Proyectos Innovadores en Educación Matemática

Vol. 1

Año 2022

FCEIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
CONFINGERE HOMINEM COGITANTEM

Dra. Ana Casali	Directora de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Dr. Ariel Lombardi	Director del Departamento de Matemática
Lic. Mariela Cirelli	Directora del Profesorado en Matemática
Dra. Natalia Sgreccia	Docente del Seminario Proyectos Innovadores en Educación Matemática
	Directora Editora de la Publicación
Prof. Sabrina Grossi	Diseño del Logo

Índice

Presentación

Dra. Natalia Sgreccia
sgreccia@fceia.unr.edu.ar
Docente del Seminario

Es un honor para mí haber dado curso en el año 2021 a la primera edición del Seminario Proyectos Innovadores en Educación Matemática de la carrera Profesorado en Matemática del Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.

A partir de problematizar el propio trayecto de la Práctica Profesional Docente, seis futuras profesoras o profesoras noveles han desplegado posibilidades de acción en términos de innovación educativa en Matemática.

Las mismas fueron socializadas en la comunidad educativa de la unidad académica en una Jornada Institucional de Socialización de Cierre de Trayectos, junto a Práctica Profesional Docente IV. Contar, a su vez, con la inauguración de una publicación seriada otorga relevancia a sus propuestas, para darlas a conocer a un público más amplio.

Como se plantea en el Plan de Estudios, Proyectos Innovadores en Educación Matemática comprende un espacio curricular de contenido flexible, con el fin de posibilitar la profundización o ampliación de conocimiento. Se ocupa de la configuración de problemáticas relativas a la Educación Matemática en situaciones de enseñanza, aprendizaje y evaluación de saberes, donde se alienta el fortalecimiento del compromiso social universitario y al mismo tiempo el rol del profesor en Matemática como agente propulsor de justicia educativa y curricular. Se lo hace a partir del planteamiento de proyectos socioeducativos que atiendan a necesidades emergentes de la Práctica Profesional Docente.

Acorde a ello, se desarrolla mediante la modalidad Seminario, entendida como un espacio académico para el estudio en profundidad de problemas relevantes para la formación profesional, a través de los aportes de marcos teóricos de una o varias disciplinas mediante la lectura interpretativa de variadas fuentes. Sucintamente, se basa en un trabajo reflexivo que, con sustento en literatura específica, procura provocar la apropiación crítica de la construcción del conocimiento a partir de la producción socializada.

Introducción

Las matemáticas están presentes en todo lugar y en todo momento. Desde una regla de tres para comprar en la panadería a una integral para calcular el flujo de un río. También las encontramos en cuestiones abstractas. Y por supuesto en las ciencias, potenciadas por los descubrimientos desde los tiempos del Renacimiento: exactas y naturales, sociales y hasta en las artes como la música, la escultura y el dibujo. Seguramente por eso es que Galileo dijo que "*La matemática es el lenguaje en el que Dios escribió el universo*". Un universo que muchos consideran se puede explicar por números y relaciones matemáticas.

Matemáticas en continuo desarrollo, como herramienta de nuevos descubrimientos y formas de ver al mundo. Necesitamos entender las matemáticas para poder entender lo que nos rodea. Por todo esto se evidencia el requerimiento de innovar a través de nuevos mecanismos para la formación y la enseñanza de esta disciplina.

De allí que el Seminario "*Proyectos Innovadores en Educación Matemática*", cuyos seis primeros trabajos se presentan en este volumen, representa una muestra concreta del desarrollo de una herramienta creativa dirigida a lograr una formación sólida para los nuevos profesores de matemáticas tanto en lo disciplinar como en lo pedagógico. Esto valida y refuerza el rol de sus docentes, no solo formadores de formadores sino de futuros profesionales y científicos, así como de ciudadanos con mentalidades abiertas a nuevas posibilidades gracias a la exposición a esta disciplina.

Dr. Claudio Pairoba
Comunicador científico
Ex director Área Comunicación Estratégica de la Ciencia
Secretaría de Ciencia y Tecnología
Universidad Nacional de Rosario

Habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en el Ciclo Básico de la Educación Secundaria

Conjecture and demonstration skills for the calculation of volumes of polyhedra geometric bodies in the high school

Bianca Di Biaggio
biancadibiaggio4423@gmail.com

Resumen
Esta investigación, basada en los Niveles de Pensamiento Geométrico de la teoría de Van Hiele, se propone realizar una caracterización acerca de las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros desarrolladas en propuestas de enseñanza de libros de texto del Ciclo Básico de Educación Secundaria. Además, busca reconocer de forma complementaria otros portales educativos que resulten de aporte a tal contenido. Para realizar dicho cometido, se realiza un análisis documental y una posterior descripción y articulación de las propuestas con los Niveles de Van Hiele. Consecuentemente se despliega una propuesta de enseñanza innovadora de tal contenido, con el objetivo de generar un aporte superador respecto de lo investigado. Se pretenden generar situaciones didácticas que permitan a los estudiantes elaborar conjeturas y demostraciones. Por otra parte, se optó por el ámbito de la Geometría por proporcionar un rico contexto para el desarrollo del razonamiento matemático y, en particular, por el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros por ser un contenido que generalmente es impuesto en las clases de Matemática.
Palabras clave
Habilidades de conjeturación y demostración. Volumen. Cuerpos geométricos Poliedros. Niveles de Pensamiento Geométrico. Teoría de Van Hiele. Libros de texto. Portales Educativos.

Abstract
This research, based on the Levels of Geometric Thought of the Van Hiele theory, aims to make a characterization about the skills of conjecture and demonstration for the calculation of volumes of polyhedra geometric bodies developed in proposals of teaching of high school. It also seeks to recognize in a complementary way other educational portals that result in a contribution to such content. To carry out this task, a documentary analysis, a description and an articulation of the proposals with the Van Hiele Levels are carried out. Consequently, an innovative teaching proposal of such content is deployed, with the aim of generating a superior contribution regarding what was investigated. It is intended to generate didactic situations that allow students to elaborate conjectures and demonstrations. On the other hand, the field of Geometry was chosen to provide a rich context for the development of mathematical reasoning, and particularly, for the calculation of volumes of polyhedra geometric bodies, since it is generally a knowledge imposed in Mathematics classes.
Keywords
Conjecture and demonstration skills, Volume, Polyhedra geometric bodies, Levels of Van Hiele geometric thinking, Van Hiele theory of geometric thought, Textbooks, Educational Portals.

1. Presentación

Esta sección se compone de tres apartados que delimitan los asuntos de interés del proyecto innovador en Educación Matemática. Primeramente, se presenta la problemática del estudio de la cual se desprenden los interrogantes de la investigación. En función de estos interrogantes, en un segundo apartado se dan a conocer los objetivos. A continuación, se desarrolla el estado del arte, donde se realiza un recorrido por ciertos trabajos que abordan el desarrollo de habilidades de conjeturación y demostración, y la enseñanza de los cuerpos geométricos poliedros.

1.1. Problemática

En general, en el Sistema Educativo Argentino, se observa una escasez de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes elaborar conjeturas y demostraciones y, por ende, desarrollar las habilidades que estas requieren. En efecto, tal como indica Gascon (2000), muchas veces se ignoran estas instancias esenciales de elaboración de conjeturas y el razonamiento que permite su formulación. De esta forma quedan las fases exploratorias de la actividad matemática muy debilitadas, bajo la exclusiva responsabilidad del alumno y sin ningún tipo de institucionalización. De allí la necesidad de remarcar la importancia de la existencia de estos momentos de exploración, ya que permiten desarrollar la capacidad de análisis, así como también, el pensamiento crítico y la metacognición, aspectos fundamentales en la formación científico-académica.

Además, la elaboración de conjeturas constituye una instancia muy importante del trabajo matemático y resulta oportuno insistir en que los matemáticos realizan sus descubrimientos escalonadamente y atendiendo más bien a lo sustantivo que a lo formal. Al respecto, Chevallard et al (1997) mencionan que cuando uno se enfrenta a un problema que debe resolver o a una cuestión que quiere estudiar, el estudio de la cuestión entra en una fase exploratoria, donde tiene una importancia fundamental la elaboración de conjeturas y, por ende, el razonamiento que las mismas permiten desarrollar.

En relación con lo expuesto, se considera fundamental que las propuestas didácticas matemáticas acerquen al estudiantado al quehacer de un matemático como una forma de fomentar el desarrollo de estas habilidades para construir aprendizajes significativos, que además muestren que históricamente los resultados matemáticos no se dieron de forma inmediata, ni son mágicos o solo obras de mentes brillantes, sino que requirieron de un largo proceso de exploración. Efectivamente, según Castro (2001), “este proceso de conjetura, prueba, refutación y modificación relaciona la génesis de la demostración con historia y contexto social y cultural, un todo en devenir dialéctico que como tal debe ser contemplado en la enseñanza de las Matemáticas” (p.48).

En este marco, “la Geometría proporciona un rico contexto para el desarrollo del razonamiento matemático, incluyendo los razonamientos inductivos y deductivos, dando validez a conjeturas, y clasificando y definiendo objetos geométricos” (Afonso, 2003, p.87). Sin embargo, Ciccioli y Sgreccia (2020) reconocen que algunas investigaciones han indicado la ausencia o superficialidad en el abordaje de contenidos geométricos, con énfasis en lo algebraico, sin vinculación o complementariedad entre la Geometría “de las formas -sintética- y la de coordenadas -analítica-” (p.9). Al respecto, Afonso (2003) remarca la necesidad de recuperar el abordaje de contenidos geométricos en la escuela, puesto que permiten un mejor conocimiento del espacio y son una fuente de modelos y situaciones problemáticas sumamente enriquecedoras para el aprendizaje de la Matemática.

En particular, se establece en el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) de la Provincia de Santa Fe (2014) que en el Ciclo Básico de la escolaridad secundaria se sugiere profundizar en la producción y el análisis de construcciones geométricas y propiciar el control de estas tareas, esto es, decidir si la respuesta a los problemas planteados y el procedimiento utilizado para obtenerla, son válidos. Puntualmente se menciona la producción de fórmulas para el cálculo de volumen. Sin embargo, Abrate et al (2006) mencionan que el aprendizaje de las fórmulas de volumen se ha basado, casi exclusivamente, en un estudio memorístico y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas. De hecho, a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros estudiantes son bidimensionales, lo que condiciona su desarrollo integral.

En esta línea, se considera de interés el estudio de los poliedros, pues como plantean Zapata et al (2008), puede propiciar tres tipos de procesos cognitivos importantes para el despliegue del pensamiento espacial: visualización, construcción y razonamiento. Al respecto, Gonzato et al (2011) mencionan que el desarrollo de habilidades de orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos se considera un objetivo valioso y necesario para cualquier ciudadano. De allí que figure en numerosos lineamientos curriculares como un medio para describir y modelizar el mundo físico.

Por otro lado, las estrategias, materiales y recursos didácticos son un apoyo importante para el docente a la hora de enseñar un contenido y actualmente existe una gran variedad de ellos. De hecho, según Abrate et al (2006), "el libro de texto es uno de los recursos más utilizado en la enseñanza, que tiene una gran influencia a la hora de decidir qué y cómo enseñar, y que con el tiempo se ha convertido en el principal controlador del currículo escolar" (p.1).

En este sentido, Villella (2001; citado en Abrate et al, 2006) sostiene que "los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a los alumnos y que, algunas veces, ellos mismos usan" (p.2). De esta forma, el libro de Matemática se convierte en un legitimador de los contenidos prescritos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas (Abrate et al, 2006).

Como consecuencia, debido a la importancia que tiene el libro de texto para la planificación del docente y a la vista del tratamiento superficial que se realiza en la escuela media a la hora de conjeturar o demostrar resultados para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, surgen los siguientes interrogantes: ¿Cómo fomentar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria? ¿Qué tipos de abordajes realizan los libros de texto de educación secundaria que circulan en el mercado, sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros? ¿Qué otros recursos complementarios, como soportes digitales o manipulativos, pueden fomentar el desarrollo de estas habilidades? ¿Qué propuestas innovadoras pueden promover las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria?

1.2. Objetivos

En correspondencia con los interrogantes delimitados, los objetivos de este proyecto son los siguientes:

Objetivo general

Promover habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.

Objetivos específicos

- Caracterizar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros desarrolladas en libros de texto de educación secundaria que circulan en el mercado.
- Reconocer de forma complementaria otros recursos que fomenten las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.
- Idear propuestas innovadoras que promuevan las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.

1.3. Estado del arte

En lo que sigue se realiza una revisión documental que tiene como objetivo recuperar resultados de investigaciones recientes, vinculadas con la temática de estudio. En esta búsqueda se incluyen investigaciones relacionadas directamente con el proceso de conjeturación y demostración; trabajos que combinan utilización de softwares/recursos con la habilidad de realizar conjeturas geométricas; estudios sobre tipos de demostraciones y razonamiento geométrico; y una investigación sobre caracterización de libros de texto.

Softwares/Recursos - Conjeturas - Geometría

Algunos trabajos combinan la utilización de softwares o recursos para la realización de conjeturas geométricas, en efecto, en el taller dictado por Advíncula (2018) se propone resolver problemas que involucren la realización de construcciones geométricas a través de GeoGebra como medio para estimular la exploración y el descubrimiento de propiedades. Además, se analiza su papel en la elaboración y verificación de conjeturas, y en la generalización de propiedades al resolver problemas geométricos. Para dicho cometido, diseñaron actividades con sustento en la teoría de Van Hiele (1957) y el enfoque instrumental de Rabardel (1995).

A partir de este taller, se obtuvo que el uso de GeoGebra en la resolución de problemas geométricos permite la realización de construcciones dinámicas e interactivas, que pueden ser modificadas de manera casi inmediata, lo cual facilita el desarrollo del pensamiento geométrico. Asimismo, se afirma que GeoGebra ayuda a explorar y descubrir propiedades geométricas, así como a elaborar y verificar conjeturas, lo cual contribuye con el desarrollo de competencias argumentativas.

Como conclusión, se menciona que las actividades diseñadas para ser trabajadas con apoyo de GeoGebra permiten generar espacios donde los participantes pueden construir figuras, explorar y descubrir relaciones y propiedades geométricas, identificar las condiciones necesarias para resolver problemas, elaborar y validar conjeturas, justificar y argumentar sus soluciones y procedimientos utilizados.

Por otro lado, en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Advíncula (2013) comparte una experiencia que realizó en el curso Introducción a la Matemática Universitaria de la Facultad de Estudios Generales y Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La misma consistió en introducir el tema poliedros a través de la utilización del ambiente de Geometría dinámica Cabri 3D. Durante la experiencia se observó que este software favorece la visualización de los poliedros y facilita el reconocimiento de sus propiedades al permitir que los sujetos manipulen representaciones dinámicas y tridimensionales, para que luego analicen, generalicen y comprueben conjeturas. En efecto, la potencialidad del arrastre que posee el Cabri 3D permite que los estudiantes realicen cambios inmediatos sobre las figuras construidas y observen cómo se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes. De esta forma, el software Cabri 3D resulta ser un recurso que contribuye con el desarrollo de niveles superiores de razonamiento debido a su flexibilidad y versatilidad.

En esta línea, el trabajo de Villarroel y Sgreccia (2012) propone la utilización de materiales didácticos concretos tridimensionales para enseñar Geometría en primer año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad). Luego de una caracterización de los mismos, las autoras reconocen habilidades geométricas que su uso intencionado permite desarrollar e identifican siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia y objetos del entorno real. Dependiendo de la intencionalidad didáctica, pueden a su vez identificarse nueve criterios de agrupamiento: cualidad, materia prima, disponibilidad, movilidad, dimensión, contenidos conceptuales, modelo de razonamiento, habilidades geométricas y versatilidad. Entre ellos se consideran algunos oportunos para trabajar sobre propiedades de los cuerpos geométricos poliedros.

Por ejemplo, se incluyen modelos de cuerpos espaciales poliedros, los cuales según el modo en que estén fabricados, es posible analizar diferentes propiedades, como por ejemplo se muestran unos fabricados de plástico transparente o acrílico en los cuales se pueden observar sus secciones planas. Además, se menciona el geoplano triangular o isométrico el cual podría servir para el estudio de poliedros y la identificación de caras, aristas y vértices. Los rompecabezas geométricos por disección a partir de los cuales se puede realizar una interpretación de formas compuestas, como desarrollos planos de poliedros. También se incluyen transformaciones dinámicas como poliformas a partir de las cuales se pueden generar todos los poliedros con caras y vértices congruentes; realizar una comprobación experimental de su existencia; analizar sus posibles desarrollos planos; generar combinatoria de formas poliédricas hechas con más de un tipo de pieza; validar la existencia de poliedros convexos; entre otros. Por otro lado, dentro de este mismo grupo se incluyen retículas que pueden servir para la construcción de estructuras de poliedros y la visualización de sus relaciones estructurales. Otros que se incluyen son los desarrollos planos a partir de los cuales se puede analizar la relación entre el número de aristas, vértices y caras de un poliedro cualquiera y los origamis que permiten descomponer un poliedro en cuerpos más pequeños. Por último, la alternativa más común es la cartulina, la cual puede utilizarse como recurso para la construcción de poliedros.

En este trabajo, se concluye que la utilización de materiales didácticos concretos puede favorecer el desarrollo de habilidades geométricas, siempre que sea de forma intencionada y con un propósito claro.

Estas contribuciones muestran los beneficios de la utilización de softwares de geometría dinámica o materiales concretos en el fomento de habilidades de conjeturación y demostración, y en específico en torno a los poliedros.

Demostración - Razonamiento geométrico

En principio, Lárez (2014) documenta y analiza la importancia de las demostraciones geométricas como resolución de problemas. Además, esboza un modelo para realizar demostraciones, la Prueba a Dos Columnas (PDC). La PDC es una forma metódica de presentar las demostraciones y resulta de interés en el diseño de la propuesta innovadora dado que consiste en ubicar las proposiciones en una columna, y las razones que justifican las proposiciones en otra columna adjunta. Es una herramienta que permite estructurar el conocimiento geométrico mediante una serie de pasos encadenados lógicamente hasta llegar a validar, mediante ellos, una proposición dada. Además, permite al estudiante la adquisición de destrezas procedimentales y cognitivas generales que favorecen el desarrollo del conocimiento geométrico y al docente, la habilidad para mediar y controlar el proceso de producción. En este artículo se evidencia cómo estudiantes de Educación Media tienen la posibilidad de familiarizarse con el proceso formal lógico deductivo.

Por otro lado, es de interés para esta investigación, que a partir de una nueva propuesta los estudiantes además de adquirir herramientas, puedan desarrollar habilidades de orden superior y mejorar progresivamente sus competencias argumentativas. En este marco, Vargas y Araya (2013) realizan una investigación sobre la aplicación del Modelo de Pensamiento Geométrico de Van Hiele en la enseñanza de la Geometría que explica la evolución del razonamiento geométrico a través de cinco niveles consecutivos y del apoyo que brindan sus fases a la organización del currículo. En efecto, ellos muestran que este modelo de enseñanza y aprendizaje brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento. Además, mencionan que el docente a través de una evaluación inicial identificará el nivel en el que se encuentra cada uno de los estudiantes, lo cual le permitirá describir el avance del razonamiento geométrico de cada uno de ellos luego de aplicar las actividades programadas. Además, como el modelo de Van Hiele da importancia al desarrollo del lenguaje -aspecto crucial en el paso de un nivel a otro- se concluye que resulta fundamental establecer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas en un ambiente que le permita aprender de sus errores y mejorar gradualmente su lenguaje matemático. Desde esta perspectiva, se afirma que el docente tiene que ser consciente de que su función es ser un medio para que el estudiante adquiera conocimientos, los reconstruya y pueda utilizarlos.

Conjetura - Demostración

Álvarez et al (2014) presentan descripciones detalladas de los procesos de conjeturación y demostración. Más aún, establecen que el conjeturar puede estructurarse a partir de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar y generalizar proposiciones. Además, se presentan ejemplos de cada una de estas cinco etapas y se observa que de manera transversal a la actividad de conjeturar se encuentra el proceso de argumentar, pues en cada una de las fases se producen resultados que se van validando a la luz de los antecedentes y del contexto en el que se trabaje. En ese sentido y ya que, por ejemplo, los argumentos que permiten concluir una observación difieren de los que permiten verificar una conjetura y estos a su vez difieren de los que permiten demostrar la conjetura, se ahonda en el estudio del proceso de argumentar y se destaca su relevancia durante el desarrollo de la actividad matemática con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático y propiciar competencias argumentativas.

Un camino posible para trabajar la argumentación es orientar la actividad matemática en pro de la producción y validación de conjeturas, generalidades, proposiciones, entre otros. Por otro lado, se menciona que como las habilidades de argumentar van desde identificar y analizar argumentos en textos o ambientes educativos, hasta construirlos, entonces se podría promover desde la actividad matemática, momentos de reflexión para que los procesos de conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático y al desarrollo de otro tipo de competencias que atañen a los distintos campos del saber.

Por otro lado, Sáenz Castro (2001), centrado especialmente en la educación secundaria, establece diferencias entre el razonamiento demostrativo y el plausible o conjetural. Además, recupera los aportes de Hernán (1982) el cual ofrece un esquema operativo para que un estudiante de matemáticas aprenda las dos clases de razonamiento. Este afirma que, desde un punto de vista heurístico, pueden señalarse en el proceso de demostración las siguientes etapas: descubrimiento de la regularidad de una situación; sistematización de los ejemplos; conjetura; crítica de la conjetura (excepciones, falta de generalidad, imprecisión, casos límites…); nueva conjetura; demostración de la conjetura; crítica de las demostraciones.

En este estudio se intenta dar respuesta a las siguientes preguntas mediante el análisis de tres problemas que tienen como objetivo preferente estudiar el sistema de conjetura-demostración utilizado por estudiantes de secundaria: ¿Qué etapas son alcanzadas por los alumnos y cuándo? ¿Es la etapa "natural" en la educación secundaria la conjetura o lo es la demostración? ¿Qué condiciones han de cumplirse para el aprendizaje de estos aspectos procesales de las matemáticas? ¿Pueden conseguirlo la mayoría de los alumnos?

Se concluye que el pensamiento productivo, que consiste en crear nuevas situaciones y en usar nuevas organizaciones, es más difícil de enseñar pues requiere más tiempo y necesita de otros esquemas de temporalización de la enseñanza y estructura de las clases. Sin embargo, este estudio demuestra la necesidad y la importancia de trabajar el sistema de conjeturas-pruebas-refutaciones como metodología de encuentro del razonamiento demostrativo con el razonamiento plausible en la enseñanza matemática.

Libros de texto - Geometría

Por otra parte, los materiales y recursos didácticos constituyen un apoyo importante para el docente a la hora de enseñar. Al respecto, Abrate et al (2006) caracterizan las actividades de Geometría que proponen los textos escolares más utilizados por los docentes de Matemática de la EGB3, en instituciones públicas o privadas de la ciudad de Villa María, Córdoba. Para realizar esta caracterización se analizaron diferentes variables: formulación de las consignas, proceso de solución, cantidad de soluciones, habilidades que tienden a desarrollar y grado de reflexión que involucran. Los resultados de esta investigación arrojan que en dichos libros no existen actividades que propongan la formulación, comprobación o modificación de conjeturas a partir de los datos del problema o de los resultados intermedios; formulación, elaboración y comunicación del proceso seguido en la resolución de problemas con interpretación de los distintos cálculos realizados; argumentación de la validez de una solución; o la elaboración de estrategias en verdaderos problemas de investigación de cuestionamientos a partir de un conjunto de datos. En ese escenario, la alfabetización matemática queda desprovista de habilidades de orden superior, como la conjeturación y demostración, al menos desde las propuestas escolares.

A modo de síntesis, a lo largo de los antecedentes se ha podido observar que una de las formas más utilizadas para fomentar el desarrollo de habilidades de conjeturación y demostración en geometría en general y en específico sobre cuerpos geométricos poliedros, es la utilización de softwares de geometría dinámica como Cabri 3D y GeoGebra. Asimismo, se observó que la utilización de materiales didácticos concretos puede beneficiar la adquisición de competencias argumentativas, aunque son escasos los avances respecto a cómo implementarlos.

En cuanto a los libros de texto, puntualmente no se ha obtenido información sobre propuestas que desarrollen demostraciones o conjeturas sobre las fórmulas de volumen de cuerpos geométricos poliedros, aunque en el material recabado sobre Geometría se ha observado que estos libros no incluyen actividades que promuevan el desarrollo de este tipo de habilidades. Sin embargo, debido a las fechas en las que fueron realizadas estas investigaciones, se hace necesario profundizar sobre este tema y en específico sobre el desarrollo de las fórmulas de volumen de poliedros.

Por estos motivos, parte de la innovación de este proyecto radica en recabar información de libros de texto, materiales didácticos concretos, softwares y portales de educación en línea con el fin de proponer un abordaje del contenido a través de una propuesta superadora que permita el desarrollo de estas habilidades. Asimismo, se ha podido observar que el beneficio que puede implicar la utilización de recursos en el desarrollo de las habilidades de conjeturación y demostración, estará vinculado con las intenciones didácticas con que se utilicen dentro de las actividades que se propongan y con el aporte que el docente puede hacer al respecto.

Por último, en algunas investigaciones se menciona que la enseñanza de las fórmulas de volumen se basa en una muestra y aplicación directa de las mismas sin ningún tipo de argumentación acerca de por qué dichas fórmulas nos permiten obtener un volumen de un cuerpo geométrico poliedro específico. De esta forma, es de interés que la propuesta permita resignificar el sentido de las mismas al valerse de habilidades como visualizar, identificar, describir y, además, utilizar propiedades, estrategias de trabajo, realizar razonamientos varios, manipular materiales concretos, entre otros. Todo esto tiene como fin elaborar fórmulas, comprobarlas, argumentar su validez, comunicar el proceso que se realizó para obtenerlas y, por último, contemplar en este proceso modificaciones, errores, resultados intermedios, etc.

2. Marco teórico referencial

En este apartado se exponen las bases teóricas sobre las que se enmarca este proyecto de investigación. Se toma como referente fundamental la teoría de Van Hiele sobre los Niveles de Pensamiento Geométrico. Además, se expone una concepción de las tres componentes principales del estudio, ellas son: la enseñanza de las conjeturas y demostraciones, los cuerpos geométricos poliedros y los libros de texto.

2.1. Perspectiva educativa

Esta investigación se realiza con base en la Teoría de Van Hiele sobre Niveles de Pensamiento Geométrico. En ella se describen cinco niveles de pensamiento por los que transita un estudiante durante el aprendizaje de contenidos geométricos, así como las fases de enseñanza y aprendizaje necesarias para que los estudiantes logren comprender ideas geométricas. Esta teoría es de utilidad para anticipar las dificultades que tienen los estudiantes al elaborar demostraciones.

En relación con el avance entre niveles, la teoría establece que el logro de una nueva etapa de comprensión no puede llevarse a cabo a través de la enseñanza de hechos y procedimientos, sino que el profesor tiene que crear un escenario favorable para que los estudiantes alcancen un nivel mayor de comprensión mediante una elección adecuada de problemas; es decir, tareas que representen un reto intelectual más que dificultades procedimentales o de cálculo (Van Hiele, 1999). Esto significa que la comprensión de los estudiantes aumenta en la medida que las actividades a las que se enfrentan son más diversas.

A continuación, se definen los niveles y fases de enseñanza y de aprendizaje:

Nivel 1. Visualización o Reconocimiento

En el primer nivel de razonamiento se entra en contacto con el objeto de estudio, en este caso los poliedros. El razonamiento se basa en la consideración global de los cuerpos (como un todo) y sus movimientos, siendo este fundamentalmente visual. Por lo tanto, todas las propiedades que se pongan de relieve deberán estar basadas en atributos manipulativos o visuales, pero no jugarán un papel explícito en la identificación. Las representaciones de los objetos se identifican, comparan y operan con base en su apariencia física mediante descripciones visuales.

Nivel 2. Análisis

Los estudiantes identifican un cuerpo geométrico poliedro mediante sus propiedades, las cuales se consideran independientes unas de otras. El proceso de razonamiento en este nivel se lleva a cabo a través de la identificación de los componentes y atributos de los cuerpos. Además, se descubren, reconocen y utilizan de forma adecuada los elementos que caracterizan los poliedros: caras, vértices, aristas. Se representan esas características mediante dibujos de poliedros y se utiliza la notación y el vocabulario matemático adecuado. Además, se descubren y verifican de forma empírica, a través de softwares de geometría dinámica o con material manipulable, las relaciones entre los elementos de los poliedros.

Nivel 3. Ordenación, Clasificación o Abstracción

Los estudiantes interrelacionan lógicamente propiedades de los conceptos, a través de construir o seguir argumentos informales. Los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de formular definiciones abstractas (abstracción), es decir, señalar las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una clase de cuerpos geométricos (clasificación), además de reconocer cómo unas propiedades de los objetos geométricos se derivan de otras (ordenación), al establecer relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Además, son capaces de formular justificaciones informales de resultados matemáticos. En este punto los estudiantes son capaces de describir los poliedros de manera formal y entender el significado de su definición.

Nivel 4. Deducción Formal

Los estudiantes prueban teoremas deductivamente y establecen relaciones entre teoremas. Entienden la necesidad de justificar deductivamente resultados matemáticos o proposiciones, con base en un sistema axiomático.

Nivel 5. Rigor

Los estudiantes establecen teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analizan o comparan estos sistemas. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar. El estudiante es capaz de realizar deducciones abstractas. El razonamiento geométrico en este nivel es bastante abstracto y no necesariamente involucra el uso de modelos concretos.

Es oportuno realizar una vinculación entre los niveles establecidos por Van Hiele y las habilidades de conjeturar y demostrar. En el primer nivel de razonamiento se entra en contacto con los poliedros, el razonamiento se basa en la consideración global de los cuerpos y sus movimientos, siendo fundamentalmente visual. El nivel 2 puede considerarse como el primer escalón de exploración del estudiante sobre los objetos matemáticos, donde se verifica empíricamente para algunos ejemplos que ciertas propiedades valen. De esta forma el nivel 3 avanza hacia una deducción informal de las propiedades, al interrelacionar lógicamente propiedades de los conceptos con argumentos informales, e incluso por momentos erróneos, lo que los lleva a retrabajar hasta llegar a formular una conjetura. El nivel 4 se corresponde con una instancia en que es posible organizar una demostración y formalizarla con un rigor adecuado, donde los estudiantes captan la necesidad de justificar deductivamente resultados matemáticos. En un quinto nivel ya se establecen teoremas en diferentes sistemas axiomáticos, se analizan o comparan estos sistemas y se realizan deducciones abstractas, lo cual resulta acorde a la generación de conocimiento matemático avanzado, con sustento en los niveles de razonamiento previos.

Por otro lado, el objetivo de las fases es proporcionar al profesor herramientas que le permitan diseñar actividades y organizar escenarios de enseñanza que les posibiliten a los estudiantes avanzar en los sucesivos niveles de pensamiento geométrico.

Fase 1. Información o indagación

El profesor y los estudiantes se involucran en una discusión sobre los objetos de interés de cada nivel. Se realizan observaciones, se generan preguntas y se introduce vocabulario específico.

Fase 2. Orientación guiada

Los estudiantes exploran un tema de estudio a través de actividades propuestas por el profesor, llevando a cabo procesos de pensamiento matemático relevantes para cada nivel. El profesor formula preguntas que tengan una respuesta concreta, pero de forma que la búsqueda de la respuesta favorezca la reflexión y la comunicación de ideas.

Fase 3. Explicitación o explicación

El estudiante es consciente de las relaciones que existen entre las propiedades de los objetos geométricos, trata de expresarlas verbalmente o por escrito y aprende el lenguaje técnico. Durante el desarrollo de las actividades los estudiantes expresan e intercambian sus puntos de vista con el objetivo de construir relaciones.

Fase 4. Orientación libre

El estudiante aprende mediante la ejecución de tareas que tienen diferentes soluciones o son de respuesta abierta. A través de la actividad matemática que realizan los estudiantes, se promueve la construcción de redes complejas de relaciones entre conceptos y procesos matemáticos relevantes para cada nivel. Las actividades posibilitan al estudiante explorar, formular conjeturas y justificar relaciones, en esta fase las conexiones y relaciones entre los objetos matemáticos se vuelven explícitas para los estudiantes.

Fase 5. Integración

El estudiante realiza un proceso de metacognición donde reflexiona acerca de lo que ha aprendido, es decir, reflexiona sobre sus propias acciones y obtiene una visión general de la nueva red de relaciones que se construyó durante el proceso de trabajo. Se supone que al final de la quinta fase, los estudiantes han logrado un nuevo nivel de pensamiento.

Con relación a la perspectiva educativa, desde el DCJ de la Provincia de Santa Fe (2014):

> Se plantea un trabajo áulico que propicie una actividad a la manera de micro-sociedad científica, en el que se problematice el contenido y los estudiantes tengan oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, elaborar conclusiones, de modo que posibilite la producción de conocimientos, aspecto central en la enseñanza (p.48).

Con respecto de la validación, entendida como la decisión autónoma del estudiante acerca de la verdad o la falsedad de su respuesta, el DCJ establece que en los primeros años de escolaridad se pueden aceptar argumentaciones imprecisas y escrituras poco formales como pruebas ligadas a la acción y a la experiencia. Además, menciona que se debe profundizar en la producción y el análisis de construcciones geométricas y en la toma de decisiones. Las construcciones deben realizarse con instrumentos tradicionales y con software de geometría dinámica. Asimismo, se establece que las construcciones y el establecimiento de relaciones que pueden conjeturarse a partir del tratamiento dinámico, mediadas por un proceso de validación, permiten reconocer las limitaciones de las pruebas empíricas y favorecer la entrada a la argumentación deductiva.

2.2. Enseñanza de las conjeturas y demostraciones

Como se menciona en el DCJ, en la enseñanza de la Matemática hay una postura de enfrentar a los estudiantes a un trabajo similar al que realiza un matemático para que construyan el conocimiento. Esta es la postura que se toma en esta investigación. De esta forma los estudiantes trabajan en procesos de argumentación al validar ciertas proposiciones. Sin embargo,

> si se reduce el papel de la demostración en la escuela al de solo una herramienta lógica de verificación, entonces los alumnos no hallarán justificaciones suficientes para ese trabajo y no se alcanzarán propósitos como el de construir relaciones complejas entre la observación, la argumentación y la construcción de demostraciones (Osorio, 2003, p.171).

Es por esto que importa en gran parte el sentido de la demostración y se la orienta a la producción de argumentos encadenados deductivamente. Por otro lado, el rigor que se le da a la misma no puede ser exacerbado, sino que tiene que ser acorde al nivel educativo, en este caso al Ciclo Básico de la Educación Secundaria.

Más allá de estas consideraciones, la demostración como producto final, es ya un producto refinado y limpio que no refleja el proceso previo. En este proceso es donde se realizan observaciones, se hacen análisis de diferentes situaciones y, luego, se realiza una conjetura la cual se intenta probar a partir de elaborar argumentaciones y desarrollar razonamientos y conocimientos. Es por esto que se toma como base el concepto de *Unidad Cognitiva de Teoremas*, esto es el ciclo: Explorar → Conjeturar → Explorar → Organizar una demostración.

> Las primeras dos etapas están relacionadas con la construcción de conjeturas pues se llevan a cabo exploraciones, conjeturaciones, discusiones de tales afirmaciones y una primera sistematización de los enunciados; y las últimas etapas del proceso están enfocadas a la propia construcción de la demostración, después de una segunda exploración, de la búsqueda de argumentos convenientes y del encadenamiento deductivo necesario (Osorio, 2003, p.173)

Al respecto Itzcovich (2008) menciona que:

> La idea de la conjetura, en términos escolares, es la producción de una “sospecha”, de un “parecer”, producto de una experiencia de trabajo. Es decir, confluyen en esas exploraciones, ensayos y errores, el uso de los datos conocidos y saberes disponibles que

permiten establecer una afirmación con cierto margen de certeza, aunque no es del todo posible, por los recursos utilizados hasta el momento, dar cuenta de que lo afirmado es así y no podría ser de otra manera (p.17).

2.3. Transposición didáctica y libros de texto

Cuando se habla de libros de texto, se refiere a aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos en la escuela en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática. Su contenido es una estructura fácilmente reconocible, por la subdivisión en capítulos y temas que siguen los períodos básicos del calendario escolar. Ahora bien, el análisis de ellos respecto a cómo se intentan desarrollar las fórmulas para el cálculo de volumen de un cuerpo geométrico poliedro se remite a analizar si se da el ciclo Explorar-Conjeturar-Explorar-Organizar una demostración y a qué niveles de pensamiento geométrico llega un estudiante mediante la propuesta. Asimismo, se tienen en cuenta las fases de enseñanza a la hora de idear una propuesta innovadora.

Por otro lado, Chevallard (1991; citado en Bravo y Cantoral, 2012) introduce la expresión de transposición didáctica para nombrar al proceso de transformación de un conocimiento desde que es "objeto del saber", a "objeto a enseñar" y, por último, a "objeto de enseñanza" cuando tiene un tratamiento didáctico. La teoría de Transposición Didáctica considera que las transformaciones que sufre el conocimiento matemático empiezan en la misma actividad de la comunidad científica, pues con comunicar hallazgos, se suprimen todas las reflexiones inútiles, todo proceso errático, las confusiones y discusiones con pares. De esta manera, el conocimiento producido para comunicarse se despersonaliza, es sacado de su contexto y su tiempo. Es por esto que Chevallard sostiene que la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y prosigue en el entorno del sistema de enseñanza (más exactamente la noosfera).

En definitiva, un conocimiento matemático, cuando es introducido en el currículum escolar y en la escuela, experimenta transformaciones en el proceso de su tratamiento didáctico, proceso que hace que el saber a enseñar sea distinto del saber enseñado. Desde esta perspectiva, los libros de texto presentan una propuesta del saber a enseñar (índice temático) y un tratamiento didáctico (definiciones, explicaciones, gráficas, ejemplos resueltos, etc.); es decir, una forma de enseñar.

Dado que los libros de texto cumplen la función didáctica de proporcionar situaciones de aprendizaje, los autores de estos, a partir de su concepción epistemológica y su experiencia didáctica, organizan contenidos, utilizan recursos técnicos y eligen la forma discursiva de presentar sus contenidos. En este sentido, los manuales registran: los saberes a enseñar y los saberes enseñados como se muestra en la Figura 1.1, lo que permite ver que los textos presentan de manera explícita un tratamiento didáctico de los saberes matemáticos que su contenido delimita. Chevallard llama a esta explicitación discursiva como “textualización” del saber, la cual conduce, en un primer momento, a la delimitación de saberes “parciales”, cada uno de los cuales se expresa en un discurso casi autónomo. En otras palabras, la delimitación de contenidos y de la profundidad de las explicaciones es un proceso necesario para comunicar el saber a enseñar en los libros. De esta necesaria delimitación del saber se derivan otras transformaciones que se producen en el proceso de transposición, como son la desincretización del saber, la descontextualización del saber, la despersonalización del saber y la programabilidad de la adquisición del saber.

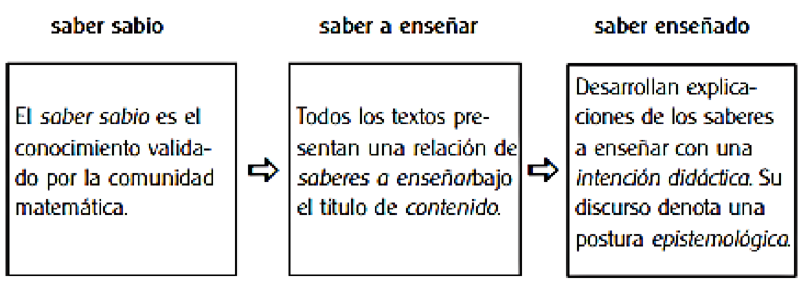


Figura 1.1. Del saber sabio al saber enseñado

La segmentación del saber tiene que ver con la separación de conceptos que están fuertemente imbricados, en este sentido, se produce una segmentación del saber y por ello a este proceso se le denomina desincretización del conocimiento. La delimitación del saber implica también un proceso de descontextualización, es decir, se desubica al saber de la red de problemáticas y problemas que le dieron sentido en su proceso de creación. Por otro lado, la comunicación escrita de hallazgos matemáticos implica la construcción de un discurso despersonalizado en tanto no muestra los errores, hipótesis inadecuadas, intentos fallidos, que son parte de su creación y realización. Es decir, el sujeto queda fuera de su producción. Esto ha producido una visión del aprendizaje para la cual el error es una simple falta y no es visto como una parte constitutiva del proceso de construcción del saber. Por último, la puesta en texto del conocimiento matemático implica una secuenciación de los saberes a enseñar; esto es, se establece una exposición de contenidos como una progresión de conocimientos adecuada para el aprendizaje. Tal concepción del aprendizaje conduce a la memorización de los contenidos por parte de los estudiantes, pues el aprendizaje del saber no es lo mismo que el texto del saber.

Desde la perspectiva que aborda este trabajo, el seguimiento de las explicaciones de un saber específico en los textos permite identificar ciertas problemáticas que para quién busca entender tal saber, se convierten en obstáculos para poder construir significados más elaborados y completos del concepto en cuestión.

2.4. Cuerpos geométricos poliedros

A continuación, se exponen dos definiciones de cuerpos geométricos poliedros, una concepción acerca de su enseñanza en el Ciclo Básico de la educación secundaria y de la importancia de que se contemple como contenido curricular.

Definición de Poliedro como "saber a enseñar"

Los poliedros son cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas y se clasifican en prismas y pirámides.

- Los prismas tienen dos caras paralelas (bases) y sus caras laterales son paralelogramos. En los prismas rectos, las caras laterales son rectángulos.
- Las pirámides tienen una sola base y sus caras laterales son triángulos. En las pirámides rectas, las caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

Definición de Poliedro como "saber científico"

El conjunto de puntos del espacio formado por la unión de un abierto conexo y su frontera es un poliedro si la frontera está constituida por un número finito de polígonos. La frontera de un poliedro se llama superficie poliédrica y los polígonos que la componen son las caras del poliedro. Los lados y los vértices de dichos polígonos son, respectivamente, las aristas y los vértices del poliedro y de la superficie poliédrica. Un poliedro es convexo si está contenido en uno de los dos semiespacios que determina una de sus caras (Figura 1.2).

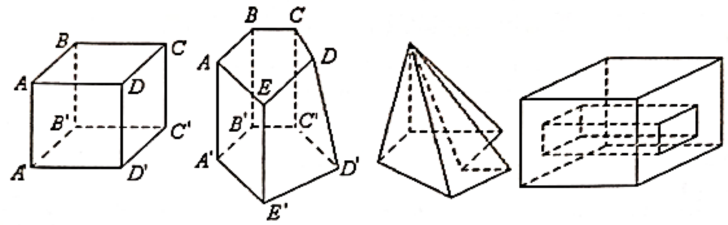


Figura 1.2. Tipos de poliedros

El DCJ y los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios sugieren trabajar con cuerpos geométricos poliedros en el primer año de escolaridad secundaria. Ambos documentos curriculares ubican este contenido dentro del eje de "Geometría y Medida". En particular el DCJ explicita algunas consideraciones metodológicas al respecto. En general, le da valor al trabajo con Poliedros y sugiere realizarlo mediante la utilización de elementos tradicionales y de software de geometría dinámica. En particular, menciona que tanto las construcciones como el establecimiento de relaciones que pueden conjeturarse a partir del tratamiento dinámico, siempre deben estar mediadas por un proceso de validación que permita reconocer las limitaciones de las pruebas empíricas y favorezca la entrada a la argumentación deductiva. Por otra parte, se menciona que en este año de escolaridad es recomendable utilizar y explicitar las propiedades de figuras y cuerpos geométricos en la resolución de problemas, así como también se requiere la producción y comparación de fórmulas para analizar las variaciones de volúmenes, en función de la variación de diferentes dimensiones de cuerpos. También se consideran los desarrollos planos de los cuerpos geométricos en general.

Por otro lado, el interés por el mundo de los poliedros deriva de que es un mundo de tres dimensiones que admite con flexibilidad organizaciones locales y los objetos de dos y una dimensión están presentes de forma clara y transparente. El mundo de los poliedros ofrece diversidad de posibilidades para desarrollar un trabajo intuitivo-experimental que permita desarrollar el pensamiento lógico inductivo y de aquí deviene su gran importancia. Además, un curso de geometría organizado desde el punto de vista espacial puede hacer contribuciones importantes a la educación superior, la cual puede presentar a los estudiantes una mejor comprensión del entorno. Puede convencer al futuro no matemático de que la geometría es una herramienta importante para describir y comprender la naturaleza.

Según Guillén (2010), los estudiantes necesitan fundamentalmente una comprensión geométrica del espacio y, por ello, concibe la geometría como ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico. De esta manera, la geometría en los niveles elementales se concibe como un sencillo nivel de actividad para preparar a los estudiantes para niveles superiores. Además, Guillén (2010) citando a Freudenthal (1973), menciona que:

> El material que se aporta a los estudiantes para desarrollar las clases pretende que estos actúen con lógica, pensando. Las manos y el cerebro trabajan conjuntamente para responder la cuestión de cómo está hecha una cosa concreta. Si en ese nivel se dan definiciones, estas serán genéticas, esto es, se expresa cómo está hecha la cosa que se define. Si después esta definición se reformula de un modo más formal, la nueva definición deberá conectar con la anterior. El último desarrollo lógico deberá quedar grabado en los estudiantes con el uso del material concreto (p.24).

Esta concepción de la geometría conlleva que su enseñanza comience por el espacio y además que se utilicen para su desarrollo materiales concretos. Freudenthal menciona diferentes razones sobre su postura, entre ellas una se apoya en lo que este autor denomina "el encaje": el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras, en el espacio hay multitud de relaciones, en el plano el camino hacia el análisis lógico es más corto, el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas.

Otra de las razones tiene que ver con que considera a los sólidos como una de las aproximaciones para las figuras planas o las líneas. Guillén (2010) menciona que en el análisis fenomenológico de "planos" y "rectas" que expone Freudenthal, los objetos del entorno y los sólidos figuran como contextos a partir de los que se pueden constituir objetos mentales iniciales sobre estos conceptos y sus relaciones (igualdad, paralelismo, perpendicularidad) (p.25). Freudenthal también llama la atención sobre las consecuencias que tiene formar a los estudiantes solo en geometría plana: "No es de extrañar que los estudiantes que trabajan satisfactoriamente en la geometría plana, fallen en la espacial. Su imaginación espacial ha ido pereciendo por la demasiada ejercitación con la geometría plana" (Freudenthal, 1973; citado en Guillén, 2010).

3. Marco metodológico

En esta tercera parte se despliega la metodología de investigación. En primer lugar, se delimitan los sujetos del estudio. En un segundo apartado se presenta el enfoque, alcance y tipo de investigación. Seguidamente, en un tercer apartado, se describen las técnicas de recolección y el procesamiento de datos adoptado. Por último, se explicitan las categorías de análisis definidas en función al marco teórico desarrollado.

3.1. Sujetos

Para responder a los objetivos se realiza un análisis de ciertos libros de texto que circulan en el mercado y tratan el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en los primeros años de escolaridad. A su vez, se consideran como sujetos complementarios otras propuestas que puedan encontrarse en línea, como portales educativos y en específico el soporte digital de geometría dinámica GeoGebra 3D.

A los libros de texto se accede a través de la web. En una primera fase exploratoria se eligieron seis libros de editoriales diversas y se consideraron solo cuatro de ellos (Becerril et al, 2017; Kaczor y Outón, 2017; Sessa et al, 2017; Pisano, 2018). Esta selección intentó reunir diversas propuestas. Para esto se tuvo en cuenta que los libros hayan sido publicados en los últimos cinco años, así como también el tipo de actividades que incluyen, las institucionalizaciones parciales que realizan y el tipo de enseñanza que buscan desplegar.

Respecto a las propuestas complementarias se realizó una búsqueda en los portales Educ.ar, Khan Academy y otros portales educativos publicados en el Directorio Web de Material Audiovisual de la Facultad de Ciencias Exactas, Agrimensura e Ingeniería de la UNR (Argentina). También se exploraron recursos en GeoGebra 3D y canales de YouTube, como “Unicoos”, “Derivando”, “Julioprofe” y “Daniel Carreón”. La razón de investigar estos canales está ligada a que muchos estudiantes los utilizan en diversas ocasiones.

Puntualmente, se eligieron dos propuestas del portal Khan Academy (Propuesta 1, Propuesta 2); una actividad con GeoGebra, para trabajar distintos significados de volumen, lo cual robustece conceptualmente las ideas y fundamentos matemáticos, más allá de una fórmula y tres videos de dos canales de YouTube: dos del canal “Susi Profe”, por el cual se optó debido a presentar una propuesta donde utiliza un material concreto y otra para la noción de secciones planas de Cavalieri (Video 1, Video 2) y un video del canal "Acervo", donde se presenta una propuesta para docentes y no para estudiantes.

3.2. Enfoque, alcance y tipo de investigación

Para llevar adelante el estudio se propone un *enfoque* cualitativo ya que no se efectúa una medición numérica ni se pretenden generalizaciones. La investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. Asimismo, aporta un punto de vista "fresco, natural y holístico" de los fenómenos, así como flexibilidad (Sampieri et al, 2014). En efecto, en este estudio se procura analizar el tratamiento que realizan las propuestas de los libros de texto sobre la fórmula de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros y dilucidar vías para desarrollar en los estudiantes habilidades de conjeturación y demostración.

El *alcance* otorgado a la investigación es descriptivo-interpretativo, pues se caracterizan las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros desarrolladas en materiales disponibles para el último tramo de escolaridad obligatoria. Asimismo, se reconocen y caracterizan, de forma complementaria, otros recursos como softwares de geometría dinámica o materiales concretos, que potencien el desarrollo las habilidades de orden superior.

Por otro lado, el *tipo de investigación* es de diseño dado que el propósito integral del recorrido consiste en elaborar una propuesta innovadora a partir de la información considerada en el trabajo previo con los materiales.

3.3. Técnicas de recolección y procesamiento de la información

Para la *recolección de la información* se realiza un análisis documental de los materiales seleccionados, con el fin de construir una propuesta innovadora para la enseñanza del contenido mencionado, que sustente de modo fundamentado maneras robustecidas de hacer Matemática hacia la consolidación científico-académica. Este análisis se realiza a partir de tres categorías de análisis, que se han delimitado en concordancia con los objetivos del estudio.

Respecto al *procesamiento de datos*, se utiliza el análisis de contenido ya que se trata de describir y caracterizar propuestas de libros de texto y de portales educativos en línea en base a las categorías de análisis que se describen en el siguiente apartado.

3.4. Categorías de análisis

En función de las consideraciones que se presentaron en el marco teórico del trabajo, la investigación se organizó en base a tres categorías de análisis:

Cuerpos Geométricos Poliedros en Libros de Texto (CL)

Se considera cómo están presentes los cuerpos geométricos poliedros dentro de las propuestas editoriales, cómo se aborda el contenido y, por último, qué niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele puede alcanzar un estudiante.

Cuerpos Geométricos Poliedros en Recursos Complementarios (CRC)

Se efectúa una caracterización y descripción del recurso/material elegido, así como de la propuesta en la que se lo enmarca, para posteriormente determinar qué niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele se promueven.

Propuestas Innovadoras de Enseñanza (PIE)

Idear una propuesta innovadora, requiere del análisis previo para descartar prácticas que no propicien el desarrollo de las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, pero también, de aportes de otros recursos relacionados al contenido elegido.

Esta categoría tiene su génesis de modo transversal a las anteriores, pues para proponer tales innovaciones se requiere ir entramando los materiales existentes seleccionados, para estar en condiciones de determinar en qué se pueden mejorar de forma que se avance significativamente hacia el rol protagónico de la geometría 3D en la actualidad para una alfabetización matemática de los ciudadanos.

4. Resultados

Los principales hallazgos del estudio se presentan en función a las categorías de interés que se han considerado propicias para el entramado empírico-conceptual correspondiente.

4.1. Caracterización de habilidades de conjeturación y demostración desarrolladas en libros de texto

Se procedió a describir los cuatro libros seleccionados y se analizó qué niveles de Van Hiele podría llegar a alcanzar un estudiante con dichas propuestas.

4.1.1. Descripción de los libros de texto

Becerril et al (2017)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

En este libro, el contenido correspondiente a cuerpos geométricos poliedros se encuentra incluido dentro del penúltimo capítulo, esto es, el capítulo nueve del libro (p.131). En el capítulo siete se trabaja con perímetro y área de figuras planas, mientras que en el capítulo ocho se desarrollan contenidos de proporcionalidad.

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada), qué tipo de actividades se presentan:

Al principio del capítulo se cuenta la historia de Herón y Arquímedes, la cual induce una forma de comparar volúmenes de objetos. Luego, se presentan varios tipos de cuerpos geométricos (poliedros con diferentes bases y redondos) y se define qué es un desarrollo plano. Posteriormente, hay actividades donde se muestran algunos de estos y se pide determinar a qué cuerpo específico corresponde. En otras actividades también se pide dibujarlos.

En la Figura 1.3 se muestra una actividad y una observación que se titula como “machete”, todo a la misma altura de la página.

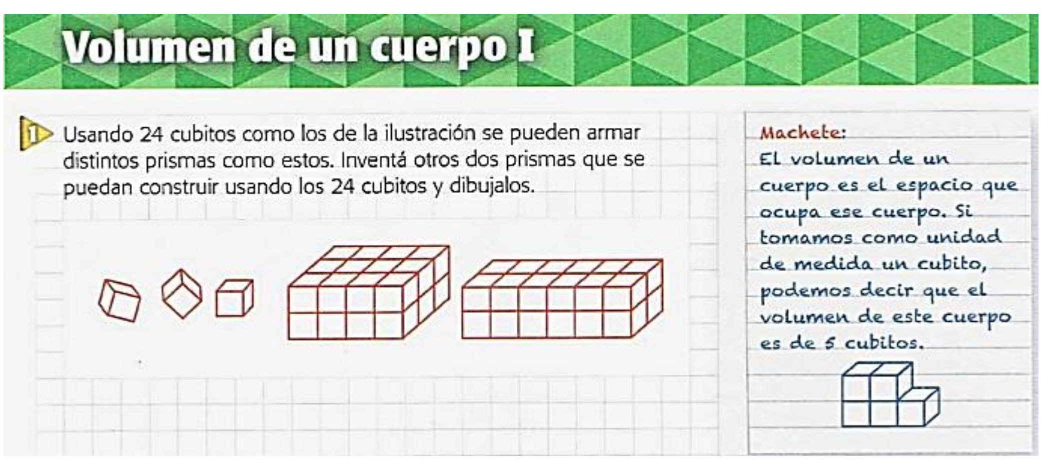


Figura 1.3. Introducción al cálculo de volúmenes (Becerril et al, 2017, p.134)

En el “machete” se presenta un ejemplo de un cuerpo sencillo formado solo por una fila de cubos y dos pisos de cubos de alto. Esto permite ver fácilmente el volumen que este ocupa. A su vez, del lado izquierdo se muestran prismas rectangulares formados por 24 cubitos y se pide armar otros prismas distintos con la misma cantidad de cubitos.

En una segunda actividad se presenta un cuerpo geométrico poliedro no convexo formado por cierta cantidad de cubitos. Se indica que el cuerpo no tiene huecos ni salientes que estén ocultos y se pide calcular su volumen. Otra de las actividades muestra tres prismas, dos de ellos cubos y el tercero un prisma de base rectangular, y se pide determinar cuál de ellos tiene mayor volumen. También se presenta la actividad que se expone en la Figura 1.4.

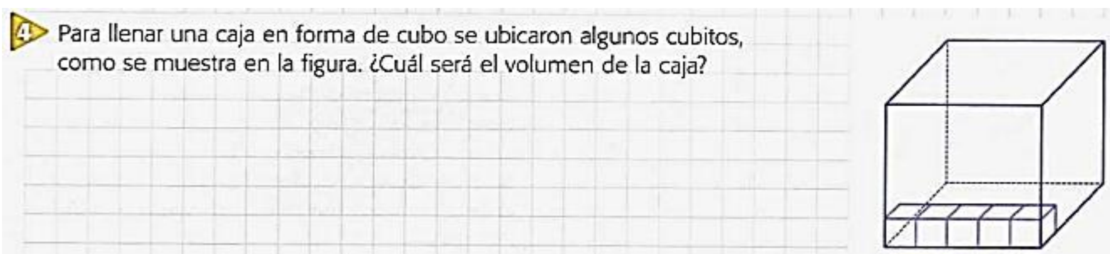

4 Para llenar una caja en forma de cubo se ubicaron algunos cubitos, como se muestra en la figura. ¿Cuál será el volumen de la caja?

Figura 1.4. Actividad 4 del capítulo 9 (Becerril et al, 2017, p.135)

En esta misma parte, en una de las actividades se especifica cuántos cubitos caben en una arista de un cubo y cuántos cubitos caben por cada arista de un prisma. A partir de esto, se pide determinar el volumen de los cuerpos geométricos y especificar cuál de ellos tiene mayor volumen. Por consiguiente, se realiza una pregunta para que respondan en parejas: “¿Es posible tener un prisma de base cuadrada de 900 cubitos de volumen?”. Para esto los estudiantes tendrán que pensar si 900 es un cuadrado perfecto. También, al querer introducir cierta generalidad se pregunta cómo harían para determinar el volumen de un cubo de n cubitos de aristas. Con esta pregunta se le da un cierre a la primera parte del capítulo.

En una segunda parte titulada como “Volumen de un cuerpo II” nuevamente se presenta otra observación bajo el nombre de “machete”. En él se menciona que el volumen de un cuerpo puede medirse utilizando diferentes unidades de medida, pero que la más convencional es el cm^3. Luego se menciona una forma de medir el volumen de un cuerpo irregular que consiste en introducirlo a un recipiente graduado en cm y medir el agua desplazada.

En lo que sigue se propone una actividad en la que dadas las medidas de las aristas de un prisma se pregunta cuántos cubitos de 1 *cm* de arista caben en él. Posteriormente se presenta otra actividad en la que se pide determinar cuántos cubitos de 1 cm^3 se necesitan para el ancho de un prisma de caras rectangulares al que le caben 72 cubitos de 1 *cm* de arista, cuatro cubitos de alto y seis de largo. Con esta propuesta gradualmente se trata de inducir la fórmula de volumen.

A continuación, se presenta otra observación titulada como "machete" (Figura 1.5).

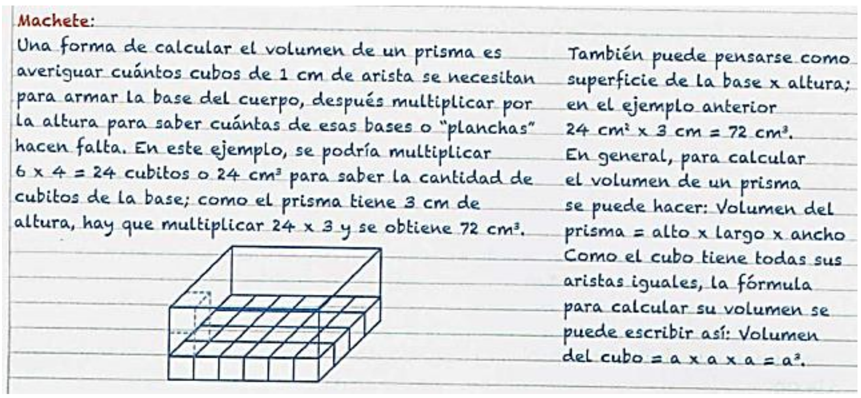


Figura 1.5. Fórmula para calcular el volumen de un prisma (Becerril et al, 2017, p.137)

Aquí ya se introduce una manera de calcular el volumen de los prismas. Para esto no se da una fórmula de forma simbólica, sino que se explicita de qué forma puede calcularse. Incluso se menciona la superficie de la base, ya desligándose de la idea de los cubitos. Esto también se ve en la actividad que sigue donde se presentan dos cuerpos geométricos no convexos de los cuales solo se dan las medidas de las aristas en *cm* sin ningún tipo de relleno con cubitos y se pide calcular sus volúmenes.

Hasta aquí puede considerarse que las actividades presentadas resultan de la forma y en el momento en el que se abordan en el libro, como actividades del tipo exploratorias.

En páginas posteriores se comienza a introducir una forma de calcular el volumen de un cilindro y una vez finalizado este abordaje, se presenta la actividad que se muestra en la Figura 1.6.

Esta es la única actividad en la que se aborda el volumen de las pirámides. Luego, se presenta el metro cúbico y se comienza a proponer actividades en las que se miden y estiman volúmenes y donde se relaciona el centímetro cúbico con el metro cúbico. Además, se observa la diferencia entre capacidad y volumen, y se presentan actividades en las que se pide determinar si al modificar de cierta forma la medida de alguna arista de un prisma específico, se realiza una variación similar en su volumen.

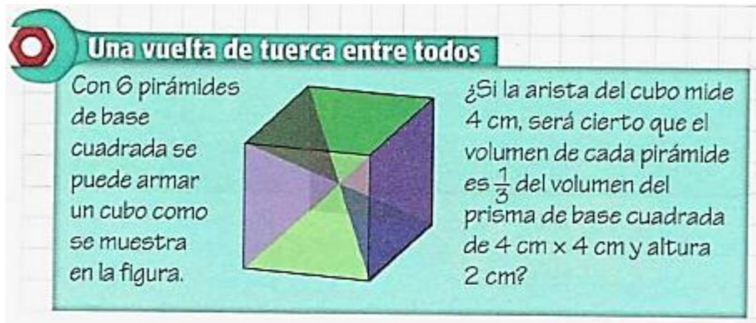


Figura 1.6. Actividad acerca del volumen de las pirámides (Becerril et al, 2017, p.139)

Por último, se presenta una colección de actividades intramatemáticas para practicar lo dado en el capítulo. Estas actividades son de aplicación ya que "implican la aplicación de contenidos conceptuales aprendidos con anterioridad y que están asociados habitualmente a un aprendizaje memorístico" (Azcárate y Serradó, 2004, p.352).

Kaczor y Outón (2017)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

En este libro el contenido correspondiente a cuerpos geométricos poliedros se encuentra incluido dentro del capítulo seis (p.117). En este mismo se incluyen áreas de cuerpos geométricos poliedros y redondos. En el capítulo dos se abordan las figuras planas y en el cuatro se incluye perímetros y áreas de figuras planas. Los demás capítulos no corresponden con contenidos relacionados estrechamente con cuerpos geométricos. El capítulo previo a áreas y volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, aborda, al igual que en el libro anterior, proporcionalidad (gráfico cartesiano y funciones).

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada) y tipos de actividades que incluye:

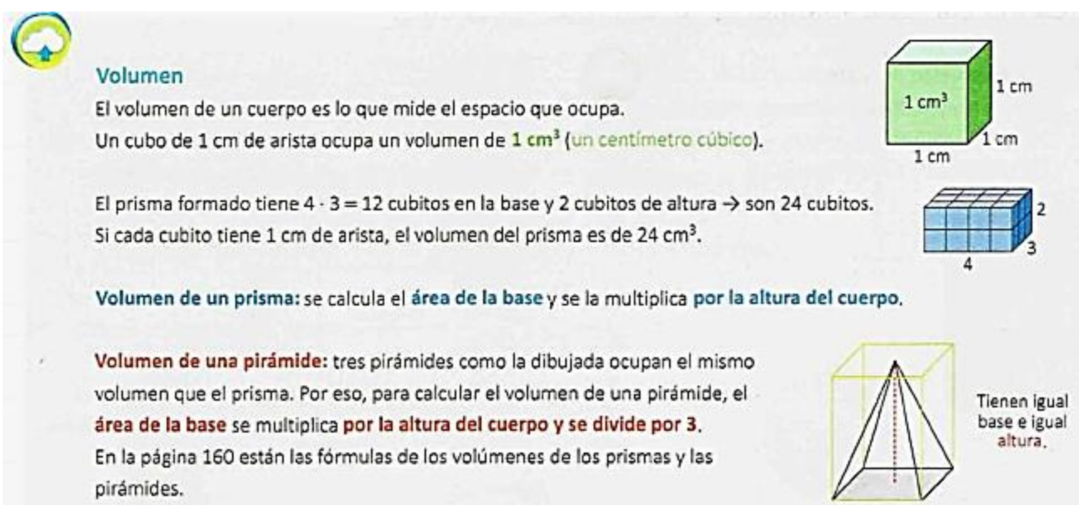
Al comienzo, se presenta una actividad diagnóstica titulada como "Esto ya lo sabía" donde se pide completar con el número de caras, vértices y aristas de algunos prismas. También se muestra un famoso jardín botánico en el que hay un invernadero en forma de pirámide y se pide completar los mismos datos. A continuación, se definen los prismas y pirámides, y se muestran imágenes de cuerpos geométricos poliedros rectos y oblicuos. Luego se aclara que se trabajará solo con cuerpos rectos.

Por otra parte, se presenta una actividad en la cual se pide completar de qué tipo de prisma o pirámide se trata (prismas y pirámides con diferentes tipos de bases). Luego se presenta la fórmula de Euler y se realizan actividades de reconocimiento de elementos de un cuerpo geométrico para luego aplicar la fórmula.

Se presentan los cuerpos geométricos redondos se los define brevemente y sobre algunas imágenes se indican elementos que componen a cada tipo (cono, esfera, cilindro). Luego se presenta una actividad donde se muestran ocho desarrollos planos y ocho carteles con nombres de cuerpos poliedros y redondos. La consigna consiste en indicar cuál corresponde con cuál. También se incluye una actividad en la que se presenta un desarrollo plano de un poliedro y se pregunta a qué poliedro regular corresponde.

Después de esto, se define área lateral y total de un cuerpo, aunque se indica que en páginas posteriores se encuentran las fórmulas de las áreas de los cuerpos, y se presentan actividades de aplicación para calcular áreas laterales y totales de diferentes poliedros.

Como se muestra en la Figura 1.7, se conceptualiza al volumen y se presenta el cubo de un centímetro de arista como unidad de medida para el volumen. Sin actividades previas, se muestra mediante un ejemplo cuál es el volumen de un prisma de base rectangular y se indica cómo fue calculado. Luego se describe una fórmula para calcular el volumen de un prisma cualquiera. También se muestra mediante un dibujo que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura.



Volumen

El volumen de un cuerpo es lo que mide el espacio que ocupa.
Un cubo de 1 cm de arista ocupa un volumen de **1 cm³** (un centímetro cúbico).

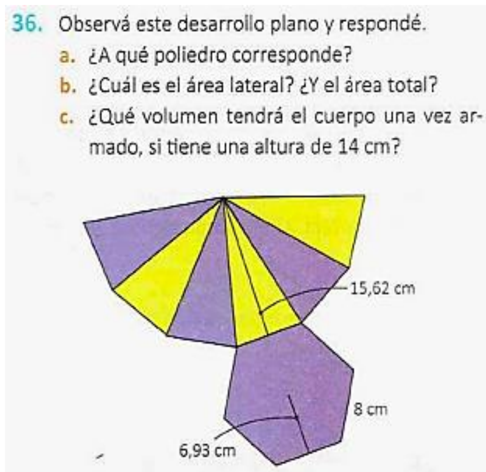
El prisma formado tiene 4 · 3 = 12 cubitos en la base y 2 cubitos de altura → son 24 cubitos.
Si cada cubito tiene 1 cm de arista, el volumen del prisma es de 24 cm³.

Volumen de un prisma: se calcula el **área de la base** y se la multiplica **por la altura del cuerpo.**

Volumen de una pirámide: tres pirámides como la dibujada ocupan el mismo volumen que el prisma. Por eso, para calcular el volumen de una pirámide, el **área de la base** se multiplica **por la altura del cuerpo y se divide por 3.**
En la página 160 están las fórmulas de los volúmenes de los prismas y las pirámides.

Figura 1.7. Volumen de prismas y pirámides (Kaczor y Outón, 2017, p.121)

Con respecto a los poliedros, se presentan actividades en las que se pide determinar el volumen de ciertos prismas y pirámides de los cuales se dan las medidas de las aristas. Otra de las actividades pide determinar la altura de un prisma, dados su volumen, así como la forma y perímetro de la base.


36. Observá este desarrollo plano y respondé.

a. ¿A qué poliedro corresponde?

b. ¿Cuál es el área lateral? ¿Y el área total?

c. ¿Qué volumen tendrá el cuerpo una vez armado, si tiene una altura de 14 cm?

Figura 1.8. Actividades de aplicación de la fórmula de volumen (Kaczor y Outón, 2017, p.124)

Un desarrollo similar al descrito anteriormente se realiza para áreas y volúmenes de cuerpos redondos. Posteriormente, se proponen actividades de repaso de lo abordado al momento. Las actividades son de aplicación. En algunas de ellas se debe aplicar la fórmula de Euler, en otras se debe trabajar con desarrollos planos y solo dos actividades son de volumen (Figura 1.8).

Luego de esto se presenta un cuadro donde se muestran las relaciones entre el m^3 y sus múltiplos y submúltiplos, y las actividades que siguen se relacionan con pasaje de unidades. Posteriormente, se presentan las unidades de masas, se define densidad y se presentan actividades al respecto. En las últimas cuatro páginas del capítulo se presentan actividades que responden a los contenidos desarrollados. Las actividades relacionadas con volúmenes escasean.

Sessa et al (2017)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

Este libro de texto cuenta con 12 capítulos. En el segundo se abordan contenidos relativos a triángulos y circunferencias y en el octavo contenidos relativos a ángulos, rectas perpendiculares y paralelas. Los demás capítulos se vinculan con contenidos relacionados al eje de Números y Operaciones o de Funciones. Lo respectivo a cuerpos geométricos poliedros se encuentra dentro del décimo capítulo llamado "Teorema de Pitágoras, Prismas y Pirámides". En este también se aborda área y perímetro de figuras planas.

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada) y tipos de actividades que se incluye:

Al comienzo del capítulo se presentan actividades que guían una demostración del Teorema de Pitágoras. Luego de esto, dadas algunas definiciones de perímetro y área se presentan actividades para calcular área y perímetros de figuras planas. Posteriormente se proponen actividades de comparación de áreas y luego se presentan actividades que guían el desarrollo de las fórmulas de área para el rombo y el paralelogramo.

Luego, se define a los prismas como se muestra en la Figura 1.9.

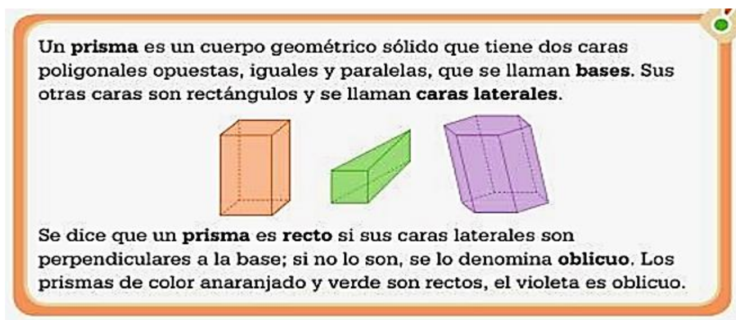


Figura 1.9. Definición de prisma (Sessa et al, 2017, p.147)

En esta definición se indica que los prismas son sólidos y en el lado derecho de la hoja se explica qué significa esto. A diferencia de los anteriores libros define qué significa que un prisma sea recto u oblicuo y se muestran ejemplos concretos de cada tipo.

En una actividad posterior, se muestran diferentes objetos reales que tienen forma de cuerpos geométricos y se pide determinar cuáles son prismas y qué cantidad de aristas, caras y vértices tienen estos. A la par de esta actividad se definen dichos elementos.

Luego se presenta una actividad del estilo "verdadero o falso" respecto a afirmaciones sobre prismas rectos. Y debajo de esta, una con el fin de identificar cantidad de caras, vértices y aristas que tiene un prisma específico. En esa misma se pide encontrar una fórmula para calcular la cantidad de caras, aristas y vértices de un prisma recto a partir del dato de que su base es un polígono de *n* lados.

En la página siguiente se definen las pirámides como se muestra en la Figura 1.10.

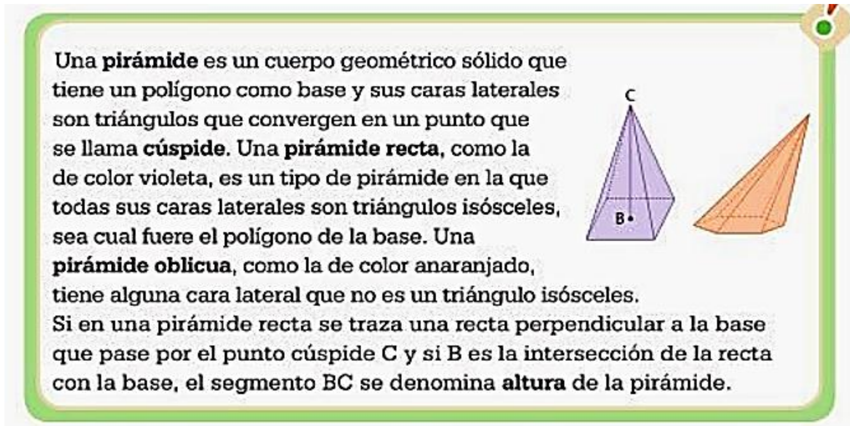

Una **pirámide** es un cuerpo geométrico sólido que tiene un polígono como base y sus caras laterales son triángulos que convergen en un punto que se llama **cúspide**. Una **pirámide recta**, como la de color violeta, es un tipo de pirámide en la que todas sus caras laterales son triángulos isósceles, sea cual fuere el polígono de la base. Una **pirámide oblicua**, como la de color anaranjado, tiene alguna cara lateral que no es un triángulo isósceles.
Si en una pirámide recta se traza una recta perpendicular a la base que pase por el punto cúspide C y si B es la intersección de la recta con la base, el segmento BC se denomina **altura** de la pirámide.

