

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPPO LEVI

AÑO SEXTO - FASC. 3



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1946

Entre el mes de julio y fines de septiembre del corriente año el ilustre matemático francés Georges Valiron hizo una visita a los países de América Meridional, Argentina, Chile y Uruguay como mensajero de Francia para reanudar las relaciones culturales interrumpidas por la guerra. En los días 7 a 9 de agosto tuvimos el honor de tenerlo huesped en Rosario, dictando en el Instituto de Matemática dos interesantes conferencias: una de caracter general relatando sobre los trabajos de Analisis publicados en Francia durante la ocupación, la segunda de argumento más especializado sobre estudios recientes en el campo de la teoría de las funciones de variable compleja. El tema de la primera conferencia forma parte de un conjunto de relaciones distribuídas entre varios matemáticos franceses para informar al mundo científico sobre el trabajo desarrollado en Francia en las distintas ramas de la matemática en los 4 y más años de forzoso aislamiento y que, en su idioma original, aparecieran en publicación apropiada. Agradecemos al distinguido profesor de la Universidad de Paris el privilegio de publicar a continuación dicha relación en traducción castellana.

LA REDACCIÓN

RELACION SOBRE LOS TRABAJOS DE ANALISIS MATEMATICO PUBLICADOS DURANTE LA OCUPACION

por GEORGES VALIRON

Doscientas ocho notas, artículos, memorias y libros dedicados al Análisis han sido publicados en Francia durante el período comprendido entre julio de 1940 y fines de 1944. Este número no comprende evidentemente los trabajos que han podido publicar los franceses que se encontraban fuera de Francia; en cambio están incluidas las publicaciones de extranjeros residentes en Francia trabajando en investigaciones de inspiración francesa.

Es preciso observar que las fronteras entre el Análisis y las ramas vecinas de la matemática son muchas veces bastante difíciles de señalar, pudiendo por tanto suceder que sean citados trabajos que merecen ser mencionados también desde otros puntos de vista.

Hemos agrupado los trabajos bajo nueve títulos: I. Números, conjuntos, topología y métrica; II. Funciones de variables reales; III. Funciones de una variable compleja; IV. Funciones de varias variables complejas; V. Funciones armónicas y potencial; VI. Ecuaciones diferenciales; VII. Ecuaciones en derivadas parciales; VIII. Ecuaciones integrales; IX. Trabajos y obras diversas. Al fin de cada título figuran los nombres de todos los autores y el número de sus publicaciones en cada revista o colección que se designan con las abreviaciones siguientes: *Comptes Rendus*, C; *Annales de l'Ecole Normale*, A; *Journal de Mathématiques*, J; *Annales de la Faculté de Toulouse*, T; *Bulletin des Sciences Mathématiques*, M; *Actualités Scientifiques*, H; *Revue Scientifique*, R; *Enseignement Mathé-*

matique, E; Obras separadas, O. El número que sigue a la letra indica el correspondiente número de artículos ⁽¹⁾.

I. *Números, conjuntos, topología y métrica*. — El grupo Bourbaki ha hecho aparecer los dos primeros fascículos del libro III, titulado Topología General, de la primera parte de su tratado. Se sabe que este grupo de matemáticos se ha propuesto revisar los conceptos desde el origen, con el fin de dar fundamentos sólidos al conjunto de toda la matemática moderna. Este propósito le obliga, dice él, a adoptar primeramente un modo de exposición axiomático y abstracto, y a proceder muy frecuentemente de lo general a lo particular. Además, las necesidades de la demostración exigen que los capítulos, los libros y las partes se sucedan en un orden lógico rigurosamente fijado. El lector debe poseer un cierto poder de abstracción y mucha paciencia. La Topología general es el estudio de las correspondencias entre elementos de conjuntos muy generales para los cuales se pueden definir los entornos y por consiguiente la continuidad y los límites. Estos elementos se llaman puntos, pero el lenguaje geométrico no puede hacer olvidar que se trata de Análisis, y en el capítulo IV se encontrarán los teoremas clásicos sobre las funciones continuas, la convergencia de series y la aproximación de números. He aquí el motivo de porqué la obra de Bourbaki debemos señalarla en este lugar. Es conveniente señalar que si bien considera los espacios más generales, Bourbaki no pierde de vista las aplicaciones y que tiene buen cuidado de excluir, gracias a axiomas convenientes, los espacios teratológicos.

Aparte de su obra, Bourbaki ha publicado una nota que la completa sobre espacios que califica de minimales y completamente separados. Uno de los miembros del grupo, Dieudonné, ha estudiado bajo el nombre de paracompactos una generalización de los espacios compactos.

Las viejas concepciones de Fréchet sobre el Análisis general

⁽¹⁾ Nos hemos permitido añadir en alguna de estas referencias la señalación de unos pocos trabajos aparecidos en las *Publicaciones del Instituto de Matemática de Rosario* con fecha posterior al período encarado en esta Relación, pero que le pertenecen por el tiempo de su redacción, habiendo sido la publicación atrasada por dificultades inherentes a la situación internacional. N. DE LA RED.

y los espacios abstractos han sido desarrolladas por uno de sus alumnos Ky Fan, de nacionalidad china, que ha vivido en Francia durante toda la ocupación y cuya obra durante este período es esencialmente francesa. En su tesis ha estudiado los polinomios abstractos y la representación de ciertas clases de funciones abstractas por series uniformemente convergentes de tales polinomios, así como la noción de diferencial en el sentido de Hadamard-Fréchet; ha puntualizado la noción de tipo de dimensiones de Fréchet, introduciendo la noción de tipo homogéneo de dimensiones, y ha dado una caracterización topológica del arco simple y de la semirecta topológica en los espacios de Riesz. Sobre esta cuestión volvió poco después como aplicación de un estudio sobre conjuntos que llama filiformes.

Las funcionales lineales en los espacios uniformemente convexos de Banach han sido estudiados muy simplemente por Fortet.

En este dominio del análisis general se podrían citar numerosos trabajos de Julia sobre los espacios de Hilbert, a los cuales se relaciona una nota de Marrot, pero estas investigaciones parecerán más propias en una relación sobre Topología y Geometría.

Choquet ha dado una clasificación de los continuos planos o espaciales deducida de la consideración de puntos invariantes en las transformaciones homeomorfas de esos continuos en sí mismos.

La teoría de la medida se ha enriquecido por los trabajos de Favard sobre la medida en los espacios compactos, semi-compactos y separables; de H. Cartan quien, basándose sobre un teorema de aproximación, demuestra, sin utilizar el axioma de elección, la existencia y la unicidad de una medida invariante por las traslaciones a izquierda, en el caso de grupos localmente compactos; de Choquet, a quien una definición de las transformaciones isométricas de conjuntos respetando la distribución de las masas, permite estudiar la aplicabilidad, la variación total de una función y las integrales.

En la totalización de Denjoy, la progresión transfinita es de un empleo esencial. Denjoy se ha propuesto introducir en el análisis clásico los números transfinitos de la clase II. Para ello considera el número transfinito como indicador del orden de un elemento en un conjunto bien ordenados. A un

número irracional comprendido entre cero y uno, dado por su desarrollo neperiano, hace corresponder biunívocamente una permutación de la serie de los enteros positivos; mediante ciertas condiciones a esta permutación corresponde un número transfinito de la clase II. Todo número transfinito de la clase II puede ser definido de esta manera.

REFERENCIAS: Bourbaki C102, H. Cartan C1, Choquet C3, Denjoy C3, Dieudonné J1, K. Fan C4 J1 B2 (Bull. Soc. Roy. Liege 1), Favard J1, Fortet C1.

II. *Funciones de variables reales.* — Denjoy ha publicado las tres primeras partes de su gran obra sobre el cálculo de los coeficientes de una serie trigonométrica. El había dado en 1921 los principios fundamentales de este método bajo una forma muy condensada, en cinco notas de los *Comptes Rendus*; expuso después el método en detalle en 1938-39 en sus cursos en la Universidad de Harvard. La obra en curso de publicación es en realidad una exposición de toda una parte de la teoría de las funciones de variables reales y desarrolla teorías generales debidas al autor. El problema propuesto es el siguiente: se sabe que si una función $f(x)$ es la suma de una serie trigonométrica convergente en todo punto, esta serie es única y los coeficientes deben ser determinados por los datos de $f(x)$. ¿Cómo se podrán calcular? El problema es resuelto por Denjoy. La primera parte de la obra está dedicada al estudio de la derivación segunda generalizada de Riemann, la segunda a la métrica y a la topología de los conjuntos perfectos y de las funciones, la tercera a la determinación de una función continua por sus números segundos generalizados, la parte cuarta, cuya aparición ha sido retrasada por las circunstancias, tratará principalmente de los números transfinitos y el autor desarrollará los conceptos mencionados. Estos libros de Denjoy constituyen la obra original de matemática más notable aparecida durante la ocupación; la lectura se encuentra facilitada por el cuidado puesto en la redacción.

Esta preocupación de hacer fáciles las cosas fué también la del maestro de la teoría de funciones de variables reales, Lebesgue, prematuramente desaparecido en 1942; ella se encuentra en una de sus últimas publicaciones, donde da un ejemplo de función continua sin derivada más simple que la de Weierstrass.

En este dominio de las series trigonométricas y de las fun-

ciones de variación limitada señalemos una nota de d'Arbault sobre la convergencia absoluta de las series trigonométricas en la cual se generaliza un teorema de Fatou, una nota de Schwartz sobre las funciones de variación limitada y las curvas rectificables, y sobre todo, una nota en la cual Choquet resuelve un problema propuesto por Lebesgue definiendo la primitiva de una función con respecto a una función de variación no limitada.

La aproximación de las funciones de una variable ha sido estudiada por Roussel que obtiene bonitos resultados sobre la aproximación local de funciones continuas, por ejemplo el siguiente: el crecimiento entre x y $x+h$ (donde h es positivo) de una función continua $F(x)$ es la suma de una serie en $\sin(nh)$, cuyos coeficientes dependen de $F(x)$ y de un término $o(g(h))$ donde $g(h)$ es una función arbitraria dada de h , creciente y tendiente a cero con h . Roussel resuelve después el problema inverso de la determinación de funciones por su crecimiento infinitesimal.

También a un problema de aproximación está consagrada la brillante tesis de Schwartz. Se trata de la aproximación de funciones continuas sobre el segmento $(0, +\infty)$ por polinomios de Dirichlet

$$a_0 + a_1 e^{-2\pi\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{-2\pi\lambda_n x}$$

donde la sucesión de los λ_n está formada de números positivos dados indefinidamente crecientes. Se sabía que para que toda función continua pueda ser aproximada en menos de ε , por pequeño que sea ε , por un tal polinomio, es necesario y suficiente que la serie de término general $1/\lambda_n$ sea divergente. Schwartz ha considerado el caso en que esta serie converge y ha determinado todas las funciones susceptibles de ser aproximadas. Ellas son analíticas, holomorfas en un semiplano y representables por una serie cuyos términos son polinomios de Dirichlet, la cual converge uniformemente en el semiplano. Schwartz ha extendido sus investigaciones al caso en que el segmento $(0, +\infty)$ es sustituido por un segmento finito y ha estudiado ciertas propiedades extremas de los polinomios de Dirichlet. En una memoria ulterior considera el caso en que las λ_n son números reales de signos cualesquiera. Todas estas

investigaciones salen evidentemente del cuadro de las funciones de variable real y tienen sus aplicaciones en la teoría de funciones analíticas.

Los polinomios de Dirichlet de los cuales acabamos de hablar se cambian en polinomios trigonométricos cuando se reemplaza x por ix , resultando entonces los polinomios que se consideran en la teoría de funciones casi-periódicas, siendo los λ_n reales cualesquiera y los a_n reales o complejos; una función casi-periódica de la variable real x es el límite de una suma de tales polinomios, siendo la convergencia uniforme. Fréchet ha introducido las funciones asintóticamente casi-periódicas y las ha utilizado en el estudio del problema ergódico de Birkhoff.

Una función asintóticamente casi-periódica es la suma de una función casi-periódica ordinaria y de una función que tiende a cero cuando la variable real x tiende a infinito.

Favard ha escrito, estando prisionero, una memoria sobre los multiplicadores de interpolación. Si $f(x)$ es definida y continua sobre el segmento $(0, 1)$ y satisface ciertas condiciones, los multiplicadores de interpolación de Favard son funciones $A_n^k(x)$ definidas sobre el mismo segmento y tales que $f(x)$ sea el límite para n infinito de la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x).$$

Favard estudia los multiplicadores no-negativos asociados a las funciones continuas y los multiplicadores cualesquiera asociados a las funciones de variación limitada, dando ciertas extensiones a las funciones de dos variables. Los ejemplos que da para el caso de multiplicadores positivos se relacionan con la teoría de probabilidades.

El cálculo de variaciones fué el objeto de la primera parte de la tesis de P a u c: empleando los métodos de Fréchet y de Menger, precisa sobre numerosos puntos los resultados conocidos y hace una interesante comparación entre la integral de Lebesgue utilizada por Tonelli y una integral introducida por Weierstrass y generalizada por Burkill. Choquet ha estudiado las curvas minimizantes del cálculo de variaciones introduciendo la noción de arcos equivalentes asociados a una distribución de masas.

Señalemos finalmente una nota de Motchane sobre las funciones de variación limitada de dos variables y un trabajo de Combes sobre ciertos desarrollos del tipo tayloriano. No dejaremos además este dominio de las funciones de variables reales sin deplorar la pérdida de un joven matemático de talento, Gorny, que había sustentado su tesis poco antes de la ocupación y que no regresó del campo donde había sido deportado.

REFERENCIAS: Arbault C1, Choquet C2, Combes C1, Denjoy O3, Favard J1, Fréchet C2 R2, Lebesgue E1, Motchane C1, Pauc H1, Roussel C2 S2, Schwartz C1 H1 T1.

A este mismo párrafo pertenece una Nota de G. Julia sobre convergencias débil y fuerte en el espacio de Hilbert, publicada en el Vol. VI de las Publicaciones del Instituto de Matemática (Homenaje a Rey Pastor). (N. de la R.)

III. *Funciones de una variable compleja.* — La teoría de funciones de una variable compleja ha dado lugar a numerosos e importantes trabajos debidos en gran parte a jóvenes investigadores. Este aporte de los jóvenes compensa en parte las grandes pérdidas sufridas durante el período que nos interesa, que ha visto desaparecer al decano de nuestros maestros y de los matemáticos franceses, E. Picard, cuyo nombre está unido a tantas hermosas teorías y en particular a un teorema tan célebre que por una tendencia simplificadora se tiene costumbre de reunir bajo el nombre de Teorema de Picard una serie de hechos que fueron enteramente extraños al pensamiento de Picard. Han desaparecido igualmente: E. Fabry, contemporáneo de Picard, quien en una última nota publicada en 1941 presentaba bajo una forma simplificada sus bellos resultados sobre los puntos singulares de las funciones analíticas, las cuales, por lo menos por un tiempo, preservarán su nombre del olvido; Leau, que se ha hecho conocer por sus trabajos sobre las singularidades de las series de Taylor, sobre las funciones enteras, sobre las ecuaciones funcionales y la iteración; Flamant, a quien se deben sólidas investigaciones sobre las ecuaciones funcionales y quien, a pesar de su complexión delicada no consintió en abandonar su puesto de mando sobre el Rin hasta que su salud estuvo definitivamente arruinada. Pero la pérdida más dolorosa fué la de F. Marty, muerto por Francia en 1940, con menos de treinta años, al igual que su padre, matemático como él, fallecido en las mismas circunstancias en 1914, y al cual bonitos e

importantes trabajos colocaban entre los mejores de la nueva generación.

La teoría de las funciones enteras y de las funciones meromorfas debe importantes trabajos a Dufresnoy. Es imposible señalar aquí la evolución de esta teoría después de los trabajos fundamentales de Poincaré, Laguerre, Hadamard y Borel. Limitémonos a recordar que a los métodos de estudio de una función entera $f(z)$ basados sobre la descomposición en factores yo había sustituido un método de comparación directa del módulo máximo y del número de ceros de $f(z) - a$ y $f(z) - b$, basado sobre la demostración elemental del teorema de Picard debida a Borel, y que poco tiempo después R. Nevanlinna introdujo en lugar del módulo máximo una media más apropiada, lo cual le permitió, gracias a un complemento esencial de Littlewood, fundar una teoría general y precisa aplicable también a las funciones meromorfas; y finalmente que su alumno Ahlfors renovó completamente la teoría edificando un nuevo método cuya posibilidad había sido prevista por A. Bloch. Sobre el método de Ahlfors ha vuelto Dufresnoy dándole una forma más completa en muchos puntos, y pudiendo entonces demostrar proposiciones tales como el teorema de los tres discos que habían resistido a las investigaciones de Ahlfors. Gracias a los trabajos de Dufresnoy, esta teoría, francesa en sus principios, conducida por Julia por caminos nuevos, aquellos del estudio de los argumentos de los ceros, debe sus perfeccionamientos más recientes a un francés.

Se sabe que Montel ha relacionado los teoremas del ciclo de Picard y los teoremas de Landau y de Schottky a su teoría de las familias normales de funciones analíticas. El ha obtenido resultados nuevos en esta dirección demostrando entre otras cosas que las funciones meromorfas en un dominio, que no sean nunca iguales a una función algebraica con tres ramas por lo menos, forman una familia normal. Por el contrario, abandonando los métodos elementales por los métodos trascendentes, uno de sus alumnos, Yang, obtiene limitaciones exactas de ciertas funciones de esta teoría utilizando las funciones fuchsianas. El estudio de los sistemas de funciones enteras o meromorfas, que contiene la teoría de las funciones llamadas algebroides por Painlevé, había conducido Montel a una teoría de familias complejas de funciones meromorfas. Inspirado por los trabajos de

H. y J. Weyl y de Ahlsfors, Dufresnoy ha renovado esta teoría y la ha extendido a las familias de funciones algebroides.

En su tesis, sostenida a los veinte años, F. Marty había estudiado la descomposición del plano de la variable compleja en dominios fundamentales de univalencia tales que en uno cualquiera de estos dominios una función meromorfa dada toma una sola vez el mismo valor, tomando en el dominio cerrado todo valor. Hibbert, matemático haitiano de cultura francesa, se ha esforzado en construir tales dominios por métodos elementales. En estos trabajos se encuentran dificultades que yo he señalado. La Sra. Schwartz a quien se debe también la construcción de una función meromorfa que admite un valor deficiente que no es valor asintótico, ha obtenido en esta dirección interesantes resultados que las circunstancias derivadas de la ocupación no le permitieron publicar todavía.

La generalidad y la precisión de los resultados suministrados por los métodos nuevos no deben hacer olvidar los procedimientos antiguos que permiten ir más lejos mediante ciertas restricciones. Diversas proposiciones han sido obtenidas en este sentido por Rauch. La noción de «ordre précisé» que yo había introducido en la teoría de las funciones enteras de orden finito, ha encontrado aplicaciones en los últimos trabajos de Dufresnoy sobre la distribución de los valores de las funciones meromorfas; ella ha permitido a Hervé completar proposiciones de Gelfond e Iyer sobre la interpolación de funciones enteras. Esta noción es también útil en el estudio asintótico del número de ceros de las funciones enteras con ceros orientados donde se tienen que resolver ciertas igualdades integrales asintóticas. Mi método, bastante complicado, había sido simplificado por Hardy y Littlewood. Delange, que después de haber logrado regresar a Francia, ha por otra parte aportado importantes complementos a sus investigaciones anteriores sobre los ceros de las series de polinomios, ha vuelto nuevamente sobre estas cuestiones y ha obtenido de una parte extensiones considerables de mi enunciado, y de otra parte teoremas tauberianos. Estos teoremas son recíprocos del teorema de Abel sobre las series enteras: mediante hipótesis sobre los coeficientes se deducen propiedades de la suma de los n primeros términos de la serie en un punto del círculo de convergencia, a partir de la con-

sideración del comportamiento de la suma de la serie al aproximarse a este punto.

El lema de Abel según el cual el radio de convergencia de una serie entera es por lo menos $|x|$ si los módulos de los términos de la serie quedan limitados para este valor x , no subsiste si se supone únicamente limitada la parte real de los mismos. Teissier du Cros ha demostrado que basta que la parte real de los términos sea limitada en dos puntos tales que la razón con π de la diferencia de sus argumentos sea un número algebraico irracional, para que el radio de convergencia sea por lo menos igual a la distancia más corta de estos puntos al origen. Yo he dado diversas extensiones de esta proposición. Ciertos números de teoremas sobre las series enteras han sido extendidos por Y. Martin a series más generales, por ejemplo a las series de funciones de Bessel de orden entero. Kravtchénko ha extendido teoremas de Fatou y de Privaloff; Giraud ha estudiado los ceros de ciertas funciones de Bessel y de Whittaker. Señalaremos aún un trabajo de Montel sobre las relaciones entre las diferencias divididas y las derivadas, dos notas de Arpirrian sobre ciertos desarrollos en series de polinomios, una nota de Bouzitat demostrando la imposibilidad de la existencia de funciones enteras que verifiquen ciertas ecuaciones funcionales, una nota de Kreweras probando la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones en iteradas y una nota de Gilly sobre los productos de composiciones que se relacionan a un orden de ideas que figura bajo la rúbrica VIII.

La teoría de la representación conforme ha dado lugar a importantes trabajos. Denjoy ha dado propiedades nuevas simples de la función $Z=f(z)=\sum c_n z^n$ representando el círculo $|z|<1$ sobre un dominio simplemente conexo C , propiedades válidas para casi todos los puntos de la circunferencia $|z|=1$. Si a es un punto de esta circunferencia, $f'(z)\sqrt{z-a}$ tiende hacia cero cuando el punto z tiende hacia a permaneciendo en un ángulo de vértice en el interior del círculo, $f'(z)$ tiende hacia un número b y el cociente $(f(z)-b)/\sqrt{z-a}$ tiende hacia cero, el conjunto de las b para las cuales esta última propiedad tiene lugar es de área cero. El entorno angular de a puede ser reemplazado por un entorno más amplio, estudiándose entonces el entorno correspondiente en el plano de Z . La convergencia de la

serie $f(z)$ es discutida. Si $f(z)$ es limitada, la condición necesaria y suficiente para que ella converja uniformemente para $|z|=1$ es que la frontera C sea lo que Denjoy llama un continuo cíclico; entre los continuos cíclicos figuran las curvas simples de Jordan. En otra nota Denjoy estudia el caso de funciones univalentes no limitadas.

En su tesis, la Srta. Ferrand extiende primeramente algunos resultados de Denjoy al caso de funciones holomorfas y aún meromorfas en una corona y las demuestra por un método nuevo el cual, en el caso de las funciones univalentes, le permite precisar ciertos enunciados. Sucesivamente ella vuelve al estudio local de la transformación conforme en el entorno de un punto frontera. A pesar de numerosos trabajos de los cuales los últimos son debidos a Ahlfors, la investigación de las condiciones bajo las cuales la representación permanece conforme en un punto frontera no están todavía terminadas, mientras que el problema de la semi-conformidad ha sido resuelto por Ostrowski. Utilizando los resultados de Denjoy sobre la iteración de funciones analíticas, la Srta. Ferrand encuentra de nuevo el teorema de Ostrowski sobre la semi-conformidad y después ataca el problema de la conformidad por los métodos de Ahlfors dando condiciones suficientes menos restrictivas que las de éste. En sus trabajos ulteriores sobre esta difícil cuestión, la Srta. Ferrand, utilizando a veces trabajos de Dufresnoy y de Choquet, acerca poco a poco sus condiciones necesarias a las suficientes. La Srta. Ferrand demuestra también que una parte de sus enunciados permanece válida en el caso de representaciones casi-conformes y después aplica una desigualdad fundamental de Ahlfors a otros problemas de deformación. Entre las otras publicaciones de la Srta. Ferrand señalaremos particularmente su memoria sobre las funciones prearmónicas y las funciones preholomorfas; esta última noción, que le es debida, ella utiliza para la demostración del teorema fundamental de la representación conforme para dominios simplemente conexos.

Otras investigaciones igualmente importantes sobre la representación conforme han sido hechas por Choquet, el cual se ocupa primeramente de la estructura de los dominios planos y de su accesibilidad, de manera de obtener una respuesta a esta cuestión vaga, que él precisa, de saber cuando dos dominios planos tienen la misma forma. Trata después la topología de

la representación conforme a partir de la consideración de la sinuosidad de las curvas de acceso de los puntos accesibles y sus transformadas.

REFERENCIAS: Arpiarian C2, Bouzitat C1, Choquet C3, Delange C4, Denjoy C5 S1, Dufresnoy C12 A3 B1 S2 R1, Fabry C1, Srta. Ferrand C7 A1 B2 S1, Gilly C1, Giraud C1, Herve B1, Hibbert J1 B1, Kravtchenko C1, Kreweras C1, Martin C1, Montel C3 J1 (*Mathematica* 1), Rauch B1 S1, Sra. Schwartz C1, Teissier du Cros C1, Valiron J1 B1, Yang C2.

A los argumentos de este párrafo pertenecen todavía una Nota de Montel sobre las funciones analíticas cuyos valores cubren un dominio de área limitada y una de Dufresnoy sobre las familias casi-normales publicadas en el Vol. VI de las Publicaciones del Instituto de Matemática. (N. de la R.)

IV. *Funciones analíticas de dos o varias variables complejas.*

— Los estudios difíciles sobre las funciones analíticas de varias variables que habían sido dejados en suspenso durante varios años, han vuelto a considerarse en el período entre las dos guerras por un grupo de matemáticos representados en Francia por H. Cartan, a quien se debe una gran parte de los progresos nuevos en esta teoría. En el período que nos ocupa H. Cartan ha publicado una importante memoria sobre los ideales de las funciones analíticas de n variables complejas. Un ideal de funciones holomorfas es un conjunto de funciones holomorfas tal que toda combinación lineal de un número finito de estas funciones, con coeficientes holomorfos, sea una función del conjunto. El estudio profundo de estos ideales, además de su interés propio, permite a H. Cartan resolver en parte el problema del estudio global de las variedades analíticas complejas de un número cualquiera de dimensiones.

En un orden de ideas mucho más elemental, Delange ha estudiado bajo una forma más geométrica que la adoptada ordinariamente el dominio de convergencia absoluta de una serie entera de varias variables.

Otra contribución a la teoría de las funciones de dos variables se debe a Wachs, quien empleando métodos y una terminología debidos a Bergmann, llama pseudo-conforme a la transformación de un dominio del espacio de dos variables complejas u, v en otro por medio de dos funciones holomorfas de u, v . Estudia, bajo ciertas hipótesis, la correspondencia entre estos dominios en un punto frontera supuesto invariante y genera-

liza un teorema de Julia relativo al caso de las transformaciones conformes planas.

Numerosos e importantes resultados sobre la teoría de funciones de dos variables complejas son debidos a Lelong quien ha dedicado su tesis y varias notas y memorias a esta cuestión. Poniendo la función holomorfa $f(x, y)$ bajo la forma de Hartogs $f(x, y) = \sum A_n(x) (y - y_0)^n$, donde los coeficientes $A_n(x)$ son funciones holomorfas de x , introduce la serie de funciones sub-armónicas

$$U_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)} \log |A_n(x)|$$

donde $\varphi(n)$ se elige de manera conveniente para que estas funciones sean limitadas, luego el límite superior de esas funciones para n infinito y una función regularizante. Después de haber encontrado de nuevo los teoremas de Hartogs referentes al dominio de convergencia uniforme de la serie considerada, estudia el conjunto de valores de x para los cuales la función $f(x, y)$ es una función entera de y , y luego las singularidades a distancia finita de $f(x, y)$. Demuestra que su método se adapta al estudio de las propiedades comunes de las clases de funciones enteras que dependen analíticamente de un parámetro x . Considera los valores de x para los cuales $f(x, y)$, entera en y , no tiene ceros y establece que el conjunto de esos valores es numerable cuando el orden máximo de $f(x, y)$ con relación a y es finito. Por otra parte, prosiguiendo sus investigaciones sobre los dominios de holomorfía, introduce y emplea la noción de funciones plurisubarmónicas.

REFERENCIAS: H. Cartan A1, Delange D1, Lelong C8 A1 B1, Wachs J1.

V. *Funciones armónicas y potencial*. — Las investigaciones de Lelong de las cuales acabamos de hablar se relacionan en muchos puntos a la teoría del potencial en la cual las funciones sub-armónicas juegan un papel preeminente.

Brelot, a quien la teoría del potencial debe importantes progresos, se ha propuesto, siguiendo a Perron y Wiener, tratar los problemas del tipo de Dirichlet basándose sistemáticamente sobre la noción de funciones sub-armónicas y sobre las

propiedades de las medidas esféricas. A este efecto introduce la noción de conjunto polar: un conjunto E se dice polar si existe una función, llamada asociada de E , sub-armónica en todas partes y valiendo $-\infty$ sobre el conjunto E . Esto le permite estudiar los puntos singulares. En la teoría del potencial estudia los puntos irregulares y las transformaciones continuas introduciendo la noción, a él debida, de conjunto deshilachado (*effilé*). Un conjunto E se dice *deshilachado* en el punto O si éste es punto aislado del conjunto suma (o reunión) de E y O , y, si no, si existe en el entorno de O una función sub-armónica $u(M)$ tal que $u(O)$ sea superior al límite máximo de $u(M)$, cuando M , distinto de O , tiende hacia O permaneciendo en E . Para que un punto O , punto frontera del conjunto cerrado E sea irregular, es necesario y suficiente que E sea deshilachado en O .

Este género de problemas de la teoría del potencial ha sido también considerado por Vasilescu en diversas notas y memorias; en ellas introduce la noción de capacidad de un conjunto limitado cualquiera y generaliza los criterios de regularidad debidos a De Le Vallée Poussin y a Wiener.

En estas cuestiones H. Cartan ha aportado algunas proposiciones fundamentales y nuevos ejemplos de la tendencia de su espíritu generalizador. En una memoria sobre los fundamentos de la teoría del potencial demuestra que el espacio euclidiano no juega ningún papel esencial, que el papel de primer plano lo tiene una fórmula de composición de Riesz y transporta la teoría en el espacio de un grupo topológico que supone localmente compacto con el fin de poder definir en él una operación de composición. Su objeto es principalmente dar demostraciones lo más puras posibles, sin utilizar ninguna contingencia secundaria o fortuita. Ulteriormente ha construido la teoría en los espacios homogéneos.

H. Cartan ha estudiado por otra parte la capacidad exterior de los conjuntos y ha demostrado que para que un conjunto sea polar es necesario y suficiente que su capacidad exterior sea nula; ha aplicado esta noción al estudio de las series convergentes de potenciales. En particular ha completado un teorema de Brelot según el cual si una sucesión de distribuciones de masas positivas μ_n , cada una de masa total limitada, converge hacia una distribución μ , el potencial creado por las masas μ es el límite

inferior de los potenciales de las masas μ_n , salvo sobre un conjunto de capacidad exterior nula. Estos resultados han permitido a diversos autores, Delange, Lelong, Brelot, perfeccionar algunos de sus enunciados; Deny ha deducido un teorema de convergencia: de toda sucesión de distribuciones cualesquiera μ_n convergente hacia μ , se puede extraer una sucesión parcial cuyos potenciales converjan hacia el potencial de masas μ salvo sobre un conjunto de medida nula en el sentido de Lebesgue.

Choquet y Deny han extendido la propiedad de la media de una función armónica sobre un círculo o sobre una esfera a conjuntos más generales y a las funciones poli-armónicas; han demostrado especialmente que si una función de dos variables es armónica en un polígono regular y sobre su contorno, la media de esta función sobre el contorno es igual a la media sobre el conjunto de radios que unen el centro del polígono con los vértices. Siguiendo una indicación de H. Cartan deducen de sus investigaciones hermosos teoremas sobre la aproximación de funciones de una o dos variables por medio de funciones que se deducan mediante ciertas semejanzas de una función dada. Este resultado ha sido extendido por Schwartz al caso de funciones de n variables.

En el caso del espacio ordinario de tres dimensiones, Kravtchenko ha considerado en detalle, siguiendo los métodos clásicos, las demostraciones de la continuidad de las derivadas del potencial newtoniano, que se tratan habitualmente haciendo sobre la densidad de las masas atractivas hipótesis de continuidad del tipo de Holder; y ha reemplazado esta hipótesis por otras más amplias, suponiendo que las superficies límites satisfacen a condiciones convenientes cuando se trata de masas repartidas sobre estas superficies.

Teissier du Cros ha demostrado que las funciones armónicas o sub-armónicas en un círculo C están caracterizadas por tres propiedades: aditividad, conservación por representación conforme sobre C de todo círculo c interior a C , extremo superior en c alcanzado sobre la circunferencia c .

REFERENCIAS: Brelot B2 J1, H. Cartan C2 B1 S1, Choquet y Deny S1, Deny C1, Kravtchenko C1 J1, Schwartz S1, Teissier du Cros C1, Vasilescu C3 B1 A1.

VI. *Ecuaciones diferenciales.* — Las ecuaciones diferenciales han dado lugar a trabajos poco numerosos.

Chazy que se ha ocupado de la reducción del sistema de ecuaciones del problema de los tres cuerpos, se ha dirigido también hacia el estudio de las soluciones de la ecuación de las líneas de curvatura de una superficie en el entorno de un umbílico y ha encontrado interesantes complementos a los trabajos de Picard y Darboux. La señora Dubois Violette ha generalizado resultados de Garnier y Dulac sobre las singularidades de ciertas ecuaciones de primer orden. Garnier, volviendo a sus anteriores investigaciones sobre las superficies mínimas que pasan por un cuadrilátero dado, ha demostrado la unicidad de la solución suministrada por su método. Ha encontrado entre las funciones contiguas de la clase sexta de Painlevé, relaciones un poco análogas a las que existen entre las funciones contiguas de Gauss.

Ky Fan ha dado una teoría de existencia de las soluciones de ciertas ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden. M. Segond ha hecho algunas observaciones sobre el intervalo de convergencia del método de Cauchy-Lipschitz.

En su importante tesis, Guerard des Lauriers estudia los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden que admiten un grupo continuo de transformaciones. Se trata de la extensión de los resultados de Lie relativos a una sola ecuación, pero el autor se coloca en un punto de vista más analítico y examina más particularmente el sistema de ecuaciones de las geodésicas de un espacio. Para esto debe abandonar el método de Lie que sería demasiado complicado para permitir determinar el grupo. Se ve que esta investigación difícil pertenece más bien al campo de la teoría de grupos, pero convenía sin embargo señalarla en este lugar.

Otro trabajo importante desde el punto de vista de las aplicaciones, es el realizado por Haag, quien hace un estudio asintótico, que llega hasta el cálculo numérico, de las oscilaciones de relajación. Desde el punto de vista matemático se trata de las soluciones de la ecuación de las oscilaciones auto-entretidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f(x)}{\varepsilon} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

donde $f(x)$ es una función continua en general y ε un número muy pequeño. Haag aporta a esta búsqueda sus altas calidades de analista y el talento de calculador que ha demostrado repetidas veces.

REFERENCIAS: Chazy A1 C1, Sra. Dubois Violette C1, Fan C1 B1 S1, Garnier C2, Guerard des Lauriers J1, Haag A2, Segond J1.

VII. *Ecuaciones en derivadas parciales.* — Elegimos este lugar para rendir homenaje a la memoria de Giraud y Gosse cuyos trabajos han enriquecido este dominio de las matemáticas y que han desaparecido durante los años de ocupación. Giraud, que tuvo durante toda su vida que luchar contra la enfermedad, deja una obra matemática considerable y de primer plano, consagrada principalmente a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales lineales de tipo elíptico y a las ecuaciones integrales. Recordemos que, durante los meses de 1940 que precedieron a la invasión, Giraud había aportado un concurso activo al gabinete de cálculo balístico del Instituto Henry Poincaré. Gosse, cuya producción científica se había iniciado con una tesis sobre las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden integrables por el método de Darboux, aportó un concurso completo a la resistencia y fué cobardemente asesinado por los agentes del enemigo.

Vessiot ha proseguido sus investigaciones sobre las ecuaciones de primer orden en el espacio ordinario de $n+1$ dimensiones, consideradas como ecuaciones de contacto; estudia especialmente las ecuaciones que Lie llamaba semi-lineales, es decir que admiten integrales de menos de n dimensiones. Edifica un método que le permite reconocer si una ecuación es semi-lineal y da ejemplos en que la integración es completamente explicada. Vessiot ha finalizado por otra parte, su trabajo sobre las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en dos variables independientes, integrables por el método de Darboux. Ellas admiten dos sistemas de características distintas las cuales poseen dos invariantes por lo menos del primero o segundo orden. Determina aquellas de estas ecuaciones que se integran explícitamente, indicando doce tipos reducidos.

Fortet se ha ocupado de las ecuaciones lineales de segundo orden en dos variables del tipo parabólico que se reducen a la forma simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + b(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

y ha demostrado la existencia de soluciones que satisfacen a las condiciones en los límites del tipo de Cauchy, dadas sobre una curva $x=g(t)$ cuyos puntos son regulares; la condición de regularidad está dada bajo una forma que hace intervenir una probabilidad de absorción.

Mendes ha considerado los sistemas de ecuaciones de primer orden en involución cuando el sistema no es normalmente resoluble con relación a las derivadas parciales, y también una ecuación lineal de segundo orden de tres variables cuyo cono característico se descompone en dos planos imaginarios conjugados. Argence, Haag, Humbert han estudiado las soluciones de ecuaciones particulares, Teissier du Cros ha dado algunas propiedades de las funciones bi-armónicas. Con el fin de extender el método de los espectros a la mecánica ondulatoria de De Donder, Riben ha sido conducido a generalizar el método de Schwarz y el principio de Picard, principio que por otra parte ha sido extendido por Gevrey a otros tipos de ecuaciones. Señalemos finalmente un artículo de Bouligand en el que demuestra la existencia de soluciones de la ecuación de primer orden que no admiten derivadas segundas.

REFERENCIAS: Argence C1, Biben C4, Bouligand R1, Fortet C1, Gercy C1, Haag C1, Humbert C1, Mendes C2, Teissier du Cros C2, Vessiot A1 J1.

VIII. *Ecuaciones integrales.* — En sus últimas notas y publicaciones Giraud ha extendido la teoría clásica de la ecuación de Fredholm al caso en que el núcleo es función holomorfa de un parámetro (en lugar de ser lineal y homogénea como en el caso clásico), para lo cual ha debido generalizar la noción de núcleo resolvente. Obtiene resultados análogos a los de la teoría clásica. En un orden de ideas análogo, pero distinto, Pérès ha llamado la atención sobre las ecuaciones cuyo núcleo depende de ciertos funcionales.

Gevrey ha proseguido sus investigaciones. Ha tratado para las ecuaciones lineales en derivadas parciales y más generalmente para las ecuaciones integro-diferenciales de tipo elíptico en dos variables, el problema de la determinación de una solu-

ción cuya derivada en cada punto de un contorno, tomada en una dirección dada, tenga un valor dado. Es conducido así a determinar, para una ecuación de Fredholm, ciertas funciones que juegan el papel de densidades de los potenciales. Generaliza además al caso de varias ecuaciones.

Una cuestión de mecánica de fluidos ha conducido a Godefroy a una ecuación integro-diferencial para la cual demuestra la existencia de una solución.

En un doble fascículo del Memorial des Sciences Mathématiques, Janet ha dado una interesante exposición de la teoría de ecuaciones integrales del tipo de Fredholm colocándose principalmente en el punto de vista de Goursat y de Lebesgue e insistiendo particularmente sobre el caso de núcleos simétricos. Trata extensamente las aplicaciones a la física-matemática y a las ecuaciones de Sturm y Liouville.

El método de cálculo de Heaviside y Carson, impropriamente llamado cálculo simbólico, atrajo la atención de varios matemáticos. Desde 1926 P. Levy había demostrado la relación entre este método y el cálculo de composición de Volterra en la teoría de ecuaciones integrales, así como el parentesco entre ciertos enunciados de Carson y las igualdades de la transformación de Laplace-Borel utilizadas en la sumación exponencial de series divergentes. Una exposición matemática muy completa del método ha sido dada por Ky Fan. A continuación de una nota de Parodi sobre la aplicación del cálculo de Heaviside-Carson a la resolución de ciertas ecuaciones integrales e integro-diferenciales, Pérès ha vuelto sobre la comparación de este cálculo y el cálculo de composición de Volterra, y teniendo en cuenta el trabajo de P. Levy ha hecho una puesta al día de la cuestión. Su alumno Gilly ha emprendido un estudio más profundo de la misma. Un poco apartadas del debate, dos notas de Bayard abundan en el mismo sentido.

REFERENCIAS: Bayard C2, Fan R1, Gevrey C3, Gilly C2, Giraud C2 B3, Godefroy C1, Janet M1, Parodi C1, Peres C2.

IX. *Trabajos y obras diversas.* — La transformación de Heaviside-Carson se relaciona igualmente con la fórmula de inversión llamada de Fourier y debida a Riemann y Mellin. Esta es la razón por la cual no he puesto bajo la rúbrica precedente

diversos trabajos cuyos autores, Colombo, Humbert, Humbert y Poli, se preocupan sobre todo de definir y estudiar las funciones transformadas de las funciones simples, lo que les conduce a introducir trascendentes de las cuales algunas son nuevas.

Humbert y Lachlan han establecido un formulario muy extenso que será útil tanto a los matemáticos como a los físicos y aún a los profesores en su búsqueda de ejercicios.

Haag ha dado una nota sobre el cálculo de ciertas integrales ligadas a la función euleriana; Thomas ha dado una nota sobre una fórmula de cuadratura mecánica; Challier extiende la fórmula de Riemann-Green sobre la transformación de integrales; Roure estudia ciertas funciones hiperabelianas. P. Levy precisa las relaciones entre las funciones cuyo jacobiano es idénticamente nulo.

Señalemos todavía una nota, de naturaleza pedagógica, de Vessiot sobre la variación de funciones, exposiciones de Bouligand sobre los límites generalizados y de Dieudonné sobre la separación de conjuntos convexos. Es necesario además hacer un lugar aparte para un bello artículo de H. Cartan sobre el fundamento lógico de las matemáticas en el cual todos aquellos que tienen fe en el porvenir de la investigación matemática leerán con placer que el grupo de Bourbaki condena lógica y axiomáticamente la escuela del tercio no excluido.

Indiquemos finalmente la publicación del primer volumen de mi curso de análisis y de un libro de Bouligand y Dufresnoy en el que exponen la primera parte del curso de la clase de matemáticas superiores.

REFERENCIAS: Bouligand R1 C1, Bouligand-Dufresnoy C1, H. Cartan R1, Challier C1, Colombo C1 B1, Dieudonné R1, Haag B1, Humbert B1 C1, M1 (Mathematica 1), Humbert y Poli B1, P. Levy E1, Roure C1, Thomas C1, Valiron O1, Vessiot E1.

SOBRE LA LONGITUD DE UNA CURVA DEL ESPACIO COMO VALOR MEDIO DE LAS LONGITUDES DE SUS PROYECCIONES ORTOGONALES

POR

L. A. SANTALÓ

Sea C una curva del espacio de longitud L . Si L_ω es la longitud de la proyección de C sobre un plano normal a la dirección ω , en el n. 1 demostramos que la longitud L se expresa en función del *valor medio* $\bar{L}_\omega$ de las longitudes L_ω de las proyecciones respecto todas las direcciones, por la relación simple

$$L = \frac{4}{\pi} \bar{L}_\omega. \quad (1)$$

Para aplicar prácticamente esta fórmula se puede, por ejemplo, proyectar C sobre tres planos ortogonales y tomar como valor aproximado de $\bar{L}_\omega$, la media aritmética de las longitudes de las tres proyecciones obtenidas. Interesa entonces conocer los límites del error que se comete al aplicar la fórmula (1) para obtener L . Esto es lo que hacemos en el n. 2.

En lugar de tomar la media aritmética de las proyecciones según tres direcciones, se puede, mas generalmente, proyectar C según un mayor número de direcciones, por ejemplo, según las doce direcciones normales a las caras de un dodecaedro regular, o bien según las veinte de un icosaedro regular y tomar en cada caso la media aritmética de las longitudes de las proyecciones como valor aproximado de $\bar{L}_\omega$ para aplicar (1). También en estos casos hay que acotar el error posible. Para estos casos, estudiados en el n. 3, aplicaremos los resultados obtenidos

por P. A. P. MORAN al tratar el problema análogo, no para curvas, sino para cuerpos convexos ⁽¹⁾.

1. Consideremos un segmento de recta de longitud u . Para determinar una dirección en el espacio, tomaremos el punto ω en que el radio de una esfera fija E de radio unidad, corta a la superficie de la misma. Siendo ϑ, φ las coordenadas esféricas del punto ω (colatitud y longitud respectivamente) el elemento de área correspondiente al mismo lo expresaremos abreviamente por $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$.

Suponiendo el segmento dado coincidente con la dirección origen de los ángulos ϑ , la longitud de su proyección sobre un plano normal a la dirección ω vale

$$u_{\omega} = u \sin \vartheta$$

y por tanto, multiplicando por $d\omega$ ambos miembros e integrando a toda la esfera unidad E resulta

$$\int_E u_{\omega} d\omega = \int_E u \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi = u \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \pi^2 u. \quad (2)$$

El valor medio de la proyección u_{ω} vale por consiguiente,

$$\bar{u}_{\omega} = \frac{\int_E u_{\omega} d\omega}{\int_E d\omega} = \frac{\pi}{4} u \quad (3)$$

que nos prueba que la relación (1) vale para segmentos.

Para una línea poligonal, aplicando (2) a cada uno de sus lados y sumando, resulta que la misma (3), y por tanto (1), vale también para líneas poligonales. Para una curva rectificable cualquiera, basta considerarla como límite de las poligonales inscritas y observar que el límite de las longitudes de las poligonales proyectadas es igual a la longitud de la proyección

⁽¹⁾ P. A. P. MORAN, *Measuring the surface area of a convex body*, The Annals of Mathematics, vol. 45, 1944, págs. 793-799.

de la curva, para toda dirección de proyección, para tener demostrada la validez general de (1).

Consecuencia. Puesto que el valor medio de una función está siempre comprendido entre los valores máximo y mínimo de la misma, como corolario de la fórmula (3) resulta:

Dada una curva fija C de longitud L, siempre existen direcciones ω del espacio, tales que la longitud L_ω de la proyección de C sobre un plano normal a ω cumpla la desigualdad

$$L_\omega \geq \frac{\pi}{4} L$$

y otras direcciones ω_1 para las cuales se verifica

$$L_{\omega_1} \leq \frac{\pi}{4} L.$$

2. Consideremos ahora un segmento de recta de longitud u y tres planos ortogonales entre sí; por ejemplo los tres planos $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ de un sistema de coordenadas x_1 , x_2 , x_3 .

Llamando u_{12} , u_{13} , u_{23} a las longitudes de las proyecciones del segmento dado sobre los tres planos coordenados (de manera que u_{ij} es la longitud de la proyección sobre el plano x_i , x_j), la fórmula (1) nos dice que un valor aproximado de u será

$$u^* = \frac{4}{\pi} \frac{u_{12} + u_{13} + u_{23}}{3}. \quad (4)$$

Queremos ver entre que límites puede estar contenida la razón u^*/u entre la longitud así calculada y la verdadera.

Llamando u_i a la proyección del segmento sobre el eje x_i , es

$$u_{12}^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad u_{13}^2 = u_1^2 + u_3^2, \quad u_{23}^2 = u_2^2 + u_3^2 \quad (5)$$

y además

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \quad (6)$$

Por tanto, sumando las igualdades (5), se tiene,

$$u_{12}^2 + u_{13}^2 + u_{23}^2 = 2u^2. \quad (7)$$

Debemos hallar los valores máximo y mínimo de la suma $u_{12} + u_{13} + u_{23}$ sabiendo que los tres números u_{ij} son positivos, iguales o menores que u y cumplen la relación (7).

La acotación superior se obtiene inmediatamente recordando que entre tres números positivos ξ, η, ζ cualesquiera existe siempre la relación

$$(\xi + \eta + \zeta)^2 \leq 3(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

donde el signo de igualdad vale únicamente para el caso de ser $\xi = \eta = \zeta$ ⁽²⁾.

En nuestro caso, poniendo $\xi = u_{12}$, $\eta = u_{13}$, $\zeta = u_{23}$ y aplicando (7), será,

$$u_{12} + u_{13} + u_{23} \leq \sqrt{6} u. \quad (8)$$

Para encontrar la acotación inferior, observemos que para cualquier valor fijo de u_{23} , según (7), es

$$(u_{12} + u_{13})^2 = 2u^2 - u_{23}^2 + 2u_{12}u_{13}$$

y por tanto, siendo los u_{ij} positivos, la suma $u_{12} + u_{13}$ es mínima cuando uno de los sumandos se anula. Suponiendo, por ejemplo, $u_{13} = 0$, entonces la igualdad $u_{12}^2 + u_{23}^2 = 2u^2$ nos dice que debe ser $u_{12} = u_{23} = u$. Se tiene por tanto

$$u_{12} + u_{13} + u_{23} \geq 2u. \quad (9)$$

De (4), (8) y (9) se deduce

$$\frac{8}{3\pi} \leq \frac{u^*}{u} \leq \frac{4\sqrt{6}}{3\pi}$$

o sea

$$0,848 \dots \leq \frac{u^*}{u} \leq 1,039 \dots \quad (10)$$

⁽²⁾ Ver por ej. la nota L. A. SANTALÓ, *Algunas desigualdades entre los elementos de un triángulo*, Mathematicae Notae, vol. III, 1943, pág. 65.

Estas acotaciones no se pueden mejorar, pues el signo de igualdad se obtiene, en la acotación inferior, para un segmento paralelo a uno de los ejes coordenados, y en la superior para un segmento paralelo a la recta $x_1 = x_2, x_1 = x_3$.

Si se trata de una curva C cuyas proyecciones sobre los tres planos coordenados no tengan arcos múltiples, o sea, arcos en los cuales se proyecten varios arcos de la curva, considerando su longitud como límite de la suma de las longitudes de los lados de poligonales inscritas, resulta que la acotación (10) vale también para C .

3. Consideremos ahora el mismo segmento de longitud u y supongamos que lo proyectamos sobre las doce caras de un dodecaedro regular. Llamando $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{12}$ a las longitudes de las doce proyecciones, aplicando (1) se obtiene el siguiente valor aproximado de u

$$u^* = \frac{4}{\pi} \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} u_i. \quad (11)$$

Queremos ver también en este caso cuales son los valores extremos del cociente u^*/u entre la longitud así calculada y la verdadera.

Un método directo como el seguido en el caso anterior, no parece fácil en este caso. Vamos a seguir un camino indirecto, que si bien no da acotaciones precisas (pues los valores que obtendremos pueden seguramente mejorarse) sirve también para acotar el error posible de cometer.

Debemos recordar el siguiente resultado de P. A. P. MORAN⁽¹⁾. Sea K una superficie convexa cerrada de área F . Proyectando K ortogonalmente sobre las doce caras de un dodecaedro regular y llamando $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{12}$ a las áreas de las proyecciones obtenidas, se puede tomar como valor aproximado de F la expresión

$$F^* = \frac{4}{12} \sum_{i=1}^{12} F_i, \quad (12)$$

teniendo lugar las acotaciones

$$0,918 \dots \leq \frac{F^*}{F} \leq 1,079 \dots \quad (13)$$

Para aplicar este resultado al caso actual de las curvas en lugar de las superficies convexas, consideremos el segmento de longitud u dado envuelto por un cilindro de revolución de radio ε , cuyo eje sea el mismo segmento, y el cual termine en los dos extremos por semiesferas del mismo radio ε . Tendremos así un cuerpo convexo K cuya superficie tiene el área

$$F = 2 \pi \varepsilon u + 4 \pi \varepsilon^2.$$

Al proyectar K sobre las caras del dodecaedro, entre el área F_i y la longitud u_i de las proyecciones de K y del segmento dado respectivamente, se verifica para cada proyección

$$F_i = 2 \varepsilon u_i + \pi \varepsilon^2$$

Por tanto, según (12),

$$F^* = \frac{2}{3} \varepsilon \sum_1^{12} u_i + 4 \pi \varepsilon^2.$$

Aplicando entonces (13) y pasando al límite para ε tendiendo a cero, se tiene

$$0,918 \dots \leq \frac{\sum_1^{12} u_i}{3\pi u} \leq 1,079 \dots$$

y recordando (11) se tiene finalmente que entre las magnitudes u^* y u vale la misma acotación (13) correspondiente a las superficies de los cuerpos convexas, o sea,

$$0,918 \dots \leq \frac{u^*}{u} \leq 1,079 \dots \quad (14)$$

La única diferencia estriba en que en (13) las acotaciones no pueden mejorarse, puesto que hay superficies convexas particulares para las cuales, en determinadas posiciones, valen los signos de igualdad, mientras que en (14) las acotaciones deben poder mejorarse, puesto que los signos de igualdad no son alcanzados.

Como siempre, si en lugar de un segmento se tiene una curva C , tal que sus proyecciones sobre las doce caras del dodecaedro regular carezcan de arcos múltiples, considerándola como límite de poligonales inscritas, resulta que las acotaciones (14) valen también para ella.

Exactamente el mismo razonamiento sirve para el caso de considerar la media aritmética de las longitudes de las proyecciones de una curva C de longitud L sobre las veinte caras de un icosaedro regular; en este caso, Moran⁽¹⁾ ha probado que para las superficies de los cuerpos convexos vale la acotación

$$0,957 \dots \leq \frac{F^*}{F} \leq 1,048 \dots \quad (15)$$

siendo

$$F^* = \frac{4}{20} \sum_1^{20} F_i.$$

Para las curvas, llamando u_i ($i=1, 2, 3, \dots, 20$) a las longitudes de las proyecciones sobre las 20 caras y tomando como valor aproximado de la longitud u de la curva, la expresión,

$$u^* = \frac{4}{\pi} \frac{1}{20} \sum_1^{20} u_i.$$

resulta válida la misma acotación (15), o sea,

$$0,957 \dots \leq \frac{u^*}{u} \leq 1,048 \dots \quad (16)$$

Como siempre, esta acotación (16) supone que las proyecciones de la curva sobre las caras del icosaedro carecen de arcos múltiples.

4. Las acotaciones (14) y (16), aun siendo bastante buenas, ya hemos dicho que deben poder mejorarse.

Por simples razones de simetría parece evidente, que tanto en el caso del dodecaedro como en el del icosaedro, los valores máximo y mínimo del cociente u^*/u para el caso de un

segmento, deben corresponder a las posiciones del mismo en que, supuesto colocado con un extremo en el centro del poliedro es normal a una cara, o es normal a una arista o tiene la dirección que pasa por uno de los vértices.

Como en estas posiciones es fácil calcular directamente los valores correspondientes de u^* , se tienen acotaciones que, si bien no quedan demostradas con todo rigor, parece muy probable que sean efectivamente las verdaderas.

Para el caso del dodecaedro se calcula que el valor de u^* para un segmento colocado con un extremo en el centro del poliedro y con la dirección normal a una cara, vale

$$u^* = u \cdot 0,949 \dots$$

y para la dirección de una diagonal que une dos vértices opuestos, vale

$$u^* = u \cdot 1,011 \dots$$

Para la dirección normal a una arista el valor de u^* está comprendido entre los dos anteriores. Por tanto, la verdadera acotación para segmentos y por tanto para curvas rectificables cualesquiera, cuyas proyecciones carezcan de arcos múltiples, en el caso del dodecaedro parece que debe ser

$$0,949 \dots \leq \frac{u^*}{u} \leq 1,011 \dots \quad (17)$$

En el caso del icosaedro, colocando el segmento con un extremo en el centro y en la dirección normal a una cara, es

$$u^* = u \cdot 0,975 \dots$$

y en la dirección de uno de los vértices es

$$u^* = u \cdot 1,011 \dots$$

Este valor es el mismo que se obtiene para el dodecaedro, lo cual es natural que sea así, puesto que los ángulos que forma un radio del icosaedro con sus caras son iguales a los que forma un radio del dodecaedro con las suyas.

En la dirección normal a una arista, el valor de u^* está comprendido entre estos dos. Por tanto, para segmentos y en consecuencia para curvas rectificables cualesquiera cuyas proyecciones sobre las caras del icosaedro carezcan de arcos múltiples, la verdadera acotación en el caso del icosaedro parece que debe ser

$$0,975 \dots \leq \frac{u^*}{u} \leq 1,011 \dots \quad (18)$$

Las suposiciones anteriores tienen en su apoyo el hecho de que es fácil calcular que los primeras derivadas parciales de u^* respecto los cosenos directores del segmento, son efectivamente nulas en las posiciones consideradas. Faltaría, sin embargo, probar que estas anulaciones corresponden efectivamente a máximos y mínimos absolutos.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

RESULTADO DEL CONCURSO ENTRE SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL AÑO QUINTO (1945)

En aplicación de lo dispuesto en el art. 4º de la Ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemática *Mathematicæ Notæ*, el director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta el 1º de julio de 1946, haciendo al señor Delegado Interventor las propuestas correspondientes, que fueron aprobadas con Resolución fecha 25 de octubre de 1946, Exp. Nº 1183 - I - 1946 en la forma siguiente:

1º Adjudicar al estudiante Adolfo Daghetto del 6º año de la Escuela Industrial Anexa el premio correspondiente al año 1945.

2º Declarar desierto el concurso entre solucionistas no pertenecientes a la Facultad.

3º Encargar al Director del Instituto de Matemática la elección de uno o más libros de matemática o de física para entregarlos como premio al Sr. Adolfo Daghetto.

UNA EJERCITACION SOBRE INTEGRALES ELIPTICAS

POR

BEPPPO LEVI

En la Nota que sigue vamos a tomar oportunidad de la resolución del problema N^o. 90 (Math. Notae, Año IV, p. 249) para desarrollar algunos interesantes detalles de cálculo y particularmente llamar la atención sobre métodos debidos a Legendre, que aún vamos a exponer con cierta generalidad y quizás con algún aporte en el aspecto sistemático⁽¹⁾.

El enunciado del problema era el siguiente:

Determinar el volumen de penetración de un cilindro elíptico y de un elipsoide cuyo centro está sobre el eje del cilindro. El cilindro se supone definido por su sección recta y el elipsoide por sus tres ejes⁽²⁾.

Para la resolución vamos a considerar primero una *parte geométrica*, que tiene por fin de simplificar notablemente la parte formal de los cálculos analíticos sucesivos.

1. *Parte geométrica del problema.* — Vamos a mostrar como, utilizando oportunamente los métodos de la geometría analítica, puede el cálculo propuesto reducirse siempre al caso en que el elipsoide propuesto sea una esfera, la cual se podrá suponer sin más de radio 1. Si en efecto el elipsoide dado tuviera semiejes de longitudes a, b, c , sometiendo el espacio a una

(¹) Estos métodos se refieren particularmente al cálculo de las integrales de tercera especie y parecen un poco olvidados en los tratados modernos que más bien se inspiran a la teoría de las funciones analíticas de Jacobi y de Weierstrass.

(²) Una solución parcial del problema fué enviada por el señor Adolfo Daghetto, alumno de la Escuela Industrial Anexa.

transformación afín que reduzca las longitudes sobre estos ejes en las razones respectivas $1:a$, $1:b$, $1:c$ el elipsoide se transforma en la esfera y el cilindro en otro cilindro elíptico, del cual únicamente necesita determinar las características, mientras los volúmenes se reducen en la razón $1:abc$.

A continuación vamos a dar las fórmulas para esta transformación acudiendo a algunos elementos de cálculo vectorial y de cálculo de matrices⁽³⁾.

Indiquemos momentáneamente con $\xi \eta \zeta$ un sistema de ejes ortogonales de referencia dirigidos según los ejes del elipsoide. Para definir el cilindro supondremos trazada por el centro del elipsoide, origen de coordenadas, una sección normal del mismo, y supondremos determinada la elipse sección por medio de un par de semidiámetros conjugados, representados por los vectores

$$v_1 = (\lambda_1 \mu_1 v_1), \quad v_2 = (\lambda_2 \mu_2 v_2)$$

La afinidad señalada en el n. 1 transforma esa elipse en otra de la cual serán luego semidiámetros conjugados los de los vectores

$$v'_1 = \left(\frac{\lambda_1}{a} \frac{\mu_1}{b} \frac{v_1}{c} \right), \quad v'_2 = \left(\frac{\lambda_2}{a} \frac{\mu_2}{b} \frac{v_2}{c} \right);$$

nos será útil escribir sin más el área del paralelogramo de estos dos vectores

$$A' = \sqrt{\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\lambda_1}{a} & \frac{\mu_1}{b} & \frac{v_1}{c} \\ \frac{\lambda_2}{a} & \frac{\mu_2}{b} & \frac{v_2}{c} \end{array} \right\|^2}.$$

El eje del cilindro, por ser ortogonal por hipótesis a los vectores v_1, v_2 , tiene la dirección del producto vectorial de estos,

(3) El lector deberá únicamente recordar que un producto de matrices rectangulares equivale a una suma de productos de determinantes homólogos extraídos de las mismas.

cuyas coordenadas serán representadas por los coeficientes de ξ, η, ζ en el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix};$$

su transformado por la afinidad, el cual en general no será más ortogonal a v'_1, v'_2 , tendrá la dirección del vector cuyas coordenadas son los coeficientes de ξ, η, ζ en el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} \xi:a & \eta:b & \zeta:c \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}$$

o, lo que es lo mismo, la dirección del vector cuyas coordenadas son los complementos algebraicos de $\xi \eta \zeta$ en el determinante

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

Nos conviene ahora proyectar la cónica obtenida arriba sobre el plano normal a esta dirección; se obtendrá una nueva elipse de la cual las proyecciones de los vectores v'_1, v'_2 representaran todavía un par de semidiámetros conjugados. Se calcula fácilmente que, si

$$v = \left(\frac{\lambda}{a} \frac{\mu}{b} \frac{\nu}{c} \right)$$

es un vector cualquiera sobre el plano de la cónica, su proyección tendrá por coordenadas los coeficientes de $\xi \eta \zeta$ respectivamente en la forma lineal

$$\left(\frac{\lambda}{a}\xi + \frac{\mu}{b}\eta + \frac{\nu}{c}\zeta\right) - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a} & \frac{\mu}{b} & \frac{\nu}{c} \\ a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix}}{\left\| \begin{vmatrix} a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix} \right\|^2}; \quad (2.2)$$

basta notar que, si se indica con s el vector arriba definido por el determinante (2.1), el vector proyección de v se expresa por

$$v - \rho s$$

con la condición que

$$(v - \rho s) \times s = 0, \quad \rho = v \times s / s^2$$

donde el signo $\times$ significa producto interior.

Se tiene en efecto

$$v \times s = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a} & \frac{\mu}{b} & \frac{\nu}{c} \\ a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix}, \quad s^2 = \left\| \begin{vmatrix} a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix} \right\|^2.$$

Bastará luego, para obtener las proyecciones v''_1, v''_2 de v'_1, v'_2 sustituir en (2.2) respectivamente $\lambda_1 \mu_1 \nu_1, \lambda_2 \mu_2 \nu_2$ en lugar de $\lambda \mu \nu$.

El coseno del ángulo del vector normal al plano $v'_1 v'_2$ con el vector definido por (2.1) es

$$\frac{\left\| \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{a} & \frac{\mu_1}{b} & \frac{\nu_1}{c} \\ \frac{\lambda_2}{a} & \frac{\mu_2}{b} & \frac{\nu_2}{c} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{\left\| \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{a} & \frac{\mu_1}{b} & \frac{\nu_1}{c} \\ \frac{\lambda_2}{a} & \frac{\mu_2}{b} & \frac{\nu_2}{c} \end{vmatrix} \right\|^2 \left\| \begin{vmatrix} a\lambda_1 & b\mu_1 & c\nu_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & c\nu_2 \end{vmatrix} \right\|^2}};$$

se sigue que el área A'' del paralelogramo de los vectores v''_1 , v''_2 , que se obtiene multiplicando A' por este coseno, será

$$A'' = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\lambda_1}{a} & \frac{\mu_1}{b} & \frac{v_1}{c} \\ \frac{\lambda_2}{a} & \frac{\mu_2}{b} & \frac{v_2}{c} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} a\lambda_1 & b\mu_1 & cv_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & cv_2 \end{array} \right\|}{\sqrt{\left\| \begin{array}{ccc} a\lambda_1 & b\mu_1 & cv_1 \\ a\lambda_2 & b\mu_2 & cv_2 \end{array} \right\|^2}}$$

Recordemos todavía que en una elipse es constante la suma de los cuadrados de los semidiámetros conjugados y también el área del paralelogramo comprendido entre ellos; estamos luego en condición de calcular los semiejes de la cónica sección normal del cilindro transformado, siendo sus cuadrados las dos raíces de la ecuación

$$X^2 - (v_1''^2 + v_2''^2) X + A''^2 = 0.$$

3. *Determinación del volumen común a la esfera y el cilindro.*—Podemos ahora volver a la posición asumida en el n. 1, con la precisión más que supondremos definido el cilindro por medio de los dos semiejes de su sección normal. Indicaremos por α, β estos dos semiejes y supondremos

$$\alpha \leq \beta. \quad (3.1)$$

Supondremos fijado un sistema de ejes coordenados ortogonales x y z , de los cuales los ejes x, y serán las rectas de los dos semiejes de la elipse, α y β respectivamente, de manera que la ecuación de la elipse será

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Siendo además el radio de la esfera $= 1$, para resolver el problema de la intersección, nos conviene, desde un principio, distinguir tres casos, según sea

- | | |
|-----|------------------------------|
| 1º. | $\beta \geq \alpha \geq 1$ |
| 2º. | $\beta > 1 > \alpha$ |
| 3º. | $1 \geq \beta \geq \alpha$. |

En el caso 1º. no existe problema, pues la esfera está contenida dentro del cilindro. El caso 3º. es el caso propiamente de la *penetración* del cilindro en la esfera. El caso 2º. es más bien de *intersección* y será conveniente tratarlo como último.

4. — En el caso 3º., cortando el sólido de penetración con un plano paralelo al yz a la distancia del origen $\pm x$ ($x < \alpha$) se obtiene un segmento de círculo de radio $\sqrt{1-x^2}$, comprendido entre las dos cuerdas distantes del centro

$$y = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}},$$

cuya área $s(x)$ se calcula en seguida:

$$s(x) = 2 \left[\beta \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \left(1 - \beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \frac{x^2}{\alpha^2}\right)} + (1 - x^2) \arcsen \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - x^2}{1 - x^2}} \right]. \quad (4.1)$$

El volumen de penetración será

$$V = 2 \int_0^{\alpha} s(x) dx. \quad (4.2)$$

Conviene, como primera operación, eliminar la transcendente $\arcsen$ en el segundo término de (4.1) mediante integración por partes, eligiendo como factor diferencial $(1-x^2) dx$; se ve en seguida que el término integrado resulta nulo en los extremos de integración y por lo tanto se mantiene la expresión (4.2) del volumen sustituyendo, en cambio del segundo término de la expresión (4.1) de $s(x)$:

$$\frac{\beta(1-\alpha^2)}{3\alpha^2} \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2) \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \left(1 - \beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \frac{x^2}{\alpha^2}\right)}}. \quad (4.3)$$

5. — Para discutir la integral (4.2), nos conviene ahora empezar con separar dos casos en los cuales las expresiones bajo raíz se simplifican; es cuando $\beta=1$ o $\beta=\alpha$.

Para $\beta=1$, (4.2), teniendo en cuenta (4.1) y (4.3) se cambia en

$$V_{\beta=1} = 4 \left[\sqrt{1-\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{x}{\alpha} \sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{3\alpha} \int_0^\alpha \frac{x(3-x^2)dx}{(1-x^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \right]$$

Las dos integrales toman en seguida forma del todo elemental poniendo $x^2=\alpha^2 t$

$$\begin{aligned} V_{\beta=1} &= 4 \left[\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \int_0^1 \sqrt{1-t} dt + \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{6} \int_0^1 \frac{(3-\alpha^2 t)dt}{(1-\alpha^2 t)\sqrt{1-t}} \right] \\ &= \frac{8}{3} [\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + \text{arc sen } \alpha]. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Para $\beta=\alpha$ se obtiene análogamente

$$\begin{aligned} V_{\beta=\alpha} &= 4\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2} \left[\int_0^\alpha \sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} d\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{3} \int_0^\alpha \frac{3-x^2}{1-x^2} \frac{\frac{x^2}{\alpha^2} d\frac{x}{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \right] \\ &= 4\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{3} \left[2\alpha^2 \int_0^\alpha \sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} d\frac{x}{\alpha} + (\alpha^2-2) \int_0^\alpha \frac{d\frac{x}{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{d\frac{x}{\alpha}}{\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \right] \end{aligned}$$

Las dos primeras integrales son bien conocidas; poniendo $\frac{x}{\alpha} = \text{sen } \vartheta$ se obtiene en seguida que ellas valen respectivamente

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2};$$

la última, si a la misma sustitución se hace seguir la otra $\vartheta = \operatorname{arctg} t$ se cambia en

$$\alpha^2 \int_0^\infty \frac{dt}{1+(1-\alpha^2)t^2} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{1-\alpha^2} t \Big|_0^\infty = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\pi}{2}.$$

Resumiendo ⁽⁴⁾

$$V_{\beta=\alpha} = \frac{4\pi}{3} [1 - (1 - \alpha^2)^{3/2}].$$

Nótese que si en (5.1) y en (5.2) se pone $\alpha=1$ se obtiene el valor límite del volumen considerado cuando el cilindro tiende al circunscrito a la esfera

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} V_{\beta=1} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} V_{\beta=\alpha} = \frac{4\pi}{3}.$$

6. — En cualquier otro caso ($1 > \beta > \alpha$) la integral (4.2) no se puede efectuar con funciones elementales y, para calcular el volumen de penetración, tendremos que acudir a la teoría de las integrales elípticas. Pongamos por brevedad

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} = k^2, \quad \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} = 1 - k^2 = k'^2 \quad (6.1)$$

$$1 - \frac{x^2}{\alpha^2} = \xi^2, \quad \sqrt{1 - k^2 \xi^2} = \Delta, \quad d \frac{x}{\alpha} = - \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ \operatorname{arc sen} \xi = \vartheta \quad d\vartheta = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (6.2) \quad (5)$$

⁽⁴⁾ Note el lector que en este caso particular el volumen se calcula también fácilmente con los métodos de la geometría elemental.

⁽⁵⁾ Estas sustituciones tienen por fin de aproximarnos a la forma adoptada por Legendre para la representación de las integrales elípticas, de manera que, al atribuir a α, β valores numéricos, puedan utilizarse las tablas correspondientes.

Recordamos que las tablas de integrales elípticas de primera y segunda especie calculadas con 9 decimales fueron publicadas por Legendre en su cé-

La (4.2), teniendo en cuenta (4.1), (4.3), se escribe entonces

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \alpha \beta \sqrt{1-\alpha^2} \left[\int \xi^2 \Delta d\vartheta + \frac{1}{3} \int \frac{(1-\xi^2) \left(\frac{3-\alpha^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) d\vartheta}{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} + \xi^2} \frac{d\vartheta}{\Delta} \right] \\
 &= \frac{4 \alpha \beta \sqrt{1-\alpha^2}}{3} \left[3 \int \xi^2 \Delta d\vartheta + \frac{1}{k^2} \int \Delta d\vartheta \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{k'^2}{k^2} + \frac{2}{\alpha^2} \right) \int \frac{d\vartheta}{\Delta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\alpha^2(1-\alpha^2)} \int \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \xi^2} \frac{d\vartheta}{\Delta} \right] \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

lebre *Traité des fonctions elliptiques* (París, 1825-1828). Reducciones de las mismas se encuentran en varias colecciones de tablas y fórmulas publicadas por distintos autores. Entre éstas muy corrientes son las *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* de Jauke y Emde, publicadas en varias ediciones a partir de 1909, donde los valores están dados con 4 decimales y que son las que nos han servido en el ejemplo final. Solamente tablas parciales para completar o corregir en alguna parte las de Legendre fueron publicadas sucesivamente por otros autores. (Véase una lista en TRICOMI, *Funzioni ellittiche*, Bolognina Zanichelli, 1937). No se poseen tablas para las integrales de tercer especie por la dificultad de depender estas integrales de tres parametros. Para girar esta dificultad se indica ordinariamente sustituir el cálculo directo de las integrales por el uso de las funciones elípticas tabuladas por Jacobi (funciones θ), lo que implica una profundización teórica no indiferente. Para el mismo fin, Legendre indicó, ya desde sus primeros estudios sobre el argumento, fórmulas de reducción que vamos a considerar en lo que sigue. Recientemente C. HEUMANN ha publicado en el *Journal of Mathematics and Physics*, vol. XX, 1941, p. 127, una memoria *Tables of complete elliptic Integrals* en la cual, además de indicar algunas correcciones a las tablas de Legendre, da algunas tablas complementarias para cálculos en intervalos donde la interpolación proporcional no es satisfactoria y además tablas para integrales completas de tercer especie a las cuales tendremos todavía que referirnos, como ejemplos de aplicación.

Recordamos por fin que el *Traité* de Legendre fué precedido por los *Exercices de calcul integral* del mismo autor (1811-1810) donde ya están todos los fundamentos de la obra mayor y que es la obra a la cual nos referimos en las referencias que siguen, por no estar el *Traité* a nuestra disposición.

donde los extremos de integración deben entenderse

$$\begin{array}{llll} 0 & \text{y} & 1 & \text{respecto de la variable } \xi \\ 0 & \text{y} & \frac{2}{\pi} & \text{» » » » } \vartheta. \end{array}$$

Se nota en seguida que en la expresión final (6.3) aparece en el segundo término es la *integral completa de segunda especie* de Legendre,

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = E(k);$$

en el tercer término aparece la *integral completa de primera especie*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K(k);$$

de la una y de la otra están calculadas tablas de valores, como está dicho en la nota (5).

