.

3° Poniendo, como en el n. 2,

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2.3^2} + \frac{x^4}{2^2.3^2.4^2} - \ldots,$$

notamos primero que el radio de convergencia es ∞ (serie entera);

en efecto, la serie converge más rápidamente que la exponencial. Ahora bien, resulta

$$F^{(1)}(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2^5.3}\,x^2 - \frac{1}{2^6.3^4.5}\,x^3 + \frac{1}{2^{13}.3^4.5.7}\,x^4 -$$

$$- \frac{1}{2^{14}.3^6.5^4.7}\,x^5 + \frac{1}{2^{15}.3^7.5^4.7^2.11^2}\,x^6 -$$

$$- \frac{1}{2^{19}.3^9.5^4.7^4.11.13}\,x^7 + \frac{1}{2^{29}.3^{10}.5^5.7^4.11.13}\,x^8 - \ldots$$

$$F^{(2)}(x) = 1 - \frac{11}{2^4.3}\,x + \frac{27{,}1}{2^{11}.3^3.7}\,x^2 - \frac{21{,}617}{2^{13}.3^6.7^2.11^2}\,x^3 +$$

$$+ \frac{0{,}78017}{2^{21}.3^9.7^3.11^2}$$

$$F^{(3)}(x) = 1 - \frac{10136{,}9}{2^{10}.3^3.7}\,x + \frac{1168{,}6}{2^{18}.3^9.7^2}\,x^2 - \ldots,$$

$$F^{(4)}(x) = 1 - \frac{57737972}{2^{16}.3^8.7^2}\,x + \ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\,, \quad \sqrt[4]{\frac{2^4.3}{11}} = 1{,}4453\,, \quad \sqrt[8]{\frac{2^{10}.3^3.7}{10136{,}9}} = 1{,}44579$$

$$2.\sqrt{3}\;\sqrt[16]{\frac{49}{57737972}} = 1{,}44589\,.$$

La convergencia hacia un límite menor de y muy próximo a 1,446 es evidente (cfr. n. 2).

Se tiene análogamente para determinar las raíces sucesivas (en cuanto se suponga saber de antemano que las raíces de la ecuación son todas simples):

Para la segunda

$$\sqrt{\frac{1}{2} : \frac{1}{2^5.3}} = \sqrt{2^4.3} = 6{,}928$$

$$\sqrt[4]{\frac{11}{2^4.3} : \frac{27{,}1}{2^{11}.3^3.7}} = 4\,\sqrt[4]{\frac{69{,}3}{54{,}2}} = 7{,}5638$$

$$\sqrt[8]{\frac{10136{,}9}{1168{,}6}.2^8.3^6.7} = 7{,}617\,.$$

El valor verdadero como resulta de las tablas está alrededor de 7,618.

Para la tercera

$$\sqrt{\frac{2^6.3^4.5}{2^5.3}} = 3\sqrt{30} = 16,43$$

$$\sqrt[4]{\frac{27,1}{2^{11}.3^3.7} : \frac{21,617}{2^{13}.3^6.7^2.11^2}} = 18,4022.$$

El valor que se deduce de las tablas está en derredor de 18,72.

La función considerada se demuestra tener un comportamiento muy análogo a las funciones trigonométricas y, en particular, tener infinitas raíces reales; sobre las raíces siguientes a la tercera los términos calculados de las series $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$ pueden dar alguna información; para obtener más habría naturalmente que calcular con mayor número de términos.

4° Consideremos todavía el caso de

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2.3.5.6} - \frac{x^3}{2.3.5.6.8.9} + \frac{x^4}{2.3.5.6.8.9.11.12} - \ldots$$

Por la misma razón de arriba el radio de convergencia es ∞. Se tiene

$$F^{(1)}(x) = 1 - \frac{1}{2^2.3.5}x + \frac{1}{2^6.3^2.5^2.11}x^2 -$$

$$- \frac{1}{2^{10}.3^4.5^2.7.11.17}x^3 + \frac{1}{2^{14}.3^5.5^3.7.11^2.17.23}x^4 - \ldots$$

$$F^{(2)}(x) = 1 - \frac{7}{2^5.3.5^2.11}x + \frac{421}{2^{13}.3^2.5^4.7.11^2.17.23}x^2 - \ldots$$

$$F^{(3)}(x) = 1 - \frac{59559}{2^{12}.5^4.7.11^2.17.23}x + \ldots$$

Se tiene, para la primera solución

$$\sqrt{2^2 . 3 . 5} = 7{,}746\ (^1), \quad \sqrt[4]{\frac{2^5 . 3 . 5^2 . 11}{7}} = 7{,}8366,$$

$$\sqrt[8]{\frac{2^{12} . 5^4 . 7 . 11^2 . 17 . 23}{59559}} = 7{,}83509 .$$

Para la segunda

$$\sqrt{2^4 . 3 . 5 . 11} = 51{,}38 \qquad \sqrt[4]{\frac{2^{13} . 3^2 . 5^4 . 7^2 . 11^2 . 17 . 23}{421 . 2^5 . 3 . 5^2 . 11}} = 55{,}705 .$$

No podemos dejar de notar, al concluir con estos ejemplos, que ellos han sido elegidos en modo que el cálculo resultara concluyente en modo bastante pronto; si tan sólo el lector quiere probar como ejercicio a buscar la primera raíz de la derivada del último ejemplo, que el cálculo anterior indica tener que encontrarse en el intervalo entre 7,8 y 55, notará que la convergencia tarda en determinarse. Repetimos, pues, con la observación hecha desde el principio, es decir que en general a la ventaja de un método más automático, (particularmente típico es el método de GRAEFFE), se opone la desventaja de una multitud de cálculos no fácilmente determinable *a priori*.

B. LEVI.

---

(1) Puede ser interesante notar que si se hubiera considerado como ecuación aproximada de $f(x) = 0$ la cuadrática $1 - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2.3.5.6} = 0$, y se hubiera buscado aproximar su primera raíz con el método de GRAEFFE, se habría encontrado este mismo valor como primera aproximación; sin embargo, la raíz exacta de la ecuación, $15 - \sqrt{45} = 8{,}39$ se habría alejado mucho más del valor verdadero.

PUBLICACIONES

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICAS

DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES

APLICADAS A LA INDUSTRIA

DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL