

MINISTERIO DE EDUCACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, FISICO-
QUIMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO NOVENO - FASC. 1-2



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1949

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	Pág.
Geometría integral en los espacios tridimensionales de curvatura constante (L. A. SANTALÓ)	1
La diferencial en los espacios métricos afines (M. Balanzat)	29
Medidas invariantes en los espacios topológicos compactos (M. COTLAR y R. A. RICABARRA)	52
On the harmonic analysis of hypergeometrical functions (A. WINTNER) ..	78
Sobre la figura polar de una dada respecto de un círculo con centro en el baricentro (P. PI CALLEJA)	88
Ejercicios y problemas resueltos	94
Ejercicios y problemas propuestos	102
Bibliografía (B. LEVI)	103

GEOMETRIA INTEGRAL EN LOS ESPACIOS TRIDIMENSIONALES DE CURVATURA CONSTANTE

por

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* — En su forma más general, el problema central de la llamada Geometría Integral es el siguiente: sea S_n un espacio de n dimensiones en el cual actúa un grupo de transformaciones G , continuo y transitivo. Supongamos, además, que G posea una medida, o volumen, invariante a izquierdas por las operaciones del grupo; es decir, si representamos por dg el elemento de volumen invariante y s es una transformación cualquiera del grupo, la última condición se puede escribir, simbólicamente, $d(sg) = dg$.

Sea C^p una variedad de dimensión p contenida en S_n y C^q otra variedad, también contenida en S_n , de dimensión q . Indiquemos por gC^q a la variedad transformada de la C^q por la transformación g de G y por $C^p \cdot gC^q$ la intersección de C^p con gC^q , la cual dependerá de g . Sea $F(C^p \cdot gC^q)$ una función de esta intersección. Se trata de estudiar integrales del tipo

$$(1.1) \quad I = \int_G F(C^p \cdot gC^q) dg,$$

donde la integración está extendida a todo el volumen del grupo G .

El caso más estudiado es aquél en que S_n es el espacio euclidiano y G el grupo de los movimientos en el mismo; dg es entonces la llamada densidad cinemática. En este caso, la integral I se puede calcular para varias funciones F y de los resultados obtenidos se han podido deducir, a veces, proposiciones geométricas referentes a las variedades C^p y C^q . Por ejemplo, si C^p

y C^q son variedades de volumen p -dimensional $V(C^p)$ y q -dimensional $V(C^q)$ respectivamente, y por F se toma el volumen $(p+q-n)$ -dimensional de la intersección, resulta

$$(1.2) \quad \int_G V(C^p \cdot gC^q) dg = \alpha V(C^p) V(C^q),$$

siendo α una constante independiente de C^p y C^q (dependiente sólo de p, q, n).

Bajo ciertas condiciones de regularidad para C^p y C^q , si por F se toma la característica de Euler $N(C^p \cdot gC^q)$ de la intersección $C^p \cdot gC^q$ y siempre en el caso de los movimientos en el espacio euclidiano, la integral (1.1) también se puede calcular, dando la llamada fórmula fundamental de Blaschke para $n=3$ y que fué generalizada a n dimensiones por Chern y Yien⁽¹⁾.

En este trabajo vamos a considerar el caso de ser S_n un espacio de tres dimensiones de curvatura constante K y G el grupo de los movimientos en el mismo. Más exactamente podríamos decir que consideramos el caso de los espacios elíptico ($K > 0$) e hiperbólico ($K < 0$), cuya representación proyectiva es bien conocida; el grupo G es entonces el de las proyectividades que dejan invariante una cuádrica imaginaria ($K > 0$) o real no reglada ($K < 0$). El caso $K > 0$ ha sido ya estudiado por Ta-Jen-Wu⁽²⁾, pero el camino que vamos a seguir aquí, más geométrico, permite tratar simultáneamente ese caso y el de $K \leq 0$. Como problema principal consideramos el caso de ser C^p y C^q dos variedades de 3 dimensiones de volumen finito ($p=q=3$), es decir, dos cuerpos limitados del espacio y la función F la característica de Euler de la intersección de los dos cuerpos. Supondremos, además, que ambos cuerpos están limitados por superficies de área finita y con curvatura finita y continua en cada punto, condición que, una vez obtenido el resultado, puede reducirse mucho.

⁽¹⁾ S. CHERN y C. T. YIEN, *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni*, Bollettino della Unione Matematica Italiana (2), vol. 2, 1940, pp. 432-437. Para $n=3$ ver W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Leipzig und Berlin, 1937. En realidad en estos trabajos se considera sólo el caso $p=q=n$ pero por consideraciones de paso al límite se puede pasar fácilmente al caso general.

⁽²⁾ TA-JEN WU, *Ueber elliptische Geometrie*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 43, 1938, pp. 495-521.

Veremos después algunas aplicaciones, entre ellas la generalización a los espacios de curvatura constante de un resultado obtenido por O. Varga para el espacio euclidiano.

Finalmente consideraremos el caso en que C^q es un plano del espacio (o sea una superficie totalmente geodésica); entonces, como para cada plano e existe un subgrupo E de G que lo deja invariante, habrá que considerar el espacio homogéneo $\tilde{G}/E$ y como medida invariante en el mismo tendremos la llamada densidad para conjuntos de planos. Con esta densidad se pueden generalizar muchas fórmulas integrales conocidas para el caso euclidiano; la mayoría de ellas, sin embargo, resultan idénticas para los espacios de curvatura constante, por lo cual nos limitamos a señalar la (10.3), que depende de K y que contiene la desigualdad (10.5), válida para los cuerpos convexos del espacio hiperbólico.

En todo lo que sigue, al hablar de espacio, entenderemos que se trata del espacio de 3 dimensiones. Además, con objeto de abreviar la escritura, para indicar la curvatura del espacio utilizaremos, según convenga, K o k , ligados por la relación

$$(1.3) \quad k^2 = K.$$

2. *La densidad cinemática en espacios de curvatura constante. Densidades para planos, rectas y puntos.* — Supongamos el espacio tridimensional de curvatura constante K y el grupo G (dependiente de 6 parámetros) de los movimientos del mismo. Para hallar el elemento de volumen invariante de G , es cómodo utilizar el método del «triedro móvil», de E. Cartan⁽³⁾.

Sea P un punto del espacio y consideremos el triedro trirectángulo formado por tres vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, de módulo unidad y origen P . Se cumplen, por tanto, las condiciones

$$(2.1) \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde los productos escalares del primer miembro se entienden tomados según la métrica del espacio.

⁽³⁾ E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, 2ª edición, Paris 1946, Capítulos IX y XII. Para este n° 2 puede ser útil consultar la fundamental memoria de S. S. CHERN, *Integral Geometry in Klein spaces*, *Annals of Mathematics*, Vol. 43, 1942.

El vector PP' determinado por P y el punto infinitamente próximo P' , tendrá respecto dicho triedro ciertas componentes que representaremos por ω^i ; es decir, poniendo $d_1 P = PP'$, será

$$(2.2) \quad d_1 P = \omega^i \bar{e}_i$$

donde en el segundo miembro se entiende implícita una sumatoria desde $i=1$ a $i=3$, cuyo símbolo suprimimos, como es costumbre en cálculo tensorial; la misma convención vale en todo lo sucesivo en este n.º. 2.

Por otra parte, las diferenciales absolutas $D\bar{e}_i$ de cada uno de los vectores $\bar{e}_i$ se podrán también expresar en la forma

$$(2.3) \quad D\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k,$$

siendo ω_i^k nuevas formas diferenciales lineales; es decir, tanto las ω^i como las ω_i^k son formas lineales en las diferenciales dx^i de las coordenadas x^i del espacio, más de las otras tres coordenadas que fijan el triedro formado por los vectores $\bar{e}_i$. Su valor se deduce fácilmente de (2.2) y (2.3), multiplicando ambos miembros escalarmente por el vector $\bar{e}_i$ conveniente. Se obtiene así

$$(2.4) \quad \omega^i = \bar{e}_i \cdot d_1 P, \quad \omega_i^k = -\omega_k^i = \bar{e}_k \cdot D\bar{e}_i.$$

Las diferenciales exteriores de las formas ω^i , ω_i^k satisfacen a las siguientes *ecuaciones de estructura* del espacio ⁽⁴⁾

$$(2.5) \quad d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i]$$

$$(2.6) \quad d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] + \frac{1}{2} R_{i^j_{kh}} [\omega^k \omega^h],$$

donde los paréntesis cuadrados $[\]$ indican multiplicación exterior y $R_{i^j_{kh}}$ es el tensor de curvatura del espacio.

Consideremos ahora el grupo G de los movimientos del espacio. Supuesto fijado un triedro trirectángulo de vértice P_0 , formado por los vectores $\bar{e}_{i0}$ (lo indicaremos $(P_0, \bar{e}_{i0})$), cada movimiento g de G puede determinarse por el triedro $(P, \bar{e}_i)$ trans-

⁽⁴⁾ E. CARTAN, loc. cit., pág. 322.

formado del $(P_0, \bar{e}_{i0})$, por g y recíprocamente, cada triedro $(P, \bar{e}_i)$ determina un movimiento g : aquél que lleva $(P_0, \bar{e}_{i0})$ a coincidir con $(P, \bar{e}_i)$. La familia de triedros $P, \bar{e}_i$ constituye por tanto una familia de triedros «adaptada al grupo G ». Las formas ω^i, ω_i^k son entonces las *componentes relativas* de G y (2.5), (2.6) son las ecuaciones de estructura del mismo. Las componentes relativas ω^i, ω_i^k son invariantes por G y por tanto también lo será la forma diferencial de sexto grado

$$(2.7) \quad dg = [\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega_1^2 \omega_1^3 \omega_2^3].$$

Siendo el grupo G transitivo, toda otra forma diferencial invariante de grado seis debe diferir de la anterior dg en un factor constante. Luego (2.7) es el elemento de volumen invariante del espacio de G : se llama la *densidad cinemática* del espacio de curvatura constante considerado.

A la expresión anterior de dg se le puede dar una interpretación geométrica simple. En primer lugar se observa que según (2.2) el producto $[\omega^1 \omega^2 \omega^3]$ es igual al producto de los desplazamientos elementales de P , según tres ejes rectangulares, o sea, es igual al elemento de volumen del espacio, que representaremos por dP , o sea

$$(2.8) \quad dP = [\omega^1 \omega^2 \omega^3].$$

Por otra parte, cada una de las ω_i^k , según (2.4), representa una rotación elemental alrededor del eje $\bar{e}_h$ ($h \neq i \neq k$). Por tanto, el producto $[\omega_1^3 \omega_2^3]$, por ejemplo, representa el elemento de área $d\Omega$ de la esfera de radio unidad y centro P (esfera euclidiana, situada en el espacio tridimensional tangente al dado en P) correspondiente al punto representativo de la dirección de $\bar{e}_3$. Poniendo finalmente $d\varphi$ en lugar de la forma ω_1^2 para representar una rotación elemental alrededor de $\bar{e}_3$, se tiene para dg la expresión muy intuitiva

$$(2.9) \quad dg = [dP d\Omega d\varphi],$$

que tiene la misma forma que para el caso euclidiano. Aquí, como en todo lo que sigue, las *densidades se consideran en valor absoluto*.

Supongamos, por ejemplo, un punto P fijo del espacio y un cuerpo cualquiera Q de volumen finito V móvil en el mismo. La medida del conjunto de posiciones de Q en las cuales contiene a P (o sea, la medida del conjunto de movimientos que llevan a Q a una posición en la cual contiene a P) es

$$(2.10) \quad \int_{P \in Q} dg = 8\pi^2 V.$$

Basta, en efecto, observar que esta medida debe ser igual a la de las posiciones de P (supuesto móvil) en las que queda interior a Q (supuesto fijo) y por tanto al integrar (2.9), Ω varía sobre el área 4π de la esfera unidad, φ entre 0 y 2π y P en el volumen de Q ; sale así el resultado (2.10).

Consideremos ahora el subgrupo E de los movimientos que dejan invariante un plano e del espacio⁽⁵⁾. Tomando como plano e el determinado por los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ y considerando desplazamientos del triedro $P, \bar{e}_i$ en los cuales $\bar{e}_3$ se conserve normal a e , las ecuaciones (2.2) y (2.3) dan

$$(2.11) \quad \omega^3 = 0, \omega_1^3 = 0, \omega_2^3 = 0.$$

Este sistema de ecuaciones de Pfaff, por la manera como ha sido obtenido, debe ser completamente integrable y sus variedades integrales representarán, en el espacio representativo del grupo G , al subgrupo E y sus transformados por las operaciones de G ⁽⁶⁾. El producto

$$(2.12) \quad de = [\omega^3 \omega_1^3 \omega_2^3].$$

⁽⁵⁾ Recordemos que aquí y en todo lo que sigue, como es costumbre, llamaremos "planos" a las superficies totalmente geodésicas del espacio.

⁽⁶⁾ Para mejor comprensión consideremos como modelo aclaratorio el grupo G de los movimientos en el plano euclideo referido a un origen O y dos ejes rectangulares x, y . Cada movimiento, siendo reducible a una traslación y una rotación, estará determinado por las coordenadas x, y del punto transformado del O y por una rotación $\varphi : (x, y, \varphi)$ serán las coordenadas del espacio tridimensional representativo del grupo G de los movimientos del plano (sólo hay que observar que φ sólo puede variar entre 0 y 2π , es decir, deben identificarse los planos $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$, con lo cual el espacio de G puede decirse que es un cilindro de tres dimensiones). Consideremos ahora una recta r del

es invariante por G y podrá tomarse como elemento de volumen del espacio homogéneo G/E , siempre y cuando su valor dependa exclusivamente del plano e , no del punto P ni de los vectores tangentes $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ elegidos sobre él. Esta independencia se puede deducir por métodos generales, teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura (2.5) y (2.6) y que el espacio es de curvatura constante, pero en este caso particular es más simple proceder geoméricamente. Para ello observemos que (2.12) equivale a

$$(2.13) \quad de = [d\Omega dt],$$

siendo $d\Omega = [\omega_1^3 \omega_2^3]$ el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección $\bar{e}_3$ y $dt = \omega^3$ un desplazamiento elemental en la misma dirección, o sea, normal a e . Desplazando por paralelismo el triedro $(P, \bar{e}_i)$ sobre e , el vector normal $\bar{e}_3$ se conserva normal y por conservarse también el ángulo entre vectores y las longitudes de los mismos, $d\Omega$ y dt se conservarán, o sea (2.13) no depende del punto P elegido sobre e ni de la particular posición de los vectores tangentes $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

La expresión (2.12) o su equivalente (2.13) puede por tanto servir para medir conjuntos de planos (o, lo que es lo mismo, conjuntos de puntos en el espacio homogéneo G/E), ob-

plano de partida, que por simplicidad podemos suponer que es el eje x . El subgrupo R de G que deja r invariante está representado por la recta $y=0, \varphi=0$. Observemos, además, que cada punto x, y, φ se transforma por la operación (x_0, y_0, φ_0) de G según las fórmulas (grupo de los parámetros),

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0 + x_0, \\ y' &= x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0 + y_0, \\ \varphi' &= \varphi + \varphi_0. \end{aligned}$$

Por tanto la recta $y=0, \varphi=0$, se transforma por la operación (x_0, y_0, φ_0) en la recta.

$$(*) \quad x' = x \cos \varphi_0 + x_0, \quad y' = x \sin \varphi_0 + y_0, \quad \varphi = \varphi_0$$

en cuyas ecuaciones el parámetro variable es x . Estas rectas (*) son tales que por cada punto del espacio representativo de G pasa una y una sola: son las variedades integrales del sistema análogo al (2.11) para el caso del plano que ahora consideramos. A cada una de ellas corresponde una recta del plano de partida (la que pasa por el punto x_0, y_0 y tiene la dirección φ_0). Considerando cada recta (*) como un solo punto del espacio de G resulta un espacio de dos dimensiones: es el espacio homogéneo G/R y el elemento de volumen invariante de este espacio es la densidad para rectas del plano.

teniéndose una medida invariante respecto de G , la cual, salvo un factor constante, será única debido a ser G transitivo respecto los planos e ; cualquiera de estas expresiones (2.12), (2.13) se llama la *densidad para conjuntos de planos*.

Conviene dar a esta densidad una forma más adaptada para el cálculo efectivo. Para ello consideremos un punto fijo O del espacio y determinemos cada plano e por su distancia ρ a O , más las coordenadas esféricas ϑ, φ de la dirección de la normal a e desde O . El elemento de arco del espacio, en estas coordenadas geodésicas ρ, ϑ, φ (suponiendo $x^1 = \rho, x^2 = \vartheta, x^3 = \varphi$) es

$$(2.14) \quad ds^2 = d\rho^2 + K^{-1} \sin^2 k\rho d\vartheta^2 + K^{-1} \sin^2 k\rho \sin^2 \vartheta d\varphi^2.$$

Elijamos como punto P de e el pie de la normal desde O , y como vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ las tangentes a las direcciones según las cuales varía únicamente φ o ϑ , respectivamente.

Las componentes de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ serán

$$\bar{e}_1 \left(0, 0, \frac{k}{\sin k\rho \sin \vartheta} \right), \bar{e}_2 \left(0, \frac{k}{\sin k\rho}, 0 \right), \bar{e}_3 (1, 0, 0).$$

Según (2.4) se tiene, puesto que las componentes de $d_1 P$ son $d\rho, 0, 0$,

$$\omega^3 = \bar{e}_3 \cdot d_1 P = d\rho$$

$$\omega_1^3 = \bar{e}_3 \cdot D \bar{e}_1$$

$$= (\Gamma_{31}^1 d\rho + \Gamma_{32}^1 d\vartheta + \Gamma_{33}^1 d\varphi) \frac{k}{\sin k\rho \sin \vartheta} = -\cos k\rho \sin \vartheta d\varphi$$

$$\omega_2^3 = \bar{e}_3 \cdot D \bar{e}_2$$

$$= (\Gamma_{21}^1 d\rho + \Gamma_{22}^1 d\vartheta + \Gamma_{23}^1 d\varphi) \frac{k}{\sin k\rho} = -\cos k\rho d\vartheta$$

y por tanto, llamando ahora $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ al elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro O correspondiente a la dirección normal a e , queda

$$(2.15) \quad de = \cos^2 k\rho [d\Omega d\rho].$$

Por ejemplo, la medida de los planos que cortan a una esfera de radio ρ , integrando la expresión anterior de 0 a ρ respecto ρ y sobre la esfera unidad $d\Omega$ (lo que da 4π), resulta ser

$$(2.16) \quad 2\pi (\rho + k^{-1} \cos k\rho \sin k\rho).$$

En particular, si $K > 0$ (o sea, k es real), todo el espacio equivale a una esfera de radio $\pi/2k$ y por tanto se tiene el resultado conocido ⁽²⁾ de que *la medida de todos los planos del espacio elíptico de curvatura $K = k^2$ vale π^2/k* . Si se quiere expresar este resultado desde el punto de vista de los grupos, se tiene: en el caso $K > 0$, el espacio homogéneo G/E tiene volumen finito igual a π^2/k .

De manera análoga a la anterior se puede obtener la densidad para conjuntos de rectas (o sea, geodésicas) del espacio.

Sea r una recta y consideremos el subgrupo R de los movimientos que la dejan invariante. Tomando el triedro $P, \bar{e}_i$ de manera que $\bar{e}_3$ sea tangente a r , las ecuaciones diferenciales de las variedades que en el espacio del grupo G representan al subgrupo R y sus transformados por las operaciones de G , serán

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0.$$

La *densidad para conjuntos de rectas*, o sea, la medida elemental invariante del espacio homogéneo G/R será por tanto,

$$(2.17) \quad dr = [\omega^1 \omega^2 \omega_3^1 \omega_3^2]$$

siempre y cuando esta expresión no dependa del punto particular P elegido sobre r . Geométricamente, observemos que $[\omega^1 \omega^2]$ representa el elemento de área $d\sigma$ normal a r en el punto P y $[\omega_3^1 \omega_3^2] = [\omega_1^3 \omega_2^3]$ según lo dicho anteriormente es igual al elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección de r . Se puede por tanto escribir

$$(2.18) \quad dr = [d\sigma d\Omega].$$

En esta forma se ve bien que no depende del punto P , puesto que por traslación paralela a lo largo de r , ni $d\sigma$, ni $d\Omega$

varían. Como G es transitivo respecto las rectas del espacio, la densidad anterior es única salvo un factor constante.

Es interesante observar que la forma dr es independiente de P para las geodésicas de cualquier espacio, aunque no sea de curvatura constante, como aquí consideramos. Entonces no existe desde luego el grupo G ni el R , pero a partir de la densidad dr se pueden medir también conjuntos de geodésicas obteniéndose propiedades del espacio, como hicimos para las superficies ($n=2$) en un trabajo anterior⁽⁷⁾ y vamos a hacer para un espacio de Riemann general de dimensión n en un trabajo próximo.

Para el cálculo efectivo es útil referir las rectas r a un sistema de coordenadas fijo, como hicimos para el caso de los planos. Tomando un punto fijo O , cada recta r determina un plano normal a ella desde O ; sea ahora $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro O correspondiente a la dirección normal a dicho plano y $d\sigma$ el elemento de área sobre el mismo plano correspondiente a su punto de intersección con r . Entonces, si ρ es la distancia de O a r , por un método análogo al caso de los planos o bien directamente por un cambio de variables en (2.18), se obtiene

$$(2.19) \quad dr = \cos k\rho [d\sigma d\Omega].$$

Calculemos, por ejemplo, la medida de todas las rectas que cortan a una esfera de radio ρ . Como sobre un plano del espacio, en coordenadas polares ρ, ϑ , es $d\sigma = k^{-1} \sin k\rho d\rho d\vartheta$, resultará

$$\int_{\frac{1}{2}\Omega} d\Omega \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho} k^{-1} \sin k\rho \cos k\rho d\rho = 2\pi^2 k^{-1} \sin^2 k\rho.$$

En particular, si $K > 0$, o sea k es real, todo el espacio equivale a una esfera de radio $\pi/2k$ y, por tanto, se tiene el resultado conocido⁽²⁾: la medida de todas las rectas del espacio elíptico de curvatura $K=k^2$ vale $2\pi^2/k$. Si se quiere expresar desde el punto de vista de los grupos, el resultado es: el volumen

⁽⁷⁾ L. A. SANTALÓ, *Integral Geometry on surfaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 16, 1949, págs. 361-375.

del espacio homogéneo G/R correspondiente al caso $K > 0$ vale $2\pi^2/k$.

Aunque es trivial, terminaremos observando que la *densidad para conjuntos de puntos* P , de manera análoga a la anterior para planos y rectas, se obtiene que vale

$$(2.20) \quad dP = [\omega^1 \omega^2 \omega^3],$$

que ya vimos en (2.8) equivale al elemento de volumen del espacio. Por ejemplo, la medida del conjunto de puntos contenidos en una esfera de radio ρ es igual al volumen de la misma, que vale $2\pi k^{-3}(k\rho - \sin k\rho \cos k\rho)$. Para el caso $K > 0$, al hacer $\rho = \pi/2k$, resulta como volumen total del espacio el valor π^2/k^3 .

3. *Sobre la curvatura total de una superficie cerrada.* — Sea S una superficie cerrada contenida en el espacio de curvatura constante K . En cada punto de S se distinguen dos curvaturas: a) La *curvatura intrínseca o absoluta* K^a , que es la curvatura riemanniana de S considerada como un espacio de Riemann de dos dimensiones. b) La *curvatura relativa* K^r , igual al producto de las curvaturas principales $1/R_1$, $1/R_2$ de S como superficie contenida en el espacio de curvatura constante considerado; es decir:

$$(3.1) \quad K^r = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

También utilizaremos la *curvatura media*, que entendemos siempre tomada con los radios R_1, R_2 , o sea

$$(3.2) \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Como los radios principales de curvatura R_1, R_2 van a jugar un papel fundamental en lo sucesivo, conviene que recordemos su significado geométrico. El estudio de la geometría diferencial de las superficies contenidas en un espacio de curvatura constante (y aun en muchos casos, para las contenidas en un

(*) Ver E. CARTAN, *loc. cit.*, págs. 96-99.

espacio de Riemann general) puede hacerse de manera análoga al de las superficies del espacio ordinario con sólo sustituir las rectas por geodésicas y el paralelismo ordinario por el de Levi-Civita⁽⁸⁾. Se demuestra así que por cada punto P de la superficie pasan dos curvas c_i ($i=1, 2$) normales entre sí, que tienen la propiedad de que la normal a la superficie en P , la tangente a c_i y la dirección que resulta al trasladar por paralelismo al punto P la normal a la superficie en el punto infinitamente próximo P' de c_i , están en un mismo elemento plano. Estas curvas son las *líneas de curvatura* de la superficie. Dos geodésicas del espacio, normales a S en dos puntos infinitamente próximos P, P' de la línea de curvatura c_i se cortarán⁽⁹⁾ en un punto O_i y la distancia $O_iP=r_i$ ($i=1, 2$) (medida sobre la geodésica del espacio) está ligada con el radio de curvatura principal R_i por la relación⁽¹⁰⁾

$$(3.3) \quad R_i = k^{-1} \tan kr_i,$$

que puede tomarse como definición de los radios de curvatura principales R_i .

La igualdad (3.3) es general para cualquier curva del espacio; es decir, el radio de curvatura relativo R de una curva del espacio, está ligado con el radio r del círculo osculador por la misma relación

$$(3.4) \quad R = k^{-1} \tan kr.$$

Geométricamente, la definición de círculo osculador es muy clara, pues es la misma que para el caso euclidiano; a partir de ella la relación (3.4) define entonces el radio de curvatura relativo de la curva. Con esta definición, se demuestra que para las curvas de una superficie valen sin modificación los teoremas de Meusnier y de Euler de la geometría euclidiana ordinaria⁽¹¹⁾.

⁽⁹⁾ Utilizamos aquí el lenguaje usual en geometría diferencial, que puede parecer no riguroso pero que lo es si se entiende bien el sentido que debe darse a las palabras. Decir que dos curvas infinitamente próximas del espacio "se cortan" quiere decir que pertenecen a un haz que tiene envolvente y el punto de encuentro de cada curva con su infinitamente próxima es su punto de contacto con la envolvente.

⁽¹⁰⁾ Ver por ejemplo L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, 1926, pág. 214.

⁽¹¹⁾ E. CARTAN, *loc. cit.*, pág. 201.

Es decir, si ϑ es el ángulo de la normal principal de una curva de la superficie con la normal a la superficie, entre el radio de curvatura R de la curva y el R_n de la sección normal vale la relación

$$(3.5) \quad R = R_n \cos \vartheta$$

y si la sección normal forma con una de las direcciones principales un ángulo φ , es

$$(3.6) \quad \frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

Volvamos ahora a la curvatura total absoluta K^a y relativa K^r de la superficie S . Si K es la curvatura total del espacio ambiente, se sabe que entre ambas existe la relación ⁽¹²⁾

$$(3.7) \quad K^r = K^a - K.$$

Sea $d\sigma$ el elemento de área de S . Si N es la característica de Euler de S , es conocida la fórmula ⁽¹³⁾

$$(3.8) \quad C^a = \int_S K^a d\sigma = -2\pi N$$

y por tanto, llamando F al área de S , de (3.7) se deduce

$$(3.9) \quad C^r = \int_S K^r d\sigma = -2\pi N - KF.$$

Las integrales C^a y C^r se llaman, respectivamente, la *curvatura total absoluta* y *relativa* de la superficie S .

Si la superficie S es cerrada y orientable, limitará un cuerpo Q y se puede introducir en (3.9) la característica de Euler

⁽¹²⁾ E. CARTAN, *loc. cit.*, pág. 194.

⁽¹³⁾ Ver por ejemplo W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie I*, pág. 166. Para la definición de la característica de Euler ver H. SEIFERT-W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, pág. 87, y para la relación (3.10), pág. 223.

N' de Q . Basta recordar que entre N y N' hay la relación simple

$$(3.10) \quad N = 2N'$$

con lo cual (3.9) se puede escribir

$$(3.11) \quad Cr = -4\pi N' - KF.$$

Interesa también recordar finalmente que en el espacio de curvatura constante K , el elemento de arco ds de un círculo de radio r correspondiente al ángulo central $d\alpha$, está dado por la fórmula

$$(3.12) \quad ds = k^{-1} \operatorname{sen} kr d\alpha.$$

4. Una expresión de Blaschke para la densidad cinemática. —

Para muchos propósitos es útil dar a la expresión (2.9) de la densidad cinemática otra forma más conveniente; es la forma dada por Blaschke para el caso del espacio euclidiano⁽¹⁴⁾ y que vamos a ver subsiste para el caso de los espacios de curvatura constante.

Sean S_0 y S_1 dos superficies con curvatura continua del espacio de curvatura constante K . Supongamos a S_0 fija y consideremos las distintas posiciones gS_1 de S_1 obtenidas sometiendo esta última superficie a las operaciones g del grupo de los movimientos del espacio. Hemos visto que g queda determinado por los elementos P , Ω , φ mencionados en el n.º. 2 y por medio de ellos la densidad cinemática toma la forma (2.9); obsérvese además que la dg no puede depender del punto P ni de las direcciones que sirven de referencia u origen para expresar Ω y φ , que se eligen para determinar g .

Supongamos una posición de S_1 en la que corte a S_0 . Sea P un punto de la curva de intersección y representemos por t a la tangente a esta curva en P . Sean, además, ϑ el ángulo que forman las normales a las dos superficies en P y ds_0 , ds_1 los elementos de arco de las curvas normales a t contenidas en S_0 y S_1 respectivamente. Si ds es el elemento de arco de la curva

⁽¹⁴⁾ W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 17, *Ueber Kinematik*, Deltion, Atenas, 1936.

de intersección correspondiente al punto P , el elemento de volumen del espacio puede expresarse

$$(4.1) \quad dP = \operatorname{sen} \vartheta \, ds \, ds_0 \, ds_1.$$

Si representamos por $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ los elementos de área de S_0 y S_1 en el punto P , es también

$$(4.2) \quad d\sigma_0 = ds \, ds_0, \quad d\sigma_1 = ds \, ds_1$$

y por tanto de (4.1) se deduce

$$(4.3) \quad [dP \, ds] = \operatorname{sen} \vartheta \, [d\sigma_0 \, d\sigma_1].$$

Por otra parte, tomando la dirección de t como dirección Ω que figura en (2.9) y llamando φ_0 , φ_1 a las rotaciones elementales alrededor de las normales a S_0 y S_1 en P , es

$$(4.4) \quad d\Omega = \operatorname{sen} \vartheta \, d\varphi_0 \, d\varphi_1$$

y además $d\varphi = d\vartheta$. Por tanto, multiplicando exteriormente las últimas igualdades resulta

$$(4.5) \quad [ds \, dg] = \operatorname{sen}^2 \vartheta \, [d\sigma_0 \, d\varphi_0 \, d\sigma_1 \, d\varphi_1],$$

que es la fórmula que deseábamos obtener.

Recordemos, aunque no lo digamos explícitamente cada vez, que las densidades, así como los productos exteriores análogos a los que figuran en ambos miembros de (4.5), se consideran siempre en valor absoluto.

5. *Curvatura total de la superficie de la intersección de dos cuerpos.* — Sean ahora Q_0 , Q_1 dos cuerpos del espacio de curvatura constante que suponemos acotados y limitados por las superficies S_0 , S_1 con curvaturas continuas. Supongamos Q_0 fijo y consideremos las distintas posiciones gQ_1 de Q_1 , o sea, los distintos cuerpos que se obtienen aplicando a Q_1 los movimientos g del espacio. El cuerpo intersección

$$(5.1) \quad Q_{01} = Q_0 \cdot gQ_1$$

estará limitado por una superficie cerrada S_{01} (que puede constar de varias partes separadas) formada por partes de S_0 y S_1 que se unen en la curva de intersección H de S_0 y S_1 , curva que será de discontinuidad para la curvatura de S_{01} .

La curvatura total relativa $Cr(Q_0 \cdot gQ_1)$ de S_{01} , definida por la integral (3.9), se compone de la integral Cr_{01} de la curvatura relativa de S_0 extendida sobre la parte de S_0 interior a gQ_1 , más la integral Cr_{10} de la curvatura relativa de S_1 extendida sobre la parte de la gS_1 que es interior a S_0 , más la parte Cr_i correspondiente a la curva de intersección de S_0 con gS_1 . Es decir

$$(5.2) \quad Cr = Cr_{01} + Cr_{10} + Cr_i.$$

Interesa tener una expresión de Cr_i , es decir, de la parte que debe atribuirse a la curva de intersección H al formar la curvatura total relativa de S_{01} . Un método para ello consiste en sustituir S_{01} por una superficie paralela próxima que tenga curvatura relativa continua en todos sus puntos; calcular para ella la curvatura total relativa y pasar luego al límite cuando la distancia entre las dos superficies paralelas tienda a cero. Haciendo esto, a la curva H corresponderá la banda de superficie generada de la manera siguiente: en cada punto P de H supongamos las normales n_0, n_1 a S_0, gS_1 y consideremos el arco de círculo de radio ε y centro P limitado por estas normales; cuando P recorre H este arco de círculo describirá una banda de superficie, que llamaremos B , cuya curvatura total relativa, para $\varepsilon \rightarrow 0$, es Cr_i . Para calcular esta curvatura total empecemos por calcular el elemento de área $d\sigma$ sobre B . Sobre los arcos de círculo considerados de radio ε , según (3.12) es

$$(5.3) \quad ds_1 = k^{-1} \operatorname{sen} k\varepsilon d\alpha$$

siendo α el ángulo entre el radio correspondiente y la normal principal de H en P . Estos arcos de círculo son líneas de curvatura de la banda B , por estar sus normales en un plano; las otras líneas de curvatura serán las secciones con B de las normales a H tangentes a las evolutas de esta curva. Por tanto, si $r + \varepsilon$ es la distancia de P al punto de contacto con la evoluta (distancia que dependerá de α) según (3.12), entre el elemento

de arco ds de H y el ds_2 de B normal a ds_1 existirá la relación

$$\frac{ds}{ds_2} = \frac{\text{sen } k(r+\varepsilon)}{\text{sen } kr}$$

de donde

$$(5.4) \quad ds_2 = \frac{\text{sen } kr}{\text{sen } k(r+\varepsilon)} ds.$$

Por tanto, según (5.3) y (5.4) será

$$(5.5) \quad d\sigma = ds_1 ds_2 = \frac{\text{sen } k\varepsilon \text{ sen } kr}{k \text{ sen } k(r+\varepsilon)} d\alpha ds.$$

Por otra parte, los radios principales de curvatura de B son $k^{-1} \tan k\varepsilon$ y $k^{-1} \tan kr$; por consiguiente, escribiendo la curvatura total relativa de B y haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta

$$(5.6) \quad Cr_i = \int \frac{k}{\tan kr} d\alpha ds$$

donde para cada valor de s , o sea cada punto P , α varía entre los ángulos α_0 , α_1 que las normales a S_0 , gS_1 forman con la normal principal de H ; después, s varía a toda la curva H .

Para ver cómo depende r de α , observemos que la distancia $r+\varepsilon$ del punto P al punto de contacto con la evoluta es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo osculador ρ y el ángulo comprendido es igual a α . Se tiene entonces, por una simple fórmula trigonométrica de los triángulos geodésicos rectángulos de los espacios de curvatura constante k ,

$$\tan k\rho = \cos \alpha \tan k(r+\varepsilon).$$

Por tanto, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ y sustituyendo en (5.6) resulta

$$Cr_i = \int_H \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{k \cos \alpha}{\tan k\rho} d\alpha ds$$

o sea

$$(5.7) \quad Cr_i = \int_H \frac{\text{sen } \alpha_1 - \text{sen } \alpha_0}{\tan k\rho} ds.$$

6. *Integral de la curvatura total relativa de la intersección de dos cuerpos.* — Hemos visto que la curvatura total relativa $Cr(Q_0 \cdot gQ_1)$ de la intersección de los cuerpos mencionados en el n.º. anterior se descomponía según expresa (5.2), donde la última parte está dada por (5.7). Nuestro objeto es ahora calcular la integral

$$(6.1) \quad \int_G Cr(Q_0 \cdot gQ_1) dg$$

donde dg es la densidad cinemática (2.9) y la integración está extendida a todo el grupo G de los movimientos del espacio de curvatura constante.

La integral de Cr_{01} se calcula inmediatamente por un artificio corriente en geometría integral. Si Kr_0 indica la curvatura relativa de S_0 en el punto cuyo elemento de área es $d\sigma_0$, consideremos la integral

$$\int Kr_0 d\sigma_0 dg$$

extendida, respecto σ_0 , a todos los puntos de S_0 interiores a gQ_1 y, respecto de g , a todo el grupo G . Si fijamos primero g e integramos respecto $d\sigma_0$ resulta precisamente la integral de Cr_{01} ; en cambio, si se fija primero σ_0 , según (2.10), es

$$\int Kr_0 d\sigma_0 dg = 8\pi^2 V_1 \int_{S_0} Kr_0 d\sigma_0 = 8\pi^2 V_1 Cr_0.$$

Por tanto se tiene

$$(6.2) \quad \int_G Cr_{01} dg = 8\pi^2 V_1 Cr_0.$$

Análogamente, por simetría debe ser

$$(6.3) \quad \int_{\tilde{G}} Cr_{10} dg = 8\pi^2 V_0 Cr_1$$

donde Cr'_0 y Cr'_1 son las curvaturas totales relativas de las superficies S_0 y S_1 que limitan los cuerpos Q_0 y Q_1 .

Queda por calcular la integral de Cr_i . Partimos de la expresión (5.7). Siendo α_i ($i=0,1$) los ángulos que forma la normal principal de H en P con la normal a S_i , el teorema de Meusnier, teniendo en cuenta (3.3), da

$$\tan k\rho = \tan kr_{in} \cos \alpha_i$$

de donde

$$\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1 = \tan k\rho (\tan^{-1} kr_{0n} + \tan^{-1} kr_{1n}).$$

Con esto, utilizando la relación

$$\frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_0} = \tan \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)$$

el valor (5.7) de Cr_i se puede escribir

$$Cr_i = k \int_{\tilde{H}} (\tan^{-1} kr_{0n} + \tan^{-1} kr_{1n}) \tan \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0) ds$$

o bien, introduciendo los radios de curvatura relativos R_{0n}, R_{1n} y poniendo $\alpha_1 - \alpha_0 = \alpha$,

$$(6.4) \quad Cr_i = \int_H \left(\frac{1}{R_{0n}} + \frac{1}{R_{1n}} \right) \tan \frac{1}{2} \alpha ds.$$

El teorema de Euler (3.6) permite ahora escribir

$$(6.5) \quad Cr_i = \int \left(\frac{\cos^2 \varphi_0}{R_{01}} + \frac{\sin^2 \varphi_0}{R_{02}} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{R_{11}} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{R_{12}} \right) \tan \frac{1}{2} \alpha ds$$

indicando con R_{i1} , R_{i2} los radios principales de curvatura de S_i . De aquí, teniendo en cuenta (4.5) y que el ángulo entre las normales a las superficies es ahora α en lugar de ϑ , resulta

$$(6.6) \quad \int_G Cr_i dg = \int_G \left(\frac{\cos^2 \varphi_0}{R_{01}} + \frac{\sin^2 \varphi_0}{R_{02}} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{R_{11}} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{R_{12}} \right) \tan \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \alpha d\sigma_0 d\varphi_0 d\sigma_1 d\varphi_1.$$

Al tener en cuenta todas las posiciones de Q_1 , o sea todos los movimientos g , el ángulo α varía entre $-\pi$ y $+\pi$ para cada valor de σ_0 , φ_0 , σ_1 , φ_1 , y por tanto, puesto que deben considerarse valores absolutos, resulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \tan \frac{1}{2} \alpha \right| \sin^2 \alpha d\alpha = 4.$$

Los ángulos φ_0 , φ_1 pueden variar, independientemente uno de otro, entre 0 y 2π , apareciendo las integrales de $\sin^2 \varphi$ y $\cos^2 \varphi$ que valen π . Haciendo esto, hay que dividir luego por 2, puesto que si para cualquier valor de φ_0 , φ_1 se incrementan ambos ángulos en π , resulta la misma posición de Q_1 o sea el mismo g . Poniendo finalmente

$$(6.7) \quad \frac{1}{2} \int_{S_i} \left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} \right) d\sigma_i = M_i \quad (i=0,1)$$

que son las *curvaturas medias totales* de S_i , resulta

$$\int_G Cr_i dg = 8\pi^2 (M_0 F_1 + M_1 F_0)$$

y juntando con (6.2) y (6.3) se tiene la fórmula final

$$(6.8) \quad \int_G Cr(Q_0 \cdot gQ_1) dg = 8\pi^2 (V_0 Cr_1 + V_1 Cr_0 + M_0 F_1 + M_1 F_0).$$

Es curioso que en este resultado no aparezca la curvatura del espacio. La fórmula (6.8) tiene, por tanto, idéntica forma para cualquier espacio de curvatura constante, en particular para el espacio euclidiano, en cuyo caso coincide con la llamada fórmula fundamental de Blaschke y es bien conocida (Ver notas ⁽¹⁾ y ⁽²⁾).

7. *Integral de la característica de Euler.* — De (6.8) y (3.11) es ya inmediato la obtención de la integral sobre G de la característica de Euler $N'(Q_0 \cdot gQ_1)$ del cuerpo Q_{01} intersección de Q_0 con gQ_1 . Para ello necesitamos únicamente conocer la integral del área F_{01} de la superficie que limita Q_{01} . Exactamente el mismo método seguido en el número anterior para hallar la integral de Cr_{01} y Cr_{10} da

$$(7.1) \quad \int_G F_{01} dg = 8\pi^2 (V_0 F_1 + V_1 F_0).$$

De aquí, teniendo en cuenta (6.8) y (3.11) resulta

$$(7.2) \quad \int_G N'(Q_0 \cdot gQ_1) dg = 8\pi^2 (N'_1 V_0 + N'_0 V_1) - 2\pi (M_0 F_1 + M_1 F_0)$$

donde N'_0 , N'_1 son las características de Euler de Q_0 y Q_1 . Esta es la *fórmula fundamental* buscada. Se observa nuevamente que ella no depende de la curvatura constante del espacio: es la misma que para el caso euclidiano.

Observaciones. a) El hecho de que en (7.2) no aparezca la curvatura del espacio no es general, sino que está relacionado con el número de dimensiones del espacio. Para dos dimensiones esto no ocurre. La fórmula análoga a la (7.2) para dos dimensiones es

$$(7.3) \quad \int_G N' dg = 2\pi (N'_0 F_1 + N'_1 F_0) + K F_0 F_1 - L_0 L_1,$$

siendo F_i las áreas, L_i las longitudes de los contornos y N'_i las características de Euler ($N' = -\text{vértices} + \text{aristas} - \text{caras}$) de los

dos recintos bidimensionales considerados del plano de curvatura constante K .

b) Para la demostración de (7.2) hemos utilizado (6.8) que fué establecida suponiendo que S_0 y S_1 tenían curvatura continua, lo cual es una condición muy restrictiva. Sin embargo, una vez establecida la (7.2), por continuidad, es fácil demostrar su validez para casos mucho más generales. Supongamos, por ejemplo, que S_0 y S_1 estén formadas por un número finito de casquetes superficiales (o «caras») cada uno con curvatura continua, pero unidos por aristas que sean curvas de discontinuidad para la curvatura. Entonces, redondeando las aristas para transformar S_0 y S_1 en superficies con curvatura continua y aplicando (7.2) a las nuevas superficies, al pasar al límite resulta la validez de (7.2) también en este caso. Sólo hay que aclarar el valor de la curvatura media M para cuerpos con aristas, lo cual se deduce del método seguido en el n.º 5. En efecto, la curvatura media en un punto de la banda B allí considerada era

$$\frac{1}{2} k (\tan^{-1} k\varepsilon + \tan^{-1} k r)$$

y por tanto, multiplicando por (5.5), integrando y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta que a la curvatura media total de las caras hay que agregar, como contribución de las aristas, el valor

$$(7.4) \quad M = \frac{1}{2} \int \alpha \, ds$$

siendo α el ángulo formado por las normales a caras a lo largo de las aristas y s la longitud de arco de éstas; α es función de s y la integración está extendida a todas las aristas de la superficie.

8. *Aplicación: La fórmula de Steiner para espacios de curvatura constante.* — Consideremos el caso particular de ser Q_0 y Q_1 dos cuerpos convexos; quiere decir que el arco de geodésica que une dos puntos cualesquiera de los mismos está íntegramente contenido en ellos. Entonces es $N'_0 = N'_1 = N' = -1$ y la fórmula fundamental (7.2) queda

$$(8.1) \quad \int dg = 8\pi^2 (V_0 + V_1) + 2\pi (M_0 F_1 + M_1 F_0).$$

donde la integración está extendida a todos los movimientos g para los cuales es $Q_0 \cdot g Q_1 \neq 0$.

Supongamos en particular que Q_1 sea una esfera de radio ρ . Entonces, tomando como punto P que figura en la expresión (2.9) de dg el centro de la esfera, para cada posición de P la integral de $dQ d\varphi$ da $8\pi^2$ y la integral de dP extendida a todas las posiciones en que es $Q_0 \cdot g Q_1 \neq 0$ es precisamente el *volumen del cuerpo paralelo exterior a Q_0 a distancia ρ* . Llamando V_0 a este volumen y siendo

$$M_1 = 4\pi k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho$$

$$F_1 = 4\pi k^{-2} \operatorname{sen}^2 k\rho$$

$$V_1 = 2\pi k^{-3} (k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho)$$

resulta

$$(8.2) \quad V_\rho = V_0 + F_0 k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho + M_0 k^{-2} \operatorname{sen}^2 k\rho + 2\pi k^{-3} (k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho),$$

que generaliza a los espacios de curvatura constante la *fórmula de Steiner* sobre el volumen del cuerpo paralelo exterior a un cuerpo convexo. Para $k=0$ se tiene la fórmula clásica de Steiner. Una demostración directa de (8.2) válida para el espacio de n dimensiones fué dada por C. B. Allendoerfer⁽¹⁵⁾. Para el caso bidimensional ver también E. Vidal Abascal⁽¹⁶⁾. El caso $K>0$ (espacio elíptico) se encuentra también en Ta-Jen Wu⁽²⁾; en este caso el valor de ρ debe ser menor que $(\pi/2)k^{-1}$, puesto que las geodésicas son de longitud finita igual a πk^{-1} .

9. *Generalización de unos resultados de O. Varga a los espacios de curvatura constante.* — A partir de la fórmula (4.5), que tiene la misma forma que para el espacio euclidiano, O. Varga obtuvo distintos valores medios de funciones definidas sobre la curva de intersección de dos superficies del espacio euclidiano,

⁽¹⁵⁾ C. B. ALLENDOERFER, *Steiner's formulae on a general S^n* , Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, 1948.

⁽¹⁶⁾ E. VIDAL ABASCAL, *A generalization of Steiner's formulae*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53, 1947.

cuando una de ellas se supone fija y la otra móvil sin deformación a todas las posiciones posibles⁽¹⁷⁾.

Todas las fórmulas obtenidas por Varga valen lo mismo para los espacios de curvatura constante, con sólo sustituir las curvaturas absolutas por las relativas respecto el espacio ambiente. Mencionaremos, como ejemplo, tan sólo una de ellas, que conduce a la generalización a los espacios de curvatura constante (o, si se quiere, a las geometrías no euclidianas) de un teorema dado por Varga para el espacio euclidiano.

Sean, como siempre, S_0 y S_1 dos superficies con curvatura continua de un espacio de curvatura constante. No hace falta suponer ahora que ellas limiten un cuerpo del espacio: pueden ser abiertas o cerradas no-orientables. Sea, como antes, H la curva de intersección de S_0 con gS_1 . Sea τ la torsión de H en el punto P (se entiende torsión relativa, o sea, respecto la métrica del espacio) y s el arco de H . Llamando α_0 al ángulo de la normal principal de H con la normal a S_0 y φ_0 el ángulo de la tangente a H con la primera dirección principal de S_0 (todo en el punto P), se sabe que vale la fórmula⁽¹⁸⁾

$$(9.1) \quad \tau = -\frac{d\alpha_0}{ds} + \left(\frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}\right) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

en la cual R_{02} , R_{01} son los radios principales de curvatura de S_0 en P . Esta fórmula tiene idéntica forma que para el espacio ordinario.

Análogamente para S_1 vale

$$(9.2) \quad \tau = -\frac{d\alpha_1}{ds} + \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}}\right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1$$

y por tanto, restando ambas expresiones y llamando $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ al ángulo de las dos superficies en P , queda

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}}\right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \left(\frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}\right) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

⁽¹⁷⁾ O. VARGA, *Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 41, 1936.

⁽¹⁸⁾ E. CARTAN, *loc. cit.*, pág. 99.

Elevando al cuadrado y poniendo para abreviar

$$\Delta_1 = \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}}, \quad \Delta_0 = \frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}$$

queda

$$(9.3) \quad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \Delta_1^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + \Delta_0^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 - 2\Delta_1 \Delta_0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0.$$

Multipliquemos miembro a miembro esta igualdad con la (4.5) e integremos a todo el grupo G . En el segundo miembro hay que integrar α , φ_1 , φ_0 de 0 a 2π y luego dividir por 2 por el hecho de corresponder cada par de valores φ_0 , φ_1 y $\varphi_0 + \pi$, $\varphi_1 + \pi$ a una misma gS_1 . Siendo

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \pi$$

y observando que la integral del término negativo de la expresión (9.3) es nula, queda

$$(9.4) \quad \int_G \left(\int_{\tilde{H}} \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 ds \right) dg = \frac{\pi^3}{4} \left[F_0 \int_{S_1} \Delta_1^2 F d\sigma_1 + F_1 \int_{S_0} \Delta_0^2 d\sigma_0 \right].$$

Esta es la fórmula obtenida por Varga para el espacio euclidiano y que vale igualmente para los espacios de curvatura constante. De ella se deduce que si $\alpha = \text{constante}$, deben ser $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ y por tanto las superficies deben tener todas sus puntos umbílicos, o sea, deben ser esferas o partes de superficie esférica. Se puede, pues, enunciar:

Si el ángulo en que se cortan dos superficies de un espacio de curvatura constante, es constante a lo largo de la línea de intersección para toda posición de las superficies, ellas son esferas o partes de superficies esféricas (incluidos los planos como esferas de radio infinito).

10. *Fórmula fundamental para planos.* — Ya definimos en

el n.º 2 la densidad para conjuntos de planos, o sea el elemento de volumen invariante del espacio homogéneo G/E . Veamos ahora cómo se generaliza la fórmula (7.2) para el caso en que en lugar de Q_1 tenemos un plano móvil e .

Necesitamos primeramente obtener una fórmula análoga a la (4.5). Para ello consideremos una posición de e en la que corta a una superficie fija S_0 . Sea P un punto de la curva de intersección H y n_0, n_1 las normales a S_0 y a e en P . Tomemos la expresión (2.13) para de . Si ϑ es el ángulo entre n_0 y n_1 y φ_0 indica la rotación alrededor de n_0 que determina la posición del plano n_0, n_1 es $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Por otra parte, si ds_0 es el elemento de arco sobre S_0 normal a H , es $dt = \sin \vartheta ds_0$. Por tanto será $de = \sin^2 \vartheta [d\vartheta d\varphi ds_0]$. Introduciendo en ambos miembros el elemento de arco ds de H y llamando $d\sigma_0$ al elemento de área de S_0 correspondiente al punto P , se tiene la fórmula buscada

$$(10.1) \quad [ds de] = \sin^2 \vartheta [d\vartheta d\sigma_0 d\varphi_0].$$

Sea ahora un cuerpo fijo Q_0 limitado por la superficie S_0 , cerrada y con curvatura continua. Sea e un plano que corta a Q_0 y consideremos un punto P de la curva de intersección H . Multipliquemos ambos miembros de (10.1) por la curvatura geodésica κ_g de H , considerada como curva de e , en P . Por ser e un plano, esta curvatura geodésica coincide con la curvatura ordinaria (se entiende relativa al espacio de curvatura constante que consideramos). Por el teorema de Meusnier, si R_n es el radio de curvatura de la sección normal de S_0 tangente a H , será

$$(10.2) \quad 1/\kappa_g = R_n \sin \vartheta$$

y por tanto, recordando la fórmula de Euler y la definición de curvatura media

$$\int_{G/E} \left(\int_H \kappa_g ds \right) de = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \vartheta| d\vartheta \int_{S_0} d\sigma_0 \int_0^\pi \left(\frac{\cos^2 \varphi_0}{R_{01}} + \frac{\sin^2 \varphi_0}{R_{02}} \right) d\varphi_0 = 2\pi M_0.$$

Por otra parte, la fórmula de Gauss-Bonnet aplicada al

el n.º 2 la densidad para conjuntos de planos, o sea el elemento de volumen invariante del espacio homogéneo G/E . Veamos ahora cómo se generaliza la fórmula (7.2) para el caso en que en lugar de Q_1 tenemos un plano móvil e .

Necesitamos primeramente obtener una fórmula análoga a la (4.5). Para ello consideremos una posición de e en la que corta a una superficie fija S_0 . Sea P un punto de la curva de intersección H y n_0, n_1 las normales a S_0 y a e en P . Tomemos la expresión (2.13) para de . Si ϑ es el ángulo entre n_0 y n_1 y φ_0 indica la rotación alrededor de n_0 que determina la posición del plano n_0, n_1 es $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Por otra parte, si ds_0 es el elemento de arco sobre S_0 normal a H , es $dt = \sin \vartheta ds_0$. Por tanto será $de = \sin^2 \vartheta [d\vartheta d\varphi ds_0]$. Introduciendo en ambos miembros el elemento de arco ds de H y llamando $d\sigma_0$ al elemento de área de S_0 correspondiente al punto P , se tiene la fórmula buscada

$$(10.1) \quad [ds de] = \sin^2 \vartheta [d\vartheta d\sigma_0 d\varphi_0].$$

Sea ahora un cuerpo fijo Q_0 limitado por la superficie S_0 , cerrada y con curvatura continua. Sea e un plano que corta a Q_0 y consideremos un punto P de la curva de intersección H . Multipliquemos ambos miembros de (10.1) por la curvatura geodésica κ_g de H , considerada como curva de e , en P . Por ser e un plano, esta curvatura geodésica coincide con la curvatura ordinaria (se entiende relativa al espacio de curvatura constante que consideramos). Por el teorema de Meusnier, si R_n es el radio de curvatura de la sección normal de S_0 tangente a H , será

$$(10.2) \quad 1/\kappa_g = R_n \sin \vartheta$$

y por tanto, recordando la fórmula de Euler y la definición de curvatura media

$$\int_{G/E} \left(\int_H \kappa_g ds \right) de = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \vartheta| d\vartheta \int_{S_0} d\sigma_0 \int_0^\pi \left(\frac{\cos^2 \varphi_0}{R_{01}} + \frac{\sin^2 \varphi_0}{R_{02}} \right) d\varphi_0 = 2\pi M_0.$$

Por otra parte, la fórmula de Gauss-Bonnet aplicada al

plano e y a la curva H de intersección del mismo con S_0 , nos dice que es

$$\int_H \kappa_g ds = -2\pi N' - K F_{01}$$

siendo F_{01} el área de la intersección de e con Q_0 (área limitada por H y que puede constar de varios pedazos separados) y N' la característica de Euler de esta área. Siendo además, como es fácil calcular por analogía con el caso euclidiano,

$$\int F_{10} de = 2\pi V_0$$

siendo V_0 el volumen de Q_0 , resulta la fórmula integral

$$(10.3) \quad \int_{G/E} N' de = -M_0 - K V_0.$$

Esta fórmula es conocida para los casos $K=0$ (ver ⁽¹⁾) y $K=1$ (ver ⁽²⁾). Si Q_0 es convexo, tal que la curva de intersección H conste siempre de un solo pedazo, será $N'=-1$ si e corta a Q_0 y $N'=0$ en caso contrario. Por tanto en este caso es

$$(10.4) \quad \int_{e \cdot Q_0 \neq \emptyset} de = M_0 + K V_0$$

que nos da la medida del conjunto de planos que cortan a un cuerpo convexo del espacio de curvatura constante K .

Como esta medida no puede ser negativa, se deduce:

Entre la curvatura media M_0 y el volumen V_0 de todo cuerpo convexo del espacio de curvatura constante y negativa $K=-1/a^2$ existe la relación

$$(10.5) \quad V_0 < a^2 M_0.$$

11. Una interpretación de la fórmula fundamental para cuerpos convexos. — Sea Q_0 un cuerpo convexo del espacio de curvatura constante K y sean V_0 su volumen, F_0 su área y M_0

su integral de curvatura media. La medida del conjunto de planos que tienen punto común con Q_0 está dada por (10.4): la representaremos ahora por e_0 , o sea,

$$(11.1) \quad e_0 = M_0 + K V_0.$$

La medida del conjunto de puntos contenidos en Q_0 es su volumen; representándolo por p_0 será

$$(11.2) \quad p_0 = V_0.$$

La medida del conjunto de rectas que tienen punto común con Q_0 se deduce inmediatamente de (2.18) exactamente igual que para el caso euclidiano o elíptico (notas ⁽¹⁾ y ⁽²⁾), resultando valer

$$(11.3) \quad r_0 = \frac{1}{2} \pi F_0.$$

Con esto, suponiendo ahora otro cuerpo convexo móvil Q_1 , la medida del conjunto de posiciones de Q_1 en las cuales tiene punto común con Q_0 , que ya vimos está dada por (8.1), se puede escribir

$$(11.4) \quad \int_{Q_0 \cdot g Q_1 = 0} dg = 8\pi^2 (p_0 + p_1) + 4 (e_0 r_1 + e_1 r_0) - 4K (p_0 r_1 + p_1 r_0),$$

que no da dicha medida cuando se toman como invariantes de los cuerpos convexos las medidas de los puntos que contienen y de los planos y rectas que los cortan.

LA DIFERENCIAL EN LOS ESPACIOS METRICOS AFINES

por

MANUEL BALANZAT

1. La extensión del concepto de diferencial a las transformaciones entre espacios abstractos fué hecha, por primera vez, por Fréchet ⁽¹⁾ para las transformaciones de un espacio métrico vectorial en otro espacio del mismo tipo. La definición dada era la generalización de la de Stolz para las funciones de varias variables reales: $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Recordemos ⁽²⁾ que un espacio métrico vectorial es aquel en que la distancia entre dos puntos es igual a la longitud del vector que dichos puntos determinan.

Una transformación $X = f(x)$ entre los puntos de dos espacios métricos vectoriales se dice que es diferenciable en el punto x_0 si existe una transformación lineal (es decir distributiva y continua) $U(x)$ tal que

$$\Delta X = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = U(\Delta x) + \varepsilon \|\Delta x\|$$

con la condición

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\varepsilon\| = 0$$

(en donde con la notación $\|\alpha\|$ se designa la longitud del vector α). La transformación lineal $U(\Delta x)$ es la diferencial de $f(x)$ en el punto x_0 .

⁽¹⁾ M. FRÉCHET, *La notion de différentielle dans l'analyse générale* (Ann. scient. Ecole Norm. sup., 3^a série, t. 42, 1925).

⁽²⁾ M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits* (Paris, 1928), página 140.

Fréchet ⁽¹⁾ demostró que esta definición de la diferencial conserva las propiedades esenciales de la definición del Análisis clásico (unicidad, continuidad de la función diferenciable, teorema de la función de función, toda función cuya diferencial es nula en un recinto es constante en dicho recinto, etc.).

2. En lugar de la definición de Stolz puede tomarse, dentro del Análisis clásico, la dada por Hadamard ⁽²⁾ en forma operatoria. Según dicha definición la diferencial de una función $f(x, y)$ es una expresión

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

tal que cualesquiera que sean las funciones derivables de una variable real: $x = x(t)$; $y = y(t)$, la función $F(t) = f[x(t), y(t)]$ sea diferenciable y se verifique que

$$dF(t) = A[x(t), y(t)] dx + B[x(t), y(t)] dy.$$

Esta definición puede igualmente extenderse al caso de las transformaciones entre elementos de espacios métricos vectoriales en la forma siguiente:

De la misma forma que la definición de Hadamard para la diferencial de una función de varias variables supone la definición previa de la diferenciabilidad de las funciones de una variable real, en el caso de los espacios métricos vectoriales hay que definir previamente la diferencial para las transformaciones de un número real en un elemento de un espacio métrico vectorial. Para ello se utiliza la definición de Stolz que se puede modificar, en este caso particular, de la manera siguiente:

Sea $x = g(\lambda)$, en donde λ es un número real y x un elemento de un espacio métrico vectorial, una transformación diferenciable en el punto λ_0 . Existe entonces una transformación lineal $U(\lambda)$ tal que

$$\Delta x = U(\Delta \lambda) + \varepsilon |\Delta \lambda|$$

con la condición

$$\lim_{|\Delta \lambda| \rightarrow 0} \|\varepsilon\| = 0.$$

⁽²⁾ J. HADAMARD, *La notion de différentielle dans l'enseignement* (Scripta Univ. Ab. Bib. Hierosolymitanarum, (Jerusalem, 1923).

Por la linealidad de $U(\lambda)$ la igualdad anterior puede ponerse en la forma

$$\Delta x = \Delta \lambda U(1) + \varepsilon |\Delta \lambda|$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\Delta x}{\Delta \lambda} = U(1) \pm \varepsilon$$

con la condición

$$\lim_{|\Delta \lambda| \rightarrow 0} \|\varepsilon\| = 0.$$

Es por consiguiente equivalente la existencia de la transformación lineal $U(\lambda)$ a la existencia del elemento $U(1)$ con las condiciones mencionadas. El elemento $U(1)$ puede decirse que es la derivada vectorial de la transformación $x = g(\lambda)$ en el punto λ_0 ; se la designa con la notación $g'(\lambda_0)$. Pasemos al caso general:

Una transformación $X = f(x)$ entre los puntos de dos espacios métricos vectoriales se dice que es diferenciable en el punto x_0 si existe una transformación lineal $U(x)$ tal que para toda transformación $x = g(\lambda)$, en donde λ es un número real, diferenciable en el punto λ_0 y tal que $g(\lambda_0) = x_0$, la transformación $X = f[g(\lambda)]$ sea diferenciable y $f'[g(\lambda_0)] = U[g'(\lambda_0)]$.

3. Esta definición es debida a Fréchet⁽⁴⁾, quien estudió las relaciones entre ambas definiciones de la diferencial y probó que la segunda era más general que la primera, es decir que si bien toda transformación diferenciable en el sentido de Stolz lo es el de Hadamard, existen transformaciones que son diferenciables en el segundo sentido sin serlo en el primero. Ambas definiciones son sin embargo equivalentes en el Análisis clásico.

El estudio de las propiedades de la diferencial de Hadamard-Fréchet, problema que este último planteó, fué hecho por uno de sus discípulos, Ky-Fan, en su tesis, en donde probó que dicha

(4) M. FRÉCHET, *Sur la notion de différentielle* (Journ. de Math., t. 16, 1937); ver igualmente *Melanges mathématiques* (Comptes Rendus del Congreso de Oslo).

diferencial conserva las propiedades esenciales de la diferencial del Análisis clásico⁽⁵⁾.

En dicha tesis se ocupó también Ky-Fan de la extensión de la definición de Hadamard-Fréchet al caso más general de las transformaciones entre espacios métricos afines, pero, como él mismo lo hizo observar, la definición adoptada no cumplía las propiedades esenciales; en particular, una función diferenciable podía no ser continua.

El objeto de este trabajo es dar una definición de diferencial para las transformaciones entre espacios métricos afines, que comprenda a la de Hadamard-Fréchet, como caso particular cuando dichos espacios sean métricos vectoriales, y que conserve las propiedades esenciales de la definición del Análisis clásico.

4. Recordamos⁽⁶⁾ que un espacio métrico afín es aquel en que la distancia entre dos puntos puede no ser igual a la longitud del vector que dichos puntos determinan, pero en el que ambos números tienen que estar relacionados por las siguientes condiciones:

1º. Las traslaciones y las homotecias son operaciones bi-continuas.

2º. Sobre cada recta abstracta, tomada aisladamente, la distancial (A, B) entre dos puntos de dicha recta y la longitud $\|AB\|$ del vector que dichos puntos determinan no pueden ser (al variar B y quedar fijo A) infinitésimas, más que simultáneamente.

Es fácil ver que esta generalización no es arbitraria, ya que existen espacios métricos importantes en los que, cuando se asocia al espacio un campo de vectores abstractos definido teniendo en cuenta la naturaleza de los puntos de dicho espacio, es imposible definir una longitud que pueda ser igual a una distancia, definida en el espacio y compatible con su topología.

Así por ejemplo tomemos el espacio E_ω ⁽⁷⁾ en el que cada punto X viene definido como una sucesión de números reales, sus coordenadas: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; y en el que $X^n \rightarrow X$ si las coordenadas de X^n tienden, sin ninguna condición de uniformidad, a las coordenadas de X .

⁽⁵⁾ KY-FAN, *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale* (Journ. de Math., t. 21, 1942).

⁽⁶⁾ M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, pág. 144.

⁽⁷⁾ M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, pág. 81.

Un campo de vectores asociado a E_ω , si ha de definirse de una forma natural, tiene que ser tal que la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un número real correspondan a las mismas operaciones realizadas con las coordenadas.

En estas condiciones, cualquiera que sea la definición que se adopte de longitud no podrá nunca coincidir con una distancia definida en E_ω y que conserve la convergencia. En efecto:

Consideremos los puntos $P^n(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ cuyas coordenadas son todas nulas, salvo la enésima que es igual a la unidad; sea

$$l_n = \|O P^n\|$$

Tomemos los puntos $Q^n(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{l_n}, 0, \dots)$ de coordenadas todas nulas, salvo la enésima que es igual a $\frac{1}{l_n}$ y tendremos

$$\|O Q^n\| = \frac{1}{l_n} \|O P^n\| = 1$$

(en donde O es el vector cuyas coordenadas son todas nulas).

La sucesión de los puntos Q^n converge hacia el punto O , luego, cualquiera que sea la definición que se tome de distancia, compatible con la convergencia, las distancias (O, Q^n) tienden hacia cero, luego no pueden ser todas iguales a la unidad, es decir tiene que haber algunas diferentes de la longitud $\|O Q^n\|$.

Nosotros supondremos además, en los espacios métricos afines que vamos a estudiar, una condición suplementaria: *las distancias se conservan en toda traslación*. Esta condición es satisfecha por los espacios métricos afines más importantes (espacio E_ω , espacio de las funciones enteras, espacio de las funciones medibles, espacio de los polinomios, espacio R)⁽⁸⁾.

5. Veamos ahora cómo se puede definir la diferencial. Comenzaremos por el caso en que la variable independiente sea un número real.

La transformación $x = g(\lambda)$, en donde λ es un número real y x un elemento de un espacio métrico afín e , es diferenciable en

⁽⁸⁾ M. FRECHET, *Les espaces abstraits*, pág. 145.

el punto λ_0 si existe un elemento del espacio e , que designaremos con la notación $g'(\lambda_0)$, tal que

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) g'(\lambda_0) + \omega$$

con la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

en donde la notación $(\omega, 0)$ designa la distancia del vector ω al origen (vector de longitud nula). La transformación lineal $\lambda g'(\lambda_0)$ es la diferencial de $g(\lambda)$ en el punto λ_0 .

Si e es un espacio métrico vectorial, poniendo

$$\varepsilon = \frac{\omega}{|\lambda - \lambda_0|}$$

tendremos

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) g'(\lambda_0) + \varepsilon |\lambda - \lambda_0|$$

$$\frac{(\omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{\|\omega\|}{\lambda - \lambda_0} = \pm \frac{\|\omega\|}{|\lambda - \lambda_0|} = \pm \|\varepsilon\|$$

lo que prueba que esta definición comprende a la de Hadamard-Fréchet en el caso particular en que e sea un espacio métrico vectorial.

Para el caso general, la definición tiene la misma forma que la definición en los espacios métricos vectoriales.

Una transformación $X = f(x)$ entre los puntos de dos espacios métricos afines e y E se dice diferenciable en el punto x_0 , si existe una transformación lineal $U(x)$, tal que para toda transformación $x = g(\lambda)$, en donde λ es un número real, diferenciable en el punto λ_0 y tal que $x_0 = g(\lambda_0)$, la transformación

$$X = \phi(\lambda) = f[g(\lambda)]$$

es diferenciable y se tiene

$$\phi'(\lambda_0) = U[g'(\lambda_0)].$$

La transformación lineal U es la diferencial de $f(x)$ en el punto x_0 .

6. Vamos a demostrar ahora que esta definición conserva las propiedades esenciales de la definición en el Análisis clásico.

Teorema. — *La diferencial es única.*

Supongamos que hubiese otra transformación lineal $V(x)$ que pudiese desempeñar el mismo papel que la diferencial $U(x)$.
Tomemos

$$g(\lambda) = x_0 + (\lambda - \lambda_0) x_1$$

siendo x_1 un punto cualquiera de e . Tendremos

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = x_1(\lambda - \lambda_0)$$

luego

$$g'(\lambda_0) = x_1$$

y por lo tanto, según la hipótesis hecha sobre V ,

$$U(x_1) = V(x_1)$$

y como x_1 es un punto cualquiera de e , está probado que ambas transformaciones son idénticas.

7. Teorema: *Si una transformación es diferenciable en un punto es continua en dicho punto.*

Sea $X = f(x)$ una transformación diferenciable en el punto x_0 y sea $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ una sucesión de puntos de e que converja hacia x_0 , es decir, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x_0) = 0$.

Llamemos $\varphi(n) = (x_n, x_0)$; siempre podemos suponer, eliminando de la sucesión los puntos que fuere necesario, que $\varphi(n) < \varphi(n-1)$. Sea ahora

$$\lambda_n = \lambda_0 + \sqrt{\varphi(n)}$$

en donde λ_0 es un número real cualquiera.

Definamos la transformación $x=g(\lambda)$, en donde λ es un número real, de la manera siguiente:

para $\lambda \leq \lambda_0$, $g(\lambda) = x_0$; en particular $g(\lambda_0) = x_0$

para $\lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}$, $g(\lambda) = x_n$.

La transformación $g(\lambda)$ es diferenciable en el punto λ_0 y además $g'(\lambda_0) = 0$. En efecto: bastará probar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \eta = 0, \quad \text{siendo } \eta = \frac{[g(\lambda) - g(\lambda_0)], 0)}{\lambda - \lambda_0}$$

Ahora bien, si $\lambda < \lambda_0$ es $g(\lambda) = g(\lambda_0)$, luego $\eta = 0$; y si $\lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}$ entonces $g(\lambda) = x_n$, luego

$$\eta = \frac{((x_n - x_0), 0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(x_n, x_0)}{\lambda - \lambda_0} \leq \frac{\varphi(n)}{\lambda_n - \lambda_0} = \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\varphi(n)}} = \sqrt{\varphi(n)}$$

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \eta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\varphi(n)} = 0; \text{ es decir } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \eta = 0.$$

Ahora bien, la transformación $f(x)$, siendo diferenciable, la transformación $\psi(\lambda) = f[g(\lambda)]$ es también diferenciable y

$$\psi(\lambda_0) = U(0), \text{ luego como } U \text{ es lineal, } \psi'(\lambda_0) = 0.$$

Se tiene entonces que verificar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{([f(g(\lambda)) - f(g(\lambda_0))], 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{([f(x_n) - f(x_0)], 0)}{\lambda_n - \lambda_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(f(x_n), f(x_0))}{\sqrt{\varphi(n)}} = 0$$

lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n), f(x_0)) = 0$$

y como esto se verifica cualquiera que sea la sucesión de puntos que converja hacia x_0 , queda así probada la continuidad de $F(x)$ en dicho punto.

8. Teorema: *La condición necesaria y suficiente para que una transformación $X=F(x)$, definida en un esferoide de centro x_0 , sea una constante es que su diferencial sea, en todos los puntos del esferoide, la transformación lineal idénticamente nula.*

La necesidad de la condición es inmediata si se tiene en cuenta el teorema ya demostrado sobre la unicidad de la definición.

Vamos ahora a demostrar que es suficiente:

Sea x_1 un punto cualquiera del esferoide y consideremos la transformación

$$g(\lambda) = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$$

en donde λ es un número real.

Se ve inmediatamente que $g'(\lambda) = x_1 - x_0$, cualquiera que sea λ , y como $F(x)$ es diferenciable y su diferencial es nula, tendremos

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{([F(x_0 + (\lambda + \Delta\lambda)(x_1 - x_0)) - F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0))], 0)}{\Delta\lambda} = 0.$$

Consideremos la función numérica

$$h(\lambda) = (F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0)), F(x_0))$$

y tendremos

$$\begin{aligned} \frac{h(\lambda + \Delta\lambda) - h(\lambda)}{\Delta\lambda} &= \\ \frac{(F(x_0 + (\lambda + \Delta\lambda)(x_1 - x_0)), F(x_0)) - (F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0)), F(x_0))}{\Delta\lambda} \end{aligned}$$

Por la triangularidad de la distancia

$$\left| \frac{h(\lambda + \Delta\lambda) - h(\lambda)}{\Delta\lambda} \right| \leq \frac{(F(x_0 + (\lambda + \Delta\lambda)(x_1 - x_0)), F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0)))}{|\Delta\lambda|}$$

$$|h'(\lambda)| = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{h(\lambda + \Delta\lambda) - h(\lambda)}{\Delta\lambda} \right|$$

$$\leq \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{([F(x_0 + (\lambda + \Delta\lambda)(x_1 - x_0)) - F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0))], 0)}{|\Delta\lambda|} = 0.$$

Luego $h'(\lambda)$ es nula para cualquier valor de λ y entonces

$$h(\lambda) = (F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0)), F(x_0)) = \text{constante}.$$

Tomemos $\lambda = 0$

$$h(0) = (F(x_0), F(x_0)) = 0$$

luego la constante $h(\lambda)$ es nula, es decir que

$$F(x_0 + \lambda(x_1 - x_0)) = F(x_0)$$

y si hacemos ahora $\lambda = 1$, tendremos

$$F(x_1) = F(x_0),$$

pero como x_1 es un punto cualquiera del esferoide se ve que $F(x)$ es constante sobre dicho esferoide y el teorema queda así demostrado.

El teorema anterior se extiende al caso en que en lugar de un esferoide la transformación está definida en un conjunto abierto y conexo.

Al igual que antes basta con demostrar que la condición es suficiente.

Sea A el conjunto de definición de $f(x)$ y x_0 un punto cualquiera de A . Si para todos los x de A es $f(x) = f(x_0)$ el teorema está demostrado. En caso contrario, descompongamos el conjunto A en los dos subconjuntos

$$E = \text{conjunto de puntos de } A \text{ en que } f(x) = f(x_0).$$

$$F = \text{conjunto de puntos de } A \text{ en que } f(x) \neq f(x_0).$$

Los dos subconjuntos son no vacíos y sin puntos comunes. Por ser A conexo, el conjunto

$$M = (E' \cap F) \cup (E \cap F')$$

no es vacío.

Sea ahora a un punto de M , como pertenece a E o a F , pertenece a A , luego existe un esferoide de centro a contenido en A ; sobre dicho esferoide la transformación $f(x)$ es constante, por el teorema anterior; ahora bien, en el esferoide tiene que haber forzosamente puntos de E y F , ya que su centro pertenece a uno de ellos y es punto de acumulación del otro, lo cual está en contradicción con la definición de los conjuntos E y F .

9. Teorema: Sean $X=f(x)$ e $Y=F(X)$ dos transformaciones diferenciables (los puntos x , X e Y perteneciendo a los espacios métricos afines e , E y $\mathcal{E}$ respectivamente); sean $U(x)$ y $V(X)$ las diferenciales de f y F respectivamente. Entonces la transformación $Y=\phi(x)=F[f(x)]$ es diferenciable y su diferencial $W(x)$ es igual a $V[U(x)]$.