A estas mismas integrales se reduce también la primera integral en (6.3) por una consideración igualmente debida a Legendre; se tiene

$$\begin{aligned} d(\xi \sqrt{1 - \xi^2} \Delta) &= (1 - \xi^2) \Delta \, d\vartheta - \xi^2 \Delta \, d\vartheta - \frac{k^2 \xi^2 (1 - \xi^2)}{\Delta} d\vartheta \\ &= 2(1 - \xi^2) \Delta \, d\vartheta - \xi^2 \Delta \, d\vartheta - \frac{k^2 - 1}{k^2} \frac{1}{\Delta} d\vartheta - \frac{1}{k^2} \Delta \, d\vartheta \\ &= -3 \xi^2 \Delta \, d\vartheta + \left(2 - \frac{1}{k^2}\right) \Delta \, d\vartheta + \frac{k'^2}{k^2} \frac{1}{\Delta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Aislando el término $\xi^2 \Delta \, d\vartheta$ e integrando a partir de $\xi = \vartheta = 0$ resulta

$$\int_0^{\vartheta} \xi^2 \Delta \, d\vartheta = \frac{1}{3} \left[\left(2 - \frac{1}{k^2}\right) E(k, \vartheta) + \frac{k'^2}{k^2} F(k, \vartheta) - \xi \sqrt{1 - \xi^2} \Delta \right];$$

y, para $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\xi = 1$,

$$\int \xi^2 \Delta d\vartheta = \frac{1}{3} \left[\left(2 - \frac{1}{k^2} \right) E(k) + \frac{k'^2}{k^2} K(k) \right]. \quad (6.4)$$

La última integral en (6.3) es una integral completa de tercera especie; dejando, por más generalidad, indeterminado el extremo superior de integración, y poniendo en lugar de la constante $\alpha^2/1 - \alpha^2$ una constante indeterminada n , la escribiremos con Legendre

$$\Pi(k, n, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{1+n\xi^2} \frac{d\vartheta}{\Delta}. \quad (6.5)$$

Por depender ella de tres parámetros no existen hasta ahora para esta integral tablas calculadas. Solo recientemente en la memoria citada de Heuman, el autor ha publicado una tabla de integrales completas es decir correspondientes a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, como es precisamente el caso nuestro.

7. — En el n. 8 vamos a ver, siguiendo siempre a Legendre, que en realidad las tablas de Heuman pueden sustituirse por las de Legendre para integrales de primera y de segunda especie, y que para nuestro problema nos conviene todavía referirnos a estas últimas.

Anticipamos sin embargo algunas observaciones con respecto a su uso eventual. Ellas están construídas para valores negativos de n ; precisamente

$$-1 < n < -k^2 < 0,$$

lo que no es el caso nuestro; pero Legendre ha dado también el modo de pasar de uno a otro caso con la observación siguiente:

Indicando con h una constante positiva, se tiene

$$\frac{1}{h} d \operatorname{arctg} \frac{h\xi\sqrt{1-\xi^2}}{\Delta} = \frac{1-2\xi^2+k^2\xi^4}{1-(k^2-h)\xi^2-h\xi^4} \frac{d\vartheta}{\Delta};$$

considerando el denominador, en la fracción del segundo miembro, como trinomio de segundo grado en ξ^2 , se ve que tiene raíces reales y de signo contrario; llamando estas dos raíces respectivamente $\frac{1}{m}$ y $-\frac{1}{n}$, la fracción se descompone, según un cálculo elemental, en la forma

$$\frac{1-2\xi^2+k^2\xi^4}{1-(k^2-h^2)\xi^2-h^2\xi^4} = -\frac{k^2}{h^2} + \frac{a}{1+n\xi^2} + \frac{b}{1-m\xi^2} \quad (7.1)$$

donde a y b son constantes; resulta

$$\frac{1}{h} d \operatorname{arctg} \frac{h\xi\sqrt{1-\xi^2}}{\Delta} = -\frac{k^2}{h^2} \frac{d\vartheta}{\Delta} + a \frac{d\vartheta}{(1+n\xi^2)\Delta} + b \frac{d\vartheta}{(1-m\xi^2)\Delta}.$$

Integrando ahora los dos miembros entre los valores de $\vartheta, 0$ y φ , a los cuales corresponden para ξ los valores 0 y $\operatorname{sen} \varphi$, resulta

$$\begin{aligned} a \Pi(k, n, \varphi) + b \Pi(k, -m, \varphi) = \\ = \frac{k^2}{h^2} F(k, \varphi) + \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \frac{h \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Siendo claramente

$$mn = h^2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{k^2 - h^2}{h^2},$$

se sigue

$$m - n = k^2 - mn, \quad m = \frac{k^2 + n}{1 + n}, \quad h^2 = \frac{n(k^2 + n)}{1 + n} \quad (7.3)$$

de donde, recordando que $k^2 < 1$, sigue

$$1 > m > k^2.$$

Por lo tanto la igualdad (7.2) reduce el cálculo de la $\Pi(k, n, \varphi)$ a la $\Pi(k, -m, \varphi)$ donde el parámetro $-m$ rea-

liza las hipótesis de las tablas de Heuman⁽⁶⁾. En el caso de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ que es el nuestro y el de las tablas, la (7.1) se simplifica en

$$\textcircled{*} \quad \text{II} \left(k, n, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{k^2}{h^2 a} K(k) - \frac{b}{a} \text{II} \left(k, -m, \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.4)$$

Las constantes a, b se calculan fácilmente efectuando la descomposición (7.1); se obtiene

$$a = \frac{n+1}{n}, \quad b = \frac{m-1}{m};$$

luego, por (7.3)

$$b = -\frac{k'^2}{k^2+n}, \quad h^2 a = k^2 + n,$$

y, poniendo, como nos resultará cómodo todavía en el párrafo siguiente,

$$\mu = (1+n) \left(1 + \frac{k^2}{n} \right) \quad (7.5)$$

la (7.4) toma la forma definitiva

$$\text{II} \left(k, n, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{k^2}{k^2+n} K(k) + \frac{k'^2}{\mu} \text{II} \left(k, -\frac{k^2+n}{1+n}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.6)$$

En nuestra aplicación particular la última integral de (6.3) deberá sustituirse por

$$(7.7) \quad \text{II} \left(k, \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2} K(k) + \frac{(1-\beta^2)\alpha^2}{\beta^2} \text{II} \left(k, -\beta^2, \frac{\pi}{2} \right).$$

⁽⁶⁾ El autor, para justificar el ámbito elegido para los valores de m , observa que, en los casos que habitualmente se presentan en las aplicaciones físicas, estas condiciones están efectivamente realizadas.

y la expresión del volumen V (6.3) resulta

$$V = \frac{8}{3} \left[\alpha \beta \sqrt{1-\alpha^2} E(k) - \frac{\alpha(1-\beta^2)}{\beta \sqrt{1-\alpha^2}} \left(K(k) - \Pi\left(k, -\beta^2, \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (7.8)$$

8. — Nos conviene, sin embargo, considerar el problema todavía desde otro punto de vista; primero porque las tablas de Heuman no han entrado todavía, por lo que sabemos, en las colecciones de tablas que se pueden fácilmente alcanzar; segundo porque, como vamos a ver, siguiendo todavía a Legendre, llegaremos a dar para nuestro problema, una fórmula explícita que permite calcular la solución en cada caso numéricamente dado, con el subsidio solamente de las clásicas tablas de Legendre.

Aplicamos para eso todavía el procedimiento de derivación y sucesiva integración en la forma siguiente: para transformar la integral $\Pi(k, n, \varphi)$ (6.5), ponemos por un momento, por brevedad,

$$N = 1 + n \xi^2 = 1 + n \operatorname{sen}^2 \vartheta$$

y consideremos la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \Delta}{N} &= -2n \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \Delta}{N^2} + \frac{\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta}{N} \Delta - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{N \Delta} \\ &= -2n \frac{\xi^2(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}{N^2 \Delta} + \frac{1-2(k^2+1)\xi^2+3k^2\xi^4}{N \Delta}. \end{aligned}$$

Desarrollando los numeradores según potencias de

$$\frac{N}{n} = \xi^2 + \frac{1}{n}$$

se tiene

$$\begin{aligned} (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{k^2}{n}\right) - \\ &\quad - \left(\xi^2 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + k^2 + 2\frac{k^2}{n}\right) + \left(\xi^2 + \frac{1}{n}\right)^2 k^2, \end{aligned}$$

$$1 - 2(k+1)\xi^2 + 3k^2\xi^2 = 1 + 2\frac{1+k^2}{n} + 3\frac{k^2}{n^2} -$$

$$- \left(\xi^2 + \frac{1}{n}\right) \left[2(1+k^2) + 6\frac{k^2}{n}\right] + 3k^2\left(\xi^2 + \frac{1}{n}\right)^2;$$

luego, sustituyendo,

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \Delta}{N} = -2(1+n) \left(1 + \frac{k^2}{n}\right) \frac{\xi^2}{N^2 \Delta} + \frac{1 - \frac{k^2}{n^2}}{N \Delta} + \frac{k^2}{n} \frac{\left(\xi^2 + \frac{1}{n}\right)}{\Delta}.$$

En el segundo miembro el primer coeficiente es la expresión μ (7.5); y, considerando en esta la n como variable, se tiene

$$\frac{d\mu}{dn} = 1 - \frac{k^2}{n^2}$$

es decir el coeficiente del segundo término. Por otra parte, se tiene, todavía en la hipótesis de n variable,

$$\frac{\partial^2 \Pi(k, n, \vartheta)}{\partial \vartheta \partial n} = \frac{-\xi^2}{N^2 \Delta}.$$

Resulta luego

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \Delta}{N} = 2\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta \partial n} + \frac{\partial \mu}{\partial n} \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} + \frac{k^2}{n^2} \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right)$$

es decir, después de dividir ambos miembros por $2\sqrt{\mu}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial n} (\sqrt{\mu} \Pi(k, n, \vartheta)) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \Delta}{2} \cdot \frac{1}{N\sqrt{\mu}} \quad (8.1)$$

$$- \frac{k^2}{2} \frac{1}{n^2 \sqrt{\mu}} \frac{d}{d\vartheta} F(k, \vartheta) - \frac{1}{2} \frac{1}{n \sqrt{\mu}} \frac{d}{d\vartheta} [F(k, \vartheta) - E(k, \vartheta)].$$

En el segundo miembro de esta igualdad, por ser

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{n} \sqrt{k^2 n + (1 + k^2) n^2 + n^3},$$

se ve en seguida que los factores

$$\frac{1}{N\sqrt{\mu}}, \frac{1}{n\sqrt{\mu}}, \frac{1}{n^2\sqrt{\mu}},$$

después de multiplicación por dn , son diferenciales elípticos; para reducirlos a forma normal, conviene hacer el cambio de variable

$$n = \frac{\cos^2 \zeta}{\sin^2 \zeta}, \quad dn = \frac{-2 \cos \zeta}{\sin^3 \zeta} d\zeta, \quad (8.2)$$

por el cual resulta

$$\sqrt{\mu} = \frac{\sqrt{\cos^2 \zeta + k^2 \sin^2 \zeta}}{\sin \zeta \cos \zeta} = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \zeta}}{\sin \zeta \cos \zeta} = \frac{\Delta'}{\sin \zeta \cos \zeta}; \quad (8.3)$$

luego

$$\frac{dn}{n\sqrt{\mu}} = -2 \frac{d\zeta}{\Delta'} = -2 dF(k', \zeta) \quad (8.4)$$

$$\frac{dn}{n^2\sqrt{\mu}} = -2 \frac{\sin^2 \zeta d\zeta}{\cos^2 \zeta \Delta'} = \frac{2}{k^2} d \frac{\sin \zeta \Delta'}{\cos \zeta} - \frac{2}{k^2} dE(k', \zeta) \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn}{N\sqrt{\mu}} &= -2 \frac{\cos^2 \zeta d\zeta}{\sin^2 \zeta (1 + \frac{\sin^2 \zeta}{\cos^2 \zeta} \sin^2 \vartheta) \Delta'} = -2 \frac{\cos^2 \zeta d\zeta}{\Delta' (\sin^2 \zeta + \cos^2 \zeta \sin^2 \vartheta)} \\ &= -2 \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \zeta d\zeta}{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta (1 + \cot^2 \vartheta \sin^2 \zeta) \Delta'} \\ &= -\frac{2}{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} \frac{d\zeta}{(1 + \cot^2 \vartheta \sin^2 \zeta) \Delta'} + \frac{2}{\cos^2 \vartheta} \frac{d\zeta}{\Delta'} \\ &= -\frac{2}{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} d\Pi(k', n', \zeta) + \frac{2}{\cos^2 \vartheta} dF(k', \zeta) \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde se ha puesto

$$n' = \cot^2 \vartheta.$$

Notando todavía que, análogamente a (8.2), será

$$\frac{\Lambda}{\sin \vartheta \cos \vartheta} = \sqrt{\mu'} = \sqrt{(1+n') \left(1 + \frac{k'^2}{n'}\right)},$$

resulta, sustituyendo (8.4), (8.5), (8.6) en (8.1),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial n} \left[\sqrt{\mu} \Pi(k, n, \vartheta) + \sqrt{\mu'} \Pi(k', n', \zeta) \right] = \\ & \frac{d}{d\vartheta} \frac{\sin \vartheta \Lambda}{\cos \vartheta} \cdot \frac{d}{dn} F(k', \zeta) + \frac{d}{dn} \frac{\sin \zeta \Lambda'}{\cos \zeta} \frac{d}{d\vartheta} F(k, \vartheta) \\ & - \frac{d}{dn} E(k', \zeta) \frac{d}{d\vartheta} F(k, \vartheta) - \frac{d}{dn} F(k', \zeta) \frac{d}{d\vartheta} E(k, \vartheta). \\ & + \frac{d}{dn} F(k', \zeta) \frac{d}{d\vartheta} F(k, \vartheta). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Si ahora en el primer miembro de esta (8.7), en lugar de la función determinada

$$\sqrt{\mu} \Pi(k, n, \vartheta) + \sqrt{\mu'} \Pi(k', n', \zeta), \quad (8.8)$$

ponemos una indeterminada

$$\Phi(\vartheta, n),$$

la igualdad se cambia en una ecuación en derivadas parciales, una solución de la cual será evidentemente

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\vartheta, n) &= \frac{\sin \vartheta \Lambda}{\cos \vartheta} F(k', \zeta) + \frac{\sin \zeta \Lambda'}{\cos \zeta} F(k, \vartheta) \\ &- [E(k', \zeta) F(k, \vartheta) + E(k, \vartheta) F(k', \zeta)] + F(k, \vartheta) F(k', \zeta); \end{aligned} \quad (8.9)$$

la solución general será luego

$$\Phi(\vartheta, n) + \Lambda(\vartheta) + \Lambda'(\zeta) \quad (8.10)$$

donde Λ y Λ' son funciones arbitrarias; nos queda el problema de elegir estas funciones de manera que (8.10) venga a coincidir con (8.8). En virtud de la simetría de (8.7) y de $\Phi(\vartheta, n)$ respecto de las variables ϑ, ζ (donde ζ es una representante de n por el cambio de variables (8.2) las dos funciones Λ y Λ' no pueden diferenciarse sino por el cambio de variable y eventualmente el cambio de las constantes k, k' , dado que ellas aparecieran en la expresión.

