

# Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

## Dinámica de los sistemas físicos

5° PI  
6° MEC

Cód. 21502-21

Martín Crespo  
Claudia Pendino



## Tecnología de control

Dpto. de Electrotecnia

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



# 1. Sistemas de Control

El control automático ha jugado un papel vital en el avance de la ciencia y de la ingeniería. Además de su extrema importancia en vehículos espaciales, sistemas de piloto automático de aeronaves, sistemas robóticos y otros, el control automático se ha vuelto parte integral e importante de los procesos industriales y de manufactura modernos. Resulta esencial en operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad y viscosidad, y flujo en las industrias.

Como los avances en la teoría y práctica del control automático brindan medios para lograr el funcionamiento óptimo de sistemas dinámicos, mejorar productividad, liberarse de la monotonía de muchas operaciones manuales rutinarias y repetitivas, y otras ventajas, la mayoría de los técnicos, técnicas, ingenieros e ingenieras deben poseer un buen conocimiento en ese campo. Quizá la cualidad más característica de la ingeniería de control sea la oportunidad de controlar máquinas y procesos industriales y económicos en beneficio de la sociedad.

De acuerdo a su definición como concepto general, se denomina *Sistema* o *Planta* a “un conjunto de partes o elementos organizados y relacionados que interactúan entre sí para lograr un objetivo”. Los sistemas reciben datos, energía o materia (entradas), procesan la información recibida, y finalmente brindan datos, energía o materia como resultado de dicho procesamiento (salidas). El procesamiento de la información de entrada generalmente modifica el estado interno del sistema, por lo que es posible en consecuencia actuar de forma inteligente sobre las entradas de un sistema para controlar la salida del mismo, produciendo cambios según determinados criterios o especificaciones. Sobre este último concepto se basa la noción de *Sistema de Control*, como un sistema que es capaz de generar las entradas necesarias en una planta para que las salidas de la misma se comporten de acuerdo a lo especificado.

## 1.1. Control a lazo cerrado y lazo abierto

Un sistema de control de **lazo cerrado** es aquel en el que la salida tiene efecto directo sobre la acción de control, como se muestra en la Figura 1. El objetivo del control es reducir el error y llevar la salida al valor deseado. Ejemplos de sistemas a con control a lazo cerrado son el control de temperatura de una heladera.

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

Existen numerosos tipos de controladores. En este curso veremos controles tipo:

- Manual y Automático
- On-Off y Proporcional

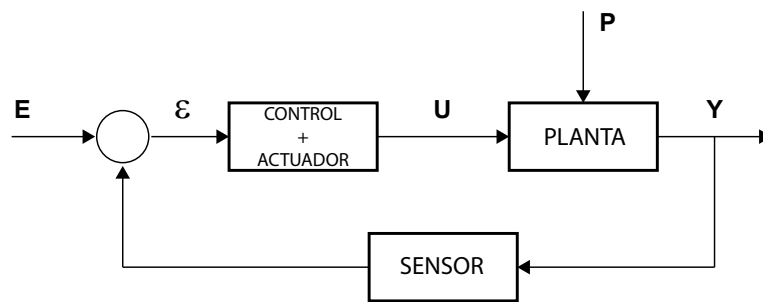


Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema de control a lazo cerrado.

**Señal de entrada  $E$ :** También conocida como *set-point*, son señales de referencia cuyos valores son el de las salidas deseadas de la planta.

**Señal de salida  $Y$ :** También conocida como variable *controlada*, son las variables que se quieren controlar.

**Señal de control  $U$ :** También conocida como variable *manipulada*, actúan directamente sobre el sistema a controlar, son las entradas de la planta. Son elaboradas por el bloque de Control a partir de la señal de error.

**Señal de error  $\epsilon$ :** es la diferencia entre la señal deseada  $E$  y la salida real de la planta  $Y$ . Son las entradas del bloque de control.

**Señal de perturbación  $P$ :** Una perturbación es una señal que no se puede controlar y tiende a afectar el valor de la salida de una Planta de manera imprevisible.

**Control + Actuador:** Este bloque se encarga de aplicar a la planta la variable manipulada  $U$  para corregir o limitar la desviación de la salida  $Y$ , respecto al valor deseado  $E$ , de manera que el error sea lo más próximo posible a cero.

**Planta:** Una planta ó sistema es un conjunto de piezas funcionando juntas, para lograr un determinado objetivo. Aquí llamaremos planta o sistema a un conjunto de elementos que ha de ser controlado.

**Sensor:** Mide las salidas de la planta.



Por su parte, los sistemas de control a **lazo abierto** son sistemas en los que la salida no tiene efecto sobre la acción de control, como se puede apreciar en la Figura 2. Aquí la salida no se mide ni se realimenta para compararla con la entrada. Ejemplo de un sistema típico a lazo abierto es el lavarropas: aquí el manejo, el lavado y el enjuague en la máquina se realizan en una base de tiempos, la máquina no mide la salida (la limpieza de la ropa), o sea, no se compara la salida con la referencia.

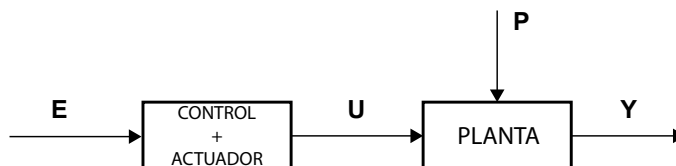


Figura 2: Diagrama de bloques de un sistema de control a lazo abierto.

### Comparación entre los sistemas de control de lazo abierto y lazo cerrado:

- Lazo cerrado: El uso de la realimentación hace que su respuesta sea insensible a las perturbaciones externas y variaciones internas de parámetros del sistema. Generalmente estos esquemas de control son más costosos y complejos.
- Lazo abierto: Se utilizan en sistemas donde las entradas son conocidas previamente y en los que no hay perturbaciones. Suelen ser más sencillos y económicos que los controles a lazo cerrado.

## 2. Sistemas físicos

La distinción entre sistemas físicos y modelos es fundamental en ingeniería. De hecho, los circuitos estudiados hasta el momento son modelos de los sistemas físicos. Por ejemplo, una resistencia con una ley lineal es un modelo; las variaciones en el valor de la resistencia no se tienen en cuenta. Una inductancia de valor constante, también es un modelo; en realidad el valor de la inductancia varía con la cantidad de corriente que circula por ella.

En bioingeniería, un brazo humano como en la Figura 3a puede ser modelado como en la Figura 3b o, más realístico, como en la Figura 3c. El modelado es un problema extremadamente importante en ingeniería, el éxito

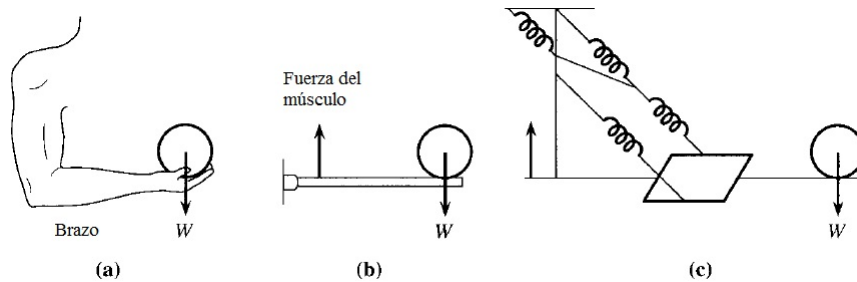


Figura 3

del control del sistema dependerá, en gran parte, del grado de realismo del modelo del mismo.

Dependiendo del objetivo del control, un sistema físico puede tener diferentes modelos. Por ejemplo, un avión puede ser modelado como una partícula a la hora del estudio de la trayectoria; sin embargo, debe ser modelado como un cuerpo rígido si se desea estudiar su maniobrabilidad.

Para desarrollar un modelo adecuado de un sistema físico, debemos entender su funcionamiento y su rango de operación. De ahora en adelante llamaremos *sistema físico* al modelo de un sistema físico. Dicho sistema tendrá al menos una entrada y una salida.

### 2.1. Sistemas Mecánicos Traslacionales

Para caracterizar y modelar sistemas mecánicos, es necesaria la utilización de leyes *Newton* que representen la dinámica mecánica. Consideremos el sistema de la Figura 4. Consiste en un bloque de masa  $M$  conectado a una pared a través de un resorte. La entrada es la fuerza aplicada  $f(t)$  y la salida el desplazamiento  $x(t)$  medido desde la posición de equilibrio. Antes de desarrollar una ecuación que describa al sistema, primero debemos discutir las características de la fricción y del resorte.

La fricción entre el bloque y el piso es compleja. Generalmente se divide en tres partes: estática, Coulomb, y viscosa. Cuando la masa se encuentra en estado estacionario, necesitamos una cierta cantidad de fuerza para vencer la *fricción estática* y comenzar el movimiento. Una vez que la masa se está moviendo, hay una fricción constante, llamada *fricción de Coulomb*, que es independiente de la velocidad y otra variable, llamada *fricción viscosa* que es proporcional a la velocidad. En este curso sólo consideraremos la fricción

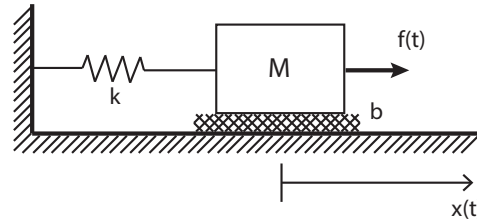


Figura 4: Sistema mecánico traslacional.

viscosa que se puede modelar como

$$Fricción viscosa = b \times Velocidad$$

donde  $b$  es el *coeficiente de fricción viscosa*.

En física, la ley de Hooke enuncia que el desplazamiento de un resorte es proporcional a la fuerza aplicada a este, esto es

$$Fuerza resorte = k \times Desplazamiento$$

donde  $k$  es la *constante del resorte*. Haciendo la sumatoria de fuerzas, considerando sólo fuerza viscosa y resorte lineal, obtenemos

$$f(t) - bv(t) - kx(t) = Ma(t)$$

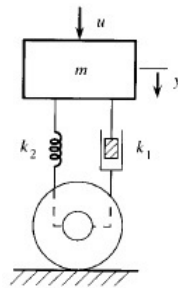
Considerando que  $v(t) = \dot{x}(t)$  y  $a(t) = \ddot{x}(t)$ , la ecuación diferencial que describe al sistema es

$$f(t) = kx(t) + b\dot{x}(t) + M\ddot{x}(t)$$

Variables	Unidad	Parámetros	Unidad
Fuerza $f(t)$	$N$	Masa $M$	$Kg$
Desplazamiento $x(t)$	$m$	Resorte $k$	$N/m$
Velocidad $v(t) = \dot{x}(t)$	$m/s$	Fricción viscosa $b$	$Ns/m$
Aceleración $a(t) = \dot{v}(t)$	$m/s^2$		

#### EJEMPLO

El sistema de suspensión de un auto puede ser modelado como muestra la figura. El modelo consiste de un resorte de constante elástica  $k_2$  y un amortiguador de coeficiente  $k_1$  que provee fricción viscosa. Supongamos que la masa de un cuarto del auto es  $m$  y la fuerza vertical aplicada a la rueda es  $u(t)$ .



La ecuación diferencial que describe al sistema es

$$u(t) = k_2 y(t) + k_1 \dot{y}(t) + m \ddot{y}(t)$$

## 2.2. Sistemas Mecánicos Rotacionales

Consideremos ahora el sistema mecánico rotacional de la Figura 5. La entrada es el torque aplicado  $\tau(t)$  y la salida el desplazamiento angular de la carga  $\theta(t)$ . El eje no es rígido y está modelado como un resorte de torsión de constante  $k$ . Supongamos que  $J$  es la inercia de la carga y del eje, y que sólo existe fricción viscosa entre el eje y el soporte, de coeficiente  $b$ .

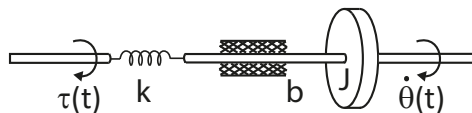


Figura 5: Sistema mecánico rotacional.

Haciendo la sumatoria de torques, obtenemos

$$\tau(t) - b\dot{\theta}(t) - k\theta(t) = J\ddot{\theta}(t)$$



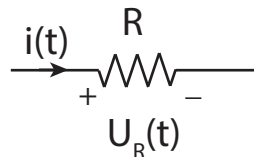
Considerando que  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  y  $\alpha(t) = \ddot{\theta}(t)$ , la ecuación diferencial que describe al sistema es

$$\tau(t) = k\theta(t) + b\dot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t)$$

Variables	Unidad	Parámetros	Unidad
Momento de fuerza $\tau(t)$	$Nm$	Inercia $J$	$Kgm^2$
Desplazamiento angular $\theta(t)$	$rad$	Torsión $k$	$Nm/rad$
Velocidad angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$	$rad/s$	Fricción viscosa $b$	$Nms/rad$
Aceleración angular $\alpha(t) = \dot{\omega}(t)$	$rad/s^2$		

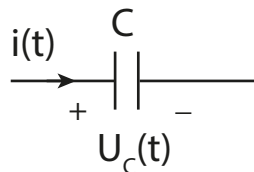
### 2.3. Sistemas Eléctricos

En los sistemas eléctricos encontramos como variables descriptivas principales a las tensiones y corrientes. Basado en la ley de *Ohm*, la teoría de circuitos representa el fenómeno de disipación de energía mediante un dipolo (resistencia) que establece una relación entre la tensión y corriente:



$$U_R(t) = Ri(t)$$

Otros fenómenos fundamentales de estos sistemas son la acumulación de energía en forma de campo eléctrico. Este es descrito por la ley de *Coulomb*, de la cual se deducen las relaciones que describen el fenómeno de capacitancia:

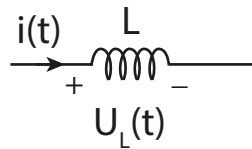


$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

Alrededor de una carga en movimiento o corriente hay una región de influencia que se llama campo magnético. La variación del campo magnético con respecto al tiempo, induce una fuerza electromotriz en el circuito. Las relaciones entre las variables asociadas al fenómeno de almacenamiento de energía en el campo magnético pueden deducirse de las leyes de *Faraday* y de *Ampere*. El fenómeno, que la teoría de circuitos caracteriza mediante la inductancia, puede describirse a partir de la siguiente ecuación:



$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Por último encontramos relaciones asociadas a la estructura de los circuitos eléctricos. Estas no son otras que las leyes de *Kirchhoff* de tensión y corriente. Recordemos que éstas establecen respectivamente que la suma de las tensiones en una malla cerrada es igual a cero y que la suma de las corrientes entrantes a un nudo es también nula.

Así en el sistema de la Figura 6, de acuerdo a la ley de *Kirchhoff* de tensión, la sumatoria de tensiones en la malla será nula:

$$U(t) - Ri(t) - \frac{1}{C} \int i(t) dt = L \frac{di(t)}{dt}$$

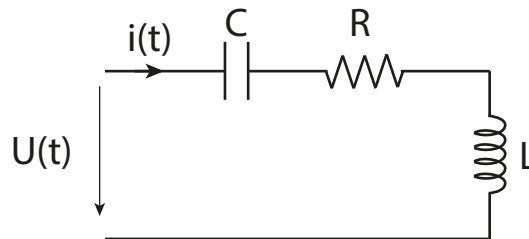


Figura 6: Sistema eléctrico RLC serie.

Si se considera a la corriente como el flujo de carga  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , la



ecuación diferencial que describe al sistema es

$$U(t) = L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)$$

Variables	Unidad	Parámetros	Unidad
Tensión $u(t)$	$V$ : Voltio	Resistencia $R$	$\Omega$ : Ohm
Carga $q(t)$	$C$ :Coulomb	Capacidad $C$	$F$ : Faradio
Corriente $i(t) = \dot{q}(t)$	$A$ : Ampere	Inductancia $L$	$Hy$ : Henrio

## 2.4. Sistemas Hidráulicos

En plantas químicas, muchas veces es necesario controlar el nivel de líquido de un tanque. Un modelo simplificado de dicho sistema se puede observar en la Figura 7.

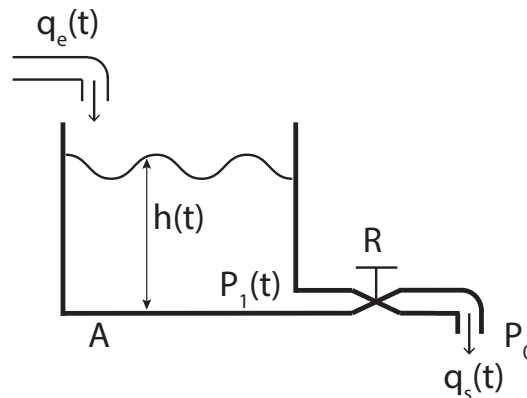


Figura 7: Sistema hidráulico.

La altura del tanque se puede expresar como

$$h(t) = \frac{1}{A}V(t)$$

donde  $V(t)$  es el volumen de agua del tanque y se puede expresar como

$$V(t) = \int \Delta q(t) dt$$

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

siendo  $\Delta q(t) = q_s(t) - q_e(t)$  la diferencia entre el flujo de salida  $q_s(t)$  y de entrada  $q_e(t)$ . A su vez, el flujo de salida del tanque se puede expresar como

$$q_s(t) = \frac{P_1(t) - P_0}{R}$$

donde  $R$  es la relación constitutiva de la válvula,  $P_0$  la presión atmosférica y  $P_1(t)$  la presión en el fondo del tanque

$$P_1(t) = \rho g h(t) + P_0 = \frac{\rho g}{A} V(t) + P_0$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido y  $g$  la aceleración de la gravedad. Así, la ecuación diferencial que describe al sistema es

$$q_e(t) = \dot{V}(t) + \frac{1}{R} \frac{\rho g}{A} V(t)$$

Variables	Unidad	Parámetros	Unidad
Presión $P(t)$	Pa: Pascal	Área $A$	$m$
Altura fluido $h(t)$	$m$	Resistencia hidráulica $R$	$Ns/m^5$
Volumen fluido $V(t)$	$m^3$		
Flujo $\Delta q(t) = \dot{V}(t)$	$m^3/s$		

### 2.5. Analogías

Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo matemático, pero que son diferentes físicamente se llaman sistemas análogos. Así pues, los sistemas análogos se describen mediante las mismas ecuaciones diferenciales o conjuntos de ecuaciones. El concepto de sistema análogo es muy útil en la práctica por las siguientes razones:

- La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse directamente al sistema análogo en otro campo.
- Puesto que un tipo de sistema puede ser más fácil de manejar experimentalmente que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico (hidráulico, neumático, etc.), podemos construir y estudiar su análogo eléctrico, dado que éstos son más fáciles de tratar experimentalmente.



Si observamos las ecuaciones que rigen a dichos sistemas, podemos distinguir ciertas analogías entre ambos sistemas.

Mecánico		Eléctrico	Hidráulico
Traslacional	Rotacional	Tensión $U(t)$	Presión $P(t)$
Fuerza $F(t)$	Torque $\tau(t)$	Carga $q(t)$	Volumen $V(t)$
Desplazamiento $x(t)$	Angulo $\theta(t)$	Corriente $i(t)$	Flujo $q(t)$
Velocidad $v(t)$	Veloc. angular $\omega(t)$	Inductancia $L$	-
Masa $M$	Inercia $J$	Resistencia eléctrica $R$	Resistencia hidráulica $R$
Roce $b$	Roce $b$	Capacidad inversa $\frac{1}{C}$	Capacidad hidráulica inversa $\frac{\rho g}{A}$
Constante elástica $k$	Constante elástica de torsión $k$		

### 3. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta matemática que permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica más fácil de resolver. La ecuación diferencial, que puede describir cómo se comporta un sistema físico en el tiempo, se transforma en una relación algebraica sencilla. Se dice que el comportamiento del sistema en el *dominio tiempo* se transforma al *dominio s*.



La transformada facilita el análisis de la relación entre la entrada y la salida de los modelos usados en la teoría de control de procesos y también permite ver cómo determinados sistemas reaccionan ante variaciones externas.

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

#### 3.1. Definición

Consideremos una función  $f(t)$ . La transformada de Laplace de  $f(t)$  se denota  $F(s)$  y se define como

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

donde  $s$  es la variable compleja  $s = \sigma + j\omega$ . La transformada de Laplace transforma una función del dominio temporal al dominio de la variable compleja  $s$ . De esta forma, si la integral existe, se dice que  $F(s)$  es la transformada de Laplace de la función  $f(t)$ .

#### EJEMPLO

Consideremos la función  $f(t) = e^{-at}$ . Su transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} F(s) &= L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \frac{-1}{s+a} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{s+a} [e^{-(a+s)t} \Big|_{t=\infty} - e^{-(a+s)t} \Big|_{t=0}] \\ &= \frac{1}{s+a} [0 - 1] = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

#### 3.2. Propiedades

- **Linealidad**

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

donde  $F(s) = L\{f(t)\}$  y  $G(s) = L\{g(t)\}$

- **Escalado temporal**

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- **Transformada de la derivada**

$$L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0^-)$$



$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

Generalizando, la transformada de la derivada  $n$ -ésima es

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

donde  $f^{(n)}(0^-)$  denota la derivada  $n$ -ésima de  $f(t)$  calculada en  $t = 0^-$

■ **Transformada de la integral**

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

■ **Corrimiento en frecuencia**

$$L\{f(t)e^{-at}\} = F(s + a)$$

**EJEMPLO**

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

Se consideran todas las condiciones iniciales iguales cero. Encuentre la respuesta transformada  $Y(s)$  debido a  $u(t) = e^{-t}$ . La aplicación de la transformada de Laplace implica

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 2(sY(s) - y(0^-)) + 5Y(s) = sU(s) - u(0^-)$$

debido a que todas las condiciones iniciales son nulas, equivale a

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = sU(s)$$

Si sustituimos  $U(s) = L\{u(t)\} = 1/(s + 1)$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = \frac{s}{(s + 1)}$$

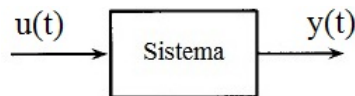
Así la solución transformada es

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 2s + 5)(s + 1)}$$

## 4. Función transferencia

La elección de un modelo para un sistema físico depende fuertemente de la matemática utilizada. No tiene sentido elegir un modelo complejo que describa al sistema físico si no puede ser analizado utilizando los métodos matemáticos existentes. Es inútil también elegir un modelo que pueda ser fácilmente analizado pero que no represente al sistema físico. Así, la elección de los modelos no es una tarea sencilla. Es un nivel de compromiso entre el grado de complejidad del modelo y el grado de descripción del sistema físico real. Los sistemas en este curso se limitarán a aquellos que puedan ser descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias, con coeficientes constantes y reales.

Consideremos un sistema lineal con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , como el mostrado esquemáticamente en la figura siguiente



Supongamos que el sistema está representado por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} - u(t)$$

Existen muchos métodos para resolver dicha ecuación diferencial. El más simple es a través de la transformada de Laplace. Así, aplicando la transformada obtenemos,

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = 3[sU(s) - u(0^-)] - U(s)$$

donde  $\dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$  y las letras en mayúsculas representan la transformada de Laplace. Notar que ahora la ecuación transformada es una ecuación algebraica y puede ser manipulada usando suma, sustracción, multiplicación y división.

Si consideramos las condiciones iniciales igual a cero y agrupamos  $Y(s)$



y  $U(s)$  obtenemos

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (3s - 1)U(s)$$

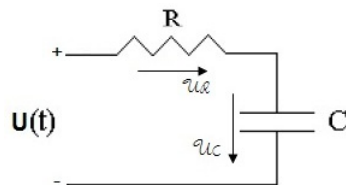
lo que implica

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 3s + 2}U(s) = G(s)U(s)$$

La función racional  $G(s) = (3s - 1)/(s^2 + 3s + 2)$  se llama *función transferencia*. Es la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la entrada cuando **todas las condiciones iniciales son nulas**.

#### EJEMPLO

Observemos el circuito RC que se muestra en la siguiente figura



Si se considera a la corriente como el flujo de carga  $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ , se obtiene la ecuación que describe la dinámica del sistema y permite representar la evolución del flujo de carga respecto al tiempo.

$$u(t) = \dot{q}(t)R + \frac{1}{C} \int \dot{q}(t)dt = \dot{q}(t)R + \frac{1}{C}q(t)$$

Aplicando las propiedades antes vistas, obtenemos

$$U(s) = [sQ(s) - q(0^-)]R + \frac{1}{C}Q(s)$$

Considerando condiciones iniciales nulas ( $q(0^-) = 0$ ), se obtiene

$$U(s) = sRQ(s) + \frac{1}{C}Q(s) = \left(sR + \frac{1}{C}\right)Q(s) = \left(\frac{sRC + 1}{C}\right)Q(s)$$

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

Despejando

$$Q(s) = \frac{C}{sRC + 1}U(s)$$

#### 4.1. Funciones transferencias propias

Consideremos la función transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son dos polinomios de diferentes grados

$$\text{Grado de } N(s) = m$$

$$\text{Grado de } D(s) = n$$

Dependiendo de la relación entre los ordenes de los polinomios, podemos clasificar a la función transferencia  $G(s)$  como:

$$\text{Propia si } n \geq m$$

$$\text{Estrictamente propia si } n > m$$

$$\text{Impropia si } n < m$$

Funciones transferencias impropias son difíciles de construir en la práctica. Por ello, para que el sistema sea físicamente realizable, el grado del polinomio numerador  $m$  deberá ser menor que el grado del polinomio denominador  $n$ .

#### 4.2. Polos y ceros

La respuesta de un sistema está gobernada por su función transferencia. Para ello introduciremos el concepto de *polos* y *ceros*. Consideremos la función transferencia propia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Las raíces de los de los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  serán respectivamente los ceros y los polos de  $G(s)$ . En el plano complejo  $s$  a los ceros de  $G(s)$  se los representa con círculos mientras que a los polos mediante una cruz.



$$G(s) = \frac{2(s + 3)}{(s + 2)(s + 1)}$$

asdasd

### 4.3. Diagrama de bloques

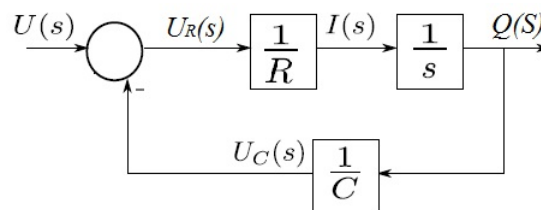
Las ecuaciones diferenciales permiten representar los modelos mediante expresiones matemáticas. Una herramienta muy utilizada que permite representar gráficamente las expresiones matemáticas mencionadas la constituyen los Diagramas de Bloques (DB). En los DBs las variables se representan mediante flechas y las operaciones matemáticas mediante distintos bloques.

#### EJEMPLO

Consideremos el circuito RC del ejemplo anterior. La función transferencial  $G(s)$  obtenida era

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{C}{sRC + 1}$$

Así, el diagrama de bloques de dicho sistema es



## 5. Respuesta temporal

El paso siguiente al desarrollo de un modelo matemático de un determinado sistema físico, es el análisis. Existen dos tipos de análisis: cuantitativo y cualitativo. En el análisis cuantitativo, nos interesamos en la respuesta exacta

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

de sistemas ante determinadas excitaciones. En análisis cualitativos, en cambio, nos interesamos en propiedades generales del sistema. A continuación estudiaremos ambas.

#### 5.1. Sistemas de primer orden

Consideremos el sistema de primer orden del ejemplo anterior. Podemos escribir la función transferencia como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{C}{sRC + 1} = \frac{k}{s\tau + 1}$$

donde  $\tau = RC$  es la constante de tiempo del circuito y  $k$  la ganancia final. Si aplicamos un voltaje constante  $u(t) = e$ , entonces  $U(s) = e/s$ , y

$$Q(s) = \frac{k}{s\tau + 1} \cdot \frac{e}{s} = \frac{ek}{s} - \frac{ek\tau}{s + 1/\tau}$$

lo que implica que

$$q(t) = ek - ek e^{-(1/\tau)t}$$

Esta respuesta, que se muestra en la Figura 8(a), se llama *respuesta al escalón*. Como  $e^{-(1/\tau)t}$  se aproxima a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  tenemos que el valor final es,

$$q_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = ek$$

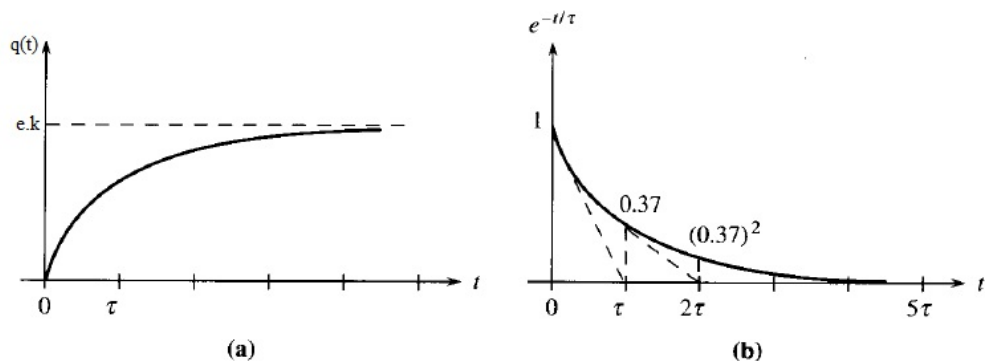


Figura 8

Cuando se desea controlar sistemas, estamos interesados no sólo en el



valor final sino también en la velocidad de respuesta; esto es, cuán rápido se llega al valor final. Para la función transferencia vista, la velocidad de respuesta está gobernada por  $\tau$ , la constante de tiempo del circuito. En la siguiente tabla se puede observar el valor de  $e^{-(1/\tau)t}$  para diferentes valores de  $t$ .

$t$	$e^{-t/\tau_m}$
$\tau_m$	$(0.37)^1 = 0.37$
$2\tau_m$	$(0.37)^2 = 0.14$
$3\tau_m$	$(0.37)^3 = 0.05$
$4\tau_m$	$(0.37)^4 = 0.02$
$5\tau_m$	$(0.37)^5 = 0.007$

## 5.2. Sistemas de segundo orden

Consideremos un sistema de segundo orden cuya función transferencia  $H(s)$  tenga la forma

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

Llamaremos a  $H(s)$  *función transferencia cuadrática* y estudiaremos la respuesta al escalón. La función transferencia  $H(s)$  tiene dos polos y ningún cero. Sus polos están ubicados en:

$$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} =: -\sigma \pm j\omega_d \quad (2)$$

donde  $\sigma := \xi\omega_n$  y  $\omega_d := \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ . Se encuentran dibujados en la Figura 9. La constante  $\xi$  se llama *coeficiente de amortiguamiento*;  $\omega_n$  *frecuencia natural no amortiguada*;  $K$  *ganancia estática*;  $\sigma$  *factor de amortiguamiento*; y  $\omega_d$  *frecuencia actual*.

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

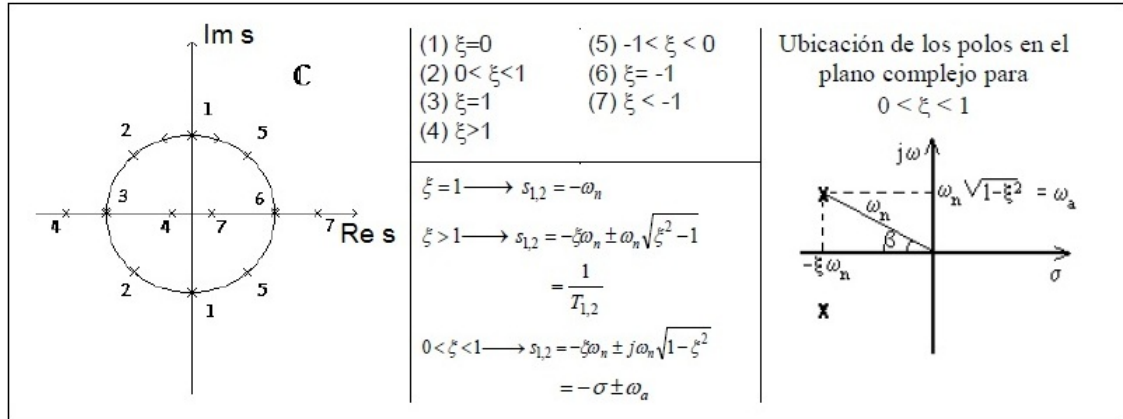


Figura 9: Polos en un sistema de segundo orden.

Amortiguamiento $\xi$	Polos	Tipo de sistema
$\xi = 0$	Imaginarios puros	Marginalmente estable
$0 < \xi < 1$	Complejos conjugados	Sub-amortiguado
$\xi = 1$	Reales dobles	Amortiguamiento crítico
$\xi > 1$	Reales distintos	Sobre-amortiguado
$\xi < 0$	-	Inestable

Claramente si el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  es cero, los dos polos  $\pm j\omega_n$  son imaginarios puros. Si  $0 < \xi < 1$ , los dos polos son complejos conjugados y así sucesivamente.

Consideremos la respuesta temporal de la función transferencia (1) ante una entrada escalón unitario. Si el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  es cero, o  $\sigma = \xi\omega = 0$ , entonces  $y(t) = e^{-\sigma t} \text{sen}(\omega_d t + \theta)$  se reduce a una senoidal pura por lo que  $y(t)$  permanece oscilando indefinidamente. En este caso el sistema se dice que es *marginalmente estable*. Si  $0 < \xi < 1$ , la respuesta  $y(t)$  contiene una oscilación que decrece con el tiempo como muestra la Figura 10. En este caso se dice que el sistema es *sub-amortiguado*. Si  $\xi > 1$ , los dos polos de (1) son reales y distintos y la respuesta al escalón unitario no tendrá ni oscilaciones ni sobre-valor. En este caso se dice que el sistema es *sobre-amortiguado*. El sistema tiene *amortiguamiento crítico* si  $\xi = 1$ . En



este caso, los dos polos son reales y repetidos, y la respuesta está al borde de tener oscilación y sobre-valor.

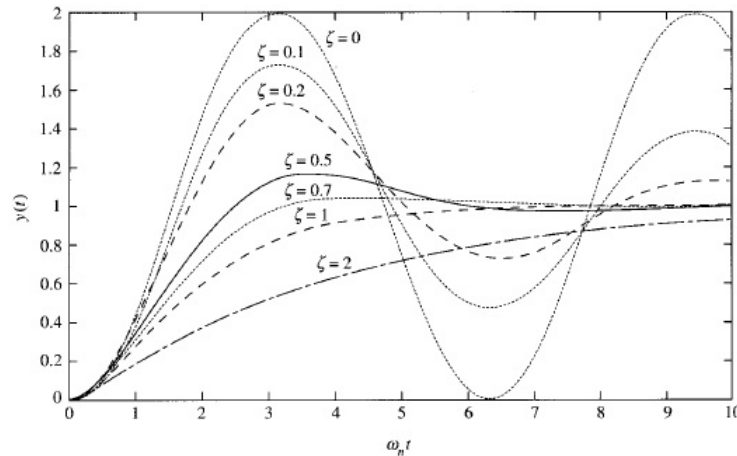


Figura 10: Respuesta temporal de transferencias cuadráticas al escalón unitario para distintos  $\xi$ .

La respuesta al escalón de (1) es gobernada por la frecuencia de oscilación natural  $\omega_n$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ . Como el eje de tiempo de la Figura 10 es  $\omega_n t$ , cuanto más grande sea  $\omega_n$ , más rápida será la respuesta. El coeficiente de amortiguamiento influye en el sobre-valor; más chico  $\xi$ , más grande el sobre-valor.

### EJEMPLO

La función transferencia del sistema de suspensión de un automóvil mostrada en el capítulo 1 es

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + k_1s + k_2} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{k_1}{m}s + \frac{k_2}{m}} = \frac{1}{k_2} \frac{k_2/m}{s^2 + \frac{k_1}{m}s + \frac{k_2}{m}}$$

Si no hay fricción, o sea  $k_1 = 0$ , entonces el factor de amortiguamiento  $\xi$  es cero. En este caso, el auto permanecerá oscilando después de atravesar un bache. Comparando la función transferencia del sistema de amortiguamiento con la ecuación (1) tenemos

$$\frac{k_2}{m} = \omega_n^2 \quad \frac{k_1}{m} = 2\xi\omega_n \quad K = 1/k_2$$

## Capítulo II Función Transferencia

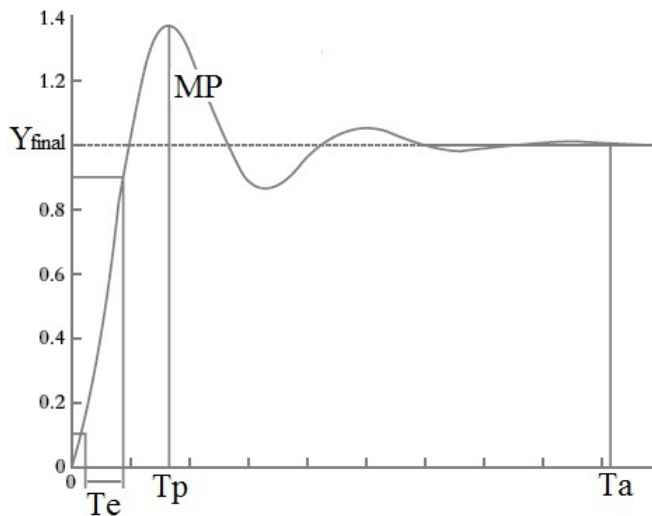
### Tecnología de Control

Si elegimos  $\xi = 0,7$  y  $\omega_n = 2$  de la Figura 10 podemos observar que el automóvil tomará 2 segundos en retornar a su posición horizontal original después de pasar por arriba de un bache. Para obtener estos valores,  $k_1$  y  $k_2$  deben ser

$$k_2 = 2^2 m = 4m \quad \frac{k_1}{m} = 2 \cdot 0,7 \cdot 2m = 2,8m$$

Así, la suspensión de un automóvil puede ser controlada utilizando  $k_1$  y  $k_2$  adecuados.

Para diseñar sistemas de control, es necesario identificar determinados parámetros de comportamiento en régimen transitorio, así como especificar ciertas condiciones que el sistema debe satisfacer. Una de las señales de prueba más comunes para este tipo de análisis es la entrada escalón unitario. La respuesta al escalón de un sistema sub-amortiguado  $0 < \xi < 1$  de segundo orden se tomará como referencia, cuyo comportamiento se representa en la siguiente figura.



- Máximo pico de sobreimpulso MP

Es la máxima sobre-desviación de la respuesta del sistema con respecto a su valor final.

$$MP = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$



- Tiempo de pico  $T_p$

Es el tiempo que requiere el sistema para alcanzar su máximo pico de sobre-impulso.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- Tiempo de asentamiento  $T_a$

Tiempo que requiere el sistema para alcanzar su valor final práctico; esto es, el tiempo para que transcurran cuatro constantes de tiempo.

$$T_a = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

- Tiempo de elevación  $T_e$

Tiempo requerido por el sistema para que su respuesta pase del 10 % al 90 % de su valor final.

En la siguiente tabla se observan los diferentes parámetros asociados a los distintos tipos de sistemas amortiguados; los resultados presentados se asocian directamente con la figura anteriormente analizada.

Tipo de sistema	Tiempo de elevación	Máximo pico de sobreimpulso	Tiempo pico	Tiempo de asentamiento
Libre oscilatorio	No existe	No existe	No existe	No existe
Sobreamortiguado	Existe	No existe	No existe	Existe
Críticamente amortiguado	Existe	No existe	No existe	Existe
Subamortiguado	Existe	Existe	Existe	Existe

## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

#### 5.3. Teorema del valor inicial y del valor final

Generalmente, además de analizar la evolución de la respuesta al escalón de una determinada función transferencia  $F(s)$ , nos interesa saber el valor del cual parte y llega dicha respuesta. Para ello utilizaremos dos teoremas; el *Teorema del Valor Final*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

y el *Teorema del Valor Inicial*

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

#### EJEMPLO

La siguiente función transferencia propia relaciona la salida transformada  $Y(s)$  con la entrada transformada  $U(s)$ :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + b_0}$$

Consideremos una entrada escalón  $u(t)$  de valor  $A$ . Aplicando los Teoremas de Valor Inicial y Final podemos obtener el valor inicial y final de la respuesta  $y(t)$ , respectivamente

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{A}{s} \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} A \cdot G(s) = A \cdot a_1$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} A \cdot G(s) = A \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

#### 5.4. Estabilidad

En esta sección, una propiedad cualitativa de los sistemas llamada estabilidad será introducida. El concepto de estabilidad es muy importante porque todos los sistemas controlados deben ser estables. Si un sistema no es estable, generalmente se quema o se desintegra. Existen diversos tipos de estabilidad, en este curso estudiaremos la *BIBO* estabilidad. (Del inglés entrada acotada-salida acotada).



Una función  $u(t)$  definida para  $t \geq 0$  se dice que es *acotada* si su magnitud no tiende a infinito o, equivalentemente, existe una magnitud  $M$  tal que

$$|u(t)| \leq M < \infty$$

**Definición:** Un sistema es BIBO estable si para cada entrada acotada su salida es acotada. Si no, se dice que el sistema es inestable.

Así, la inestabilidad de un sistema puede deducirse encontrando una entrada acotada que provoque una salida no acotada. Sin embargo, es difícil deducir la estabilidad de este modo ya que existen infinitas entradas acotadas a ser chequeadas. Afortunadamente, existe el siguiente teorema.

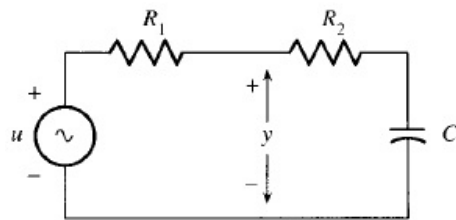
**Teorema:** Un sistema cuya función transferencia es  $G(s)$  se dice estable si y solo si todos los polos de  $G(s)$  tienen parte real negativa.