Figura 1.10. Definición de pirámides (Sessa et al, 2017, p.148)

Nuevamente se explica la diferencia entre una pirámide recta u oblicua y se muestran ejemplos de cada tipo. Además, se define la altura para el caso de la pirámide recta. También se presentan varias imágenes de velas y se pide determinar cuáles de ellas son pirámides rectas. Al igual que se realiza con los prismas, se presenta una actividad de verdadero o falso con el fin de que se comiencen a identificar algunos aspectos que se dan en las mismas. Posteriormente se pide determinar una fórmula para calcular la cantidad de caras, vértices y aristas de una pirámide recta a partir del dato de que su base es un polígono de n lados.

A continuación, se define el volumen de un cuerpo como la cantidad de espacio que ocupa. Se explica que para poder medirlo es necesario considerar un cuerpo como unidad de medida y calcular cuántas veces entra en el volumen a medir. Incluso se menciona que puede ocurrir que la unidad de medida no entre una cantidad entera de veces. Se presenta al metro cúbico como una de las unidades de medida más frecuentes y se menciona que representa al volumen que ocupa un cubo de 1 m de arista. Sin embargo, luego presenta una actividad en el que pide considerar como unidad de medida al cubo de 1 cm de arista y determinar el volumen de dos prismas dados de los cuales se puede visualizar cuántos de estos cubos caben por cada cara.

Luego se presenta la actividad de la Figura 1.11, en la que se muestran las medidas de las aristas sobre el dibujo, pero no así, los cubos de 1 cm de arista por cada una de ellas. Se aclara que los cubitos pueden partirse por el apartado d).

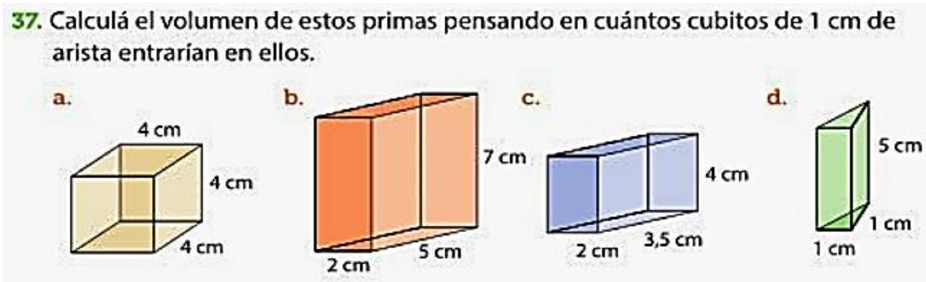


Figura 1.11. Actividad de cálculo de volumen (Sessa et al, 2017, p.148)

Posteriormente, se presenta una estrategia para calcular el volumen de un prisma recto, se aplica dicha estrategia a un ejemplo anterior y luego, se muestra la siguiente fórmula:

$$Volumen\ del\ prisma = área\ de\ la\ base\ x\ altura$$

En la página siguiente se presenta una actividad de exploración para comenzar a pensar cómo calcular el volumen de una pirámide. En esta se muestra una pirámide de altura h y base cuadrada de lado L. Luego se pregunta si es correcto calcular su volumen al hacer $L^2 \cdot h$.

En esta propuesta también se pide buscar unos desarrollos planos de seis pirámides iguales de base cuadrada que se encuentran en otras páginas del libro. Propone armarlas, formar un cubo con ellas y luego calcular el volumen de una de las pirámides. Seguido de esto, se muestra la observación de la Figura 1.12, donde se demuestra una fórmula para el cálculo de volumen de cualquier pirámide.

En la actividad anterior armaron un cubo con 6 pirámides iguales y, por lo tanto, el volumen de cada pirámide es $\frac{1}{6}$ del volumen del cubo. Entonces, si L es la arista del cubo:

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{L \cdot L \cdot L}{6} = L^2 \cdot \frac{L}{6}$$

Pero estas pirámides son muy especiales: el lado de la base mide el doble que la altura de la pirámide, es decir, $L = 2H$. Así, $\frac{L}{6} = \frac{2H}{6} = \frac{H}{3}$. Por otro lado, L^2 es el área de la base. Reemplazando en la fórmula anterior obtenemos la siguiente igualdad.

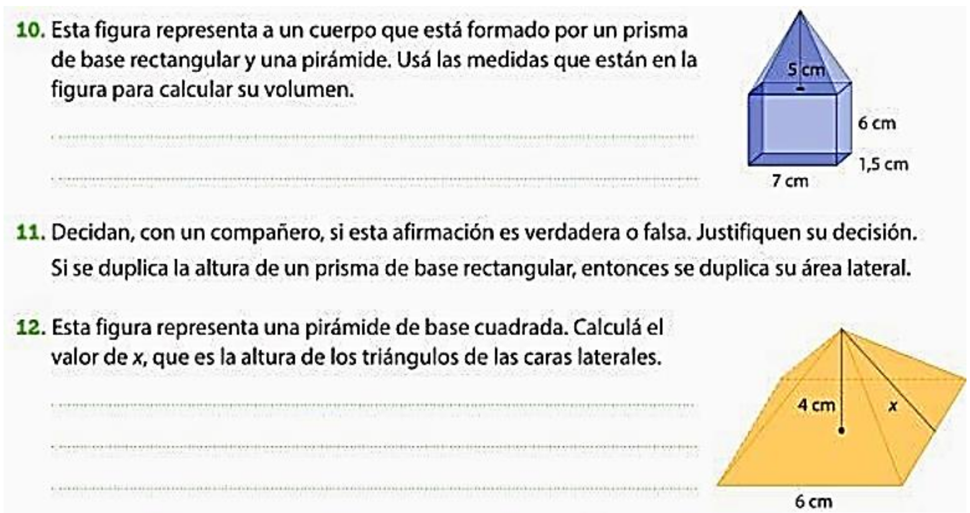
$$\textbf{Volumen de la pirámide} = \frac{\textbf{área de la base} \cdot \textbf{H}}{3}$$

Si bien esta fórmula fue deducida para pirámides muy particulares, los matemáticos han demostrado que sirve para cualquier pirámide, aunque no podamos armar un cubo con 6 de ellas.

Figura 1.12. Formula de volumen para pirámides (Sessa et al, 2017, p.150)

A modo de ejercitación, se presentan algunos problemas de aplicación para calcular volúmenes de ciertas pirámides o cuerpos geométricos que resultan de cortar a una pirámide. En una nueva página se presentan actividades para comparar volumen y área total de un cuerpo. En esta parte se concluye que hay prismas que tienen el mismo volumen, pero las sumas de las áreas de las caras son distintas y que hay cuerpos de diferente volumen, pero las sumas de las áreas de las caras son las mismas.

Por último, se proponen varias actividades que integran los contenidos dados a lo largo del capítulo. De ellas solo tres tratan sobre el cálculo de volúmenes (Figura 1.13).


10. Esta figura representa a un cuerpo que está formado por un prisma de base rectangular y una pirámide. Usá las medidas que están en la figura para calcular su volumen.

11. Decidan, con un compañero, si esta afirmación es verdadera o falsa. Justifiquen su decisión. Si se duplica la altura de un prisma de base rectangular, entonces se duplica su área lateral.

12. Esta figura representa una pirámide de base cuadrada. Calculá el valor de *x*, que es la altura de los triángulos de las caras laterales.

Figura 1.13. Actividades sobre el cálculo de volúmenes de prismas y pirámides (Sessa et al, 2017, p.153)

Pisano (2018)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

Este libro a diferencia de los demás está dividido en temas. El tema 23 es el de cuerpos en el espacio. En el tema 20 se presenta perímetro de figuras y en el 21 el área de figuras.

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada) y tipos de actividades que incluye:

Al principio de esta propuesta se define a un cuerpo como un objeto que ocupa un lugar en el espacio donde al espacio se lo identifica con las tres dimensiones. También se define al volumen de un cuerpo como la cantidad de espacio que ocupa y se presenta un ejemplo de una cacerola.

Luego, se pregunta para qué sirve calcular el volumen de un cuerpo y se describen los cuerpos huecos y macizos. Sobre los cuerpos macizos se pone como ejemplo una bolita de vidrio y se dice que el volumen será la cantidad de vidrio que se necesite para construir dicha bolita. Sobre los cuerpos huecos se pone como ejemplo una caja y se dice que su volumen será la cantidad de cosas que se pueda meter dentro de esa caja.

En esta misma página se define la superficie de un cuerpo como la suma de las superficies de las caras externas de ese cuerpo y se presenta un cuadro con diferentes tipos de cuerpos geométricos, que se muestran en la Figura 1.14.

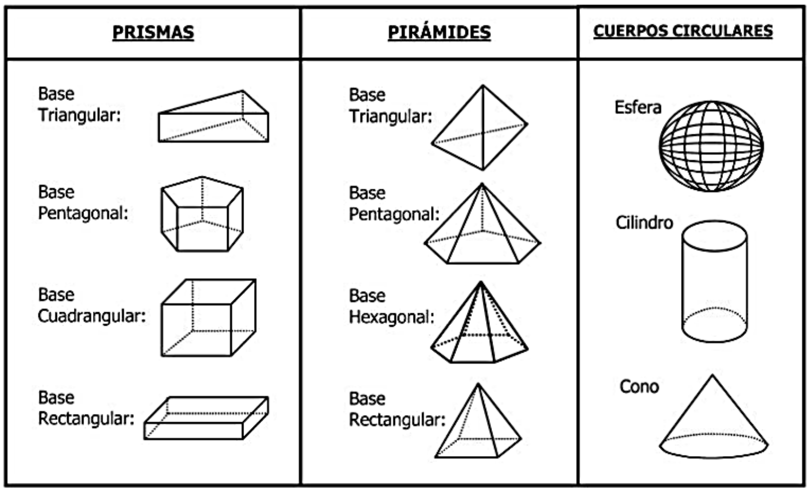


Figura 1.14. Cuerpos Poliedros y Redondos (Pisano, 2018, p.174)

A partir del cuadro, se establece una diferencia entre los prismas y las pirámides, esta es, que los prismas tienen "piso y techo" mientras que las pirámides solo tienen piso ya que son puntiagudas. También se muestran cuerpos que son unión de otros y se dice que se va a trabajar con ellos.

Sin ningún tipo de introducción se presenta un cuadro con fórmulas para calcular áreas laterales y totales y volúmenes de cuerpos geométricos (Figura 1.15).

FORMULAS:

En este cuadro tenemos las fórmulas que podemos usar para calcular el área lateral, total o el volumen de cualquier prisma o pirámide.

Para el cilindro se usan las fórmulas de los prismas (el cilindro es un prisma de base circular)
Para el cono se usan las fórmulas de las pirámides (el cono es una pirámide de base circular)

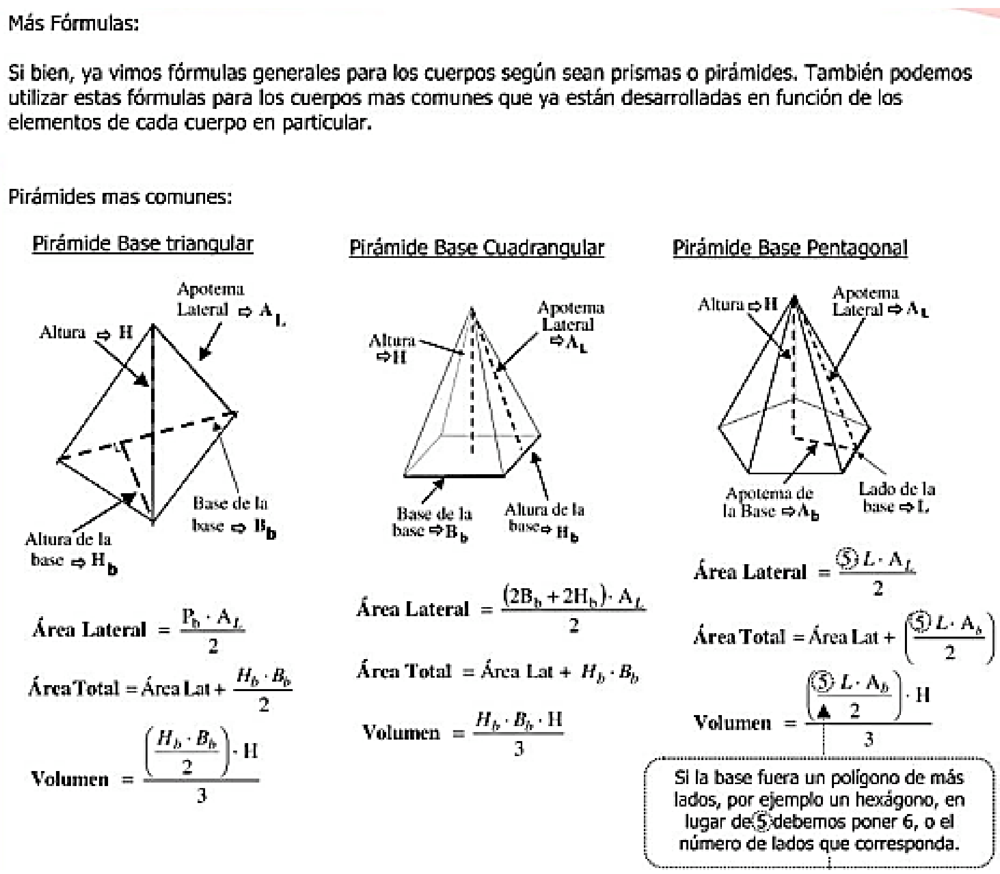
θ ***Prismas y Pirámides***

	PRISMAS	PIRÁMIDES
Área Lateral	Perímetro de la base * Altura	$\frac{\textit{Perímetro}_{(de\ la\ Base)} \cdot \textit{Apotema Lateral}^{(*)}}{2}$
Área Total	Área Lateral + 2 * Área base	Área Lateral + Área de la base
Volumen	Área de la base * Altura	$\frac{\textit{Área}_{(de\ la\ Base)} \cdot \textit{Altura}}{3}$

Figura 1.15. Fórmulas de áreas y volúmenes de poliedros (Pisano, 2018, p.175)

Luego de esto se muestra la fórmula del área de la esfera y de su volumen, y lo mismo se realiza con el cono y el cilindro. A continuación, se presenta un ejemplo en el que se debe calcular el área lateral, total y el volumen de un cono, del cual se dan solo algunos datos.

Se muestran más fórmulas para calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, pero ahora en función de los elementos de cada cuerpo. En la Figura 1.16 se pueden observar algunas fórmulas de las Pirámides. Lo mismo se realiza con ciertos prismas particulares.


Más Fórmulas:

Si bien, ya vimos fórmulas generales para los cuerpos según sean prismas o pirámides. También podemos utilizar estas fórmulas para los cuerpos mas comunes que ya están desarrolladas en función de los elementos de cada cuerpo en particular.

Pirámides mas comunes:

Pirámide Base triangular

$$\text{Área Lateral} = \frac{P_b \cdot A_L}{2}$$

$$\text{Área Total} = \text{Área Lat} + \frac{H_b \cdot B_b}{2}$$

$$\text{Volumen} = \frac{\left(\frac{H_b \cdot B_b}{2}\right) \cdot H}{3}$$

Pirámide Base Cuadrangular

$$\text{Área Lateral} = \frac{(2B_b + 2H_b) \cdot A_L}{2}$$

$$\text{Área Total} = \text{Área Lat} + H_b \cdot B_b$$

$$\text{Volumen} = \frac{H_b \cdot B_b \cdot H}{3}$$

Pirámide Base Pentagonal

$$\text{Área Lateral} = \frac{5\,L \cdot A_L}{2}$$

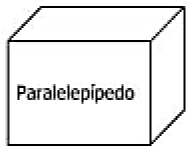
$$\text{Área Total} = \text{Área Lat} + \left(\frac{5\,L \cdot A_b}{2}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{\left(\frac{5\,L \cdot A_b}{2}\right) \cdot H}{3}$$

Si la base fuera un polígono de más lados, por ejemplo un hexágono, en lugar de 5 debemos poner 6, o el número de lados que corresponda.

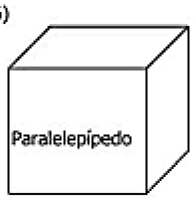
Figura 1.16. Fórmulas de áreas y volúmenes de pirámides en función de sus elementos (Pisano, 2018, p.177)

Posteriormente, se propone un ejercicio de aplicación de fórmulas (Figura 1.17), en el cual para diferentes cuerpos geométricos se muestran cuadros en los que se especifican ciertas medidas de estos cuerpos y se debe calcular el área lateral y total y el volumen de los mismos. En otros cuadros, dadas la altura de la base, la altura del cuerpo y el volumen, se solicita calcular las áreas laterales y totales y el ancho de la base del cuerpo.



Base					
Base	Altura	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
2 cm	10 cm	5 cm			
5 cm	6 cm	4 cm			
3 cm	4 cm	1 cm			
5 cm	20 cm	2 cm			
4 cm	6 cm	2 cm			
8 cm	7 cm	3 cm			
8 cm	15 cm	10 cm			

6)



Base					
Base	Altura	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
	5 cm	6 cm	cm^2	cm^2	150,00 cm^3
	6 cm	8 cm	cm^2	cm^2	192,00 cm^3
8 cm		5 cm	cm^2	cm^2	40,00 cm^3
9 cm		2 cm	cm^2	cm^2	36,00 cm^3
7 cm	3 cm		cm^2	cm^2	21,00 cm^3
	4 cm	4 cm	40,00 cm^2	cm^2	cm^3
2 cm		8 cm	64,00 cm^2	cm^2	cm^3

Figura 1.17. Ejercicio de aplicación de fórmulas (Pisano, 2018, p.178)

Otras actividades que se presentan son ejercicios intramatemáticos para aplicar fórmulas. Algunos de los cuerpos que se muestran en estos son unión de cuerpos poliedros y redondos. Por último, se proponen algunas actividades de aplicación con contexto.

4.1.2. Articulación con los niveles de Van Hiele

En la Tabla 1.1 se presenta una breve descripción acerca de los niveles de pensamiento geométrico relativos al tema que ha sido posible identificar en las cuatro obras de interés.

Tabla 1.1. Articulación de los Niveles de Van Hiele con los libros de texto

Libros	Niveles	Forma en que alcanzan esos niveles
Becerril et al (2017)	3	Se considera que con esta propuesta un estudiante no alcanzaría los niveles 1 y 2 de Van Hiele ya que no hay momentos de visualización de los poliedros ni se los reconoce por sus propiedades. Podrían llegar a alcanzar un nivel 3 ya que las actividades en su conjunto pueden llevar a conjeturar una forma de calcular el volumen de un prisma y realizar una justificación informal del hecho. No se considera que se alcancen los niveles 4 y 5 ya que no se realizan demostraciones ni se establecen relaciones entre ellas.
Kaczor y Outón (2017)	2	En esta propuesta no se considera que un estudiante pueda alcanzar un nivel 1 ya que no hay una etapa de reconocimiento de los cuerpos. Se podría alcanzar un nivel 2 ya que al principio se propone identificar cantidad de vértices, aristas y caras de ciertos cuerpos geométricos. Luego se los define y a continuación se propone una actividad donde los alumnos deberán determinar qué tipo de prisma o pirámide es según la cantidad de elementos que poseen. También se pueden establecer relaciones entre sus elementos. Estas cuestiones se corresponden con un nivel 3; aunque en un nivel 3 deben ser capaces de realizar argumentaciones informales, algo que desde esta propuesta no se considera por lo cual es un nivel 3 que no se llega a concretar. No se considera que se alcance un nivel 4 o 5, ya que no se efectúa ningún tipo de demostración. De hecho, si bien en un nivel 3 se

		podría realizar una justificación informal de las fórmulas de volumen, en este caso, solo se imponen.
Sessa et al (2017)	1 a 4	En esta propuesta se podría considerar que se alcanza un nivel 1 ya que luego de realizar definiciones sobre los poliedros, los estudiantes deben realizar un reconocimiento de prismas a partir de objetos de la vida diaria. También se realiza una actividad en la que se debe determinar si ciertas propiedades son verdaderas o falsas. Estas están basadas en atributos visuales, así que con esta se profundiza en un nivel 1. Se alcanza un nivel 2 ya que se reconocen y utilizan los elementos que caracterizan a los poliedros. Se propone una actividad para establecer relaciones entre las aristas, vértices y caras. Un estudiante podría alcanzar un nivel 3 ya que deberá realizar justificaciones informales. También se podría decir que con esta propuesta se realiza una demostración del volumen de la pirámide y para ella se realiza una relación con el volumen de un cubo, por lo cual se alcanza un nivel 4.
Pisano (2018)	-	En esta propuesta no se considera que se alcance ningún nivel ya que no hay una etapa de reconocimiento ni de análisis de los elementos de los cuerpos geométricos. Hay una especie de clasificación de los cuerpos, aunque es impuesta y no surge de un análisis que deban realizar los estudiantes. Las fórmulas son dadas y no se realizan actividades que induzcan a algún tipo de demostración.

4.2. Caracterización de habilidades de conjeturación y demostración que fomentan otros recursos

En este segundo apartado de Resultados se pretende realizar aportes complementarios sobre otros recursos que podrían fomentar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria. Para esto dividimos este análisis en dos subcategorías, una de ellas se corresponde con la descripción de las propuestas online y la otra con la articulación de ellas a los niveles de Van Hiele.

4.2.1. Descripción de los recursos en línea

Canal de YouTube "Acervo"

- De qué manera se aborda el contenido (descripción sintética y detallada):

Este material audiovisual se presenta como una guía para el docente. En el mismo, una docente realiza indicaciones sobre el abordaje de la fórmula para calcular el volumen de prismas rectos cuya base sea un triángulo o un cuadrilátero.

Se propone calcular el volumen de prismas a partir del conteo de cubos unitarios como una forma de recuperar conocimientos previos y se establecen algunos objetivos, estos son:

- Construir una fórmula para justificar el volumen de un prisma recto de base cuadrangular.
- Construir una fórmula para justificar el volumen de un prisma recto de base triangular.
- Construir una fórmula general para calcular el volumen de prismas rectos de base cuadrangular o triangular.
- Utilizar la fórmula para resolver problemas de volumen para determinar alguna de las dimensiones utilizadas.

Luego de establecer estos objetivos, se comienza con la construcción de una fórmula de volumen para un prisma de base rectangular. En este momento se muestra un cubo de 1 cm^3 y otro cubo formado por varios cubitos de 1 cm^3 y se pregunta cuál es su volumen, cuáles son las medidas de las aristas, qué relación existe entre el volumen total y las medidas de las aristas y cuál es entonces la fórmula para calcular el volumen de un prisma de base cuadrangular. Además, se menciona que el tratamiento debe ser gradual y constructivo y que esas son algunas preguntas que pueden guiar una planificación.

Después de esto, se presentan algunas indicaciones respecto al segundo objetivo, construir una fórmula para justificar el volumen de un prisma recto de base triangular. Nuevamente se realizan algunas preguntas generales que pueden guiar la planificación: ¿Qué ocurre con el volumen si dividimos por la mitad al prisma de base cuadrada? ¿Qué figura tiene ahora la base del prisma recortado a la mitad? ¿Cómo modificarías la fórmula que obtuviste para calcular el volumen de un prisma de base cuadrangular para obtener una nueva fórmula para obtener el volumen de un prisma de base triangular?

El tercer objetivo consiste en construir una fórmula general para calcular el volumen de un prisma de base cuadrangular o triangular. Se proponen realizar las siguientes preguntas e indicaciones: ¿Cómo es la base del prisma? Anota la fórmula que encontraste para calcular el volumen de un prisma recto de base cuadrangular. ¿Cómo calcular el área de la base de un rectángulo? Anota la fórmula que encontraste para calcular el volumen de un prisma recto de base triangular. ¿Puedes incluir el área de la base en tu fórmula del volumen en ambos prismas? Anota tu nueva fórmula para calcular el volumen de un prisma recto de base rectangular o triangular.

Luego, se realizan algunas observaciones. Entre ellas se menciona que no basta con la construcción de conocimientos, sino que también es necesario formalizar las expresiones que modelan el volumen de prismas rectos de base cuadrangular y triangular. También se sugiere no olvidar de presentar la expresión general para prismas rectos de base cuadrangular, rectangular o triangular ya que esa será la base para extenderla hacia los prismas rectos de base poligonal. Desde acá se concluye que el volumen será el área de la base por la altura.

Para finalizar se propone verificar que el estudiante logró los aprendizajes esperados, para esto se plantea un cierre con actividades en donde el estudiante deba poner en práctica lo aprendido.

Por último, se mencionan algunas dificultades que pueden aparecer durante la enseñanza, algunas de ellas son:

- Explicar las fórmulas sin que el alumno haya intentado su construcción.
- Limitarse a encontrar el volumen a partir de fórmulas y evitar encontrar otras dimensiones dado el volumen.
- No utilizar la generalización encontrada del volumen como base por altura.
- Confundir el volumen con la capacidad y sus unidades.
- No utilizar problemas como medio y como meta de aprendizaje.

También se realizan observaciones sobre cómo superar dichas dificultades, entre ellas se menciona utilizar preguntas de reflexión que guíen a los estudiantes en la construcción de fórmulas; acompañar al alumno en el análisis de las propiedades de los prismas rectos; formalizar las fórmulas construidas y analizar sus variables, significados y unidades; plantear problemas para el cálculo de volumen de prismas rectos de base cuadrangular o triangular; definir con precisión y ejemplos, los conceptos de volumen y capacidad así como sus unidades.

Canal de YouTube "Susi Profe"

- De qué manera se aborda el contenido (descripción sintética y detallada):

De este canal se tomaron dos videos, uno de ellos trata sobre el área y el volumen de prismas y cilindros. El segundo trata sobre el área y el volumen de la pirámide.

En primer lugar, se describe el video de área y volumen del prisma. Al comenzar, se muestran los desarrollos planos de un prisma de base cuadrada y de un cilindro. Se recuerda que el prisma es un poliedro ya que tiene todas sus caras planas. Además, se menciona que los prismas en particular son poliedros que tienen dos bases a diferencia de las pirámides que también son poliedros que solo tienen una. También se menciona que los prismas se nombran conforme al polígono que tengan en la base y se dan algunos ejemplos. En estos ejemplos se reconoce que la cantidad de lados de la base determina la cantidad de caras laterales del prisma. Luego, se explica el desarrollo plano del prisma y se menciona que los desarrollos planos ayudarán a deducir las fórmulas, incluso si estas se olvidan con el tiempo, se sugiere que volver a ellos será de ayuda. Una vez que se comentan estas características del prisma, se realiza algo similar con el cilindro.

En el video se presentan al prisma y al cilindro juntos ya que se menciona que, al obtener la fórmula para el cálculo del área y el volumen del primero, es más sencillo obtener las mismas fórmulas para el segundo.

Luego se explica que para calcular el área total del prisma hay que calcular el área de cada una de sus caras y que el área total es igual al área lateral más el área de las dos bases. Se escribe la fórmula como sigue: $A_T = A_L + 2A_B$. También se explica cómo calcular el área lateral y el área de las bases. Respecto a la primera, se muestra una forma de calcularla a partir de interpretar el desarrollo plano (Figura 1.18) y se menciona que se puede obtener al calcular el área del rectángulo del desarrollo plano que queda determinado por los rectángulos que forman las caras laterales. Se explica que la altura de este rectángulo coincide con la altura del prisma y la base coincide con el perímetro de la figura de la base del prisma.

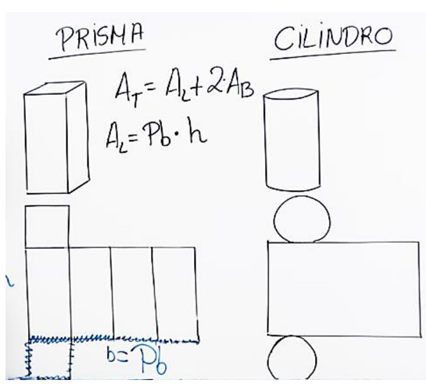


Figura 1.18. Desarrollo plano del prisma cuadrangular y áreas laterales y totales (Enlace Canal Susi Profe)

A continuación, se prosigue con el volumen del prisma. Se explica que en este caso como la base es un cuadrado, el volumen va a ser la cantidad de veces que entra ese cuadrado hasta rellenar el prisma. Se concluye que el volumen es igual al área de la base por la altura y se escribe como sigue: $V = A_B \cdot h$.

Una vez realizado esto, continúa con el área lateral del cilindro y se explica que se puede utilizar la misma fórmula general que antes solo que ahora el perímetro es de un círculo y si se calcula y suma el área de las bases al área lateral se obtiene el área total. También se explica que la fórmula de volumen del prisma sirve para el cilindro ya que el volumen de este será la cantidad de veces que entre en él, la figura de la base, en este caso, un círculo de cierta unidad de medida de espesor.

Por último, se realizan dos ejercicios, uno para calcular el área total de un prisma y su volumen y otro donde se calcula lo mismo para un cilindro. En el primer ejercicio se muestra un prisma cuadrangular de altura 10 *cm* y lado de la base 5 *cm.* Al comenzar se calcula el área lateral, donde se identifica que el perímetro de la base es $4 \cdot l$. Luego se calcula el área total para cual se identifica que el área de la base es l^2 y, por último, se calcula el volumen del prisma. La pizarra queda como se muestra en la Figura 1.19.

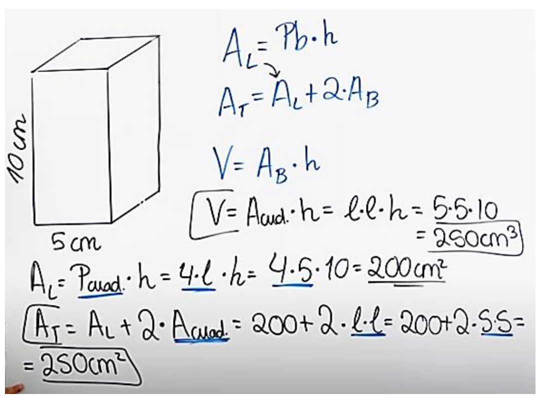


Figura 1.19. Ejercicio de aplicación (Enlace Canal Susi Profe)

Se menciona que en caso de que el prisma tenga otra base, entonces se deberá calcular el área de la base correspondiente a ese polígono.

En el segundo ejercicio se realiza lo mismo que en el primero, pero para un cilindro de altura 5 *m* y radio 3 *m.* Al finalizar se menciona que, como se vio, no es necesario acordarse una fórmula para cada prisma o cilindro, se pueden utilizar las fórmulas generales para el área total y el volumen, donde el perímetro y el área de la base corresponden a la figura plana que se tenga en la base.

En el segundo video se describe a la pirámide como un cuerpo geométrico que se caracteriza por tener una sola base y como caras laterales triángulos. Se muestra una pirámide de base rectangular y se explica que se nombran según la base que tengan. Se identifican aristas, caras y vértices, y se indica que el punto en el que se unen todas las caras laterales se llama cúspide. Además, se indica que la altura de la pirámide va desde el "punto medio de la base" hasta el vértice llamado "cúspide" y se indica que la apotema es la altura de cada uno de los triángulos laterales.

Luego, se realiza el desarrollo plano de la pirámide y se indica que en él se tendrán tantos triángulos como lados se tengan en la base de la misma.

Es importante mencionar que en este video se muestran las fórmulas del área lateral y total y del volumen de la pirámide desde el principio, así que una vez que termina de caracterizar la pirámide, propone un valor para la altura de la misma, un valor para el lado de la base y un valor para la apotema con el fin de calcular las áreas y el volumen de la pirámide para esas medidas dadas. Se realiza este ejercicio y se explica que habrá veces en que no se tendrán todos los datos y habrá que averiguarlos de alguna forma para poder calcular área y volumen.

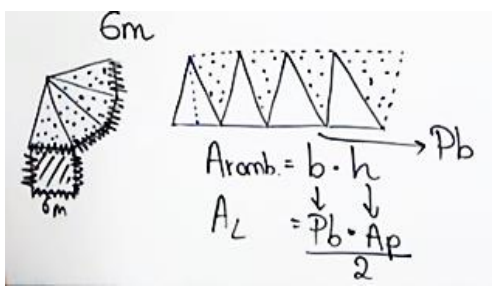


Figura 1.20. Desarrollo plano de la pirámide cuadrangular y área lateral (Enlace Canal Susi Profe)

La mitad restante del video se dedica a realizar una demostración de las fórmulas utilizadas para lo cual se ayuda del desarrollo plano de la pirámide. Para esto se realiza el bosquejo que se muestra en la Figura 1.20, donde se dibujan los triángulos laterales de una forma diferente y se rellena con línea de puntos y puntitos los triángulos que no forman parte del desarrollo plano. Se indica que la figura obtenida es un romboide y que su área se calcula como base por altura. Se explica que la base de la figura coincide con el perímetro del cuadrado de la base de la pirámide y que la altura es la altura de los triángulos que coincide con la apotema. Luego, se explica que, como el desarrollo plano se rellenó con triángulos que no correspondían al de la pirámide, se tienen ocho triángulos y, por ende, el área lateral será el perímetro de la base por la apotema dividido dos ya que teníamos cuatro triángulos en el desarrollo plano.

Por último, se demuestra la fórmula de volumen. Para esto se utiliza material concreto, se muestra un prisma de base cuadrangular y una pirámide de igual altura con la misma base. Se recuerda el volumen de los prismas y se explica que el volumen del prisma es tres veces el de la pirámide ya que cabe tres veces el volumen de la pirámide en un prisma con misma base y altura. Para mostrarlo llena la pirámide tres veces y vuelca el agua en el prisma (Figura 1.21); de esta forma, el prisma queda totalmente lleno de agua.

Figura 1.21. Desarrollo de la fórmula de volumen de las pirámides a partir de material concreto (Enlace Canal Susi Profe)

Propuestas de Khan Academy

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada):

Propuesta 1

En esta propuesta se desarrolla el volumen de un prisma rectangular. Al comenzar, se presenta un video en el que se explica cómo se puede medir en diferentes dimensiones. En una dimensión se explica que, para comparar dos longitudes, es necesario definir una unidad de medida y ver cuántas veces cabe ese segmento unidad en los segmentos que se quieren comparar. Luego se realiza algo similar para la dimensión 2D, donde se define un cuadrado unitario con el cual se pueden medir las áreas de otros cuadrados. Se explica que, como se trabaja en dos dimensiones, esos cuadrados tienen ciertas unidades cuadradas de área. Por último, se explica que en la dimensión 3D, para medir el espacio que ocupa un cubo, se toma como unidad de medida un cubo que tiene aristas de longitud una unidad y se ve cuántos cubos unitarios caben en el cubo grande al cual se le quiere calcular el volumen.

Se presenta otro video en el que se despliega un applet que muestra cuerpos geométricos aleatorios con diferentes volúmenes y diferentes unidades (metro y centímetro). En el video se cuenta la cantidad de cubos unitarios que tiene cada cuerpo. Una vez contados, se introduce el valor hallado en el cuadro de texto llamado “respuesta” y, al apretar el botón “comprobar tu respuesta”, el applet indica si el volumen que se halló es correcto o no. Se muestran en el video cuatro cuerpos diferentes, dos prismas los cuales no se pueden mover y dos cuerpos geométricos no convexos que pueden girarse para observar cómo están compuestos (Figura 1.22). Para contar la cantidad de cubos unitarios que forman el prisma de la Figura 1.22, primero se analizó cuántos cubos conforman la primera capa y a esa cantidad se la multiplicó por dos dado que el prisma está formado por dos capas iguales.

Figura 1.22. Actividad interactiva para calcular volúmenes (Enlace Propuesta 1 KA)

Luego de esto se presenta otro video en el cual se busca obtener otra forma de calcular el volumen que no sea a partir del conteo de cubitos; para esto se presenta un prisma de aristas de 4 *cm*, 3 *cm* y 2 *cm*. Se toma una de las capas del prisma, se cuentan los cubitos que forman la capa y se concluye que la capa tiene 8 unidades cúbicas. Luego, se analiza el área del rectángulo que determina esta capa y se observa que esa área (se calcula como $4\,cm \cdot 2\,cm = 8\,cm^2$), numéricamente, es igual a la cantidad de cubitos en esa capa; pero como el cuerpo tiene 3 capas de estas ya que tiene 3 *cm* de profundidad, se multiplica el área de la capa que es 8 cm^2 por 3 cm. Así se obtiene que el volumen del prisma es de $24\,cm^3$ (Figura 1.23).

Sin embargo, una vez hallado el volumen, se plantea calcularlo a partir de otra capa que no sea la primera que se eligió. Se toman dos capas más que se muestran en la Figura 1.24 y se observa que calcular el volumen a partir de esas capas es indistinto ya que se obtiene el mismo volumen; esto muestra que el volumen no depende de la capa que se elija.

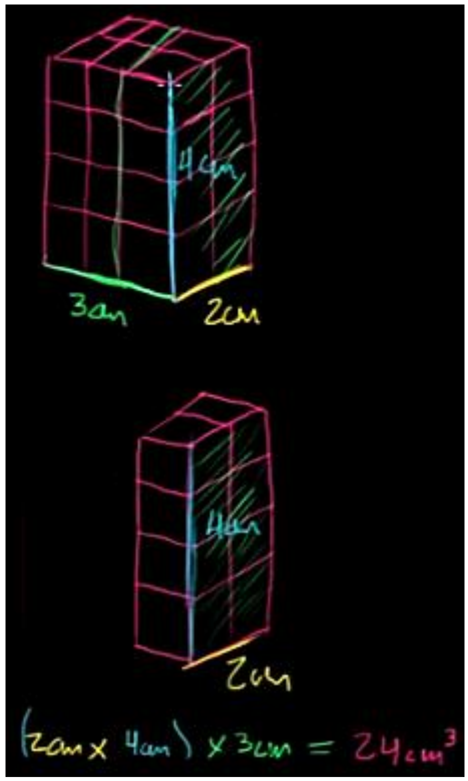


Figura 1.23. Cálculo de volumen de prisma dadas las medidas de sus aristas (Enlace Propuesta 1 KA)

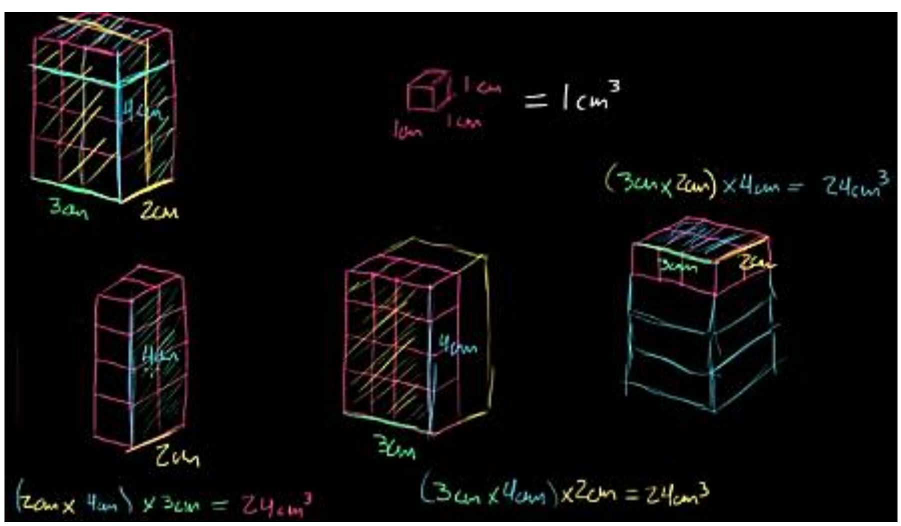


Figura 1.24. Cálculo de volumen de prisma dadas las medidas de sus aristas (Enlace Propuesta 1 KA)

Se concluye que entonces para calcular el volumen de un prisma dadas las medidas de sus aristas basta con multiplicar estas medidas, sin necesidad de contar los cubos unitarios.

A continuación, se presenta una actividad en la que se muestran dos prismas rectangulares de los cuales no se muestran los cubitos unitarios que contiene, sino que solo se dan las medidas de las aristas en pies y *cm* respectivamente. Se calcula el volumen de la misma forma que antes solo que ahora se aplica directamente lo que se concluyó en el video anterior. Después de esto, se presenta un ejercicio en el que se muestran cuatro prismas rectangulares diferentes en los que se marca cada capa con distintos colores como en la Figura 1.25 y se pide reconocer cuántas capas tiene cada prisma, con qué cantidad de cubos está formada cada capa y luego cuál es el volumen del prisma.

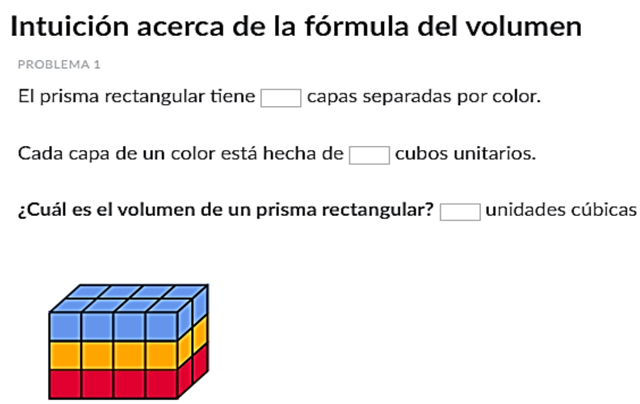


Figura 1.25. Actividad de cálculo de volumen (Enlace Propuesta 1 KA)

Por último, se realiza un repaso de todo lo abordado. En este repaso se define el volumen como la cantidad de espacio tridimensional que ocupa un objeto y se menciona que se mide en unidades cúbicas. Se muestra un ejemplo de un cubo formado por 18 cubitos unitarios. Luego se observa que, para encontrar el volumen de un prisma rectangular, se multiplica el largo del prisma por su ancho y por su altura y se muestra la siguiente fórmula:

$$Volumen\ del\ prisma\ rectangular = largo \cdot ancho \cdot altura$$

Después de mostrarse esta fórmula, se presentan dos ejemplos, un cubo del cual se pueden ver los cubos unitarios que lo conforman y la medida de la arista, y otro prisma del cual solo se muestran las medidas. Se aplica la fórmula y se calcula el volumen de ambos cuerpos geométricos. A continuación, muestran dos ejercicios parecidos a los de los ejemplos para que realice el estudiantado.

Por último, se presenta como desafío calcular el volumen de un cuerpo geométrico que resulta de la unión de dos prismas. De este cuerpo se muestran las medidas de las aristas y se puede comprobar si el volumen dado es correcto.

Propuesta 2

De esta propuesta solo se analiza una sección. Al comenzar se describe a una pirámide como la colección de todos los puntos entre (e inclusive) una base en forma de polígono y un ápice que está en un plano diferente al de la base (Figura 1.26).

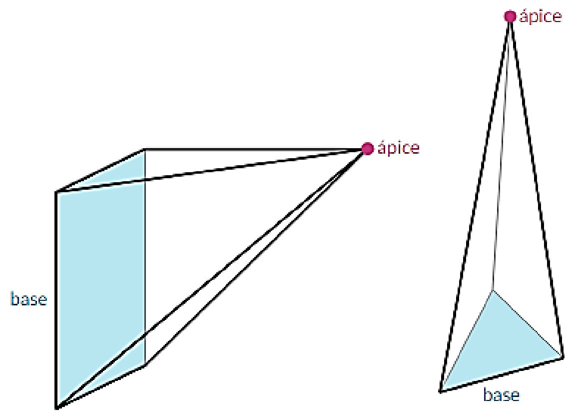


Figura 1.26. Descripción de la pirámide (Enlace Propuesta 2 KA)

También se la define como una colección de todas las homotecias de la base, con el ápice como centro de homotecia, con factores de escala de cero a uno (Figura 1.27).

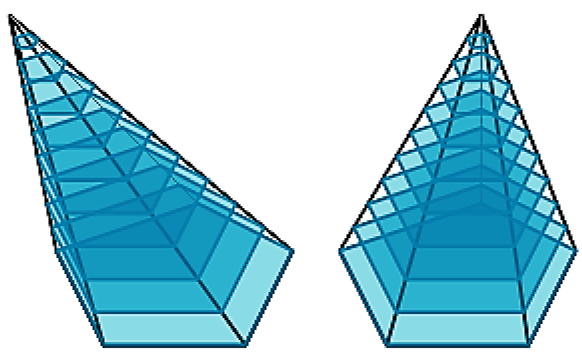


Figura 1.27. Pirámide como colección de homotecias de la base (Enlace Propuesta 2 KA)

Posteriormente, se muestra la fórmula de volumen de la pirámide y se pregunta "¿de dónde sale esta fórmula?". Se propone empezar con un cubo cuya longitud lateral es una unidad y rebanarlo en tres pirámides congruentes y esto se hace mediante un recurso de GeoGebra. Se pregunta cuál es el volumen de cada pirámide y se pide completar con aquel dato. También, se da la opción para corroborar si lo respondido está bien y ver una explicación; la misma se muestra en la Figura 1.28.

También se pregunta si siempre es posible juntar pirámides congruentes para formar un cubo, se explica que esto no siempre es posible y se muestra un ejemplo gráfico. A su vez se menciona que siempre se puede cortar un prisma rectangular o triangular en tres pirámides con volúmenes iguales, pero esas pirámides solo serán congruentes en el caso especial en que sean parte de un cubo.

Ocultar explicación.

El volumen del cubo es $1^3 = 1$ unidad cúbica. Cortamos el cubo en 3 pedazos iguales para crear las pirámides.

Entonces el volumen de cada pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del cubo.

El volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ unidades cúbicas.

[¿Siempre podemos juntar pirámides congruentes para hacer un cubo?]

Figura 1.28. Explicación del volumen de las pirámides (Enlace Propuesta 2 KA)

Luego se muestra un ejemplo de una pirámide de la cual se indican sus medidas y se pide calcular su volumen. En la explicación se utiliza el método de disección. Este propone pensar el volumen de la pirámide como un tercio del volumen del prisma de misma área y altura que la contiene.

Luego de esto, se invita a rebanar una pirámide en capas paralelas a su base y deslizar dichas capas. Se menciona que esto no cambiará el volumen y que, a medida que el número de capas se acerca a infinito, la pirámide remodelada se suavizará. Esto da pie a introducir el principio de Cavalieri; sobre el mismo se menciona que, mientras no cambien la altura ni las áreas de secciones transversales paralelas a la base de la pirámide, tampoco cambia el volumen. Se concluye que entonces es posible utilizar la misma fórmula para el volumen de la pirámide sin importar dónde se mueva el ápice.

A continuación, se presenta un ejercicio para calcular el volumen de una pirámide, aunque no está relacionado con lo anteriormente desarrollado. Se muestra otra aplicación del principio de Cavalieri a las pirámides. Esta dice que dos bases pueden tener la misma área y formas totalmente diferentes y que si la altura y el área de la base de dos pirámides o sólidos en forma de pirámide son iguales, también lo son sus volúmenes, pues las áreas de todas las demás secciones transversales paralelas a la base también deben ser iguales. Se pregunta cómo se sabe que las áreas de las demás secciones transversales son iguales y al clickear dicha pregunta se muestra la respuesta. Para ilustrar esto se utilizan homotecias.

A partir de lo anterior, se concluye que la fórmula del volumen de la pirámide funciona sin importar la forma 2D que tenga la base y se presenta un ejercicio para calcular el volumen de una pirámide de base triangular de la cual se dan las medidas de las aristas.

Luego, se muestra otra forma de deducir la fórmula al aproximar el volumen de la pirámide con prismas. Se presenta una manera de modelar a la pirámide como una pila de prismas, como si se construyera la pirámide con bloques. El volumen de este modelo es mayor que el de la pirámide. A medida que se hacen capas más y más finas, el volumen del modelo se acerca cada vez más al volumen de la pirámide. Esta idea se muestra mediante un gif (Figura 1.29).

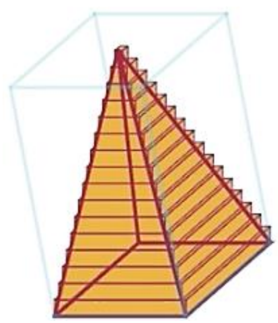


Figura 1.29. Aproximación del volumen de una pirámide al modelar a la misma como pilas de prismas (Enlace Propuesta 2 KA)

En la Tabla 1.2 se realizan aproximaciones del volumen de la pirámide con este método.

Tabla 1.2. Aproximaciones con diferentes cantidades de capas (Enlace Propuesta 2 KA)

Número de capas	$\frac{\text{Volumen de la aproximación de pirámide de bloques}}{\text{Volumen del prisma}}$
4	≈ 0.469
16	≈ 0.365
64	≈ 0.341
256	≈ 0.335
1024	≈ 0.334
4096	≈ 0.333
∞	$\frac{1}{3}$

Se concluye a partir de la tabla que como las figuras prismáticas pueden tener cualquier figura cerrada 2D en sus bases, y como se pueden inclinar sin cambiar su volumen, la razón es válida para todas las figuras piramidales y conos.

Propuesta de GeoGebra

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada):

Esta propuesta de GeoGebra se divide en varias secciones. La primera sección introduce a los estudiantes a las características de objetos con volumen medible. Dentro de esta sección hay dos subsecciones. En la primera se propone ver la película "Planilandia" basada en la novela "Flatland" de Edwin Abbott escrita en 1884. En base a la película se realizan algunas preguntas para que respondan los estudiantes, entre ellas: ¿Qué objetos conoces de tres dimensiones? ¿Qué objetos de tu entorno no tienen tres dimensiones? ¿Cómo se vería un objeto de la cuarta dimensión? Luego se muestra la proyección de la sombra de un teseracto, que es un cubo en cuatro dimensiones. La representación que se muestra es en 3D ya que los seres humanos solo pueden percibirlo de manera limitada.

En la segunda subsección, al comenzar se pregunta cuántas veces se puede doblar una hoja de papel por la mitad. Se propone doblar una hoja la mayor cantidad de veces que se pueda y luego se propone ver un video del canal de YouTube "Derivando" en el cual se explica que si se doblara la hoja 54 veces la altura sería mayor que la distancia de la Tierra al Sol. Una vez visto el video se propone responder algunas preguntas más: ¿La hoja de papel tiene volumen?, ¿Por qué? ¿Qué objetos con volumen observas en tu entorno? ¿Qué objetos de tu entorno no tienen volumen?

La siguiente sección tiene como objetivo distinguir las cualidades de los recipientes y los objetos volumen-medibles, como: altura, capacidad y forma. Esta se divide en cuatro subsecciones. La primera de ellas trata sobre capacidad de recipientes. Aquí se muestran cuatro grupos de envases y se pregunta para cada grupo qué envase tiene mayor capacidad y se pide estimar el volumen de cada uno.

Tabla 1.3. Actividad de exploración (Enlace Propuesta GeoGebra)

Unidad de medida:		
Recipiente	**Estimación** ¿Cuántas veces creo que cabe la unidad de medida?	**Medición** ¿Cuántas veces cabe la unidad de medida?
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

En la segunda subsección se propone elegir una unidad para medir (agua; semillas; harina; azúcar; canicas) y un instrumento de medición (taza; vaso; tapa de garrafón; tapa de botella) y se presenta la actividad de la Tabla 1.3 con el fin de que los estudiantes estimen la capacidad de cierto recipiente y luego determinen qué tan acertada es la estimación.

En la tercera subsección se busca comparar capacidades. Para esto se propone formar equipos de tres integrantes, y comprobar cuántas veces cabe el contenido de un recipiente en cada uno de los demás. Esto se debe registrar como se indica en la Tabla 1.4.

Tabla 1.4. Actividad sobre capacidad (Enlace Propuesta GeoGebra)

¿Cuántas veces cabe el contenido de 100 ml?				
en 1 litro	en 500 ml	en 250 ml	en 125 ml	en 100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 125 ml?				
en 1 litro	en 500 ml	en 250 ml	en 125 ml	en 100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 500 ml?				
en 1 litro	en 500 ml	en 250 ml	en 125 ml	en 100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 1 ml?				
1 litro	500 ml	250 ml	125 ml	100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 1 litro?				
1 litro	500 ml	250 ml	125 ml	100 ml

Luego se propone comparar los resultados con los demás equipos y validar los que sean correctos. Además, se pide observar la forma en que cada equipo representó las equivalencias y decidir en grupo cuál es la más conveniente.

En la cuarta subsección se plantea un reto en el cual se muestran botellas de tres capacidades diferentes y se propone meter dentro de un rectángulo veinte botellas de diferentes tamaños que contengan veinte litros en total. Para esto se indica que una botella pequeña tiene una capacidad de 500 ml, una mediana un litro y una grande dos litros.

La tercera sección trata sobre el volumen que se ocupa y está conformada por tres subsecciones. En la primera de ellas se pregunta qué se entiende por el volumen de un objeto y se muestran tres pelotas dentro de una misma caja, una de tenis, una de ping pong y una de acero; luego se pregunta cuál de ellas ocupa mayor volumen. La respuesta elegida se puede corroborar.

La segunda subsección trata sobre clasificar diferentes objetos con volumen ocupado. Al inicio de esta, se define el volumen como la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo. Para el estudio del volumen ocupado se clasifican los cuerpos en abiertos y cerrados. Los objetos abiertos no tienen tapa por lo que son recipientes y un ejemplo puede ser una taza. Los objetos cerrados son aquellos que están limitados por una o varias superficies o cáscara, pueden ser huecos o sólidos. Una vez realizada esta clasificación, se pide reconocer objetos de Volumen-Medibles abiertos, cerrados huecos y cerrados sólidos que hay en el entorno. Se muestran posibles respuestas de cada tipo.

En la tercera subsección se trata el volumen que ocupan diferentes objetos. Se analiza el volumen de un objeto abierto y se menciona que el propósito de querer averiguar su volumen tiene que ver con que estos objetos pueden contener cosas, entonces resulta interesante saber cuánto de algo pueden contener. Se presentan algunos ejemplos sencillos de objetos reales y se desarrolla otra forma de pensar el volumen como el espacio ocupado que ya no puede ser utilizado por otro objeto; es decir, se piensa el volumen de un cuerpo con relación a otros. Para proseguir con este análisis, se presenta un applet en el que al manipular deslizadores se puede rellenar un cubo respecto al ancho, el largo y la altura (Figura 1.30).

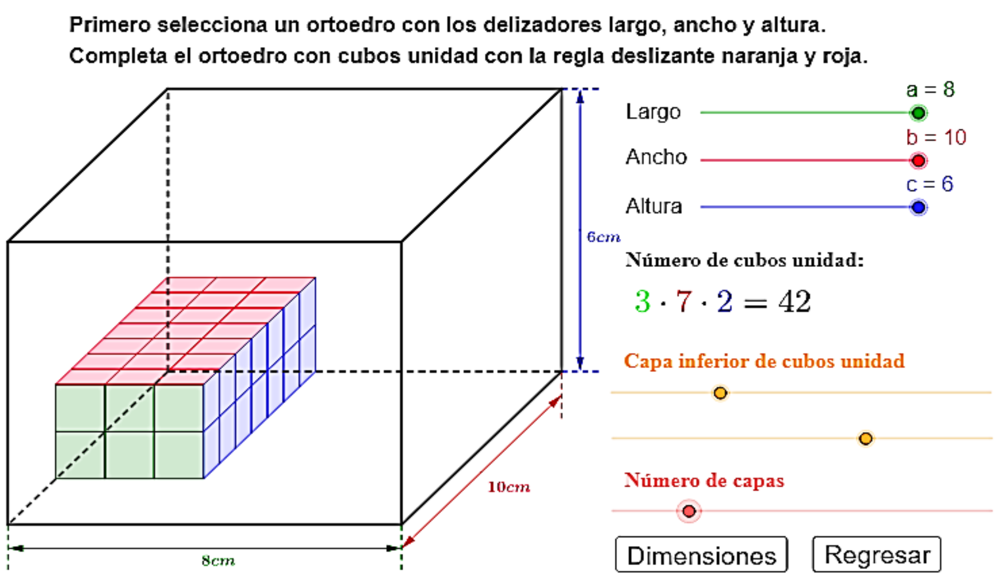


Figura 1.30. Applet para analizar el volumen de un cuerpo en relación a otro (Enlace Propuesta GeoGebra)

Algunas de las preguntas que se realizan luego de mostrarse el applet son: Si se llena la caja con cubos, ¿con cuántos cubos se llenó la caja? Entonces, ¿cuál es el volumen de la caja? Cuando solo hay un cubo en la caja, ¿cuál es el volumen ocupado en la caja? Cuando solo hay un cubo en la caja, ¿cuál es el volumen que no está ocupado por cubos en la caja? Con las mismas condiciones del caso anterior, crea una caja de ocho cubos, ¿cuál es el volumen que no está ocupado en la caja?

Así como se analiza el volumen de cuerpos abiertos, también se realiza un pequeño abordaje para analizar el volumen de objetos cerrados huecos. Para esto se presenta la imagen de una bocha de navidad y se menciona que el espacio ocupado considera el espacio vacío que encierra, pues el objeto también ocupa ese espacio en el sentido de que no permite que otro cuerpo lo ocupe. Con esto se concluye que entonces el volumen ocupado es el mismo que si la bocha fuese completamente sólida. Luego se pregunta qué se le ocurre al estudiante que puede tener la bocha de navidad dentro. La respuesta que da la propuesta y que es opcional ver, dice que la bocha contiene aire. Se entiende que esta pregunta se realiza para dimensionar que siempre hay algo, en este caso aire.

La cuarta sección de la propuesta se llama “volumen externo” y tiene tres subsecciones; en la primera de ellas se realiza una introducción a los sólidos platónicos. Se desarrollan algunas particularidades de su historia y luego se propone construirlos con palitos y gomitas. Al respecto se pregunta sobre la cantidad de palitos y gomitas que se utilizó para cada uno.

En la segunda subsección se introduce el teorema de Euler y se pide comprobar esta relación en los sólidos platónicos; para esto se muestra un applet para cada sólido en el que mediante un deslizador se puede desarmar el poliedro en su desarrollo plano (Figura 1.31).

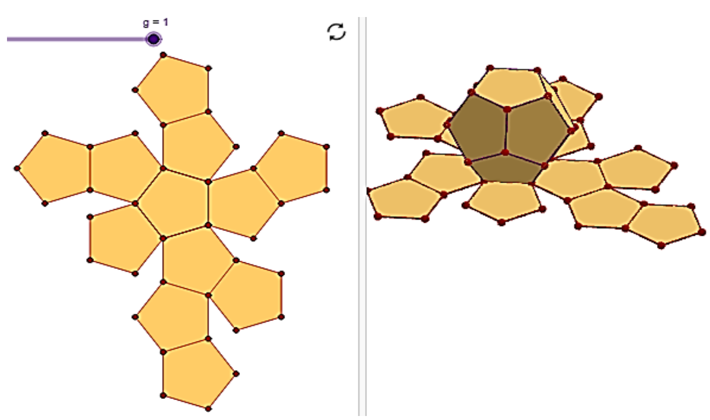


Figura 1.31. Applet que muestra el desarrollo plano del dodecaedro (Enlace Propuesta GeoGebra)

En la tercera subsección se realiza un experimento para estimar el volumen de los sólidos platónicos. Para esto se propone construirlos con limpiapipas y sumergirlos en una mezcla realizada con agua, jabón y glicerina para medir la cantidad de agua desplazada y así calcular el volumen. Sin embargo, esta medición no es exacta ya que se pierde agua en el proceso de la misma.

En la quinta sección se desarrolla el volumen numérico. Esta sección está dividida en tres subsecciones. En la primera de ellas se propone pensar en los cuerpos geométricos que se encuentran en nuestra vida diaria. Luego se muestra una imagen con varios de estos objetos y se pide reconocer las figuras geométricas (círculo, triángulo, cuadrado, etc.) que hay entre ellos. En la Figura 1.32 se muestran objetos de la vida diaria en los que se pueden reconocer cuerpos geométricos.

Figura 1.32. Objetos de la vida diaria (Enlace Propuesta GeoGebra)

Luego se muestran algunos cuerpos geométricos con sus respectivos nombres y se pide completar lo que se indica en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5. Actividad para reconocer elementos en los objetos dados (Enlace Propuesta GeoGebra)

NOMBRE DEL OBJETO	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE CARAS	LADOS CURVOS O PLANOS	FORMA DE LAS CARAS (TRIÁNGULO, CUADRADO, RECTÁNGULO, CÍRCULO)
CONO				
BALÓN				
PIRÁMIDE				
DADOS				
LATA				
CAJA				
TAMBOR				

También se presenta una actividad en la que se dan varias opciones entre las que se encuentran cuerpos y figuras geométricas, y se pide elegir aquellos que sean cuerpos. Se da la opción para corroborar que lo realizado esté bien. Luego se pregunta si existe alguna diferencia entre cuerpo y figura geométrica, y cuál es aquella diferencia. Sobre estas preguntas también está la posibilidad de ver la respuesta.

En la segunda subsección se propone que el estudiante forme figuras geométricas al unir palitos con plastilinas. Para esto el docente debe proveer al estudiante una tarjeta donde se indique el número de lados y vértices de la figura como se muestra en la Figura 1.33.

Luego se propone montar las formas tridimensionales como prismas y pirámides que derivan del triángulo, para analizar la relación que hay entre ellos. También se invita a construir un tetraedro con 6 trozos de pajillas de 10 cm de longitud. Todo esto se realiza y luego se pregunta qué nombre reciben las líneas que forman a las caras y las bases de los cuerpos geométricos; también, qué nombre reciben las uniones representadas con la plastilina. En ambas preguntas se dan como opciones “cúspides”, “vértice” y “arista”.

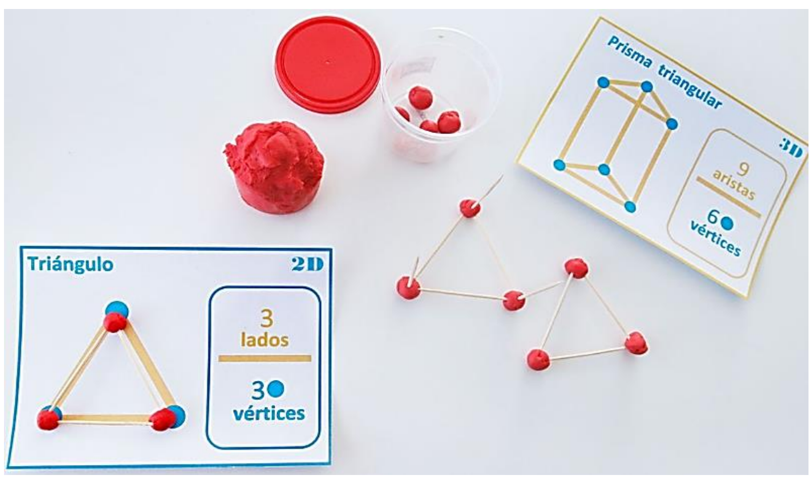


Figura 1.33. Tarjetas con figuras y cuerpos geométricos y su cantidad de lados y vértices (Enlace Propuesta GeoGebra)

A continuación, se puede acceder a un pdf donde se definen los prismas y pirámides. Sobre los prismas se menciona que son cuerpos geométricos poliedros que tienen dos caras paralelas poligonales e iguales llamadas bases y que el resto de sus caras laterales son paralelogramos. Sobre las pirámides se dice que solo tienen una base y el resto de sus caras son triángulos.

En este documento también se muestra una imagen de un prisma con los elementos que lo constituyen (aristas, vértices, bases y caras laterales). Además, se indica que según el número de lados de la base se le da nombre al prisma y se desarrollan algunos ejemplos y se comparten imágenes. También se define la altura del prisma, así como los prismas rectos, oblicuos y truncados.

Esta misma caracterización se realiza para las pirámides. Se define a la pirámide como una figura tridimensional constituida por una base poligonal y por caras laterales cuyas aristas concurren en un mismo punto del espacio, llamado vértice común o cúspide. A raíz de esto se concluye que por eso las caras son triangulares. También se define el eje o altura de la pirámide como la línea que va del vértice común al centro de la base y la apotema de una pirámide regular como la altura de cualquiera de sus caras laterales. Por otra parte, se define pirámide oblicua, rectangular y truncada. Se muestra una imagen de una pirámide rectangular, aunque en la imagen se le llama recta. Por último, se muestran algunos tipos de pirámides y se dice que se las distingue y nombra según el polígono de la base.

Seguido del documento donde se caracteriza a las pirámides y los prismas, se presenta el applet que se muestra en la Figura 1.34. En esta, al apretar el botón "Nuevo Ejercicio", aparecen nuevos prismas y pirámides sobre los cuales analizar los datos pedidos.

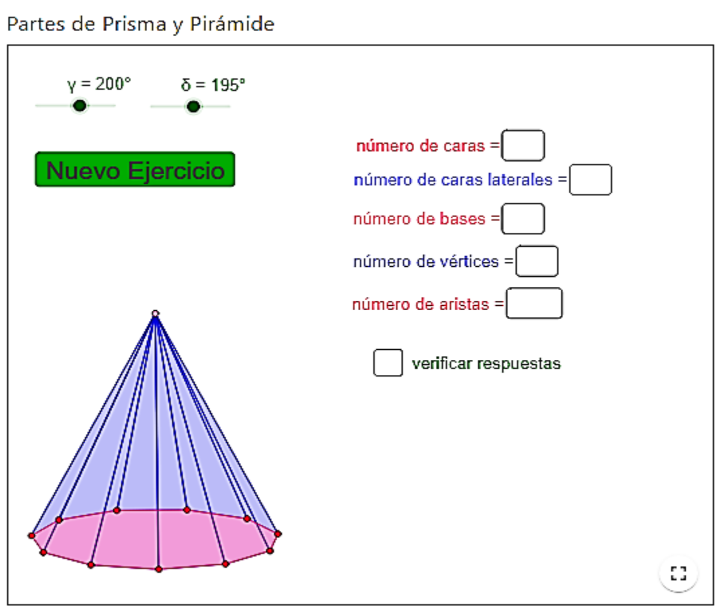


Figura 1.34. Applet para analizar los elementos de prismas y pirámides (Enlace Propuesta GeoGebra)

En la tercera subsección se trabaja el volumen como magnitud. Al inicio de esta, se define el volumen como la magnitud física y métrica, euclidiana y de tipo escalar, que se puede definir como la extensión de un objeto en sus tres dimensiones. También se establece que, para medir este espacio, hay que considerar las tres dimensiones básicas: Largo, Ancho, Altura; y que las unidades de medida son las cantidades elegidas para comparar con ellas las demás cantidades de su misma magnitud. Además, se menciona que medir una cantidad es compararla con la unidad de medida para saber cuántas veces la cantidad contiene a la unidad y que este número de veces seguido del nombre de la unidad expresa la medida de la cantidad.

Luego se presenta la imagen de un cubo compuesto por varios cubitos más pequeños todos del mismo tamaño y se pregunta a qué se le llama unidad de medida; la respuesta que se muestra dice que se le llama unidad de medida a los cubos pequeños que conforman el cubo grande. También se pregunta cuántas unidades cúbicas integran al cubo y si, al cambiarlas de lugar, el volumen cambia.

Se presenta otro diseño formado con cubitos que no representan ningún cuerpo geométrico conocido y se pregunta cuántas unidades cúbicas integran el cubo y por ende cuál es su volumen. También se comparte una imagen con las partes del cubo soma (juego de ingenio) para que los estudiantes armen el cubo.

A partir de esto, se utiliza geometría dinámica para trabajar con las unidades cúbicas. Se presenta un applet en la que, al mover los deslizadores llamados “ancho”, “largo” y “alto”, se forma un prisma con cubos unitarios y se muestra el volumen que posee.

A continuación, se presenta un documento pdf en el que se define a los cuerpos geométricos como los sólidos que ocupan lugar en el espacio, es decir, que se pueden tocar, medir y pesar. También se los divide en redondos y poliedros. Luego se menciona que cuando se estudian las áreas se habla de dos dimensiones, largo y ancho. Sin embargo, para calcular el volumen se necesitan tres dimensiones, largo, ancho y alto, y la multiplicación de estas tres da como resultado el volumen. Para empezar a ver esto, se propone colocar unidades cúbicas en las tres dimensiones, 10 cajas de largo, 10 cajas de ancho y 10 de alto, y se pregunta cuántas cajas se necesitan para completar la superficie de la base. Se realiza un análisis a partir del cual se concluye que en la mayoría de los cuerpos geométricos el volumen se calcula como el área de la base por la altura. Para practicar esto se presentan dos prismas con diferentes medidas de aristas y se pide calcular cuántos cubitos unitarios caben en ellos.

Luego, se presenta el applet que se muestra en la Figura 1.35, en la que al mover los deslizadores se muestra cómo calcular el volumen y el área lateral y total de diferentes prismas con diferentes. Las medidas se pueden cambiar a partir de los deslizadores.

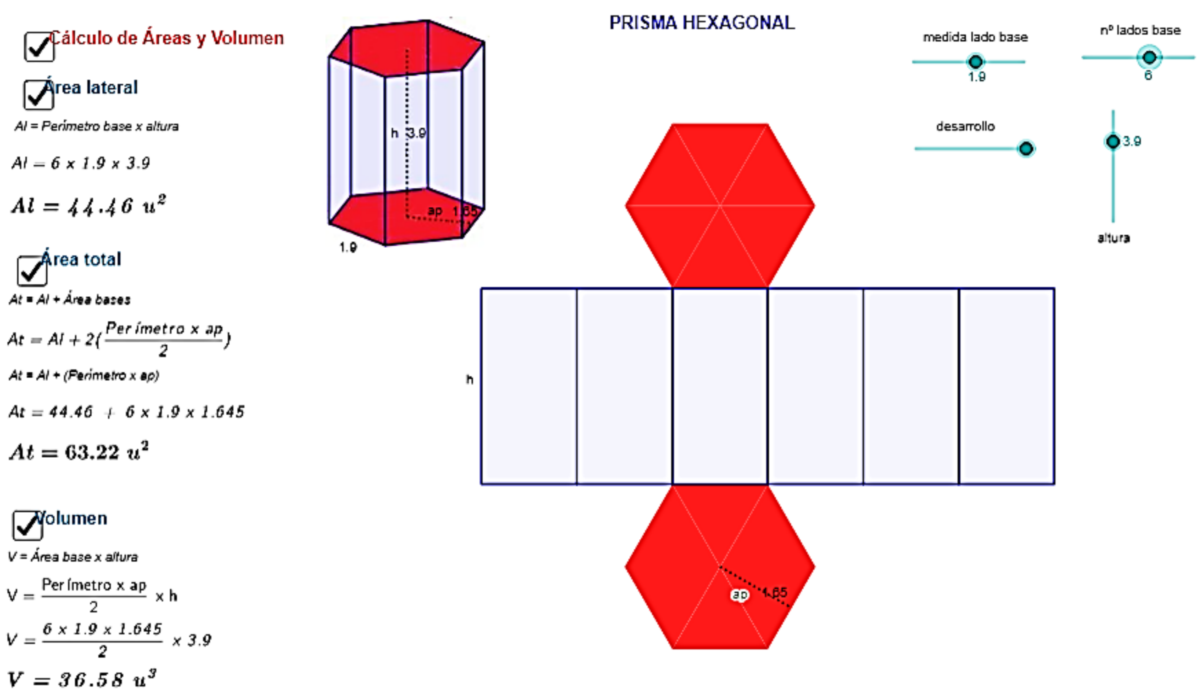


Figura 1.35. Applet que calcula volúmenes y áreas de diferentes prismas (Enlace Propuesta GeoGebra)

A continuación, se comparte un documento pdf en el que se muestra cómo calcular volúmenes de diferentes cuerpos geométricos. Respecto a la pirámide se menciona que, si se llena de agua la pirámide y se la echa al prisma, se comprueba que en el prisma cabe exactamente tres veces el contenido de la pirámide y que, por lo tanto, el volumen de la pirámide es tres veces menor al volumen del prisma de base y altura iguales. En lo que sigue de esta subsección se presentan actividades de aplicación de lo abordado hasta al momento sobre volumen y unidades de medida.

4.2.2. Articulación con los niveles de Van Hiele

En la Tabla 1.6 se asocian los niveles de pensamiento geométrico vinculados con el tema que ha sido posible identificar en las cuatro propuestas complementarias analizadas.

Tabla 1.6. Articulación de los Niveles de Van Hiele con las propuestas complementarias

Portales	Niveles	Forma en que alcanzan esos niveles
Acervo	3 y 4	No se considera que esta guía por sí sola pueda hacer que los estudiantes alcancen niveles de Van Hiele. La guía acompañada de una propuesta con actividades que estén en la misma línea que las preguntas que se plantean, podrían hacer que los estudiantes alcancen ciertos niveles. Con esta propuesta un estudiante no podría desarrollar un nivel 1 ya que no hay un momento de reconocimiento de los cuerpos geométricos como un todo. Tampoco se cree que se pueda alcanzar un nivel 2 ya que no se considera un momento de reconocimiento de los elementos de un poliedro. Dependiendo de las actividades que se presentan podrían llegar a alcanzarse un nivel 3, si es que se llega a realizar una argumentación informal de la fórmula de volumen de un poliedro. Podría alcanzarse un nivel 4 debido a la relación que se establece entre el prisma de base cuadrangular y el de base triangular para desarrollar la fórmula de este último. No se considera que se alcance un nivel 5.
Susi Profe	1 y 3	Se considera que un estudiante al ver estos videos podría alcanzar un nivel 1, ya que hay un reconocimiento y una visualización de los cuerpos geométricos a partir de su desarrollo plano como un todo. Se podría considerar un nivel 2 ya que se hace una correspondencia entre la cantidad de caras laterales y la cantidad de aristas de la base. Los estudiantes podrían dar una argumentación informal de la construcción de las fórmulas de volumen de un prisma y una pirámide, es por esto que se considera que se podría alcanzar un nivel 3. Asimismo, y si bien los cuerpos geométricos entre los que se establecen relaciones no son ambos poliedros, se considera que también se alcanza un nivel 3 debido a que se reconoce cómo la propiedad para calcular el volumen del cilindro se puede desprender de la fórmula ya establecida para el prisma.
Khan Academ y	3 y 4	No se considera que un estudiante pueda alcanzar un nivel 1 con esta propuesta ya que no existe un momento de reconocimiento y visualización de los cuerpos geométricos poliedros como un todo. No existe una distinción de los poliedros respecto de otros cuerpos, por ende, no se cree que se alcance un nivel 2. Se considera que se alcanza un sólido nivel 3 ya que la propuesta incluye una gran variedad de actividades para deducir las fórmulas de volumen de un prisma y una pirámide. Asimismo, con no mucho más trabajo, se podría alcanzar un nivel 4. Respecto a la propuesta de las pirámides, sí se alcanza el nivel 2 ya que hay un momento de identificación de sus elementos. Por otro lado, en este caso, nuevamente se considera que al proponer a los estudiantes escribir una justificación del cálculo del volumen de la pirámide se podría alcanzar un nivel 4.
GeoGeb ra	1 a 4	Los estudiantes podrían alcanzar un nivel 1 ya que se considera que hay una cantidad considerable de actividades que permitirían un reconocimiento de los cuerpos geométricos como un todo. Asimismo, se alcanza un nivel 2 ya que se identifican los elementos que componen a los poliedros e incluso se presentan actividades que benefician el establecimiento de relaciones entre ellos. Se considera que se podría alcanzar un nivel 3 ya que hay momentos de conjeturación de las fórmulas de volumen donde se utiliza una argumentación informal y se establecen relaciones entre los prismas y las pirámides para poder deducir la fórmula de las segundas. En este sentido, al igual que la propuesta anterior, se considera que al proponer a los estudiantes una escritura de lo construido y analizado podría alcanzarse un nivel 4.