Para determinar ahora esta función, supongamos hacer variar ϑ en un pequeño intervalo próximo a 0:

$$0 < \vartheta < \varphi, \varphi \text{ arbitrariamente pequeño.}$$

Si se supone ζ arbitrario, y por lo tanto suficientemente lejos de 0, el segundo miembro de (8.9) y la función $\sqrt{\mu} \Pi(k, n, \vartheta)$ toman valores tan próximos a 0 como se quiere, con tal que sea φ bastante pequeño; tenemos luego

$$|\sqrt{\mu} \Pi(k', n', \zeta) - \Lambda(\vartheta) - \Lambda'(\zeta)| \leq \varepsilon \quad (8.11)$$

donde ε es un número positivo que se puede tomar arbitrariamente pequeño.

Pero, integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \Pi(k', n', \zeta) &= \int_0^{\zeta} \frac{d\tau}{1+n'\text{sen}^2\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\text{sen}^2\tau}} = \\ &= \frac{T(\zeta)}{\Lambda'} - \int_0^{\zeta} T(\tau) d \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\text{sen}^2\tau}} \end{aligned}$$

con

$$T(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{1+n'\text{sen}^2\tau} = \int_0^{\tau} \frac{(1+\text{tg}^2\tau)d\tau}{1+(1+n')\text{tg}^2\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+n'}} \text{arctg} \sqrt{1+n'} \text{tg} \tau;$$

luego

$$\sqrt{\mu'} \Pi(k', n', \zeta) = \int \sqrt{1 + \frac{k'^2}{n'}} \left(\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+n'} \operatorname{tg} \tau)}{\Lambda'} - \int_0^{\zeta} \operatorname{arctg}(\sqrt{1+n'} \operatorname{tg} \tau) d \frac{1}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \tau}} \right).$$

Para φ suficientemente pequeño $n' \rightarrow \infty$; luego para $\tau \neq 0$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{1+n'} \operatorname{tg} \tau) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

y

$$\sqrt{\mu'} \Pi(k', n', \zeta) \rightarrow \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\Lambda'} - \int_0^{\zeta} d \frac{1}{\Lambda'} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo en (8.11) se infiere que, cualquier que sea ζ , para ϑ suficientemente próximo a 0

$$\left| \frac{\pi}{2} - \Lambda(\vartheta) - \Lambda'(\zeta) \right| < \varepsilon,$$

donde ε , es arbitrariamente pequeño; suponiendo fijado un valor para ϑ , se concluye que $\Lambda'(\zeta)$ es una constante y precisamente

$$\Lambda'(\zeta) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \Lambda(\vartheta) \right).$$

Por lo dicho sobre la permutabilidad de $\Lambda'(\zeta)$ y $\Lambda(\vartheta)$, se sigue que también $\Lambda(\vartheta)$ debe ser constante; luego finalmente

$$\Lambda(\vartheta) + \Lambda'(\zeta) = \frac{\pi}{2}.$$

y, sustituyendo en (8.9), (8.10),

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \Pi(k, n, \vartheta) + \sqrt{\mu'} \Pi(k', n', \zeta) = \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} \vartheta \Lambda}{\cos \vartheta} F(k', \zeta) + \frac{\operatorname{sen} \zeta \Lambda'}{\cos \zeta} F(k, \vartheta) \\ - [E(k', \zeta) F(k, \vartheta) + E(k, \vartheta) F(k', \zeta)] + F(k, \vartheta) F(k', \zeta). \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\text{Para } \vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$n' = \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \rightarrow 0, \quad \Pi(k', n', \zeta) \rightarrow F(k', \zeta);$$

se ve entonces que

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin \vartheta \Delta}{\cos \vartheta} F(k', \zeta) - \sqrt{\mu'} \Pi(k', n', \zeta) \right] \\ = \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \vartheta \Delta - \sqrt{\cos^2 \vartheta + k'^2 \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta} F(k', \zeta) \\ = \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Delta \frac{\sin \vartheta - 1}{\cos \vartheta} F(k', \zeta) = 0 \end{aligned}$$

y de (8.12) se sigue:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \Pi\left(k, n, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\Delta'}{\sqrt{n}} - E(k', \zeta) + F(k', \zeta) \right] K(k) \\ - F(k', \zeta) E(k) \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\left(\zeta = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

9. — Sustituyendo (8.13) y (6.4) en (6.3) se obtendrá la expresión explícita del volumen V. Debemos notar que, siendo

$$n = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

resulta

$$\zeta = \arccos \alpha$$

$$\begin{aligned} \Delta' = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \zeta} = \sqrt{k^2 + k'^2 \alpha^2} = \beta \\ \frac{\sin \zeta \Delta'}{\cos \zeta} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \sqrt{\mu} = \frac{\beta}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} \end{aligned}$$

luego

$$V = \frac{4\pi}{3} - \frac{8}{3} \left\{ [F(k', \zeta) - \alpha \beta \sqrt{1 - \alpha^2}] E(k) - [F(k', \zeta) - E(k', \zeta)] K(k) \right\} \quad (9.1)$$

$$\left(k = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2}} \right)$$

Para $\alpha = \beta$ es $k = 0$, $k' = 1$

$$E(k) = K(k) = \frac{\pi}{2}, \quad E(\alpha', \zeta) = \text{sen } \zeta = \sqrt{1 - \alpha^2};$$

resulta

$$V = \frac{4\pi}{3} [1 - (1 - \alpha^2)^{3/2}];$$

para $\beta = 1$ es $k = 1$, $k' = 0$,

$$E(k) = 1 \quad F(k', \zeta) = E(k', \zeta) = \zeta = \text{arc cos } \alpha$$

y resulta

$$V = \frac{8}{3} (\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{\pi}{2} - \text{arc cos } \alpha) = \frac{8}{3} (\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} + \text{arc sen } \alpha);$$

se confirman así los valores obtenidos en el n. 5.

10. — Queda por considerar el caso 2º. (n. 3): $\beta > 1 > \alpha$.

En este caso, sobre el plano diametral de la esfera, normal al eje del cilindro las dos secciones — el círculo de radio 1 y la elipse de semiejes α, β — se cortan en 4 puntos, cuyas coordenadas, poniendo ahora

$$\frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} = k^2, \quad \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} = k'^2, \quad (10.1)$$

se expresan por

$$x = \pm \alpha k', \quad y = \pm \alpha k.$$

El cuerpo común al cilindro y a la esfera se compone del segmento esférico comprendido entre los planos paralelos

$$x = \alpha k', \quad x = -\alpha k' \quad (10.2)$$

cuyo volumen es

$$V_1 = \frac{2\pi k'}{3} \frac{\alpha(3\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2)}{\beta^2 - \alpha^2} \quad (10.3)$$

y dos casquetes, apoyados exteriormente a los planos (10.2) y cuyo volumen se calcula en modo análogo a lo dicho en el n. 4, con las observaciones siguientes:

1º. Respecto de la variable x los extremos de integración serán ahora $\alpha k'$ y α en cambio de 0 y α .

2º. Para reducir las integrales elípticas a la forma normal de Legendre será necesario poner, en cambio de la sustitución (6.2):

$$1 - \frac{x^2}{\alpha^2} = k^2 \xi^2 \quad 1 - \beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \frac{x^2}{\alpha^2} = (1 - \alpha^2) (1 - \xi^2)$$

$$d \frac{x}{\alpha} = \frac{-k^2 \xi d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \xi^2}}. \quad (10.4)$$

Respecto de la variable ξ los extremos de integración serán nuevamente 0 y 1; pero será de observar que, al transformar el segundo término de (4.1) mediante integración por partes, en cambio del valor 0 se obtiene, para el término integrado

$$-4\alpha k' \left(1 - \frac{\alpha^2 k'^2}{3}\right) \frac{\pi}{2} = -V,$$

que se anula al sumar con (10.3). El volumen buscado resulta así nuevamente expresado por una suma de integrales análoga a (6.3)

$$V = \frac{4\alpha\beta \sqrt{1-\alpha^2}}{3} \left[3 \int \xi^2 \Delta d\vartheta + \left(\frac{3k'^2}{k^2} + 1 \right) \int \Delta d\vartheta \right. \\ \left. - \left(3 \frac{k'^2}{k^2} + \frac{2}{\alpha^2} \right) \int \frac{d\vartheta}{\Delta} \right. \\ \left. + \frac{2}{\alpha^2(1-\alpha^2)} \int \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \xi^2} \frac{d\vartheta}{\Delta} \right].$$

Sustituyendo a las integrales las expresiones correspondientes por las fórmulas de los nos. 6 y 8 resulta finalmente

$$V = \frac{4\pi}{3k} - \frac{8}{3} \left[\left\{ \alpha\beta \sqrt{1-\alpha^2} \left(\frac{3k'^2}{2k^2} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2\beta^2k^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{k} (F(k', \zeta) - E(k', \zeta)) \right\} K(k) \right. \\ \left. - \left\{ \alpha\beta \sqrt{1-\alpha^2} \left(\frac{3k'^2}{2k^2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{k} F(k', \zeta) \right\} E(k) \right] \\ \left(\zeta = \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (10.5)$$

11. — *Un ejemplo numérico.* Para dar un ejemplo de aplicación, consideremos el caso de $\alpha=0,5$, poniendo sucesivamente $\beta=\alpha$, $\beta=1$, $\beta=0,8$, $\beta=2$. Los dos primeros valores de β , que corresponden a los casos de integración elemental, podrán servir como términos de comparación de los resultados.

Será

$$\alpha=0,5, \quad \alpha^2=0,25, \quad \sqrt{1-\alpha^2}=\sqrt{0,75}=0,8660$$

$$\arcsen \alpha = \frac{\pi}{6} = 0,5236, \quad \arccos \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Para $\beta=\alpha$

$$V = \frac{4\pi}{3} [1 - (1 - \alpha^2)^{3/2}] = \frac{4\pi}{3} \cdot 0,3505 = 1,4681.$$

Para $\beta = 1$

$$V = \frac{8}{3} [\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} + \arcsen \alpha] = \frac{8}{3} 0,9566 = 2,5509.$$

Para $\beta = 0,8$

$$k = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}} = \sqrt{0,52}, \quad \arcsen \sqrt{0,52} = 46^\circ 9'$$

$$k' = \sqrt{0,48} \quad \arcsen \sqrt{0,48} = 43^\circ 51'$$

(las tablas de Legendre están ordenadas por los $\arcsen k$). En las tablas encontramos (por una pequeña interpolación)

$$F(43^\circ 50', 60^\circ) = 1,1378, \quad E(43^\circ 50', 60^\circ) = 0,9685$$

$$K(46^\circ 9') = 1,8715, \quad E(46^\circ 9') = 1,3405$$

$$V = \frac{4\pi}{3} - \frac{8}{3} \left\{ [1,1378 - 0,4 \cdot 0,8660] 1,3405 - [1,1378 - 0,9685] 1,8715 \right\} = 2,2045.$$

Para $\beta = 2$ se debe aplicar la fórmula (10.5). Se tiene

$$\beta^2 - 1 = 3, \quad \beta^2 - \alpha^2 = 3,75.$$

$$k^2 = \frac{0,75}{3,75} = 0,2, \quad k = 0,4472, \quad \arcsen k = 26^\circ 34'$$

$$k'^2 = 0,8, \quad k' = 0,8944, \quad \arcsen k' = 63^\circ 26'$$

$$\zeta = \arccos 0,25 = 75^\circ 31'.$$

Se obtienen luego como antes, acudiendo a las tablas, los valores,

$$F(k', \zeta) = 1,7153, \quad E(k', \zeta) = 1,0605$$

$$K(26^\circ 30') = 1,6596 \quad E(26^\circ 30') = 1,4890.$$

resultando como valor de V

$$V = 2,681.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

N.º 106. — Demostrar que cualquiera que sea el número entero n la expresión

$$5^{2n+3} - 10 \cdot 2^n$$

es siempre un múltiplo de 23.

SOLUCIÓN. — Procederemos por inducción. Para $n=1$ la propiedad se cumple, puesto que

$$5^5 - 10 \cdot 2 = 3105 = 135 \cdot 23.$$

Supongamos que se verifica para el valor n , o sea

$$5^{2n+3} - 10 \cdot 2^n = a_n \cdot 23 \quad (1)$$

siendo a_n un número entero. Para $n+1$ siempre podremos poner

$$5^{2(n+1)+3} - 10 \cdot 2^{n+1} = a_{n+1} \cdot 23 \quad (2)$$

y la cuestión está en demostrar que a_{n+1} es también un número entero. En efecto, de (1) y (2) se deduce

$$\frac{5^{2(n+1)+3}}{5^{2n+3}} = \frac{a_{n+1} \cdot 23 + 10 \cdot 2^{n+1}}{a_n \cdot 23 + 10 \cdot 2^n}$$

y como el primer miembro de esta igualdad es igual a 25, resulta

$$23(25a_n - a_{n+1}) + 10 \cdot 2^n(25 - 2) = 0$$

o sea

$$25 a_n - a_{n+1} + 10 \cdot 2^n = 0$$

de donde se deduce que $a_{n+1} = 25 a_n + 10 \cdot 2^n$ es efectivamente un número entero.

Esta solución es debida al Sr. CARLOS KRÜGER, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

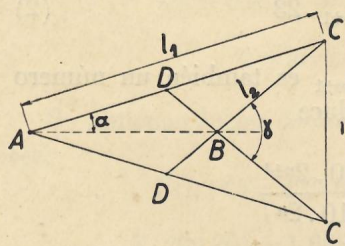
Nota de la Red. Se llega más rápidamente al resultado por una simple transformación algebraica:

$$\begin{aligned} 5^{2n+3} - 10 \cdot 2^n &= 5^{2n} \cdot 5^3 - 10 \cdot 2^n \\ &= 25^n (5^3 - 10) + 10 (25^n - 2^n) \\ &= 25^n \cdot 5 (25 - 2) + 10 (25 - 2) (25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 2 + \dots); \end{aligned}$$

resulta luego que todos los términos son divisibles por

$$25 - 2 = 23.$$

N.º 107. — Un cuadrilátero tiene dos lados iguales, de longitud l_1 concurrentes en el vértice A y los otros dos también iguales, de longitud $l_2 < l_1$, concurrentes en el vértice opuesto B ; estos dos se prolongan más allá de B por dos apéndices de longitud x . Se pide el máximo valor que se puede asignar a x para que estos apéndices no impidan la libre deformación del cuadrilátero.