Este teorema indica que un sistema es inestable si su función transferencia tiene uno o más polos con parte real positiva o igual a cero. Así, la estabilidad de un sistema depende solamente de los polos de la función transferencia y no de los ceros. Si todos los polos se encuentran en el semi-plano negativo complejo, el sistema es estable sin importar dónde se encuentren los ceros.

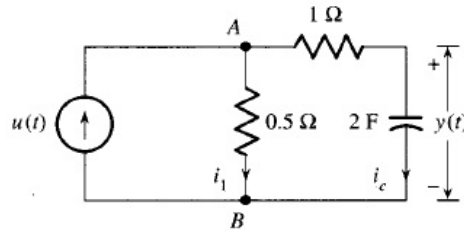
## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

1. Encontrar la ecuación diferencial que describe el circuito de la figuras a) y b).

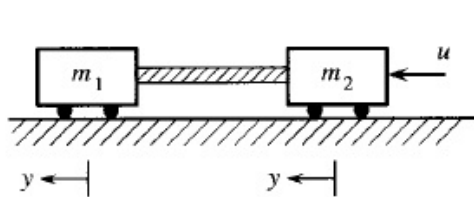


(a)

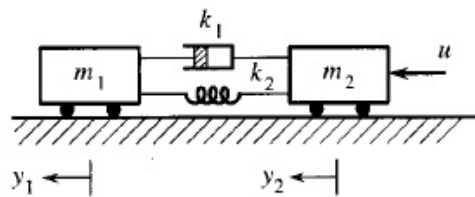


(b)

2. a) Considere el sistema de la Figura a). Los dos bloques están conectadas a través de una barra rígida. Si se asume que no existe fricción entre el piso y los carros, encuentre la ecuación diferencial que describe al sistema.  
 b) Ahora encuentre la ecuación diferencial para el sistema de la Figura b)

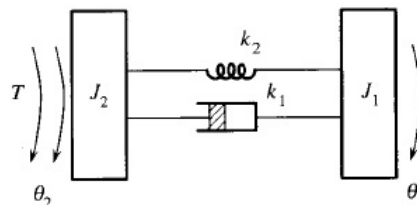


(a)



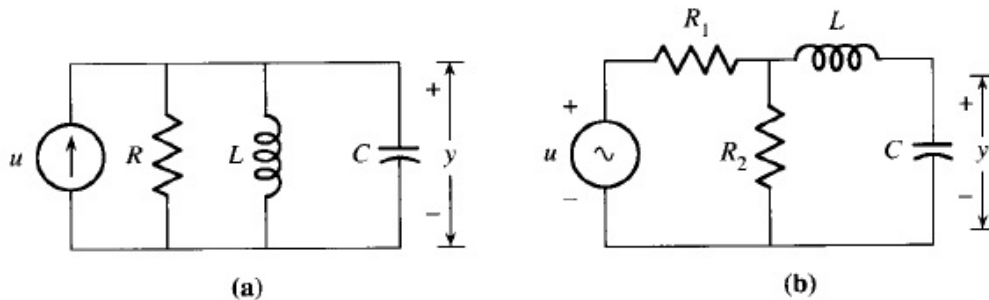
(b)

3. Si el brazo de un robot es largo su dinámica debe ser modelada como el sistema que se observar en la figura. Encontrar la ecuación diferencial que describe el sistema.

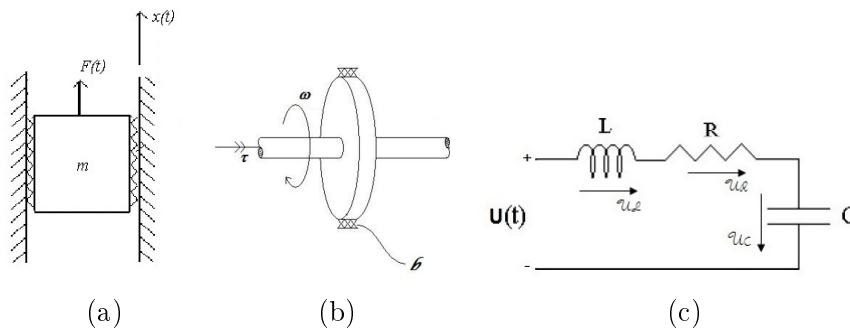




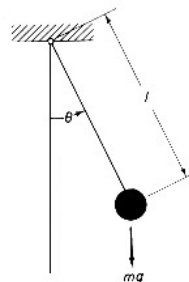
4. Encontrar la ecuación diferencial que describe a los sistemas de las figuras a) y b).



5. Para los sistemas de las figuras determinar el modelo matemático, planteando todas las ecuaciones.



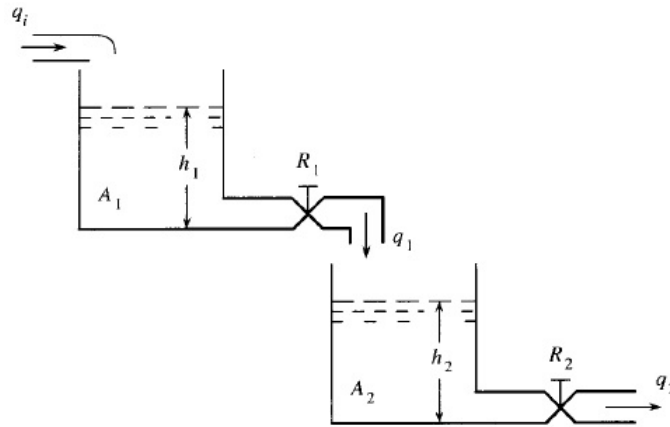
6. El péndulo de la figura tiene una esfera de masa  $m$ . Suponiendo que no hay fricción y que la cuerda es de masa despreciable y no posee elasticidad, encuéntrase la ecuación analítica del movimiento del péndulo.



## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

7. Encuentre la relación entre el flujo de entrada  $q_i$  y el flujo de salida  $q_2$ .



8. Obtener, a partir de la tabla de transformadas, la transformada de Laplace para las siguientes funciones:

- a)  $f(t) = t^2$
- b)  $g(t) = t^2 e^{-at}$
- c)  $h(t) = t^2(1 + e^{-at})$
- d)  $p(t) = e^{-at} \cos(2t)$

9. Emplear la transformada de Laplace para resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4 \text{ donde } x = 0 \text{ en } t = 0$$

10. Aplicar la Transformada de Laplace para los siguientes casos:

- a)  $f(t) = t^2 + 6t - 3$
- b)  $f(t) = (1 + e^{-2t})^2$
- c)  $f(t) = (1 + t)^3$
- d)  $f(t) = 2t^2 + e^{5t}$
- e)  $f(t) = e^{2t} \cos(2t)$

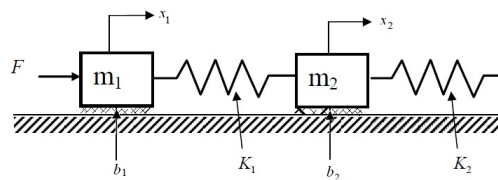
11. Para los siguientes casos calcular la expresión  $v(s)/u(s)$ :