4.3. Propuesta didáctica innovadora

En este tercer apartado se propone realizar aportes al objetivo: Idear propuestas innovadoras que promuevan las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.

Para esto se tendrá en cuenta lo analizado previamente con respecto a los libros de texto y las propuestas de portales educativos en línea. Asimismo, esta se enmarca dentro de un primer año de la escuela secundaria orientada y su fundamento tiene base en la teoría de Van Hiele sobre Pensamiento Geométrico.

En cada actividad se indica qué nivel y qué habilidad se procura desarrollar con ella. En los casos en que no se indica ninguna habilidad es porque se considera que no tienen el fin de desarrollarlas, ya que son actividades de aplicación.

Objetivos de la secuencia

- Que los estudiantes desarrollen habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.
- Que los estudiantes comprendan y demuestren la fórmula de volumen para un prisma y una pirámide.

Desarrollo de la secuencia

La primera actividad de la secuencia está orientada a que los estudiantes reconozcan cuerpos geométricos en su entorno y a partir de la visualización de imágenes.

Se considera que los estudiantes han dado cuerpos geométricos en la educación básica y por ende poseen ciertos conocimientos o la habilidad de reconocerlos y diferenciarlos de las figuras geométricas. En principio se les pregunta qué son para ellos los cuerpos geométricos con el fin de determinar si los diferencian de las figuras geométricas. En este momento se les propone reconocer cuerpos geométricos dentro del aula (cesto - cartuchera - mochila - carpeta - banco - borrador - lápiz).

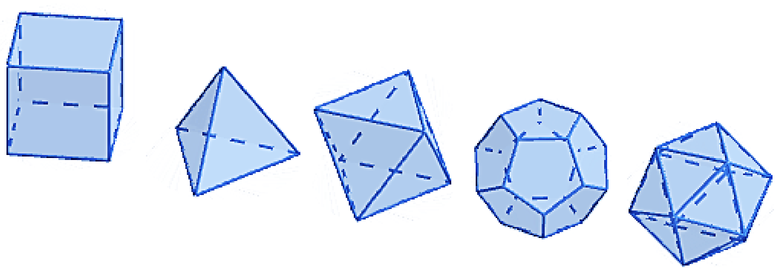
Actividad 1 (Nivel 1)

a) ¿Qué son los cuerpos geométricos? ¿Reconocés algunos de ellos dentro del aula?

b) Identificá en las siguientes imágenes cuerpos geométricos y si los recordás, indicá sus nombres.

A continuación, se institucionaliza el concepto de cuerpo geométrico:

Un cuerpo geométrico es una figura geométrica que ocupa un lugar en el espacio, es decir, tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto. Algunos ejemplos son:



Cubo Tetraedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

*Están compuestos por tres elementos: caras, vértices y aristas. Una **arista** de un cuerpo es la intersección de dos caras. Un **vértice** de un cuerpo es el punto en donde coinciden al menos tres caras o donde se unen tres o más aristas.*

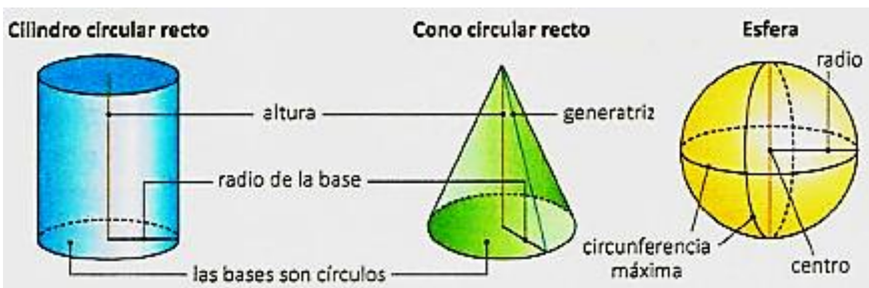
Luego de esta institucionalización, se presenta una actividad que tiene el fin de comenzar a realizar una clasificación de los cuerpos geométricos basada en atributos visuales o manipulativos. Para esto se llevan cuerpos geométricos de madera/plástico/cartulina y se forman grupos de cuatro personas para ir rotando los cuerpos, en caso de que no haya para todos los grupos.

Actividad 2 (Nivel 1)

Formar grupos de cuatro estudiantes y realizar una clasificación de los cuerpos geométricos según cualidades que identifiquen como comunes entre ellos. Luego, discutan con otros grupos acerca de las clasificaciones realizadas. ¿Cómo los dividieron?

Seguido de esta actividad, se institucionaliza la clasificación en cuerpos geométricos poliedros y redondos:

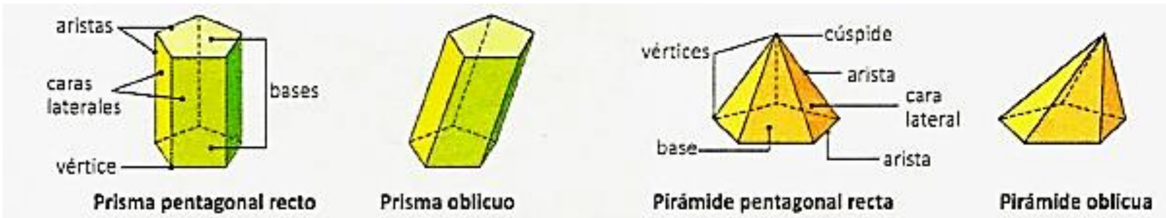
*Los cuerpos geométricos **redondos** tienen una superficie curva.*



*Los cuerpos geométricos **poliedros** tienen caras poligonales. Existen dos tipos de poliedros:*

- *Prismas: Tienen dos caras poligonales opuestas, iguales y paralelas, llamadas bases. La forma de las bases le da nombre al cuerpo. Sus caras laterales son paralelogramos. Si todas ellas son rectángulos o perpendiculares a la base, el prisma es recto. Si no es así el prisma se llama oblicuo.*
- *Pirámides: Tienen una base cuya forma le da nombre al cuerpo. Sus caras laterales son triángulos y concurren en un vértice llamado "vértice común" o "cúspide". Si los triángulos son isósceles, la pirámide es recta sea cual fuere su base. Una pirámide oblicua tiene alguna cara lateral que no es un triángulo isósceles.*

En una pirámide recta la altura de la misma es un segmento perpendicular a la base cuyos extremos son el vértice cúspide y el punto central de la base.



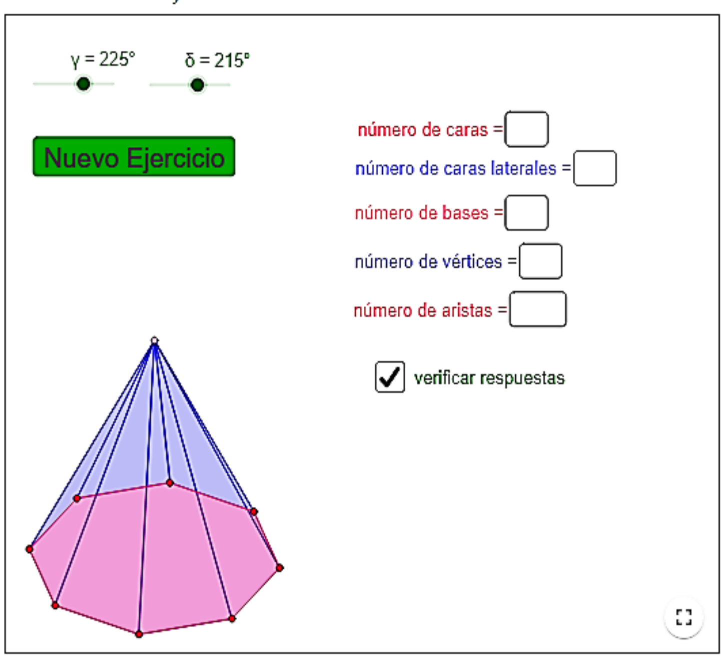
En este momento se aclarará que primero se trabajará con los cuerpos geométricos poliedros. Los redondos no serán tenidos en cuenta en este esquema de planificación.

Luego de definir estos conceptos, se realizan actividades que tienen el fin de establecer algunas relaciones entre los elementos de los poliedros y comprender la definición de cada poliedro.

Actividad 3 (Nivel 2)

Completa los casilleros y verifica tu respuesta. Ayúdate con los deslizadores para mover el prisma y visualizar mejor el cuerpo. Al apretar el botón de nuevo ejercicio vas a obtener nuevos cuerpos a los cuáles calcular los datos en color rojo y azul.

Partes de Prisma y Pirámide



¿Podés establecer alguna relación entre la cantidad de caras y de lados de las bases de los cuerpos geométricos?

Actividad 4 (Nivel 2)

Completa los enunciados. Estrategia: hacer un dibujo esquemático.

a) Un prisma ………………… tiene 7 caras laterales, 21 aristas y …. vértices.
b) Una pirámide …………….. tiene 8 caras laterales, …. vértices y 16 aristas.
c) Un prisma ………………... tiene 16 vértices, 24 aristas y …. caras laterales.
d) Una pirámide …………….. tiene 8 vértices, …. aristas y 7 caras laterales.

Actividad 5 (Nivel 2-Demostración)

Con tu compañero decidí si estas afirmaciones respecto de las pirámides rectas son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.

a) La cantidad de caras laterales coincide con la cantidad de lados del polígono de la base.
b) Los triángulos de las caras laterales siempre son congruentes.
c) Si la base es un hexágono regular, entonces las caras laterales tienen que ser triángulos equiláteros.
d) El lado igual de los triángulos isósceles de las caras laterales mide lo mismo en todos los triángulos.
e) Siempre la base es un polígono regular.

Actividad 6 (Nivel 2-Demostración)

Con tu compañero decidí si las siguientes afirmaciones respecto de los prismas rectos son verdaderas o falsas. Argumenten sus respuestas.

a) La cantidad de caras laterales siempre coincide con la cantidad de lados de los polígonos de las bases.
b) Los rectángulos de las caras laterales siempre son congruentes.
c) Si la base es un hexágono regular, entonces las caras laterales son cuadrados.
d) Si la base es un pentágono regular, entonces las caras laterales son cuadrados.
e) Si la base es un triángulo este tiene que ser equilátero.

Para empezar a trabajar con volumen se puede comentar lo siguiente:

D: En nuestra vida cotidiana nos movemos en un mundo de tres dimensiones. Todos los objetos que existen en este mundo tienen volumen. Sabemos si podemos pasar o no entre dos objetos. Con frecuencia podemos saber si una remera nos queda, aún antes de medírnosla. También manejamos con destreza el volumen de los cuerpos que nos rodean y los espacios delimitados por paredes. A veces nos equivocamos y el mueble que tanto trabajo costó subir por la escalera no cabe en el espacio que habíamos previsto. Lo que quiero decir con todo esto es que el volumen es la magnitud de nuestro mundo. Incluso los seres vivientes tenemos cuerpos tridimensionales. Pero, además, medir es una actividad común en las sociedades. Así que no es extraño que en muchas ocasiones necesitemos medir el volumen de un cuerpo. De modo que el concepto de volumen tiene su importancia en nuestra vida cotidiana y es lo que nos abocaremos a ver de ahora en adelante.

Previo a definir el volumen se pueden realizar algunas preguntas

¿Qué es medir? ¿Cómo hacemos para medir un segmento? ¿Utilizamos algún instrumento? ¿Cómo son esos instrumentos? ¿Cómo hacemos para medir el área de una figura geométrica 2D? ¿En base a qué medimos longitudes y áreas?

Estas preguntas tienen el fin de que los estudiantes determinen que siempre medimos por comparación con una unidad de medida establecida que se toma como referencia. En ocasiones, se mide mediante un instrumento graduado con dicha unidad. Por ejemplo, para medir segmentos utilizamos la regla graduada en *cm.*

Luego de esto se establece que entonces para medir el volumen de un cuerpo también debemos establecer una unidad de medida. Entonces se pregunta qué unidades de medida reconocen en el caso de las longitudes y las áreas. Se espera que reconozcan que una unidad de medida posible para medir la longitud de un segmento es el centímetro o el metro. Se les pregunta cómo hacen para determinar una longitud en base a esa unidad de medida y se espera que reconozcan que medir es determinar cuántas veces entra la unidad de medida en el segmento al cual queremos calcular la longitud. Se pueden poner algunos ejemplos concretos como cuando se compra tela o cinta bebé por metro o centímetros. O cuando se quiere medir el alto de alguna pared que normalmente se mide en metros.

Por otro lado, en el caso del área se puede poner como ejemplo medir el área de un terreno y esperar que mencionen que se suele medir en metros cuadrados. En ese momento, se puede mencionar que la unidad de medida está elevada al cuadrado ya que son dos dimensiones las que se tienen en cuenta para medir y ambas se deben medir con la misma unidad unidimensional. Posterior a este desarrollo, se les pregunta cuál creen que podría ser una unidad de medida posible para medir volúmenes, si los cuerpos geométricos tienen tres dimensiones: ancho, largo y alto.

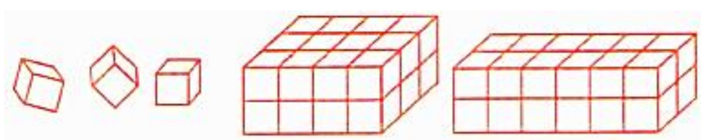
Se institucionaliza la noción de "medir", el volumen y se presentan las unidades de medida.

Medir es determinar la longitud, área o volumen de una cosa por comparación con una unidad establecida que se toma como referencia.

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. Para medirlo hay que considerar un cuerpo como unidad de medida y calcular cuántas veces entra en el volumen a medir. Puede ocurrir que la unidad de medida no entre una cantidad de veces entera. Para medir un volumen se pueden utilizar distintas unidades de medida. Algunas son más frecuentes, como el metro cúbico, que es el volumen que ocupa un cubo de 1 m de arista y se escribe m^3*, o el centímetro cúbico, que es el volumen que ocupa un cubo de 1 cm de arista y se escribe* cm^3.

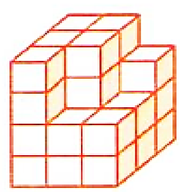
Actividad 7 (Nivel 3 - Conjeturación)

Si se utilizan 24 cubitos como los de la ilustración se pueden armar distintos prismas como estos. Inventa otros dos prismas que se puedan construir usando 24 cubitos y dibujalos. Si se toma a los cubitos como unidad de medida, ¿qué volumen tiene cada prisma ilustrado? ¿Y los que construiste?



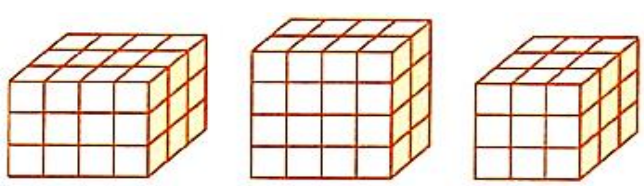
Actividad 8 (Nivel 3 - Conjeturación)

El cuerpo no tiene huecos ni salientes que estén ocultos. Averigua su volumen medido en cubitos.



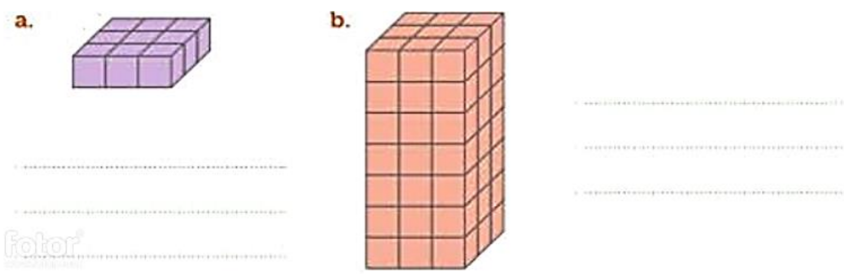
Actividad 9 (Nivel 3 - Conjeturación)

¿Cuál de estos cuerpos tiene mayor volumen?



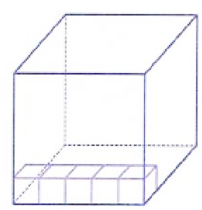
Actividad 10 (Nivel 3 - Conjeturación)

Estos prismas están construidos con cubos de 1 *cm* de arista. Calculá el volumen de cada uno considerando el cubo de 1 *cm* de arista como unidad de medida. Explicá cómo lo hiciste.



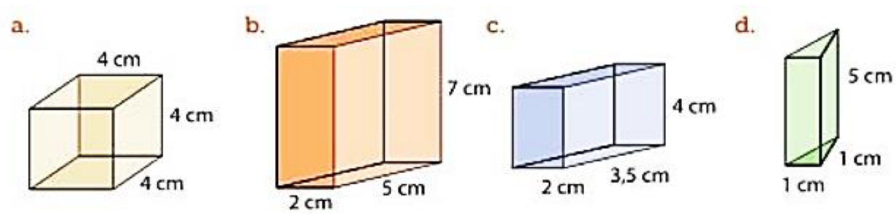
Actividad 11 (Nivel 3 - Conjeturación)

Para llenar una caja en forma de cubo se ubicaron algunos cubitos de 1 *cm* de arista como se muestra en la figura. ¿Cuál será el volumen de la caja? Explicá cómo lo calculaste.



Actividad 12 (Nivel 3 - Conjeturación)

Calculá el volumen de estos prismas, para esto pensá en cuántos cubitos de 1 *cm* de arista entrarían en ellos.



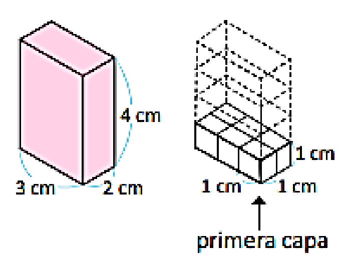
Actividad 13 (Nivel 3 - Conjeturación)

Pensá cómo calcular el volumen del siguiente prisma rectangular.

a) ¿Cuántos cubos de 1 *cm* de arista caben en la primera capa?

b) ¿Cuántas capas hay?

c) ¿Cuál es el volumen del prisma rectangular?



Actividad 14 (Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)

Determiná una fórmula para calcular el volumen de un prisma de base rectangular. Argumentá con tus palabras dicha fórmula. Sugerencia: Ayudate con un esquema.

Actividad 15 (Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)

Respondé a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué ocurre con el volumen del prisma de base rectangular si lo dividimos por la diagonal de la base?

b) ¿Qué figura tiene ahora la base del prisma recortado a la mitad?

c) ¿Cómo modificarías la fórmula que obtuviste para calcular el volumen de un prisma de base rectangular para obtener una nueva fórmula para obtener el volumen de un prisma de base triangular?

d) ¿Cómo se calcula el área de un triángulo? Reescribí la fórmula obtenida en el ítem c).

e) ¿Cómo calcularías el volumen de un prisma con cualquier base?

Luego de esta tanda de ejercicios que en algunos casos pueden resolverse de forma grupal o individualmente, e incluso otras pueden ser guiadas por el docente, se espera que obtengan una fórmula general para calcular el volumen de un prisma cualquiera sea su base. Se institucionaliza este hecho y luego se realiza una argumentación informal del resultado.

Una estrategia para medir el volumen de los prismas es calcular la cantidad de pisos de cuadraditos que hay en el cuerpo y multiplicarla por la cantidad de pisos de cuadraditos que hay en el cuerpo. En general para medir el volumen de un prisma se considera el área del polígono de la base y se multiplica por la altura.

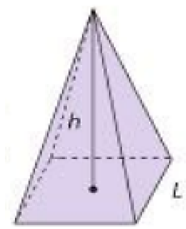
Esta argumentación informal es guiada por el docente. Para esto se propone ver el siguiente applet https://www.geogebra.org/3d/gvhdgkzs y utilizar los deslizadores para observar como las secciones planas siempre son cuadrados del mismo área. Incluso se indica cambiar el volumen del cubo al agrandarlo desde uno de sus vértices para ver que en otro cubo el área de las secciones planas también resulta ser siempre el mismo.

Con esto se busca deducir que multiplicar la base por la medida de la altura nos dará como resultado el volumen del prisma. Se indicará cambiar el prisma por uno con otra base distinta para que observen que esto se da en cada prisma.

Luego de esto se presenta el siguiente ejercicio.

Actividad 16 (Nivel 3 - Conjeturación)

Mirá el siguiente applet https://www.geogebra.org/m/WtjMb2Z7 donde se muestran un prisma y una pirámide base hexagonal y deslizá el plano al presionar sobre los puntos. Ahora respondé a la siguiente situación: La pirámide de la imagen es recta de altura h, su base es cuadrada y su lado mide L. ¿Es correcto calcular su volumen como $L^2 \cdot h$?



La idea de la actividad anterior es que los alumnos den cuenta de que en las pirámides la situación cambia, ya que las secciones planas no tienen siempre la misma área. Se espera que determinen que en este caso no es posible calcular el volumen como área de la base por la altura.

Actividad 17 (Nivel 3 - Conjeturación)

Imaginá que tenemos una pila de libros o de cartas o fichas de un juego, si empujamos la parte superior de la pila para que se incline a un lado, ¿hemos cambiado el volumen? ¿Ha cambiado el volumen de cada uno de los libros o cada una de las fichas?

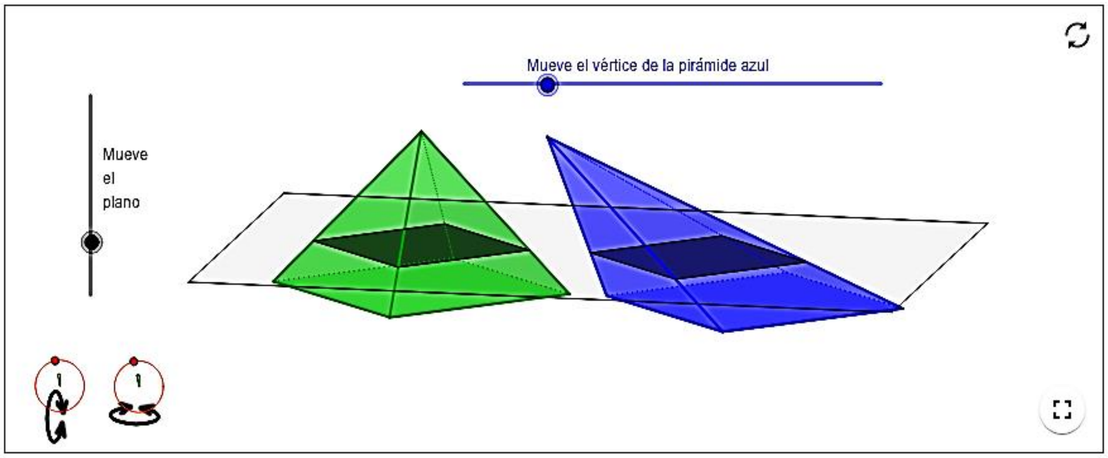
Con esta actividad se espera que los estudiantes determinen que el volumen no cambia, es el mismo solo que ahora la pila no está de la misma forma.

A partir de esto se introduce el Principio de Cavalieri:

El principio de Cavalieri dice lo siguiente: "Si dos sólidos al ser cortados por planos paralelos producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen".

Para observar esto nos valemos del siguiente applet: https://www.geogebra.org/m/fcmpwfv9.

Utiliza los cuatro deslizadores que se muestran en pantalla y observa cómo son las secciones planas al deslizar el plano. Los deslizadores circulares permiten girar vertical y horizontalmente las pirámides para una mejor visualización. ¿Cómo son los volúmenes de las pirámides? **(Nivel 3 - Conjeturación)**



A partir de esto se espera concluir que: *Por ejemplo, las dos pirámides del applet al tener las secciones en forma de cuadrados de la misma medida tienen el mismo volumen. El desplazamiento lateral del vértice superior de la pirámide azul no modifica las secciones y por lo tanto tampoco su volumen.*

A partir de esto, la idea es conjeturar la fórmula de volumen de una pirámide de base cuadrangular para esto se propone observar con material manipulativo o a partir de GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/bfmmdeq6) cómo se puede dividir un cubo en tres pirámides congruentes de base cuadrangular.

Después de ver este applet se propone que determinen cómo son los volúmenes de las tres pirámides. Se pretende que a partir de esta manipulación o visualización determinen que el volumen de las pirámides es el mismo debido al principio de Cavalieri. Asimismo, se propone escribir el volumen del cubo como la suma de los volúmenes de las pirámides. Como los volúmenes son iguales se les pregunta cómo se puede escribir esa suma.

$$V(ABCDEFGH) = V(BGFEH) + V(BDEHC) + V(BDEFA) = 3V(BGFEH)$$

$$V(\text{Prisma}) = 3V(\text{Pirámide})$$

donde las pirámides y el cubo tienen igual bases y alturas.

De aquí se deduce que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma y entonces su fórmula será V(Pirámide) $= \frac{A(BASE)\cdot h}{3}$. Se puede hacer un comentario general de que esta fórmula vale para cualquier pirámide sea cual sea su base más allá de que se haya probado solo para un caso particular. **(Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)**

A continuación, se les propone realizar un razonamiento similar para obtener la misma fórmula para un prisma triangular. Asimismo, se plantea como interrogante, si existirá alguna forma de probar que esta fórmula es válida para todo tipo de base de una pirámide.

Actividad 18 (Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)

Utilizá la applet https://www.geogebra.org/m/svca8dzm y realizá un razonamiento similar al anterior para justificar la fórmula del volumen en el caso de la pirámide de base triangular.

Actividad 19 (Nivel 4)

La gran pirámide Guiza fue construida alrededor del año 2570 a.C. en Egipto, por orden del faraón Keops. Se cree que en su construcción intervinieron especialistas con muchos conocimientos geométricos. Esta pirámide tiene una base cuadrada cuyo lado mide 230 *m*, aproximadamente, y su altura mide 146 *m* aproximadamente. ¿Cuál es su volumen aproximado?

Actividad 20 (Nivel 4)

A una pirámide de base cuadrada, con 30 metros de lado de base y una altura de 16 metros, se la cortó con un plano paralelo a la base a 6 metros de la misma. La cara horizontal superior es cuadrada y su lado mide 15 metros. Calcula el volumen del cuerpo que quedó. A este tipo de pirámides se les llama truncadas.

5. Conclusiones

Se presentan las conclusiones obtenidas a partir de los resultados del capítulo anterior. Estas se subdividen en dos apartados. En el primero de ellos se procura responder a los interrogantes planteados y en el segundo delimitar los avances y similitudes respecto de las investigaciones reportadas en el estado del arte.

5.1. Respuesta a los interrogantes planteados

A continuación, se responderá a los interrogantes planteados en el apartado 1.1 de la problemática con base en los resultados que se han explicitado en la parte 4 del proyecto de investigación.

Con relación a *¿Qué tipos de abordajes realizan los libros de texto de educación secundaria que circulan en el mercado, sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos* *poliedros?,* se obtuvo, como se puede observar en la Tabla 1.1, que solo con uno de los libros de texto elegidos, un estudiante podría alcanzar cuatro de los niveles de Van Hiele. Con los libros restantes un estudiante podría alcanzar uno o ningún nivel. En tal sentido se considera que, de los libros que circulan en el mercado, la mayoría de ellos no realiza un abordaje en profundidad del contenido estudiado. Estos resultados posibilitan inferir que, en general, no se le da valor a la visualización de los cuerpos geométricos ni se realizan actividades de reconocimiento de los elementos de los poliedros, así como de las relaciones que existen entre ellos. Tampoco abundan los momentos de exploración y argumentación. Estos aspectos muestran que no se promueve la alfabetización científica, por el contrario, se promueve la aplicación mecanicista de fórmulas a las que no se les otorga sentido alguno. Se concluye que los abordajes de los libros son incompletos e insuficientes para promover habilidades de conjeturación y demostración sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros. Asimismo, se destaca el libro de texto "Hacer Matemáticas" ya que presenta una secuencia considerable.

Respecto a *¿Qué otros recursos complementarios, como soportes digitales o manipulativos, podrían fomentar el desarrollo de estas habilidades?,* se obtuvo que las propuestas en línea denotan mucha más riqueza pues con ellas los sujetos pueden alcanzar niveles de pensamiento más elevados y ponen en juego, para dicho cometido, la visualización de recursos digitales y concretos.

De las propuestas en línea, se destaca la de GeoGebra por la cantidad de recursos que incluye, y que de forma intencionada permiten acercar a los estudiantes a una conjetura respecto del volumen de los prismas. También se subraya la versatilidad de algunos de los recursos ya que varios de ellos han sido adaptados para ser incluidos dentro de la propuesta didáctica diseñada en el apartado 4.3.

Por otra parte, las propuestas de "Khan Academy" y "Susi Profe" introducen el Principio de Cavalieri, un resultado matemático clave para comprender de dónde provienen las fórmulas de volumen. En estas propuestas, si bien no se realizan demostraciones formales, se busca dar sentido a lo que se está estudiando. La importancia de darle un significado a las cosas no está en recordarlo para siempre, porque seguramente haya cuestiones que se vayan olvidando; está en tener las herramientas para poder volver sobre aquello que se sabe, y esas herramientas son las que sirven en otros ámbitos de la vida, más allá del área de la Matemática.

Por último, el video del canal Acervo, brinda preguntas claves para el desarrollo del contenido que pueden servir de guía para la planificación de la enseñanza del contenido.

El tercer interrogante *¿Qué propuestas innovadoras podrían promover las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria?*, fue planteado con el fin de idear una propuesta superadora que promueva *la adquisición de habilidades de orden superior, como lo son las de conjeturación y demostración, en torno al cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros.* Con esta propuesta se buscó alcanzar la mayor cantidad de niveles de pensamiento geométrico, pero también darle a cada nivel la importancia que merece. La innovación de esta propuesta en sí misma radica en la calidad de recursos implementados a lo largo de la secuencia didáctica que, guiados intencionalmente, permiten realizar visualizaciones constantes de las situaciones que se presentan y, de esta forma, los sujetos pueden avanzar por los niveles de Van Hiele hacia capacidades superiores.

Muchas de las actividades que se tomaron de estas propuestas han sido ubicadas en la nueva propuesta en diferentes momentos respecto de las primeras. La actividad 1 de la planificación resulta de una adaptación de una de las actividades de la propuesta de GeoGebra, ya que en la original, a partir de la observación de cuerpos geométricos se pedía completar con número de caras, vértices y aristas, lo cual resulta un tanto apresurado para que un estudiante logre un nivel 1. A raíz de esto, se tomó la idea de la observación de cuerpos geométricos, en principio del entorno y luego a partir de imágenes, para empezar a reconocer algunos de ellos por sus nombres. Esto tiene como fin recuperar algunos saberes previos e ir introduciendo al alumnado al mundo de los cuerpos geométricos y en específico de los poliedros.

La actividad 2 no forma parte de ninguna de las propuestas analizadas, sino que tiene que ver con algunos de los aspectos innovadores de la propuesta. Esta actividad tiene el objetivo de que los estudiantes a partir de manipular diferentes objetos geométricos puedan clasificarlos y discutir con sus compañeros acerca de dicha clasificación.

Las actividades 3 a 6 tienen el objetivo de establecer algunas propiedades de los cuerpos geométricos y relaciones entre los elementos de estos. Las 5 y 6 forman parte del libro "Hacer Matemáticas" y en estos libros están orientadas con el mismo propósito. La actividad 3 se armó a partir de un applet de la propuesta de GeoGebra aunque la pregunta que se incluye al final no forma parte de la original y tiene el propósito de que los estudiantes establezcan ciertas relaciones entre el número de caras de los poliedros y el número de lados de las bases.

Las preguntas que se realizan previo a definir volumen: *¿Qué es medir? ¿Cómo hacemos para medir un segmento? ¿Utilizamos algún instrumento? ¿Cómo son esos instrumentos? ¿Cómo hacemos para medir el área de una figura geométrica 2D? ¿En base a qué medimos longitudes y áreas?*, se idearon a partir de uno de los videos de la primera propuesta de Khan Academy. Aunque, en este caso, al no estar presentadas en un video son los estudiantes quienes deben responderlas. En este sentido, se considera que los estudiantes realizan una mayor profundización al respecto ya que surgen en el proceso de responderlas, ciertas nociones erróneas que merecen atención en este momento de la planificación. Además, se considera a esta tarea como una de tipo exploratorias-investigativas, las cuales, según Sanches y Beline (2013; citado en Limas y Jiménez, 2017), generalmente son abiertas, poco estructuradas y permiten al alumno explorar, elaborar sus propias preguntas y conjeturas, así como buscar la argumentación para la justificación y validación de estas.

Las actividades 7 a 12 están orientadas con el mismo propósito que en los libros de texto de los cuales fueron extraídas, solo que se considera más cantidad y más variación respecto de los datos que se tienen y de lo que hay que hacer. En este sentido la propuesta es superadora, pues en los libros de texto, a partir de 2 o 3 actividades ya se presenta la fórmula del volumen, como si fuese suficiente con ellas poder conjeturar una fórmula para el cálculo del volumen de prismas. La propuesta diseñada tiene más actividades y mayor diversidad, lo cual le da a los estudiantes un tiempo considerable para conjeturar en el camino la fórmula para calcular el volumen. Además, en algunas de estas actividades se agrega con respecto a las originales una consigna que consiste en que los alumnos expliquen cómo procedieron para calcular algunos volúmenes. Esta estrategia que utilizan y que ponen en palabras, los ayudará a ver con más claridad cómo es que proceden generalmente y de esta forma obtener una conjetura. Las actividades 13 y 14 son parte de la innovación de este proyecto, buscan que los estudiantes determinen una fórmula y realicen una argumentación informal con sus propias palabras. La actividad 15 está ideada a partir del video del canal Acervo aunque se agregan algunas preguntas nuevas que tienen el propósito de que los alumnos determinen una fórmula general para calcular el volumen de prismas. Todas estas actividades tienen el propósito de que los estudiantes alcancen un nivel 3.

La actividad 16 también está adecuada respecto de la original que corresponde al libro “Hacer Matemáticas” ya que previo a la situación se presenta una applet de GeoGebra que tiene el fin de que los estudiantes observen que las secciones planas de las pirámides cambian de área a medida que el plano que la corta se acerca al ápice.

La actividad 17 es parte de la propuesta 2 de Khan Academy aunque el applet de GeoGebra que se utiliza luego es parte de la innovación del proyecto y tienen el propósito de que los estudiantes determinen que los volúmenes de las pirámides que se muestran son iguales. El desarrollo que le sigue a esta actividad y la actividad 18 tienen el propósito de que los estudiantes alcancen un nivel 4 a partir de la utilización de todas las herramientas y conocimientos adquiridos anteriormente. Esto último también forma parte de la innovación de la propuesta.

En general, se puede decir que la propuesta resulta innovadora gracias a la implementación de diferentes applets de GeoGebra y materiales manipulativos y de las consignas que se crearon en torno a ellos para poder avanzar sobre los Niveles de Pensamiento Geométrico de Van Hiele.

Respecto a este interrogante, queda pendiente como un aspecto que amerita profundizar, proponer vías para que un estudiante pueda alcanzar un nivel 5 de pensamiento geométrico de Van Hiele a través de una propuesta didáctica.

Por último y respecto al primer interrogante, *¿Cómo fomentar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria?*, se considera debido a lo concluido anteriormente, que son de gran importancia los momentos en que los estudiantes exploran por sí solos o en conjunto con sus compañeros, ciertas situaciones a partir de la manipulación o visualización de materiales concretos o recursos digitales. En este caso se consideraron fundamentales los cuerpos geométricos de madera/plástico para realizar una clasificación de los poliedros; el applet de la actividad 3 para que los estudiantes reconozcan propiedades de los poliedros; los applets de GeoGebra que procuran ayudar a los estudiantes en la construcción de una demostración o de una conjetura sobre la fórmula de prismas y pirámides y los applets que permiten visualizar el principio de Cavalieri para una mejor comprensión del mismo y, de esta forma, los estudiantes lo puedan utilizar en las demostraciones antes mencionadas. La importancia no está en la utilización del material concreto o el recurso tecnológico, sino con respecto a en qué contexto se lo utiliza. Por sí solos no componen una vía de aprendizaje, las situaciones o actividades en las que se los enmarca son fundamentales para potenciar el beneficio que trae la manipulación/visualización de ellos.

5.2. Vinculaciones con otras investigaciones

En este apartado se establecen vinculaciones entre los resultados obtenidos en la parte 4 y las investigaciones reportadas en el Estado del Arte. Estas procuran develar en qué sentido se ha avanzado, qué similitudes se pueden establecer entre este proyecto y aquellos recuperados en un primer momento o en otro caso, determinar en qué no se avanzó.

Respecto de la primera investigación reportada, Advíncula (2018) propone resolver problemas que involucren la realización de figuras geométricas a través de GeoGebra. Desde esta investigación se afirma que GeoGebra ayuda a los participantes a explorar y descubrir propiedades geométricas, así como elaborar y verificar conjeturas, lo cual contribuye con el desarrollo de otros procesos como la demostración y la argumentación. En este sentido, se develan similitudes respecto al presente proyecto, ya que como se estableció en el apartado anterior, los applets involucrados en la propuesta innovadora y en la propuesta de GeoGebra analizada en 4.2, podrían permitir que los estudiantes exploren y elaboren conjeturas en torno a la fórmula para el cálculo de volúmenes de poliedros y pirámides, y a partir de esto realizar algún tipo de demostración con un rigor adecuado a un primer año del nivel secundario. Además, se puede decir que se avanza, en el sentido de que, así como GeoGebra puede ser de utilidad para trabajar propiedades de figuras geométricas, aquí se establece que también es de utilidad para conjeturar y demostrar las fórmulas para el cálculo de volúmenes de los cuerpos geométricos poliedros.

En cuanto al trabajo de Villarroel y Sgreccia (2012), de los recursos didácticos concretos que nombran solo se utilizan en la propuesta innovadora los modelos fijos 3D, aunque allí se tienen en consideración aquellos en los que se pueden observar las capas de los poliedros. En cambio, en el presente proyecto los cuerpos geométricos que se presentan están hechos de madera, cartulina o plástico, pero no se pueden vislumbrar capas ni se necesita para la actividad en la que se implementan. Sin embargo, estos que proponen las autoras se podrían haber utilizado en la propuesta innovadora, en las actividades de conjeturación de las fórmulas o incluso habrían sido de utilidad en el trabajo realizado sobre el Principio de Cavalieri. Por otro lado, se considera que se avanza en la utilización de otros materiales didácticos no concretos como los son los Softwares de Geometría Dinámica; por ejemplo, el implementado en la propuesta, GeoGebra. Además, estas autoras concluyen que estos materiales beneficiarán el desarrollo de habilidades geométricas dependiendo de las intenciones didácticas con que se utilicen. En este sentido, se puede decir que los recursos implementados ya sea materiales concretos o GeoGebra, no aportarían demasiado sin estar enmarcados en una propuesta pensada como la que se diseñó.

Respecto al trabajo de Álvarez et al (2014), estos mencionan que el proceso de conjeturar puede estructurarse a partir de actividades de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar y generalizar conjeturas. En el caso del presente trabajo, la visualización es fundamental en el desarrollo de la propuesta innovadora, asimismo a partir de una variedad de actividades se prevé que los estudiantes identifiquen regularidades para determinar fórmulas para el cálculo de volúmenes de cuerpos poliedros. En este sentido se estructura el proceso de conjeturación de la misma forma en que lo proponen estos autores.

Con relación al esquema operativo que presenta Saenz Castro (2001) para que un estudiante de matemáticas aprenda el razonamiento plausible y el demostrativo, hay etapas que desde la propuesta innovadora no se consideraron. Por ejemplo, no se tuvo en consideración la etapa de crítica a la conjetura, aunque sí se puso en tela de juicio una situación en la que se propone calcular el volumen de una pirámide de cierta forma errónea. Tampoco se realizó una crítica a la demostración realizada en esta misma parte. Se podría haber considerado de forma tal de intentar a partir de esta crítica, avanzar respecto del rigor que se le otorgó a la prueba.

Por último, en la investigación de Abrate et al (2006) se establecen ciertas variables para analizar los libros de texto de Geometría. Esto difiere demasiado del análisis que se realiza en el presente trabajo, ya que no se establecen variables, sino que se describen los libros y luego se establecen vinculaciones con los Niveles de Van Hiele. En este sentido no se pueden establecer grandes similitudes. La única variable que podría tener un punto de contacto es "habilidades que tienden a desarrollar". Al respecto se concluye que no existen actividades dentro de esos libros que promuevan habilidades de conjeturación y demostración. En el caso de los libros que se han analizado en este trabajo, se puede decir que solo uno de ellos promueve dichas habilidades.

5.3. Aportes innovadores y posibles líneas de trabajo que se desprenden

El presente trabajo resulta innovador por diferentes cuestiones. El motivo principal radica en que se ofrece una propuesta que intenta ser superadora respecto de las que se analizan en la parte 4 de este trabajo. Incluso para dicha propuesta se delimita en cada una de las actividades cuáles de ellas son tomadas e implementadas tal cual de las propuestas analizadas y cuáles son modificadas o se constituyen como nuevas. Esta propuesta recorre los diferentes niveles de Van Hiele, exceptuando el último, con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades de conjeturación y demostración. En este sentido, este proyecto propone repensar las formas de enseñanza de las fórmulas para el cálculo de volúmenes de cuerpos poliedros, que generalmente por lo que se constató en la problemática, son impuestas. Además, la geometría constituye uno de los mejores ámbitos para desarrollar habilidades de conjeturación y demostración debido a la visualización de los objetos geométricos. En particular, la propuesta diseñada propone utilizar a lo largo de la enseñanza de este contenido, el software de geometría dinámica GeoGebra. Si bien muchas actividades de otras propuestas utilizan dicho software, en este caso se lo utiliza como medio para la conjeturación de ciertas propiedades lo cual denota innovación pues no se reduce a implementar recursos sino al sentido que se le da a esa implementación.

Por otro lado, se desprenden algunas posibles líneas de trabajo. Esta investigación se enfocó desde la perspectiva de la enseñanza de los cuerpos geométricos poliedros y si bien se determina qué niveles puede alcanzar un estudiante con las propuestas presentadas y con la propuesta diseñada, se dio mayor interés al desarrollo de una propuesta de enseñanza que resulte innovadora abarcando la mayor cantidad de niveles. Es por esto que resulta de interés llevar al campo dicha propuesta delimitando posibles adaptaciones según el grupo de estudiantes, con el fin de establecer comparaciones con lo obtenido en la presente investigación y, de esta forma, establecer posibles mejoras y delimitar qué niveles de Van Hiele pueden alcanzar realmente dicho grupo de estudiantes.

Asimismo, otra línea de trabajo que se desprende tiene que ver con diseñar una propuesta con la que un alumno pueda alcanzar un nivel 5 de Pensamiento Geométrico de Van Hiele, sin dejar de considerar el nivel educativo en el que se enmarca.

Por otro lado, el presente trabajo solo se abocó al estudio de los cuerpos geométricos poliedros, pero el proceso en el que se llevó a cabo esta investigación dio indicios de que la situación es bastante similar en el caso de los cuerpos geométricos redondos. En este sentido se podría pensar en una investigación similar para este tipo de cuerpos.

5.4. A modo de cierre

A modo de cierre, se considera que, desde las instituciones de Educación Superior, como lo es la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura desde la cual se impulsó este proyecto:

> La primera obligación es formar profesionales con conciencia social. La universidad puede llegar a preparar profesionales excelentes desde el punto de vista técnico, pero que carezcan por completo de conciencia de sus obligaciones para con la sociedad donde viven y de la que viven (Frondizi, 2005; citado en Cecchi et al, 2013, p.166).

En este sentido, merece atención esclarecer y precisar los aportes que el presente trabajo realiza a la sociedad. Por un lado, se da a conocer una alternativa de enseñanza para abordar lo relativo a fórmulas para el cálculo de volúmenes de poliedros. Esta busca potenciar el aprendizaje de los estudiantes repensando modos de enseñanza y analizando críticamente el material que tienen disponibles los docentes y del cual se pueden valer para planificar sus clases. Esta propuesta se aleja de las prácticas de enseñanza tradicionales en las que estas fórmulas son simplemente impuestas, y propende que los estudiantes construyan los conocimientos y desarrollen habilidades de conjeturación y demostración, dándole un sentido a las fórmulas para el cálculo de volúmenes de poliedros. Asimismo, el motivo de buscar desarrollar dichas habilidades tiene que ver con un compromiso de formar estudiantes críticos, autónomos y creativos, dotados de habilidades que les permitan relacionarse con los conocimientos y la realidad de forma independiente y significativa.

Además, se le da importancia en la propuesta a la utilización contextualizada de materiales concretos y recursos tecnológicos. Se busca implementarlos de forma situada, en el marco de actividades o situaciones de la clase que beneficien el proceso de aprendizaje, así como el de enseñanza.

Este trabajo resulta innovador porque realiza un aporte que promueve no solo transformaciones educativas, sino también la formación científico-tecnológica de las personas, la generación de conocimientos que despierten la vocación científica y el crecimiento personal y profesional. En este sentido, se considera a la Matemática como neurálgica y se busca aportar desde ese lugar a los campos de conocimiento que la requieren, incluso más allá de los tecnológicos.

Por último y no menos importante, el trabajo ofrece un análisis de propuestas de libros de texto y portales educativos en el que los docentes se podrían basar para determinar qué bibliografía será de más utilidad y, de esta forma, crear sus propias propuestas de enseñanza adecuadas al grupo de estudiantes que se les presente.

Para finalizar, la realización de este proyecto surge de un largo camino transitado en la carrera Profesorado en Matemática, en el que se han ido configurando diferentes problemáticas a partir del trayecto de la Práctica Profesional Docente. En particular, este proyecto se compromete e intenta dar respuesta a una cuestión social emergente en el último tramo del nivel obligatorio de educación en Argentina, como lo es el desarrollo de habilidades de orden superior. La problemática sobre la que se busca dar alternativas de trabajo atañe a los formadores de formadores, en tanto encargados de formar docentes preparados para desarrollar en sus estudiantes cualidades como el razonamiento matemático, la creatividad, la autonomía en el aprendizaje y el criterio de decisión. En tal sentido, este proyecto se compromete con la sociedad avanzando en alternativas de trabajo, así como también, plantea nuevos interrogantes y aristas que pueden ser material de próximos estudios.

Referencias bibliográficas

Abrate, R.S., Delgado, G.I. y Pochulu, M.D. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 39*(1), 1-9. https://doi.org/10.35362/rie3912598.

Advíncula, E. (2013). Enseñanza de los poliedros con Cabri 3D. En *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp.6820-6826). SEMUR. http://funes.uniandes.edu.co/18248/.

Advíncula, E. (2018). Conjeturas geométricas y GeoGebra. En L. Sema y D. Páges (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.1939-1944). CLAME. http://funes.uniandes.edu.co/13604/.

Afonso, M.C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio* [Tesis de Doctorado]. Universidad de La Laguna. https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/12143.

Álvarez, C.A. (2017). *Ambiente de aprendizaje para la enseñanza de poliedros y sus propiedades basado en problemas y mediado por TIC para estudiantes de grado noveno de Educación Básica Secundaria en la Institución Educativa Teresita Montes de la ciudad de Armenia Quindío* [Tesis de Doctorado]. Universidad Tecnológica de Pereira. https://hdl.handle.net/11059/8715.

Álvarez, I., Ángel, J.L., Vargas, E. y Soler, M.N. (2014). Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *85*, 75-90. http://sinewton.es/revista_numeros/085/.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación, 340*(12), 341-378. http://hdl.handle.net/11162/68967.

Barrera, F. y Rodríguez, A. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, *3*(5). https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554.

Becerril, M.M., García, P., Grimaldi, V. y Ponce, H. (2017). *Matemática en Secundaria 1°. CABA/ 2° ES.* Santillana.

Bravo, S. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática, 24*(2), 5-36. http://somidem.com.mx/revista/vol24-2/.

Cecchi, N.H., Pérez, D.A. y Sanllorenti, P. (2013). *Compromiso Social Universitario: De la Universidad posible a la Universidad necesaria.* CONADU. http://biblioteca.clacso.edu.ar/Argentina/iec-conadu/20100317010331/2.pdf.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Horsori. http://hdl.handle.net/2445/174473.

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2020). *Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la geometría analítica. El caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario.* [Tesis de Doctorado]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2302.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la didáctica de las Matemáticas. *Revista La Gaceta, 5*, 673-702. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=125.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria en España Durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3872.

Gonzato, M., Fernández Blanco, T. y Díaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas 77*, 99-117. http://sinewton.es/revista_numeros/077/.

Guillen, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza-aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.21-68). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/14/Actas14SEIEM.pdf.

Garguichevich, G.G. (2007). *Geometría del plano y del espacio.* UNR.

Itzcovich, H. (2008). *La Matemática Escolar.* Aique.

Kaczor, P.J. y Outón, V.L. (2017). *Entre números I.* Santillana.

Lárez, J.D. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. *Revista Paradigma*, *35*(2), 183-198. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/543.

Limas, L. y Jiménez, A. (2017). Actividades exploratorio investigativas en clase de matemáticas. *Eco matemático*, *8*(1), 93-105. https://doi.org/10.22463/17948231.1480.

Osorio, V. (2003). Si no demuestro... ¿enseño Matemática? *Educación Matemática, 15*(2), 163-178. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol15/vol15-2/vol15-2-7.pdf.

Pisano, J.P. (2018). *Cuerpos en el espacio.* Logikamente.

Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M.F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J.D. Godino (Eds.). *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.45-62). SIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/05/Actas05SEIEM.pdf.

Sampieri, R., Collado, C. y Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill.

Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C. y Murúa, R. (2017). *Hacer Matemáticas 1/2.* Estrada.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría. *Uniciencia, 27*(1), 74-94. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2012). Enseñanza de la geometría en secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *8*(29), 59-84. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/874.

Zapata, F. y Cano, N. (2008). El universo de los poliedros: experiencias significativas con el doblado de papel y las construcciones geométricas. En *Memorias del 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. ASOCOLME. http://funes.uniandes.edu.co/942/1/11Taller.pdf.

Implementación de las TIC en prácticas evaluativas en Educación Secundaria en Matemática

Implementation of ICT in assessment practices in Secondary Education in Mathematics

Julieta Galindo
julietagalindo99@gmail.com

Resumen
Esta investigación surge de inquietudes acerca del proceso de evaluación en Matemática mediante recursos tecnológicos en la educación secundaria. El contexto virtual al que nos llevó la pandemia por Covid 19 incentivó a problematizar más aún esta temática, al notar que, a pesar de numerosos cambios y adaptaciones, se continuaban implementando las mismas herramientas evaluativas que en la presencialidad. Nos preguntamos entonces, de manera más general, por los recursos tecnológicos que resultan de interés a la hora de llevarlos a cabo como instrumentos de evaluación, y a su vez, la manera en que el docente pueda implementarlos significativamente en este momento de la clase. La teoría de referencia se delimita bajo cuatro perspectivas: educativa, evaluativa, tecnológica, y una combinación de estas dos últimas. Se pretenden analizar y describir distintos recursos, señalando cuáles son más propicios para ciertos tipos de evaluación, y diseñar propuestas didácticas innovadoras que resulten de aporte a este campo.
Palabras clave
Evaluación. Recursos tecnológicos. Educación secundaria.

Abstract
This research arises from concerns about the evaluation process in Mathematics through technological resources in secondary education. The virtual context to which the Covid 19 pandemic took us, encouraged us to further problematize this issue, noting that despite numerous changes and adaptations, the same evaluative tools were still being implemented as in the face-to-face. We ask ourselves then, more generally, for the technological resources that are of interest when carried out as evaluation instruments, and in turn, the way in which the teacher can implement them significantly at this time of the class. The reference theory is delimited under four perspectives: educational, evaluative, technological and a combination of these last two. It is intended to analyze and describe different resources, pointing out which ones are more suitable for certain types of evaluation, and design innovative didactic proposals that result in a contribution to this field.
Keywords
Evaluation. Technological Resources. Secondary Education.

1. Presentación

Esta primera sección se compone por cuatro apartados donde se perfilan los ejes de interés del estudio. En primer lugar, se presenta la problemática de investigación, donde se pretenden exponer las razones por las cuales se lleva a cabo este proyecto, seguido por los interrogantes que se plantean. A continuación, se enuncian los objetivos, en concordancia con aquellos interrogantes. Por último, los antecedentes de estudio, donde se recorren diferentes investigaciones relativas a la evaluación con recursos tecnológicos.

1.1. Problemática

A rasgos generales, se puede observar que en Matemática las herramientas destinadas a la evaluación son habitualmente las mismas, predominando la típica prueba escrita. Además, se suele atender únicamente a la evaluación sumativa (la que se realiza al final de cada unidad) y en ocasiones a la evaluación diagnóstica (al inicio de cada unidad), dejando de lado así la importancia de otros tipos de evaluaciones (autoevaluación, co-evaluación, evaluación mutua, etc.). Por otra parte, la evaluación en las clases de Matemática tampoco se caracteriza por ser motivo de reflexión por parte de los docentes (Canulli y Sgreccia, 2014).

A partir del año 2020, con motivo de la pandemia a causa del Covid 19, la educación debió adaptarse a la virtualidad, con todo lo que ello implica, incluyendo por supuesto las formas de evaluar. Es un momento que pone de manifiesto el uso de todas las herramientas aprendidas y la creatividad para dar respuesta a la necesidad que toca a la puerta.

A raíz de charlas de expositores, sumadas a la experiencia propia y de allegados, se pudo evidenciar que en la mayoría de los casos se utilizan los mismos instrumentos de evaluación que en la presencialidad, esperando los mismos resultados, en lugar de modificar/adaptar estos instrumentos a la nueva realidad.

A modo de ejemplo en muchas ocasiones se sigue proponiendo la típica prueba escrita, añadiendo una o varias cámaras para "vigilar" que los estudiantes no se copien. Incluso, lo primero que uno encuentra al buscar en internet "examen virtual" son "consejos para que los alumnos no hagan trampa", dando a entender que esa es la principal problemática de esta cuestión, siendo en realidad algo mucho más complejo. Otro ejemplo es la adaptación a exámenes *Multiple Choice* en plataformas web, donde los docentes aclaran que en la presencialidad se hubiera hecho hincapié en los procedimientos realizados, pero en este contexto virtual muchos se inclinan solo por evaluar los resultados obtenidos, siendo algo totalmente distante, en concordancia a lo planteado por Palacios (2002) cuando afirma que uno de los retos de las nuevas tecnologías es precisamente la personalización de la enseñanza.

Efectivamente, la introducción de nuevas tecnologías en la docencia requiere de logística y conocimientos además de consumir un tiempo apreciable del docente (Palacios, 2002). En cualquier caso, es claro que se demandan nuevas experiencias donde se pongan en evidencia los beneficios de su utilización, más aún, con centro en la evaluación en Matemática. Esto quiere decir, experiencias que analicen el alcance de los efectos de la implementación de este tipo de herramientas (Motiwalla y Tello, 2000). Debido a esto, se considera de interés desarrollar esta temática a modo de proyecto innovador.

En particular, los recursos tecnológicos proporcionan herramientas tanto de evaluación de los alumnos (programas, multimedia, formularios) como para su gestión (corrección, entrega de calificaciones e interpretación y análisis) (Bull, 1999). El primero de los casos, bajo el cual se pretende centrar este proyecto, supone abandonar los exámenes tradicionales de lápiz y papel (Annand, 2002) pudiendo introducirse diversos elementos y recursos novedosos que no solo permitan obtener resultados numéricos objetivos, sino que den lugar a la reflexión y a un aprendizaje significativo (Ausubel, 2002), algo que se pretende lograr en esta investigación.

Como se ha planteado anteriormente, una de las críticas constantes a la evaluación virtual es la clara despersonalización que se produce entre docente y estudiante, siendo que la idea central de la evaluación formativa pasa, entre otros aspectos, por evaluar al alumno y ofrecerles información de sus logros y lagunas (Lara, 2001). De esta manera, esta es otra de las cuestiones prioritarias centrales de la utilización de TIC en prácticas evaluativas: el grado de feedback docente-alumno.

A raíz de la importancia de la evaluación dentro del campo de la Educación Matemática y el contexto de virtualidad que estamos atravesando en el país, es fundamental explorar nuevas estrategias de evaluación implementando recursos tecnológicos para mejorar los métodos evaluativos.

1.2. Interrogantes

El propósito de este estudio es indagar la incidencia de la implementación de recursos tecnológicos en prácticas evaluativas en Educación Secundaria en Matemática. Se considera que atender a esta problemática es ampliamente necesario, y en este marco nos preguntamos: *¿Qué recursos tecnológicos resultan de interés a la hora de utilizarlos como instrumentos de evaluación en la virtualidad? ¿De qué manera el docente puede implementarlos significativamente en aquel momento de la clase?*

1.3. Objetivos

Objetivo general

Reconocer la incidencia de la implementación de recursos tecnológicos en prácticas evaluativas en Matemática en la Escuela Media.

Objetivos específicos

- Describir recursos tecnológicos que resultan de interés a la hora de utilizarlos como instrumentos de evaluación.
- Reconocer maneras en que el docente pueda implementarlos significativamente.

1.4. Antecedentes

En este apartado se pretende presentar un panorama acerca de lo aportado hasta el momento por investigaciones vinculadas a la temática de este estudio. Se incluyen, primeramente, estudios relativos al plano tecnológico/matemático, posteriormente sobre un plano didáctico/matemático, y por último se focaliza en estudios relativos a la inclusión de aquellos dos planos; es decir, más específicamente a lo que tiene que ver con evaluación con recursos tecnológicos en Matemática.

Plano tecnológico/matemático

Aquí se describirán algunas investigaciones relacionadas a la utilización de recursos tecnológicos en el aula de clases de secundaria, en ocasiones en particular en el contexto de virtualidad, y también otras en las que se particulariza en el tratamiento de la Matemática.

Una de las investigaciones que resultan de interés para este estudio es la realizada por Flórez-Pabón en la Universidad de Pamplona en mayo del 2020 acerca de las clases virtuales durante la pandemia, cuyo objetivo fue reflexionar sobre la enseñanza virtual que realizan los educadores matemáticos, específicamente con los recursos educativos. Se pregunta si los recursos online "son iguales" a clases virtuales efectivas.

En el desarrollo, se plantea una cita muy pertinente con relación a este estudio, en particular, al segundo objetivo de este trabajo. En ella se expone que en la educación virtual el problema no es la herramienta, sino el uso que se hace de ella (Acevedo-Rincón, 2020).

Se concluye que es ideal que los docentes prefieran herramientas colaborativas e interactivas, donde se intenta poseer una logística adecuada en el hogar. Además, que lo preferente es tener conciencia del tiempo para educar, calificar, retroalimentar, además de preparar muy bien previamente lo que se va a desarrollar en clases. También se expone que después de clases el profesor tiene que calificar dando un feedback al estudiante de su proceso (evaluativo) de acuerdo a las competencias, logros u objetivos de la sesión.

Todo ello ha de tenerse en cuenta a la hora de evaluar en contextos de virtualidad, en particular con TIC, como se plantea en el presente proyecto.

El trabajo de Córdoba (2014) en el Instituto Tecnológico Metropolitano amplía de alguna manera lo visto anteriormente, dándole otra mirada. Se centra en las creencias de los estudiantes de educación secundaria acerca de las TIC en el aprendizaje de las Matemáticas. El autor plantea que no siempre se toman en cuenta aspectos personales como los afectivos y emocionales a la hora de utilizar estos recursos.

Para su desarrollo seleccionaron una muestra conveniente e intencional de 950 estudiantes de escuela media repartidos en 6 instituciones educativas. Realizaron un cuestionario con una serie de preguntas con el objetivo de conocer las creencias de los estudiantes acerca de la influencia de los recursos tecnológicos en el aprendizaje de la Matemática a través de un análisis tanto cuantitativo como cualitativo.

Los resultados allí expuestos muestran que, si bien la utilización de recursos puede generar motivación, no representa para los estudiantes un elemento significativo ni de alto impacto en su aprendizaje matemático a largo plazo, según lo que creen. Esto hace pensar en la importancia de la manera de implementar estos recursos tecnológicos en el aula. Es decir, más allá de su utilización, señala la relevancia del rol docente a la hora de llevarlos a la práctica, algo que muestra concordancia con la cita expuesta al principio de la página, referida además al segundo objetivo específico de este proyecto de investigación.

Mientras que el anterior estudio se centraba en los estudiantes, Roldán (2013) en el marco de su tesis para optar al título de Magíster en Educación, inicia una línea de investigación en Medellín, Colombia, acerca de la caracterización de la práctica docente mediada con TIC en el área de Matemática, en específico en el nivel secundario (el cual compete al presente estudio). Sus objetivos son identificar la concepción de TIC que tienen los docentes del área de Matemática, y describir la práctica docente mediada con TIC de los profesores del área de Matemática de la básica secundaria y media. Se utiliza un enfoque cualitativo y un alcance exploratorio descriptivo, siguiendo un estudio de caso, a través de entrevistas, observaciones y documentos.

Por un lado, en cuanto al primer objetivo, los resultados arrojan que los docentes perciben que las TIC fomentan la autonomía del estudiante, facilitan el trabajo independiente y estimulan el autoaprendizaje, la autodirección, el autoevaluarse y confrontar resultados. Además, que agilizan el tiempo y le brindan al estudiante una alternativa de formación.

Por otro lado, se observa que los docentes de matemática, conciben y emplean las TIC en el aula como amplificadores[1], solo para que los estudiantes hagan cálculos (como si fueran una calculadora más), repitan lo que hace el docente en clase; lo que no permite que las TIC alcancen el estatus de instrumentos.

Como una cuestión "extra" a mencionar, que tiene que ver con nuestro estudio, se les preguntó a los docentes encuestados si utilizaban TIC para evaluar, a lo que respondieron:

1) No, esa es la meta para el próximo año y estoy trabajando en eso.
2) Sí, aunque estas estrategias apenas las estoy implementando. Por ejemplo, la prueba final del tercer período la realicé digital apoyado en la hoja de cálculo.
3) En los casos que lo amerite, pero es complicado por la falta de equipos y disponibilidad del recurso.

[1] Según el estudio existe amplificación cuando el docente usa la calculadora para realizar un cálculo, cuando el docente usa un Sistema Algebraico Computacional (SAC), para calcular un límite, una derivada o una integral, o cuando usa Cabri para replicar construcciones. Bajo estos usos, las TIC se consideran herramientas, no instrumentos.

Vale aclarar que esta tesis fue formulada en el año 2013 (pre-pandemia); por lo tanto, no existía esta "exigencia" que el contexto amerita de utilizar TIC en Educación y, en particular, para prácticas evaluativas.

Por su parte, De la Torre Laso (2018) presenta resultados acerca del uso de una herramienta tecnológica en concreto: Nearpod, la cual es interactiva, en el aula universitaria. A pesar de que no se utiliza particularmente para evaluar, resulta de interés un adentramiento en los beneficios que puede ofrecer este recurso como metodología de enseñanza.

A rasgos generales, la aplicación permite que los estudiantes visualicen el contenido de las clases (texto o audiovisual) a la vez que pueden realizar actividades propuestas por el docente, ya sean preguntas abiertas, con opciones o cálculos/gráficos matemáticos, etc.

Se proponen, entre otras cosas: describir tanto la motivación del alumnado como la utilidad y posibilidades de la aplicación Nearpod en la docencia y examinar el nivel de asistencia y el rendimiento de los alumnos después del empleo de esta metodología. Para ello se lleva a cabo una evaluación previa al grupo y durante cuatro meses se desarrollaron clases con la aplicación Nearpod para luego constatar el grado de satisfacción con la experiencia.

Según los alumnos, la aplicación logró clases más entretenidas, aumentando el interés y el grado de concentración hacia las mismas. Además, consideran que aumenta la calidad de la enseñanza, valorando mayormente el grado de participación, así como de reflexión hacia las respuestas que permite. Concluyen así que Nearpod es una herramienta valiosa que consigue aumentar la interactividad en el aula. Al final del estudio, se plantea que sería necesario poder contrastar las opiniones de los estudiantes con otros grados formativos diferentes, algo que se procurará responder en la presente investigación (nivel secundario).

Plano didáctico-matemático

En esta sección se presentarán antecedentes acerca de propuestas evaluativas alternativas en la Educación Matemática (más allá de las TIC).

Una de las investigaciones que resultan de relevancia es la realizada por Canulli y Sgreccia (2014) acerca de los comportamientos de alumnos de secundaria frente a diferentes herramientas de evaluación con el objetivo de responder a cuáles son los comportamientos, actitudes y valoraciones de los alumnos de cuarto año de secundaria superior, durante y al finalizar el proceso de evaluación de cierto contenido a través de diferentes herramientas de evaluación. Los autores llevan a cabo un estudio de caso donde presentan distintos instrumentos alternativos de evaluación: diario de los alumnos, glosario de términos matemáticos, colección de situaciones problemáticas, proyectos y portafolio, el cual reúne todas las producciones previas.

Se concluye que los comportamientos de los alumnos han sido diferentes a los que se podrían registrar en un examen tradicional y las actitudes se modificaron radicalmente, con un muy buen clima de clase. Algunos estudiantes argumentaban que “no se parecía a una prueba”.

A la vez, en este marco resulta de utilidad el material producido por Goded (2006) como capítulo de un libro, donde se centra en propuestas alternativas de evaluación en Matemática.

Allí la autora presenta un breve análisis de posibles instrumentos, alternativos al clásico examen, que pueden permitir la evaluación y regulación del proceso de enseñanza-aprendizaje, analizando en cada caso el tipo de información que pueden aportar para el seguimiento del proceso.

Las herramientas analizadas son: la prueba escrita, la prueba oral, la elaboración de trabajos o proyectos, la elaboración de mapas conceptuales, la observación, el análisis del error, el diario de clases, el cuaderno de notas del alumno y las carpetas de aprendizaje. Luego, hace hincapié en dos de esas herramientas y su ejemplificación en un aula de secundaria: los mapas conceptuales y las carpetas de aprendizaje. Del primero de ellos se señala que son un recurso de gran potencial pues son una fuente de información significativa tanto para la regulación del proceso de enseñanza-aprendizaje como para promover nuestro propio desarrollo profesional. Los profesores pueden analizar qué contenidos introducen cada uno de los alumnos en aquellos mapas conceptuales y qué relaciones establecen entre ellos, sumado al análisis de los conceptos no incluidos y las relaciones no establecidas. En cuanto a las carpetas de aprendizaje se resalta que permiten la evaluación del progreso del alumno y además su propia autoevaluación, con un alto nivel de interacción docente-alumno.

Se concluye que es importante tener en claro qué estamos evaluando con el instrumento que hemos diseñado o elegido, siendo una parte fundamental de la labor docente. Y que la aplicación de aquellas estrategias de evaluación proporciona la posibilidad de aproximaciones a un cambio significativo de evaluar.

Es de gran interés para el presente estudio pues realiza un análisis similar al que se pretende aquí, con la diferencia de que en este caso se ponga en el centro a recursos tecnológicos utilizados como herramientas de evaluación.

Inclusión de los dos planos anteriormente mencionados

Aquí se incluirán estudios donde específicamente se apliquen recursos tecnológicos para evaluar en Matemática.

Una de las investigaciones que resultan de interés en este marco es la realizada por Valles-Pereira y Mota-Villegas (2019) sobre la aplicación del recurso Kahoot a modo de evaluación sumativa en un curso de Matemática Discreta.

Allí se describe una experiencia de aula, en la que se evaluó a un grupo de estudiantes del curso de Matemática Discreta en teoría de conjuntos y sus operaciones por medio de diagramas de Venn. Para esto, se utilizó el recurso tecnológico llamado Kahoot, con el objetivo de despertar interés en los estudiantes.

Se concluye que la aplicación tiene un factor motivante y atractivo, fomentando la mejora de la memoria de propiedades y nociones elementales sobre la teoría de conjuntos; pero no proporciona datos sobre procesos matemáticos más complejos, justamente por la estructura de las preguntas de selección simple.

Dejan como una posibilidad abierta al futuro la utilización de alguna aplicación donde se puedan plantear problemas que incluyan procesos matemáticos para su resolución, con preguntas que permitan más tiempo de respuesta. Resulta de interés para nuestro estudio dar respuesta a este interrogante. De todas maneras, se observa un incremento en la asistencia (sesiones en las que se usó Kahoot) y un mayor interés en la actividad de la clase en participar.

Parra et al (2017), por otro lado, estudian a la aplicación Socrative como herramienta de evaluación y cómo esta influye en la participación en el aula de Universidad. Allí, elaboran un catálogo de cuestionarios rápidos de menos de 3 minutos a realizar en tiempo real en el aula y que son indicativos de los conceptos importantes de cada tema y su grado de comprensión por parte del alumno. Finalmente, el profesor da las respuestas correctas y justifica las razones por las que el resto de respuestas no lo son (se deja en evidencia que los estudiantes no participan en esta etapa de la clase).

Como conclusión los estudiantes declaran positiva la experiencia a la vez que sugieren hacer la sesión más larga con más preguntas que incluyan detalles concretos del contenido en cuestión. También valoran de forma positiva el anonimato al participar en la encuesta ya que el registro estadístico de los resultados no muestra los resultados nominales.

En este caso, la encuesta en sí solamente motiva al profesor a profundizar sobre puntos débiles que deben ser aclarados a la vez que anima al estudiante a insistir en los aspectos donde más ha fallado (es decir, autoevaluarse).

También en un contexto universitario, Coa-Mamani (2018) en su Tesis de Maestría se encarga de estudiar el aprendizaje experiencial y la aplicación EDpuzzle en la solución de problemas contextualizados (en específico del tema sistemas de ecuaciones). Se pregunta justamente en qué medida favorecen el Aprendizaje Experiencial y el EDpuzzle la solución de problemas contextualizados de Matemática Básica.

En aquella experiencia se aplica la metodología del aula invertida usando el EDpuzzle en la resolución de sistema de ecuaciones con tres variables. Los diferentes problemas planteados se evalúan a través de una rúbrica y finalmente se elabora una escala para conocer la opinión e impacto del EDpuzzle en los estudiantes.

Se concluye que este programa permite que los estudiantes sean capaces de apropiarse del aprendizaje ya que la idea principal es crear videos interactivos fácil y rápidamente. Al agregarle este factor interactivo se hace énfasis en el poder de interpretación de lo que se está observando, con el objetivo de que el alumno pueda descomponer el mensaje, decodificarlo y aplicarlo.

Los resultados arrojan que el EDpuzzle impacta de forma positiva en los estudiantes, que la mayoría se muestran de acuerdo porque les resulta interesante y es una nueva forma de aprender a resolver problemas. Además, la herramienta favorece el trabajo en equipo resultando así que se toman en cuenta los diferentes estilos de aprendizaje.

A modo de síntesis a lo largo de los antecedentes se ha podido observar que lo primordial al momento de utilizar una herramienta de evaluación es tener en claro qué estamos evaluando con el instrumento diseñado o elegido. A la hora de hacerlo se ha de tener en cuenta que la aplicación de diversos instrumentos de evaluación nos proporciona la posibilidad de acercarnos a un cambio significativo en el concepto de evaluar. La pregunta es: ¿cómo lograr estos beneficios que se obtienen con la aplicación de estas herramientas alternativas, mediante las TIC?

Por este motivo, parte de la innovación de este estudio radica en que la utilización de recursos sea de forma significativa (es decir, que no solo se utilicen a modo de "complemento"). De esta manera se procura un aprendizaje matemático a largo plazo mediante instrumentos que proporcionen datos sobre procesos matemáticos complejos. Además, sin dejar de lado que a través de estas herramientas se puedan plantear problemas que incluyan procesos matemáticos para su resolución, con preguntas que permitan un tiempo considerable de respuesta.

A su vez, se ha podido notar que la mayoría de las investigaciones respecto a esta temática se enfocan en el nivel universitario, por lo que sería necesario poder contrastar las opiniones de los estudiantes con otros grados formativos diferentes, en nuestro caso en particular con el nivel secundario.

Para cerrar, los recursos tecnológicos utilizados en las distintas investigaciones mencionadas han sido Nearpod, Kahoot, EDpuzzle y Socrative, presentando allí ventajas y desventajas de su aplicación en un contexto áulico en particular. En la mayoría de los casos resultan de interés a los estudiantes, siendo un factor motivacional importante a la hora de las clases. Se pretende, como se planteó anteriormente, particularizar esta visión para prácticas evaluativas en nivel secundario.

2. Marco teórico-referencial

En esta sección se presentan algunos constructos teóricos clave para orientar el abordaje del problema de investigación. Este marco teórico está conformado por cuatro apartados: la perspectiva educativa, donde se fundamenta la corriente didáctica en la que se enmarca este estudio; la perspectiva acerca de la evaluación, donde se definen conceptos teóricos y curriculares generales y específicos en torno a la temática; un apartado en torno a los recursos tecnológicos, bajo el cual se caracterizan y clasifican en distintos tipos según su función en la educación; y por último un plano conjunto tecnológico/educativo, donde se establecen relaciones entre la evaluación y la tecnología.

2.1. Perspectiva educativa

El presente estudio sentará sus bases en la *Educación Matemática Crítica* (EMC), cuyo principal autor es Skovsmose. Algunos de sus aportes incluyen a la educación matemática dialógica, la competencia democrática y la reflexión crítica. En cuanto al primero de ellos, Skovsmose (1990) afirma cómo el diálogo puede asegurar que los principios democráticos son modelados en las instituciones educativas. Para ello, identifica los siguientes componentes del diálogo:

- La capacidad crítica de los estudiantes y del profesor a decidir sobre contenido y proceso.
- La distancia crítica del tema de estudio. Las preguntas críticas necesitan ser hechas referentes a la aplicabilidad del tema, qué intereses están detrás del tema, qué supuestos están detrás del tema, sus funciones y limitaciones del tema.
- El contrato crítico al seleccionar los problemas para el proceso enseñanza y aprendizaje.

Según Valero (1996; citado en Sánchez, 2009), la clase de matemáticas ha sido históricamente la que mayor exclusión ha generado, pues en esta área del saber, son pocos los que consiguen un aprendizaje exitoso. Usualmente el estudiante carece de herramientas para participar activamente en las decisiones sociales y políticas de su contexto. El reto consiste entonces, desde la EMC, en generar que los estudiantes tengan mayor participación en procesos democráticos a partir de las dinámicas que se den desde las aulas de clases, particularmente desde las de matemáticas. En la medida en que ellos vivencien desde la escuela, situaciones en las que sean agentes activos para la toma de decisiones y el desarrollo de las actividades, podrán transmitir tal formación en su actuar y haceres como ciudadanos activos de una comunidad (Sánchez et al, 2009).

A la vez, es primordial poder reconocer que al interior de las clases se dan relaciones de poder, donde el profesor y el estudiante tiene igual capacidad de decisión, aunque visiones del mundo distintas. También identificar que el profesor puede proporcionar poder a sus estudiantes por medio de la enseñanza de las matemáticas y que no tiene sentido alguno generar beneficios o perjuicios de acuerdo a una calificación.

Una clase bajo la perspectiva de la EMC parte de la incertidumbre y determina una visión distinta del profesor, quien no es conocedor absoluto de la verdad y puede aprender de sus estudiantes y de lo que ellos aprendan durante el ejercicio mismo del escenario de investigación.

Todos estos conceptos pueden ser relacionados, en particular, con la evaluación, siendo el eje de esta investigación. Tanto estudiantes como docentes deben ser partícipes del proceso evaluativo, reflexionando en torno a este, sin establecer una función de control sobre los instrumentos de evaluación.

2.2. Evaluación

Quizá uno de los desaciertos más frecuentes en el proceso educativo ha sido ver la evaluación como una simple actividad que persigue asignar calificaciones a los estudiantes, para al final decidir o no su promoción al siguiente nivel de estudios. En cambio, en el presente trabajo, se entiende a la *evaluación* como un proceso que consta de varios pasos imprescindibles (Zambrano et al, 2017). Estos son: la determinación del objeto a evaluar, la determinación de los criterios de evaluación, la recolección de la información, el análisis de la información, la emisión de juicios y la toma de decisiones. Una vez seleccionados los objetos de evaluación, el docente considera cómo y con qué recursos puede recabar la información que necesita. Así, los *instrumentos o herramientas de evaluación* son entendidos como los medios que facilitan al docente recoger información del objeto que pretende ser evaluado.

A la vez, se tendrá en cuenta la concepción de evaluación establecida en el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) de la provincia de Santa Fe (2014):

> Se concibe a la evaluación como una construcción compleja y continua de valoración de situaciones pedagógicas, sus resultados, los contextos y condiciones en que estas se producen forman parte intrínseca de los procesos de enseñanza y aprendizaje siendo parte de un único proceso con dos funciones diferenciadas: la de comprender las situaciones pedagógicas orientadas a la toma de decisiones para intervenir sobre ellas con el fin de mejorarlas, y la de responder a la necesidad de constatar los logros alcanzados por los estudiantes en sus aprendizajes en un determinado momento de su itinerario educativo (p.13).

Además, según este documento se entiende que la evaluación compromete una dimensión social en tanto herramienta de comunicación y otra ética, la de no redundar en mecanismos e instrumentos que fomenten exclusión. Ha de reflejar los caminos del aprendizaje tanto de los estudiantes como de sus docentes, con la revisión permanente de sus propuestas de manera reflexiva y crítica.

La evaluación deberá permitir establecer en qué medida los estudiantes han desarrollado las capacidades de: comprender, interpretar, producir y comunicar textos diversos y expresados en diferentes lenguajes; la capacidad para enfrentar y resolver problemas de diversa naturaleza y en diversos contextos; la capacidad para trabajar y convivir con otros y la capacidad para pensar de manera crítica y creativa (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014).

A continuación, se clasificarán distintos tipos de evaluación que serán de utilidad en el presente estudio (Zambrano et al, 2017):

- La *evaluación diagnóstica* tiene como objetivo recoger información que permita al docente marcar un punto de partida para emprender un proceso de aprendizaje con sus estudiantes. Se la puede utilizar al inicio de un ciclo escolar, un módulo educativo, un bloque curricular, etc.
- La *evaluación formativa* persigue reflexionar sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza, ya que les da mayor importancia a los procesos que a los resultados. Contempla y reflexiona acerca de las potencialidades que tienen los errores a la hora de realizar los procesos evaluativos debido a que se relacionan con la posibilidad de autoevaluarse, de reflexionar acerca del propio proceso de aprendizaje y de atender a las trayectorias educativas individuales. Además, los profesores han de utilizarla para ajustar los modos de enseñanza. Dentro de ella está la *evaluación formadora*, orientada a promover en el alumno la capacidad de regular sus propios procesos de aprendizaje.
- La *evaluación sumativa* es aquella que se realiza al final de una unidad, de un bloque, etc. Persigue objetivos de calificación y acreditación y de esta manera verificar si los objetivos propuestos al inicio del período fueron o no alcanzados.
- Por otro lado, la evaluación también se clasifica según cuál sea su agente. Aquí aparecen tres nuevos tipos de evaluación: la *autoevaluación* (evaluación del alumno acerca de su propio trabajo), la *co-evaluación* (la realizan los estudiantes a las producciones de sus pares) y la *heteroevaluación* (el sujeto evaluador y el evaluado pertenecen a jerarquías distintas, como pueden ser el profesor y el estudiante).

A la vez, como plantea Barbera (2006), la evaluación puede ser clasificada en cuatro dimensiones (del, para, como y desde el aprendizaje) que están entrelazadas unas con otras en la práctica evaluativa.

- La llamada *evaluación del aprendizaje* ofrece como resultado la información acerca de si los estudiantes cumplen con los estándares sociales relacionados al saber. En este caso, prima la función acreditativa de la evaluación.
- En la *evaluación para el aprendizaje* el eje está puesto en la retroalimentación y el aprovechamiento que de esta realizan los estudiantes y docentes.
- La *evaluación como aprendizaje* contempla el aprendizaje mismo de la dinámica evaluativa y la reflexión de las prácticas educativas llevadas a cabo por los propios estudiantes. Esta reflexión aprendida conlleva la posibilidad de regular cada aprendizaje adaptándolo a los fines educativos y a los intereses personales.
- La *evaluación desde el aprendizaje* prioriza el concepto de que para aprender es necesario conocer el punto de partida del conocimiento, es decir, lo que se sabe previamente.

Como se ha planteado a inicios de este estudio, uno de los retos de las nuevas tecnologías es precisamente la *personalización de la enseñanza*. Pero, ¿qué se entiende por este concepto? La personalización de la educación ha de referirse a la personalización de la relación educativa. Este hecho compromete tanto a los planes de actuación para con el alumnado como a la forma en que los docentes se abren a la experiencia de relación y comprensión de sus alumnos (Contreras, 2007).

2.3. Recursos tecnológicos

Según Muirhead y Juwah (2004), la *interactividad* comprende la forma, la función y el impacto de las interacciones en la enseñanza y el aprendizaje. Se concibe como un proceso, como reciprocidad o diálogo. Las evaluaciones son interactivas ya que implican retroalimentación con los estudiantes.

Pasando ahora a caracterizar los recursos tecnológicos en matemática Hughes (2005) propone una clasificación en tres categorías: reemplazo, amplificador y transformador

La tecnología funciona como *reemplazo* cuando sustituye los recursos preexistentes sin que exista un cambio en las prácticas instruccionales, los procesos de aprendizaje del estudiante, los contenidos o los objetivos de enseñanza.

La denominada *amplificación* en el contexto de recursos tecnológicos en matemática existe cuando el docente usa la calculadora para realizar un cálculo, cuando el docente usa un Sistema Algebraico Computacional (SAC) para calcular un límite, una derivada o una integral, o cuando usa el Cabri para replicar construcciones. Es decir, al utilizar un recurso tecnológico como amplificador, los aprendizajes de los estudiantes, los contenidos y las metas instruccionales siguen siendo los mismos. La tecnología utilizada como amplificador aprovecha su potencial para realizar tareas con mayor eficiencia y eficacia, incrementando el rango de ejemplos o problemas con que el alumno puede ponerse en contacto, sin modificar las tareas en sí mismas (Cuban, 1988; Pea, 1985; citados en Fajardo, 2020).

En contraste con las dos categorías anteriores, el uso de los recursos tecnológicos bajo la categoría *transformador*, según Hughes (2005; citado en Farjado, 2020), se produce cuando existe una modificación de las prácticas de enseñanza y a través de la tecnología se logra que el estudiante sea el centro del aprendizaje en la construcción del conocimiento.

Estas tres categorías se relacionan íntimamente con cada una de las tres concepciones de las TIC propuestas por Mc Farlane et al (2000). En primer lugar, las TIC son materia de enseñanza; en segundo lugar, las TIC son herramientas para hacer lo mismo en clase, pero de manera más eficiente; y, en tercer lugar, las TIC son agentes de cambio para transformar de forma revolucionaria la práctica docente.

Las TIC, en el caso matemático, pueden cambiar de estatus, es decir, pasar de amplificadores a transformadoras. Esto se adquiere gradualmente en la medida que el artefacto vaya logrando que el estudiante incorpore nueva información en su estructura mental, esquemas de utilización, exploración y se atreva a conjeturar.

En relación con esto, se considera, al igual que Sandoval et al (2017), que la integración de tecnologías digitales para promover la construcción de conocimientos matemáticos requiere una mediación particular del docente.

2.4. Plano tecnológico/evaluativo

Similarmente a lo definido en la sección 2.3, aquí se presentarán las diferencias entre la evaluación administrada por la tecnología y la evaluación mediada por la tecnología.

Mediante el enfoque de la *evaluación administrada por la tecnología*, estas últimas solo cumplen una función administradora de la evaluación, ya que tienen puesto el acento en la eficiencia y la agilización del proceso, sin tomar en cuenta su fin pedagógico y educativo. Por ejemplo, los exámenes del tipo *Multiple Choice* o Verdadero o Falso, entrarían en esta categoría.

Por otro lado, la *evaluación mediada por la tecnología* prioriza la interpretación de los procesos cognitivos de los estudiantes y transparentarlos a través de la tecnología. Según Lipsman (2014), se trata del estudio por parte del docente de las huellas que dejan los estudiantes en sus recorridos de aprendizaje mediados por las tecnologías. Desde esta perspectiva, encontramos propuestas de evaluación mediadas por la virtualidad en donde el o la estudiante se encuentra en el centro de la escena.

3. Metodología

En esta parte se presenta el abordaje metodológico adoptado para este estudio, el cual se divide en cuatro apartados. En primer lugar, se expone el enfoque, alcance y tipo de investigación. En una segunda sección, se precisan los sujetos y técnicas de recolección de la información. En tercer lugar, se enuncian las categorías y sub-categorías de análisis definidas en función a los objetivos propuestos en la sección 1.

3.1. Enfoque, alcance y tipo de investigación

Esta investigación emplea un *enfoque metodológico cualitativo* ya que se utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación (Hernández et al, 2014). Se lleva a cabo un proceso inductivo al explorar y diseñar secuencias didácticas para la evaluación en enseñanza de la Matemática con recursos tecnológicos, y luego a partir de ello generar posibles propuestas.

El estudio tiene un *alcance descriptivo-interpretativo* pues se busca caracterizar, reflexionar y elaborar conclusiones sobre propuestas didácticas de la temática en cuestión, estudiando cómo estas pueden influir en lograr un aprendizaje significativo en el aula de Matemática de secundaria. Se ejemplifica con algunos contenidos específicos, a pesar de que ciertas herramientas tengan versatilidad en ese sentido, es decir, puedan adaptarse a otro contenido/nivel educativo.

En cuanto al *tipo* de investigación, como se mencionó anteriormente, se propone el *diseño* de secuencias didácticas para la evaluación en enseñanza de la Matemática a nivel secundario con ciertos recursos tecnológicos.

3.2. Sujetos y recolección de la información

Para la recolección de la información se utiliza un *análisis documental* de investigaciones previas en el área que ayuden a la construcción de los diseños, siendo estos últimos, junto con los recursos, los *sujetos* de análisis del presente estudio.

Se trabaja con cuatro recursos tecnológicos elegidos por su variedad de herramientas y funciones, y su versatilidad de aplicaciones, especialmente para lo que nos compete en esta investigación: la evaluación en Matemática. Estos son: MentiMeter (Link), Kahoot (Link), Nearpod (Link) y EDPuzzle (Link).

Por último, respecto al *procesamiento de los datos*, se utilizará el análisis de contenido ya que se trata de describir y reflexionar acerca de las categorías de análisis que se mencionan a continuación.

3.3. Categorías de análisis

En concordancia con los objetivos planteados, la investigación se organizará en base a dos categorías de análisis generales y secuenciales, las cuales se dividen en dos sub-categorías.

Recursos tecnológicos como instrumentos de evaluación en Matemática

- *Características de los recursos tecnológicos elegidos.* Contempla la denominación del material con su logo, las principales funciones identificadas, cómo es su accesibilidad y las especificidades que por sí mismo presenta.
- *Tipos de herramientas en cada aplicación.* Se presentan las herramientas más destacadas de cada aplicación con el propósito de reconocer su potencial.

Formas significativas de implementación

- *Tipos de evaluación*. Se reflexiona acerca de la relación entre los distintos tipos de evaluación presentados en el marco teórico, con la manera de llevarlas a cabo mediante la utilización de TIC.
- *Propuestas posibles*. En concordancia con la sub-categoría anterior, se proponen secuencias posibles a la hora de implementar aquellos tipos de evaluación en el aula de Matemática de secundaria.

4. Resultados

En esta sección se presentan los resultados de la investigación, los cuales se dividen en dos grandes apartados que se corresponden con los objetivos específicos planteados, y a su vez, con las categorías y sub-categorías de análisis detalladas en el apartado 3.2. Para ello, se analizan en profundidad cuatro recursos tecnológicos que fueron escogidos por la variedad de propuestas que presentan, siendo algunas similares pero cada uno posee su particularidad.

4.1. Recursos tecnológicos como instrumentos de evaluación en Matemática

En la Tabla 2.1 se describen las principales características de los recursos tecnológicos elegidos a analizar: MentiMeter, Nearpod, Kahoot y EDPuzzle.

Tabla 2.1. Características de los recursos tecnológicos elegidos

Recurso	Funciones	Accesibilidad	Especificidades
MentiMeter	Permite crear presentaciones interactivas, con el agregado de nubes de ideas, preguntas, encuestas, cuestionarios, diapositivas, imágenes, etc.	Tiene versión gratuita (permite un nº ilimitado de participantes) y paga. No requiere instalación, pero sí conexión a internet.	Muestra los resultados en vivo en la pantalla y permite crear un máximo de 5 preguntas por sesión.
Nearpod	Permite crear clases, videos interactivos y actividades.	Gratuita (permite un máximo de 40 participantes). Requiere conexión a internet.	Permite la incorporación de recursos provenientes de YouTube, Dropbox, Google Drive, pdf, Power Point, entre otros.
Kahoot	Permite crear cuestionarios de evaluación en marco de	Gratuita. Requiere conexión a internet.	Existen 2 modos de juego: en grupo o

	"concursos".		individual.
EDPuzzle edpuzzle	Permite enriquecer videos, crear diálogos, encuestas y preguntas asociadas a un video (propio o ajeno) que se activan cuando el archivo multimedia llega a un tiempo determinado por quien edita.	Gratuita (permite un máximo de 20 videos).	Es flexible porque puede ser modificada, interactiva porque establece un diálogo entre el estudiante y la máquina; y medible porque arroja estadísticas.

4.1.1. Tipos de herramientas en cada aplicación

A continuación, se presentan con ítems las herramientas más destacadas de cada aplicación con imágenes incluidas, con el objetivo de detallar el potencial de cada una de ellas.

Mentimeter

Esta plataforma originalmente se encuentra en idioma inglés, pero, como la mayoría de las páginas web, puede ser traducida al español gracias a Google. Al ser traducciones no muy fieles, se opta por adjuntar capturas en el idioma original en el presente estudio. Los participantes no tienen que registrarse para utilizar esta herramienta, solo es necesario que introduzcan un código de seis dígitos que se genera automáticamente al crear un recurso de los que ofrece Mentimeter.

Todos los cuestionarios tienen la posibilidad de añadir imagen, y de modificar el tema en cuanto al diseño, colores y tamaño de fuente de letra.

Ofrece variedad de tipos de herramientas, algunas de las cuales se presentan aquí (Figura 2.1).

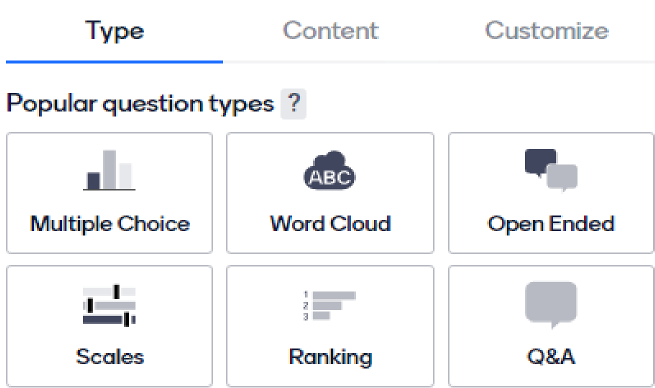


Figura 2.1. Tipos de cuestionarios disponibles en Mentimeter (Mentimeter)

Multiple Choice / Opciones Múltiples

Permite añadir infinidad de posibles opciones, cuyos resultados se muestran en variados formatos: gráfico de barras, “donas”, gráfico de tortas o puntos. Es posible elegir un título y una pequeña descripción más larga en los teléfonos de la audiencia y si coloca el cursor sobre la pregunta durante la presentación. Además, permite seleccionar una imagen para mostrar.

Como “extras” se tienen la opción de mostrar la respuesta correcta, mostrar los resultados en porcentaje y/o dejar que los participantes elijan múltiples opciones.

Word Cloud / Nube de palabras

Figura 2.2. Nube de palabras en Mentimeter (Sitio Web)

Es de las herramientas más destacadas y utilizadas de esta aplicación. Se presenta una pregunta y cada una de las respuestas (abiertas) de los participantes, se van poniendo en pantalla y las palabras se van haciendo más grandes dependiendo del número de veces que se repite. Se puede limitar la cantidad de entradas (palabras o frases) que pueda enviar cada participante.

Se muestra un ejemplo en la Figura 2.2.

Open Ended / Muro Colaborativo

Similar a la herramienta anterior, aquí se pueden formular preguntas y en pantalla aparecerán las diferentes respuestas que brinden los alumnos en forma de muro. En esta ocasión, por la manera en que se organiza, podrán ser respuestas más elaboradas.

A modo de ejemplo, se adjunta aquí una imagen (Figura 2.3) en la que se les pregunta a los estudiantes cómo les parece que están siendo las clases de cierta asignatura actualmente.

Figura 2.3. Muro colaborativo en Mentimeter (Sitio Web)

Scales / Escalas

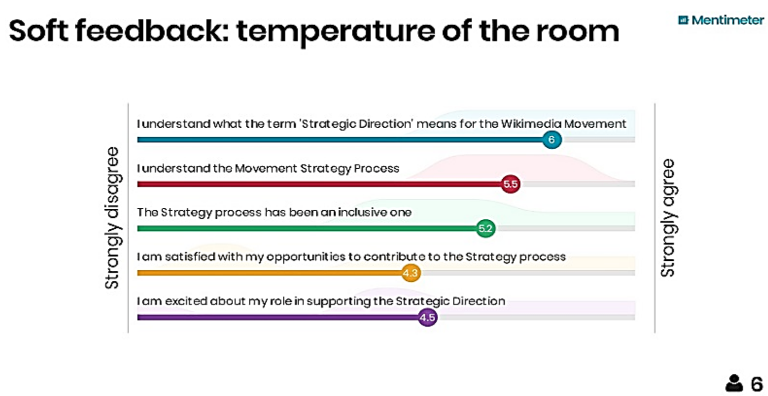


Figura 2.4. Escala de respuestas en Mentimeter (Sitio Web)

Se trata de un cuestionario para conocer la opinión de los participantes a través de una escala de respuestas. Al igual que en el formato Multiple Choice, se pueden plantear multiplicidad de opciones. Permite añadir etiquetas personalizadas con los significados de los valores más altos y más bajos que se elijan. Además, la app ofrece algunos ejemplos populares prediseñados, que se utilizan comúnmente como escalas.

Posee dos posibles diseños de resultados: deslizadores, o "gráfico de araña". Se presentará un ejemplo del primero de los casos en la Figura 2.4.

Ranking

Como bien dice el título, se presentan una variedad de opciones cuyos resultados se muestran en forma de ranking del mayor al menor número de veces que se ha respondido.

Q&A / Preguntas y Respuestas

Por último, se tiene la posibilidad de permitir que la audiencia/alumnado haga sus propias preguntas y presentarlas en pantalla.

Si uno desea que la audiencia le haga preguntas sin una diapositiva de preguntas y respuestas designada, también se puede acceder a esta configuración desde el menú.

Asimismo, la aplicación también ofrece la realización de concursos de preguntas mediante dos formatos: seleccionar la respuesta correcta o escribirla. En ellas, también se puede añadir música y cierta cantidad de segundos para responder. Además, se puede activar una opción donde la respuesta más rápida gana más puntos. Se muestra un posible formato en la Figura 2.5.

Figura 2.5. Concurso con el objetivo de escribir la respuesta correcta en Mentimeter

Nearpod

Al ingresar a la página se tiene la opción de jugar una demo interactiva, de explorar recursos predefinidos, de crear y editar material y de integrar alumnos, lanzando una clase. Al ingresar al apartado de creación, el cual nos interesa, nos encontramos con diversa variedad de contenido para añadir en diapositivas, que forman una clase para los estudiantes.

Para enriquecer una clase, se dispone de: videos, contenido web, audio, galería, visualizador de PDF, simulación, o simplemente una diapositiva clásica estilo Power Point. A su vez, se encuentran las siguientes actividades (Figura 2.6) para interactuar con los estudiantes.

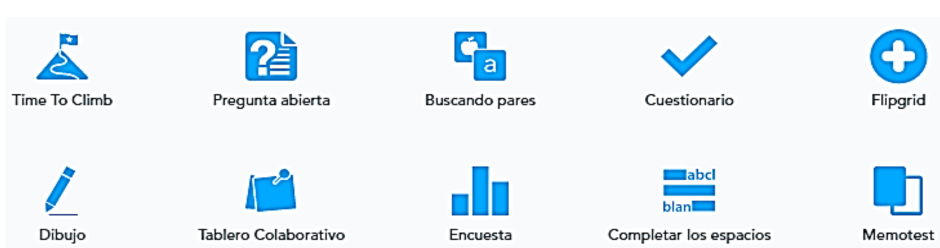


Figura 2.6. Tipos de actividades posibles en Nearpod

Se describen solo algunas de ellas aquí (para no ser redundante con las más "evidentes").

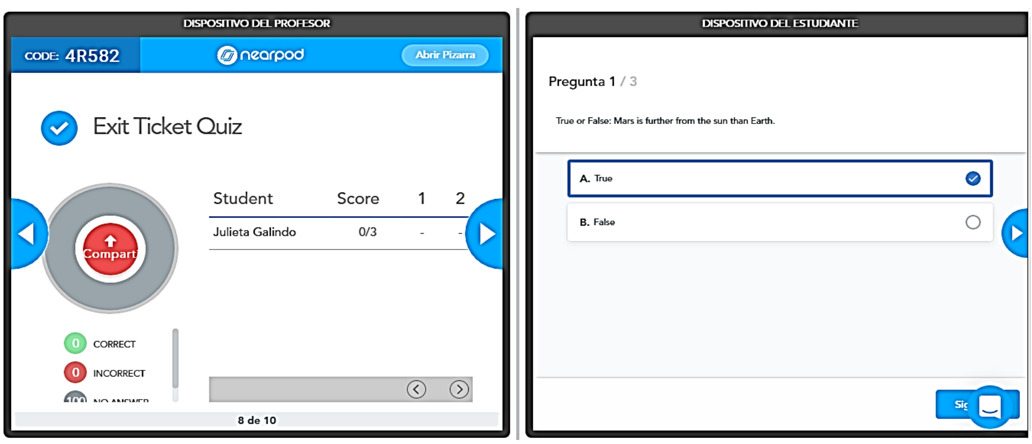
Buscando pares

La idea de esta actividad es matchear dos figuras, las cuales pueden ser imágenes o texto. Bastante similar al Memotest planteado al final, muestra cruces cuando el emparejamiento es incorrecto y tildes cuando es correcto.

Completar los espacios

El organizador escribe un texto, con variadas posibilidades de fuente de letra y colores de fondo. Posteriormente se clickea sobre las palabras del texto para transformarlas en espacios en blanco y luego los estudiantes se encargan de ubicar aquellas palabras en el lugar correcto.

Tablero colaborativo



a) b)

Figura 2.7. Vista previa de los dispositivos: a) del profesor; b) del estudiante en Nearpod

Allí el docente plantea un enunciado y los estudiantes pueden compartir sus textos y/o imágenes con el resto de la clase en tiempo real, donde es posible ver a la vez las producciones de sus compañeros. Los alumnos pueden conectarse al tablero con un código o un link predeterminado.

Lo destacado de la plataforma es que permite realizar un seguimiento de cada alumno en tiempo real. Es posible seguir la evolución y el aprendizaje de los estudiantes durante su clase, incluso compartir la pantalla de un alumno con la clase. En la Figura 2.7 se muestra, a modo de ejemplo, la vista previa del dispositivo del profesor (a) y del estudiante (b) a la vez, en una pregunta tipo cuestionario.

Además, luego de las actividades permite visualizar un resumen general del desempeño de los estudiantes y un detalle en particular de cada uno de ellos, como se expone en la Figura 2.8.

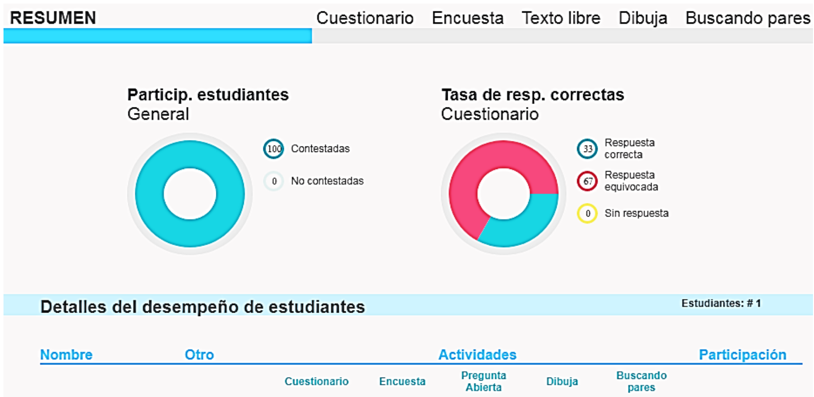


Figura 2.8. Resumen de la participación y el desempeño estudiantil en Nearpod

Kahoot

Figura 2.9. Verdadero o Falso en Kahoot

Esta plataforma ofrece la posibilidad de realizar presentaciones que incluyan cuestionarios de dos tipos: *Multiple Choice* y *Verdadero o Falso*, a modo de "concurso". En ambas es posible establecer un límite de tiempo y una cantidad de puntos a asignar por acertar la respuesta. En este caso, la aplicación posee una configuración de idiomas para poder escoger el nuestro.

A la vez, permite adjuntar una imagen, un gif o un video (con link de YouTube) para acompañar la pregunta en cuestión.

Se adjuntan a continuación imágenes (Figuras 2.9 y 2.10) a modo de ejemplo de las dos clases de quiz disponibles en la app.

Figura 2.10. Multiple Choice en Kahoot

Algo a destacar en esta aplicación frente a otras es que al finalizar el cuestionario se expone un podio con los primeros tres puestos de acuerdo a los puntajes obtenidos a lo largo del juego, lo que le brinda un mayor tinte lúdico a la propuesta, como se muestra en la Figura 2.11.

Figura 2.11. Podio final en Kahoot

EDPuzzle

Como ya se planteó en la Tabla 2.1, la principal destreza de EDpuzzle es que permite recortar los recursos audiovisuales en una misma aplicación, añadir comentarios, preguntas en diferentes formatos para ser respondidas por los estudiantes y todo esto en medio de la reproducción del video de acuerdo al contenido de cada tema.

A continuación, se describen y explican las herramientas de edición que ofrece la plataforma:

- *Selección del video.* El proceso de búsqueda se simplifica si se tiene claro cuál es el objetivo del video. Para agilizar el proceso es crucial tener en cuenta que hay recursos en la web, o simplemente seleccionar un video propio. En la opción de "descubrir" podemos filtrar por asignatura, nivel de grado, país o fuente (Figura 2.12). Además, poder buscar ciertos videos de YouTube.

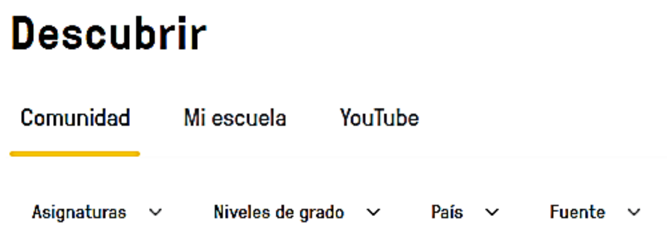


Figura 2.12. Maneras de elegir un video a seleccionar en EDPuzzle

- *Crop / Corte*. Esta opción permite seleccionar la parte del video que queremos utilizar (Figura 2.13). Solo se puede seleccionar una parte del video. Para ello debemos seleccionar las astas rojas. Se ha de tener en cuenta que la porción del video tiene que ser lo suficientemente grande para desarrollar el contenido.

Figura 2.13. Recorte de un video en EDPuzzle

- *Record an audio track / Doblaje*. Esta opción sirve para hacer el doblaje del video en nuestro idioma o realizar la interpretación del contenido mediante las propias palabras y un enfoque propio. Esto es posible en la totalidad del video. Al hacer el doblaje se pierde todo el sonido del video y por ello es aconsejable utilizar otro dispositivo externo para la reproducción de la música de fondo.
- *Audio-Notes / Notas de audio*. Es la opción más flexible. Pueden usarse como soporte a alumnos con problemas de lectura. Está permitido agregar audios de aclaraciones claras y concisas, hacer una pregunta o reflexión, llamar recuperar la atención, proponer

actividades o desafíos en cualquier momento del video. Cuando estas se reproduzcan el video estará en pausa.

- *Quizzes / Preguntas*. Esta opción permite verificar si el estudiante ha comprendido el contenido desarrollado, así como generar propuestas de trabajos. Se pueden incluir en cualquier parte del video. Hay tres tipos: pregunta abierta, cuyo objetivo es que el estudiante desarrolle su respuesta (incluso también a modo de audio); pregunta de tipo opción múltiple, donde el estudiante tiene que elegir la o las respuestas correctas; y pregunta tipo comentario, un recurso escrito que puede ir acompañado de imágenes e hipervínculos (links).

En la Figura 2.14 se muestra, a la izquierda, los distintos tipos de preguntas que se realizan a lo largo del video, junto con el minuto en el cual se presenta. A la derecha, la manera de responder. Además, en el video se visualizan punteos en los momentos que ocurrirá un cuestionario.

Figura 2.14. Preguntas durante un video en EDPuzzle

Se considera que, gracias a las diferentes herramientas y opciones que presentan, los cuatro recursos ofrecen una versatilidad en cuanto a contenidos a abordar, en particular en educación secundaria en Matemática, lo cual nos incumbe en este estudio.

4.2. Formas significativas de implementación

En este apartado se encuentran dos sub-divisiones correspondientes a las categorías de análisis presentadas en el apartado 3.2. La primera de ellas, referida a la aplicación de los recursos tecnológicos para cada tipo de evaluación, y la segunda más propiamente de la innovación que se presenta en el proyecto, es decir, las secuencias didácticas diseñadas para evaluar con TIC en Matemática.

4.2.1. Tipos de evaluación

Según las distintas herramientas exploradas, se reflexiona acerca de la posibilidad de implementar distintos tipos de evaluación con cada uno de los recursos. Puede ocurrir que más de uno se adecúe al mismo tipo de evaluación.

Evaluación diagnóstica

Para realizar una evaluación diagnóstica a todo el curso, se considera adecuado la utilización del *tablero colaborativo* que ofrece la plataforma *Mentimeter*. Se pueden plantear preguntas para que los estudiantes brinden respuestas cortas o elaboradas con lo que recuerden de cierto contenido/concepto, e incluso añadir imágenes. A partir de lo obtenido, se podrá analizar cada respuesta junto con el alumnado y así recoger información que permita al docente marcar un punto de partida para emprender un proceso de aprendizaje, objetivo principal de la llamada evaluación diagnóstica.

A la vez, con la plataforma *Nearpod* es posible realizar el mismo tipo de actividad con la particularidad de que allí se brinda un seguimiento individual de los estudiantes (no solo grupal general, como lo planteado en Mentimeter).

Por otro lado, otra herramienta útil para este tipo de evaluación es la *nube de palabras* que encontramos en Mentimeter. Se trata de una representación gráfica de texto, basada en el número de veces que se repiten las palabras, haciendo que estas aparezcan destacadas en la representación, generalmente con un tamaño mayor o un color diferente (Martínez, 2020). Esta actividad, en la que los alumnos puedan aportar palabras que se relacionen con un concepto determinado, puede llevarse a cabo antes de la explicación de cierto contenido, pues la finalidad que se quiere perseguir es la evaluación diagnóstica. Es decir, se pretende realizar un análisis a raíz de los preconceptos de los estudiantes, fomentando la discusión en el alumnado y la aportación de argumentos para sostener las razones por las que ellos mismos habían incluido las palabras de la nube.

Evaluación continua

De acuerdo a lo presentado en el apartado 2.2, la evaluación formativa hace referencia a una evaluación continua de los aprendizajes. Es decir, se valoran más los procesos que los resultados. Aquí se presentará una opción de instrumento de evaluación innovador para utilizar a lo largo del trabajo de cierta unidad didáctica con el objetivo de reforzar conceptos.

Con la plataforma *EDPuzzle* es posible, como ya se ha mencionado anteriormente, crear y editar *videos*. En primer lugar, está la opción que el alumnado ingrese con su cuenta de Classroom y allí visualizar las clases y videos. En caso contrario, se crean las clases manualmente y se asigna un código de acceso para cada una. Se pueden crear o elegir videos pre-establecidos como tarea donde los estudiantes deban poner en juego lo que aprendieron, respondiendo preguntas a medida que va avanzando el tiempo.

Co-evaluación

EDPuzzle también se la considera una herramienta muy útil para realizar co-evaluaciones. Es posible establecer, a modo de trabajo práctico o proyecto integrador, una actividad grupal en la que los alumnos deban crear sus propios videos (por ejemplo, un problema de aplicación) e incluir cuestionarios dentro de ellos (multiple choice, preguntas abiertas). Luego, se podrán intercambiar los videos con otros grupos para responder a aquellas preguntas, a la vez que juzguen la creación de sus compañeros con criterios consistentes (contenido, vocabulario matemático, estética, formulación de preguntas, maneras de mejorarlo, etc.). Finalmente se evalúa tanto el trabajo inicial, como la evaluación de sus compañeros.

Por otro lado, la plataforma *Kahoot* también se adapta a este tipo de evaluación. Con ella es posible que los mismos alumnos creen sus propios juegos en grupo, para luego intercambiarlos entre ellos y así co-evaluarse con respecto a la formulación de las preguntas establecidas con criterios consistentes, ya sea a modo de Verdadero o Falso o Multiple Choice. Esta aplicación tiene un tinte lúdico ya que se basa en un formato de “concurso”, lo cual otorga mayor motivación a este tipo de actividades. Finalmente, tal como se dijo antes, el docente evalúa tanto el trabajo inicial, como la evaluación de sus compañeros. En este caso, también se dará lugar a que el resto del curso pueda participar en los juegos creados.

Evaluación sumativa

A través de la plataforma *Nearpod*, se puede crear una *combinación de actividades* diversas a modo de evaluación sumativa (intercalando entre encuestas, preguntas abiertas, completar espacios, memotest, dibujos, etc.). El profesor puede acceder a los resultados de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas, lo que le permite identificar los puntos débiles en el aprendizaje de sus alumnos y redirigir, reorganizar la docencia durante el curso. Además, poder establecer, de manera innovadora, el grado de consecución que un alumno ha obtenido en relación con los objetivos fijados para una área o etapa, siendo esta la principal función de la evaluación sumativa.

Algo que resulta altamente favorecedor es que en esta plataforma el profesor tiene acceso a un informe final de la actividad individual de cada alumno, donde se muestra el número de estudiantes que participaron, el tanto por ciento de participación y de respuestas correctas.

Autoevaluación

Se considera que para realizar actividades de autoevaluación es adecuada la herramienta de *escala de respuestas* que ofrece la plataforma Mentimeter. Allí, es posible incluir variadas opciones en cuanto al desempeño de los estudiantes, para que ellos mismos puedan "mover la barra" y autoevaluarse, juzgar sus logros y actitudes respecto a una tarea determinada o a lo largo del tratamiento de cierto contenido. En general a los estudiantes les cuesta poner en palabras cómo ha sido su propio desempeño, con lo cual en este caso ya tener un repertorio de opciones resulta favorecedor para que puedan expresarse.

4.2.2. Secuencias didácticas

En este apartado se exponen diseños de cinco secuencias didácticas con el propósito general de evaluar significativamente con recursos tecnológicos. Se tiene en cuenta lo analizado previamente con respecto a los tipos de evaluación más propicios/as a los cuales se adapta cada aplicación, y se indican para qué año aproximado de la educación secundaria están orientadas según el Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Santa Fe.

Secuencia 1

Contenido y año: Funciones, 2º.

Objetivos:

Obtener información y reflexionar acerca de los conocimientos previos de los estudiantes respecto al concepto de Función.

Tipo de evaluación: Evaluación diagnóstica.

Recurso a implementar: Tablero colaborativo de Nearpod.

Actividad: ¿Qué entienden por el concepto de "función"? Describir en palabras o con alguna imagen lo que recuerden al respecto.

Gestión:

Dentro de la plataforma Nearpod, el docente se dirige a la sección "Crea y Edita". Se dispone a seleccionar "Agrega una diapositiva" y allí el apartado "Actividades" (como se ha mencionado previamente en la descripción de los recursos). Dentro de esta, elige la opción "Tablero colaborativo" y se elige un diseño particular (con diferentes colores y tipos de fuente), además de añadir alguna imagen, ya sea para orientar a las respuestas o simplemente para brindarle un tinte "amigable" a la propuesta, como se muestra en la Figura 2.15 (arriba a la izquierda):

Figura 2.15. Tablero colaborativo (Nearpod)

Una vez escrito el título y sub-título del enunciado, y el diseño, se da click en "Guardar", y luego en "Guardar y salir" (es posible también obtener una vista previa del estudiante).

A continuación, para llevar a cabo la propuesta, el docente se posa sobre la actividad previamente diseñada y selecciona la opción "Participar en vivo". Así, la plataforma brinda un código de acceso y un link, como el que se muestra en la Figura 2.16, el cual se puede compartir por e-mail, Classroom, Remind, o simplemente dictarles a los estudiantes para que puedan ingresar.

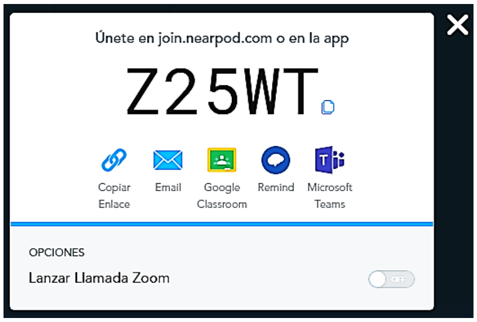


Figura 2.16. Código y link de acceso (Nearpod)

A continuación, los alumnos ingresan a través de "join.nearpod.com" y escriben el código previamente brindado. Al hacerlo, la página pide un nombre completo y un apodo opcional.

Vale aclarar que, de parte del profesor, está la opción de dejar ocultos los nombres de los alumnos que brindan cada respuesta, lo que les puede generar mayor seguridad. A pesar de eso, el docente sí puede visualizar la autoría de cada elaboración, lo que permite una evaluación diagnóstica más individual (a diferencia de Mentimeter).

A la vez, previo a comenzar, el docente tiene la opción de aprobar o no los comentarios de los estudiantes antes de que se muestren, algo que puede evitar que escriban chistes fuera de lugar y/o cuestiones que nada tengan que ver con la consigna en sí, lo cual puede distraer al resto del alumnado.

En la Figura 2.17 se muestra un posible tablero final con las respuestas de los estudiantes.

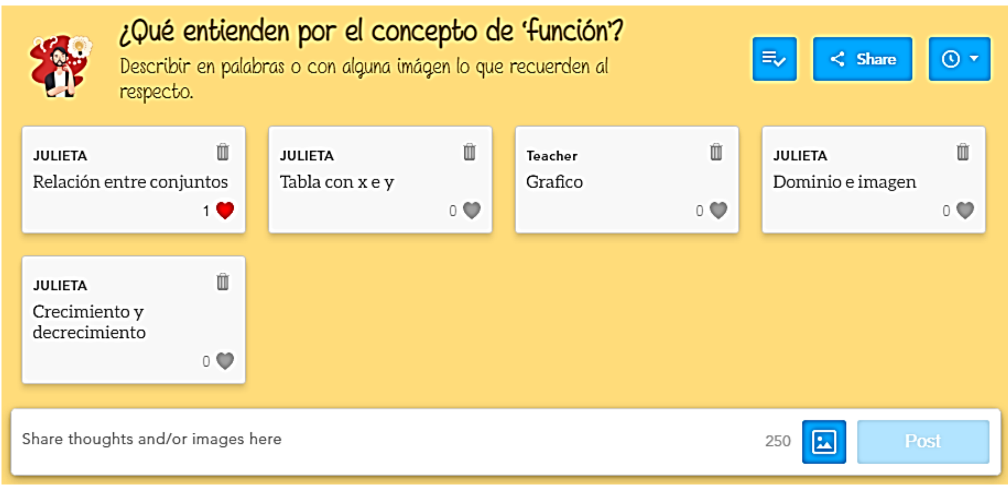


Figura 2.17. Ejemplo de tablero con respuestas de estudiantes

Cuando ya todos hayan hecho sus aportes, se propone a los estudiantes que den click en "me gusta" a la respuesta que consideren más cercana a la definición propia de función. De esta manera también se evidencia el carácter "colaborativo" de la actividad, al nutrirse de respuesta de otros que consideren más acordes a lo que se pide.

Luego, se analizan una por una las respuestas brindadas, sin dejar pasar aportes estudiantiles y valorar todas las producciones. Con cada una se realizan preguntas, que todos puedan responder, con el objetivo de lograr orientarlos y terminar concluyendo, entre todos, el concepto de función y sus principales características. Por ejemplo, en la primera respuesta que se brinda: "Relación entre conjuntos" se recomienda preguntar: *¿Relación entre cuántos conjuntos? ¿Cómo se denominan? ¿Qué características deben poseer?*, y a través de ellas, también poder relacionar con otros aportes estudiantiles.

En esta actividad se evalúa tanto la participación estudiantil (escrita y oral, siendo partícipes del debate que se genere) como la calidad de sus respuestas y la capacidad de evaluar las respuestas de otros.

Secuencia 2

Contenido y año: 2º.

Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas.

Clasificación de sistemas según su conjunto solución y representación gráfica.

Métodos analíticos de resolución.

Objetivos:

Evaluar integralmente el contenido señalado a través de actividades diversas.

Tipo de evaluación: Evaluación sumativa.

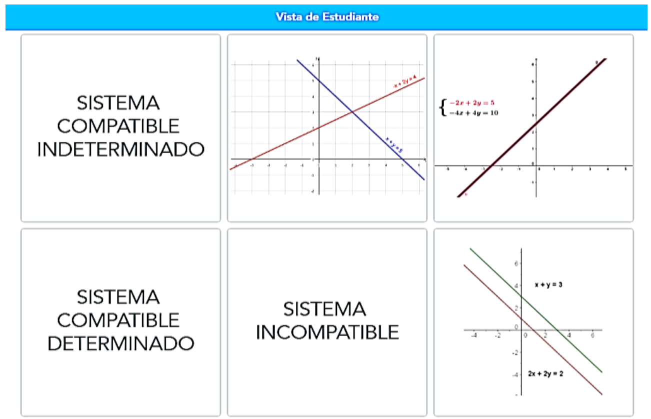
Recurso a implementar: Combinación de actividades en Nearpod.

Gestión:

El docente ingresa a la plataforma Nearpod, y a la hora de "Crear y Editar" se dispone a añadir distintas diapositivas, las cuales se corresponden con diversas actividades para evaluar el contenido Sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas. Las mismas se presentan a continuación, con algunas imágenes incluidas de la vista del estudiante:

1. ***Buscando pares***

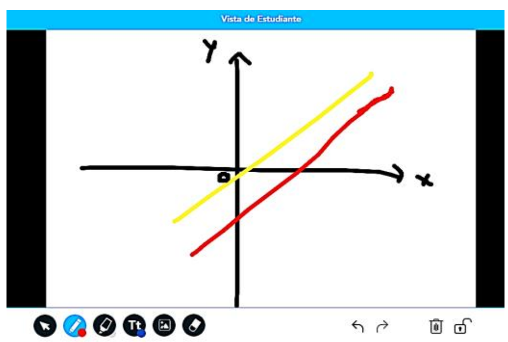
Consigna: “Seleccionar un tipo de sistema y seguidamente su representación gráfica, para unir los pares”.



2. ***Dibujo***

Consigna: “Graficar un sistema cuyo conjunto solución sea S={}”.

Ejemplo de una posible resolución estudiantil:



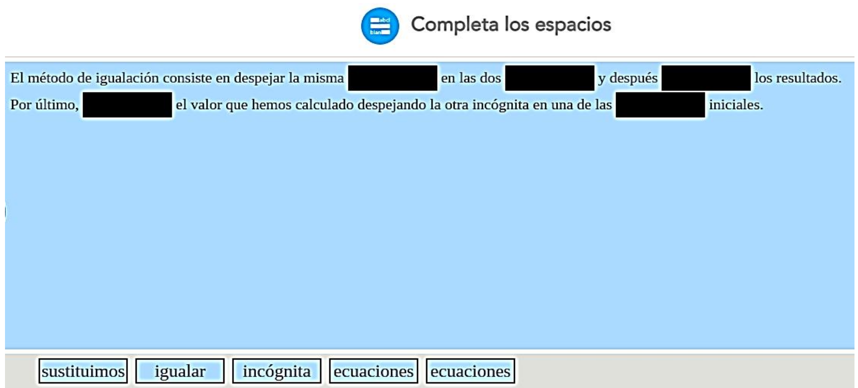
3. ***Dibujo***

Consigna: “Graficar un sistema cuyo conjunto solución sea S={(2,3)}”.

4. ***Dibujo***

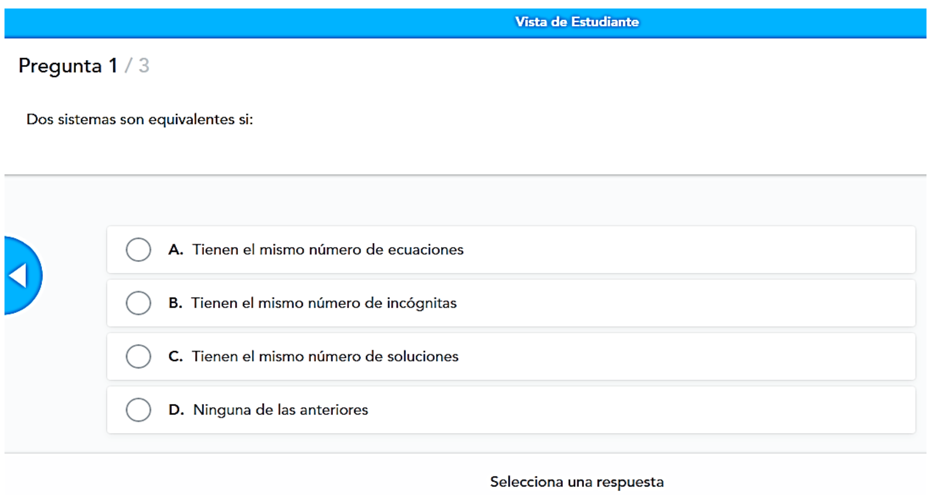
Consigna: “Graficar un sistema cuyo conjunto solución sean infinitos pares ordenados”.

5. ***Completar los espacios***



6. *Cuestionario* (3 preguntas formato Multiple Choice).

Ejemplo de una de ellas:



7. ***Pregunta abierta***

Consigna: "Traducir la siguiente situación como un sistema de ecuaciones: La suma de dos números es 12 y la mitad de uno de ellos el doble del otro".

8. *Dibujo*

Consigna: "Resolver el anterior sistema por el método que consideres más conveniente. Escribir tu resolución".

Al mismo tiempo que transcurre la evaluación, el docente puede visualizar las respuestas de los estudiantes y, al finalizar, accede a un resumen de los resultados obtenidos, lo cual resulta altamente favorecedor para una evaluación sumativa.

En alguna clase siguiente, el profesor se encargará de realizar una puesta en común de lo realizado, para poder debatir y establecer cuáles eran las respuestas esperadas y por qué.

Secuencia 3

Contenido y año: Función cuadrática, 3º.

Objetivos:

Construir actividades en base a lo aprendido previamente.

Co-evaluar a sus pares de manera consciente y fundamentada.

Tipo de evaluación: Co-evaluación.

Recurso a implementar: Kahoot.

Gestión: Previo a la realización de esta actividad, se sugiere que el docente brinde un ejemplo concreto de algún juego utilizando esta plataforma, para que los estudiantes se hayan familiarizado con ella, con sus herramientas y su funcionamiento.

El docente comparte el pin que, como varía en cada ocasión, no se podrá plasmar uno específico aquí. En su lugar, se adjunta el link del juego que se utilizará a modo de ejemplo con los alumnos: Juego Ejemplo.

Luego de que los alumnos ingresen a la página, escriban sus nombres y confirmen que los ven todos en pantalla, se inicia el juego. El docente lee todas las preguntas en voz alta a medida que vayan apareciendo. Al finalizar, felicita a todos los que hayan quedado "en primer lugar" en el podio y se continúa con la actividad del día.

El docente guía a los alumnos desde el proyector para que ellos puedan crear su propio juego. Explica que son posibles dos formatos: verdadero o falso, o múltiples respuestas. Además, que se pueden añadir imágenes como la que vieron en el ejemplo, que pueden utilizar lenguaje matemático, y también asignarle un tiempo límite a cada pregunta, dependiendo de su dificultad.

Se sugiere que los estudiantes se dividan en grupos de 3 o 4 integrantes y elaboren un juego de mínimo 5 preguntas. El docente brinda algunas señalaciones en la pizarra:

- Traten de integrar todos los conceptos que vimos en estas clases de función cuadrática.
- Tengan en cuenta el nivel de dificultad: ni muy fácil ni demasiado difícil.
- No olviden el tiempo límite adecuado para cada pregunta.
- Para hacerlo más completo pueden: añadir imágenes de Kahoot, imágenes de internet (alguna captura de GeoGebra ¿por qué no?), links a YouTube, etc.
- Imprescindible utilizar el lenguaje matemático adecuado y por supuesto ¡buena ortografía!

Se les dará entre 30-35 minutos para que cada grupo cree su juego. En ese proceso, el docente pasará por los bancos a responder dudas e inquietudes que puedan surgir, además de tratar de orientarlos con las preguntas que estén pensando.

A continuación, se indica que todos les envíen sus juegos al grupo que tengan al lado, quienes van a corregir las preguntas que hayan hecho. Pero con la aclaración de que no se buscan simplemente cruces o tildes, que se pretende una evaluación con criterio, con alguna devolución que les permita a sus compañeros darse cuenta por qué está bien o está mal lo que preguntaron. Se les señala que tengan en cuenta los criterios que se escribieron previamente en el pizarrón. Además, que pueden guiarse clasificando con "alto, medio o bajo" el nivel de verificación de cada uno de ellos. Aunque lo principal es una devolución fundamentada. Después van a entregar ambas cosas: sus juegos y, aparte, la hoja donde hayan escrito la devolución, aclarando el Grupo al que corrigieron.

Luego de ello, se destina tiempo a jugar a los juegos que los estudiantes confeccionaron. Se aclara previamente que tanto el grupo que hizo el juego como el que lo corrigió no podrán participar en aquel turno ya que sabrán las respuestas correctas. Análogamente con el resto de los juegos.

Se felicita a los que hayan obtenido mayor puntaje, pero aclarando que el mayor trabajo ha sido la construcción de los juegos y su consecuente devolución por pares, siendo eso lo que más valorará el docente en el proceso de evaluación.

Secuencia 4

Contenido y año: Números racionales e irracionales, 3º.

Tipo de evaluación: Evaluación formativa.

Recurso a implementar: EDPuzzle.

Actividad: Reproducir el video y a partir de él responder a las preguntas que allí se van presentando.

Gestión:

El docente ingresa a la plataforma EDPuzzle y escoge uno de los videos que más se adecúe al contenido que se pretende impartir, en este caso los números racionales e irracionales. Una vez hecho esto se dispone a editarlo para añadir preguntas abiertas o Multiple Choice a medida que este va avanzando. Al finalizar se presiona "Finish" y se puede compartir a los estudiantes con un link.

Esta actividad se plantea a modo de tarea a los estudiantes, para que visualicen el video en sus casas y así construir y/o reforzar aquellos conceptos, logrando que presten atención ya que las preguntas se incluyen ahí mismo.

Se adjunta aquí el link a la actividad.

Luego de eso, en la clase, ya sea virtual o presencial, se repasará acerca de lo que se vio, fomentando el debate para también así comprobar qué grado de comprensión se obtuvo.

Secuencia 5

Tipo de evaluación: Autoevaluación.

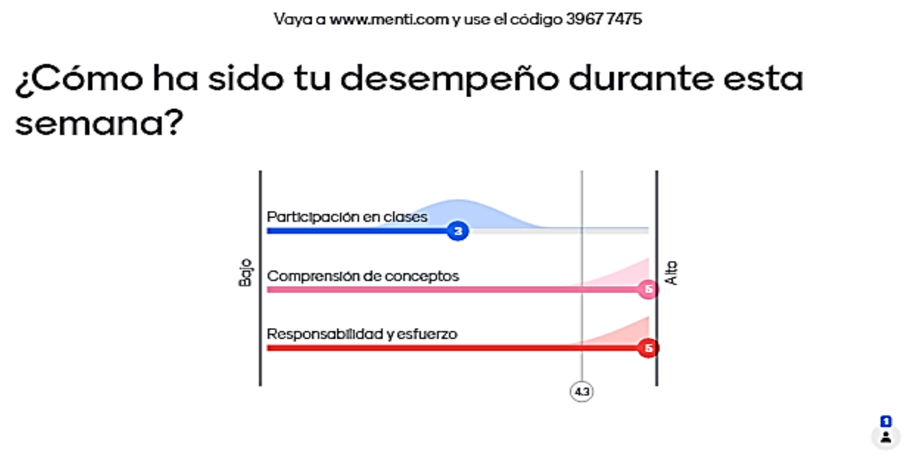
Recurso a implementar: Escala de respuestas en Mentimeter.

Actividad: ¿Cómo ha sido tu desempeño durante esta semana?

Gestión: Dentro de la plataforma Mentimeter, el docente elige crear una nueva presentación y, después de asignarle un título, selecciona la herramienta “Escala de respuestas”.

Luego, procede a redactar la pregunta y las posibles opciones. Al utilizarla como una herramienta de autoevaluación, una propuesta de pregunta inicial es: *¿Cómo ha sido tu desempeño durante esta semana?* Se puede modificar el tiempo por el último mes, o el último trimestre, dependiendo de qué período se quiera evaluar. Las opciones se basan en distintos puntos clave del trabajo áulico, los cuales, con base en la concepción de evaluación previamente descripta, pueden establecerse como sigue:

- Participación en clases (tanto oral en la producción de conocimientos e instancias de debate, como individual en la resolución de ejercicios/problemas).
- Comprensión de conceptos (nivel de entendimiento de los contenidos).
- Responsabilidad y esfuerzo (realización de actividades, carpeta completa, atención en clases).



Se elige una escala del 1 al 5, siendo el 1 el nivel más bajo y el 5 el nivel más alto con el cual autoevaluarse. Al finalizar, se comparte el código o enlace de votación con los estudiantes, quienes deben ingresar a www.menti.com y escribir aquel código de ingreso.

El docente se encarga de explicitar oralmente en qué se basan aquellas cuatro opciones para que los estudiantes tengan un criterio suficiente.

A partir de los resultados brindados, el profesor puede establecer una relación entre aquellos valores y el seguimiento estudiantil semanal que posee, para verificar en qué medida condice lo que ellos plantearon con lo ocurrido durante las clases. Realizar este tipo de actividades regularmente fomenta una rutina de una reflexión sobre las actividades realizadas y el aprendizaje matemático adquirido.

5. Conclusiones

En esta sección se presentan, mediante tres apartados, las conclusiones obtenidas a partir del estudio abordado en este proyecto innovador. En el primero de ellos se da respuesta a los interrogantes de investigación de acuerdo a los hallazgos obtenidos. En el segundo apartado se relacionan los resultados con otros estudios similares que se han reportado en el estado de conocimiento del tema. Por último, se explicita en qué sentido este estudio resulta un proyecto innovador y qué otras posibles líneas de investigación se desprenden.

5.1. Respuesta a interrogantes de investigación

A continuación, se dará respuesta a los interrogantes de investigación planteados en el apartado 1.2. En relación con *¿Qué recursos tecnológicos resultan de interés a la hora de utilizarlos como instrumentos de evaluación en la virtualidad?*, se puede decir que algunos de los recursos que son de utilidad en este campo son: Nearpod, Kahoot, EDPuzzle y Mentimeter, por su versatilidad en cuanto a contenidos matemáticos y niveles de escolaridad, y variedad de herramientas disponibles, especificadas en el apartado 4.1.1 (nubes de palabras, escalas de respuestas, dibujos, preguntas abiertas, videos, entre otras). Estas, incluso, pueden ser combinadas, mediante presentaciones a modo de evaluación con diversidad de actividades a realizar, las cuales nos pueden brindar más información acerca del conocimiento adquirido que simplemente el típico formato de *Multiple Choice* (muy frecuente en entornos virtuales, como se comentó en el apartado 1.1). De esta manera se muestra que no es la única opción posible para evaluar virtualmente. Además, el uso de estos recursos en las secuencias didácticas diseñadas puede clasificarse como transformador, ya que a través de la tecnología se logra que el estudiante sea el centro del aprendizaje en la construcción del conocimiento.

Sin embargo, aquellos son solo algunos recursos que se han seleccionado para el presente estudio. Vale aclarar que existen muchos más que no han sido analizados particularmente aquí.

En relación con *¿De qué manera el docente puede implementarlos significativamente en aquel momento de la clase?*, se puede decir que, en primer lugar, es recomendable que el profesor tenga en cuenta a qué tipo de evaluación desea apuntar y respecto a eso, qué clase de información pretende obtener. Una vez que lo tenga claro, gracias a los resultados obtenidos en el apartado 4.2.1, es posible analizar qué herramienta/s de cada recurso tecnológico resulta más adecuada para cada tipo de evaluación, y así encaminarse a llevarlas a cabo. A partir de ello se han diseñado ciertas secuencias didácticas con el objetivo, justamente, de responder a este interrogante de investigación. Es decir, de establecer algunas maneras en que el docente pueda implementar aquellos recursos tecnológicos significativamente a modo de evaluación en el aula, con ejemplo en algunos contenidos matemáticos específicos, con sus respectivas actividades. Estas secuencias pretenden personalizar el proceso de enseñanza tanto en ambientes virtuales como en presenciales, a través de la participación activa de los estudiantes, a quienes se procura motivarlos mediante la implementación de recursos innovadores para este tipo de prácticas.

5.2. Vinculación con estudios reportados en antecedentes

En esta sección se relacionan los hallazgos obtenidos con otros estudios similares que se han reportado en el apartado 1.4, es decir, en el estado de conocimiento del tema.

En Valles-Pereira y Mota-Villegas (2019) se diseña una secuencia didáctica en la que se utiliza el recurso tecnológico Kahoot a modo de evaluación sumativa, para validar conocimientos adquiridos en relación con la Teoría de Conjuntos. En el apartado 4.2.1, en cambio, se muestra que además esta plataforma tiene rasgos que propician establecer un trabajo de co-evaluación entre el alumnado, abarcando así una "doble actividad". Aquí se supone un análisis más amplio en el sentido de intentar realizar conexiones entre los distintos tipos de evaluación y los recursos que resultan más pertinentes para cada uno de ellos. En Valles-Pereira y Mota-Villegas (2019) lo que se propone, si bien no es cambiar de forma radical la manera de evaluar, al menos pretende hacer de esta actividad algo agradable y motivante para el estudiante. Es decir, su estudio se centra exclusivamente en la evaluación sumativa.

Aquella investigación resulta ser de las primeras en el campo de la Educación Matemática con Kahoot, lo que les otorgó mayor interés a los autores en estudiar este fenómeno. Como diferencia, la experiencia se contextualiza en una Universidad de Ecuador, en comparación al presente proyecto, el cual se enmarca en educación secundaria. Además de la secuencia diseñada, aquel estudio arroja resultados acerca de la aceptación de los estudiantes del recurso lúdico Kahoot, lo cual en términos generales es ampliamente favorable. Esto brinda la idea de que más allá de cuál sea el nivel educativo al que se apunte, este componente lúdico que otorga la plataforma es, en general, un factor motivante y atractivo, en contraposición al examen tradicional como "prueba escrita".

Por otra parte, en Parra et al (2017) utilizan la aplicación Socrative como herramienta de evaluación (esta vez también como evaluación sumativa) y estudian la manera en que esta influye en la participación en el aula de Universidad. Establecen, en principio, una descripción de la herramienta con sus ventajas y beneficios, así como se expresa en nuestra Tabla 2.1. En el caso del presente proyecto no se incluye aquella plataforma por portar características similares con otras de las exploradas, en particular con Nearpod. Al igual que en esta última, en Socrative el docente puede consultar a posteriori el resumen estadístico con los porcentajes de “éxito” en cada pregunta y de cada alumno. Al intentar hacer un análisis más diverso aquí se decide aportar al análisis cuatro recursos que nos otorguen diversidad de herramientas.

Por último, en Coa-Mamani (2018) se estudia el aprendizaje experiencial y la aplicación EDpuzzle en la solución de problemas contextualizados, en específico del tema sistemas de ecuaciones, de nuevo en el contexto de una Universidad, en este caso privada. En principio se describen los beneficios de la plataforma, así como las particulares herramientas de edición que ofrece, con el paso a paso en la creación de un video, según se expone en el apartado 4.1.1. En aquel estudio se lleva a cabo la denominada metodología del aula invertida, la cual es de tipo semipresencial y propone transferir parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje a un entorno que no sea el aula (Bermann y Sams, 2009). Los beneficios de esta metodología al utilizar esta herramienta se deben a que el aprendizaje es individual, autodirigido e independiente del lugar donde esté debido a la ayuda del soporte audiovisual de videos editados, audios o lecturas, entre otros (Coa-Mamani, 2018). Se considera una muy buena opción, que de hecho arrojó resultados positivos con el alumnado, además de la presente propuesta en la que se enmarca al recurso EDPuzzle como parte de la evaluación formativa. En ambos trabajos se propone una actividad donde se les envía a los estudiantes el link del video de la plataforma, con diferentes tipos de preguntas para que el estudiante a medida que vaya avanzando pudiera ir dando respuesta.

En otros de los estudios expuestos en el apartado 1.4, como Goded (2006) o Canulli y Sgreccia (2014), se proponen diversos instrumentos de evaluación alternativos a los tradicionales, pero pensados para un contexto de educación presencial. Estos, a veces sin explicitarlo en concreto, pueden corresponderse a los distintos tipos de evaluación a los que se busca apuntar en este estudio. A modo de ejemplo, el denominado Diario de los alumnos podría adaptarse semanalmente o luego de cierta Unidad Didáctica con la herramienta Pregunta abierta de Nearpod, donde los estudiantes pueden expresarse libremente, escribir sus propios logros y dificultades en ese tiempo de trabajo, siendo así como una autoevaluación.

Como conclusión, en cuanto a los recursos analizados, Kahoot y EDPuzzle se corresponden con las investigaciones halladas, mientras que no se hace referencia a Nearpod y

Mentimeter al menos en aquellos estudios. Todos ellos en principio realizan una descripción de la plataforma escogida, ya sea exponiendo sus ventajas, beneficios y/o enumerando su variedad de herramientas, algo que se expresa aquí en el apartado 4.1. Luego, en general, presentan una propuesta didáctica a llevar a cabo con aquel recurso, la cual experimentan con un grupo de alumnos en particular para analizar los efectos que produce. En general se centran en un mismo tipo de evaluación, y en la mayoría de los casos se refieren a una evaluación sumativa. En este proyecto, en cambio, se diseñan cinco secuencias didácticas diferentes que buscan atender a establecer autoevaluaciones, co-evaluaciones, evaluaciones formativas y sumativas, con el propósito de articular las características propias de cada una de ellas con los recursos tecnológicos escogidos en principio. Dados los hallazgos de aquellas investigaciones, se infiere que las posibles experiencias mediante las propuestas de la sección 4.2.2 en un aula de Matemática serán altamente positivas.

5.3. Aportes innovadores y posibles líneas de investigación

Tal como se afirmó en el apartado 1.1, en las evaluaciones del contexto de la enseñanza virtual primaban las pruebas escritas, con la particularidad de sumar cámaras en la mayoría de los casos con el objetivo típico de "vigilar que no se copien". Otra opción ha sido el cuestionario en formato Multiple Choice, en general con opciones únicas y acabadas que no ofrecen respuestas significativas acerca del conocimiento adquirido por los estudiantes.

A raíz de este contexto, la innovación de este proyecto radica justamente en desmitificar la visión de la evaluación como prueba individual, única y presencial, a través de las secuencias diseñadas en el apartado 4.2.2. En el caso de que esta sea virtual, lograr dar a conocer que hay una multiplicidad de actividades disponibles, las cuales no solo dependen del instrumento tecnológico que se utilice, sino también por analizar los distintos momentos para evaluar. Es decir, no solo interesarse en la evaluación sumativa (tal como en la mayoría de las investigaciones expuestas) sino atender a los diferentes tipos de evaluación, y analizar qué aportes brindan los recursos (instrumentos) seleccionados.

A partir de todo lo investigado y analizado, surge pensar en posibles futuras líneas de investigación que se desprenden en el área.

Una de ellas es pensada en específico en el contexto de la presencialidad y en la posible implementación de las secuencias didácticas diseñadas, en sintonía con el trabajo de Canulli y Sgreccia (2014): *¿cuáles son los comportamientos, actitudes y valoraciones de los estudiantes durante y al finalizar el proceso de evaluación de un cierto contenido, a través de diferentes herramientas de evaluación?*

Otro de los interrogantes que surgen de este proyecto es: *¿qué habilidades cognitivo-lingüísticas emergen de la enseñanza y el aprendizaje de cierto contenido al aplicar los recursos tecnológicos mencionados?* Con estas habilidades se hace referencia a describir, definir, explicar, justificar, argumentar, etc. (De Jorba et al, 2000), cuyo análisis puede resultar de interés en este campo.

5.4. Cierre

La producción de este proyecto innovador en Educación Matemática fomenta, de acuerdo con la Declaración de la Conferencia Mundial de Educación Superior (1998), una formación en cuanto "ciudadanos bien informados y profundamente motivados, provistos de un sentido crítico y capaces de analizar los problemas de la sociedad, buscar soluciones para los que se planteen, aplicar estas y asumir responsabilidades sociales", y de esta manera transmitirlo y concientizar al resto de la ciudadanía.

Además, a partir del mismo se tiene la posibilidad de conocer y ahondar en líneas de acción para la evaluación en Matemática con recursos tecnológicos. Se ahonda en sus beneficios y las posibles maneras de llevarlos a la práctica de forma significativa, siendo estos recursos versátiles en cuanto a contenidos de la escolaridad secundaria. Como se mencionó al inicio del párrafo, se pueden establecer líneas de acción, las cuales se traducen en aquellas secuencias didácticas diseñadas en el apartado 4.2.2.

Más aún, a partir de este estudio se generan conocimientos para la formación de profesionales que estén en condiciones de proponer e implementar clases de Matemática no tradicionales. En particular, puede establecerse como una herramienta de formación docente, con el objetivo de informarse acerca de diversos recursos y a la vez conocer distintas formas de implementación, por supuesto adaptándolas según el contexto a trabajar.

Por otro lado, se avanza hacia "la configuración de una relación más activa con sus contextos" (CRES, 2008). La realización de este proyecto surge justamente en análisis del contexto vivido durante la pandemia, problematizando la temática de la evaluación en entornos virtuales, a partir de experiencias propias, de allegados y también de conferencias de otros países. Así pudo ser abordada una problemática que no solo afecta en lo individual, sino que es de aporte a la sociedad.

A modo de reflexión final considero imprescindible que como futuros docentes y en el marco de una universidad, comencemos a problematizar ciertas temáticas relativas a la Educación Matemática con el objetivo de intentar mejorar las prácticas de la enseñanza, siendo un campo en el cual nos vemos sumergidos a diario, incluso aun siendo estudiantes.

A la vez, resulta enriquecedor compartir estas investigaciones ya sea con compañeros (pares), docentes, y la comunidad en general, ya que a través de herramientas a la formación docente se contribuye a la sociedad.

Referencias bibliográficas

Barbera, E. (2016). Aportaciones de la tecnología a la e-Evaluación. *Revista de Educación a Distancia*, *50*(4), 2-10. https://revistas.um.es/red/article/view/24301.

Canulli, A. y Sgreccia, N. (2014). Comportamientos de alumnos de secundaria frente a diferentes herramientas de evaluación del contenido función afín. *Revista Números*, *86*, 51-78. http://sinewton.es/numeros/publicado-el-vol-86-de-la-revista-numeros/.

Coa-Mamani, D.E. (2018). *Aprendizaje experiencial y el EDpuzzle en la solución de problemas contextualizados de sistemas de ecuaciones de Matemática básica en estudiantes de una universidad privada 2018-I* [Tesis de Maestría]. Universidad Tecnológica del Perú. https://hdl.handle.net/20.500.12867/1554.

Córdoba, F. (2014). Las TIC en el aprendizaje de las Matemáticas: ¿Qué creen los estudiantes? En OEI (Presidencia). *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.* OEI. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3660.8482.

Fajardo, A., Freire, E., Medina L. y Ochoviet, C. (2020). Uso de recursos tecnológicos para enseñar matemática en la formación de profesores. *Revista Reloj de Agua*, (21), 17-26. http://ojs.cfe.edu.uy/index.php/rev_matematica/article/view/531.

Flórez-Pabón, E. (2020). Más allá de Zoom, Teams y Google Meet: en busca de la auténtica educación virtual. En *Ciclo de Conferencias en Educación Matemática.* GEMAD. http://funes.uniandes.edu.co/18286/.

Goded, P.A. (2006). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de Matemáticas. En Secretaría General de Educación (Ed.). *Enfoques Actuales en la Didáctica de las Matemáticas* (pp.187-220). Ministerio de Educación y Ciencia.

Guerrero, C.O. (2008). Educación Matemática Crítica. Influencias Teóricas y Aportes. *Revista Evaluación e Investigación*, *1*(3), 63-78. http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/27791.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill.

Lipsman, M. (2016). El enriquecimiento de los procesos de evaluación mediados por las TIC en el contexto universitario. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *7*(2), 215-222. https://revistas.uam.es/riee/article/view/3127.

Martínez, N. (2019). Mentimeter: Encuestas para el aula en tiempo real. *Biblioteca digital Observatorio de Tecnología Educativa, 9*. https://doi.org/104438/2695-4176_OTE_2019_847-19-121-5.

Martínez Martínez, N., Barceló-Doménech, J., Heras-García, M., Evangelio, R., Guilabert, M.R., Lamarca, C., y Serrano Sánchez, B. (2020). La aplicación "Mentimeter" para la creación de nubes de palabras y la dinamización de la explicación de conceptos jurídico-civiles. En *Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria* (pp.897-905). Universidad de Alicante. http://hdl.handle.net/10045/110128.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada.* https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf.

Muirhead, B. y Juwah, C. (2004). Interactivity in computer-mediated college and university education: A recent review of the literature. *Educational Technology & Society*, *7*(1), 12-20. https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.7.1.12.

Navarro, S. (2006). Efectos de la evaluación formativa virtual en el rendimiento académico. *Revista Innovación Educativa*, (16), 47-57. https://minerva.usc.es/xmlui/bitstream/handle/10347/4381/1/pg_047-058_inneduc16.pdf.

Parra, M.T., Molina, J.M., Sandoval, G., Milanovic, I., Casanova, G. y Castro, F. (2017). La aplicación SOCRATIVE como herramienta de evaluación y precursor de la participación en el aula. En R. Roig-Vila (Ed.). *Investigación en Docencia Universitaria* (pp.677-683). Octaedro. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/71188/1/Investigacion-en-docencia-universitaria_70.pdf.

Pintor, P. (2017). Gamificando con Kahoot en evaluación formativa. *Revista Infancia, Educación y Aprendizaje*, *3*(2), 112-117. https://doi.org/10.22370/ieya.2017.3.2.709.

Roldán, G.L. (2013). *Caracterización de la práctica docente mediada con TIC en el área de matemática en la básica secundaria y media de la Institución Educativa Débora Arango de la ciudad de Medellín* [Tesis de Maestría]. Universidad Pontificia Bolivariana. http://hdl.handle.net/20.500.11912/1128.

Sánchez, B.J. y Torres, J. (2009). Educación Matemática crítica: un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los ambientes de aprendizaje. En 10º *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. ASOCOLME. http://funes.uniandes.edu.co/708/.

Valles-Pereira, R.E. y Mota-Villegas, D.J. (2020). Kahoot aplicada en la evaluación sumativa en un curso de matemática discreta. *Revista Científica*, (37), 67-77. https://doi.org/10.14483/23448350.15236.

Zambrano, C., Guerrero, F. y Samaniego, J. (2017). ¿Cómo evaluar los aprendizajes en Matemáticas? *Revista mensual de la UIDE*, *2*(6), 35-51. https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183.

Conocimiento de los Graduados de Profesorado en Matemática de la UNR sobre el uso de Software para la Modelización Matemática

Knowledge of UNR Mathematics Faculty Graduates on the use of Software for Mathematical Modelling

Florencia Gonzalez
florenciabelengonzalez96@gmail.com

Resumen

Se presenta una investigación cualitativa en donde se pone especial atención en el conocimiento que tienen los graduados del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR sobre el uso de software matemáticos para la modelización matemática. Mediante un cuestionario vía email y al contar con una base de datos de todos ellos, se centra el estudio en ver qué conocen, cuáles, qué idea tienen de ellos, si los utilizan y para qué, qué lugar ocupan en sus clases, qué lugar le dan a la modelización, etc.

Una vez analizados los resultados, se piensan propuestas innovadoras para la utilización de estas herramientas en las aulas, para poder, entre otras cuestiones, fomentar el debate entre colegas, crear nuevas propuestas para llevar a las clases con la idea de presentar alternativas y fomentar el uso de estos recursos de manera más frecuente, en diversos temas y por qué no, en fusión con otras disciplinas.

Palabras clave

Modelización Matemática. Tecnologías de la Información y la Comunicación. Software matemático. Práctica Profesional Docente.

Abstract

Qualitative research is presented where special attention is paid to the knowledge that graduates of Profesorado en Matemática from UNR's Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura have about the use of mathematical software for mathematical modelling. Through a questionnaire via email and by having a database of all of them, the study focuses on seeing what they know, which ones, what idea they have of them, if they use them and for what, what place they occupy in their classes, what place give to modeling, etc.

Once the results have been analyzed, innovative proposals are thought for the use of these tools in classroom, to be able, among other issues, to encourage debate among colleagues, create new proposals to take to classes with the idea of presenting alternatives and fostering the use of these resources more frequently, in various topics and why not, in fusion with other disciplines.

Keywords

Mathematical Modelling. Information and Communication Technology. Mathematical Software. Professional Teaching Practice.

1. Presentación

A continuación, se presenta la problemática de este trabajo, al explicar detalladamente los motivos que llevan a investigar este tema, los objetivos tanto generales como específicos, el estado de conocimiento de las dos principales aristas de esta investigación: modelización matemática (MM) y software matemático (SM) y una síntesis de la misma al final de esta primera sección.

1.1. Problemática

La gran diversidad de software online que hay a disposición, algunos gratuitos y otros pagos, pero en la mayoría de los casos se encuentran al alcance de los docentes para utilizarlo en las clases de Matemática: *¿cómo se puede aprovechar la gran diversidad de software que hay a disposición en las prácticas docentes?* Para poder aprovecharlo en ellas es necesario poder contar con conocimientos para implementarlo adecuadamente en una clase de Matemática.

La formación inicial sobre el uso significativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): *¿qué enseñan en la formación inicial sobre las TIC que permita a los docentes utilizarlas en sus prácticas?* En el plan 2018 del Profesorado en Matemática, se avanzó en la incorporación de las TIC, debido a que se propone un taller llamado "Recursos Tecnológicos en Educación Matemática" en el primer año de la carrera. Es un gran paso para la formación de futuros docentes, pero esto no garantiza que sea suficiente para la carrera del docente en Matemática, sino que junto con la propia formación continua sobre el uso apropiado de las TIC puede alimentar las prácticas docentes y brindar una enseñanza más enriquecedora y motivadora a los estudiantes.

Las herramientas tecnológicas, en particular los softwares, pueden permitir propuestas alternativas a las clases tradicionales de manera que sean innovadoras, dinámicas y motivadoras en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de nivel secundario. Esto lleva a la siguiente pregunta: *¿qué herramientas se necesitan para llevar a cabo las clases de Matemática de manera dinámica y no caer en una clase tradicional?* Si bien esta pregunta puede relacionarse con el hardware (computadora, cámara, micrófono, celular o una buena conexión a Internet) que sin esas herramientas no podría desarrollarse una clase virtual, este trabajo se enfocará en los softwares y, en particular los matemáticos, que permitan poder preparar una clase de Matemática que propicie la MM.

Dado el gran avance que tienen las tecnologías en este mundo y que los estudiantes tienen al alcance de la mano mucha información, resulta necesario poder adquirir herramientas de adaptación para aprovechar y proponer secuencias didácticas innovadoras para complementar las clases de Matemática con las TIC.

Hasta acá se han expresado los argumentos por los que se considera que amerita investigar sobre los softwares para mejorar las prácticas docentes. Junto con lo expresado, se suma la importancia de incorporar en la enseñanza, la MM.

Por un lado, se nota una escasez en el abordaje de la MM en las clases. Asimismo, su desarrollo permite adquirir competencias para establecer, analizar y reflexionar sobre modelos matemáticos. Además, esta práctica de la enseñanza permite poder hacer una relación entre el mundo real y la Matemática como centro de la enseñanza y del aprendizaje, y esto es relevante para llevar a cabo en el nivel secundario porque pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a los estudiantes a construir conceptos matemáticos.

Por otro lado, el Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Santa Fe expresa: "el hacer matemática es un trabajo de modelización cuyo motor consiste en la resolución de problemas" (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.47). El documento ministerial considera que la modelización y la resolución de problemas están imbricados. La MM se caracteriza por brindar una mirada integradora de la actividad matemática, donde se consideran diversos aspectos: problemas, técnicas, representaciones, demostraciones, sin una preponderancia de una sobre las otras. Reconoce a la resolución de problemas como uno de los caminos para la construcción de conocimiento, diferenciándose de la concepción tradicional en que son presentados los problemas, como una instancia de aplicar lo previamente enseñado.

1.2. Objetivos

Para el presente trabajo se consideran dos instancias para realizar una innovación en la Educación Matemática. La primera, es indagar sobre qué conocimientos tienen los graduados del Profesorado en Matemática de la FCEIA sobre los SM para la MM y qué hacen con respecto al uso de las TIC en las clases de Matemática. En la segunda instancia, se propone la Innovación en Educación Matemática. La intención es aportar a los profesionales docentes información acerca del uso adecuado de las TIC en la MM e intercambiar ideas sobre secuencias didácticas posiblemente llevadas a cabo en las clases de estos docentes.

El objetivo general de este trabajo es: Analizar cuánto conocen los graduados con respecto al uso de los SM y cómo los utilizan particularmente para la MM.

Específicamente, los objetivos son los siguientes:

- Indagar sobre qué SM conocen los graduados, como así también específicamente qué conocen de cada uno, qué alcance le dan a su uso y con qué periodicidad.
- Reconocer si la utilización que los docentes les dan, forma parte de una secuencia pensada y planificada, con objetivos específicos en cada consigna.
- Idear propuestas didácticas que emplean SM para realizar tareas de MM en clases de secundaria.

1.3. Estado de Conocimiento

El presente trabajo está determinado por dos grandes aristas. Por un lado, la MM y, por otro, los SM que son utilizados en las clases, tanto en la formación docente, como en las clases dictadas por ellos. Se presentan distintas investigaciones que las abordan, con atención al enfoque destinado a la formación de futuros docentes en Matemática.

En cuanto a los antecedentes sobre los SM en la formación docente, se comienza estudiando la investigación de Giraldo (2021). El mismo realiza una propuesta que surge de la necesidad de mejorar las prácticas docentes, con uso de herramientas tecnológicas para fortalecer las habilidades de los estudiantes en Matemática. El trabajo se desarrolla mediante el uso de TIC como Academy, la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, Edmodo y GeoGebra, donde se favorecen habilidades en dos sentidos: mediante la MM y para la resolución de problemas cotidianos.

En la conclusión de la propuesta, el autor nota la importancia de que los docentes generen espacios propicios para el desarrollo de las actividades mediante el uso de las TIC. Además, se considera que estos ambientes motivan la participación de los estudiantes y favorecen el desarrollo de habilidades matemáticas.

Por otro lado, se encuentra la investigación de Soto Munguía y Alvarado (2020) donde presentan una propuesta didáctica que consiste en una metodología dirigida a docentes de Matemática de nivel secundario que permite poder diseñar secuencias didácticas a partir del uso del software GeoGebra. Esta metodología es elaborada en base a la articulación de: la estructura didáctica de Díaz-Barriga, el método de enseñanza ACODESA de Hitt y los desarrollos curriculares de Taba. El estudio se lleva a cabo con un grupo de 11 docentes en un curso-taller de 40 hs. Los resultados obtenidos son tres secuencias didácticas elaboradas por tres equipos de docentes en un contexto tecnológico, donde se percibe que es posible realizar diseño a través de esta metodología. Sin embargo, presentan algunas dificultades durante el proceso de articulación con la tecnología. Retoman a Hitt y Cortés (2009) para enfatizar sobre la importancia de utilizar la tecnología en el diseño de las actividades didácticas y caracterizan las nociones de ejercicio, problema y situación problema; al haber analizado las diferencias entre estos conceptos ponen especial atención en la caracterización de la situación problema ya que lo retoman en el diseño de la metodología de la presente investigación.

Finalmente, notan que los docentes logran adaptarse a la metodología propuesta a partir de la experiencia que obtienen al abordar y analizar las secuencias didácticas contrastándolas con la metodología; las reflexiones didáctico matemáticas sobre las secuencias previamente diseñadas les permiten identificar las características de la metodología empleada para el diseño. También han podido notar que los docentes pueden aplicar esta metodología en las planificaciones propias de las secuencias didácticas cuando trabajan en colaboración con otros docentes. Sin embargo, presentan dificultades en el momento de institucionalizar el contenido matemático involucrado en las secuencias y al construir en GeoGebra los applets propuestos por ellos mismos. Las situaciones problemáticas resultan ser un reto para el docente. Los autores recomiendan que, en una segunda aplicación de la metodología, primero el profesor sea consciente de un contenido y a partir de ahí conciba una situación problema. De esta manera proponen abrir un espacio para la construcción y modelación de situaciones problemáticas. La metodología se estructura a partir de los elementos teóricos ya mencionados y es apreciada a través de la implementación de un curso-taller en que los docentes logran diseñar secuencias didácticas.

A partir de la llegada de las computadoras al aula, surge la necesidad de capacitar a los docentes en el uso de las TIC y en particular del software GeoGebra. Por esto las investigadoras Arroyo et al (2016) desarrollan un curso de capacitación de la Secretaría de Educación del municipio de Vicente López, Buenos Aires, Argentina. El curso online es destinado para docentes de escuelas públicas y privadas, se implementa durante dos años (28 semanas y comenzó a dictarse en el 2015) y abarca temas de la currícula de cada uno de los seis años de nivel medio y de segundo ciclo de nivel primario.

Los objetivos del curso son capacitar a los docentes en el manejo de GeoGebra aplicado en los contenidos del diseño curricular de manera que puedan implementarlos en sus clases, incentivar el trabajo colaborativo y poner al estudiante como protagonista en el proceso de aprendizaje, a través de la participación activa en las clases y en las tareas asignadas, brindar una serie de secuencias didácticas que orienten al docente sobre cómo organizar la clase con el uso provechoso de un SM.

Destacan que primero han notado un momento de reflexión sobre el reto de utilizar GeoGebra para mejorar la enseñanza de la Matemática y lograr diferenciarlo de una calculadora o una graficadora con un software dinámico. Segundo, las autoras observan que los docentes se familiarizan y afianzan el uso del GeoGebra. Notaron una satisfacción en los docentes a medida que lograban descubrir conexiones dinámicas (ya conocidas) pero que aparecían como nuevas, asombrándose de la visualización dinámica de cada una de las propiedades. Por último, el curso dictado en forma online, con tiempo para aprender, ejercitar, consultar y repensar la práctica docente desde otro lugar, brinda una experiencia muy enriquecedora en la formación de los docentes en Matemática.

Acerca del estado de conocimiento sobre la MM en la formación docente y de acuerdo a los aportes de las investigaciones sobre este tema que se consideran propicias para este proyecto, Moreno et al (2021) trabajan sobre los errores que han puesto de manifiesto 27 estudiantes de la especialidad de Matemática del Máster en Formación de Profesorado de Secundaria, en una tarea de modelización. Con estos, describen categorías de los errores en las distintas fases del proceso de modelización. Notan que la mayor cantidad de errores se dan cuando interviene la situación real original, o sea, cuando se tiene que simplificar para obtener el modelo real (fase de simplificación) y cuando se han de interpretar los resultados (fase de validación). La consigna planteada a los estudiantes es la siguiente: “Se quiere colocar un parque de bomberos para cubrir las necesidades de tres pueblos. ¿Dónde situarías el parque de bomberos? Describe las decisiones que vas a tomar y el procedimiento que vas a utilizar para resolverlo". En el análisis de la resolución se construyen las categorías de errores, con referencia en las fases del proceso de modelización.

En las conclusiones, se hace alusión a dos aspectos: la familiaridad del estudiante con el proceso de modelización y la aplicación de contenidos matemáticos. En el primer caso, se evidencian errores de modelos reales incompletos, dificultades al explicitar las variables y falta de interpretación en la solución encontrada. En el segundo aspecto, el error más frecuente es la elaboración de un modelo matemático incompleto, ya sea porque no se consideraron todos los casos posibles en el modelo real, o bien porque existe una falta de concreción de las condiciones planteadas.

Por otro lado, las investigadoras Cruz, Esteley et al (2020*)* trabajan en el diseño y organización de una propuesta en torno a los procesos de MM, con el propósito de buscar en los estudiantes del tercer año de la carrera de Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral una reproducción en el aula de actividades propias del quehacer matemático. El objetivo de la investigación es poder describir, analizar y discutir una experiencia de formación para futuros docentes en un contexto de MM vinculada con fenómenos geométricos. En particular, se trata de una propuesta que invita a que los estudiantes puedan construir una definición de poliedro.

En las reflexiones finales, las autoras mencionan que aquellos estudiantes que participan en la experiencia logran apropiarse del proceso de MM de naturaleza intramatemática. Señalan que pueden trabajar con referentes empíricos vinculados con la Matemática y recurren a conocimientos matemáticos ya apropiados para la construcción de modelos. Han evidenciado un trabajo con MM centrado en los objetos matemáticos y muestran las posibilidades formativas de los procesos de construcción de conocimientos que les brindan a los futuros profesores. Así mismo, las reflexiones sobre los procesos de MM y validación posibilitan que surjan conocimientos didácticos, matemáticos y tecnológicos.

En la investigación realizada por Cruz, Mántica et al (2020), se pone atención en el modo en que futuros profesores en Matemática transitan un proceso de MM al resolver una situación real, en la asignatura Taller de Geometría del Profesorado en Matemática de la

Universidad Nacional del Litoral. Se subrayan los procesos de formulación y validación de afirmaciones puestos en juego y en las interacciones que se presentan.
A partir de la necesidad de un trabajo de MM y de una conversación entre investigadores y el dueño de un campo de una localidad de la Provincia de Santa Fe, se diseñó la situación. Este hombre plantea la necesidad de construir un tanque de agua para su ganado vacuno con ciertas condiciones imprescindibles para el mismo. El sub-proceso de formulación queda a cargo del grupo investigador. Se disponen dos grupos de dos personas para la resolución de esta situación y el resto de los estudiantes se ocupan de otras. Luego, se analizan los datos en dos aspectos: por un lado, las interacciones del grupo de estudiantes, y, por otro, las discusiones que surgen en instancias de debate colectivo.
Se concluye que el trabajo en una situación real permite a los estudiantes movilizar conocimientos previos, tomar decisiones y, por lo tanto, asumir una postura crítica frente a la situación que están modelizando y construir conocimientos. Se observa que el grupo transita por todos los subprocesos del proceso de modelización, a excepción de formular la situación, la cual fue propuesta por los investigadores. Se retoman y se vuelve a subprocesos anteriores en reiteradas ocasiones. En algunos momentos las interacciones potencian el debate y en otros lo debilitan. En cuanto al uso del software, las alumnas consideran que una construcción dinámica hace referencia a un bosquejo con lápiz y papel. Sin embargo, si bien no utilizan un software, no descartan en instancias del debate el potencial de este recurso.
Por último, la investigación realizada por Gallart et al (2019) *se* focaliza sobre la MM en la escuela secundaria. Se plantea que uno de los principales problemas que surgen al trasladar una tarea de MM al aula de secundaria es la falta de descripción detallada que ayude y oriente al profesor en la implementación de este tipo de actividad y que le permita reconocer cuáles son sus objetivos, su encuadre dentro del currículum, cómo realizar su evaluación o qué metodología utilizar. Se muestra una experiencia de aula, con el detalle de las fases que implica la implementación de una actividad de modelización.
Luego de la introducción a la problemática, se plantean cuáles son los objetivos a alcanzar con una actividad de este estilo y posibles preguntas, como: ¿Encaja la modelización en el diseño curricular de nuestra materia? ¿Qué objetivos de aprendizaje se persiguen con la investigación? ¿Qué tareas usar? ¿Qué metodología usar? ¿Cómo evaluarla?

Esta investigación tiene forma de guía sobre este tema. Se concluye que no hay dudas de las ventajas de la modelización en el aula, pero también del reto que implica para cada docente. Se espera que puedan contestar todas las preguntas anteriores y saber que el desenlace de cada actividad depende de la importancia que ellos mismos le den.

En este recorrido, se reconocen algunos aspectos logrados. Por un lado, se nota cierta profundidad en el estudio de la MM para el nivel secundario, donde en su mayoría se considera que es ventajoso el abordaje de la misma en el aula, ya que permite reproducir actividades propias del quehacer matemático, tomar decisiones y, por lo tanto, asumir una postura crítica frente a la situación que están modelizando y construir conocimientos. En cuanto a las TIC, se pudo observar que el uso de la misma motiva la participación de los estudiantes y favorece el desarrollo de habilidades matemáticas. Sin embargo, amerita indagar el abordaje de la MM a través de la utilización de software por los graduados.

2. Marco teórico

La elaboración de este proyecto se basa en cuatro ejes teóricos que son: MM, TIC, SM y Práctica Profesional Docente. Se brinda una mirada de distintos autores acerca de cada uno de estos temas en función a la perspectiva tomada para este trabajo; por último, se presenta un pequeño resumen de todo lo propuesto en cada eje.

2.1. Modelización Matemática

El diseño se sustenta de aportes de la MM como abordaje pedagógico, se refiere al trabajo con modelos matemáticos en el aula con la intención de reproducir las actividades de la comunidad matemática. Bassanezi (1994) afirma que emplear la MM como abordaje de enseñanza y medio para el aprendizaje posibilita el desarrollo de ciertos modos de pensamiento y actuación, entre otros, la producción de conocimientos, la realización de abstracciones y formalizaciones, el establecimiento de generalizaciones y analogías. Bajo este abordaje, se busca que los estudiantes produzcan nuevos conocimientos y no solamente que apliquen conocimientos matemáticos ya conocidos. Los estudiantes que se involucran con la MM formulan problemas en el marco de un tema en estudio, emplean datos existentes o producen nuevos con el fin de construir un modelo que dé respuesta al problema, validan el modelo y, en caso necesario, lo modifican. En este sentido, el proceso es cíclico e incluye construcciones provisorias.

Por otra parte, Sadovsky (2005) distingue diferentes acciones que se presentan en el trabajo de la MM: recortar la situación problemática, identificar variables adecuadas para la situación problemática particular, establecer relaciones entre las variables que se ponen en juego, elegir una teoría que permita trabajar en ellas y producir conocimientos nuevos sobre la situación. La autora afirma que es necesario que los estudiantes tomen decisiones frente a los recursos utilizados y que se responsabilicen de sus resultados, a través de la validación y confrontación con sus pares.

Un proceso de MM se pone en juego al establecer una relación entre una situación extramatemática y una noción matemática determinada (Blomhoj, 2004). El autor señala que el trabajo con situaciones en contextos reales posibilita la libertad de elección por parte de los estudiantes y que se movilizan conocimientos matemáticos disponibles.

Las nociones de MM abordadas en este trabajo tienen puntos en común. El abordaje pedagógico mencionado por Bassanezi (1994), las diferentes acciones que se presentan en la MM de Sadovsky (2005) y la relación que se genera en una situación extramatemática y una noción matemática de Blomhoj (2004), coinciden en que el trabajo de la MM en las aulas permite que los estudiantes sean partícipes en el proceso de aprendizaje y que es productivo para la construcción de nuevos conceptos matemáticos. Cabe destacar que Blomhoj hace referencia a la modelización de situaciones del mundo real y no deja explícito si dentro de la misma considera la modelización intramatemática. En cambio, las autoras señalan la posibilidad de trabajar con fenómenos tanto intra como extramatemáticos.

2.2. Tecnologías de la Información y la Comunicación

Ochoa et al (2002) establecen que las TIC son un conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas (hardware y software), soportes y canales de comunicación, relacionados con el almacenamiento, procesamiento y transmisión digitalizada de la información. Las TIC abarcan sistemas de simulación y modelado, SM, sistemas multimedias, entre otros.

Meza et al (2002) consideran que los beneficios que se obtienen en el uso de las TIC en la labor docente estarán en función de la capacidad que se tenga de su manejo y adecuación.

La integración de las TIC en el ámbito educativo va a depender, de acuerdo a Sangrá et al (2004), de diferentes factores. En primer lugar, de la disposición de los equipos en las instituciones, así como de los procesos de formación y motivación de los sujetos: directivos, estudiantes y docentes en la incorporación de las actividades que llevan a cabo en el contexto educativo de forma cotidiana. De acuerdo a los constantes cambios e innovaciones, se requiere una formación continua de estos sujetos.

Los autores Meza et al (2002) y Sangrá et al (2004) coinciden que la incorporación de las TIC en el ámbito educativo, y en particular en las clases, depende en gran parte de la formación y motivación de los directivos, alumnos y docentes para llevarla a cabo en las aulas. También aclaran que la disposición de los equipos en las escuelas es fundamental para poder trabajar con la TIC en las clases.

2.3. Softwares Matemáticos

En cuanto a los SM, Ociel López (s/f) afirma que "son aquellos que se utilizan para apoyar o ilustrar problemas matemáticos". También menciona que dentro de este tipo de software se encuentran los sistemas algebraicos computacionales y graficadores de funciones, entre otros. Explicita varios ejemplos, como GeoGebra, Scilab, Matlab, Cinderella, Máxima, TinkerPlot, FooPlot, Wiris, etc.

Para Ángel et al (2001), en su uso, el docente adapta su metodología a estas herramientas e integra los conocimientos teóricos y prácticos, así como también diseña aplicaciones y problemas orientados al uso del software. Sin olvidar que enseñar este tipo de actividades requiere de un buen conocimiento del software, coherencia didáctica respecto a lo que se le propone al alumnado y ofrecer a este último una guía de cómo, cuándo y para qué utilizar esta herramienta.

Ángel et al (2001), Balderas (2002), Galdo y Cociña (1998), Orellana (1999) y Queralt (2000) argumentan que, entre las posibilidades del software, están:

- Favorece los procesos inductivos y la visualización de conceptos.
- Permite comparar, verificar, conjeturar y refutar hipótesis.
- Individualiza los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- Sirve como elemento de motivación e instrumento generador de problemas matemáticos.

Meza et al (2002) afirman que la tarea del docente es planificar, desarrollar y evaluar procesos de enseñanza y de aprendizaje, donde el software representa el papel de herramienta cognitiva. No obstante, recomienda cuidar que el software no se constituya en el objeto de estudio y que, con ello, se descuide el aprendizaje de temas esenciales que se pretende lograr con su uso.

A modo general, en la delimitación conceptual de SM, se tiene que, por un lado, es considerado como una herramienta de apoyo que permite poder ilustrar problemas matemáticos; por otro, es tomado como parte de la planificación de las clases, en el sentido que el docente debe adaptar su metodología en este recurso tecnológico. En ambos puntos de vista, se presenta una integración completa del software en el proceso de diseño e implementación de las clases de matemática de manera significativa para el aprendizaje de contenidos matemáticos.

2.4. Práctica Profesional Docente

Históricamente, la Práctica Docente en la formación inicial se ha caracterizado por una definición diferente, ya que era considerada como el ámbito de aplicación de lo aprendido a lo largo de varios años de forma disciplinar. Esto suponía considerarla como un apéndice de la formación teórica previa, sin mayor espacio para la construcción progresiva y reflexiva. Asimismo, se llevaban a cabo sin relación previa con los contextos institucionales y áulicos, en los cuales tendría lugar la acción (Delorenzi, 2008).

Recientemente, el Consejo Interuniversitario Nacional (CIN), en su propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática, delimitó el campo de Formación en las Prácticas Profesionales Docentes (PPD) como aquel espacio de "construcción reflexiva y el desarrollo de saberes y habilidades que se ponen en juego en el accionar del profesor universitario, tanto en las aulas como en otros ámbitos que hacen al ejercicio de la formación docente". Puntualmente se señala la importancia de la integración teórico-práctica asumida desde una posición reflexiva y crítica que atienda a las particularidades de los contextos en que se sitúa la acción.

En este sentido Achilli (2008) entiende a la Formación Docente como: "un proceso en el que se articulan prácticas de la enseñanza y de aprendizaje orientadas a la configuración de sujetos docentes/enseñantes". Desde esta categorización, resulta clave la misma noción de

Práctica Docente, con un doble sentido. Por un lado, como "práctica de enseñanza" que supone cualquier proceso formativo. Por el otro, como la apropiación del mismo oficio magisterial, de cómo iniciarse, perfeccionarse y/o actualizarse en la "práctica de enseñar".

De un modo general, la práctica docente alude a una práctica desarrollada por sujetos cuyo campo identitario se construye alrededor de los procesos fundantes del quehacer educativo como son los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se diferencia a esta de la práctica pedagógica, tomada como la práctica que se despliega en el contexto del aula caracterizada por la relación docente, alumno y conocimiento. Al utilizar la noción de práctica docente, esta la trasciende, al implicar además un conjunto de actividades, interacciones, relaciones que configuran el campo laboral del profesor en determinadas condiciones institucionales y sociohistóricas. Ese conjunto de actividades, a su vez, se imbrica con el entramado de significaciones socioculturales que van configurando los procesos constitutivos de las identidades docentes.

Entonces, en cuanto a la PPD podemos decir que no solo se basa en aplicar lo aprendido durante todos los años de formación de un docente, sino que se trata de una actividad compleja, al considerar al educador dentro y fuera del aula, el contexto histórico, las condiciones institucionales y de los establecimientos en los que se encuentra inmerso.

3. Metodología

A continuación se detalla el enfoque de este trabajo al mostrar qué es lo que se pretende estudiar; su alcance, al ver en qué se profundiza el análisis; su tipo, al presentar cómo se toman los datos para el trabajo; instrumentos y técnicas, mediante detalles de los elementos que se tienen en cuenta para recabar la información necesaria; los participantes, a través de una diferenciación entre los cuestionados; y finalmente, las categorías de análisis, que sirven para un mayor orden a la hora de procesar los datos y profundizar realmente en lo que se desea para lograr los objetivos planteados.

3.1. Enfoque

Este proyecto se enmarca dentro de un *enfoque cualitativo* del estudio de las prácticas profesionales docentes. Se trata de abrir el diálogo y estudiar sobre aquellos conocimientos de las TIC en los profesores de Matemática graduados de la Carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) que trabajan en el nivel medio. Para poder comprender los conocimientos de las TIC, la investigación cualitativa opta por estudiar la formación continua de los docentes en esta área en particular.

3.2. Alcance

Este estudio tiene alcance d*escriptivo-interpretativo*, además de identificar qué ocurre y el porqué de los hechos, se busca profundizar la mirada mediante la reflexión a partir de la interpretación. El carácter empírico de esta investigación se ve marcado en el objetivo de la misma: analizar los conocimientos de los graduados del Profesorado en Matemática de la UNR sobre el uso de software para la MM.

3.3. Tipo

Se presenta una investigación basada en el estudio del conocimiento sobre SM de los graduados del Profesorado en Matemática de la FCEIA, desde 2011 a 2020, en donde se indaga en sus experiencias en el campo con estos elementos. En este caso, la experiencia de todos los docentes cuestionados que se desempeñan en el nivel medio.

3.4. Técnicas e Instrumentos

De acuerdo con las *técnicas e instrumentos* a utilizar, se realiza un cuestionario a través de email (formulario de preguntas de Google) en donde los docentes pueden responder acerca del uso que le dan a las TIC y particularmente a los SM en el aula, qué idea tienen acerca de estos recursos y en qué temas los utilizan más, si los estudiantes se notan entusiasmados al utilizarlos, etc.

El mismo es enviado el día 20 de septiembre de 2021 y los graduados cuentan con cinco días para su resolución, es decir, hasta el 24 de septiembre de 2021.

Las preguntas abiertas tienen el objetivo de obtener información para el procesamiento de datos e ideas futuras.

Encabezado del cuestionario:

De acuerdo con las concepciones que brinda el Diseño Curricular Jurisdiccional, se entiende que la modelización se caracteriza por reconocer y recortar una problemática de la situación considerada, elegir una teoría para tratarla en función de las relaciones entre las variables y producir conocimientos nuevos sobre dicha problemática y, además, que la incorporación de las TIC en el aula permiten un cambio en las estrategias y el enfoque didáctico de la labor de los docentes, enriquecen las posibilidades de enseñar y permiten centrarse en otros conceptos diferentes a los que se priorizaron en una clase de matemática tradicional.

Cuestionario:

1) ¿Cómo entiende a los siguientes conceptos: TIC, software matemático y modelización matemática?

2) ¿Cree que tiene un buen conocimiento sobre estas herramientas para usarlas en sus clases? ¿Por qué? ¿Cómo se ha formado en este espacio?

3) ¿Conoce algún software matemático que pueda utilizarse en las clases de matemática?

Si su respuesta es positiva: ¿Cuáles ha implementado en sus clases? ¿Qué contenidos matemáticos son puestos en juego? ¿En qué momento de la planificación utiliza las TIC? (introducción-desarrollo-ejercitación-aplicación). ¿Con qué objetivos formativos utiliza estos recursos en el aula? ¿Cómo lleva a cabo la secuenciación de las actividades con el uso de este recurso? ¿En qué cree que beneficia a los alumnos una clase con esta herramienta como recurso?

Si su respuesta es negativa: ¿Por qué? ¿Lo tiene previsto para futuras clases? ¿Qué lo ha imposibilitado?

4) ¿Ha incorporado la modelización matemática en sus clases?

Si es afirmativa su respuesta: ¿Lo ha complementado con algún software matemático? Comente en no más de tres renglones su experiencia.

Si su respuesta es negativa: ¿Qué lo ha imposibilitado? ¿Lo tiene previsto?

3.5. Participantes

En cuanto a los *participantes* de la investigación, cabe mencionar que la misma se lleva a cabo con docentes graduados de los últimos 10 años (2011 a 2020) del Profesorado en

Matemática de la FCEIA (UNR). Se considera una base de datos emitida por la Secretaría de Asuntos Estudiantiles y Relaciones Interinstitucionales. Desde allí, luego de enviar el cuestionario a todos los graduados, se hace una división entre quienes trabajan en nivel medio y quienes no, ya que se aclara en el mail previamente que solo respondan quienes lo hagan, quedando estos como participantes del proyecto.

3.6. Categorías de análisis

Con respecto a las *categorías de análisis* de este trabajo se tienen en cuenta dos, que abarcan el conocimiento y el uso de los SM por parte de los graduados:

- *Conocimiento sobre SM* (CS): definiciones y creencias que se tienen acerca de estos softwares y su uso en las aulas.
  - Qué conocen (CS1): tipos de SM que conocen y/o utilizan en sus clases.
  - Para qué contenidos los utilizan (CS2): temas en donde se involucran estos recursos y con qué frecuencia.
  - En qué momento de la planificación los usan (CS3): referida a si se utiliza en la introducción, desarrollo, ejercitación o aplicación de un contenido matemático.
- *Uso de los SM* (US): con respecto a su utilidad y el significado de los mismos en las clases de matemática.
  - Cuáles son los objetivos formativos (US1): referido a las intenciones que los docentes tienen al utilizar este recurso.
  - Cómo es la secuencia de enseñanza (US2): cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza con la implementación de estos softwares, qué lugar se le da en el mismo.
  - De qué modo se promueve la MM (US3): se refiere a la incorporación de esta estrategia de enseñanza en el tratamiento de un contenido.

3.7. Procesamiento de los datos

Por último, al enfocar la mirada en el procesamiento de los datos, se tienen en cuenta las categorías de análisis mencionadas, con el objetivo de adentrarse en ellas para notar lo que haya surgido en la investigación y hacer planes a futuro, como re-pensar secuencias didácticas para esos mismos cursos o docentes, proponer otras, encuentros posteriores con los docentes cuestionados para obtener ideas nuevas que sumen al grupo de profesionales.

4. Resultados

En esta sección se comienzan a describir los primeros hallazgos de esta investigación. Los datos se obtuvieron a través de un cuestionario redactado en el apartado 3.4. de este trabajo que fue enviado a todos los graduados de los últimos 10 años vía email, al que respondieron 14. Tuvieron cinco días para brindar su respuesta.

El proceso analítico se basó en la búsqueda de palabras clave que dieran lugar a cierta clasificación de las respuestas obtenidas. Las mismas tienen que ver con las respuestas que más aparecen en las respectivas preguntas. Este trabajo de codificación y de comparaciones permite establecer relaciones con las categorías de análisis preestablecidas. Se procuró poder estudiar exhaustivamente cada respuesta de los participantes y su propio lenguaje al responder, para con ello delimitar tales palabras clave.

Se presentan los resultados de las dos preguntas generales del cuestionario primero y, luego, las respuestas referidas a las categorías de análisis planteadas en la sección 3.6.

En la primera pregunta del cuestionario se hace una distinción de los tres conceptos puestos en juego en el presente trabajo: MM, SM y TIC. Luego, según cada respuesta, se las agrupa a través de ciertas palabras clave para determinar en qué columna de esta tabla se ubican.

En cuanto a las TIC, utilizan la palabra *herramienta* y varios de ellos coinciden en que con las mismas se puede *comunicar/transmitir/difundir* información. Además, notan que puede trabajarse en diferentes áreas con ellas, no solo en la matemática. Con respecto a los SM, surge la palabra *programa*, con diferentes entramados como, por ejemplo, programa para trabajar conceptos matemáticos, para poner en práctica o construir un conocimiento o para realizar una tarea. A su vez, se los ve incluidos dentro de las TIC, esto es, entienden a los softwares como aquellas tecnologías con las que se pueden trabajar conceptos de índole matemática. También lo ven como una *superación* a los recursos tradicionales, que potencian y permiten revisar las formas de enseñar.

Por último, en cuanto a la MM, surgen varias palabras: *vía, proceso, aplicación, estrategia.* Vía, para entender y aplicar o bien para traer aspectos constructivos de la matemática y afianzar contenidos. Proceso, que permite describir y desarrollar una situación a partir de un modelo matemático. Aplicación de los contenidos trabajados en clase. Estrategia didáctica de la enseñanza necesaria para el desarrollo de la matemática escolar.

En la segunda pregunta, se divide a las personas que hayan contestado la primera parte según su opinión sobre sus conocimientos de las TIC, SM y MM. Luego se describe con fragmentos de los participantes en el cuestionario cómo se han formado en estos espacios.

Acerca de la creencia de los graduados sobre sus conocimientos de estas herramientas para implementarlas en las clases, tres docentes determinaron que consideran tener un buen conocimiento y manejo, uno respondió negativamente, otro no respondió y el resto consideró que sus conocimientos eran "medio/bueno" o "tenían cierta idea" sobre el uso de las TIC y la MM en las clases de Matemática. Estos últimos docentes mencionan que se necesita una "gran dedicación para considerarse a un buen nivel" sobres estas herramientas para llevarlas a cabo en las aulas y es por eso que se describen así en cuanto a los conocimientos.

Sobre la formación o preparación de los graduados, la mayoría mencionan que se formaron a través de *cursos o especializaciones por fuera* de la formación inicial de la carrera por notar una preparación escasa en la misma, otros por indagación propia en *Internet* o a través de *tutoriales*. Uno comenta que sus conocimientos surgen a través de "*prueba y error*" y, por último, otro graduado considera que tiene un manejo satisfactorio con las tecnologías, que le permiten poder comprender de manera rápida el funcionamiento de los SM.

En la tercera pregunta se comienza a analizar la primera categoría: *conocimiento sobre SM,* la cual empieza con una pregunta cerrada, es decir, solo puede responderse "sí" o "no". Según la elección de los graduados, deben responder otros interrogantes. Si responden positivamente, la serie de preguntas tiene a sus respuestas procesadas en la Tabla 3.1, en donde en la primera columna aparece el tema al que refiere la pregunta y en la segunda columna la respuesta más representativa (software más utilizado, contenido más enseñado, momento de la planificación, etc.). Las demás respuestas se presentan en una breve narrativa.

Tabla 3.1. Docentes que conocen SM y los utilizan en sus clases

Conocimientos sobre SM (CS)	
Subcategoría	**Respuesta más representativa**
Software implementado (CS1)	GeoGebra
Contenidos matemáticos puestos en juego (CS2)	Sistemas de ecuaciones lineales, gráficas y análisis de funciones, área, perímetro, volumen
Momento de la planificación (CS3)	Aplicación

Si en la pregunta cerrada responden negativamente, se analizan los motivos y cuáles fueron las imposibilidades para no poder implementar clases con estos recursos. El procesamiento se hace agrupando las respuestas mediante palabras clave.

En cuanto a la pregunta cerrada: *"¿Conoce algún SM que pueda utilizarse en las clases de matemática?"*, todos los graduados contestaron que sí; por lo tanto, el procesamiento de los datos en cuanto a la respuesta negativa queda desestimada.

Acerca de: *"¿Qué contenidos matemáticos son puestos en juego?"*, aparecen también función lineal, Teorema de Thales, proporcionalidad, números y operaciones, escritura matemática, probabilidad y estadística.

El momento de aplicación de los contenidos es el que más respuestas obtuvo en cuanto a la pregunta: *"¿En qué momento de la planificación utiliza las TIC?"*. Luego, el de introducción tiene algunas respuestas menos y le sigue el desarrollo de la clase, con la distinción de que allí se ubica también el momento de la ejemplificación (un docente planteó que las usa para los ejemplos). Por último, se encuentra la ejercitación. Cabe destacar que algunos graduados contestaron que lo utilizan en todos los momentos de la planificación, según el tema a enseñar, y en ese caso fue tomado como respuesta positiva para cada uno de ellos.

En relación con la categoría: *uso de los SM,* se presenta en la Tabla 3.2 la respuesta más representativa y luego una breve descripción con las demás respuestas.

Tabla 3.2. Uso de los SM, objetivos y secuenciación

Uso de los SM (US)	
Subcategoría	**Respuesta más representativa**
Objetivos formativos (US1)	Mayor visualización de los contenidos
Secuenciación de las actividades (US2)	Descripción del recurso, actividad de exploración al mismo, actividades concretas con su uso
Promoción de la MM (US3)	Graficadoras para interpretar y analizar resultados

Acerca de los objetivos formativos, la respuesta que más apareció fue la que se muestra en la Tabla 3.2: mayor visualización de los contenidos. Algunos argumentaron que con las TIC es posible visualizar mejor a los entes matemáticos abstractos. Sigue a esta respuesta la formulación de conjeturas.

También han surgido frases como: mejorar el pensamiento de los alumnos, observar regularidades, realizar gráficos exactos, argumentar o validar los resultados obtenidos, desarrollar habilidades gráficas, demostrar propiedades, explorar los contenidos, complementar y vincular procedimientos, desarrollar capacidades tecnológicas, favorecer el pensamiento crítico y trabajar los contenidos con diferentes lenguajes.

En cuanto a la secuenciación de las actividades con estos recursos, aparece como principal la exploración del material en primera instancia. Esto también se ve como *pautas* para usar los recursos tecnológicos. En varios casos plantean que se los utiliza como complemento en cada una de las partes de la unidad didáctica a enseñar y, en particular, un graduado responde que pide a sus estudiantes un informe de lo realizado con el software, ya que cree que de esa forma será difícil que olvide lo que aprendió del mismo. En un caso se argumenta que el software sea *la base* de la secuenciación, con su exploración primero, luego la exploración del contenido y, por último, la obtención de conjeturas.

En cuanto a la incorporación de la MM en las clases, ocho de los 14 graduados respondieron afirmativamente. Luego en la pregunta sobre el complemento con algún SM y cómo lo implementan en sus clases, dos docentes no lo complementaron con algún software y el resto sí lo hizo. Gran parte de estos graduados usaron graficadoras para interpretar y analizar resultados, luego siguieron la utilización para modelizar sistemas de ecuaciones e interpretar el conjunto solución a través del programa GeoGebra, para simular distintas soluciones en la modelización de una situación de sucesos probabilísticos, para calcular la pendiente o la ordenada de origen de una recta a través el método de regresión lineal y, por último, para entender e interactuar con modelos.

Sobre los graduados que respondieron negativamente sobre la incorporación de la MM en sus clases, se les cuestionó qué lo imposibilitaba y si lo tenían previsto en algún momento. En este caso surgió el factor tiempo, no poder salir del esquema tradicional de abordaje de los contenidos matemáticos, poca preparación sobre la MM y, por último, la inexperiencia en la carrera docente. En cuanto a si tenían previsto llevarlo a cabo en sus clases, un graduado explicita que no, otro menciona que tiene intenciones de hacerlo en un curso de ciclo superior y el resto en un futuro cercano o en el próximo año.

En una de las preguntas del cuestionario se les pidió a los graduados que compartieran la opinión sobre los beneficios que el uso de los softwares les otorga a los estudiantes y varios docentes creen que hay una mayor comprensión de los contenidos. Seguido a esto, consideran que se genera un mayor interés y una mayor atención a la clase. También aparecen respuestas aisladas, es decir, de un graduado en particular, pero no menos importantes, como: se fomenta el trabajo en grupo, se comparten reflexiones, se comparan distintas formas de ver un mismo concepto, se beneficia la búsqueda de soluciones de manera ágil, se construye cierta abstracción y pensamiento formal, se desestructura la clase, se permite otra forma de posicionamiento frente a una situación problema, se amplían horizontes y se puede poner el foco en situaciones que antes eran inadvertidas.

A partir de la descripción de las respuestas de los graduados, se percibieron varios aspectos que ameritan aportes desde el presente proyecto innovador.

Respecto a la primera pregunta varios docentes no explicitan o no pueden determinar con sus palabras los conceptos pedidos (TIC, SM y MM). Estos graduados toman como definición el significado de la sigla, pero no comentan qué entienden sobre las TIC. O mencionan que forman parte de recursos educativos, o que sirven para trabajar conceptos matemáticos, sin mayores aclaraciones.

Sobre la segunda pregunta, en términos generales, como se comentó al inicio del proyecto y se evidenció, se notó una escasa preparación en la formación inicial sobre los tres conceptos que articulan el presente trabajo. Los graduados recurrieron a tener que formarse o prepararse en estas áreas de forma particular para complementar sus clases con los recursos tecnológicos. Cabe destacar que ninguno de los docentes menciona nada acerca de su perfeccionamiento en el abordaje de la MM.

Varios docentes comentan que, a partir de la pandemia Covid 19, donde en el 2020 las clases se desarrollaron de manera virtual, se intensificó el uso de las TIC y tuvieron que realizar su preparación de manera autónoma, a través de “prueba y error” e indagación de investigaciones, internet o tutoriales.

Cuando se comienza a analizar el uso de los SM en las clases, surgen varias cuestiones. Lo principal es que todos los graduados admiten conocer al menos uno, pero son varios los que no lo implementan. Reconocen sus beneficios, aunque no los utilicen; la mayoría coincide en que la exploración del recurso es necesaria antes de comenzar cualquier actividad y que la aplicación es el momento de la clase donde más se utiliza.

En la última pregunta, varios docentes mencionan que trabajaron MM en sus clases, pero no fueron complementados con algún SM, sin explicitar el motivo. Otro docente menciona que utilizó software para el contenido de Estadística bidimensional en la búsqueda de la pendiente u ordenada al origen a partir del método de regresión lineal, pero sin dejar en claro si lo abordó a través de la MM. En cambio, en las otras respuestas, se explicita que se utilizaron para la modelización de ciertos contenidos matemáticos.

En cuanto a lo que los limita acerca del uso como complemento de un SM, se remarca que un docente alude a que no puede "salirse del abordaje de los demás en términos tradicionales" y que tenía previsto hacerlo el año próximo. ¿Pero por qué? Además, un graduado argumenta que "el factor tiempo" influye en que no se enseñen contenidos mediante la MM. ¿Se cree que con estos recursos se necesita más tiempo para desarrollar un contenido o también se podría considerar la falta de tiempo para formarse sobre esta área de la enseñanza de la matemática?

5. Conclusiones

En esta sección se analizan los hallazgos de la presente investigación. Primero, se dan respuestas a los objetivos generales y específicos explicitados en el trabajo. Segundo, se relaciona con las investigaciones reportadas en el Estado de Cocimiento. Por último, se explicita el aporte innovador y posibles líneas de trabajo a futuro.

5.1. Respuesta a los interrogantes específicos

En cuanto al objetivo general de este trabajo: "analizar cuánto conocen los graduados con respecto al uso de los softwares y cómo los utilizan particularmente para la MM", se puede decir que los graduados que han respondido el cuestionario, en su mayoría, creen tener un conocimiento medio respecto a las TIC. Consideran que, para incluirlas en sus clases, se necesita de un mayor tiempo y una mayor dedicación, con lo que no cuentan. Además, en su formación inicial no existió un espacio curricular destinado a tal fin y tampoco admiten formarse regularmente en estas cuestiones. Solo tres de ellos consideran tener un buen conocimiento al respecto. La formación de la gran parte fue dada de manera individual, extra a su formación inicial, por una necesidad de conocer. Un graduado enfatiza en que el aprendizaje del docente aquí es a través de "prueba y error". Dos de los 14 profesores ven a la MM por fuera del uso de estos recursos, o más bien, en sus clases con MM no han usado SM. Quienes los han usado con este fin, lo hacen más que nada para poder analizar e interpretar resultados; suelen aludir a ello como: "interpretar un modelo". Sobre aquellos que no han trabajado con la MM, se advierte que no planean hacerlo este año, sino más adelante, sin explicitar un argumento sobre los motivos de esa decisión.

Acerca del primer objetivo específico de este trabajo: "Indagar sobre qué software conocen los graduados, como así también específicamente qué conocen de cada uno, qué alcance le dan a su uso y con qué periodicidad", el más utilizado es GeoGebra, al cual emplean para corroborar resultados y con sus herramientas principales de Geometría mediante opciones básicas. Los utilizan cada vez que un tema se los permite, en su mayoría, ya que argumentan que no todos los temas son aptos para trabajar con este tipo de recursos. Un alcance de los mismos que ha llamado la atención es tratar de considerarlos como una herramienta más en la enseñanza de la matemática, como si fuese "una calculadora" al usarlo en una instancia de examen o en una clase usual en la etapa de aplicación del contenido. Aunque la totalidad de las personas que respondieron el cuestionario explicita conocer un SM o más de uno, solo seis consideran que llevaron a cabo la enseñanza a través de la MM con ellos.

En cuanto al segundo objetivo específico: "reconocer si la utilización que los docentes les dan, forma parte de una secuencia pensada y planificada, con objetivos específicos en cada consigna", se puede decir que la mayoría de los graduados confundieron a los objetivos formativos de la enseñanza de algún contenido matemático en particular con la utilización de un SM, con los objetivos generales al momento de utilizarlo en una clase usual. Aclarado esto, se podría decir que la mayoría considera que el uso de SM tiene como objetivo una mayor visualización de diferentes entes matemáticos y la formulación de conjeturas. En cuanto al momento de la planificación donde más se utilizan y si forman parte de una secuencia pensada, aparece como principal el momento de la aplicación, seguido de la introducción del tema. Por otro lado, los consideran parte de las secuencias, a partir de la exploración del mismo como actividad de los alumnos, donde el docente actúa como guía de este proceso.

La respuesta al último objetivo: "idear propuestas didácticas que emplean software para realizar tareas de MM en clases de secundaria" se desarrolla en el apartado 5.3.

5.2. Relación con lo reportado en el Estado de Conocimiento

En cuanto a la relación de los hallazgos encontrados en el presente trabajo con lo reportado en el Estado de Conocimiento, puede decirse que:

Giraldo (2021) en su investigación determina que el uso de herramientas tecnológicas fortalece habilidades en dos sentidos: desarrollo de habilidades mediante la MM y el uso de conceptos matemáticos para la solución de problemas cotidianos. Por otro lado, el investigador concluye que se generan espacios para el desarrollo de actividades matemáticas y, además, que motivan la participación de los estudiantes. En esta investigación se ha determinado que una de las habilidades que se destaca con el uso de SM en las clases de matemática es la mayor visualización de los contenidos matemáticos y, en segundo lugar, la formulación de conjeturas. Y junto con la promoción de MM se ha determinado que las competencias que se fomentan son la interpretación y análisis de resultados. Como beneficios por parte de los estudiantes, se ha reportado que brinda una mayor comprensión, interés y atención de los contenidos matemáticos. Se podría decir que se fomentan habilidades mediante la MM a través del uso de SM solo en el momento de la interpretación y análisis de resultados. Asimismo, no se ha indicado el uso de conceptos matemáticos para la solución de un problema. En cuanto a la generación de espacios para el desarrollo de actividades matemáticas, los docentes graduados coinciden que brindan una mayor comprensión, interés y atención de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes.

Por otro lado, las investigadoras Arroyo et al (2016), en el desarrollo del curso online para docentes tanto de escuelas públicas como privadas, destacan que los docentes se han tomado un momento de reflexión en cuanto al uso del GeoGebra para la mejora de la enseñanza de la matemática y lograr diferenciarlo de una calculadora o una graficadora común. Esto ha surgido en este trabajo, ya que algunos de los graduados encuestados plantean que "no se sienten preparados" para trabajar con software en sus clases o bien que se necesita “un muy buen nivel de detalle” para llevar a cabo una clase con estos recursos. Es decir que, al ser encuestados, pueden reflexionar sobre su práctica con la inclusión de los mismos y reconocer qué es lo que no les permite realizar una secuencia mediante esta práctica. Un docente plantea que utiliza estos recursos en la ejercitación para que los alumnos vean que la pueden usar como una herramienta más a disposición de ellos, como lo es la calculadora. Se interpreta que el mismo tiene intenciones en considerarlos en el mismo nivel para el uso de sus estudiantes, pero entiende cuáles son sus diferencias y las puede aprovechar.

Se encuentra una relación con el trabajo de Moreno et al (2021) en cuanto a los errores que han manifestado los estudiantes en la especialidad de Matemática del Máster en Formación de Profesorado de secundaria en la tarea de MM. En su investigación han determinado dos tipos de errores; uno tiene que ver con la familiaridad del estudiante con el proceso de modelización y otro, con la aplicación del contenido matemático. En los hallazgos de la presente investigación, los graduados, por un lado, consideran a la MM como: vía, proceso, aplicación, estrategia para la enseñanza de la Matemática, y por otro lado, en la promoción de la MM a través de un SM, han manifestado que solo utilizaron graficadoras para interpretar y analizar resultados. Se advierte, así, que el concepto de MM se presenta confuso y muy variado en el vocabulario de los graduados; por ende, posiblemente consideren a MM en sus planificaciones e implementaciones de distintas formas.

Cruz, Esteley et al (2020) trabajan en el diseño y organización de una propuesta en torno a los procesos de MM con el propósito de buscar la reproducción en el aula de actividades propias del quehacer matemático. Los estudiantes del Profesorado que participan logran apropiarse del proceso de MM de naturaleza intramatemática. Se evidencia un trabajo con MM centrado en los objetos de la disciplina y se ve como una posibilidad de que surjan conocimientos, tanto matemáticos como tecnológicos. Sin dejar de entender las diferencias que se presentan entre los estudiantes de nivel medio y de nivel superior, se puede decir que esto fue mencionado por los docentes encuestados en los beneficios que puede traer el uso de estos recursos y la MM en las clases, ya que respondieron que la principal ganancia es la mejora de la comprensión y la mayor atención, pero también han rescatado que se obtiene cierta habilidad gráfica y que se utilizan con el principal objetivo de visualizar entes matemáticos abstractos.

En la investigación de Cruz, Mántica et al (2020) futuros profesores en Matemática transitan un proceso de MM al resolver una situación real. Se concluye que esto les permite a los estudiantes movilizar conocimientos previos, tomar decisiones y asumir una postura crítica frente a la situación a modelizar, además de la construcción de conocimientos. En este trabajo se puede mencionar que los graduados encuestados responden a esto último como un objetivo formativo, al plantear que los recursos junto con la MM pueden favorecer el pensamiento crítico. Además, consideran a los SM como un aporte que permite a los estudiantes argumentar y validar los resultados obtenidos, como así también junto con la MM explorar los contenidos previos. Asimismo, uno de los encuestados determina que la MM permite una mayor interacción con el modelo y, por lo tanto, un mayor entendimiento del mismo.

En la investigación de Gallart et al (2019), se focaliza sobre la modelización MM en las escuelas secundarias. En su trabajo ha determinado que el principal problema que se presenta para trabajar con la MM en las aulas es la falta de ayuda y orientación al docente en la implementación de este tipo de actividad y que le permita reconocer cuáles son sus objetivos, su encare dentro del currículum, cómo realizar su evaluación o qué metodología utilizar. El autor concluye que es realmente un reto para el docente llevar esta modalidad de trabajo en las clases. Este problema se ha manifestado en esta investigación en cierta medida a través de las palabras "falta de preparación o experiencia" en las respuestas de los graduados, que limita el trabajo de la MM con SM en sus clases. Por otro lado, el factor tiempo no beneficia al docente para poder trabajar de esta manera.

5.3. Aporte innovador y posibles líneas de trabajo a futuro

A partir de este proyecto innovador se puede incentivar a esos graduados que *conocen pero no utilizan* con ideas o propuestas, que nazcan de sus colegas o de nueva bibliografía; para aquellos que *solo implementan estos recursos en el momento de aplicación*, ideas nuevas para hacerlo desde la introducción (en función al contexto y si el tema a enseñar lo permite); al mostrar además los beneficios y el cumplimiento de ciertos objetivos formativos de quienes los utilizan. A raíz de esta investigación sobre los conocimientos de los graduados sobre el uso de los SM en la MM, surge la necesidad de proponer un taller de capacitación para brindar herramientas y conocimientos sobre los tres ejes que articulan el trabajo: TIC, SM y MM. Este motivo se da porque en las respuestas de los graduados se presentaron varios sesgos sobre qué conocen y cómo trabajar la MM con un SM en un curso del nivel secundario. Por otra parte, los mismos docentes explicitan que tuvieron la necesidad de requerir capacitaciones acerca de lo mencionado.

En este taller se pretende, en primer lugar, poder conceptualizar las nociones de TIC, SM y MM para poder analizar las similitudes y diferencias de las mismas. En segundo lugar, se dará espacio a la exploración de distintos SM, con la intención de reflexionar acerca de sus utilidades en las clases de matemática. En tercer lugar, se les propondrá a los participantes, actividades sobre la implementación de la MM en un curso de secundaria. En última instancia, se les pedirá a los docentes que planifiquen una secuencia didáctica de un contenido matemático que se trabaje la MM con algún SM que ellos consideran. Esta propuesta tiene la intención de realizarse de manera grupal, ya que se considera que enriquece el trabajo del taller. Este proyecto se considera innovador en el sentido en que se partió de una inquietud en que se requería una profundización sobre aquellos conocimientos de los graduados acerca del uso de los SM en el trabajo de la MM en el nivel secundario. Se estudiaron esos conocimientos con la intención de poder dar un diagnóstico sobre qué SM conocen, en qué contenidos matemáticos los utilizan, con qué objetivos formativos, cómo trabajan la MM y si lo complementaron con algún SM. Este análisis permitió poder conocer un poco a los graduados y, a partir de ello, se propone un taller con la intención de poder capacitar y brindar herramientas sobre esta cuestión a esos docentes.

A partir de lo expresado, se considera como una posible línea de trabajo la implementación del taller con la planificación de los módulos explicitados anteriormente. En paralelo, se recolectará información sobre los desempeños de los participantes para una nueva investigación sobre este taller.

5.4. Compromiso Social Universitario

La realización de este proyecto innovador en Educación en Matemática busca promover el compromiso social universitario, tal como se expresa en la Declaración de la Conferencia Mundial de Educación Superior (1998), en consonancia con una formación universitaria que fomente "ciudadanos bien informados y profundamente motivados, provistos de un sentido crítico y capaces de analizar los problemas de la sociedad, buscar soluciones para los que se planteen, aplicar estar y asumir responsabilidades sociales" (p.164). En este sentido, uno de los aspectos centrales del compromiso social universitario es buscar la consolidación de Universidades con las problemáticas latentes de la sociedad.

A partir de lo mencionado, el aporte innovador del presente trabajo contribuye en relación con tres aspectos a la sociedad. El primer aspecto está relacionado con la promoción del trabajo de la MM en las escuelas secundarias, como una alternativa de estrategias de enseñanza a través de situaciones problemáticas. El segundo aspecto es la integración de un SM en las propuestas curriculares y está complementado con el trabajo de la MM. Y, como último aspecto, promover la formación y el perfeccionamiento de la práctica docente con respecto al uso de las TIC.

Referencias bibliográficas

Achilli, E. (2008). *Investigación y Formación Docente*. Laborde.

Alvarado Sánchez, J. y Soto Munguía, J. (2020). Una metodología para el diseño de secuencias didácticas para la Educación Matemática. En P. Balda, Paola, M.M. Parra y H. Sostenes (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.356-367). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/22412/.

Arroyo, P., Bambace, M., Cornacchione, A. y Walsh, P. (2016). Enseñar y aprender con GeoGebra, otra mirada de la matemática. En *Actas del 6° Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp.211-220). Sociedad de Educación Matemática Uruguaya. http://funes.uniandes.edu.co/18049/.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa Docente.

Balderas, A. (2002). *Didácticas de las matemáticas en Internet. Comunidades educativas y ambientes virtuales: Situación actual y perspectiva*. http://informaticaeducativa.com/coloquios/mesas/tres/angel/didactica.html.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby (Eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education* (pp.45-159). National Center for Mathematics Education of Gothenburg University.

Cabrera, M. y Fernández, C. (2021). *Metodología para la enseñanza de la geometría del espacio con empleo de medios tecnológicos* [video]. YouTube. https://youtu.be/HfY9zgHsyQo.

Consejo Interuniversitario Nacional (2013). *Estándares para la Acreditación de los Profesorados Universitarios en Ciencias Exactas y Naturales. Resolución 856/13*. CIN.

Cruz, M., Esteley, C. y Scaglia, S. (2020). Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática vinculada con fenómenos geométricos. *Educación Matemática*, *32*(1), 193-220. https://doi.org/10.24844/EM3201.09.

Cruz, M., Mántica y A., Gallo, M. (2020). Experiencia de modelización matemática llevada a cabo con futuros profesores. *Números*, *103*, 13-28. http://sinewton.es/revista_numeros/103/.

Delorenzi, O. (2008). Biografía Escolar: ¿Determinante de las Prácticas Docentes o punto de partida para su construcción? *Voces de la Educación Superior*, (2), 1-8. http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/revistacomponents/revista/archivos/voces/numero01/ArchivosParaImprimir/1_.pdf

Gallart, C., García Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización Matemática en la Educación Matemática: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, *12*(1), 71-85. https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955.

Giraldo, Y. (2021). Diseño metodológico para la enseñanza de la Modelación Matemática con Ecuaciones Lineales mediadas por las TIC [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79271.

Juan, A. y Bautista, G. (2001). *Didácticas de las matemáticas en enseñanza superior: La utilización de software especializado*. UOC. https://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html.

Hernandez, R., Fernandez, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). Mc Graw Hill.

Lopez, O. (s/f). *Software Matemático*. UDEC. http://www2.udec.cl/~ociellopez/software1.html.

Meza, A. y Cantarell, L. (2002). Importancia del manejo de estrategias de aprendizaje para el uso educativo de nuevas tecnologías de información y comunicación en educación. *Mística*. https://funredes.org/mistica/castellano/ciberoteca/participantes/docuparti/esp_doc_71.html.

Montiel, N. (2008). Tecnologías de Información y Comunicación para las organizaciones del Siglo XXI. *Revista del Centro de Investigación de Ciencias Administrativas y Gerenciales*, *5*(1), 77-86. http://ojs.urbe.edu/index.php/cicag/article/view/453.

Moreno, A., Marín, M. y Ramírez Uclés, R. (2021). Errores de profesores en matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, *15*(2), 109-136. https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática Hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros Del Zorzal.

Ministerio de Educación de Santa Fe (2014). *Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada*. https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf.

Veytia Bucheli, M.G. (2016). Las TIC como objeto de estudio en las investigaciones de los alumnos de Posgrado en Educación. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, *3*(6). https://www.pag.org.mx/index.php/PAG/article/view/620.

Proyectos Innovadores en Educación Matemática Vol. 1

Interrogantes estudiantiles acerca de la utilidad de la Matemática: Vinculación del concepto de Funciones y la contaminación ambiental, en un colegio agrotécnico del nivel secundario

Student questions about the usefulness of mathematics: linking the concept of functions and environmental pollution, in an agrotechnical secondary school

Bianca Marconetto
bianmarconetto@gmail.com

Resumen
El presente proyecto innovador en Educación Matemática surge a partir de las problemáticas matemáticas estudiantiles acerca de la aplicación y uso de la Matemática en la vida cotidiana. Desde hace tiempo, predomina una concepción tradicional de dicha disciplina, en la cual los contenidos resultan aislados de su utilidad y aplicabilidad. A causa de ello, en el aula predominan comentarios como "¿y esto para qué me sirve?", que los docentes suelen responder de manera genérica. Es por esto que a partir del análisis de cómo los libros de texto desarrollan el contenido de Funciones, y debido a la necesidad de su recurrencia por parte de los docentes, se interroga acerca de cómo la implementación de las actividades brindadas por tales libros influye en las formas de enseñanza y su implicancia en el aprendizaje. A partir de estas actividades, se pretende poder establecer vinculaciones potentes y óptimas para la modalidad agropecuaria, con adaptaciones y reformulaciones para poder vincularlas con la contaminación ambiental. A partir de la inquietud mencionada, se considera pertinente vincular al proyecto con la Educación Matemática Realista, el contexto sociocultural, la Educación y Modelización Matemática. Con el objetivo de contextualizar y delimitar la propuesta, se hace foco en una institución y modalidad determinada.
Palabras clave
Actividades relacionadas con la vida cotidiana. Libros de texto. Funciones.

Abstract
This innovative project in Mathematics Education arises from student mathematical problems about the application and the use of Mathematics in everyday life. For a long time, a traditional conception of this discipline has prevailed, where the contents are isolated from their usefulness and applicability. Because of this, comments such as "what's this for me?" predominate in the classroom and the teachers usually answer in a generic way. That is why, based on the analysis of how textbooks develop the content of Functions, and due to the need for their recurrence by teachers, it's questioned about how the implementation of the activities provided by those books influence the forms of teaching and its implication in learning. From these activities, it's intended to be able to establish powerful and optimal links for the agricultural modality, adapting and reformulating them to be able to link them with environmental pollution. Based on the aforementioned concern, it's considered pertinent to link the project with Realistic Mathematical Education, the sociocultural context, education and Mathematical modeling. In order to contextualize and delimit the proposal, the focus is on a specific institution and modality.
Keywords
Mathematics in everyday life. Textbooks. Functions.

1. Presentación

En el presente apartado, en primer lugar, se hace una introducción acerca del origen de la problemática y, en segundo lugar, se analizan investigaciones del campo que fueron desarrolladas por otros investigadores.

1.1. Problemática

En la actualidad, dentro del aula y en la sociedad en general, prevalecen comentarios e interrogantes acerca de la Matemática y su utilidad, tales como: ¿Y esto para qué sirve? ¿En qué otros momentos y ocasiones voy a volver a usarlo? ¿Para qué estudiar tanto si solo nos sirve para hacer cuentas? A su vez, predomina la idea de la Matemática como una "ciencia difícil", "aquella que es para algunos pocos", y "solo los estudiantes más capaces son los que la entienden". Ante esta "mala fama" que la sociedad tiene acerca de tal disciplina, se puede encontrar también que a la misma se la considera muy abstracta, sin vinculación con la vida cotidiana y que no todos son capaces de comprenderla. En relación con ello, desde hace algunos años, se investiga sobre la importancia en proponer nuevas actividades y herramientas que permitan vincular a la Matemática con la vida cotidiana.

En varias ocasiones, ante la típica pregunta de los estudiantes "Profe, ¿y esto para qué me sirve?", con base a lo vivenciado, las respuestas son con relación a la aplicación de la Matemática en general: "la Matemática está en todos lados". En este sentido, según lo plantea el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014), la Matemática surge de la necesidad de encontrar respuestas a problemas en diversos contextos, tales como los que se presentan en la vida cotidiana, los vinculados a otras ciencias y/o aquellos problemas que son producto del propio pensamiento matemático.

Dado que la gran mayoría de los docentes se remiten a libros de ciertas editoriales para basarse en las actividades que desarrollan en el aula y, a partir del análisis sobre el contenido que aborda cada uno de estos materiales, se observa que en general predominan actividades mecánicas. A su vez, dentro de la escasa cantidad de actividades del tipo situaciones-problemas, particularmente se observan aquellas relacionadas con la compra y venta de productos. Además, en la redacción de algunas de estas actividades, se puede evidenciar que tampoco se encuentran relacionadas con la realidad propiamente dicha. Este hecho genera el surgimiento de los siguientes interrogantes: ¿Cuál es la realidad? ¿Es la misma para todos? ¿A qué se hace referencia cuando se habla de "la vida cotidiana"? ¿Lo cotidiano para quién?

Como se muestra en las imágenes de la Figura 4.1, comúnmente conocidas como "memes" tan cercanos y utilizados por los estudiantes en la actualidad, están relacionadas a las actividades que son trabajadas en el aula vinculadas a "problemas cotidianos".

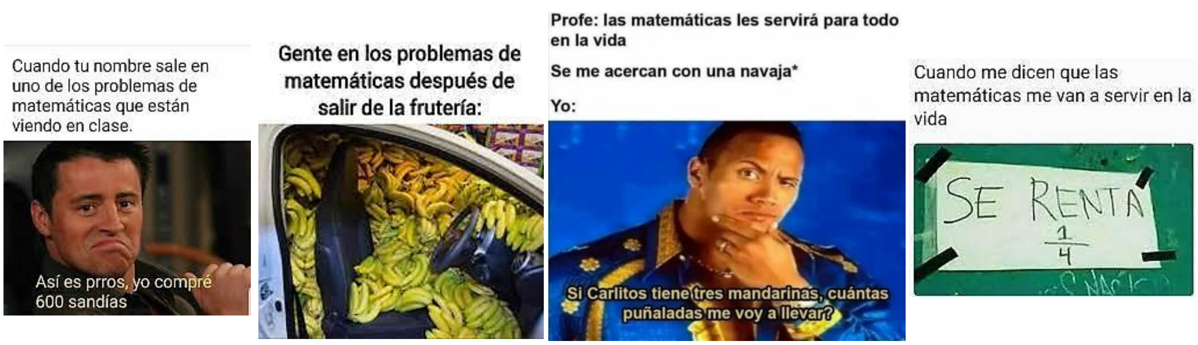


Figura 4.1. Memes sobre problemas matemáticos de la vida cotidiana

Concretamente, con relación a lo planteado, se considera fundamental vincular a la Matemática con la vida cotidiana, en el sentido en que esté ligada a la realidad de un curso en particular, y dentro de un determinado contexto sociocultural. Por lo que, para poder responder de forma más específica a la reiterada pregunta de los estudiantes "¿y esto para qué me sirve?" y no enfocarse en una respuesta generalista, como la que posiblemente prevalece en las aulas, y para poder delimitar un poco más el proyecto, se profundiza sobre el concepto de "Función", sus tipos y aplicaciones.

En un primer lugar, se pensó en enfocar la propuesta con la Función Exponencial y relacionarlo con aplicaciones tales como, por ejemplo, las frases utilizadas en la actualidad con respecto a la pandemia mundial "la curva de contagios crece exponencialmente", un tema muy actual y que trasciende a toda la población. A la vez, el asunto resulta muy reiterativo en estos tiempos, por lo que la sociedad ya se encuentra abrumada de solo hablar y escuchar sobre la pandemia, entonces: ¿Por qué no incorporar actividades relacionadas con el contexto de los estudiantes y que se sientan motivados a resolverlas? ¿Cómo determinar los temas que son de interés para los estudiantes? Para que la investigación sea un poco más abarcativa y valiosa a los fines propios, se considera pertinente investigar sobre el concepto de "Función", en particular en Función lineal y con hincapié en sus diferentes aplicaciones. En el sentido aplicativo propiamente dicho, resulta crucial poder desarrollar con profundidad los diferentes interrogantes que pueden surgir dentro del aula, relacionado con tal contenido: ¿Para qué se utiliza la "Función"? ¿Qué diferencias y semejanzas hay en los usos de los diferentes tipos de Funciones? ¿Para qué sirve cada uno?, entre otros.

A partir de la problemática y en cuanto a las "actividades relacionadas con la vida cotidiana" que se presentan en los libros de texto: ¿Qué tipo de actividades propondría en la secuencia? ¿De qué manera responden los estudiantes ante actividades que son de temas de su interés? ¿Cómo se sienten los estudiantes cuando se hallan involucrados en su enseñanza-aprendizaje de este modo? ¿Cómo reaccionan los estudiantes ante situaciones que les permitan ampliar sus horizontes? ¿De qué manera llevarlo a cabo? Por ello se enfoca el proyecto ante el análisis de las propuestas dadas por los libros de texto para el concepto de Función. En este sentido, se encuadra el proyecto a partir del análisis de tales libros y del estudio de otras investigaciones relacionadas al campo. A partir del estudio realizado, interesa poder realizar una propuesta específica que resulte acorde a lo mencionado.

1.2. Objetivos

Para poder atender a los interrogantes mencionados, el objetivo general del proyecto innovador es analizar los libros de textos y su abordaje en cuanto a los diferentes tipos de Funciones y que atienda específicamente a:

- Reconocer los diferentes tipos de actividades que pueden relacionarse con "la vida cotidiana" y establecer relaciones potentes y óptimas para la modalidad agropecuaria.
- Analizar el abordaje de libros de texto en relación con la unidad de Funciones.
- Plantear una propuesta del contenido de "Función" que atienda a la contaminación ambiental y el contexto agrotécnico.

1.3. Estado de conocimiento

De acuerdo a la problemática señalada al comienzo del presente escrito: ¿y esto para qué me sirve?, autores como Díaz et al (2020) en su investigación sobre una experiencia de modelización en una clase de Matemática para las Ciencias Naturales, se enfocan en realizar una propuesta para un determinado curso. En base a su problemática y a aquellos docentes que enseñan Matemática a no matemáticos, establecen la distinción entre enseñar aplicaciones de la Matemática o de la Matemática aplicada. Remarcan que la primera es la más común en encontrar en especial en los libros de texto. En efecto, lo relacionan en cuanto a que, para enseñar de este modo, primero se presentan los conceptos matemáticos y luego las aplicaciones de los mismos. Acerca de los libros de texto y las menciones de los autores, se puede evidenciar que este tipo de actividades aparecen en último lugar como ejercicios adicionales. En este sentido, ellos consideran que enseñar a partir de las aplicaciones matemáticas puede volverse un obstáculo para que los estudiantes aprecien el valor de la Matemática con relación a entender, explicar y resolver problemas de la vida cotidiana. Es por ello que su investigación se centra en una propuesta pensada en la Matemática aplicada, para la cual propusieron un trabajo vinculado con la implementación de modelización en un curso de dicha disciplina de primer año de las carreras asociadas a las ciencias naturales durante 2017 y 2018. Se armaron grupos donde cada uno de ellos debía realizar una secuencia de proyectos, junto con un tutor a cargo del grupo. Cada proyecto estaba conformado por un conjunto de problemas vinculados a un mismo eje temático: Funciones, Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables, respectivamente. Se considera particularmente el eje temático "Funciones" del proyecto llevado a cabo en el presente trabajo y, a modo de inspiración, se profundiza lo realizado allí. Particularmente se trabajó con el concepto de Función exponencial a partir de una situación problemática e identificaron las variables y la ley de la Función. Concretamente, se buscó que los estudiantes pudieran explorar y modelizar matemáticamente los fenómenos presentados.

Luego de la experiencia obtenida en los laboratorios, cada grupo de estudiantes pudo diseñar el modelo a partir del software GeoGebra y los datos que habían recabado, y junto con la herramienta de "Análisis de regresión" realizaron modelos plausibles. Con la guía de los tutores, llegaron a un modelo que representaba la situación.

El progreso de cada estudiante se evaluó de dos formas: una grupal, en la que debían realizar un video que sintetizara el proceso de modelización de cada uno de los problemas del proyecto, y la instancia individual consistió en hacer un reporte escrito con problemas y preguntas relacionadas con el contenido del proyecto.

Como conclusión, menciona que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de aplicar los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral en problemas de la vida real. En efecto, el estudiantado valoró la metodología llevada a cabo, aunque por momentos los investigadores notaron que se generó cierto grado de frustración y desconcierto al no estar acostumbrados a ser el centro de su proceso de aprendizaje. Remarcaron, también, el uso del GeoGebra como herramienta muy importante para los estudiantes respecto a la conceptualización de funciones y sus diferentes representaciones.

Para finalizar, realizan una breve reflexión acerca del cambio metodológico en la enseñanza y la dinámica llevada a cabo en la que se pone en juego la reflexión sobre los resultados, de pensar y hacer, de planear y testear, generan mucho vértigo, pero que son inherentes a la tarea docente y a la vida misma.

Centrado en las investigaciones vinculadas con el contexto del grupo de estudiantes, se remarca una experiencia de modelización llevada a cabo en un grupo de alumnos de 9° año de Educación General Básica en un colegio de General Pico, La Pampa, Argentina. Para realizar tal experiencia, los estudiantes tuvieron que llevar a la clase de Matemática, botellas de diferentes formas. La actividad se llevó a cabo en un laboratorio y consistió en medir el tiempo que tarda el llenado de una de las botellas. Dicho modelo fue introductorio para abordar el nuevo concepto. Luego de que los estudiantes realizaran el experimento, la docente les planteó el interrogante "¿cuánto tiempo se emplea para llenar una botella?", para el cual en primer lugar tuvieron que indicar las variables en estudio. En todo momento, la profesora cumplió el rol de guía y realizó preguntas acordes para orientarlos hacia su objetivo: que elaboren conclusiones acerca de la relación entre la altura del líquido en la botella y el tiempo transcurrido para verterlo en la misma. Durante la puesta en común, se realizaron comentarios, observaciones y conclusiones entre los estudiantes y la docente con relación al experimento en cuestión. Posteriormente, graficaron valiéndose del software "Graph". Los autores señalan que esto contribuyó a que los estudiantes realicen ajustes en las curvas y culminen sus resultados bajo el tratamiento de distintas representaciones. Finalmente, abordan la institucionalización del concepto de Función lineal con respecto al caso del frasco cilíndrico. Además, identificaron algunos elementos característicos: pendiente y ordenada al origen.

Como conclusión, se remarca la importancia del uso del software para favorecer la comprensión de los estudiantes. Señalan, además, que los alumnos se involucraron de manera directa en la búsqueda de la solución del problema y sus roles fueron muy activos. Durante su resolución, les demandó tomar datos reales del fenómeno, procesarlos, construir un modelo matemático y debatir los procedimientos y los resultados con sus compañeros de clase. A pesar de algunas dificultades, por ejemplo, en cuanto al tiempo empleado, remarcan que predominan los resultados positivos en la realización de esta experiencia.

Un trabajo relacionado con la modelización de la Matemática es el presentado por Reid y Botta (2020), quienes desarrollan dos experiencias llevadas a cabo en cuarto año en distintos colegios de Educación Secundaria. Incorporaron la modelización matemática como estrategia pedagógica con el objetivo de motivar el trabajo matemático y establecer fuertes raíces cognitivas entre los conceptos de Función lineal y cuadrática, para lo cual utilizaron recursos tecnológicos. La actividad correspondiente a Función lineal se enmarca bajo el interrogante ¿cuál es el tiempo que tardan distintos tipos de velas en consumirse? Allí estudiaron cómo varía la altura de la vela a medida que transcurre el tiempo, con distintas velas y el registro de sus observaciones. Cada grupo de estudiantes elaboró hipótesis, identificó variables, graficó los datos y obtuvo conclusiones. El estudiantado manifestó que se hallaron motivados durante la actividad. Se encontró una relación lineal entre la altura y lo que se consume la vela en el tiempo transcurrido, en la cual los parámetros corresponden a la altura inicial como ordenada al origen y la velocidad del consumo como pendiente. Esta relación se obtuvo con los datos recogidos a partir de la experimentación y uso de GeoGebra.

La segunda actividad está vinculada con la Función cuadrática y surge a partir del interrogante: ¿Cuántas monedas necesito para "llenar" un círculo? El trabajo consistió en rellenar círculos de distinto radio con monedas y cada grupo recibió una copia de circunferencias con distintos diámetros. Para responder a las preguntas: "¿Cuáles son las variables que se relacionan en el problema? ¿Cuáles son las independientes y cuáles son las dependientes?", los alumnos utilizaron GeoGebra para representar la situación.

Las actividades llevadas a cabo permitieron estimular el desarrollo del pensamiento matemático y le dieron sentido al uso de las Funciones para modelizar situaciones. Las autoras comentan que los estudiantes estaban interesados en encontrar respuestas a los interrogantes planteados. Además, señalan que el uso del software GeoGebra fue determinante para la profundización y exploración de las ideas matemáticas involucradas en las actividades planteadas.

Las investigaciones mencionadas, en cuanto a propuestas de enseñanza del contenido "Función", son empleadas con base a la importancia de la vinculación de la Matemática con el contexto sociocultural y su aplicabilidad.

Con relación a esto, Díaz et al (2012) establecen la necesidad de trascender metodologías desligadas de la realidad del estudiante hacia nuevas opciones didácticas que valoren a la Matemática, sus razonamientos y aplicaciones, desde su contexto meramente sociocultural. Como resultado de su investigación, encuentran que el uso del ya mencionado contexto del estudiante mejora sus procesos motivacionales, comprensión matemática e interacciones sociales cooperativas. Además, evidencian que las situaciones de aprendizaje contextualizado favorecen la comprensión de conceptos al percibir la matemática como una disciplina íntimamente relacionada con su cotidianidad.

Lo expuesto en cuanto a vincular a la Matemática con el contexto sociocultural y la contextualización del proyecto con un colegio agrotécnico, los autores Toledo y Cruz (2018) investigaron acerca de un caso en un colegio con la misma modalidad a la mencionada. Si bien el contenido matemático que abordaron no fue el de Funciones, para el presente proyecto se recupera la idea en la que se llevó a cabo dicha propuesta, en base a las prácticas de siembra de hortalizas. Para ello, siguieron los seis principios de la Educación Matemática Realista (EMR), donde los estudiantes construyeron modelos matemáticos, donde se parte de la exploración de situaciones cercanas a su contexto.

Además de la vinculación con el contexto de los estudiantes, es interesante señalar el nexo de la Matemática con otras áreas, como lo remarca Jasso (2016) con la sinergia de la Matemática con la Física. En este sentido, establece relaciones entre las Funciones matemáticas y ciertos conceptos de Física. El autor señala que la homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas, se establece cuando un científico aplica una función para describir matemáticamente la regularidad de un proceso físico de acuerdo con un resultado experimental. En este sentido, además de remarcar la aplicabilidad de la Matemática, subraya la importancia de la interdisciplinaridad al vincular las dos ciencias.

Con relación al nexo entre la Matemática y la Física, y su aplicabilidad, Estrada (2010) presenta un análisis reflexivo acerca del papel que juega la enseñanza de las ciencias en un contexto de conciencia social relacionado con la contaminación ambiental. Su objetivo fue subrayar la importancia de que estas ciencias, a las cuales llama "duras", se pueden aplicar a la creación de una conciencia social con repercusión en el bienestar social. En este sentido, concluye que la enseñanza de las ciencias "duras", ha de tener un enfoque ambientalista, pero sin perder el formalismo científico que las caracteriza. Además, señala que es importante hacerles enfatizar a los estudiantes que ciencia-sociedad-ambiente no están desligados y que, además, se puede crear una conciencia social ambientalista a través de la enseñanza de las ciencias.

1.4. Síntesis del estado de conocimiento

Las primeras investigaciones se relacionan con una propuesta implementada en cursos particulares en el nivel secundario, y se abordan contenidos de Función lineal y cuadrática. En este sentido, a partir de una actividad introductoria y de experimentación, utilizan tablas, gráficos y su representación algebraica para modelizar la situación. En una de ellas, se trabaja para identificar la pendiente y la ordenada al origen. En cuanto a la situación planteada correspondiente a la Función cuadrática, no se especifica si abordaron elementos característicos de la misma.

En la propuesta implementada en el nivel superior y en la que trabajaron el concepto de Función exponencial a partir de una situación problemática, identificaron las variables y la ley. En un primer momento los estudiantes representaron la situación en tablas y, posteriormente, realizaron su gráfica.

Un aspecto logrado común en todas estas investigaciones mencionadas, fue que en primer lugar los estudiantes realizaron representaciones de la situación en tablas y, posteriormente, utilizaron el software GeoGebra para complementar la gráfica realizada a mano alzada. Los investigadores remarcaron lo importante que resultó utilizar el software para pulir detalles y apoyar el trabajo previo realizado. Además, todos ellos remarcaron la interiorización de los estudiantes con las actividades desarrolladas y su interés por dar respuesta a los interrogantes planteados al comienzo de cada actividad. El grupo estudiantil se encontró inmerso en las actividades y se hallaron haciendo Matemática casi inconscientemente, es decir, sin darse cuenta.

En conclusión, se puede notar que existen elementos característicos y conceptos que no son abordados en profundidad o que no son mencionados explícitamente en los trabajos. Además, en muchos casos se considera la ley de la Función y su representación gráfica y por tablas, pero no se hace énfasis al análisis de los demás elementos característicos de las Funciones trabajadas (lineal, cuadrática, exponencial).

Por otro lado, todas las propuestas son pensadas y vinculadas con el contexto de cada grupo de estudiantes, lo cual es importante según lo abordan otros estudios que dan cuenta del estado de conocimiento. En una investigación se aborda la importancia de vincular la Matemática con otras áreas y disciplinas, como es el caso de la Física. En este sentido, en un último trabajo, pero no menos importante, se establece la importancia de vincular los contenidos con una situación mundial que nos preocupa a todos como es el caso de la contaminación ambiental.

En conjunción con lo mencionado y como proyecto innovador, se va a plantear el análisis de libros de texto. A partir de ello, se pretende realizar una propuesta involucrada con la contaminación ambiental, que atienda a Funciones lineales que se trabajan en el nivel secundario, según lo establece el Diseño Curricular Jurisdiccional. Desde esta perspectiva, se pretende hacer un análisis crítico de la implicación de las personas en el medio ambiente y sobre cómo sus acciones pueden perjudicar o, por el contrario, contribuir a la conservación del espacio donde habitan. A partir del estudio de Funciones lineales, se procura entender sobre cómo cada pequeño acto puede afectar al medio ambiente.

2. Marco teórico - referencial

En este proyecto se acuerda con lo planteado por el Diseño Curricular Jurisdiccional DCJ (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) con respecto a que la Matemática surge de la necesidad de encontrar respuestas a problemas provenientes de diversos contextos, tales como los que se presentan en la vida cotidiana, los vinculados a otras ciencias o aquellos que son producto del propio pensamiento matemático. Además, dicha disciplina se encuentra atravesada por concepciones sociales y culturales a tenerse en cuenta a la hora de pensar la clase.

Según los Núcleos Interdisciplinarios de Contenidos -NIC- (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2016), se puede analizar a la alfabetización matemática desde tres dimensiones: el contenido matemático que se requiere utilizar para resolver un problema, la situación o el contexto en que se localiza el problema y aquello que se pone en juego para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas, para resolver la situación planteada.

Es por ello que se considera como sustento teórico a la EMR, la modelización, la aplicación matemática y la corriente sociocultural del aprendizaje.

Durante todo el escrito se hace mención a diferentes tipos de actividades; es por ello que se considera crucial tomar la clasificación realizada por Borasi (1986), en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar la enseñanza de la resolución de problemas. En efecto, utiliza los siguientes elementos estructurales para una tipología de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cual se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema, definición explícita de la tarea a desarrollar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

Tales elementos estructurales permiten dar origen a la clasificación que se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Clasificación de tipos de actividades (García Cruz, 2000)

Tipo	Contexto	Formulación	Soluciones	Método
Ejercicio	Inexistente	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Problema con texto	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Puzzle	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo Acto de ingenio
Prueba de una conjetura	Explícito en el texto y solo de forma parcial	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos
Problemas de	Solo de forma	Parcialmente dada	Muchas posibles,	Exploración del

la vida real	parcial en el texto	Algunas alternativas posibles	de forma aproximada	contexto, reformulación, creación de un modelo

2.1. Educación Matemática Realista (EMR)

Esta corriente didáctica nace en la década de 1960, como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética y a la aplicación en las aulas de la "matemática moderna" o "conjuntista"; es decir, como oposición a las corrientes de la época, bajo las ideas de Freudenthal (1905-1990). Esta corriente propone a la matemática como una actividad humana que consiste en matematizar, específicamente, en organizar o estructurar la realidad, incluida la matemática misma (Freudenthal, 1991; citado en Bressan et al, 2016).

Algunas de las principales características de esta corriente son:

a) Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos.
b) El uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones.
c) La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
d) El papel clave del docente como guía.
e) La importancia de la interacción tanto grupal como de toda la clase.
f) La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática.

A pesar de las ideas generales, en cuanto a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje comunes en la EMR y el constructivismo en sí, esta corriente no pretende ser una teoría general, sino que se basa en algunas ideas centrales que suelen ser expuestas bajo el nombre de Principios de la EMR y que se encuentran profundamente relacionados entre sí.

2.2. Modelización Matemática

Bassanezi (1994; citado en Cruz et al, 2020) afirma que emplear la Modelización Matemática (MM) como abordaje de enseñanza y medio para el aprendizaje posibilita el desarrollo de ciertos modos de pensamiento y actuación; entre otros, la producción de conocimientos, la realización de abstracciones y formalizaciones y el establecimiento de generalizaciones y analogías. En este sentido, el objetivo es que los estudiantes no solo puedan aplicar conocimientos matemáticos ya conocidos, sino que puedan producir conocimientos que se irán configurando o reconfigurando en el proceso de MM.

Acorde a dicho esquema, quienes se involucran con la MM formulan problemas en el marco de un tema en estudio, emplean datos existentes o producen nuevos con el fin de construir un modelo que dé respuestas al problema, se valida el modelo y, en caso necesario, se modifica. En ese sentido, el proceso es cíclico e incluye construcciones provisorias.

Bassanezi (1994) pone de manifiesto que el trabajo con MM puede tener importancia intrínseca independientemente de su aplicación a la vida diaria. La construcción de modelos alude a los que son producidos libremente por los estudiantes y, en esta etapa, se desconoce la matemática que se pondrá en juego.

En cuanto a lo planteado en el apartado 2.1 con respecto a la EMR, no se limita a pensar en el estudio de fenómenos del mundo real, sino que resalta la importancia de que los estudiantes enfrenten situaciones que tienen la capacidad de visualizar o imaginar por la influencia de experiencias previas.

2.3. Aplicación Matemática

Según los NIC (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2016), resulta fundamental que las propuestas de enseñanza involucren a los estudiantes en la investigación para la construcción de nuevos conocimientos destinados a la utilización, reinversión o aplicación de los ya estudiados, también los que implican procesos de validación de los procedimientos y/o resultados; y los problemas cuyos objetivos son permitir al docente y a los estudiantes conocer y evaluar el estado o avance de los conocimientos en el campo disciplinar.

Específicamente para una propuesta de enseñanza en particular, el documento mencionado resalta la importancia que se encuentren relaciones entre los datos en situaciones que no estén explicitadas y que pueden modelizarse mediante Funciones lineales. Por medio de esta experiencia se pueden construir los conceptos de Función, Función lineal, pendiente, razón de cambio. Surgen las distintas representaciones de una Función (tablas, gráficos, algebraica, verbal) y su utilidad en cada situación. Luego de la experiencia esperan que los estudiantes conjeturen acerca del comportamiento de la función lineal al variar sus parámetros.

A su vez, Vivas (2018) menciona algunas aplicaciones de la Matemática:

- *Matemática y Criptografía.* La criptografía como el arte de escribir mensajes secretos. Además de la teoría de los números, muchas otras ramas de la Matemática son usadas aquí tales como la combinatoria, la probabilidad, etc.
- *Matemática y Redes Sociales.* Han tomado el papel de uno de los principales medios de comunicación y pueden ser analizadas a partir de la Matemática. La teoría de grafos aparece como básica en este campo.
- *Matemáticas y Finanzas.* Desde los problemas básicos de porcentajes hasta los complejos modelos de predicción de portafolios de inversión, comportamiento de la bolsa de valores, etc.
- *Matemática y Google.* El procedimiento para encontrar información por Google hace uso de un algoritmo que asigna la importancia de un sitio web relacionado con la palabra búsqueda. Este algoritmo se llama PageRank y usa Matemática en su procedimiento, aunque de manera natural el algoritmo se mejora día a día. El álgebra lineal y la probabilidad son básicos de esta tecnología.
- *Matemática en Sociología y Psicología.* La probabilidad, el cálculo, los sistemas no lineales, la teoría de juego son parte de estas disciplinas.
- *Matemática en el combate al crimen organizado.* La teoría de juegos, la probabilidad, la minería de datos, el estudio de redes sociales, ecuaciones diferenciales, modelos dinámicos, han llegado a ser ramas importantes de esta área.
- *Matemática y el cubo Rubik.* Pertenece a la teoría de grupos, principalmente el grupo finito de permutaciones, diferentes propuestas para su modelación y solución se han dado, incluso en diferentes grupos como el grupo lineal.
- *Matemática y Música.* La ciencia matemática tiene mucho que ver con la música, con su creación, con su ejecución y con su interpretación. La serie de Fibonacci, el número Áureo, fracciones continuas, las transformaciones de Fourier, transformaciones lineales, transformada wavelet y otros son parte del ritmo musical.
- *Matemática y Arte.* La Matemática está inmersa en la belleza y el arte, en la Mona Lisa, el hombre de Vitruvio, y muchas otras obras de Leonardo da Vinci, que usó la Matemática en sus aportes futuristas realizados durante el Renacimiento.

- *Matemática y Medicina.* Los modelos del corazón, del pulmón, del riñón, del cerebro, el estudio de las enfermedades, el SIDA, el procesamiento de imagen y la tomografía son sin dudas áreas de máxima prioridad.
- *Matemática y Juegos de Azar.* Una gran cantidad de juegos de azar tiene que ver con la Matemática y la probabilidad es el área que la caracteriza.
- *Matemática y el Tráfico.* El diseño de vías de todo tipo y todo aquello que pueda ayudar a su optimización puede ser ayudado por la Matemática; por ejemplo, con la teoría de grafos, ecuaciones diferenciales, optimización, etc.
- *Matemática y Biología.* La estadística al por mayor es utilizada en la biología, así como todo tipo de modelos con ecuaciones diferenciales.
- *Matemática, Física y Química.* Son ciencias que se encuentran estrechamente vinculadas, principalmente la Matemática y la Física.
- *Matemática y Arquitectura.* Son áreas muy relacionadas, desde la geometría y la trigonometría, hasta los fractales y el álgebra lineal, etc.
- *Matemática y el diseño 3D.* Estos diseños tienen características geométricas particulares, el espacio euclidiano y las transformaciones hacen que puedan tener movimientos los modelos diseñados.
- *Matemática y la Resolución de Problemas.* Se procura desde la Matemática que el estudiante adquiera habilidades para que pueda resolver problemas aun cuando no sean específicamente de este campo.
- *Matemática, Genética y DNA.* Están modeladas por herramientas matemáticas, ecuaciones diferenciales, series, análisis, probabilidad, etc.
- *Matemática y Teoría de Códigos.* La Matemática proporciona la manera de escribir los códigos, desde la aritmética más simple como las binarias, hasta las más complejas teorías dentro de la geometría algebraica.
- *Matemática, Política y Elecciones.* Los sistemas electorales son diseñados en base a modelos matemáticos. Incluye la teoría de la elección, teoría del caos, estrategias, probabilidad, etc.

2.4. Teoría sociocultural

La teoría pedagógica de Vigotsky se sustenta en el análisis del desarrollo de los procesos pedagógicos, para la cual se tiene en cuenta la interiorización de las prácticas sociales del sujeto. Para él, estos procesos se conforman en la vida social, en la interacción del sujeto; es decir, en actividades compartidas con otros. En este sentido, la construcción del conocimiento se desarrolla de manera social. El docente juega un rol de facilitador entre la interacción social y el alumno, además de promover la interacción entre los mismos alumnos y su comunidad.

Además, se sitúa en la zona de desarrollo próximo, entendida como la posibilidad de aprender con el apoyo de los demás. Se resalta el uso de los signos como herramientas, las cuales modifican a la persona que los utiliza y le permiten actuar sobre la realidad. El medio permite expresar ideas y apropiarse del conocimiento. Se considera al alumno relacionado con el desarrollo social y cultural, en el cual influye de esta manera el entorno sociocultural en su desarrollo cognitivo.

3. Metodología

En el presente apartado se hace mención de la metodología llevada a cabo en el proyecto. A partir de la descripción de la contextualización, se requiere dejar en evidencia aquello que se pretende estudiar, cuáles son los sujetos analizados, los instrumentos utilizados y en último lugar se hace mención de las categorías de análisis y el procesamiento de datos.

Con el objetivo de delimitar y contextualizar, se focaliza el siguiente proyecto para un curso particular. En este sentido, se lo enmarca para un grupo de estudiantes con el que se estableció relación tanto de forma presencial como virtual. El estudiantado forma parte de una escuela de gestión privada con modalidad técnica agropecuaria, de la localidad de Totoras, y provienen en general de zonas rurales y localidades vecinas. En general, y por lo que se pudo observar, sus intereses se dirigen particularmente hacia la temática agropecuaria; sin embargo, también revelaron otros intereses.

3.1. Enfoque y alcance

Se considera para la presente propuesta un enfoque cualitativo en el sentido en que se estudian los libros de texto referidos al contenido de Función, dirigidos para estudiantes del nivel secundario. Además, tiene un alcance descriptivo-interpretativo. A partir del análisis del diseño de actividades propuestas por los libros de texto y relacionadas con el concepto mencionado, se pretende poder ver sobre cómo se desarrolla en cada documento desde la perspectiva adoptada en el marco teórico. En este sentido, se desea examinar acerca del desarrollo de los materiales disponibles, que se encuentran en el mercado y que son usados por los docentes para la planificación de sus clases. Se analiza específicamente el capítulo de Funciones con el propósito de evidenciar cómo se lleva a cabo tal unidad y, para la propuesta de enseñanza enmarcada en el proyecto innovador, focalizar en las Funciones lineales. En base a esto, se propende a establecer relaciones en cuanto al predominio de la modalidad tradicional de enseñanza, donde sobresalen aquellos contenidos aislados de su aplicación y vinculación con la vida cotidiana.

3.2. Sujetos de análisis

Como el proyecto se refiere al estudio y análisis de los libros de texto en cuanto al capítulo de Funciones (y los diferentes tipos de Funciones), los sujetos de estudio considerados son tales documentos, donde se procura analizar un total de cinco de ellos. Es decir, como recolección de información se hace un análisis documental de dichos escritos.

3.3. Técnicas e instrumentos

Se realiza una exploración de los libros de texto para el análisis de las actividades y su desarrollo. Dos de ellos vinculados a una misma editorial, siendo uno continuación del otro en cuanto a sus contenidos. Con el objetivo de analizar diferentes propuestas, se seleccionaron libros de distintos años y ediciones. Además de tal selección, se focalizó en escritos que poseen diferentes tipos de Funciones para poder analizar el desarrollo de cada una de ellas.

Específicamente, los libros son:

- (L1) Entre números IV. Actividades de Matemática (Santillana, 2018)
- (L2) Matemática. Funciones 1 (Longseller, 2002)
- (L3) Matemática. Funciones 2 (Longseller, 2002)
- (L4) Matemática. Activados 5 (Puerto de Palos, 2013)
- (L5) Matemática 5 (Estrada, 2015)

3.4. Categorías de análisis

Para las categorías de análisis se establecen:

- Actividades relacionadas con la vida cotidiana (AVC): analizar acerca de los diferentes enunciados que se presentan como "relacionados con la vida cotidiana" y los "memes" utilizados por los estudiantes.
- Actividades óptimas para la modalidad agropecuaria (AOMA): establecer vinculaciones con la oferta de tales actividades para aplicar en instituciones con dicha modalidad.
- Actividades vinculadas con la contaminación ambiental (ACA): canalizar las propuestas hacia una visión superadora; en este caso, vinculada con la contaminación ambiental.

3.5. Procesamiento de datos

Para el procesamiento de los datos se consideran las categorías de análisis establecidas. A partir de la investigación, se analiza el contenido de lo gradualmente obtenido.

4. Reporte de Resultados

En el presente apartado, se hace un análisis de los libros de texto seleccionados. Como fue mencionado, en este escrito se hace hincapié en la unidad de Funciones y en esta sección particularmente se mencionan los resultados obtenidos luego de analizar los cinco libros de texto.

Figura 4.2. Vinculación con la realidad (L1, p.29)

En primer lugar, en L1 se realiza una breve introducción acerca de aplicaciones del contenido mencionado y automáticamente se comienza a desarrollar teóricamente el contenido, seguido de ejemplos y ejercitación. Asimismo, en ciertas ocasiones, se recupera la utilización de las TIC y algunos problemas con texto vinculados con la Física. También se intenta vincular con la realidad con algunas aportaciones (Figura 4.2), pero queda alejado en cuanto a dónde se encuentran los problemas correspondientes.

Se finaliza el capítulo con un sector que se denomina "Actividades Matemundo" y otro de "Autoevaluación" en donde predominan las AVC. En este sentido y con sustento en lo planteado con respecto al contexto sociocultural de los estudiantes (AOMA) y al cuidado del medioambiente (ACA), se presenta una actividad de cada una con respecto al control de plagas y a la campaña de reciclaje, respectivamente (Figura 4.3).

Control de plagas

42 Los árboles del pueblo fueron atacados por un hongo. Al cabo de un tiempo, los técnicos de control de plagas encontraron que la cantidad de árboles infectados podía describirse, en forma aproximada, a través de la función $N(t) = -2t^2 + 20t + 2.000$, donde N es la cantidad de árboles afectados y t es la cantidad de días transcurridos desde el inicio de la plaga. ¿Es cierto que la plaga se extinguirá pasado algún tiempo?

Campaña de reciclaje

44 Los estudiantes de un colegio han organizado una campaña de reciclaje. Para ello, han gestionado la donación de planchas de cartón a fin de elaborar cajas para almacenar residuos. Cada caja debe tener forma de paralelepípedo rectangular de 1 m de altura y su base debe tener un perímetro de 2,4 m. Si se desea almacenar la mayor cantidad de residuos, ¿cuánto deben medir las dimensiones de la base del contenedor?

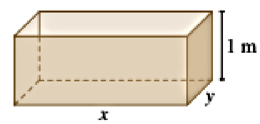


Figura 4.3. Vinculación con el contexto agrotécnico y el medioambiente (L1, p.53)

Pero, como se puede evidenciar, los enunciados son escuetos en cuanto a la interiorización de los estudiantes con cada una de las actividades. Además, se encuentra una actividad que relaciona el contexto de los estudiantes y la contaminación ambiental (Figura 4.4).

Contaminación del suelo

35 En un campo se evalúa la contaminación del suelo considerando la cantidad de focos activos de pesticida presentes. Estos se van degradando con el tiempo y dejan de operar, y el número f de los que quedan activos puede estimarse en función de los x años transcurridos, según la fórmula:

$$f(x) = \frac{150}{1 + x^2} - 15$$

a. ¿Cuántos focos activos hubo al principio?
b. ¿Cuántos quedarán al cabo de 1 o 2 años?
c. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que no quede ningún foco activo?
d. ¿Qué relación hay entre las intersecciones con los ejes y los ítems anteriores?
e. ¿Cuál es el dominio de esta función?

Figura 4.4. Ejemplo de actividad agropecuaria-contaminación ambiental (L1, p.39)

Para L2 y L3, por ser de las mismas editoriales y uno continuación del otro, con cierta similitud en su desarrollo, se hace un análisis conjunto de ambos.

Con respecto a las actividades propuestas, se evidencia mayor cantidad de problemas con texto por sobre los ejercicios. En este sentido y por medio de ellos, se intenta incorporar AVC. Con ello y con lo mencionado en la sección 1, los ejercicios suelen resultar ajenos a la vida cotidiana de los estudiantes. Como AOMA, predomina el estudio de bacterias o sustancias analizadas en un laboratorio, donde la ley de la función está dada (Figura 4.5).

En un laboratorio tienen un cultivo de bacterias. Se sabe que el número de bacterias, b, depende de la temperatura ambiente, t, (en grados centígrados) de acuerdo con la siguiente fórmula: $b(t) = t^2 + 120t + 1500$
La temperatura depende, a su vez, del tiempo transcurrido desde el momento en que se comienza el cultivo, en horas, h, de acuerdo con la siguiente ley: $t(h) = 3h + 9$

a. ¿Cuántas bacterias habrá después de 2 horas?
b. Escriban una fórmula que vincule b a h.

a)

En un laboratorio están realizando un experimento con distintas sustancias químicas.

a. Una de ellas debe mantenerse a 0º aceptando solamente un error de $\frac{1^{\circ}}{2}$. Los científicos deberán prender el aire acondicionado frío/calor cada vez que la temperatura no sea la deseada, para lo cual observan un gran termómetro puesto en la pared. ¿Cómo se dan cuenta de cuándo prender el aparato?
b. Otra sustancia debe mantenerse a 5º aceptando un error de 1º. Los científicos deberán prender el aire acondicionado frío/calor cada vez que la temperatura no sea la deseada, para lo cual observan el mismo termómetro puesto en la pared. ¿Cómo se dan cuenta de cuándo prender el aparato?

b)

Figura 4.5. Ejemplos de problemas vinculados con la vida cotidiana a) (L2, p.26); b) (L3, p.50)

En particular, en L3 se plantea un problema relacionado con la actividad profesional de un agrimensor (AOMA) (Figura 4.6).

Problema 1

Se quiere medir el ancho de un campo. El agrimensor toma como referencia algún objeto identificable que esté en el límite opuesto del terreno; por ejemplo, una estaca del cerco. A continuación, hace una marca, con una madera, del lado donde está parado. Con el teodolito, mide un ángulo recto que tenga por lado a la recta que determinan los puntos de apoyo de la estaca y la madera. Después toma, sobre el otro lado del ángulo, otro punto de referencia, que sabe por mediciones anteriores que se encuentra a 300 metros del primero. Entonces, mide el ángulo que tiene por vértice este último punto y cuyos lados pasan por la estaca del cerco y la madera. Si este ángulo tiene una amplitud de 35º, expliquen cómo harían ustedes para calcular el ancho del terreno a partir de estos datos.

Figura 4.6. Ejemplo de actividad relacionada con la modalidad agrotécnica (L3, p.82)

Por su parte, en L4 se comienza la unidad con una introducción histórica sobre el contenido a desarrollar. Asimismo, el desarrollo de los contenidos empieza con la explicación teórica y, seguidamente, actividades de afianzamiento. Se pueden apreciar, en gran parte, ejercicios y en ciertas ocasiones se incorporan problemas con texto, sobre todo al final de la unidad. Por último, en el L5 se plasman contenidos desarrollados en su formato tradicional y las actividades son, en casi su totalidad, ejercicios.

A partir de lo mencionado, se nota que la mayoría, excepto uno de los libros, intentan incorporar actividades relacionadas con la vida cotidiana. Pero, a pesar de tal intencionalidad de incorporar aquellas alejadas de las mecánicas, no se alejan de ser problemas con texto. Con énfasis en lo mencionado en la sección 2, en las actividades en las que los estudiantes se encuentran "haciéndolas", en las que se ven implicados y son partícipes en el desarrollo de las mismas, es cuando más se interiorizan con la situación y por lo tanto con el conocimiento.

A partir de lo mencionado, en el apartado 4.2 se realiza una propuesta que atiende a las diferentes situaciones mencionadas. Para ello, se recuperan y se modifican algunas actividades como por ejemplo la de reciclaje o la indicada en la parte 2 en cuanto a Función lineal con el objetivo de realizar modificaciones en torno a los objetivos planteados en el presente proyecto. Además, se estipula realizar nuevas actividades que atiendan a otro tipo de Función.

Como cierre de esta sección, se comparte la Tabla 4.2 que sintetiza lo analizado en cada libro de texto (L1 a L5) en el capítulo de Función, según lo establecido por las categorías de análisis (AVC, AOMA y ACA). Se completa con "deficiente, regular, permisible o sobresaliente" en alusión a la incorporación y abordaje de las actividades.

Tabla 4.2. Resumen de los libros analizados

Categoría	L1	L2	L3	L4	L5
AVC	Permisible	Regular	Regular	Regular	Deficiente
AOMA	Regular	Regular	Regular	Deficiente	Deficiente
ACA	Regular	Deficiente	Deficiente	Deficiente	Deficiente

5. Conclusiones

En este apartado, en primer lugar, se presentan respuestas a los interrogantes planteados al comienzo del escrito. Se continúa con vinculaciones en torno a la problemática planteada entre lo obtenido en el estudio y las diferentes investigaciones señaladas en la sección 1.3. Se finaliza, con mención al aporte del proyecto innovador.

5.1. Respuestas a los interrogantes específicos

Con base en todo lo abordado en el presente trabajo, se efectúa una conclusión de lo obtenido hasta el momento.

Desde la llamada Matemática moderna y la abstracción de los contenidos, se comenzó a reflexionar sobre la utilidad de la Matemática y la forma de enseñarla en el aula. Con arraigo, además, en concepciones acerca de la importancia y abordaje de dicha disciplina por parte de aquellas personas que fueron formadas durante tal período de abstracción, en la actualidad prevalecen comentarios negativos acerca de ello. "¿Y esto para qué me sirve?", "la Matemática es para algunos pocos", "es para aquellos más capaces", son algunos comentarios que se suelen escuchar, tanto en las aulas como por fuera de ellas.

Desde hace un tiempo se estudia e investiga en cuanto a buscar nuevas y diferentes formas para que la clase "no sea aburrida" y los alumnos se sientan partícipes de su propio conocimiento y aprendizaje. Es por ello que se intentan superar los ejercicios mecánicos y sin sentido, por medio de actividades innovadoras.

En esa línea y para tener una aproximación acerca de lo estudiado en cuanto a esta inquietud, se realizó un estado de arte, que quedó plasmado en 1.3. A partir de los estudios realizados y los resultados obtenidos por los diferentes investigadores, se remarca el valor de proponer actividades vinculadas con el contexto sociocultural de la clase y que trasciendan los ejercicios mecánicos tradicionales.

En vinculación con la importancia en torno a la utilización de los libros de texto que circulan en el mercado para el desarrollo de las clases y para la planificación de la unidad didáctica, en el comienzo de la sección 4 se pretendió analizar las actividades que portan los mismos. De este modo, se pudo avanzar hacia uno de los objetivos propuestos al comienzo del presente escrito en cuanto al abordaje de libros de texto en relación con la unidad de Funciones.

En dicho análisis se percibió gran predominio de actividades mecánicas y ajenas al contexto de los estudiantes. El desarrollo de los contenidos, en general, comienza con una parte teórica, seguido de ejemplos y ejercitación. Tal secuenciación puede distanciar más aún a los estudiantes de la actividad matemática en la que ellos sean quienes se encuentren con un problema que concluya posteriormente en un nuevo contenido. Según lo mencionado por otros investigadores, resulta fundamental la utilización de actividades donde los estudiantes se encuentren involucrados en la construcción de su conocimiento. Este hecho podría partir de alguna situación problemática en la que para su resolución se formen pequeños grupos y el estudiantado utilice tanto la observación, la experimentación y los contenidos previos. El docente en su desarrollo tiene un rol de guía y mediador entre los estudiantes y el conocimiento, así como los estudiantes entre sí.

A pesar de lo remarcado por los diferentes investigadores en cuanto a la importancia de vincular las actividades que se proponen con el contexto sociocultural de los estudiantes, se pudo observar muy escasa cantidad de dichas actividades con el contexto agronómico. Relacionado con ello y con el objetivo de proponer actividades que permitan reflexionar acerca de la contaminación ambiental, en los libros de texto se evidenciaron pocas actividades. Además, en muy escasas ocasiones se hace uso de algún software.

Con el objetivo de dar comienzo a nuevas propuestas innovadoras de los contenidos desarrollados en el nivel secundario que aporten con relación a las actividades planteadas en los libros de texto, luego de reconocer los diferentes tipos de actividades que pueden relacionarse con "la vida cotidiana" y establecer relaciones potentes y óptimas para la modalidad agropecuaria, se brinda una propuesta innovadora con actividades que involucran tanto el contexto sociocultural de los estudiantes como la contaminación ambiental. Esta propuesta está vinculada con el tercer objetivo específico; es decir, el de proponer actividades del contenido de "Función" que atienda a la contaminación ambiental y el contexto agrotécnico.

5.2. Vinculaciones

Con base en los aportes realizados por diferentes autores en sus correspondientes investigaciones, en el presente apartado se hace una vinculación de los mismos con lo desarrollado durante todo el trabajo.

Con respecto a lo planteado por la teoría sociocultural y lo abordado en el apartado 2, resulta importante considerar el contexto de los estudiantes si se desea lograr un mejor aprendizaje e involucración por parte del estudiantado. Es así que al tomar como recurso un libro de texto, se tiene que realizar una adecuada integración y en caso de ser necesario también, una reformulación, con énfasis en el estudiantado para el cual se va a utilizar y los objetivos planteados por cada docente.

Asimismo, en base a lo planteado, incorporar actividades que permitan a los estudiantes modelizar una situación y que se sientan partícipes de la incorporación de un nuevo conocimiento, permite una mayor participación de su parte en la que el docente, como guía, media entre los estudiantes entre sí y entre los estudiantes con el conocimiento.

En este sentido, algunas de las investigaciones realizadas por colegas (inciso 1.3) atienden a lo mencionado y comentan sus resultados positivos al utilizar este tipo de actividades sobre las tradicionales. Si además se las involucra con el medio ambiente y se trabaja en conjunto con otros docentes se podría lograr una alta involucración de los estudiantes y favorecer sus aprendizajes.

Díaz et al (2020), en su investigación sobre una experiencia de modelización en una clase de Matemática para las Ciencias Naturales, remarcan que en los libros de texto predominan ejercicios de aplicaciones de la Matemática. Así y al igual que fue remarcado en la sección 5.1, los autores sostienen que el desarrollo de los contenidos en los libros de texto por lo general en primer lugar presenta los conceptos matemáticos y luego las aplicaciones de los mismos. Se remarca, de este modo, la importancia de incorporar actividades que permitan que los estudiantes sean quienes modelan una situación planteada por el docente y que este, como guía, contribuya a que sean los propios estudiantes quienes construyan el conocimiento.

A partir de la presentación de una actividad y de su desarrollo, sostienen que implementar actividades de Matemática aplicada permitió que la mayoría de los estudiantes fueran capaces de aplicar los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral en problemas de la vida real. En este sentido, valoraron la metodología llevada a cabo, aunque por momentos los investigadores advirtieron que se generó cierto grado de frustración y desconcierto al notar que no estaban acostumbrados a ser el centro de su proceso de aprendizaje. Remarcaron, también, el uso del GeoGebra como herramienta muy importante para los estudiantes respecto a la conceptualización de funciones y sus diferentes representaciones. En dicho trabajo, se realiza una breve reflexión acerca del cambio metodológico en la enseñanza y se subraya la relevancia de dinámica llevada a cabo, en cuanto al desarrollo de la clase a partir de una situación problemática. En el momento en que los estudiantes se enfrentan con la actividad, se ponen en juego: observación, planteamiento, reflexión sobre los resultados obtenidos, errores y obstáculos. Se remarca que esto genera mucha incertidumbre y vértigo al no poder predecir sobre cómo pueden responder los estudiantes.

Por ello, como proyecto innovador se realizarán dos actividades que se estima que pueden implementarse en varias clases.

En cuanto a la exploración de los cinco libros de texto analizados y sus esquemas organizativos de contenido - ejemplos - actividades de aplicación, se evidencia lo que plantean los autores. Cada unidad comienza con el desarrollo teórico y luego ejemplos seguidos de actividades. En algunos de ellos se intenta incorporar actividades de aplicación pero que no permiten a los estudiantes la exploración; en otros libros se trata de actividades puramente mecánicas que se alejan de los problemas con texto que sirvan para contextualizar la actividad. Asimismo, algunos de los libros intentan incorporar actividades vinculadas con el contexto agrotécnico y con la contaminación ambiental. Pero, a pesar de ello, tales actividades continúan siendo problemas con texto en los que la ecuación ya suele estar dada y los estudiantes solo tienen que aplicar lo aprendido para resolverla y así se deja a un lado la exploración y "mano a la obra" por parte del estudiantado.

Al proponer una actividad que involucre a los estudiantes en situación para modelizar aquello que pueden percibir que sucede en cuanto al llenado de una botella y el tiempo empleado en hacerlo, Reid et al (2012) establecen que optar por actividades modelizables puede que tome un poco más de tiempo que las tradicionales, pero que predominan los resultados positivos al realizar este tipo de experiencias. Es aquí donde cobra importancia la decisión que tome el docente con respecto a resignar algunos contenidos y que aquellos que se trabajen se aprendan de manera significativa; o intentar cumplir con la currícula y que esos conceptos se olviden con el transcurrir del tiempo.

En todas las investigaciones que se focalizaron en estilos de enseñanza donde cobra importancia la significatividad del conocimiento, se remarca la relevancia de utilizar un software que facilite la representación y favorezca a la comprensión de los estudiantes.

5.3. Presentación del proyecto innovador y posibles líneas de trabajo

A partir de lo realizado y analizado, como proyecto innovador se propone plasmar actividades vinculadas con el concepto de Función y que permitan una reflexión acerca de la contaminación ambiental. A partir de ello, se propende a poder tomar acciones responsables en cuanto al accionar en la vida cotidiana para contribuir favorablemente a apaciguar tal contaminación. De esta forma se pretende remarcar la trascendencia del aporte individual con cada granito de arena para poder, de forma grupal, potenciar el frenado del deterioro ambiental.

El objetivo es que, a partir de las actividades trabajadas en el área de Matemática, se pueda realizar un análisis crítico sobre la involucración de cada uno y cómo las (malas) acciones perjudican el medio ambiente. Así, desde la educación ambiental, se propone relacionar al estudiante con el entorno en el que vive, con el objetivo de encontrar la manera de sensibilizar y buscar un cambio de actitud que favorezca el cuidado y la protección del medioambiente, para su conservación y para el mejoramiento de la calidad de vida. Se considera imprescindible la concientización sobre la importancia del medio del cual se forma parte. En este marco, las escuelas tienen un papel fundamental en ese proceso para sensibilizar y ayudar a conocer, aprender y valorar la relación con el medio en el que se vive.

Además, desde el hogar y la familia también se puede sensibilizar y crear una conciencia ecológica en el estudiantado, para que valoren y cuiden los recursos naturales y fundamentalmente comprendan que existe una importante relación entre las personas y la naturaleza. Resulta importante que la educación ambiental promueva cambios culturales al establecer esa conexión entre la conducta personal y los problemas del hábitat (Figura 4.7).

Figura 4.7. Frase inspiradora para presentar a los estudiantes (Internet)

Como primera actividad, se recupera lo planteado por Reid et al (2012) en el apartado 2. El trabajo consiste en una propuesta en el nivel secundario en cuanto al llenado de diferentes botellas para la elaboración del contenido de Función Lineal. A partir de su ejecución se espera, como se menciona en la propuesta correspondiente, hacer un análisis en cuanto a lo que sucede con respecto al llenado de la botella, la posibilidad de que rebalse y vincularlo con el uso responsable del agua. Al igual que desarrollaron en dicha propuesta, el objetivo consiste en introducir el concepto de Función Lineal por medio de una actividad que permita la reflexión con respecto al uso responsable del agua.

Por otro lado, se propone una actividad vinculada con la cantidad de residuos no orgánicos que genera una familia en un determinado tiempo. En ese marco, los estudiantes tienen que separar los residuos reciclables que se utilizan en su casa por cinco días hábiles (de lunes a viernes). A partir de ello, lo llevan a la institución la semana que tengan de permanencia y allí se pesará la totalidad a partir de tener en cuenta lo aportado por cada estudiante. Con los resultados obtenidos, se hace un análisis de lo que sucede por ejemplo en un mes, en cuanto a la cantidad de material que puede ser reciclable.

Para obtener una función de proporcionalidad y ver cómo es una cantidad proporcional de tales materiales, se pedirá a los estudiantes que, con base en lo realizado anteriormente, planteen una ecuación que permita calcular la cantidad de residuo proporcional que habrá en función del tiempo transcurrido y que puede ser reciclado. De este modo el objetivo radica en incentivar a la separación de residuos y remarcar la importancia de ello en cuanto al impacto en el medioambiente.

Como última actividad, se recupera lo planteado por Reid y Botta (2020) acerca de lo trabajado con el consumo de diferentes velas, a medida que transcurre el tiempo. Una vez que se logra modelizar la situación, se realiza un análisis crítico acerca de la importancia de usar cera de soja por sobre las velas de parafina.

5.3.1. Secuencia de actividades

En este apartado se hace mención de dos actividades propuestas que surgen a partir de lo analizado.

Objetivos de las actividades

Que los estudiantes logren:

- Vincular la Matemática con el contexto sociocultural.
- Realizar una reflexión sobre su comportamiento responsable con el medioambiente.
- Reconocer el comportamiento de cada una de las funciones y conjeturar acerca de la función obtenida.

Contenidos

Los contenidos que se ponen a prueba con la siguiente actividad son:

- Representación: gráfica, ecuación, tabla, descripción verbal.
- Ecuación: pendiente y ordenada al origen.
- Modelización de una situación.

ACTIVIDAD 1.1. *Reflexionar acerca del uso responsable del agua.*

a) Utilizar una canilla para medir el tiempo que se tarda en el llenado de una botella, bidón o jarra. ¿Cuánto tiempo se emplea para llenarlo?

b) Realizar una gráfica que permita establecer el llenado del recipiente en cada intervalo de tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo se necesitará para llenar la botella a la mitad? ¿Y a la cuarta parte?

Con la siguiente actividad se requiere generalizar la actividad anterior y crear conciencia acerca del uso responsable del agua.

ACTIVIDAD 1.2. *Analizar, debatir y responder a las siguientes consignas con tu compañero de banco.*

a) Si se utiliza la misma canilla, que arroja siempre el mismo caudal de agua, pero se considera una botella más ancha y de forma cilíndrica, ¿cómo se modificaría el gráfico? ¿Responden a funciones directamente proporcionales? ¿Por qué? ¿Y si fuera más angosta la botella?

b) Si inicialmente la botella no estaba completamente vacía, ¿cómo sería el gráfico?

c) ¿Qué sucede si para el llenado del recipiente dejamos que el agua continúe corriendo una vez llegado al límite de su capacidad? ¿Qué sucede con el agua en este caso?

d) ¿Qué uso del agua realizás? Pensá en situaciones cotidianas: lavado de objetos, baño (ducha), tirado de cadena, etc. ¿Qué podrías decir con respecto a tu actuación? ¿Es de forma responsable?

Luego de realizar la actividad se remarca la importancia del uso responsable del agua. El agua es el líquido indispensable para la vida de todo ser humano, esto es, de las plantas, los animales, del hombre y del planeta en general. Se encuentra distribuida en toda la superficie terrestre, pero del 100% del total de agua, solo el 3% representa al agua dulce y de este porcentaje solo el 1% es agua dulce aprovechable por el hombre. Los casquetes de hielo, glaciares y agua subterráneos que conforman el 79% del agua dulce, todavía no son accesibles y conforman reservas mundiales. El mal uso por parte de la humanidad de este recurso ha hecho que el planeta en general esté padeciendo una crisis y escasez de agua que cada día se agrava más en todas las regiones. La contaminación de ríos, la superpoblación, el uso irresponsable en la agricultura y en la industria, la deficiente tecnología para el tratamiento de aguas residuales, etc., han hecho que el agua sea un recurso agotable y que además sea un vehículo de trasmisión de enfermedades que afecta a los niños en su mayoría, lo cual causa la muerte en zonas de pobreza (Martini, s/f).

Previo a realizar la actividad que se menciona a continuación, se hará un estudio y análisis en conjunto con los estudiantes sobre cuáles son aquellos residuos que se pueden reciclar y cómo llevar a cabo el procedimiento. Los ítems de dicha actividad se irán proponiendo de forma pausada a los estudiantes.

Previamente, se trabajará en conjunto con docentes de Ciencias Naturales de manera coordinada sobre cómo abordarlo en cada área. Se pretende que los estudiantes puedan identificar las diferentes clasificaciones de residuos para que, mientras se vayan recolectando, se vayan separando adecuadamente. Esto puede ser desarrollado por el profesor del área mencionada.

Se requiere que en cada hogar se cuente con dos cestos, tachos o baldes, que permitan separar cada residuo en orgánicos e inorgánicos. El objetivo central es que, en lo posible, cada integrante familiar opte y tenga en cuenta en qué cesto depositar su desecho. Así se podría señalar la importancia de reciclar y de aportar abonos para la tierra.

Con respecto a los contenidos de Matemática trabajados en la actividad, se pretende introducir el concepto de función de proporcionalidad.

Para la presente actividad se les pedirá con anticipación bidones, jarras y botellas de varios tamaños y formas.

Con relación a la contaminación ambiental, el objetivo de la misma es que los estudiantes se interioricen con el uso responsable del agua y, en cuanto a lo disciplinar propiamente dicho, el objetivo es introducir el concepto.

ACTIVIDAD 2.1. *Recolectar residuos.*

a) Recolectar residuos reciclables consumidos desde el día lunes al día viernes inclusive, con una separación adecuada en dos recipientes diferentes.
b) Responder las siguientes preguntas:
    - ¿Qué tipo de basura se produjo en tu hogar durante los cinco días? Clasificarlas.

- ¿Qué cantidad de basura (en peso) se produjo de cada tipo clasificado? ¿Y en total?
- ¿Te parece que la cantidad de basura producida suele ser similar a la recolectada? En caso afirmativo, ¿cómo se podría plantear una ecuación que represente la cantidad de basura producida durante un tiempo determinado? En caso negativo, considerar la cantidad máxima estipulada.

c) Utilizar un software que consideres apropiado para modelizar la situación.

ACTIVIDAD 2.2. *Para reflexionar… con respecto a los resultados obtenidos, ¿qué se podría concluir en cuanto al medioambiente?*

De acuerdo a lo planteado por Martini (s/f), la separación de residuos se entiende como la práctica a partir de la cual se discriminan los materiales que pueden ser reutilizados o reciclados y los que son basura. Esta separación se realiza en el lugar donde se generan los residuos y se efectúa de manera tal que los materiales reutilizables o reciclables puedan ser clasificados y procesados para ser reinsertados en el circuito productivo como materia prima para la industria y el comercio. Es por eso que tales residuos tienen que estar limpios y secos. Luego de dicha separación, comienza con la clasificación; es decir, con ordenar el material recolectado según su composición (papel, cartón, plástico, metal, etc.).

Una vez realizada la reflexión en cuanto a la importancia de la separación de los residuos (Figura 4.8), se remarca la importancia de reutilizar y de reciclar:

- Reutilizar es dar un nuevo uso a un material u objeto. Este nuevo uso puede ser el mismo para el cual fue fabricado o puede ser diferente. La donación de objetos y materiales en desuso es otra de las formas en que estos extienden su ciclo de vida.
- Reciclar los materiales consiste en someterlos a un proceso físico o químico para obtener una materia prima o un nuevo producto.

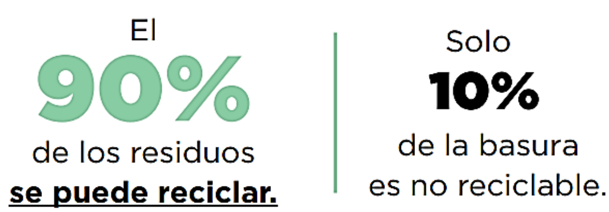


Figura 4.8. Problematización de la importancia de reciclar (Martini, s/f, p.34)

Con base en lo recolectado por cada estudiante, se les pedirá que lleven a la escuela los residuos separados adecuadamente y se trabajará de forma interdisciplinar con otras áreas para reciclarlos o llevarlos a un centro de canje y aplicar lo aprendido en "huerta" con respecto al plantado y siembra. Se utilizan, para ello, los residuos orgánicos y se analiza cómo favorecen a la agricultura.

En función a los residuos que los estudiantes clasificaron para reciclar o reutilizar, en conjunto con materias como por ejemplo Tecnología, se pueden realizar producciones que resulten útiles para los hogares, y darle un nuevo uso a aquello que en un principio hubiese sido desechado y de esta manera poder reutilizarlo.

Con la actividad 3 se estudia cómo varía la altura de la vela a medida que transcurre el tiempo, donde se utilizan distintas velas y se registran las observaciones realizadas.

En sintonía con lo ya relevado por los investigadores con relación a las diferentes variantes que pueden influir en el proceso de quemado de las velas, se procederá a analizar únicamente velas cilíndricas y de cera. Estas serán pedidas con anterioridad a los estudiantes para que las lleven a la clase. En un primer lugar los alumnos tendrán que medir la vela, previo a encenderla.

ACTIVIDAD 3.1. *Aplicar función lineal al problema de las velas.*

a) Analizar el tiempo que tardan las distintas velas en consumirse.
b) Representar la situación mediante tablas que permitan organizar la información.
c) Graficar la situación en un eje de sistemas cartesianos.
d) ¿Cómo se podría representar la situación algebraicamente?

ACTIVIDAD 3.2. *Para responder…*

a) ¿Qué gráficos obtuvieron a partir de los datos obtenidos?
b) ¿Responden a funciones directamente proporcionales? ¿Por qué?
c) ¿Se puede señalar alguna relación entre los términos de las ecuaciones y los gráficos obtenidos?

ACTIVIDAD 3.3. *Para analizar…*

a) Con el paso del tiempo, ¿qué le sucede a la vela?
b) ¿Qué representa la intersección del gráfico con el eje y?
c) ¿Qué representa el valor que multiplica el tiempo, en minutos?
d) ¿Cuáles datos coinciden con los del experimento que ustedes realizaron?
e) ¿Cómo comparan los datos de sus experimentos con los modelos presentados en la planilla de cálculo?
f) ¿Qué representa la función creciente? ¿Y la decreciente?

Luego de realizar la actividad, se hace el experimento con una vela de soja, en un recipiente similar a un cilindro del estilo de las velas utilizadas en la actividad y se analiza en conjunto con la clase el tiempo que tarda dicha vela en consumirse. Se observa que la vela de soja dura más tiempo encendida que una vela de cera; es decir, es más rendidora en cuanto al tiempo de consumo. Además, posee beneficios que serán trabajados con el estudiantado; principalmente son más naturales, ecológicas y sostenibles. En efecto, las velas de soja no contaminan ni dañan la salud. La mayoría de las velas que se encuentran en las tiendas son fabricadas con parafina obtenida del petróleo, que libera compuestos tóxicos en el aire y contiene perfumes sintéticos; en cambio, con las velas de soja se consigue perfumar un ambiente sin perjudicar el entorno ni la salud. Además, favorecen el bienestar gracias a las propiedades de la aromaterapia. Sus principales ventajas por encima de la parafina, son que se trata de una materia natural renovable, no tiene relación con la contaminante ni tóxica industrial como el petróleo; tampoco emite compuestos tóxicos cancerígenos al quemarse. Además, producen un 90% menos de hollín, se queman totalmente, duran hasta el doble de tiempo y los derrames son fáciles de limpiar, incluso de elementos textiles.

De acuerdo con la propuesta presentada, se considera que es un proyecto innovador en el sentido de que, a partir de una problemática de Educación Matemática, surge la intención de plantear un camino alternativo para romper con los dichos negativos acerca de la Matemática y que están presentes en los estudiantes; cuestión que influye en sus aprendizajes y desempeños en esta disciplina. Con base en lo analizado durante el presente escrito con respecto al desarrollo de los temas que portan los libros de texto presentes en el mercado y que son utilizados por docentes por practicidad y también en función a lo evidenciado por otros autores con respecto a la importancia de atender a nuevos tipos de situaciones, se plantea una propuesta en cuanto a dos actividades que permitan el trabajo del contenido Función (lineal y de proporcionalidad) y que atienda a la participación activa de los estudiantes a partir de acciones responsables con el medio ambiente.

5.3.2. Posible línea de trabajo

En consideración con el proyecto innovador se plantea como posible línea de trabajo, implementar las actividades en un curso determinado y analizar el desempeño de los estudiantes y su vinculación con el aprendizaje. De acuerdo con lo mencionado por el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014), implementar la actividad de Función Lineal y Función de proporcionalidad, en cursos de segundo y tercer año, respectivamente.

5.4. Compromiso Social Universitario

El desarrollo del presente Proyecto Innovador en Educación Matemática surge desde una inquietud muy presente en la sociedad y, a partir de ello, se busca promover el Compromiso Social Universitario como lo plantea la Declaración de la Conferencia Mundial de Educación Superior (1998) en el sentido en que se "exige impulsar un modelo académico caracterizado por la indagación de los problemas en sus contextos".

Por lo planteado en el documento antes mencionado, la Educación Superior se orienta hacia la formación integral de profesionales que tengan una participación activa, crítica y constructiva en la sociedad para que sean capaces de trabajar con responsabilidad ética, social y ambiental, con los retos planteados en la sociedad.

Es por ello que -con base en la inquietud principal, las actividades analizadas de los libros de texto del contenido de Función y los trabajos realizados por diferentes colegas investigadores- se plantea una secuencia de dos actividades relacionadas con el medioambiente para un colegio agrotécnico. Además de trabajar con el contenido matemático en cuestión, se desea realizar un análisis crítico acerca de la contaminación ambiental y las consecuencias que esto conlleva en todos los ámbitos.

5.5. A modo de cierre

En la sociedad en general prevalecen muchos comentarios negativos acerca de la Matemática. Una de las raíces puede estar asociada a su forma de enseñanza desde hace décadas. Resulta fundamental que los profesionales en la disciplina, como son los profesores en Matemática, propongan actividades que permitan a los estudiantes no solo encontrarle el gusto a estudiarla, sino que también sean facilitadores a crear nuevos horizontes. En este sentido, formar estudiantes no solo en cuanto a lo disciplinar, sino que también sean capaces de crear conciencia sobre el cuidado del medioambiente, contribuye a su desarrollo personal para la vida social. De allí que se enfatice en realizar actividades que cobren significatividad para el grupo-clase, que permanezcan por largo tiempo, que las recuerden como algo significante y fructífero que se realizó en una clase de Matemática.

Referencias bibliográficas

Altman, S.V., Comparatore, C.R. y Kurzrok, L.E. (2002). *Matemática. Funciones 1.* Longseller.

Altman, S.V., Comparatore, C.R. y Kurzrok, L.E. (2002). *Matemática. Funciones 2.* Longseller.

Amster, P., Pezzatti, L., Abálsamo, R., Berio, A., Mastucci, S., Quirós, N. y De Rossi, F. (2013). *Matemática. Activados 5.* Puerto de Palos.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141. https://www.jstor.org/stable/3482532.

Bressan, A.M., Gallego, M.F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases teóricas*. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. https://new.gpdmatematica.ar/la-educacion-matematica-realista-bases-teoricas/.

Chorny, F., Majic, E. y Salpeter, C. (2015). *Matemática 5.* Estrada.

Cruz, M.F., Esteley, C. y Scaglia, S. (2020). Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática vinculada con fenómenos geométricos. *Educación Matemática*, *32*(1), 193-220. https://doi.org/10.24844/EM3201.09.

Díaz, A.L., Gonzalez, M., Negrette, C. y Soto, G. (2020). Una experiencia de modelización en una clase de matemática para las ciencias naturales. *Revista de Educación Matemática*, *35*(1), 11-22. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/28175.

Díaz, E., Arguedas, A. y Porras, J. (2012). Contexto sociocultural del estudiante como facilitador de su aprendizaje sobre conceptos de funciones en matemática. *Uniciencia*, *26*(1-2), 113-124. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/3867.

Estrada, R.F. (2010). La enseñanza de la física y las matemáticas. Un enfoque hacia la educación ambiental. *Latin-American Journal of Physics Education*, *4*(2), 435-440. http://www.lajpe.org/may10/29_Rodolfo_Estrada.pdf.

García Cruz, D.J.A. (2000). *La Didáctica de las Matemáticas: una visión general*. Educrea. https://educrea.cl/la-didactica-de-las-matematicas-una-vision-general/.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª Ed.). Mc Graw Hill.

Martini, M.C. (s/f). *Guía de actividades sobre el medioambiente. Guía para el docente*. Grupo Pharos.

Méndez, J.J. (2016). La aplicación matemática y su relevancia en la homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas. Un estudio de caso. *Filosofía*, *48*(140), 29-58. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5721486.

Mendoza, J., Valenzuela, R., Palermo, P., Ríos, A., Mendiola, L., Palacios, D., Leyton, N., Montoya, P., Torres, C, Arce, S. y Martínez, P.V. (2018). *Entre números IV. Actividades de Matemática*. Santillana.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada*. https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (2016). *Núcleos Interdisciplinarios de Contenidos*. https://plataformaeducativa.santafe.edu.ar/moodle/secciones/programa_destacado.php?id=98.

Reid, M.E. y Botta, R. (2020). Modelización Matemática en la Educación Secundaria. *Unión*, *16*(59), 275-292. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/122.

Reid, M., Gareis, M.I., Hernández, A.E. y Roldán, M.V. (2012). Funciones con modelización matemática. *Números*, *81*, 91-101. http://sinewton.es/revista_numeros/081/.

Rincón, H.F. y Pérez, S.U. (2007). Las aportaciones teóricas de Vigotsky a la educación. En *X1 Jornadas Pedagógicas de Otoño. Tomo I* (pp.201-206). Universidad Pedagógica Nacional. https://editorial.upnvirtual.edu.mx/index.php/publicaciones/colecciones/archivos/326-xi-jornadas-pedagogicas-de-otono-tomo-i.

Toledo, Z.P. y Cruz, G.A. (2018). Una propuesta para la enseñanza de los números decimales en un contexto agrícola. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 116-138. https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/499.

Vivas, C.M. (2018). Las Matemáticas, algunas aplicaciones y su importancia. *Espol*, *16*(1) 67-77. http://www.revistas.espol.edu.ec/index.php/matematica/article/view/435.

Zolkower, B., Bressan, A. y Gallego, F. La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. *Yupana*, *1*(3), 11-33. https://doi.org/10.14409/yu.v1i3.247.

Proyectos Innovadores en Educación Matemática Vol. 1

Situaciones problemáticas para favorecer un abordaje mediante Resolución de Problemas del contenido Sistemas de Ecuaciones Lineales en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario

Problematic situations to favor an approach through Problem Solving of the content Systems of Linear Equations in the Mathematics Teachers career at the National University of Rosario

Denise Rudi
deniserudi1999@gmail.com

Resumen

Este proyecto de innovación en Educación Matemática se propone identificar problemas que pueden introducirse para favorecer un abordaje mediante la resolución de problemas del contenido sistemas de ecuaciones lineales en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario y sugerir consecuentemente algunas líneas de acción para su tratamiento. El interés en hacer una investigación como esta es que las experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor en Matemática son determinantes para su desempeño profesional. En este sentido, se procura describir las heurísticas que se ponen en juego en tales problemas, reconocer posibles dudas o preguntas que puedan surgir en su resolución y aportar intervenciones docentes, a la hora de atender tales dudas o responder preguntas, que puedan resultar pertinentes. Este trabajo tiene un enfoque cualitativo y alcance principalmente descriptivo-interpretativo. La investigación adquiere rasgos de tipo cuasiexperimental dado que, a partir de la identificación de potenciales problemas, se habla de su re-diseño de manera intencional para un grupo de estudiantes. Se aplica la técnica de análisis documental para la recolección de la información. Se involucran como actores del estudio a tres libros digitalizados sobre Álgebra y Geometría Analítica. Las categorías de análisis están delimitadas por las consideraciones teóricas de la metodología de interés. Finalmente, se proponen algunas líneas de acción para el fortalecimiento de un abordaje de los sistemas de ecuaciones lineales mediante resolución de problemas en la carrera de interés.

Palabras clave

Resolución de problemas. Sistemas de ecuaciones lineales. Formación de profesores.

Abstract

This innovation project in Mathematics Education aims to identify problems that can be introduced to favor an approach by solving problems of the content systems of linear equations in the Mathematics Teachers career at the National University of Rosario and consequently suggest some lines of action for its implementation. The interest in doing research like this is that the training experiences that a future Mathematics teacher goes through are decisive for their professional performance. In this sense, it seeks to describe the heuristics that are put into play in such problems, recognize possible doubts or questions that may arise in their resolution and provide teaching interventions, when addressing such doubts or answering questions, that may be relevant. This work has a qualitative approach and a mainly descriptive-interpretative scope. The research acquires quasi-experimental type features since, from the identification of potential problems, these are intentionally re-designed for a group of students. The documentary analysis technique is applied to collect the information. Three digitized books on Algebra and Analytic Geometry are involved as actors in the study. The categories of analysis are delimited by the theoretical considerations of the methodology of interest. Finally, some lines of action are proposed to strengthen an approach to systems of linear equations through problem solving in the career of interest.

Keywords

Problem solving. Systems of linear equations. Teacher training.

1. Presentación

En los cuatro apartados que componen la sección se perfilan los ejes de interés del proyecto de innovación en Educación Matemática. Inicialmente se presenta la problemática del estudio, junto a las preguntas de la investigación. A continuación, se dan a conocer los objetivos del estudio en conexión con los interrogantes planteados. Seguidamente se realiza un recorrido por el estado del conocimiento en el que se abordan cuestiones relativas al accionar del docente al enseñar Matemática mediante la resolución de problemas, así como experiencias de enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en Profesorados en Matemática y las heurísticas que emergen cuando estudiantes de dicha carrera vivencian la metodología de interés para este trabajo.

1.1. Problemática

En Argentina, como en muchos países del mundo, se comparte el problema de lograr que los estudiantes de los primeros niveles educativos alcancen aprendizajes matemáticos que resulten valiosos, duraderos y flexibles (Rodríguez, 2019).

Particularmente, la enseñanza de la Matemática para carreras profesionales plantea grandes desafíos en los profesores y las universidades desde hace años, pues las tendencias marcan una enseñanza de manera contextualizada y a través de la resolución de problemas (Herrera et al, 2016).

En este sentido, el ambiente universitario es un lugar donde se está rodeado de tantas certezas que la pregunta "¿para qué más pueden servir los contenidos matemáticos aprendidos además de aplicaciones estrictamente matemáticas?" suele estar un tanto ausente, especialmente en los primeros años de cursado.

Por su parte, la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria de Argentina establece que el plan de estudios de cada carrera esté adecuadamente integrado, con el propósito de lograr el desarrollo de las competencias necesarias para la identificación y solución de problemas abiertos.

No obstante, la problemática sobre el tipo de actividades y problemas para proponer a los estudiantes en la formación matemática universitaria pareciera ser aún una dificultad por superar (Herrera et al, 2016). Durante varias décadas lo más importante era saber

Matemática y, para que el docente pudiera enseñar esta ciencia, resultaba suficiente contar solo con conocimientos disciplinares. Sin embargo, actualmente, según lo expresan Pochulu y Rodríguez (2012):

> Al profesor de Matemática se le pide o exige un nuevo comportamiento profesional, una nueva actitud hacia los alumnos; un conocimiento y habilidades pedagógicas flexibles según las distintas situaciones y contextos educativos; un conocimiento de la disciplina en sí y el conocimiento didáctico asociado a ella. Asimismo, se espera y pretende que: logre impulsar y motivar el trabajo de los alumnos conduciéndolos a la reflexión; domine aspectos sociales y emotivos de los alumnos; sea hábil en la generación de entornos de aprendizajes matemáticamente ricos y enriquecedores; diseñe modelos que se adapten a las inciertas y cambiantes condiciones de aprendizaje que se dan en las clases de Matemática, y sepa preparar a sus alumnos, ya sea para una integración y participación en el mundo del trabajo, o para la continuidad de estudios superiores (p.9).

De acuerdo a la problemática planteada, se propuso trascender las clases de Matemática en la carrera de Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Atender a esta cuestión reviste un carácter de urgencia, en tanto el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional (Ciccioli, 2019). En este sentido, un espacio propicio para la contextualización del proyecto innovador lo constituye la formación inicial de profesores en Matemática.

En particular, en este proyecto se procura hacerlo con el contenido Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) correspondiente a la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II del primer año de la carrera de PM y se decidió trabajar con el enfoque Resolución de Problemas (RP), dado que en esta metodología de trabajo entran en juego estrategias y habilidades cognitivas y metacognitivas de reflexión sobre lo realizado, en pos a propiciar aprendizajes significativos.

La elección del contenido SEL radica en que es rico en sí mismo, ya que permite resolver problemas de diversa índole con un tratamiento algebraico, así como modelizar fenómenos de distinta naturaleza mediante diferentes registros de representación semiótica tales como tablas, gráficos y la representación analítica. Fomentan el uso de diferentes procedimientos matemáticos en su resolución y, además, ponen de relieve diversos conceptos matemáticos como incógnita, ecuación, dependencia, solución, conjunto solución, entre otros.

En Santa Fe, los SEL forman parte de los contenidos que constituyen el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) de la educación secundaria y también figuran en los planes de estudio de instituciones formadoras correspondientes (Consejo Superior de la Universidad Nacional de Rosario, 2018). Se trata, entonces, de un tema relevante para la formación inicial y el desempeño laboral de profesores en Matemática.

1.2. Interrogantes

Este estudio se propone dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué problemas pueden introducirse para favorecer un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR?
- ¿Qué heurísticas se ponen en juego en tales problemas?
- ¿Qué intervenciones docentes, a la hora de atender dudas o responder preguntas, pueden ser pertinentes?

1.3. Objetivos

Este proyecto se propone identificar problemas que pueden introducirse para favorecer un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR. Específicamente interesa:

- Describir las heurísticas que se ponen en juego en tales problemas.
- Reconocer posibles dudas o preguntas que puedan surgir en su resolución.
- Aportar intervenciones docentes, a la hora de atender tales dudas o responder preguntas, que puedan resultar pertinentes.

1.4. Estado de conocimiento

En este apartado se procura presentar una panorámica acerca de lo señalado al momento por producciones afines a la temática de interés en la problemática (1.1). Se incluyen, primeramente, estudios relativos al accionar del docente al enseñar matemática mediante

RP. Seguidamente se focaliza en la descripción de heurísticas y, posteriormente, en experiencias de enseñanza de SEL en Profesorados en Matemática.

1.4.1. El accionar del docente al enseñar Matemática mediante RP

Con el correr de los años diversos autores han estudiado y trabajado en la línea de la Didáctica de la Matemática que suele denominarse RP. En aquellos trabajos que involucran directamente a la enseñanza de la Matemática mediante RP, en particular los que tratan sobre la selección de problemas para favorecer un abordaje RP, se enfatiza en que esta tarea requiere, por parte del docente, de un buen conocimiento de sus estudiantes en términos de lo que ellos pueden/saben hacer.

En relación con esta idea, Rodríguez (2012) remarca que el primer paso es describir qué procedimientos pueden aplicar sus estudiantes y qué conocimientos disponen. A continuación, propone redactar la consigna de un modo familiar, con la intención de que el estudiante imagine inmediatamente el camino de solución y, previamente a la presentación de la actividad al grupo-clase, sugiere corroborar que la resolución de la actividad admita variedad de heurísticas.

En esta misma dirección de escribir el enunciado del problema con un vocabulario conocido para los estudiantes, pero focalizándose en ofrecer una posible forma de abordar la enseñanza del tema “razones trigonométricas” para el Nivel Secundario, Petrone et al (2010) señalan que conviene que cada problema que se proponga sea viable para los estudiantes, en el sentido de que puedan, casi autónomamente, imaginar la situación planteada, trabajarla a partir de conocimientos previos o desde la intuición, para elaborar una estrategia de resolución y tratar de comunicarla.

Dentro de esta misma línea de estudio, Barreiro et al (2019) en su interés por mejorar la inserción de los estudiantes en el Nivel Superior, realizan un estudio en el que se propusieron diseñar, fundamentar y aplicar un dispositivo didáctico para la enseñanza de alguna de las heurísticas menos presentes en las resoluciones de los estudiantes de la Universidad Nacional General Sarmiento (Argentina) y de la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional (Argentina), y que son las más valoradas por los matemáticos. En la tarea de conformar un “banco” de problemas para proponer a los estudiantes, en una primera instancia seleccionaron consignas de actividades disponibles en la web y/o en el material de trabajo del ingreso. Los investigadores comentan que muy pocas consignas catalogadas como problemas se ajustaban como tales para su trabajo, por lo que tomaron la decisión de diseñar problemas, dado que buscar consignas y adaptarlas no era suficiente. Para garantizar que las consignas constituyan potenciales problemas, ofrecen algunos criterios a tener en cuenta: que planteen un objetivo claramente definido; que, potencialmente, ofrezcan un bloqueo inicial; que tengan una redacción diferente al estilo de lo que habitualmente se trabajaba en el curso; y que el potencial problema admita el uso de variedad de heurísticas para abordar su resolución.

Petrone et al (2014) también realizan un aporte referido a la selección de problemas para propiciar un enfoque de RP. En el marco de un Curso de Posgrado y Capacitación Docente denominado "Enseñar Matemática mediante Problemas en la Escuela Secundaria", analizaron 45 enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria que fueron propuestos por los 38 asistentes del curso. Dentro de sus resultados, y particularmente en cuanto a la vinculación con la realidad, reconocen que la quinta parte de los problemas propuestos pertenece al ámbito intra-matemático. El resto (la gran mayoría) involucra personas y objetos concretos en alguna situación relativamente cotidiana. En cuanto al registro de representación predominante, fue el coloquial. La quinta parte incluye, además, al registro gráfico, en el que se realizan bocetos de dibujos matemáticos que portan información. Aclaran que solo dos casos incluyen al registro tabular entre sus datos y el simbólico algebraico está ausente. Cabe destacar que, de los 45 problemas recolectados, solo cuatro aluden al contenido ecuaciones. Resultan de interés para este estudio las reflexiones de las autoras a partir del trabajo realizado. Señalan que es deseable que los docentes seleccionen situaciones problemáticas que constituyan un desafío para los estudiantes con un carácter motivador y que, a su vez, puedan ser abordadas a partir de sus conocimientos previos para que no se constituyan en promotoras del desánimo. Sugieren, además, anticipar posibles dificultades y preguntas que surjan durante la resolución y organizar sugerencias para orientar a los estudiantes y proponer problemas de complejidad gradualmente creciente, con atención al momento del proceso para el que son más adecuados.

En aquellas investigaciones que abordan la gestión de la clase mediante RP, lo que se destaca es que esta forma de trabajo en el aula demanda una fuerte intervención docente que estimule la curiosidad y participación de los estudiantes, y que contemple la incorporación de aciertos y errores como vía para adquirir procesos válidos y heurísticas propias, en conjunción con la intuición y reflexión del grupo-clase.

Barreiro et al (2019) señalan que la clave en esta línea es tener presente que las intervenciones docentes procuren no destrabar el bloqueo del estudiante porque, de hacerlo, el problema se habrá transformado en ejercicio. Con esta idea, presentan un par de lineamientos generales sobre intervenciones docentes mediante la perspectiva de la RP: A) Atención a dudas, preguntas, imposibilidad de avanzar, necesidad de confirmar que la respuesta es correcta durante la resolución de problemas; B) Generación de momentos de reflexión metacognitiva. Respecto del primer tipo de intervenciones, de interés para el presente trabajo, señalan que las preguntas que Poyla (1989) asoció a cada una de las etapas de la resolución de problemas, son pertinentes para que el docente intervenga adecuadamente a través de alguna/s de ellas.

Petrone et al (2014) afianzan la conclusión sobre el carácter estratégico de la actuación docente mediante este enfoque. En su interés por estudiar sobre la RP en la formación de profesores en Matemática, realizan una investigación en la que recogen datos relativos a las concepciones de profesores en Matemática y estudiantes de Profesorado, de diferentes institutos formadores, sobre acciones docentes que consideraron tanto adecuadas como inapropiadas para la planificación e implementación de actividades de enseñanza basadas en la metodología a través de la RP. En dicho trabajo, las autoras sugieren procurar que los estudiantes se interesen en la RP planteados, que se sientan capaces de abordarlos, de preguntar sus dudas y de reorientar sus estrategias en función de dosificadas intervenciones docentes, para ir descubriendo estructuras o regularidades que avanzarán, con la guía adecuada, hacia las formalizaciones que constituyen nuevos conceptos y teorías. En este sentido, advierten que es fundamental cuidar el trato dispensado a cada intervención estudiantil, donde el error se percibe como vía para comprender mejor, se valoran explícitamente sus aciertos espontáneos, se motiva la participación y se orienta ante las dudas.

1.4.2. Descripción de heurísticas

Dentro de esta misma línea de trabajo, con la mirada puesta en los alcances, posibilidades y limitaciones de una formación mediante el enfoque de RP, Solarte y Palacios (2013) se detienen en las estrategias heurísticas que emergen cuando estudiantes del Profesorado en

Matemática de la Universidad del Valle se involucran en la RP matemáticos no rutinarios, uno de ellos referido al contenido sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Dentro de los hallazgos, señalan que los estudiantes al no poder asociar el problema a un contenido matemático específico, utilizaron principalmente operaciones aritméticas para abordarlo. Adicionalmente observaron que no elaboraron un plan para resolver el problema; inmediatamente iniciaron un conjunto de operaciones con los datos que se les provee. Asimismo, expresan que emplearon más tiempo de lo esperado y además como estrategia potente en el proceso de resolución del problema utilizaron la estrategia heurística “realizar un gráfico”, la cual es relativamente efectiva; aunque advierten que no es suficiente, dado que garantiza la comprensión, pero para dar solución al problema se hace necesario conectar los datos con un sistema de ecuaciones. Además, aluden a la poca flexibilidad para cambiar de estrategia una vez comenzada la RP. En efecto destacan que, aunque los estudiantes observaron que no les produjo ningún resultado, continuaron con la misma estrategia, lo que lleva a las autoras a advertir sobre la poca destreza en el manejo de heurísticas en profesores en formación.

1.4.3. Experiencias de enseñanza de SEL en Profesorados en Matemática

Del Valle et al (2019), en su interés por determinar el grado de coherencia de las construcciones y mecanismos mentales para hallar el conjunto solución de un SEL 2×2 mediante el tránsito de sistemas lineales homogéneos a no homogéneos, diseñaron un cuestionario que les permitió indagar en las concepciones de estudiantes de formación inicial del Profesorado en Matemática para Educación Secundaria de una universidad chilena respecto de los conceptos solución y conjunto solución de un SEL. Los resultados evidencian cierta incomprensión de lo que es una solución para un sistema, dificultades para articular los aspectos geométricos con los algebraicos y la conveniencia de utilizar una estrategia alternativa para el caso de un sistema de tres o más ecuaciones lineales. Señalan que la desencapsulación del objeto plano cartesiano y objeto recta vectorial son claves para que un estudiante acceda a los procesos que articulan la matemática escolar y los aspectos geométricos que sugieren las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas. Además, indican que la manipulación de SEL homogéneos evoca en los estudiantes relaciones entre los coeficientes de sus ecuaciones y propicia la construcción del proceso de coeficientes proporcionales que podría ayudar a la construcción del concepto de rango, cuando se piensa en el método de eliminación gaussiana.

En esta misma línea de la enseñanza del contenido SEL, Gracia (2010) diseñó y aplicó una propuesta en el curso de Introducción al Álgebra Lineal para la enseñanza de matrices y SEL, con base en la RP reales para estudiantes de Profesorado en Matemática del Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez. El trabajo constó de dos etapas. En la primera se implementaron cuatro problemas con el objetivo de que los estudiantes reconozcan el uso de matrices, operaciones elementales por filas, método de reducción por filas de Gauss-Jordán y resolución de SEL, además de que identifiquen conexiones entre la geometría, el cálculo y el álgebra. En una segunda etapa se propuso a los estudiantes la formulación de un problema de programación lineal a partir de un contexto real. Entre las conclusiones del estudio se destaca que los estudiantes antes de la implementación de la propuesta veían al álgebra como la rama de la matemática que permite demostrar teoremas o propiedades; al respecto, la autora invita a ampliar la mirada de esta rama de la matemática en futuros profesores a partir del trabajo con contextos reales.

1.4.4. Síntesis del estado de conocimiento

Las distintas investigaciones consultadas en 1.4.1 rescatan ejes fundamentales relativos a la selección y diseño de problemas para favorecer un abordaje RP y a las intervenciones docentes mediante este enfoque a la hora de atender dudas de los estudiantes. Entre ellos se destacan, por un lado, el problema como fuente para adquirir variedad de estrategias heurísticas de resolución y pensamiento matemático, a partir de intentar superar un bloqueo inicial, con un objetivo claramente definido y una presentación “no familiar”. Por el otro, el accionar del docente como guía en la validación o refutación de las resoluciones de los estudiantes, con un equilibrio entre no vislumbrar la herramienta matemática que permita resolverlos y la inmediatez en hallar la respuesta al problema propuesto.

Sin embargo, estas cuestiones no son abordadas en profundidad desde el contenido SEL, particularmente en el contexto del PM de la UNR. En este sentido, un espacio propicio de indagación lo constituye la identificación y posterior (re) diseño de problemas que favorezcan un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR. Se habla de (re) diseño a partir de los resultados de investigaciones desarrollados en 1.4.1 sobre la escasa cantidad de problemas sobre ecuaciones y las dificultades atravesadas al crear un "banco" de potenciales problemas.

En 1.4.3 se resalta el trabajo con contextos reales en la formación de futuros profesores en Matemática. Mediante esta línea de pensamiento, pero con nuevos horizontes, resulta de interés proponer problemas vinculados a algunas de Orientaciones Curriculares del Nivel Secundario (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) con el ánimo de ampliar las concepciones del docente en formación acerca de la relación entre la Matemática y otras áreas del conocimiento.

Otro aspecto logrado que amerita ser destacado dentro de este apartado es el tratamiento del conjunto solución de un SEL a partir de la desencapsulación del objeto plano cartesiano y objeto recta vectorial como medio para articular la matemática escolar y los aspectos geométricos de las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas.

En esta misma sección se habla de la dificultad para comprender el concepto de solución para un SEL y para articular los métodos de resolución de un sistema. Al respecto, amerita realizar una propuesta innovadora que procure, a partir de intervenciones docentes pertinentes, guiar a los estudiantes a superar estas posibles dificultades y que, además, integre diferentes registros de representación como el coloquial, gráfico y simbólico; esto último en consideración de los resultados de una de las investigaciones recuperadas en 1.4.1.

Si bien a partir del estudio reportado en 1.4.2 se ha indagado en torno a la descripción de heurísticas a partir de la resolución de un problema vinculado a SEL 2×2 por estudiantes del Profesorado de Matemática, el desafío persiste en cuanto a que no se cuenta con la descripción anticipada de posibles heurísticas puestas en juego durante las distintas etapas de resolución. Es por ello que, en este estudio, se intenta realizar un aporte que atienda a este aspecto.

2. Marco teórico-referencial

En esta sección se presentan los conceptos teóricos que orientan el abordaje del problema de investigación y que permiten delimitar las categorías de análisis. En efecto, se desmenuzan las nociones de *problema* y de *gama de problemas*. A continuación, se proporciona el concepto de *heurística* junto a una organización de acuerdo con descriptores generales. Además, se focaliza en el proceso de resolver un problema y en la RP como metodología de enseñanza. Finalmente, se comparten las delimitaciones conceptuales de algunos términos de interés para esta investigación relativos a los sistemas de ecuaciones lineales y su enseñanza.

2.1. Sobre la noción de problema

Podría decirse que la línea de la Didáctica de la Matemática denominada RP tiene su origen con los desarrollos de Polya (1954, 1965, 1981). No obstante, diversos autores propusieron sus propias definiciones del concepto de *problema*, en sintonía con la investigación que deseaban encarar, a través de características que consideraban relevante resaltar. Es así que Polya (1981) definió la noción de problema de la siguiente manera: "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata" (p.117).

Según Krulik y Rudnik (1987; citado en Rodríguez, 2012) un problema "es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma".

Labarrere (1996; citado en Rodríguez, 2012) enunció: "un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (...) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar".

Resulta interesante recuperar el aporte de Rodríguez (2012), quien mencionó características comunes a las diferentes conceptualizaciones o reformulaciones de problema: "existe una persona que ha de resolver la actividad (un resolutor), existe un punto de partida y una meta a alcanzar, y existe un cierto bloqueo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente" (p.155).

En el marco de este trabajo, se adopta la noción de *problema para un sujeto* propuesta por Colombano et al (2009; citado en Barreiro et al, 2019): "es una situación que requiere solución y, este, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato".

Al presentar una consigna que ya se considera que podría resultar rebuscada o alejada para el grupo-clase, puede suceder que genere un bloqueo total a los estudiantes, lo que impide que pongan en juego estrategias de resolución o que adviertan que hay algo por resolver. También puede ocurrir que la situación se transforme en un ejercicio para ellos debido a que les resulte accesible su resolución. Frente a estas posibilidades, Barreiro et al (2019) hablan de una *gama de problemas*, que alude a una familia de, al menos, tres problemas: un *problema base* (PB), aquel por el cual el docente tiene altas expectativas de que resulta un problema para la mayoría de los estudiantes; un *problema de complejidad menor*, se trata de un nuevo problema que versa sobre la misma temática que el PB y admite el uso de las mismas heurísticas (o de un grupo importante de ellas) con alguna simplificación; un *problema de complejidad mayor*, otro nuevo problema con la misma temática, que también es cercano al PB, habilita el uso de las mismas heurísticas -o de la mayoría- que el PB, pero de un nivel superior de dificultad. Una forma de pensar en la gama es concebir el PB y que los otros dos resulten de la manipulación de variables didácticas (Brousseau, 1994; citado en Barreiro et al, 2019) que habilitan o inhabilitan modos de resolución.

2.2. Sobre la noción de heurísticas

Tabla 5.1. Organización de heurísticas (Marino y Rodríguez, 2009)

Descriptores	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia delante	Abordar el problema a partir de las condiciones y los datos dados
	Trabajar empezando por el final	Suponer que se tiene una solución y analizar sus características
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución
	Razonar por analogía	Recordar problemas resueltos anteriormente, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Realizar una descripción gráfica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje del simbólico al coloquial o al numérico, etc.
Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos	Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido
	Reducir a un problema más sencillo	Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original

	Dividir el problema en subproblemas	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y, luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución
	Introducir un elemento auxiliar	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.)
Examinar casos particulares	Analizar sistemáticamente casos (inducción)	Asignar valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución
	Analizar casos límites o especiales	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades
	Analizar ejemplos	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema
Examinar la solución obtenida	Verificar mediante distintos registros de representación	Comprobar la respuesta a través de un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta
	Verificar con casos particulares	Constatar la respuesta en casos puntuales

Los términos *heurísticas* o *estrategias heurísticas* hacen referencia a lo que Polya (1981) definió como "el estudio de medios y métodos de la resolución de problemas" (p.10). Se toman en consideración, además, los aportes de Verschaffel (1999; citado en Barreiro et al, 2019), quien asumió a las heurísticas como estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y la transformación de un problema que le ayudan significativamente al resolutor -aunque no se lo garanticen- a aproximarse a hallar una solución apropiada.

Por otra parte, Marino y Rodríguez (2009), con el objetivo de caracterizar las heurísticas puestas en juego espontáneamente al resolver problemas matemáticos sobre funciones exponenciales, logarítmicas, polinómicas e inecuaciones exponenciales por estudiantes de un curso de nivel pre-universitario, realizaron una adaptación de la organización de heurísticas propuesta por Koichu et al (2003). En la primera columna de la Tabla 5.1 se indican los descriptores generales bajo los cuales se agrupan las heurísticas por características comunes. En la segunda columna se disponen algunas estrategias que se encuentran usualmente en la bibliografía y en la última se ofrece una breve descripción de cada una de ellas.

2.3. El proceso de resolver un problema

Polya (1973) modelizó el proceso de resolución de problemas a través de cuatro etapas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar la solución obtenida.

Su planteo está acompañado por una serie de preguntas que permiten entender a qué se refiere con cada etapa. La Tabla 5.2 muestra esta relación entre las etapas y las preguntas.

Tabla 5.2. Etapas del proceso de resolución de problemas de Poyla (1973) (Rodríguez, 2012)

Etapas	Preguntas
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante / contradictoria para determinar la incógnita?
Concebir un plan	¿Es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar?, ¿podría imaginarse un problema análogo más simple / general / particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, etc.
Ejecutar el plan	¿Puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede usted demostrarlo?
Examinar la solución obtenida	¿Puede usted demostrarlo?, ¿puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verlo de golpe?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Por otro lado, Schoenfeld (1985; citado en García Cruz, 1999) planteó la existencia de cuatro aspectos que intervienen en este proceso. En su obra habla de los *recursos cognitivos*, en alusión a un conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, y de las *heurísticas*, que comprenden reglas para progresar en situaciones dificultosas. Introdujo, además, las nociones de *control* durante la RP, es decir, aquello que permite un uso adecuado de los recursos disponibles, y de *sistema de creencias*, entendiéndolo como la perspectiva de un sujeto con respecto a la naturaleza de la Matemática y cómo trabajar en ella.

Más adelante, Schoenfeld (1992) incorporó un aspecto que considera central y propio de esta tarea: el *aspecto metacognitivo*. Según él, el pensamiento metacognitivo puede monitorear, controlar y dirigir el propio proceso cognitivo. Se debe analizar qué camino se ha elegido y cuál no, qué y por qué se ha hecho (Schoenfeld, 1992; citado en Rodríguez, 2012).

De Guzmán (2007) se basó en las ideas de Polya, Mason et al (Cruz, 1999) y en los trabajos de Schoenfeld, y expuso una forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la RP: Propuesta de la situación problema de la que surge el tema → Manipulación autónoma por los estudiantes → Familiarización con la situación y sus dificultades → Elaboración de estrategias posibles → Ensayos diversos por los estudiantes →

Herramientas elaboradas a lo largo de la historia → Elección de estrategias → Abordaje y resolución de los problemas → Recorrido crítico → Afianzamiento formalizado (si conviene) → Generalización → Nuevos problemas → Posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas.

De Guzmán (2007) señala que en todo el proceso el eje principal es la propia actividad desarrollada con tino por el profesor, quien coloca al estudiante en situación de participar y fomenta el gusto de descubrir por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. En este sentido, para De Guzmán (2007) se trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran, la componente heurística, es decir la atención a los procesos de pensamiento, y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

2.4. La RP como metodología de enseñanza de la Matemática

Según De Guzmán (2007), la enseñanza de la Matemática mediante RP pone énfasis en los procesos de pensamiento y de aprendizaje. Se procura que el estudiante manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, adquiera confianza en sí mismo y se prepare para otros problemas de la ciencia. De Guzmán (2007) señaló razones de la importancia de la utilización de la RP en la enseñanza de la Matemática, entre las que cabe destacar: los jóvenes desarrollan autonomía para resolver sus propios problemas; el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo; muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de la Matemática; aplicable a todas las edades.

Polya y Szegö (1976; citado en Petrone et al, 2014) expresaron que, cuando se implementa esta metodología de trabajo, trasciende el plano intelectual, al vincularse con aspectos emocionales de los estudiantes, que también conciernen a lo educativo, ya que los problemas pueden estimular la curiosidad y motivación, mediante procesos sostenidos con esfuerzo. En sintonía con esta misma idea, Aebli (2002; citado en Petrone et al, 2014) reflexionó que el profesor, al facilitar que el estudiante tome conciencia de que sus aportaciones tienen valor, demuestra que aprecia no solo lo que aporta, sino toda su persona, lo ayuda a desarrollar la confianza en sí mismo, así como la seguridad necesaria para avanzar en nuevos campos del saber y del conocimiento.

Gaulin (2001) también entiende que la RP cobró importancia dentro de la Educación Matemática. No obstante, advirtió que no se implementa frecuentemente en las clases de Matemática. Entre las causas de este fenómeno se destacan la escasa formación de los profesores en la enseñanza de la Matemática mediante problemas, así como la inseguridad en sus capacidades desarrolladas para implementarla, una falta de visión sistémica sobre la RP y una tendencia a tratar este enfoque como un contenido a enseñar. Sostiene que habría que trabajar la RP según distintas perspectivas:

- *A TRAVÉS de la RP*: los problemas se utilizan como herramienta para introducir un nuevo concepto matemático.
- *PARA la RP*: los problemas se presentan como espacios de aplicación de conceptos matemáticos ya aprendidos.
- *SOBRE la RP*: se enseñan estrategias de resolución.

Cabe resaltar que estas ideas se condicen con los lineamientos curriculares vigentes en nuestro país que conceden una gran importancia a los procesos mentales y a las actitudes implicadas en la RP. En el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) se plantea que la clase de Matemática en el Nivel Secundario, ámbito laboral del graduado del PM de la UNR, es un espacio propicio para asumir los desafíos de la sociedad actual, que exigen sujetos involucrados en la RP, que buscan alternativas y desarrollan estrategias flexibles y adaptables a contextos diversos. Ante este lineamiento metodológico, resulta convocante que los futuros profesores en Matemática vivencien desde su formación inicial experiencias de aula basadas en la RP. Es por ello que se procura proponer y diseñar problemas en vinculación con las Orientaciones Curriculares del Nivel Secundario (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013): Ciencias Naturales y Economía y Administración - Turismo.

2.5. SEL: encuadre matemático y enseñanza

Un *sistema lineal de m ecuaciones y n variables* (o incógnitas) $x_1, x_2, \dots, x_n$ es un conjunto de *m* ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Los números reales $a_{11},. \ . \ . \ , a_{1n},, a_{21} \ . \ . \ . \ , a_{2n},. \ . \ . \ , a_{m1}, \ . \ . \ . \ , a_{mn}$ son los *coeficientes* del sistema y $b_1, \dots, b_m$ son los *términos constantes* del sistema. Una *solución* del sistema lineal (1) es una *n*-upla $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ tal que cuando se reemplazan los valores de x_i por $\overline{x_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$ en (1), todas las ecuaciones se satisfacen. El conjunto de todas las soluciones posibles se llama *conjunto solución*.

Dentro del plan de estudios del PM, el contenido SEL es parte del Campo de Formación Disciplinar Específica, cuyo objetivo es brindar una sólida formación científica y técnica en el campo de la Matemática, así como en las áreas estrechamente relacionadas con el mismo (Consejo Superior de la UNR, 2018). Particularmente, se aborda en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II, cuyos bloques temáticos son: análisis combinatorio, matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales $\mathfrak{R}^n$ y $\mathfrak{C}^n$, geometría analítica del plano y del espacio. Debido a que se procura que los potenciales problemas integren diferentes registros de representación de un SEL, se consideran propicios para implementarlos durante las últimas dos unidades mencionadas, ya que los estudiantes contarán con nociones de recta en el plano y en el espacio, y de plano en el espacio.

La Geometría Analítica constituye una potente vía de RP geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales. Podría considerarse, entonces, que se trata de una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría, que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas, y vincula las relaciones y operaciones entre los elementos del Álgebra y la Geometría (González Urbaneja, 2007).

Ciccioli y Sgreccia (2017) señalan que, al consultar estudios referidos a la didáctica de la Geometría Analítica, prevalecen aquellos que tratan acerca de dificultades cognitivas al aprender esta rama de la Matemática, sobre aquellos que se enfocan en su enseñanza en la formación de profesores. Así, por ejemplo, se encuentra el trabajo de Arellano y Oktaç

(2009; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) quienes aluden a una falta de relación entre los registros gráfico y algebraico, al realizar conversiones entre ellos, en el tratamiento de SEL por parte de alumnos que están finalizando la escuela secundaria. Al respecto, Ciccioli y Sgreccia (2017) remarcan que realizar representaciones gráficas en abundancia, apoyadas en varias ocasiones con explicaciones en lenguaje coloquial o simbólico, se constituye en un elemento clave en una formación de profesores en Matemática, que intenta superar lo que Arellano y Oktaç (2009; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) señalan en cuanto a una falta de comunicación entre los distintos registros semióticos en la enseñanza.

Por otro lado, entre los problemas de la enseñanza de la Geometría Analítica, Alves et al (2010; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) expresan que en el nivel secundario no se explica la transición del marco geométrico al algebraico y que en el nivel superior se avanza rápidamente hacia el estudio de espacios más abstractos, donde se pierde el eslabón esencial para la comprensión de la Geometría Analítica. Acerca de los libros de texto utilizados en carreras de Ciencias Exactas, Karrer y Navas (2013; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017) consideran que están fuertemente orientados al uso de registros monofuncionales discursivos (como el algebraico). Las autoras avanzan hacia una propuesta de enseñanza y concluyen que un estudiante que desarrolla la habilidad de visualización, trasciende las fases sintético-geométrica y analítico-aritmética, y logra posicionarse en un modo de pensamiento más analítico-estructural; resultado que coincide con lo expuesto por Bonilla y Parraguez (2013; citado en Ciccioli y Sgreccia, 2017). Por ello, estas últimas insisten en propuestas de enseñanza en las que se promueva dicho modo de pensamiento. En efecto, se pondera una constante vinculación geometría-álgebra (con articulación de los registros gráfico, simbólico y coloquial) por medio de la cual se le otorga sentido geométrico a las ecuaciones que se obtienen sin priorizar las técnicas analíticas.

3. Encuadre metodológico

En esta parte se muestra el abordaje metodológico adoptado en el proyecto innovador. Primeramente, se precisan los sujetos de la investigación. En un segundo apartado se presenta el enfoque, alcance y tipo de investigación. A continuación, en un tercer apartado, se explicitan las categorías de análisis definidas en función del marco teórico adoptado. Y, por último, se detallan las técnicas de recolección y procesamiento de la información.

3.1. Sujetos

Para proponer y diseñar problemas que respondan a la metodología RP y cuya resolución involucre SEL, se ha focalizado la mirada en dos libros digitalizados sobre Álgebra y Geometría Analítica: Grossman (2008) y Lay (2007).

El interés en consultar esta bibliografía radica en que el libro de texto es uno de los recursos más utilizados en la enseñanza y tiene una gran influencia al momento de decidir qué y cómo enseñar, convirtiéndose así en un vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades. Puntualmente, el criterio de selección contempló dos aspectos: que formen parte de la bibliografía básica de la asignatura de interés para este proyecto y/o se encuentren digitalizados y en acceso abierto.

3.2. Enfoque, alcance y tipo de investigación

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo y alcance descriptivo-interpretativo. Se procura proponer y diseñar problemas sobre SEL que respondan a la metodología RP en el contexto del PM de la UNR.

Develar problemas que puedan introducirse para favorecer un abordaje RP de los SEL, es la intencionalidad central que se buscará atender mediante el proyecto innovador. Es por ello que se adopta un enfoque cualitativo, sin ánimos de generalización (Hernández Sampieri et al, 2014). En acuerdo con lo que plantean Bravin y Pievi (2008), este tipo de enfoque resulta adecuado para investigaciones como esta porque se propone estudiar aspectos vinculados a los procesos de producción y apropiación del conocimiento.

El alcance de la investigación es principalmente descriptivo, ya que busca especificar las heurísticas puestas en juego en problemas que pueden introducirse para favorecer un abordaje mediante la RP de los SEL, así como inquietudes estudiantiles que puedan surgir en su resolución y aportar intervenciones docentes frente a estas. Además, se producen algunas posibles interpretaciones con el ánimo de reflexionar sobre el proceso de enseñanza de los SEL.

Los estudios descriptivos suelen ser muy recurridos en el campo de la Educación, ya que producen un tipo de información de relevancia respecto de cuáles aspectos del problema son significativos y qué dimensiones del mismo tienen relación entre sí (Bravin y Pievi, 2008). La investigación adquiere rasgos de tipo cuasiexperimental dado que, a partir de la identificación de potenciales problemas, se habla de su re-diseño de manera intencional para un grupo de estudiantes.

3.3. Categorías de análisis

En función de las consideraciones teóricas que se presentaron en la parte 2 del trabajo, la investigación se organizó sobre la base de tres categorías de análisis:

- Heurísticas (*He*)
- Anticipación de interrogantes estudiantiles (*AIE*)
- Intervenciones docentes (*ID*)

Para la categoría *He*, se considera de especial interés si la RP permite el uso de los distintos registros de representación escrita (gráfico, simbólico y coloquial) y sus correspondientes conversiones. Se adopta la organización de heurísticas propuesta por Marino y Rodríguez (2009), con la distinción de procesos de resolución donde amerite *Planificar*, esto es, abordar la actividad desde los datos dados o suponer que existe una solución para el SEL planteado y estudiar sus propiedades; *Activar experiencia previa*, que alude al establecimiento de conexiones con lo previo (problemas resueltos y/o teoría sobre ecuaciones lineales, recta en el plano, recta y plano en el espacio); *Seleccionar una representación adecuada para el problema*, que suponen el uso de representaciones externas tales como símbolos, trazos, dibujos y construcciones con los cuales se puede dar idea del camino de resolución; *Modificar el problema*, mediante su reducción a un problema ya resuelto previamente o más sencillo o la incorporación de elementos auxiliares; *Examinar casos particulares*, es decir, analizar la situación planteada asignándole valores particulares a las incógnitas del SEL; y *Examinar la solución obtenida*, a partir de diferentes registros de representación de un SEL o de casos particulares.

En la *AIE* se incluyen interrogantes que pueden surgir en las diferentes etapas del modelo de RP de Poyla (1973). Se especifican preguntas sobre la Comprensión del problema (*CP*), que alude a la identificación de los datos del mismo y su traducción en las incógnitas del SEL que se empleará en su resolución; la Concepción de un plan de resolución (*CPR*), que refiere al reconocimiento del camino de resolución óptimo del problema (esto es, sobre el método de resolución conveniente); la Ejecución del problema (*EP*), que comprende interrogantes sobre la aplicación de métodos de resolución de SEL o sobre el pasaje de un registro de representación a otro; y la Verificación de la solución obtenida (*VS*), que trata sobre la coherencia de la solución (si es que existe) con respecto al contexto del problema o sobre la inexistencia de esta.

Con respecto a la categoría *ID*, está constituida por la guía del docente frente a las preguntas previstas en la categoría *AIE*.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección y procesamiento de la información

La técnica de recolección de datos es el análisis documental de los libros mencionados en 3.1. Para el procesamiento de la información recopilada, se emplea la técnica de análisis del contenido (Cabrera, 2009) en dos fases:

Fase 1. Identificación de dos potenciales problemas (uno por cada orientación curricular) a la luz de las categorías de interés. En efecto, en consideración de los criterios brindados por Barreiro et al (2019) (1.4.1) se procura que cada problema:

a) plantee un objetivo claramente definido;
b) plantee un bloqueo entre los estudiantes y la situación, ni muy cercano ni muy lejano, en tanto que abordan temas cuyo contenido está entre los conocimientos previos a SEL;
c) admita el uso de al menos dos heurísticas.

Se especifica en una matriz de Excel (Tabla 5.3) el objetivo del problema, la orientación curricular (*OC*) (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) y las *He* puestas en juego.

Tabla 5.3. Matriz de datos empleada para el procesamiento de la Fase 1

Problema	Objetivo	OC	He

Fase 2. Diseño de una gama de problemas para cada problema seleccionado en la fase 1. Al considerar la diversidad cognitiva de los estudiantes de una misma clase, es razonable esperar que una tarea propuesta resulte un problema para algunos y no para otros. En

efecto, se parte de un *PB* (cada problema seleccionado en la fase 1), y se diseñan dos nuevos problemas a partir de la identificación de la/s dificultad/es del *PB*: un problema de complejidad menor (*PCm*) y un problema de complejidad mayor (*PCM*). De este modo, el *PCm* y *PCM* son problemas asociados al *PB* y, para que conformen la gama, son tales que versan sobre la misma temática del *PB* y admiten el uso de varias de las heurísticas que el *PB* posibilita. De esta manera, se dispone de consignas que procuran atender a la diversidad cognitiva en el aula. Se especifica en una matriz de Excel (Tabla 5.4) el objetivo de la gama de problemas, las *He* empleadas en la gama de problemas, la *AIE* por etapa y las *ID*.

Tabla 5.4. Matriz de datos empleada para el procesamiento de la Fase 2

Problema	Objetivo	He	AIE				ID
			CP	CPR	EP	VS	

4. Resultados

En esta parte se detallan los resultados de la investigación los cuales son estructurados en dos apartados que se corresponden respectivamente con cada uno de los objetivos específicos presentados en 1.3 y que se denominan, en alusión al núcleo conceptual de los mismos, *Heurísticas en los potenciales problemas* y *Diseño de la gama de problemas: interrogantes estudiantiles e intervenciones docentes*. En estos apartados se detectan elementos propios de un enfoque de enseñanza de la Matemática mediante RP, en clave del sistema de categorías presentado oportunamente en 3.3. En el primer apartado, el análisis se centra en el reconocimiento de las heurísticas puestas en juego en los *PB*, a partir de la descripción de posibles resoluciones. En el segundo apartado, el foco de interés se ubica en el diseño de la gama de problemas para cada *PB* y el reconocimiento de interrogantes estudiantiles junto con una descripción de intervenciones docentes correspondientes.

4.1. Heurísticas en los potenciales problemas

En esta oportunidad se socializan las heurísticas identificadas en los problemas seleccionados para las dos Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) de interés para este trabajo, a partir de una anticipación de posibles resoluciones.

4.1.1. Potenciales problemas para Economía y Administración

Se seleccionaron dos potenciales problemas para la Orientación Curricular Economía y Administración (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013).

Primer potencial problema para Economía y Administración

El primer potencial problema seleccionado (*PP1*) se visualiza en la Figura 5.1.

EJEMPLO 1 Suponga que una economía consiste en los sectores de carbón, electricidad y acero, y que el rendimiento de cada sector se distribuye entre los diferentes sectores como en la tabla 1, donde las entradas de una columna representan fracciones de la producción total de un sector.

La segunda columna de la tabla 1, por ejemplo, muestra que la producción total de electricidad se divide como sigue: un 40% de carbón, un 50% de acero, y el restante 10% de electricidad. (El sector eléctrico trata este 10% como un gasto en que incurre para hacer funcionar su negocio.) Ya que debe tomarse en cuenta la producción total, las fracciones decimales de cada columna deben sumar 1.

Los precios (es decir, valores en moneda) de la producción total de los sectores de carbón, electricidad y acero se denotarán como p_C, p_E y p_S, respectivamente. Si es posible, encuentre los precios de equilibrio que permiten a los ingresos de cada sector igualar sus gastos.

TABLA 1 Una economía sencilla

Distribución del rendimiento de:			
Carbón	Electricidad	Acero	Comprado por:
.0	.4	.6	Carbón
.6	.1	.2	Electricidad
.4	.5	.2	Acero

Figura 5.1. Primer potencial problema para Orientación Curricular Economía y Administración (Lay, 2007, p.58)

Fundamentación

A partir de los criterios establecidos para la Fase 1 en 3.4, se explica por qué *PP1* los atiende.

- *Planteo de un objetivo claramente definido*. Se considera que se cumple. La intención que expresa la consigna es encontrar la producción de cada industria de manera que los ingresos de cada una de ellas sean iguales a sus gastos.
- *Planteo de un bloqueo inicial*. Identificación de los coeficientes del SEL que permite hallar la producción de cada industria.
- *Heurísticas*. A continuación, se comparten posibles resoluciones del *PP1*. En primer término, se identificación los datos del problema.

  De las columnas de la Tabla 1 (Figura 5.1), se obtiene que:

La producción total de electricidad se divide en un 40% de carbón, un 50% de acero y el 10% restante de electricidad.

La producción total de carbón se divide en un 0% de carbón, un 60% de electricidad y un 40% de acero.

La producción total de acero se divide en un 60% de carbón, un 20% de electricidad y un 20% de acero.

De las filas de la Tabla 1 (Figura 5.1), se obtiene que:

La primera fila indica que el sector carbón utiliza (y paga por usar) un 40% de la producción del sector eléctrico y el 60% de la producción de acero.

La segunda fila indica que el sector eléctrico utiliza (y paga por usar) un 60% de la producción del sector del carbón, un 10% del sector eléctrico y un 20% de la producción de acero.

La tercera fila indica que el sector acero utiliza (y paga por usar) un 40% de la producción del sector del carbón, un 50% de la producción de electricidad y un 20% de la producción de acero.

Se pretende que para cada sector los ingresos del servicio ofrecido (es decir, el precio del producto ofrecido por cada industria) sean iguales a los gastos de producción (es decir, los gastos de utilizar un porcentaje de los diferentes sectores). En consecuencia, las incógnitas son p_C, p_E y p_S y son tales que:

$$\begin{cases} p_C = 0{,}4\,p_E + 0{,}6\,p_S & (1) \\ p_E = 0{,}6p_c + 0{,}1p_E + 0{,}2p_S & (2) \\ p_S = 0{,}4p_c + 0{,}5p_E + 0{,}2p_S & (3) \end{cases}$$

Se plantea, así, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. A partir de aquí se desprenden, al menos, dos caminos de resolución posibles. En el primero de ellos se resuelve el SEL mediante el método de sustitución.

Posible resolución 1 para el SEL

Si se sustituye la ecuación (1) en la (2) se obtiene $p_E = \frac{24}{33}p_S$ (4). Al reemplazar la expresión obtenida en (4) y la expresión (1) en (3) se obtiene $p_S = \frac{140}{33}p_S + 0{,}2p_S$.

Al observar esta última igualdad, se deduce que p_S es libre.

La solución de este SEL es $p_E = \frac{24}{33}p_S$ y $p_C = \frac{31}{33}p_S$ con p_S libre.

En la otra forma se obtienen las soluciones del SEL por medio de reducción por filas. Para ello se plantea el sistema homogéneo asociado al SEL dado por (1), (2) y (3).

Posible resolución 2 para el SEL

Al trasladar todas las incógnitas al lado izquierdo de las ecuaciones, queda:

$$\begin{cases} p_C - 0{,}4\, p_E - 0{,}6\, p_S = 0 \\ -0{,}6p_c + 0{,}9p_E - 0{,}2p_S = 0 \\ -0{,}4p_c - 0{,}5p_E + 0{,}8p_S = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el SEL mediante reducción por filas. Los decimales se redondean a dos posiciones. La solución de este SEL es $p_E = \frac{24}{33}p_S$ y $p_C = \frac{31}{33}p_S$ con p_S libre.

Para cualquiera de los dos caminos propuestos se analiza si los precios de equilibrio hallados permiten a los ingresos de cada sector igualar sus gastos mediante casos particulares; como, por ejemplo:

Si $p_S = 100$, entonces $p_E = 85$ y $p_C = 94$. Así,

$$\begin{cases} 94 = 0{,}4 \bullet 85 + 0{,}6 \bullet 100 \\ 85 = 0{,}6 \bullet 94 + 0{,}1 \bullet 85 + 0{,}2 \bullet 100 \\ 100 = 0{,}4 \bullet 94 + 0{,}5 \bullet 85 + 0{,}2 \bullet 100 \end{cases}$$

Se observa que con estos valores los ingresos de cada sector son iguales a sus gastos.

A continuación, se identifican las heurísticas puestas en juego. Se encuentra que las resoluciones muestran el uso de las heurísticas que se mencionan en la Tabla 5.5. Adicionalmente, se observa que la RP permite el uso de los registros de representación simbólica y coloquial, y sus correspondientes conversiones.

Tabla 5.5. Heurísticas para PP1

Descriptores	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia adelante	Al plantear las ecuaciones (1), (2) y (3) a partir de las condiciones y los datos dados
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con métodos de resolución de un SEL 3×3 (caminos 1 y 2)
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Al traducir la información brindada por la tabla en las ecuaciones (1), (2) y (3)
Examinar la solución obtenida	Verificar con casos particulares	Verificar la respuesta asignándole valores a la variable libre

Segundo potencial problema para Economía y Administración

El segundo potencial problema seleccionado (*PP2*) se visualiza en la Figura 5.2.

EJEMPLO 8 **Un problema de administración de recursos**

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento 1, 20 000 unidades del alimento 2 y 55 000 del 3. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Figura 5.2. Segundo potencial problema para Orientación Curricular Economía y Administración (Grossman, 2008, p.16)

Fundamentación

A partir de los criterios establecidos para la Fase 1 en 3.4, se explica por qué *PP2* los atiende.

- *Planteo de un objetivo claramente definido.* Se considera que se cumple. La intención que expresa la consigna es hallar la cantidad de peces de cada especie que pueden coexistir en el lago.
- *Planteo de un bloqueo inicial.* Traducción de la información en lenguaje coloquial al simbólico. Identificación del objeto matemático que permite su resolución.
- *Heurísticas.* A continuación, se comparten posibles resoluciones del *PP2*. Para empezar, se contempla la traducción de los datos en lenguaje coloquial al lenguaje simbólico.

  Sean x_1, x_2y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. De aquí, x_1, x_2 y $x_3 > 0$. Si se utiliza la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento 1, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento 1 y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$unidades del alimento 1. Entonces, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25000$ = suministro total por semana de alimento 1. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente SEL:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 20000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 55000 \end{cases}$$

  Al resolver el SEL mediante reducción por filas o mediante el método de sustitución o de igualación, su solución es $x_1 = 40000 - 5x_3$, $x_2 = x_3 - 5000$ y x_3 libre. Ahora bien, como x_1 es mayor que 0, entonces x_3 es menor que 8000. Similarmente, como x_2 es mayor que 0, entonces x_3 es mayor que 5000. Puede verificarse la solución como se muestra en este ejemplo de caso particular:

Si x_3 = 6000 entonces x_1=10000 y x_2 = 1000. En consecuencia:

$$\begin{cases} 10000 + 3 \bullet 1000 + 2 \bullet 6000 = 25000 \\ 10000 + 4 \bullet 1000 + 6000 = 20000 \\ 2 \bullet 10000 + 5 \bullet 1000 + 5 \bullet 6000 = 55000 \end{cases}$$

Con estas cantidades de cada tipo de especie de peces no se requiere de mayor suministro de alimento, por lo que pueden coexistir en el lago.

Posteriormente se identifican las heurísticas puestas en juego. Se encuentra que las resoluciones anteriores muestran el uso de las heurísticas que se mencionan en la Tabla 5.6. Adicionalmente, se observa que la RP permite el uso de los registros de representación simbólica y coloquial.

Tabla 5.6. Heurísticas para PP2

Descriptores	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia adelante	Al plantear el SEL a partir de las condiciones y los datos dados
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relativa a métodos de resolución de un SEL 3×3
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Al traducir la información brindada por el enunciado en las ecuaciones lineales
Examinar la solución obtenida	Verificar con casos particulares	Constatar la respuesta a través de la asignación de valores a la variable libre

4.1.2. Potencial problema para Ciencias Naturales

El potencial problema seleccionado *PP3* se visualiza en la Figura 5.3.

Ya que se trata de un ejemplo, se formula la consigna correspondiente como sigue: Cuando se quema gas propano (C_3H_8), este se combina con oxígeno (O_2) para formar dióxido de carbono (CO_2).y agua (H_2O). Esta reacción química puede describirse a partir de la ecuación química $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$. El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en C_3H_8 hay tres átomos de carbono y ocho átomos de hidrógeno. Se observa que el número total de átomos de carbono situados a la izquierda (lado de los reactivos) es diferente al de la derecha (lado del producto). Lo mismo ocurre con los de hidrógeno y de oxígeno. Con el propósito de cumplir la ley de conservación de la masa de Lavoisier, los químicos "balancean" las ecuaciones químicas de manera que el número total de átomos situados a la izquierda sea igual al número total correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción). Se solicita balancear la ecuación química descripta anteriormente.

Balanceo de ecuaciones químicas

Las ecuaciones químicas describen las cantidades de sustancias consumidas y producidas por las reacciones químicas. Por ejemplo, cuando se quema gas propano (C_3H_8), éste se combina con oxígeno (O_2) para formar dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O), de acuerdo con una ecuación de la forma

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O \qquad (4)$$

Para "balancear" esta ecuación, un químico debe encontrar números enteros $x_1, \ldots, x_4$ tales que el número total de átomos de carbono (C), hidrógeno (H) y oxígeno (O) situados a la izquierda sea igual al número correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción).

Figura 5.3. Potencial problema para Orientación Curricular Ciencias Naturales (Lay, 2007, p.59)

Fundamentación

A partir de los criterios establecidos para la Fase 1 en 3.4, se explica por qué *PP3* los atiende.

- *Planteo de un objetivo claramente definido*. Se considera que se cumple. La intención que expresa la consigna es conseguir igualar el número total de átomos de carbono/hidrógeno/oxígeno situados a la izquierda con los de la derecha.
- *Planteo de un bloqueo inicial*. Deducción del concepto "balancear una ecuación química".
- *Heurísticas*. A continuación, se comparten posibles resoluciones del *PP3.* La ecuación dada involucra tres tipos de átomo (carbono (C), hidrógeno (H) y oxígeno (O)). Para interpretarla, se desprenden al menos dos caminos posibles. En lo que sigue se traduce en vectores la información brindada por la ecuación química.

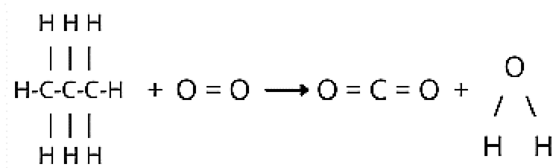
  Del lado izquierdo de la ecuación se obtiene la siguiente información:
  - C_3H_8 significa que hay tres átomos de C, ocho de H y ninguno de O: $(3,8,0)$
  - O_2 significa que hay dos átomos de O y ninguno de C y de H: $(0,0,2)$

  Del lado derecho de la ecuación se obtiene la siguiente información:
  - CO_2 significa que hay un átomo de C, dos de O y ninguno de H: $(1,0,2)$
  - H_2O significa que hay dos átomos de H, uno de O y ninguno de C: $(0,2,1)$

  En función de los vectores obtenidos, la ecuación química dada queda como:

$(3,8,0) + (0,0,2) \rightarrow (1,0,2) + (0,2,1)$

En la resolución que sigue se opta por interpretar la ecuación química dada a partir de la representación gráfica de los elementos químicos en juego.



Como se pretende que el número total de átomos de C situados a la izquierda (3) sea igual al número total correspondiente de átomos de C ubicados a la derecha (1), se buscan números x_1 y x_3 tales que $3x_1 = x_3$. Similarmente con los restantes átomos, se buscan números x_2 y x_4 tales que $8x_1 = 2x_4$, $2x_2 = 2x_3 + x_4$. De esta manera, se obtiene el siguiente SEL:

$$\begin{cases} 3x_1 = x_3 \quad (1) \\ 8x_1 = 2x_4 \quad (2) \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 \quad (3) \end{cases}$$

Se plantea, así, un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. A partir de aquí se desprenden, al menos, dos caminos de resolución posibles. En lo que sigue se resuelve el SEL mediante una combinación de los métodos de igualación y de sustitución.

De (1) y de (2) se obtiene $x_1 = \frac{1}{3}x_3$ y $x_1 = \frac{1}{4}x_4$. Luego: $x_3 = \frac{3}{4}x_4$ (4). Al sustituir (4) en (3) se halla $x_2 = \frac{5}{4}x_4$. La solución del sistema es $x_1 = \frac{1}{4}x_4$, $x_2 = \frac{5}{4}x_4$, $x_3 = \frac{3}{4}x_4$ y x_4 libre.

Otra vía es llegar al sistema homogéneo asociado al SEL dado por (1), (2) y (3), y resolverlo mediante reducción por filas.

Al trasladar todas las incógnitas al lado izquierdo de las ecuaciones, queda:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Para cualquiera de los dos caminos propuestos se analiza si bajo las condiciones explicitadas para las incógnitas del sistema, el número total de átomos situados a la izquierda es igual al número total correspondiente de átomos ubicados a la derecha, asignándole valores a x_4. Por ejemplo, si $x_4 = 4$ entonces $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 3$. De aquí se despliegan, al menos, dos maneras para corroborar lo solicitado. En la primera se reemplazan los valores de las incógnitas en el sistema planteado y se verifica que se den las igualdades:

$$\begin{cases} 3 \bullet 1 = 3 \\ 8 \bullet 1 = 2 \bullet 4 \\ 2 \bullet 5 = 2 \bullet 3 + 4 \end{cases}$$

Con $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$ la ecuación química dada se encuentra balanceada.

La segunda opción es la que sigue, donde se interpreta la solución particular a partir de la representación gráfica de la ecuación balanceada.

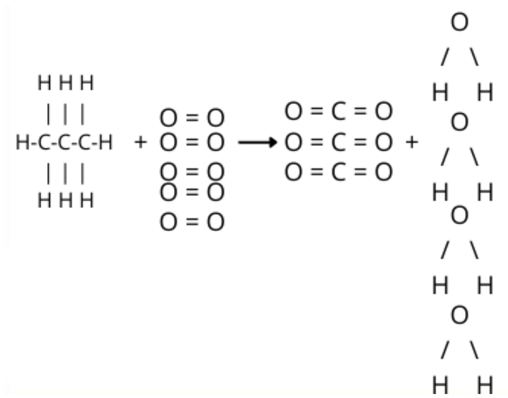


Tabla 5.7. Heurísticas para PP3

Descriptores	Heurísticas	Características
Planificar	Trabajar hacia adelante	Al plantear las ecuaciones (1), (2) y (3) a partir de las condiciones y los datos dados
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con métodos de resolución de un SEL 3×3
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Al realizar la representación gráfica de la ecuación química
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Al traducir coloquialmente la información brindada por la ecuación química
Examinar la solución obtenida	Verificar mediante distintos registros de representación	Cuando, luego de la resolución, mediante los métodos de igualación/sustitución o reducción por filas, se verifica con la representación gráfica de la ecuación química balanceada
	Verificar con casos particulares	Constatar la respuesta asignándole valores a la variable libre

Se identifican las heurísticas puestas en juego. Se encuentra que las resoluciones anteriores muestran el uso de las heurísticas que se mencionan en la Tabla 5.7. Adicionalmente, se observa que la resolución del problema permite el uso de los registros de representación simbólica y coloquial, y sus correspondientes conversiones (traducción de la ecuación química en lenguaje coloquial o mediante la representación gráfica de los elementos que intervienen.

4.2. Diseño de la gama de problemas: interrogantes estudiantiles e intervenciones docentes

En esta instancia se socializa lo relativo a la Fase 2 descripta en 3.4. En efecto, en una serie de tres apartados se exponen el *PCm* y el *PCM* para los problemas sobre Economía y Administración - Turismo y sobre Ciencias Naturales (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) junto a lo referido a las categorías *AIE* y las respectivas *ID*.

4.2.1. Gama de problemas para PP1

Las principales dificultades del *PP1* son la *identificación del contenido matemático a utilizar para su resolución* y la *identificación de los coeficientes del SEL*.

Problema de complejidad menor

Se propone un *PCm* asociado al *PP1* para aquellos estudiantes en los que el bloqueo es total y no les permite avanzar. La menor complejidad de este problema radica en la traducción de los datos de la tabla a un objeto matemático que permita resolver el *PP1*. El objetivo general continúa siendo el mismo que el del *PP1* con la diferencia que se incorporan objetivos parciales: a través de cinco preguntas se guía al estudiante con la intención de que pueda interpretar la información que se brinda en la tabla dada, para finalmente plantear el SEL. De esta manera se mantienen las heurísticas que el PB admitía.

PCm para PP1

Suponga que una economía consiste en los sectores carbón, electricidad y acero, y que el rendimiento (producción total) de cada sector se distribuye entre los diferentes sectores como sigue:

Distribución del rendimiento de:			
Carbón	Electricidad	Acero	Comprado por:
.0	.4	.6	Carbón
.6	.1	.2	Electricidad
.4	.5	.2	Acero

a) ¿Qué porcentaje del total de la producción del carbón consume el sector eléctrico?

b) En economía, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema se conoce como demanda interna. Por ejemplo, en Argentina la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero. ¿Cuántas unidades de cada sector se demanda para producir p_C unidades de carbón? ¿Cuántas unidades de cada sector se demanda para producir p_E unidades de electricidad? ¿Cuántas unidades de cada sector se demanda para producir p_S unidades de acero?

c) Si se quiere que no haya sobreproducción, ¿cuántas unidades debe producir cada sector para satisfacer cada demanda interna?

Problema de complejidad mayor

Se socializa el *PCM* asociado a *PP1* para aquellos estudiantes en los que PP1 resultó ser un ejercicio porque supieron rápidamente lo que tenían que plantear. Este último muestra un problema en la misma temática, pero con una variación que habilita el uso de una nueva heurística, razonar por analogía. La complejidad de la situación radica en el tipo de pregunta, que implica pensar sobre las condiciones que se necesitan agregar al SEL planteado para *PP1*.

PCM para PP1

Suponga ahora que un consumidor de los tres sectores económicos demanda 100 unidades para el sector carbón, 50 para el eléctrico y 100 para el acero. ¿Cuántas unidades de cada sector se deben producir para asegurar que la demanda del consumidor está satisfecha?

Anticipación de interrogantes estudiantiles e Intervenciones docentes

Tabla 5.8. AIE e ID para la gama de problemas para PP1

Etapa	Heurísticas	Descripción
CP	¿Cómo se lee la tabla?	Dar un ejemplo
	¿Cuáles son los ingresos de cada sector? ¿Cuáles son los gastos de producción de cada sector? ¿Cuál es la oferta de cada sector?	¿Qué entendés por ingreso, gasto, oferta, sobreproducción?
	¿Cuándo sé que no hay sobreproducción?	¿Qué necesita cada sector para producir su servicio?
CPI	¿Qué método de resolución conviene más?	¿Qué información obtenés con cada método de resolución?
EP	A partir de los datos y las condiciones obtuve un sistema compatible indeterminado, ¿tiene sentido?	¿Podés comprobar cada uno de los pasos al ejecutar tu plan de resolución? ¿Podés corroborar que cada paso es correcto?
VS	¿Cómo verifico que los ingresos de cada sector sean iguales a sus gastos?	¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

Esta parte se focaliza en los resultados referidos a las categorías *AIE* e *ID* para la gama de problemas para *PP1*. En la Tabla 5.8 se comparten posibles preguntas que pueden surgirles a los estudiantes junto con intervenciones docentes, en sintonía con lo expuesto en 1.4.1.

4.2.2. Gama de problemas para PP2

La principal dificultad del *PP2* es la *identificación del contenido matemático a utilizar para su resolución.*

Problema de complejidad menor

En lo que sigue se muestra el *PCm* asociado al *PP2*. La menor complejidad de este problema radica en la traducción de los datos del enunciado a un objeto matemático que permita resolver el *PP2*. El objetivo general continúa siendo el mismo que el del *PP2*, con la diferencia que se incorporan objetivos parciales: a través de tres preguntas se guía al estudiante con la intención de que pueda interpretar la información que se brinda en el enunciado, para finalmente plantear el SEL. De esta manera se mantienen las heurísticas que el PB admitía.

PCm para PP2

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 del 3.

a) ¿Cuántas unidades del alimento 1 consumen 100 peces de la especie 1? ¿Cuántas unidades del alimento 2 consumen 200 peces de la especie 2? ¿Cuántas unidades del alimento 3 consumen x peces de la especie 3?

b) Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿qué condiciones sobre las cantidades de unidades de cada tipo de alimento se deben imponer para que las tres especies puedan coexistir en el lago?

c) En base a su respuesta en b), ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Problema de complejidad mayor

Se comparte el *PCM* asociado al *PP2*. Se trata de una pregunta en la misma temática que el *PP2* que habilita el uso de una nueva heurística, trabajar empezando por el final. La complejidad de la misma radica en la interpretación del tipo de sistema obtenido a partir de los datos y las condiciones impuestas (compatible indeterminado, es decir, infinitas soluciones) en el contexto del problema (cantidad finita de peces).

PCM para PP2

¿Cuántas soluciones tiene el problema de administración de recursos?

Anticipación de interrogantes estudiantiles e Intervenciones docentes

Este apartado se focaliza en los resultados referidos a las categorías *AIE* e *ID* para la gama de problemas para *PP2*. En la Tabla 5.9 se comparten posibles preguntas que pueden surgirle a los estudiantes junto con intervenciones docentes, en sintonía con lo expuesto en 1.4.1.

Tabla 5.9. AIE e ID para la gama de problemas para PP2

Etapa	Heurísticas	Descripción
CP	¿Cómo traduzco los datos en expresiones matemáticas?	¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones que se imponen y sobre qué? ¿Qué se quiere averiguar?
CPl	¿Qué método de resolución conviene más?	¿Qué información obtenés con cada método de resolución?
EP	A partir de los datos y las condiciones obtuve un sistema compatible indeterminado, ¿tiene sentido? Porque me piden una cantidad exacta de peces	¿Podés comprobar cada uno de los pasos al ejecutar tu plan de resolución? ¿Podés corroborar que cada paso es correcto?
VS	A partir de los datos y las condiciones obtuve un sistema compatible indeterminado pero me piden decir una cantidad exacta de peces, ¿qué hago?	¿Qué significa que un sistema sea compatible indeterminado?
	¿Cómo verifico que con estas cantidades de peces, pueden coexistir?	¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

4.2.3. Gama de problemas para PP3

Las principales dificultades del *PP3* es la *deducción del concepto "balancear"*, la *identificación del contenido matemático a utilizar para su resolución* y la *identificación de los coeficientes del SEL*.

Problema de complejidad menor

A continuación, se muestra el *PCm* asociado al *PP3* para aquellos estudiantes en los que el bloqueo es total y no les permite avanzar. La menor complejidad de este problema radica en la deducción del concepto "balancear". El objetivo general continúa siendo el mismo que el del *PP3*, con la diferencia que se incorporan objetivos parciales: a través de cinco preguntas se guía al estudiante con la intención de que pueda interpretar la información que se brinda en la tabla dada, para finalmente plantear el SEL. De esta manera se mantienen las heurísticas que el PB admitía.

PCm para PP3

Cuando se quema gas propano (C_3H_8), este se combina con oxígeno (O_2) para formar dióxido de carbono (CO_2).y agua (H_2O). Esta reacción química puede describirse a partir de la ecuación química $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$. El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en C_3H_8 hay tres átomos de carbono y ocho átomos de hidrógeno. Se observa que el número total de átomos de carbono situados a la izquierda (lado de los reactivos) es diferente al de la derecha (lado del producto). Lo mismo ocurre con los de hidrógeno y de oxígeno. Con el propósito de cumplir la ley de conservación de la masa de Lavoisier, los químicos "balancean" las ecuaciones químicas de manera que el número total de átomos situados a la izquierda sea igual al número total correspondiente de átomos ubicados a la derecha (porque los átomos no se crean ni se destruyen en la reacción).

a) Identificá la cantidad de átomos de carbono (C), oxígeno (O) e hidrógeno (H) a la izquierda y a la derecha de la ecuación dada.

b) ¿Bajo qué condiciones el número total de átomos de C, O y de H situados a la izquierda es igual al número total de átomos de C, O y de H ubicados a la derecha, respectivamente?

Problema de complejidad mayor

Se comparte el *PCM* asociado al *PP3*. Se trata de una pregunta en la misma temática que el *PP3* que habilita el uso de una nueva heurística, analizar casos límites o especiales. La complejidad de la misma radica en la optimización de las soluciones del sistema obtenido a partir de los datos y las condiciones impuestas (infinitas soluciones).

PCM para PP3

A partir de los datos y las condiciones del problema obtuviste un sistema de ecuaciones compatible indeterminado. ¿Cuál es la "mejor" solución dentro de todas las posibles? ¿Por qué?

Anticipación de interrogantes estudiantiles e Intervenciones docentes

Esta parte se focaliza en los resultados referidos a las categorías *AIE* e *ID* para la gama de problemas para *PP3*. En la Tabla 5.10 se comparten posibles preguntas que pueden surgirle a los estudiantes junto con intervenciones docentes, en sintonía con lo expuesto en 1.4.1.

Tabla 5.10. AIE e ID para la gama de problemas para PP2

Etapa	Heurísticas	Descripción
CP	¿Cómo traduzco los datos en expresiones matemáticas?	¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones que se imponen y sobre qué? ¿Qué se quiere averiguar?
CPl	¿Qué método de resolución conviene más?	¿Qué información obtenés con cada método de resolución?
EP	¿Cómo puedo darme cuenta si el sistema que obtuve está bien?	¿Con qué condición se asocia cada ecuación?
VS	¿Cómo verifico que la ecuación está balanceada?	¿Qué tipo de sistema obtuviste? ¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

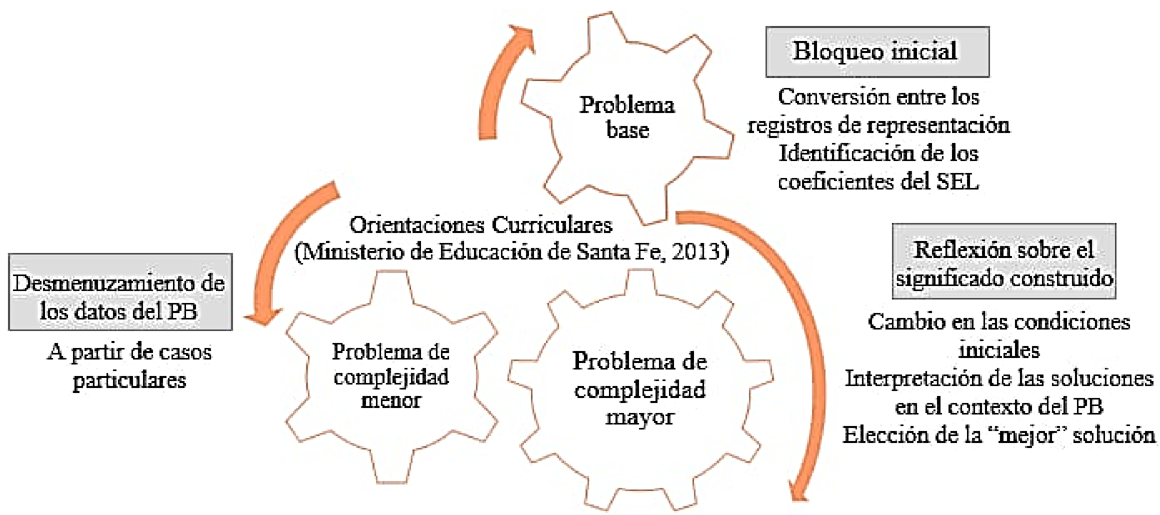
5. Conclusiones

En esta sección se presentan mediante cuatro apartados las conclusiones obtenidas a partir del estudio abordado en este proyecto innovador. En los tres primeros, se reinterpretan los resultados obtenidos de forma sintetizada y en clave con los constructos teóricos presentados oportunamente en la parte 2. Finalmente, en el cuarto y último apartado, se realiza un cierre que integra los principales hallazgos de la investigación en comunicación con los aportes de los trabajos presentados en la parte 1 y se plantean algunas posibles líneas de indagación en torno a la temática.

5.1. De los problemas para favorecer un abordaje RP de los SEL en el PM

Para poder indagar acerca de *"¿Qué problemas pueden introducirse para favorecer un abordaje RP del contenido SEL en el PM de la UNR?"* se dirigió la mirada, con especial interés, hacia dos libros digitalizados presentados en 3.1. A partir de ello, se diseñó una gama de tres problemas en la misma temática que atienden a los criterios establecidos en 3.4, uno por el cual se tienen altas expectativas de que resulte un *problema* (Colombano et al, 2009) para los estudiantes y otros dos de complejidades menor y mayor, respectivamente.

En la Figura 5.4 se comparte una síntesis que procura socializar posibles maneras de diseñar una gama de problemas para el contenido SEL, en sintonía con la metodología de interés para este estudio y en el contexto de un PM. Los tres problemas seleccionados en 4.1.1. y



4.1.2 responden al concepto de *problema* de Colombano et al (2009): al menos en lo inmediato, ofrecen un bloqueo que, como se vio en el análisis efectuado en 4.1, puede radicar en la traducción de los datos del problema en un lenguaje diferente al dado y/o en la identificación de los coeficientes del SEL que permite su resolución. Además, se caracterizan por tener un objetivo claramente definido y admitir variedad de heurísticas (se profundiza en 5.2).

Figura 5.4. Esquema de síntesis de posibilidades para el diseño de la gama de problemas

Con el propósito de atender a las particularidades de cada estudiante, se recuperan los conceptos de *PCm* y de *PCM* de Barreiro et al (2019). Una posibilidad para el diseño del *PCm* es incorporar preguntas orientadas a desmenuzar los datos del *PB* a partir del análisis de casos particulares. En cuanto al diseño del *PCM*, se socializan tres posibilidades para este. Una posibilidad es a partir de un cambio en las condiciones iniciales impuestas sobre el SEL que permite la resolución del *PB*, ya sea sobre los coeficientes o sobre los términos constantes. Las otras siguientes consisten en la interpretación de las soluciones del SEL planteado para el *PB*, o en la optimización de las soluciones del SEL; en ambas ocasiones en el contexto de este.

De manera transversal a la gama de problemas, para propiciar un tratamiento del contenido SEL en el PM mediante la metodología de RP se propone la implementación de problemas vinculados con alguna de las Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013). Se destaca que el diseño de cada gama de problemas permite mostrar que existen otras maneras de trabajar y hacer Matemática en el aula universitaria, al incorporar desde la propia formación inicial instancias puntuales donde vivencien aquello que se sugiere desde los Documentos Ministeriales (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) que implementen en sus (futuras) aulas.

5.2. De las heurísticas puestas en juego

Para poder identificar *"¿Qué heurísticas se ponen en juego en problemas que favorecen un abordaje de RP del contenido SEL en el PM de la UNR?"* (Figura 5.5), se comparten posibles resoluciones de los problemas seleccionados (4.1).

A partir del análisis efectuado en 4.1, se observa la presencia de heurísticas vinculadas con la planificación, puntualmente con abordar el problema desde los datos y condiciones. Se considera atinada su identificación debido a que es un tipo de razonamiento que usualmente se enseña en carreras de Ciencias Exactas y Naturales (por ejemplo, para la demostración de teoremas).

Por otra parte, resulta razonable la presencia de heurísticas vinculadas con la ejemplificación (tanto al examinar casos particulares como al examinar la solución) pues es un recurso muy comúnmente usado por los estudiantes y por los mismos docentes quienes, muchas veces, basan sus explicaciones en mostrar ejemplos y contraejemplos. Del mismo modo, se identifican las heurísticas relacionadas con activar experiencia previa y se considera razonable su presencia porque, de ser implementado el *PB*, se estima que los estudiantes ya contarían con conocimientos sobre métodos de resolución de SEL.

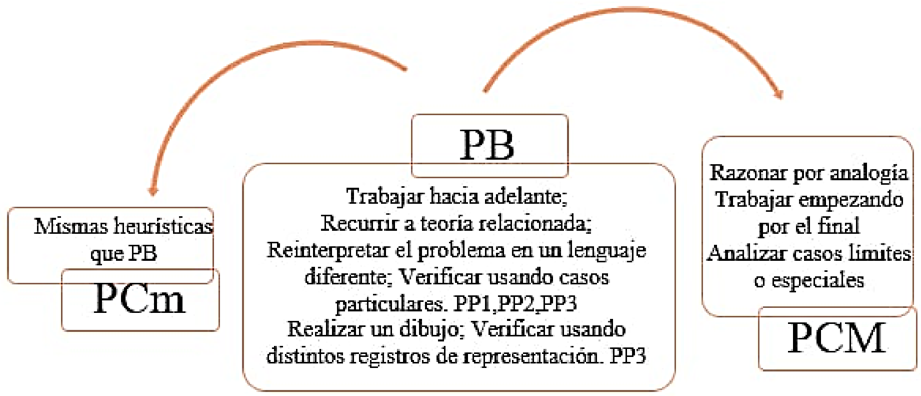


Figura 5.5. Esquema de síntesis de heurísticas puestas en juego

Con respecto a las heurísticas relacionadas con seleccionar una representación adecuada, de acuerdo a lo consignado en el programa de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II del PM de la UNR se pone énfasis en favorecer los cambios entre registros, con lo que resulta esperable que los estudiantes recurran a esta heurística.

5.3. De las intervenciones docentes

Para poder describir *"¿Qué intervenciones docentes, a la hora de atender dudas o responder preguntas, pueden ser pertinentes?"*, se reorienta la mirada hacia las posibles resoluciones anticipadas en 4.1. Se identifican, así, tres grupos de posibles intervenciones ante interrogantes estudiantiles: *estimulación de la curiosidad*, *evocación de conocimientos* previos y *toma de conciencia*.

En el primer grupo se encuentran preguntas como "¿Cuáles son los datos? ¿Qué entendés por este concepto? ¿Cuáles son las condiciones que se imponen y sobre qué? ¿Qué se quiere averiguar?". En cualquier caso, se procura intervenir con el propósito de que el estudiante reflexione mediante preguntas que no contuvieran información sobre datos y condiciones.

Con respecto al segundo grupo, se hallan preguntas para las etapas de *CPI* y de *VS*, tales como "¿Qué información obtenés con cada método de resolución? ¿Qué tipo de sistema obtuviste? ¿Qué significa que un sistema sea compatible determinado/compatible indeterminado/incompatible? ¿Cómo se verifica que una terna sea solución de un SEL 3x3?". Se busca que el estudiante analice los procedimientos realizados en dichas etapas. En este sentido, se intenta evitar decir directamente si la resolución es o no correcta, debido a que se estaría haciendo responsable el profesor de la resolución del problema. Por el contrario, al solicitarle recuperar conocimientos previos, se le “devuelve” la responsabilidad de resolución del problema al estudiante.

En cuanto al tercero, se refiere puntualmente a la etapa de *EP* con preguntas del estilo “¿Podés comprobar cada uno de los pasos? ¿Podés corroborar que cada paso es correcto?”. En este caso, tienen la intensión de que el estudiante reconozca los procesos internos de pensamiento que él activa cuando intenta resolver el problema.

Se sugiere no dar todas las guías juntas, y por supuesto, no se espera que las interacciones se den tal cual se describen, aquí se indican posibilidades. En efecto, se pondera del análisis efectuado en la parte 4, la anticipación de caminos para procurar persuadir a los estudiantes para que reflexionen sobre sus respuestas y, consecuentemente, generen modelos matemáticos que describan más apropiadamente el problema planteado.

5.4. A modo de cierre

La información recabada a partir de este trabajo y el análisis efectuado en torno a la misma, muestra indicios de que para favorecer un abordaje RP de los SEL, conviene que cada problema que se proponga sea viable para los estudiantes, en los términos en que lo plantean Petrone et al (2010). Si bien cada problema socializado en 4.1 ofrece un bloqueo inicial, la situación puede abordarse a partir de conocimientos previos sobre ecuaciones lineales y SEL, para elaborar un plan de trabajo y tratar de comunicarlo.

En la misma dirección que los problemas implementados por Gracia (2010) para la resolución de los seleccionados en 4.1 se emplea, o bien el método de reducción por filas, o bien el método de igualación o de sustitución. No obstante, se identifica una diferencia en comparación con los propuestos por Gracia (2010): no se reconocen problemas que involucren conexiones entre la Geometría y el Álgebra, y que estén vinculados con alguna de las Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) de interés para este trabajo. Este asunto llama especialmente la atención a la autora del presente proyecto innovador, por lo que resulta convocante para próximos estudios atender a tal aspecto.

En cuanto a los registros de representación predominantes en los problemas seleccionados, fueron el coloquial y el simbólico algebraico. Puntualmente, esta última conclusión sobre el simbólico algebraico difiere de lo observado por Petrone et al (2014), quienes señalan que en los 45 enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria se encuentra ausente. El registro gráfico, en sintonía con lo observado por Petrone et al (2014), se manifiesta a partir de bocetos de dibujos matemáticos que portan información. Con respecto al registro tabular, solo un problema lo incluye entre sus datos (Figura 5.1), aspecto también que coincide con lo detectado por las autoras.

Al compartir la misma preocupación que Solarte y Palacios (2013) acerca de la poca destreza en el manejo de heurísticas en profesores en formación, se procuró que los problemas admitan al menos el uso de dos heurísticas. Adicionalmente se observa que el hecho de que un problema pueda resolverse con diferentes medios y métodos, habilita la comparación de caminos de resolución y el reconocimiento de la información que se obtiene con cada uno de ellos en una posterior instancia de socialización con el grupo-clase.

Por otro lado, se atiende a la observación de Del Valle et al (2019) sobre la incomprensión de lo que es una solución para un SEL, pero mediante un camino alternativo al tránsito de sistemas lineales homogéneos a no homogéneos: a partir del reconocimiento de las soluciones del SEL en el contexto del problema y de la "mejor" de todas.

En la obtención de resultados del estudio realizado adquieren un carácter innovador las gamas de problemas diseñadas. En efecto, se recuperan las definiciones propuestas por Barreiro et al (2019) sobre *PB*, *PCm* y *PCM*, y se los diseña de manera que su complejidad sea gradualmente creciente. Se destaca que, a partir de un problema inicial, puede diseñarse una *familia* de problemas (situaciones más generales o especiales o límites) como consecuencia de imponer restricciones o realizar adaptaciones a la pregunta base. Para cada gama de problemas pueden distinguirse distintos momentos de trabajo matemático en la clase (Petrone et al, 2014): el de producir una respuesta ("¿Bajo qué condiciones…?") y el de producir una explicación o justificación de esa respuesta ("¿Por qué…?").

Finalmente, se sintetizan algunos aportes del estudio sobre problemas para favorecer un abordaje de RP de los SEL y se proponen algunas líneas de acción específicas en el contexto de la asignatura que se involucra. En este sentido, otro aporte concreto son las propuestas alternativas de intervención ante posibles consultas de los estudiantes durante la resolución de los problemas. Se focaliza la mirada en la posibilidad de abordar las dudas a través de preguntas basadas en las propuestas por Poyla (1973), con el acento en la vinculación con conocimientos previos y en la promoción de la curiosidad y toma de conciencia por parte de los estudiantes como un modo de fortalecer la autonomía en el trabajo matemático.

Como se menciona en 1.4.1 y en 2.3, uno de los pilares fundamentales de la línea RP es la reflexión metacognitiva. En la Tabla 5.11 se socializa una grilla que procura recuperar el trabajo realizado y que puede implementarse con cada gama de problemas.

Tabla 5.11. Reflexión metacognitiva

¿Qué problema se resolvió esta semana?	
¿Qué contenidos matemáticos pusiste en juego en la resolución del problema? ¿Por qué recurriste a ellos?	
¿Con qué dificultades te encontraste al ejecutar tu plan de resolución? ¿Cómo las superaste?	
Aquí podés escribir observaciones sobre la resolución que consideres importantes	

Lo concluido convoca a retomar con renovada intencionalidad las preocupaciones planteadas por Ciccioli (2019) acerca de la formación inicial de profesores y el tipo de experiencias formativas por las cuales transita. Entre posibles líneas de trabajo a futuro se visionan el diseño de una gama de problemas que integre lo geométrico con lo algebraico y que esté vinculada a alguna de las Orientaciones Curriculares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2013) y la caracterización de heurísticas presentes en estudiantes del PM de Álgebra y Geometría Analítica II al resolver los problemas seleccionados con el propósito de diseñar un dispositivo didáctico para la enseñanza de heurísticas que se consideren poco desarrolladas en los futuros profesores en Matemática. Además, resulta de interés la articulación de dicha gama de problemas así como las diseñadas en este estudio con algún recurso tecnológico, al considerar que desde el Diseño Curricular (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) se sugiere incorporar las tecnologías de la información y de la comunicación en el aula de Matemática (futuro lugar de trabajo del graduado del PM) debido a que "permiten un cambio en las estrategias y el enfoque didáctico en la labor docente, enriquecen las posibilidades de enseñar y permiten también centrarse en conceptos diferentes a los que se priorizaban en una clase de matemática tradicional" (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.50).

Como mencionan Cecchi et al (2013), la construcción de una universidad socialmente comprometida requiere de la conjunción articulada de diferentes procesos y actores. Entre ellos, se considera que se encuentra el *compromiso social docente*. Desde este proyecto innovador se contribuye con el crecimiento de una universidad atenta, comprometida y dispuesta a dar respuestas adecuadas a las cuestiones sociales emergentes. Se avanza, entonces, en “la configuración de una relación más activa de la universidad con sus contextos” (CRES, 2008; citado en Cecchi et al, 2013, p.163) y se colabora en detectar problemas para la agenda de investigación en Educación Matemática.

> No tenemos oídos para escuchar aquello a lo cual no tenemos acceso desde la vivencia (Friedrich Nietzsche).

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Casetta, I., Chacón, M., González, V., Isla, D., Leonian, P., Marino, T. y Rodríguez, M. (2019). *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos.* UNGS. https://repositorio.ungs.edu.ar/handle/UNGS/810.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa.* Ministerio de Educación de Argentina. http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL002541.pdf.

Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. *Pedagogía Universitaria*, *14*(3), 71-93.

Cecchi, N., Pérez, D. y Sanlorenti, P. (2013). *Compromiso Social Universitario: De la Universidad posible a la Universidad necesaria.* IEC-CONADU. http://beu.extension.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/170.

Ciccioli, V. (2019). *Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la geometría analítica. El caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario* [Tesis de Doctorado]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2302.

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, *29*(1), 141-170. https://doi.org/10.24844/EM2901.06.

Cruz, J.A.G. (1999). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. *Red Telemática Educativa Europea*. https://educrea.cl/la-didactica-de-las-matematicas-una-vision-general/.

Consejo Superior de la Universidad Nacional de Rosario (2018). *Plan de Estudios del Profesorado en Matemática*. https://fceia.unr.edu.ar/images/PDF/carreras_de_grado/PM_plan2018/R0933-17CD_ANEXO-PM.pdf.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 19-58. https://doi.org/10.35362/rie430750.

Del Valle, M.E., Mena, A., Mena, J., Rodríguez, M.A. y Vásquez, P. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(1), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194.

Gaulin, D. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63.

González Urbaneja, P.M. (2007). Raíces históricos y trascendencia de la Geometría Analítica. *Sigma*, *30*, 205-236.

Gracia, M.G. (2010). Formando docentes de matemática para la enseñanza del álgebra lineal. *Integra Educativa*, *3*(2), 235-262. http://www.scielo.org.bo/pdf/rieiii/v3n2/a08.pdf.

Grossman, S. (2008). Sistemas de ecuaciones lineales y matrices. En *Álgebra lineal* (6ta. Ed.) (pp.1-164). Mc Graw Hill.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill.

Herrera, N., Quiroga, V., Soto, S., Pochulu, M. y Puzzella, A. (2016). Entre el diseño y la implementación de una actividad de geometría: el área de la pirámide recta. *Educación Matemática*, *28*(1), 153-171. https://doi.org/10.24844/EM2801.06.

Lay, D. (2007). Ecuaciones lineales en álgebra lineal. En *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (pp.1-102). Pearson Educación.

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma*, *30*(2), 159-178. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/443.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (2013). *Orientaciones Curriculares*. https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/191117/931874/file/C.OrientadoDic.2013.pdf.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular*. https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218362/1135160/file/Anexo/%20III/%20Resol/%202630-14.pdf.

Petrone, E., Cirelli, M., Contreras, N., Ferrari, N., Reynoso, E. y Sgreccia, N. (2014). El accionar del docente al enseñar matemática a través de la resolución de problemas. En D.C. Veiga (Ed.). *Actas de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp.418-427). Sociedad Argentina de Educación Matemática. http://funes.uniandes.edu.co/18789/.

Petrone, E., Contreras, N., Mascó, P. y Sgreccia, N. (2010). No te quedes entre sombras: escapate por la tangente. *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp.463-474). Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Pampa.

Petrone, E., Cirelli, M., Contreras, N., Ferrari, N. y Sgreccia, N. (2014). Análisis de enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.379-388). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/5388/.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. I). Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. II). Princeton University Press.

Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. Wiley.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.153-174). UNGS y EDUVIM. https://ediciones.ungs.edu.ar/libro/educacion-matematica/.

Solarte, S.L. y Palacios, A.M. (2013). *Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: una aproximación a las estrategias heurísticas* [Tesina de Licenciatura]. Universidad del Valle. http://funes.uniandes.edu.co/11266/.

Beneficios del empleo de GeoGebra para la enseñanza de la definición formal de límite en Análisis Matemático I al inicio de carreras de Ciencias Exactas y Naturales

Benefits of GeoGebra for the teaching of the formal definition of limit in Mathematical Analysis I at the beginning of the careers of Exact and Natural Sciences

Lara Valerí
laravaleri15@gmail.com

Resumen

Esta investigación surge de inquietudes sobre la enseñanza de límites en la materia Análisis Matemático I al inicio de las carreras de Ciencias Exactas y Naturales. La definición del concepto mencionado suele ser un tema que tiene cierta dificultad por la formalidad y simbología propia de la misma. En este marco, el propósito del presente estudio es analizar cómo la utilización de distintas representaciones contribuye a facilitar la enseñanza de la definición formal de límite, y analizar cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra. La información ha sido obtenida a partir de la observación de clases, donde se dictó el tema en cuestión y material audiovisual que surgió de las mismas. Los hallazgos parecen indicar que la utilización de diferentes registros de representación junto con el software GeoGebra contribuyen a potenciar la enseñanza del concepto mencionado.

Palabras clave

Límite. GeoGebra. Teoría de representaciones.

Abstract

This research arises from concerns about the teaching of limits in the subject Mathematical Analysis I at the beginning of the careers of Exact and Natural Sciences. The definition of the aforementioned concept is usually a difficult topic due to its formality and symbology. In this framework, the purpose of this study is to analyze how the use of different representations contributes to facilitate the teaching of the formal definition of limits, and to analyze the benefits of using GeoGebra. The information has been obtained from the observation of classes where this topic was taught and audiovisual material which emerged from the lessons. The findings seem to indicate that the use of different representation registers together with the GeoGebra software contribute to enhance the teaching of the concept in question.

Keywords

Limit. GeoGebra. Theory of representations.

1. Presentación

En la presente sección del trabajo se aborda cuál es el campo de estudio del Proyecto Innovador en Educación Matemática. La misma se compone de cuatro apartados, en el primero de ellos se presenta la problemática, seguidamente los interrogantes que surgen a partir de ella, en tercer lugar, los objetivos de la investigación y, por último, se realiza un recorrido sobre cuál es el estado del arte en torno al tema en estudio.

1.1. Problemática

Esta línea de trabajo surgió a partir de analizar distintas problemáticas que se dan en la enseñanza de la matemática en los primeros años del nivel universitario, donde se ha mencionado que una posible línea en la cual indagar abarca las dificultades y errores habituales en el aprendizaje de la Matemática. Se puede observar que comprende una temática muy amplia, ya que probablemente en muchos temas del área en cuestión haya errores o dificultades en mayor o menor medida. Entonces, cabe preguntarse, a partir de una mirada retrospectiva sobre experiencias previas, si hay algún tema en el que los estudiantes presentan mayor inconveniente. La respuesta a esta pregunta fue la dificultad que se da al momento de enseñar y aprender la definición formal de límite. Esto ha surgido a partir de experiencias previas como estudiante de una materia llamada Residencia de cuarto año del Profesorado en Matemática, donde se realizaron mis prácticas en la materia Análisis Matemático I del Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.

La experiencia de prácticas se desarrolló de manera virtual; los docentes, en general, subían videos con explicaciones de los distintos temas que los estudiantes tenían que ver y se realizaban algunos encuentros sincrónicos. A partir de estos videos, lo que llamó particularmente la atención fue la manera en que los docentes abordan el tema, mediante la utilización del Software GeoGebra, ya que les aportaba mucho dinamismo a las explicaciones. Se puede observar que la definición formal de límite es un tema que tiene cierta complejidad, ya que involucra mucha simbología específica y quizás un tanto abstracta para estudiantes que, en este caso, es la primera materia con la que se encuentran en el ámbito del Cálculo Matemático, pues la materia mencionada se encuentra en el primer cuatrimestre de primer año.

Por otro lado, al corregir producciones de los estudiantes donde realizaban ejercicios del presente tema se ha podido evidenciar, en general, buenos resultados, que quizás se deban a esta forma de abordar las explicaciones. A partir de la propia biografía escolar en la presencialidad, este tema no se explicaba utilizando GeoGebra, y quizás, si esto es realmente beneficioso para los estudiantes, podría ser tenido en cuenta en un futuro al volver a la presencialidad.

En las correcciones mencionadas de este tema en particular, es decir, de ejercicios donde los estudiantes tenían que aplicar la definición formal de límite, se han observado ciertas dificultades. De hecho, al dialogar con los otros docentes que también corregían estos trabajos, notaban ciertos inconvenientes en los ejercicios mencionados.

Se considera, entonces, que el tema o la problemática a tratar es: ¿Cómo la utilización del Software GeoGebra contribuye a facilitar la enseñanza de la definición formal de límite? La respuesta a esta pregunta puede estar relacionada con abordar el desarrollo del tema en cuestión a través de distintas representaciones del mismo, es decir, mediante representaciones gráficas, coloquiales y simbólicas.

En cuanto al nivel o contexto en el cual se enfoca la investigación, este trabajo se realiza en el mismo ámbito donde ha surgido, es decir, en la materia Análisis Matemático I de primer año de la FCEIA que corresponde a los distintos Profesorados y Licenciaturas que en ella se dictan.

Por último, este trabajo está mayormente basado en la enseñanza, pero también tiene la intención de atender a las dificultades que se dan en el aprendizaje.

1.2. Interrogantes

El objetivo de esta investigación es poder analizar los beneficios de implementar ciertos recursos en la enseñanza de la definición formal de límite en la materia Análisis Matemático I de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales. A partir de la problemática en cuestión surgen algunos interrogantes a los que se busca dar respuesta a través de este estudio: *¿Cómo la utilización de distintas* *representaciones contribuye a facilitar y potenciar la enseñanza de la definición formal de límite? Y en este marco, ¿cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra?*

1.3. Objetivos

Objetivo general

- Estudiar cuáles son los beneficios de distintas propuestas para abordar la enseñanza de la definición formal de límite.

Objetivos específicos

- Analizar la contribución de diversidad de representaciones para la enseñanza de la definición formal de límite.
- Reconocer los beneficios que al respecto otorga el uso del software GeoGebra.

1.4. Antecedentes

En el presente apartado del trabajo se investiga acerca de los antecedentes que hay sobre el tema en estudio. En primer lugar, una serie de autores han realizado una investigación acerca del estado de arte del concepto de límite, retomando muchos otros autores. En segundo lugar, se describen brevemente algunos trabajos donde se llevaron a cabo propuestas del aprendizaje del concepto en cuestión mediante la utilización de GeoGebra y, por último, se comenta una propuesta para la mejora del aprendizaje.

Límite de una función

Trujillo et al (2017) abordan una investigación que se enfoca en la descripción de los estudios realizados sobre del tema en cuestión, mediante la recopilación de información enfocada en el estado y los avances que el concepto ha tenido en un período de tiempo comprendido entre el 2000-2017.

Los autores mencionan que el cálculo diferencial es una de las asignaturas de matemáticas con un nivel de dificultad muy alto, ya que implica procesos mentales superiores y requiere el dominio de los pre-saberes que le anteceden. Por otro lado, valoran la importancia de estudiar en profundidad este tema puesto que, si los estudiantes no formalizan su saber cognitivo, difícilmente van a comprender los temas que le siguen, tales como continuidad, derivada e integral.

Para comenzar, identifican cuáles son las dificultades con respecto a este tema y mencionan, primero, que la mayoría de los docentes no tiene en cuenta las diferentes representaciones, en las que se puede mostrar el límite de una función. En segundo lugar, consideran que la dificultad en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto se debe a las diferentes concepciones históricas que han surgido a través del tiempo, donde las concepciones erróneas son el resultado de obstáculos epistemológicos presentes en cada época, y que la comunidad científica ha intentado resolver. Por último, en cuanto al conocimiento pedagógico del contenido del concepto, remarcan que para enseñar no basta con saber contenidos y tener un saber pedagógico general, sino que indican la necesidad de un conocimiento pedagógico específico acerca de dicho contenido por parte del docente, con el objetivo de disminuir las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Para este estudio, los investigadores tienen en cuenta diferentes bases de datos, de los cuales se eligen los documentos relacionados con el concepto del límite y en segunda instancia se analizan para formular sugerencias sobre la orientación pedagógica de las investigaciones.

Luego del análisis de distintos documentos, Prada-Núñez et al (2017) concluyen que la mayoría de las investigaciones referentes al tema de límites tienen en cuenta la aplicación de secuencias didácticas en base a diferentes teorías como la de Duval (teoría de representaciones semióticas), Brousseau (teoría de los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemática), Sierpinska (teoría de los actos de comprensión), Thompson (concepción de estructura mental), Weierstrass (conceptualización métrica de límite) y Blázquez (conceptualización como aproximación óptima de límite). No obstante, los autores mencionan que, en el momento de abordar el tema, lo hacen desde una perspectiva abstracta, presentan el contenido de forma algebraica y gráfica, y no aplicada en un contexto. A partir de esto proponen para futuras investigaciones que se enfoquen más en el carácter significativo del tema, ya que consideran que este factor incide en la formalización del concepto y en la actitud del estudiante por aprender el tema.

Además, también se puede observar que las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, es decir, se enfocan más en el aprendizaje que en la enseñanza, y proponen un equilibrio en estos dos aspectos ya que van de la mano.

GeoGebra y límites

Por un lado, Rodríguez et al (2020), proponen el tratamiento de las formas indeterminadas del límite a partir de la utilización del GeoGebra con fines heurísticos y de experimentación, en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería Industrial.

Los autores mencionan que en Análisis Matemático el límite es su principal concepto, y que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del mismo los conflictos y las dificultades en la comprensión se hacen presentes desde su definición. Tales dificultades van desde la relación entre infinito potencial e infinito actual, hasta las propias de su enseñanza y aprendizaje.

La investigación se centra en las formas indeterminadas del límite (FIL) y el uso de GeoGebra, como recurso heurístico en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se sustenta en la representación gráfica de funciones y las operaciones (aritméticas y exponenciales) que entre estas generan las llamadas formas indeterminadas. Graficar funciones en la mayoría de los casos ocupa tiempo, espacio y complejiza el proceso de análisis relacionado con funciones en algunos casos, no siendo así con el uso de asistentes matemáticos. Los autores aluden que los beneficios de GeoGebra son producir inmediatez en las representaciones gráficas, al mismo tiempo que permitir realizar operaciones entre las representaciones algebraicas de dichas funciones. Es por ello que con la aplicación de la propuesta GeoGebra buscan, a través de las tareas elaboradas, la apropiación por parte de los estudiantes del concepto de indeterminación relacionado con las FIL.

Antes de comenzar la investigación, los docentes detectaron dificultades en el aprendizaje de los límites en general y particularmente las FIL. Los estudiantes, por lo general, no comprenden el significado de "indeterminación" y tienen tendencia a operar algebraicamente según las propiedades de los límites. La metodología implementada consiste en un pre-test, una encuesta, ejercicios de carácter heurístico con GeoGebra, ejercicios independientes a lápiz y papel con GeoGebra para su comprobación y post-test.

En cuanto a los resultados, en la actividad que se realiza en el aula con GeoGebra como medio de enseñanza se observa una buena participación de los estudiantes, quienes aportan ideas y mejoran dificultades relacionadas con el cálculo de límites anteriores a la introducción de las formas indeterminadas. Por otro lado, la comparación de los resultados docentes, de pruebas pedagógicas realizadas antes y después de aplicada la propuesta, constata una mejora en la comprensión de las formas indeterminadas del límite y en el cálculo de límites en general.

Como conclusión los autores mencionan que el uso de representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de los mismos. Consideran que la aplicación de los asistentes matemáticos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje resulta fundamental en el trabajo con las representaciones por su inmediatez y diferentes usos didácticos que sustentan.

El asistente matemático GeoGebra se utiliza en la propuesta como medio de enseñanza en el proceso heurístico que ayuda a la comprensión de las formas indeterminadas del límite y como herramienta de comprobación en ejercicios de cálculo de límites donde dichas formas pueden estar presentes.

Otros autores que abordan un estudio con respecto al concepto de límite son Gazzola et al (2011), quienes presentan resultados parciales, de un estudio realizado con alumnos del último año de una escuela secundaria pública argentina, en el ámbito del cálculo. El objetivo es analizar sus producciones en el estudio del límite funcional, con la implementación de netbooks y el uso del software GeoGebra. Los autores consideran que la utilización de este tipo de herramientas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, entre otros aspectos, permite acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones y posibilita a los estudiantes a trabajar individualmente, comprobando sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas.

En cuanto a resultados, los investigadores evidencian que, luego de realizar actividades con GeoGebra los estudiantes podrían institucionalizar los conceptos, como la definición de límite, los límites laterales, y que para que el límite exista estos últimos tienen que ser iguales.

Como conclusión, se considera que esta propuesta permite a los estudiantes participar en forma activa en la construcción del conocimiento, a partir de explorar diferentes ejemplos y corroborar los resultados obtenidos mediante resoluciones de lápiz y papel. Por otro lado, los autores creen que, a pesar de que los estudiantes cuentan con el software GeoGebra a partir de la disponibilidad de un ordenador para cada alumno en el marco del Plan Conectar-Igualdad, el estudio requirió de un gran esfuerzo por parte del investigador, para que se familiarizaran y aprovecharan las potencialidades de dicha herramienta. El investigador tuvo que lidiar con la constante demanda de los estudiantes de no aceptar momentos de incertidumbre y ser ellos mismos los que construyan los conocimientos a institucionalizar.

Por otro lado, proponen investigaciones futuras que se orienten a modificar la secuencia didáctica propuesta, a la luz de los resultados obtenidos en esta primera implementación, para ser desarrollado en otros contextos áulicos y lograr una profundización en el estudio de los límites.

Otras propuestas

Romiti et al (2014) realizan una propuesta de mejora para la enseñanza de este concepto. El trabajo diario y sus resultados han llevado a las autoras a reflexionar sobre lo complejo que resulta, por una parte, enseñar y, por otra, comprender y apropiarse del concepto de límite, que se desarrolla en la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería.

Las autoras, junto con otros docentes, identifican algunas dificultades a partir de sus experiencias; entre ellas mencionan desconocimiento de ciertos símbolos matemáticos, dificultades para justificar el valor de verdad de las proposiciones matemáticas, preferencia por actividades rutinarias. Antes de comenzar con el tema en estudio, las investigadoras observan que el registro gráfico es en el que mejor se desenvuelven los alumnos, mientras que el desempeño en el registro simbólico no fue bueno, y aún en menor medida el coloquial.

A partir de estas dificultades realizan una propuesta de mejora para la práctica de ejercitación para alumnos de la asignatura Análisis Matemático I. La misma incluye actividades que involucran los tres tipos de registros mencionados anteriormente y el pasaje de uno a otro.

Como conclusión de este estudio consideran propicio incorporar a la cartilla existente otras actividades para confeccionar una propuesta de práctica que atienda a los tres registros y a las conversiones entre pares de registros de una manera que sea lo más equitativa posible.

Otra propuesta que va más allá del uso de GeoGebra para la enseñanza del concepto de límite es la que realiza Gómez (2018). En su trabajo diseña una secuencia didáctica que tiene como objetivo favorecer la comprensión del concepto de límite de estudiantes universitarios mediante la geometría de fractales lineales.

El autor considera que las dificultades en torno al concepto de límite se justifican desde dos ámbitos esenciales, el primero tiene que ver con su importancia al introducir conceptos como continuidad, derivada e integral y, en segunda medida, que para los estudiantes es un concepto demasiado abstracto y que olvidan con facilidad.

Las actividades que Gómez (2018) propone fueron diseñadas con la intención de posibilitar en el aula las diversas concepciones asociadas al concepto del límite, que tienen que ver con el obstáculo epistemológico "tiende al infinito". Las actividades se enfocan en desarrollar por medio de las estructuras fractales el conjunto de obstáculos epistemológicos "tiende al infinito" con un breve recorrido histórico-epistemológico del concepto en cuestión.

Por otro lado, el autor resalta la importancia de incluir como pretexto las estructuras fractales, particularmente el uso de algunos fractales lineales que sean conocidos, ya que dentro de la geometría de los fractales se encuentra explícito el proceso al infinito.

Como conclusión de este trabajo, Gómez (2018) reflexiona acerca de que las estructuras fractales y las actividades planteadas permiten desarrollar con los estudiantes diversas confrontaciones en torno a la idea de infinito por medio de procesos geométricos intuitivos y por ende al concepto de límite. La estrategia didáctica posibilita ambientar en el aula las diferentes concepciones que se dieron a lo largo de la historia con relación al concepto de límite, a través de la vivencia y abordaje de las principales características del obstáculo epistemológico "tiende al infinito".

A modo de síntesis, en estos antecedentes, se puede observar que por lo general las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, es decir, se enfocan más en el aprendizaje que en la enseñanza. Entonces la innovación de este estudio radica en proponer un abordaje del tema desde el lado de la enseñanza procurando analizar cuáles son los beneficios de incorporar los tres distintos registros de representación: gráfico, simbólico y coloquial, equitativamente, y con el complemento de utilización de GeoGebra.

Algunos autores mencionan que el uso de representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de los mismos. Esto da lugar a preguntar: ¿cuáles son los beneficios de implementar las distintas representaciones en la enseñanza de la definición formal de límite?

Se puede concluir que la aplicación de los asistentes matemáticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es fundamental en el trabajo con las representaciones por su inmediatez y diferentes usos didácticos que sustentan. En particular, algunos estudios afirman que la utilización de GeoGebra permite que los estudiantes participen en forma activa en la construcción del conocimiento. La intención de esta investigación está centrada en analizar cuáles son los aspectos favorables de realizar las representaciones mencionadas mediante el empleo de GeoGebra.

En los antecedentes se menciona que, en general, al abordar el concepto en estudio, muchas veces se realiza desde una perspectiva abstracta, es decir, se presenta el contenido de forma algebraica y gráfica y no aplicada en un contexto. Esta propuesta tiene, entonces, como innovación enfocarse en el carácter significativo del tema ya que este influye en la actitud del estudiante para aprender el tema.

2. Marco teórico referencial

En esta sección del trabajo se exponen las bases teóricas en las que se enmarca esta investigación. Se compone de cuatro partes que desarrollan los conceptos fundamentales del presente estudio: Matemática Universitaria, Límite de una función, Recursos Educativos Abiertos y Teoría de Representaciones Semióticas de Reaymond Duval.

2.1. Matemática universitaria

Como ya se ha mencionado, este estudio se basa en la enseñanza del concepto de límite, contenido que se desarrolla en la asignatura Análisis Matemático I desarrollada en la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - UNR.

Según el programa de la asignatura, en este curso se trabaja con funciones de variable real, se definen rigurosamente los conceptos de límite funcional y de sucesiones, continuidad de funciones de variable real, y se completa con los elementos clásicos del Cálculo Diferencial.

Por otro lado, se menciona que el estudio de los temas se realiza con atención a toda la riqueza encerrada en los teoremas y en sus demostraciones, a partir de las cuales surgen diversos procedimientos de cálculo, con atención a las aplicaciones, mayormente en el área de la Física y de las Ciencias de la Computación. En el abordaje de las distintas unidades se realiza un repaso de los conocimientos adquiridos previamente y se incorporan nuevos contenidos, de manera alternada entre clases teóricas y prácticas.

La asignatura tiene como objetivo general familiarizar al estudiante con los conceptos y métodos básicos del cálculo diferencial de funciones de una variable. Para ello los objetivos principales son:

- Proveer al estudiante de un conjunto de técnicas del Análisis Matemático para ser utilizadas en la resolución de problemas.
- Capacitar al estudiante para resolver problemas de índole geométrico, físico u otros, con la selección del modelo diferencial adecuado y aplicación de los procedimientos de cálculo correspondientes al mismo.
- Desarrollar en el estudiante una capacidad que le permita afrontar nuevos problemas con cierto grado de autonomía.
- Desarrollar un espíritu crítico cuyo manejo será necesario en su posterior formación universitaria y profesional.

También, la asignatura, busca promover ciertas capacidades en los estudiantes, entre ellas: que los estudiantes manejan hábilmente las técnicas del Cálculo Diferencial de funciones de una variable, desarrollen capacidades de razonamiento lógico, desplieguen estrategias para interpretar, plantear y resolver problemas, con cierta autonomía, mediante la aplicación de los conceptos de función, límite, derivada y primitiva; que utilicen la herramienta computacional como recurso facilitador del cálculo y la representación gráfica, entre otras.

Por otro lado, en el programa se menciona que se utilizan distintas modalidades de enseñanza y de aprendizaje:

> Una modalidad con mayor protagonismo del docente quien, sobre la base del material bibliográfico establecido y en permanente interacción con los estudiantes, destaca la relevancia de los distintos contenidos, presenta definiciones, enuncia y/o prueba propiedades y analiza ejemplos que faciliten la comprensión y conceptualización. Otra modalidad con mayor protagonismo de los estudiantes, quienes trabajan de manera individual o grupal en la resolución de problemas y ejercicios propuestos.
>
> (...) Se pretende fomentar una lectura crítica de los estudiantes alimentando su intervención y su participación mediante la realización de trabajos prácticos que deberán ser entregados. Se fomentará la consulta de diferentes bibliografías y la utilización de distintos tipos de softwares para promover la utilización de las

> herramientas tecnológicas en el aula (computadoras personales, smartphones, etc.). En este contexto el docente adopta el rol de facilitador para la resolución de problemas; pero también actúa de observador y evaluador, detectando y ayudando a superar dificultades (p.4).

2.2. Límite de una función

En concordancia con lo que mencionan Trujillo et al (2017), el cálculo diferencial es una de las asignaturas de matemáticas con un nivel de dificultad muy alto. Estos autores consideran que esto se debe a que los conceptos que se desarrollan dentro de esta materia implican procesos mentales superiores que forman parte del análisis matemático; todo esto parece confirmarse en su objeto de estudio que consiste en saber cómo cambian las funciones cuando sus variables cambian.

Uno de los pre-saberes fundamentales es el concepto de límite y aquí radica la importancia de estudiar en profundidad este tema. Trujillo et al (2017) consideran que, si los estudiantes no formalizan su saber cognitivo, difícilmente van a comprender los temas que le siguen, tales como continuidad, derivada e integral.

El límite de una función tiene infinitas aplicaciones en muchas áreas; por ejemplo, los límites surgen cuando queremos encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto. La definición de este concepto que podemos encontrar en Stewart (2012), que es un libro muy utilizado en la enseñanza universitaria, es la siguiente:

> Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a, entonces escribimos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, y decimos que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a es igual a L", si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

Esta definición se considera que es una definición no rigurosa; además, este mismo libro contiene lo que se llama "la definición formal de límite":

> Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a es L, y lo expresamos como
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

si $|x - a| < \delta$entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En la bibliografía menciona estas definiciones, que se encuentran acompañadas de tres gráficos como se puede observar en la Figura 6.1.

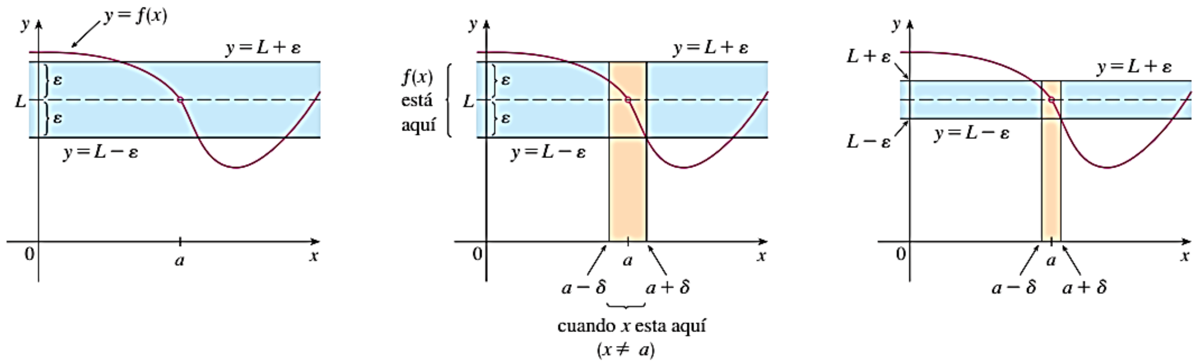


Figura 6.1. Gráficos que acompañan la definición de límite de una función en el libro Stewart (2012)

2.3. Recursos Educativos abiertos, objetos de aprendizaje y GeoGebra

La UNESCO (2013) define los recursos educativos abiertos (REA) como materiales didácticos, de aprendizaje o investigación que se encuentran en el dominio público o que se publican con licencias de propiedad intelectual que facilitan su uso, adaptación y distribución gratuitos. Por otro lado, Wiley (2008) define los objetos de aprendizaje (OA) como cualquier recurso digital que puede ser utilizado para apoyar el aprendizaje.

El uso de REA y OA presenta un potencial a explorar cuando se incorporan en el aula en busca de mejorar la práctica educativa en las diferentes áreas del saber dentro de la educación básica.

Trujillo et al (2015) mencionan que es necesaria la búsqueda de nuevas formas de mejoramiento de los procesos de enseñanza, donde la inclusión de las TIC y en especial la aplicación de REA presenta una oportunidad de progreso para el aprendizaje de los estudiantes.

¿Qué es GeoGebra?[2]

GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo, de código abierto libre y disponible para usos no comerciales. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra,

[2] ¿Qué es GeoGebra? https://www.geogebra.org/about.

con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan, así como también comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio, armoniza lo experimental y lo conceptual para plasmarlo en una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Por lo mencionado, se puede considerar a este software como un REA, ya que es de dominio público y gratuito. Además, al ser utilizado en la enseñanza y aprendizaje de distintos contenidos matemáticos, se encasilla dentro de la definición de objeto de aprendizaje. Es por esto que GeoGebra puede contribuir a favorecer la enseñanza del concepto de límite.

2.4. Teoría de representaciones semióticas

Se puede observar que la definición de límite de una función contiene diferentes representaciones. Un autor que habla de esto es Duval (2004; citado en Oviedo et al, 2012) quien considera que el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Es por eso que enseñar matemáticas lleva a que estas actividades cognitivas requieran, además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

En forma general es posible dividir las representaciones en internas (privadas) y externas (visibles y observables públicamente), y considerar que estas últimas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos. En referencia al aprendizaje de la matemática, se establece que la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos y, recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas.

Oviedo et al (2012) mencionan que en matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótica utilizado.

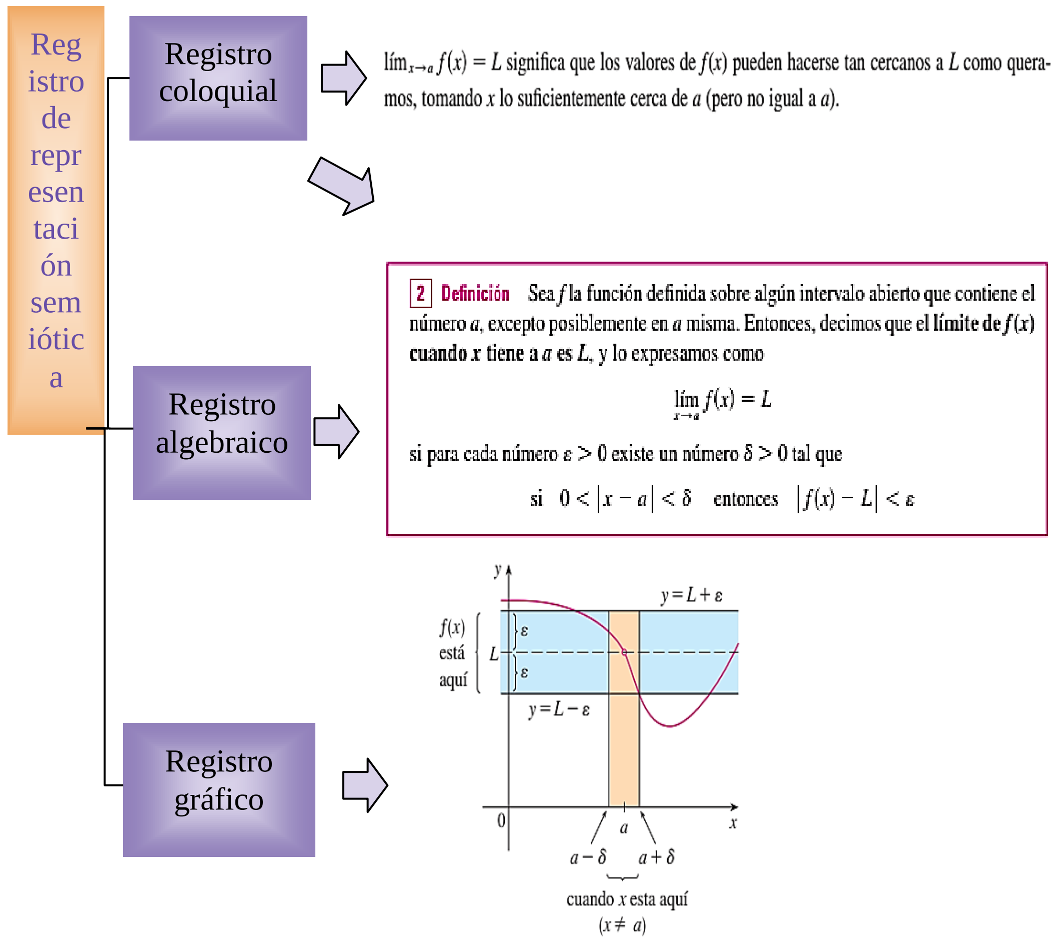


Figura 6.2. Definición precisa de límite en sus diferentes registros de representación semiótica (basado en Stewart, 2012)

Los registros de representación semiótica se clasifican según cuatro categorías que Duval (2004; citado en Cruzado y Flores, 2017) define del siguiente modo:

- *Registro en lengua natural o coloquial*: esta representación se da cuando se define un fenómeno o situación y se puede realizar de manera oral o escrita.
- *Registro figural*: este registro involucra esquemas, bosquejos, líneas y figuras geométricas.
- *Registro algebraico*: en este registro un objeto matemático se puede representar por medio de expresiones algebraicas.

- *Registro gráfico*: se usa para representar un objeto matemático con base en un sistema de coordenadas cartesianas.

Como se puede observar en la Figura 6.2, se dan tres tipos de representaciones: en forma coloquial, tiene una gran cantidad de simbología (registro algebraico) y están acompañadas de presentaciones gráficas.

Por otro lado, según Trujillo et al (2015), es el docente quien tiene la tarea de innovar en el campo educativo al orientar y afianzar el desarrollo de las habilidades matemáticas, mediante el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Por lo tanto, el objetivo de la investigación es determinar el efecto que tiene el uso didáctico del software matemático GeoGebra en la enseñanza del concepto de límite y cómo favorece las distintas representaciones mencionadas por Duval.

3. Aspectos metodológicos del estudio

A continuación, se delimita el marco metodológico de la investigación. En él se desarrolla cuál es el enfoque metodológico del estudio, su alcance, quiénes son los sujetos del mismo, cómo se ha recolectado la información, cuáles son las categorías de análisis y cómo se realizó el procesamiento de los datos.

3.1. Sujetos

Los *sujetos* de esta investigación son algunos profesores que se encuentran enseñando el concepto de límite en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, particularmente en la materia Análisis Matemático I, dictada por docentes de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, la cual corresponde al primer cuatrimestre de primer año de las carreras de Profesorado en Matemática, Licenciatura en Matemática, Profesorado en Física, Licenciatura en Física y Licenciatura en Ciencias de la Computación.

3.2. Enfoque, alcance y tipo de investigación

Esta investigación emplea un *enfoque metodológico cualitativo* para analizar cuáles son los beneficios de la enseñanza del concepto de límite a través de la utilización del software GeoGebra. Se considera que el estudio tiene este tipo de enfoque ya que el objetivo del mismo es estudiar ciertas situaciones particulares de enseñanzas, sin mediciones numéricas. Además, según Hernández Sampieri et al (2014), los métodos cualitativos suelen resultar más apropiados para el campo educativo en general.

El *alcance del estudio* es *descriptivo-interpretativo*. La intención es caracterizar las contribuciones que tiene la enseñanza de límites de una función con apoyo en la incorporación de GeoGebra como un RAE y OA, y cómo ayuda a superar las dificultades en torno a este concepto.

Se realizó a partir de la observación de clases grabadas y/o clases en vivo, por lo que esta investigación se clasifica como un *estudio de casos*, ya que se analizan situaciones específicas donde se desarrolla del concepto de límite y se estudia cómo la utilización del software GeoGebra puede beneficiar y potenciar la enseñanza del mismo. El estudio de casos, se trata de un método muy útil para el análisis de problemas prácticos, situaciones o acontecimientos que surgen en la cotidianidad, como lo es el tema de esta investigación.

3.3. Técnicas de recolección y procesamiento de la información

Para la *recolección de la información*, la técnica que se ha implementado es la observación de clases grabadas o clases en vivo. En efecto, se han tomado notas de campo acerca de lo acontecido durante las clases, para facilitar un posterior estudio y reflexión sobre los acontecimientos sucedidos.

El *procesamiento de los datos* se realizó a partir de la información obtenida a través de la observación de clases. Se realizó mediante un *análisis del contenido* a partir del estudio de las categorías que se desarrollan a continuación y la información obtenida a través de la técnica mencionada.

3.4. Categorías de análisis

Tabla 6.1. Categorías de análisis

Categorías de análisis	**Datos obtenidos a partir del material audiovisual**
Representaciones gráficas	
Representaciones simbólicas	
Representaciones coloquiales	
Transición entre las distintas formas de representación	
GeoGebra	

Las *categorías de análisis* (Tabla 6.1) han quedado determinadas por los distintos tipos de representaciones: simbólicas, gráficas y coloquiales. En la recolección de información se prestó especial atención a cuáles de estas representaciones se desarrollan a través de la enseñanza con GeoGebra.

4. Resultados

En la presente sección del trabajo se detallan los resultados del mismo; esta se divide en apartados donde se presentan, a través ejemplos, qué tipos de representaciones han sido utilizadas y de qué forma.

4.1. Representaciones

A continuación, se detallan ejemplos donde se ha podido evidenciar cada una de las representaciones y cómo han sido las transiciones de unas a otras.

En primer lugar, se menciona de qué forma se dan los distintos tipos de registros en el apunte que utilizan estudiantes y docentes de la cátedra de Análisis Matemático I (AM I), y luego cómo se realizaron durante la clase.

Representaciones coloquiales, gráficas y simbólicas en el apunte de AM I

Definición. Dada una función real f y un número real a, de manera que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que un valor ℓ es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a, y notamos con el símbolo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell ,$$

si, para cualquier valor $\varepsilon > 0$, prefijado, existe un número positivo δ, tal que,

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

En términos de entornos, si

$$x \in E'(a, \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in E(\ell, \varepsilon) .$$

Figura 6.3. Definición de límite

Con respecto a las representaciones coloquiales, estas se han podido evidenciar mayoritariamente en el apunte de clase que utilizan los estudiantes y que el docente usa como guía. Al comienzo en el apunte se realizan algunas definiciones de conceptos que serán utilizados en la definición de límite, como el concepto de entorno y distancia, los cuales se dan de forma coloquial y simbólica. Por otro lado, en la definición de límite se utilizan tanto registros simbólicos como coloquiales, como se puede ver en la Figura 6.3.

Además, esta definición se encuentra acompañada de la imagen que se muestra en la Figura 6.4.

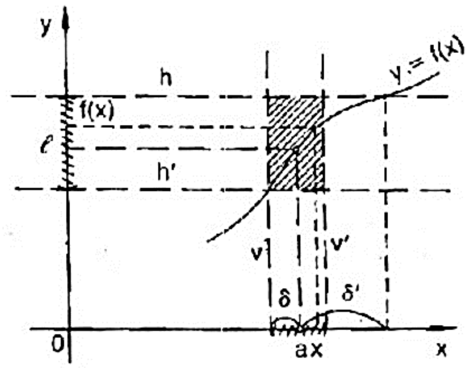


Figura 6.4. Imagen que se encuentra junto con la definición de límite

En esta imagen se ilustran los elementos que se mencionan en la definición de límite. Se puede observar que el mismo apunte pasa de un registro a otro, es decir, en la definición intervienen tres tipos de registros: simbólico, coloquial y gráfico. Luego de la definición se profundiza aún más en la forma simbólica de la misma, como se puede analizar en el extracto del apunte mencionado que se presenta en la Figura 6.5.

En forma proposicional,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \ : \ (\, 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-\ell| < \varepsilon) \ .$$

Figura 6.5. Registro simbólico de la definición de límite (Apunte de la cátedra)

La simbología en este tema se encuentra tan presente que además se identifican notaciones equivalentes (Figura 6.6).

Nota. Las siguientes simbologías son equivalentes.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \,, \quad \lim_{x \to 0} f(x+a) = \ell \,, \quad \lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0 \ .$$

Figura 6.6. Registro simbólico de la definición de límite (Apunte de la cátedra)

Representaciones coloquiales, gráficas y simbólicas durante el desarrollo de la clase

A continuación, se menciona cómo se desarrollan los registros durante las clases, con hincapié en las diferencias y similitudes que se dan con el apunte.

Con respecto a las definiciones de entorno y distancia, a diferencia del apunte que solo utiliza registros gráficos y simbólicos, el docente utiliza registros gráficos (Figura 6.7).

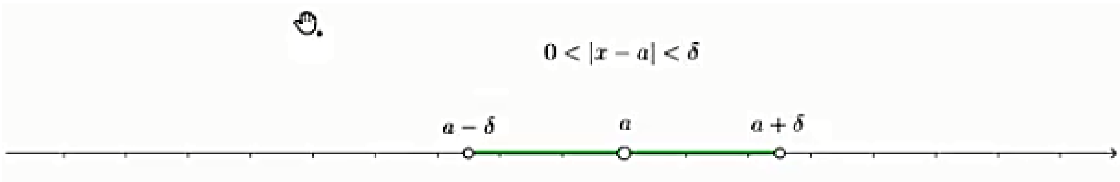


Figura 6.7. Registros gráficos en las definiciones de entorno y distancia (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

En esta presentación se puede observar la noción de entorno con cierto dinamismo que aporta GeoGebra, ya que los valores de δ iban disminuyendo y aumentando.

Por otro lado, para adentrarse a la definición de límite, el docente comenzó con un ejemplo, que es el mismo que se encuentra en el apunte, y lo explicó sobre un gráfico de GeoGebra, como se puede ver en la Figura 6.8.

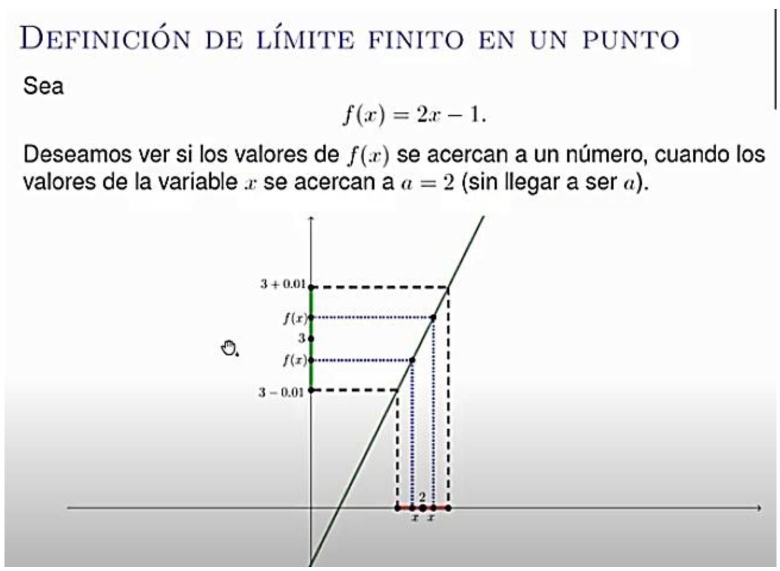


Figura 6.8. Registro gráfico para explicar definición de límite finito en un punto (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

Dada la función *f(x)=2x-1*, el docente analizó que los valores de *f(x)* se acercan a un número cuando los valores de la variable *x* se acercan cada vez más a *a=2*, sin llegar a ser *2*. En el gráfico había puntos cercanos a *2* marcados en el *eje x* y, con línea de puntos, sus respectivas imágenes. El profesor mostró que tales imágenes se acercaban a *3*. Y luego mostró una pestaña de GeoGebra con el mismo gráfico, donde los valores de *x* varían dentro del entorno reducido de *x=2* y se podía observar cómo varían las imágenes dentro del entorno reducido de centro *3*, acercándose cada vez más a *y=3*. Para esto utilizó una herramienta que provee GeoGebra denominada *"Deslizadores"*.

Junto con este ejemplo, el docente comenzó a introducir la simbología que posteriormente utilizaría en la definición de límite (Figura 6.9).

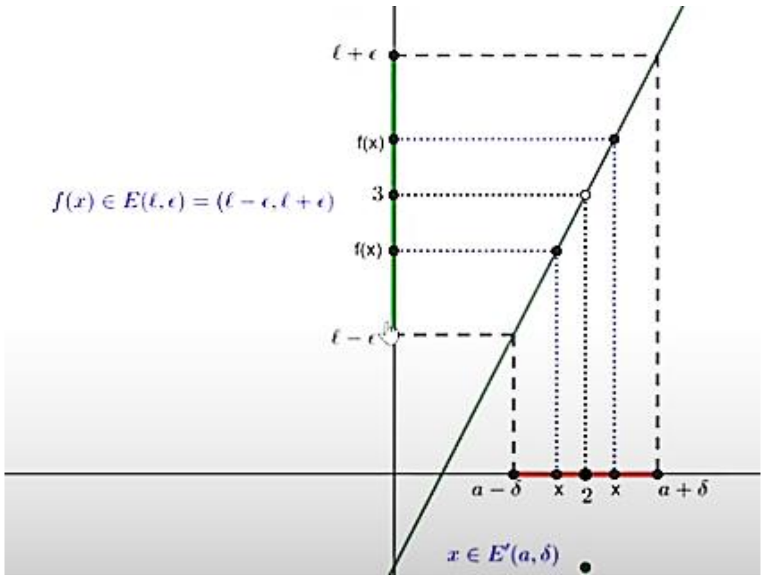


Figura 6.9. Representaciones gráficas y simbólicas del ejemplo mencionado en la presentación del docente (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

En la Figura 6.9 se puede observar cómo el docente, mediante la herramienta antes mencionada, encontró un modo de explicar lo que luego formalizó en la definición precisa de límite. La herramienta utilizada permitía a los estudiantes visualizar que, a medida que los valores de x se acercan más y más a cierto valor, las imágenes de la función se encuentran cercanas a cierto valor. En el apunte, donde se desarrolla este tema, también hay un gráfico de la misma función (Figura 6.10).

El gráfico de la función f se muestra en la Figura 1. En él podemos observar que los valores de la función f se acercan al número 5, cuando los valores de x se acercan a 3.

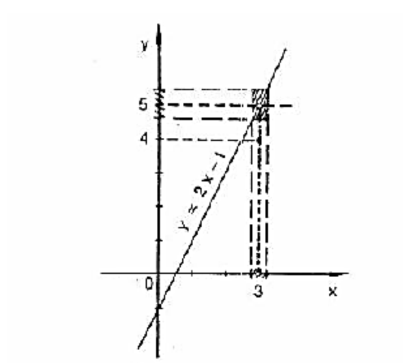


Figura 6.10. Imagen del mismo ejemplo que se encuentra en la Figura 6.9 (apunte de cátedra)

La diferencia entre las dos formas de desarrollar este ejemplo radica en que, mediante el ejemplo de GeoGebra, los estudiantes pueden observar cómo los valores de *f(x)* se van acercando a 3 a partir del dinamismo que aporta la herramienta deslizadores.

Luego de realizar el ejemplo de forma gráfica e ir introduciendo junto con él la simbología propia del concepto, el docente escribió el resultado del límite. Finalizó esta clase con la formalización del concepto de límite, con la misma definición del apunte, desde una diapositiva.

En la clase siguiente, la cual fue dictada por otro docente, él mismo comenzó realizando un repaso. Para esto utilizó también gráficos en GeoGebra (Figura 6.11).

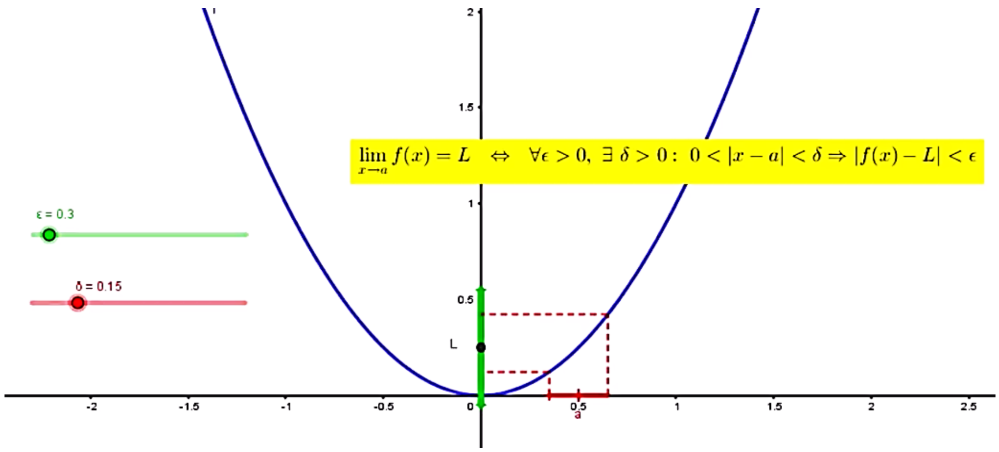


Figura 6.11. Gráficos en GeoGebra a modo de repaso (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

En este gráfico, a diferencia del que utilizó el otro docente, se pueden distinguir los tres registros juntos, coloquial, simbólico y gráfico.

Junto con dicho gráfico utilizó la definición precisa de límite e iba moviendo los deslizadores, para hacer el δ más pequeño y mostrar que, a medida que ε varía, δ también lo hace.

También se apoyó en este recurso para explicar y mostrar que el límite a veces no existe y para ello utilizó el gráfico de la *función signo*, lo que también invitó a recordar el concepto de límites laterales (Figura 6.12).

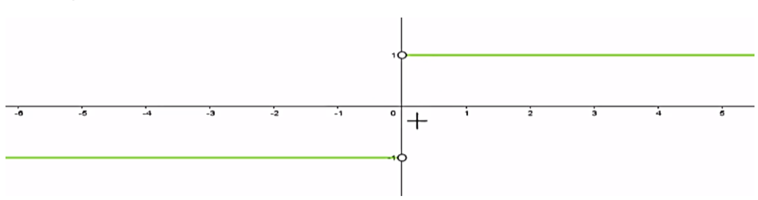


Figura 6.12. Gráfico de la función signo con GeoGebra (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

Mostró que en este caso los límites laterales existen, pero que eso no siempre pasa, y para esto presentó la función: $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. "¿Existe el límite cuando x tiende a cero?" (Figura 6.13).

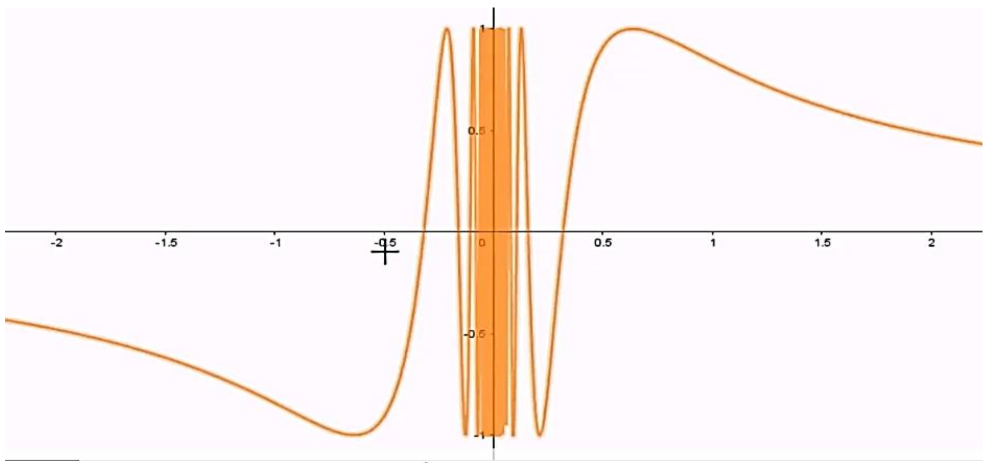


Figura 6.13. Registro gráfico de $f(x) = sen(\frac{1}{x})$ con GeoGebra (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

Y agregó que el comportamiento de esta función cerca del cero es "oscilar" (haciéndole zoom a la imagen) y, por tal motivo, no se puede asegurar la existencia de un valor al cual las imágenes se acercan cuando los valores de x se acercan a 0.

La utilización de estos gráficos posibilitó hacer un repaso rápido y recordar los conceptos mediante la observación y visualización de distintas funciones.

Al utilizar GeoGebra, se pudo realizar el gráfico de la función $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, el cual no es sencillo realizar a mano; además, el profesor le hizo zoom al mismo para que los estudiantes comprendan qué pasaba cerca del cero y la idea de oscilación que mencionó después.

4.2. GeoGebra

En esta parte se analiza en qué situaciones y cómo se utiliza GeoGebra durante las clases.

Como se puede observar, durante la clase donde se formalizó la definición de límite, las distintas explicaciones fueron acompañadas por gráficos para complementar lo que decía el apunte, se considera que de este modo se facilita la comprensión de nuevos conceptos, ya que se permite la visualización de los mismos, y aporta dinamismo y movilidad al esquema, lo que hace que una gráfica manual no pueda cumplir la misma función.

A través de GeoGebra no solo se implementó el registro gráfico, si no que este iba acompañado de los otros registros, simbología propia de la definición y lenguaje coloquial que en su mayoría fue oral por parte de los docentes (Figuras 6.8 y 6.11).

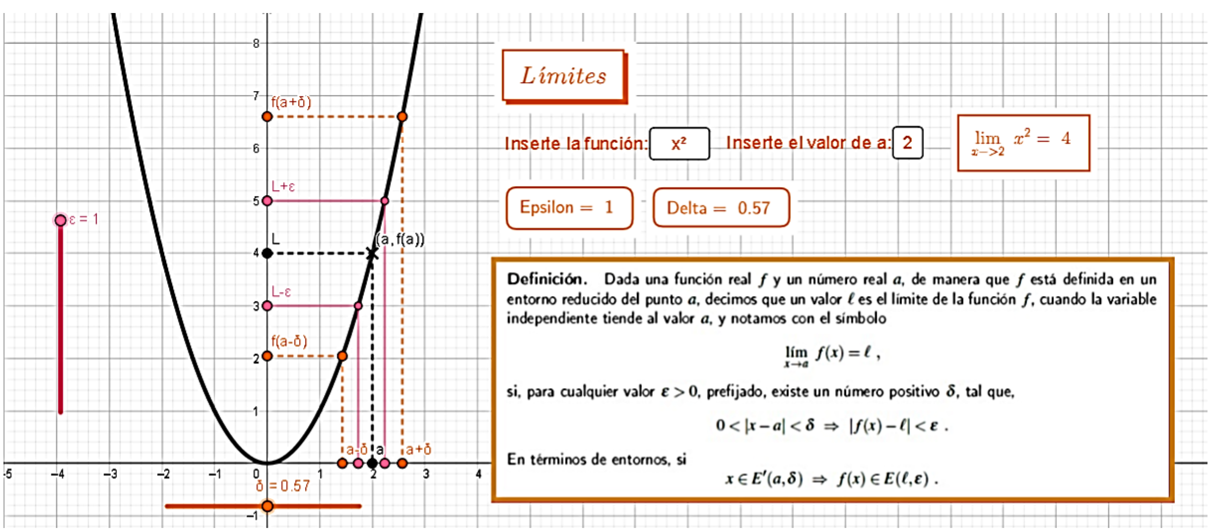
En la Tabla 6.2 se sintetizan los hallazgos.

Tabla 6.2. Resumen de resultados obtenidos

Categorías de análisis	**Datos obtenidos a partir del material audiovisual**
Representaciones gráficas	Figuras 6.8, 6.9, 6.11, 6.12 y 6.13
Representaciones simbólicas	Figuras 6.8, 6.9 y 6.11
Representaciones coloquiales	Se dieron de forma oral durante las explicaciones donde se mostraban las gráficas con GeoGebra
Transiciones entre las distintas formas de representación	Figuras 6.9 y 6.11. Se conjugan representaciones gráficas y simbólicas, además del lenguaje coloquial que se realizaba de forma oral por parte de los docentes

Por otro lado, GeoGebra ayudó a realizar gráficos que no sería tan sencillo realizar en un pizarrón y a poder hacerle el zoom necesario para interpretar lo que pasaba con esta función, como se puede analizar en la Figura 6.13.

Un ejemplo de un Applet similar al que han utilizado los docentes se encuentra en el siguiente link de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/dj3wkstk[3]. GeoGebra ofrece una gran variedad de recursos abiertos a la comunidad que son realizados por estudiantes, docentes, etc. Este Applet, en particular, muestra los tres registros (Figura 6.14).



[3] Autora: Sofía Rodríguez.

Figura 6.14. Applet de GeoGebra sobre la definición formal de límite
(https://www.geogebra.org/m/dj3wkstk)

Se puede ver el registro gráfico; en este caso se encuentra graficada la función $f(x) = x^2$ pero permite cambiar la función e insertar la que uno desee. Así como también permite variar el valor del *a*. Por otro lado, se muestra la definición de límite en lenguaje coloquial y simbólico, y la simbología también se encuentra presente en la gráfica.

Los "deslizadores" de δ y ε permiten ir haciendo estos valores tan chicos como se desee y visualizar qué pasa en el gráfico de $f(x)$.

5. Conclusiones

En la presente sección del trabajo se busca dar respuesta a los distintos interrogantes realizados al comienzo de la investigación. Además, se relacionan los hallazgos con los estudios que han sido desarrollados en el estado del arte y, por último, se detalla cuál se considera que es la innovación y posibles líneas de trabajo que se desprenden para futuras investigaciones.

5.1. Respuesta a los interrogantes

En este apartado se busca dar respuesta a los interrogantes planteados al inicio de la investigación. Esto se realiza a partir de los resultados obtenidos, que han sido desarrollados en la sección anterior.

Los interrogantes planteados al comienzo del trabajo son:

¿Cómo la utilización de distintas representaciones contribuye a facilitar y potenciar la enseñanza de la definición formal de límite? Y en este marco, ¿cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra?

En las Figuras 6.9 y 6.10 se puede observar cómo se realizan, de distinto modo, un mismo ejemplo donde se utiliza la definición formal de límite. La diferencia entre estas dos formas de desarrollar este ejemplo radica en que, mediante GeoGebra, los estudiantes pueden observar cómo los valores de *f(x)* se van acercando a 3 a partir del dinamismo que aporta la herramienta deslizadores que proporciona GeoGebra. Además, los conceptos no se encuentran de manera estática como en el apunte, si no que el docente experimenta con ellos. Si bien en ambos ejemplos se utiliza el registro gráfico junto con el simbólico, GeoGebra contribuye a potenciarlos.

Otro beneficio de GeoGebra se puede evidenciar en la Figura 6.13, donde fue utilizada la gráfica de una función para complementar la idea de que los límites no siempre existen. en este caso el docente quería mostrar que cuando una función oscila cerca de un punto allí el límite no existe y para esto utilizó la gráfica de la función $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. Este gráfico tiene la particularidad de que si se grafica en la escala inicial que proporciona GeoGebra, se observa "una franja" del color del gráfico y no se puede analizar lo deseado, pero si se le hace zoom, y/o se cambia la escala del eje x, es posible examinar lo que sucede cerca del valor $x = 0$. Graficar funciones, como mencionan Rodriguez et al (2020), muchas veces ocupa tiempo, espacio y complejiza el proceso de análisis, en este caso GeoGebra proporciona inmediatez para el docente para desarrollar el concepto o la idea esperada.

Como mencionan Oviedo et al (2012), la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos las representaciones y, recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las docentes exteriorizan las imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas (los estudiantes). Como se puede observar en la Tabla 6.2, los docentes han utilizado tres de las cuatro representaciones definidas por Duval (2004; citado en Oviedo et al, 2012): gráfica, coloquial y simbólica.

Las representaciones gráficas se dieron a través de GeoGebra (Figuras 6.8, 6.9, 6.11, 6.12 y 6.13), lo que ha permitido la visualización de los conceptos, con uso del registro gráfico combinado con otros registros. La opción deslizadores, utilizada por los docentes, aporta dinamismo y movilidad al esquema, lo que hace que una gráfica manual no pueda cumplir la misma función.

La utilización de GeoGebra permite de la exploración y visualización, y a partir de esto se busca que los estudiantes establezcan relaciones entre los distintos objetos que contiene la definición formal de límite y que se familiaricen con las propiedades que ellos cumplen, de modo tangible y manual en lugar de abstracto.

El docente, durante las explicaciones, iba manipulando los objetos y no solo se centraba en la visualización de la gráfica de una función. Esto permite entender de manera dinámica cómo los aspectos algebraicos generan transformaciones al objeto gráfico asociado y así entender de manera más precisa dichas transformaciones.

¿Cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra?

Los conceptos matemáticos, muchas veces, no son objetos reales y por consiguiente es necesario recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que ayudan a su comprensión.

Romiti et al (2014) consideran que una persona comprende efectivamente un cierto contenido cuando logra desempeñarse satisfactoriamente tanto en el tratamiento por separado de los distintos registros como en la articulación entre los mismos. Mencionan que el estudiante comprende parcialmente un cierto contenido si logra tal desempeño en dos de los tres registros propuestos. En caso contrario logra lo que se encuadra como comprensión frágil.

La utilización del software GeoGebra desarrolla principalmente el registro gráfico, pero los docentes lo han complementado con registros simbólicos y coloquiales.

Las representaciones semióticas resultan favorables y permiten a los docentes no mecanizar el aprendizaje con rutinas carentes de significado, sino que buscan la comprensión conceptual y procedimental de los objetos matemáticos involucrados en el cálculo diferencial, por parte de los estudiantes.

El uso de GeoGebra, como un REA para la visualización de las representaciones gráficas combinada con otros registros, se incorpora en el aula en busca de mejorar y potenciar la práctica educativa. Sin embargo, la manipulación de este es solo realizada por el docente.

El programa de la asignatura menciona que una de las capacidades que busca lograr en los estudiantes es que utilicen la herramienta computacional como recurso facilitador del cálculo y la representación gráfica, entre otras. Entonces, cabe mencionar que una forma de potenciar aún más el aprendizaje y el uso de GeoGebra, es que los estudiantes hagan uso del mismo. Que sean ellos, con el docente como facilitador, los que interactúen con el programa e intenten encontrar relaciones entre los distintos objetos matemáticos que se encuentran en la definición del concepto de límite.

A modo de ejemplo, luego de que el docente explique la definición de límite y utilice para ello GeoGebra, podría ir explicando cómo se realiza la utilización del Applet de modo que, luego de esto, sean los estudiantes quienes exploren el concepto y los distintos elementos que en ella se ponen en juego. A continuación, se describe brevemente una propuesta que utiliza el Applet de la Figura 6.14.

Actividad 1

a) Realizar en el Applet los siguientes pasos para cada una de las funcione y luego completar la tabla:

- Insertar la función de la casilla de entrada:

(1) $f(x) = x^2$

(2) $f(x) = x^3$

- Ingresar un valor para a.
- Seleccionar un valor de Epsilon (ε) con el deslizador.
- Hallar un valor de Delta (δ) que verifique la Definición Formal de Límite y otro valor que no.

$f(x)$	$\lim_{x \to a} f(x) = L$	ε	$\delta \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	$\delta \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

b) Para los valores de δ que pertenezcan al entorno de ε, escribir la definición de límite con los valores correspondientes.

Esta actividad tiene como propósito familiarizar a los estudiantes con la utilización del Applet, ya que, probablemente para algunos estudiantes sea la primera vez que utilicen GeoGebra. Por otro lado, encontrar los alumnos tienen que encontrar un δ que verifique la definición de límite y, por último, relacionar el registro simbólico con el coloquial que se encuentra en la definición.

Actividad 2

Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que:

si $|x-1| < \delta$ entonces $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$

Luego escriba cómo quedaría la definición escrita de forma simbólica en este caso.

En esta actividad se busca involucrar el registro gráfico y simbólico en primer lugar y, luego, el registro coloquial al transcribir lo observado en la definición propiamente dicha.

Actividad 3

Graficar en el Applet la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

¿Qué sucede con $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?

La intención de estas actividades propuestas es que los estudiantes se familiaricen con los conceptos que se ponen en juego en la definición de límite y realicen el ejercicio de pasar de un registro a otro y encontrar las relaciones entre ellos.

La actividad 3, por su parte, busca comenzar a introducir a los estudiantes en la idea de que el límite no siempre existe; esto podría ir acompañado de una posterior formalización, junto con el docente.

Por otro lado, como dicen Trujillo et al (2017), al momento de abordar el concepto de límite se suele hacer desde una perspectiva abstracta, donde el contenido se presenta de forma algebraica o gráfica y no aplicada en un contexto. En esta línea, algunas actividades que se podría proponer a los estudiantes que realicen son las que se presentan en la Figura 6.15.

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm² de área.
a) ¿Qué radio produce tal disco?
b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm² en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso a) debe el tornero mantener el radio?
c) En términos de la definición ε-δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales, se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.
a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?
b) Si se permite una variación de temperatura de 200°C ± 1°C, ¿qué intervalo se potencia en watts se permite para la potencia de entrada?
c) De acuerdo con la definición ε-δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

Figura 6.15. Posibles actividades para implementar en el aula (Stewart, 2012)

En estas actividades se ponen en juego nuevamente los elementos que se encuentran en la definición de límite y tal definición. La diferencia con las actividades anteriores es que estas no se dan en abstracto, sino que ambas son problemas en contexto y se pide a los estudiantes que relacionen los conceptos con la definición de límite. Por su parte, en la segunda actividad se podría realizar el gráfico de la función para comenzar la actividad con un registro gráfico de lo que sucede y para ello utilizar GeoGebra.

5.2. Relación de los hallazgos con otros estudios similares

A continuación, se desarrollan las similitudes y diferencias entre los resultados obtenidos en el presente trabajo y los que se han reportado en el estado de conocimiento sobre el tema.

A diferencia de lo que mencionan Prada-Núñez et al (2017), quienes remarcan que la mayoría de las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, el presente estudio se centra en mayor medida en cómo los docentes abordan la enseñanza del concepto de límite. De todos modos, los procesos de enseñanza y de aprendizaje están profundamente relacionados, y muy probablemente, una mejora en la enseñanza tendrá como resultado una mejora en el aprendizaje. Como mencionan Trujillo et al (2017), el docente tiene que tener como objetivo disminuir las dificultades que se presentan en la enseñanza para así facilitar el aprendizaje.

Por otro lado, estos autores mencionan que al momento de abordar el tema se suele hacer desde una perspectiva abstracta, el contenido se presenta de forma algebraica o gráfica y no aplicada en un contexto. En concordancia con esto, en las clases observadas para esta investigación se ha podido evidenciar lo mismo que estos investigadores remarcan.

Rodriguez et al (2020) analizan cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra para que los estudiantes comprendan las formas indeterminadas de los límites. Al igual que ellos, en este estudio se ha podido dar cuenta que graficar funciones ocupa tiempo y espacio, y puede llegar a complejizar el proceso y que uno de los beneficios de GeoGebra es la agilidad a la hora de realizar estas gráficas.

Esta investigación aborda las representaciones de un modo similar a como lo hacen Romiti et al (2014), quienes toman como referente a la Teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval; de nuevo aquí la diferencia radica en que ellas realizan una propuesta para la enseñanza del concepto en cuestión y es allí donde a partir de las representaciones consideran que es beneficioso para la enseñanza y el aprendizaje.

Al igual que remarcan Prada-Núñez et al (2017), Gazzola et al (2011) se centran en una propuesta para los estudiantes con respecto al concepto de límite y concluyen que GeoGebra, como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, permite a los estudiantes acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones y les posibilita comprobar sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas. En este estudio, si bien está mayormente centrado en la mirada de cómo utilizan el software los docentes, se puede concluir que el modo en que los profesores lo abordan también acerca a los estudiantes a comprender el concepto a través del uso de las distintas representaciones.

Tanto en las investigaciones consultadas como en este estudio se ha podido evidenciar la dificultad que tiene el concepto de límite, y que esta radica en su simbología y abstracción.

5.3. Innovación del estudio y posibles líneas de trabajo que se desprenden

La innovación de este estudio radica en potenciar la enseñanza de un concepto tan abstracto y difícil de comprender, como lo es la definición formal de límite. También se realiza una propuesta para que la utilización del software GeoGebra no solo quede del lado del docente, sino que también pueda ser experimentado por parte de los estudiantes.

La propuesta realizada es un ejercicio para utilizar antes de la formalización del concepto. En relación con esto una posible línea de trabajo es estudiar cómo beneficia el aprendizaje del concepto esta actividad, implementado en el aula. También se puede complementar con actividades posteriores a la formalización del concepto.

Por otro lado, en los antecedentes de esta investigación se ha citado a Prada-Núñez et al (2017), quienes mencionan que al momento de abordar el tema se suele hacer desde una perspectiva abstracta, donde el contenido no se presenta aplicado en un contexto. Entonces, otra posible línea para futuras investigaciones es realizar una propuesta, donde algunas actividades no sean solo ejercicios de calcular o demostrar el resultado de algún límite, si no sean un problema contexto.

5.4. A modo de cierre

En relación con el compromiso social de esta investigación, la Declaración de la Conferencia Regional de Educación Superior (CRES 2008; citado en Cecchi et al, 2013) menciona que, en las instituciones de Educación Superior, que es en el contexto donde ha surgido este proyecto como una propuesta en una materia del Profesorado en Matemática, se ha de fomentar en sus estudiantes una labor de investigación basada en la indagación de los problemas en su contexto. Ello con un rol científico, tecnológico, humanístico y artístico, fundado en la definición explícita de los problemas a atender y dar una solución a los mismos. Además de estar acompañada de una posterior divulgación con el fin de tener una relación de compromiso y más activa con la sociedad.

En esta línea se considera que lo que aporta el presente estudio a la sociedad educativa es analizar una *alternativa de enseñanza del concepto de límite*, con el fin de *potenciar el aprendizaje* de los estudiantes, a partir de repensar los modos de enseñanza y examinar el material del cual se valen los docentes para sus clases.

Por otro lado, se analiza la utilización de GeoGebra con un sentido, no simplemente la utilización de las TIC, si no con el fin de beneficiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se pone el foco en cómo la utilización del registro gráfico a través de este software y otros registros pueden contribuir a la comprensión de los conceptos que se ponen en juego.

En rasgos más generales, este proyecto busca desarrollar una capacidad de razonamiento lógico en los estudiantes, que tengan la capacidad de interpretar, plantear y resolver problemas, con cierta autonomía, capacidades que son fundamentales en el todo el trayecto universitario así también como fuera de este.

A modo de reflexión final, considero que es fundamental como estudiante y futura docente en matemática, cuestionar y reflexionar sobre las prácticas de enseñanza actuales con el fin de potenciarlas o modificarlas para una mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Este proyecto ha surgido de comenzar a indagar sobre problemáticas que cada una de las alumnas de este seminario había evidenciado durante su trayecto en la facultad, mediante una mirada retrospectiva sobre lo recorrido. Nos hemos involucrado con el contexto en donde hemos desarrollado nuestro aprendizaje de los últimos años e indagado acerca de qué dificultades habíamos encontrado, qué cuestiones ameritan seguir indagando o qué áreas de vacancia habíamos podido evidenciar.

Por último, estos trabajos y otros que sigan estas líneas, es deseable que se compartan con la comunidad ya sea para seguir indagando o tomar ideas que lleven a una mejora de las prácticas en el aula. Por último, tener en cuenta que el trabajo del docente no solo se centra en el aula sino también señalar la importancia de la labor científica de las grandes contribuciones que puede tener.

Referencias bibliográficas

Cecchi, N.H., Pérez, D.A. y Sanllorenti, P. (2013). *Compromiso Social Universitario: De la Universidad posible a la Universidad necesaria.* Instituto de Estudios y Capacitación, CONADU. http://beu.extension.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/170.pdf.

Cruzado Quispe, E. y Flores, J. (2017). Coordinación de registros de representación semiótica: un estudio de caso con problemas de optimización. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *2*(1), 39-50. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/issue/view/6/4.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (2018). *Programa de Análisis Matemático I.* UNR.

Gazzola, M. P., Corica, A. y Elichiribehety, I. (2011). Enseñanza del límite funcional con GeoGebra. En A. Corica, M. Bilbao, M. Paz y M.P. Gazzola (Eds.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp.509-515). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. http://funes.uniandes.edu.co/20883/.

Gómez, J. (2018). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante fractales lineales. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *3*(1), 77-79. http://www.ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/279.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). McGraw Hill.

Oviedo, L.M., Kanashiro, A.M., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, *1*(13), 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112.

Pazos Trujillo, L.A., Tenorio Sepúlveda, G.C. y Ramírez Montoya, M.S. (2015). Atributos de la innovación en el marco del movimiento educativo abierto para desarrollar competencias matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, *15*(3), 1-24. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/20653/21068.

Rodríguez, N., Bravo, J.L., Pérez, A. y Rodríguez, L. (2020). El GeoGebra como recurso didáctico para la comprensión de las formas indeterminadas del límite. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 751-762. https://www.clame.org.mx/actas.html.

Romiti, M., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2014). Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real. En D.C. Veiga (Ed.). *Actas de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp.314-322). SOAREM. http://funes.uniandes.edu.co/18796/.

Stewart, J. (2012). *Cálculo, Trascendentes Tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning.

Trujillo, J., Vera, C. y Prada-Núñez, R. (2017). Estado del arte sobre el concepto de límite. En R. Prada-Núñez, P. Ramírez, C. Hernández, H. Gallardo y S. Mendoza (Eds.). *Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp.165-172). Universidad Francisco de Paula Santander. http://funes.uniandes.edu.co/12798/.