SOLUCIÓN. — Sea el cuadrilátero dado el de la figura; por razón de simetría se tiene $BD = BD'$ y, para la libre deformación del cuadrilátero, es necesario que el segmento x no sea mayor de la longitud de BD , en cualquier estado de esa deformación.

El problema equivale luego a determinar el valor mínimo de BD . Llamando, como está indicado en la figura,

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle ABD = \gamma$$

se calculan inmediatamente los ángulos

$$\angle ADB = \pi - (\alpha + \gamma), \angle AC'D = \angle ACB = \gamma - \alpha, \angle ABC = \pi - \gamma$$

Aplicando repetidamente el teorema de los senos se tiene luego:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} = \frac{AD}{BD} \quad (1)$$

$$\frac{AD}{l_1} = \frac{\text{sen}(\gamma - \alpha)}{\text{sen}(\alpha + \gamma)},$$

$$\frac{l_1 + AD}{l_1 - AD} = \frac{\text{sen } \gamma \cos \alpha}{\text{sen } \alpha \cos \gamma} = \frac{l_1 \cos \alpha}{l_2 \cos \gamma}. \quad (2)$$

De (1) resulta en seguida que los segmentos AD, BD alcanzan conjuntamente su mínimo valor y de (2) resulta que se realiza este mínimo cuando es mínima la razón $\cos \alpha : \cos \gamma$. Se nota también que, siendo necesariamente $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha > 0$, el único mínimo que interesa corresponde a $\cos \gamma > 0$, porque en caso de suponer $\gamma > \frac{\pi}{2}$, $\cos \gamma < 0$, sería $AD > l_1$ y los valores absolutos de los segmentos AD, BD tenderían a un máximo, más bien que a un mínimo.

Para α, γ en el primer cuadrante la (1) muestra además, por la hipótesis $l_1 > l_2$ que $\text{sen } \gamma > \text{sen } \alpha$, salvo el caso límite de $\text{sen } \gamma = \text{sen } \alpha = 0$; luego $\cos \alpha > \cos \gamma$ y la razón $\cos \alpha : \cos \gamma$ resulta mínima propiamente en este caso límite, siendo $\cos \alpha = \cos \gamma = 1$, $\alpha = \gamma = 0$.

Se tiene entonces evidentemente

$$AD + BD = l_1 - l_2,$$

y luego, por (1)

$$BD = l_2 \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}.$$

Tal es por lo tanto la máxima longitud asignable al apéndice; puede observarse que, por el valor de α en que se realiza el mínimo de BD , en ningún instante el apéndice con esa máxima longitud, viene a rozar los lados del cuadrilátero.

Esta solución es debida, salvo ligeros detalles de redacción, al señor CARLOS KRÜGER, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N.º 109. — Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se pide hallar la ecuación y el área de la curva inversa de esta hipérbola con potencia de inversión k y centro de inversión el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN. — Con las condiciones del enunciado recordemos que si $\rho = f(\vartheta)$ es la curva dada, la ecuación de la curva inversa es $\rho = k/f(\vartheta)$. Por tanto en nuestro caso la curva inversa será

$$\rho = \frac{k}{ab} \sqrt{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (1)$$

Aplicando la fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\vartheta$$

que da el área en coordenadas polares y observando que en el caso actual la curva es simétrica respecto ambos ejes y solamente está definida en el intervalo $0 \leq \vartheta \leq \arctg \frac{b}{a}$ (junto con su opuesto) resulta que el valor del área buscada es

$$A = 2 \int_0^{\arctg \frac{b}{a}} \rho^2 d\vartheta.$$

Sustituyendo el valor (1) y verificando la integración, se tiene

$$A = 2 \int_0^{\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}} \frac{k^2}{a^2 b^2} (b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta) d\vartheta$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) k^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + \frac{k^2}{ab},$$

que es el valor del área buscada.

Como generalización natural aparece el problema de hallar el área análoga en el caso de sustituir la hipérbola del enunciado por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En este caso la curva inversa es

$$\rho = \frac{k}{ab} \sqrt{b^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta},$$

que solamente difiere de la (1) en un signo, siendo también simétrica respecto los dos ejes.

El cálculo del área es en este caso más simple que en el anterior, puesto que la curva inversa no pasa por el origen y por tanto está definida para todo valor de ϑ . Teniendo en cuenta las condiciones de simetría mencionadas, será

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{k^2}{a^2 b^2} (b^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta) d\vartheta = \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \pi k^2.$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. JOSÉ G. LAHOZ, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario. Otra solución, restringida al enunciado del problema, se ha recibido del Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial Anexa a la misma Facultad.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

122. — Demostrar las igualdades

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d_1 & d_2 \\ b & d_1 & 0 & d_3 \\ c & d_2 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & ad_3 & bd_2 & cd_1 \\ ad_3 & 0 & 1 & 1 \\ bd_2 & 1 & 0 & 1 \\ cd_1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & d_1^2 & d_2^2 \\ b^2 & d_1^2 & 0 & d_3^2 \\ c^2 & d_2^2 & d_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 2[(abd_2d_3)^2 + (acd_1d_3)^2 + (bcd_2d_1)^2] \\ - [(ad_3)^4 + (bd_2)^4 + (cd_1)^4] = \\ (ad_3 + bd_2 + cd_1)(ad_3 + bd_2 - cd_1) \\ (ad_3 - bd_2 + cd_1)(-ad_3 + bd_2 + cd_1).$$

123. — Demostrar que para todo triángulo acutángulo ABC se verifica

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{3}.$$

124. — Sea una circunferencia de radio r . Por un punto M de un diámetro AB se traza la cuerda PQ perpendicular a AB . Se pide determinar el punto M de manera que el área del triángulo APQ sea αr^2 . Demostrar que el problema tiene dos o ninguna solución; determinar los valores de α para los cuales existen soluciones. Cálculo numérico para $\alpha = 1$.

125. — Demostrar que la suma de las tangentes trigonométricas de los ángulos formados por las tangentes a una cónica desde un punto exterior P con un eje de la misma es igual a la suma de las tangentes trigonométricas de los ángulos que forman con dicho eje las rectas que unen P con los vértices de la cónica correspondientes al mismo eje.

no resuelto 126. — Determinar las condiciones que deben realizar los coeficientes de una ecuación para que a cada raíz corresponda otra complementaria respecto del número 1.

BIBLIOGRAFIA

- L. BIEBERBACH. *Theorie der Differentialgleichungen* (Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen), 3ª ed., 400 pág. Dover Publications, New York, 1944. (3,75 Doll.).

Se trata de la reproducción fotográfica de la tercera edición (1930) del conocido libro de Bieberbach sobre Ecuaciones diferenciales perteneciente a la colección de los "*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*" cuya primera edición apareció en 1923.

Las excelentes cualidades de expositor, reconocidas en el autor a través de sus variadas obras de texto, quedan bien patentes en la presente, en la cual, sin romper la unidad ni la continuidad de los diversos capítulos, se exponen desde los elementos de la teoría hasta los conceptos fundamentales de los problemas y métodos mas recientes de la misma. Veamos brevemente las diversas partes de que consta.

La primera parte está dedicada a las ecuaciones diferenciales de primer orden. Se estudian en ella, primeramente, los métodos elementales de integración y su aplicación a algunas ecuaciones típicas clásicas. Para el caso general se estudia con detalle el método de las aproximaciones sucesivas que sirve tanto para demostrar la existencia de la solución como para establecer los relativos teoremas de continuidad. En capítulo aparte trata de la aplicación a las ecuaciones diferenciales de primer orden de la teoría de los grupos continuos de Lie, exponiendo con claros ejemplos las relaciones mutuas entre los problemas de la integración de ecuaciones diferenciales y la búsqueda de los grupos de transformaciones infinitesimales que las dejan invariantes. A continuación está dedicado un importante capítulo al estudio "en grande" de las curvas integrales y de su comportamiento en el entorno de los puntos singulares. Respecto de lo primero se estudian, dentro de lo posible, los casos de curvas integrales cerradas y periódicas, problemas difíciles que son tratados con gran generalidad y claridad. Respecto los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales, siempre de primer orden, se estudian los clásicos resultados de Poincaré y Bendixon. Termina esta primera parte con un capítulo referente a las ecuaciones diferenciales de primer orden en el campo complejo, estudiando los puntos singulares de las soluciones desde el punto de vista de la teoría de las funciones analíticas.

La segunda parte trata de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Después de demostrar, por el método de aproximaciones sucesivas, los teoremas de existencia de soluciones y de estudiar algunos tipos especiales de estas

ecuaciones, en especial las ecuaciones lineales, entra en un interesante capítulo destinado al estudio, en el campo real, de las curvas integrales de las ecuaciones de segundo orden. Se tratan en él, con detalle y claridad, los clásicos resultados de Sturm-Liouville y análogos referentes a la distribución de los ceros de las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones y de los valores propios de las mismas. Sigue luego un capítulo dedicado a las ecuaciones de segundo orden en el campo complejo. El problema que se presenta en este caso es el estudio y clasificación de los puntos singulares de las soluciones desde el punto de vista de la teoría de funciones analíticas, problema mucho más complicado que su análogo para las ecuaciones de primer orden. Considera el autor con mucho detalle el caso de la ecuación general homogénea $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$, tratando en particular de la solución (que obtiene por coeficientes indeterminados) en el entorno de un punto singular no esencial (en cuyo caso demuestra que $p(z)$ y $q(z)$ poseen en dicho punto un polo de primero o segundo orden a lo sumo), haciendo aplicación del método y resultado a la ecuación diferencial de Bessel y a las ecuaciones cuyas curvas integrales carecen de puntos singulares esenciales (ecuaciones de Fuchs).

Las partes tercera y cuarta constituyen la segunda mitad del libro y están dedicadas a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la tercera parte se tratan las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, empezando por las lineales y pasando después a la ecuación general, demostrando los teoremas de existencia y unicidad de la solución. Después de unas aplicaciones a la integración de ciertos tipos especiales de ecuaciones pasa al caso de ecuaciones con n variables mencionando aplicaciones a la mecánica y a las transformaciones de contacto.

La parte cuarta está dedicada a dar una vista rápida sobre las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden; teoremas de existencia, superficies integrales, características con aplicación a los diversos métodos clásicos de integración y a clásicos problemas físicos.

Las breves indicaciones precedentes pueden servir para dar una idea del contenido de la obra, cuyas sucesivas ediciones en pocos años demostraron el interés con que fué recibida por el público matemático, interés que seguramente ha de subsistir para esta cuidada y bien presentada reproducción fotográfica de la casa Dover.

L. A. SANTALÓ

MANUEL KANT, *Historia natural y teoría general del cielo*. (Editorial Lautaro. Buenos Aires, 1946).

En la interesante colección "Tratados fundamentales" de esta Editorial, acaba de aparecer traducida directamente del alemán por Pedro Merton, la clásica obra donde Kant expone su hipótesis cosmogónica. Demás está significar la importancia que tiene la difusión de las ideas del ilustre filósofo ale-

mán. Su trascendencia ha creído con el tiempo. Desconocida o ignorada en el instante de su primera edición, adquirió luego categoría superior como todas las obras kantianas. Más tarde refundida con el título de hipótesis de Kant-Laplace gravitó fuertemente en el espíritu de los científicos, hasta que con el avanzar de la astronomía, fué desalojada de su lugar preeminente por la nueva concepción de Jeans.

De ahí que veamos con regocijo la aparición de esta obra que permitirá a los estudiosos y a los amantes de la cultura en general valorar la evolución de las ideas científicas. La estructuración de esta edición permite tal valoración, ya que se completa con un extracto del "Sistema del mundo" de Laplace, y cuadros donde se consignan los datos más modernos en punto a distancias, período de revolución, masas, densidades, inclinaciones con el plano de la eclíptica, etc., de los planetas y satélites, que con muy buen tino agregó como apéndice el traductor de Laplace y prologuista Manuel Sadosky.

La nota preliminar del joven matemático argentino es un estudio serio y fundamentado de las ideas kantianas como así mismo de las hipótesis anteriores a partir de los griegos y de la evolución de las ideas cosmogónicas.

CORTÉS PLA

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'analyse infinitesimale*. Dover Publications, 1946. Vol. 1, p. 400 + VIII. Doll. 4. Vol. II, p. 524 + X. Doll. 4.

La editorial newyorkina Dover presenta en reproducción fotográfica los dos volúmenes del célebre curso de análisis de *de la Vallée Poussin* respectivamente sobre la octava edición original (1938) y sobre la séptima (1937). El segundo volumen reproduce sin alteraciones la última revisión de la obra hecha por el autor en la oportunidad de la sexta edición (1928); el primer volumen por el contrario corresponde a una recientísima adaptación debida a la colaboración de F. Simonat, alumno y sucesor del autor en la cátedra de análisis de Lovanio que no cambia esencialmente el trazado de las últimas ediciones anteriores. Estos detalles pueden valer para señalar la historia y las etapas de la obra. Es conocido que el *curso* de La Vallée Poussin ha sido acogido a su aparición a principio del siglo con el más profundo interés, no solamente por la personalidad del autor, sino porque éste entendía no contrastar a la inspiración fundamentalmente elemental, al dar cabida a complementos más bien correspondientes a concepciones, recientes entonces, como las de medida y de la integral de Lebesgue. En las sucesivas ediciones el autor ha dado, desde este punto de vista, algún paso atrás amoldándose mayormente, en la elección de los distintos temas, a exigencias en parte esencialmente didácticas, en parte también a imposiciones de la tradición. De esta manera el contenido de la obra en la edición actual corresponde, principalmente por el primer volumen, más o menos a un común curso de cálculo: después de una introducción sobre las nociones de números y

funciones de una sola variable, de la fórmula de Taylor, de la derivación parcial, funciones implícitas, integración como operación inversa de la derivación, integrales definidas en sentido de Riemann —aun reservando al volumen siguiente el caso de las funciones de variación total limitada; luego tres capítulos de aplicaciones geométricas, uno sobre las integrales múltiples y uno sobre las series de términos constantes y de funciones.

El segundo volumen, además de contener, con los capítulos V a X, una teoría elemental de las ecuaciones diferenciales y en derivados parciales y del cálculo de variaciones, comprende varios complementos y aplicaciones de las teorías del Vol. I, integrales generalizados, integrales curvilíneas, integrales eulerianas (funciones B y Γ), series de Fourier y series trigonométricas números y polinomios de Bernoulli y por fin aplicaciones a la geometría diferencial en tres dimensiones.

Pero la característica de la obra, que queda independiente de los temas particulares, está en la lucidez que distingue la concepción analítica del autor, por la cual la exposición resulta conjuntamente rigurosa y cerrada, aunque todavía no siempre sean ahorradas al máximo las palabras y por la cual el libro queda exento de muchas inútiles abstracciones que están bastante de moda.

El curso de La Vallée Poussin sigue siendo uno de los mejores fundamentos para pasar sea a las aplicaciones del cálculo a las teorías mecánicas y físicas, sea a estudios monográficos en las ramas del análisis superior.

B. LEVI