- a)  $\dot{v}(t) + 2v(t) = u(t)$



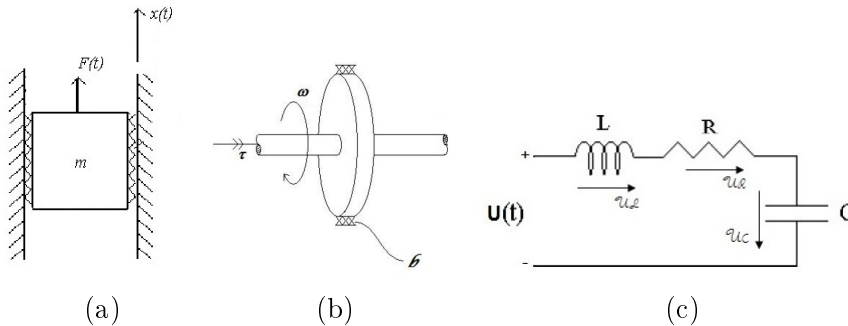
b)  $\dot{v}(t) + 3v(t) = 4u(t)$

12. Para el sistema de la figura hallar la función transferencia que vincula la entrada  $F$  con la salida  $x_2$ .



Observación: Notar que la fuerza del resorte  $f_{resorte}$  es proporcional al estiramiento o compresión de este.

13. Para los sistemas de las figuras determinar el modelo matemático, planteando todas las ecuaciones.

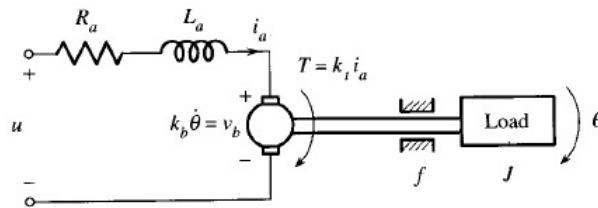


14. La figura muestra el modelo del motor de corriente continua MCC.

- Encontrar la ecuación diferencial que describe al sistema
- Obtener la transformada de Laplace de dicho sistema tomando como entrada la tensión  $u(t)$  y la salida  $\theta(t)$
- Graficar el diagrama de bloques
- Obtener los polos y ceros del sistema

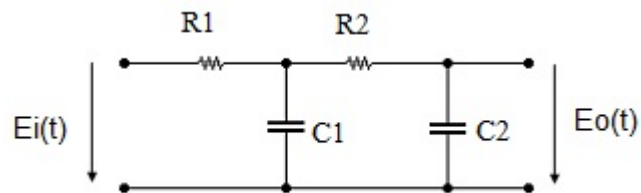
## Capítulo II Función Transferencia

### Tecnología de Control

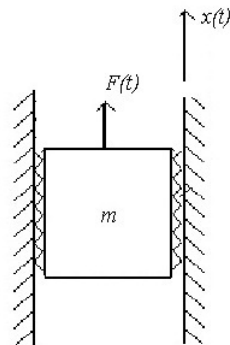


15. Para los siguientes sistemas, determinar la función transferencia.

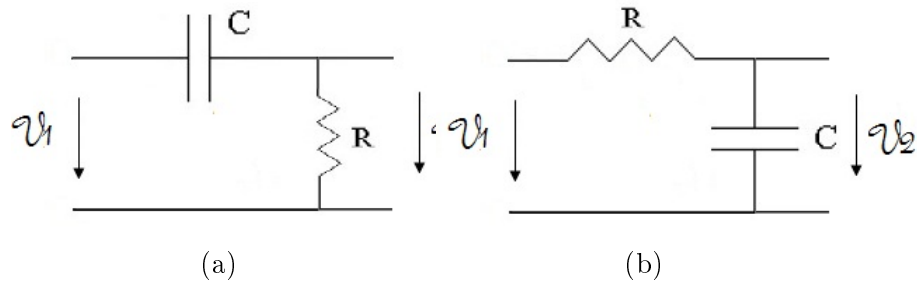
a) Sistema capacitivo-resistivo.



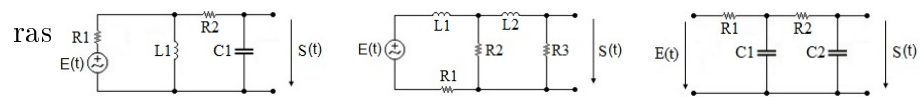
b) Sistema masa vertical con fricción.



c) Sistemas RC



d) Encontrar la ecuación diferencial que describe el circuito de la figu-

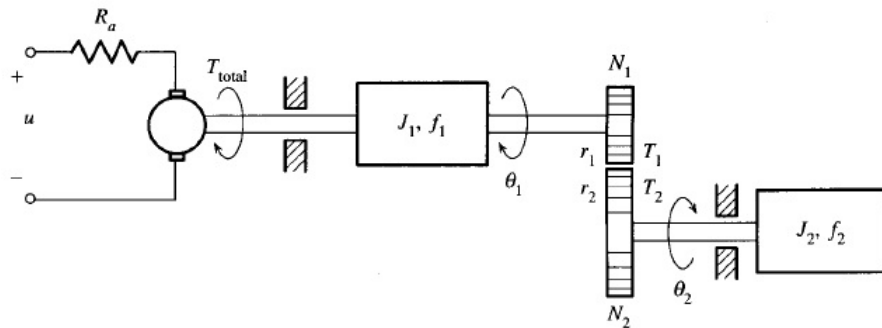


## Capítulo II Función Transferencia

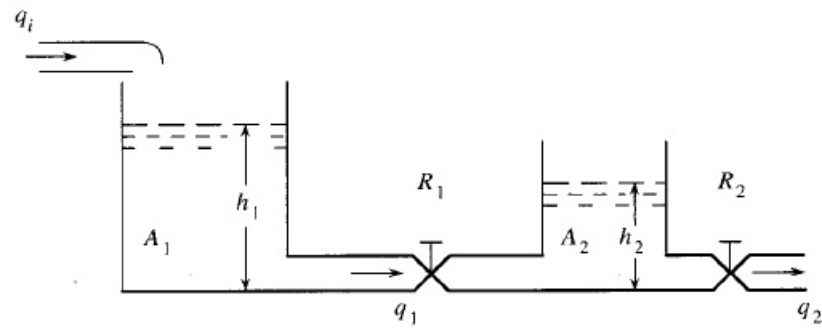
### Tecnología de Control

16. Analizar los sistemas de las figuras

a



b





---

## Referencias

- CHEN, C.**, *Analog and Digital Control System Design: Transfer-function, State-space, and Algebraic Methods*, Oxford University, New York, 1995.
- PENDINO, C.**, *Fundamentos de Control*, Instituto Politécnico, 2002.
- KARNOPP, D Y ROSENBERG**, *Introduction to Physical System Dynamics*, Mc. Graw Hill, New York, 1983.
- CÁTEDRA DE DINÁMICA DE LOS SISTEMAS FÍSICOS**, *Sistemas Fluidodinámicos*, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, 1995.
- OGATA, K.**, *Ingeniería de control moderna*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1993.
- DORF, R.**, *Sistemas modernos de control*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., U.S.A, 1989.
- HERNÁNDEZ GAVIÑO, R.**, *Introducción a los sistemas de control*, Prentice-Hall, México, 2010.