Sea x_0 un punto de diferenciabilidad de $f(x)$ y $X=f(x_0)$. Por hipótesis X_0 es un punto de diferenciabilidad de $F(X)$.

Sea $x=g(\lambda)$, en donde λ es un número real, una transformación diferenciable en el punto λ_0 y tal que $x_0=g(\lambda_0)$.

Por la diferenciabilidad de $f(x)$, la transformación

$$X=\varphi(\lambda)=f[g(\lambda)]$$

es diferenciable y

$$\varphi'(\lambda_0)=U[g'(\lambda_0)].$$

Por la diferenciabilidad de $F(X)$

$$F[\varphi(\lambda)]-F[\varphi(\lambda_0)]=(\lambda-\lambda_0)V[\varphi'(\lambda_0)]+\omega$$

con la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$F[f[g(\lambda)]] - F[f[g(\lambda_0)]] = (\lambda - \lambda_0) V[U[g'(\lambda_0)]] + \omega$$

es decir

$$\Phi[g(\lambda)] - \Phi[g(\lambda_0)] = (\lambda - \lambda_0) V[U[g'(\lambda_0)]] + \omega$$

y poniendo

$$W(x) = V[U(x)]$$

tendremos

$$\Phi[g(\lambda)] - \Phi[g(\lambda_0)] = (\lambda - \lambda_0) W[g'(\lambda_0)] + \omega$$

siempre con la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

y como este resultado es válido cualquiera que sea $g(\lambda)$ diferenciable en un punto λ_0 y tal que $g(\lambda_0) = x_0$, y como, por otra parte $W(x)$ es lineal, ya que

$$\begin{aligned} W(x_1) + W(x_2) &= V[U(x_1)] + V[U(x_2)] = \\ &= V[U(x_1) + U(x_2)] = V[U(x_1 + x_2)] = W(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

y toda transformación continua de transformación continua es continua, el teorema está demostrado.

10. Consideremos el caso en que un punto Y de un espacio métrico afín $\mathcal{C}$ dependa de varios puntos, en número finito, $x_1, x_2, \dots, x_n$, pertenecientes respectivamente a n espacios métricos afines $e_1, e_2, \dots, e_n$. Se puede decir que tenemos en este caso una transformación $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de varias variables.

Esta transformación se reduce a una transformación $Y = F(X)$ de una sola variable, siendo X un punto del espacio E producto de los $e_1, e_2, \dots, e_n$, es decir que cada punto de E es un conjunto ordenado de puntos de $e_1, e_2, \dots, e_n$: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

La distancia entre dos puntos $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ puede definirse como

$$(P, Q) = (x_1 y_1) + (x_2 y_2) + \dots + (x_n y_n)$$

y es inmediato que esta definición tiene las propiedades exigidas a la distancia en los espacios métricos.

Definiremos la suma de dos vectores y la multiplicación por un número real mediante las mismas operaciones realizadas con las componentes, y la longitud del vector PQ como

$$\|PQ\| = \|x_1 y_1\| + \|x_2 y_2\| + \dots + \|x_n y_n\|$$

Es inmediato que queda así definido un campo vectorial asociado al espacio.

Si suponemos que las distancias eran invariantes en toda traslación en los espacios $e_1, e_2, \dots, e_n$, también será invariante la distancia en toda traslación en el espacio E . Basta, en efecto, observar que las componentes del punto P' transformado del P mediante una traslación en E , son las transformadas de las componentes de P mediante traslaciones en $e_1, e_2, \dots, e_n$.

De una manera análoga se ve que las homotecias son transformaciones bicontinuas.

Finalmente si el punto P recorre una recta abstracta en E , sus componentes recorren rectas en $e_1, e_2, \dots, e_n$, lo que prueba que sobre una misma recta abstracta las longitudes y las distancias no pueden ser infinitésimas más que simultáneamente.

En resumen, se ve que si los $e_1, e_2, \dots, e_n$ son espacios métricos afines que tienen la propiedad de conservar invariantes las distancias en toda traslación, *el espacio E es un espacio métrico afín que tiene la misma propiedad.*

11. Vamos ahora a definir la diferencial para las transformaciones de varias variables.

Diremos que la transformación $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ si lo es la transformación $Y = F(X)$, siendo X un punto del espacio E producto de los $e_1, e_2, \dots, e_n$ en el punto $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Vamos ahora a generalizar para esta definición algunos de los teoremas esenciales de la diferencial en el Análisis clásico.

Teorema: Si $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, la transformación $Y = F^0_i(x_i) = F(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ es también diferenciable en el punto x_i^0 .

En efecto, sea una transformación cualquiera $x_i = h_i(\lambda)$, en donde λ es un número real, diferenciable en un punto λ_0 y tal que $h_i(\lambda_0) = x_i^0$.

Consideremos la transformación $X = g(\lambda)$ del número real λ en el espacio producto E definida de la manera siguiente:

$$X = (x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, h_i(\lambda), x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

entonces, $g(\lambda_0) = X^0$.

Tomemos ahora

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (0, \dots, 0, h_i(\lambda) - h_i(\lambda_0), 0, \dots, 0)$$

y por la diferenciabilidad de $h_i(\lambda)$, tendremos

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (0, \dots, 0, h'_i(\lambda_0), 0, \dots) (\lambda - \lambda_0) + \\ + (0, \dots, 0, \omega_i, 0, \dots)$$

siendo ω_i un elemento de e_i , tal que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega_i, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0.$$

Llamando ahora Ω_i al elemento de E cuyas componentes son

$$(0, \dots, 0, \omega_i, 0, \dots, 0)$$

tendremos que

$$(\Omega_i, 0) = (\omega_i, 0)$$

luego podemos escribir

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) [0, \dots, 0, h'_i(\lambda_0), 0, \dots, 0] + \Omega_i$$

con la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\Omega_i, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0.$$

lo que equivale a decir que $g(\lambda)$ es diferenciable en el punto λ_0 y que

$$g'(\lambda_0) = (0, \dots, 0, h'_i(\lambda_0), 0 \dots)$$

Ahora bien, por la diferenciabilidad de $F(X)$ tendremos

$$F[g(\lambda)] - F[g(\lambda_0)] = U[g'(\lambda_0)] (\lambda - \lambda_0) + \Omega$$

en donde $U(X)$ es la diferencial de $F(X)$ y Ω un elemento de $\mathcal{C}$ que cumple la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\Omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0.$$

Pero

$$F[g(\lambda)] = F[x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, h_i(\lambda), x_{i+1}^0, \dots, x_n^0] = F^0_i[h_i(\lambda)]$$

$$F[g(\lambda_0)] = F^0_i[h_i(\lambda_0)]$$

y si llamamos

$$U_i(x_i) = U(0, \dots, 0, x_i, 0 \dots 0)$$

podremos escribir

$$F^0_i[h_i(\lambda)] - F^0_i[h_i(\lambda_0)] = U_i[h'_i(\lambda_0)] + \Omega.$$

El teorema quedará demostrado si probamos que $U_i(x_i)$ es lineal, y ello surge fácilmente de la linealidad de $U(X)$. En efecto:

$$\begin{aligned} U_i(x_i) + U_i(y_i) &= U(0, \dots, 0, x_i, 0 \dots) + U(0, \dots, 0, y_i, 0 \dots) = \\ &= U(0, \dots, 0, x_i + y_i, 0 \dots) = U_i(x_i + y_i) \end{aligned}$$

luego $U_i(x_i)$ es distributiva.

Por otra parte si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_i^n, x_i) = 0$$

como

$$([0, \dots, 0, x_i^n, 0 \dots 0], [0, \dots, 0, x_i, 0 \dots 0]) = (x_i^n, x_i)$$

y puesto que $U(X)$ es continua

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U[0, \dots, 0, x_i^n, 0 \dots], U[0, \dots, 0, x_i, 0 \dots]) = 0$$

y por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_i[x_i^n], U_i[x_i]) = 0$$

luego $U_i(x_i)$ es continua. Siendo distributiva y continua es lineal y el teorema está demostrado.

La transformación lineal $U_i(x_i)$ se denomina la *diferencial parcial de la transformación $F(x_1 x_2, \dots x_n)$ en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$* .

Como la transformación $U(X)$ es lineal y como

$$(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_1, 0, \dots 0) + (0, x_2, \dots 0) + \dots + (0, 0, \dots x_n)$$

se tiene que

$$U(x_1, x_2, \dots x_n) = U(x_1, 0 \dots 0) + U(0, x_2 \dots 0) + \dots + U(0, 0 \dots x_n) = U_1(x_1) + U_2(x_2) + \dots U_n(x_n).$$

es decir que la diferencial de una transformación es igual a la suma de sus diferenciales parciales.

12. Dada una transformación $X=f(x)$, la diferencial $U(x)$ es una transformación lineal que variará, en general, con el punto x_0 en que se haya tomado la diferencial. En el caso de las funciones reales de una variable real $U(x)$ no es otra cosa que la

función lineal $y=f'(x_0) \cdot x$, y como es sabido la diferencial correspondiente a un incremento Δx es $f'(x) \Delta x$. Podemos acá adoptar una convención análoga y decir que la diferencial correspondiente al incremento Δx , es $U(\Delta x)$, pero sin que ello signifique que la longitud o la distancia al origen de

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - U(\Delta x)$$

tenga que ser infinitamente pequeña con respecto a la longitud o a la distancia al origen de Δx . Esta es la diferencia esencial entre las definiciones de Stolz y de Hadamard para las transformaciones entre puntos de espacios abstractos.

Podemos pues convenir en escribir

$$df(x) = U(\Delta x)$$

y con una notación más precisa que indica el punto en que se toma la diferencial y el incremento

$$dX = df(x) = \delta_{\Delta x}^{x_0} f(x).$$

En el caso de la transformación idéntica $x=x$ es claro que en todo punto x_0 es $U(\Delta x) = \Delta x$, es decir que

$$dx = \delta_{\Delta x}^{x_0} = \Delta x.$$

Podemos, por consiguiente, poner, como en el caso del Análisis clásico

$$dX = df(x) = U(dx).$$

Supongamos ahora que tenemos una transformación $X=f(x)$ diferenciable en el punto x_0 y otra $x=\varphi(t)$ diferenciable en el t_0 , siendo además $\varphi(t_0)=x_0$. Sean

$$dX = df(x) = U(\Delta x); \quad dx = d\varphi(t) = V(\Delta t).$$

Según el teorema del párrafo 9

$$X = \Phi(t) = f[\varphi(t)]$$

es diferenciable y su diferencial $W(t)$ es igual a $U[V(\Delta t)]$. Tendremos entonces

$$dX = \delta_{\Delta t}^{\phi} \phi(t) = W(\Delta t) = U[V(\Delta t)] = U(dx).$$

Tenemos, por consiguiente, el siguiente resultado:

La fórmula $dX = U(dx)$ es siempre válida, tanto en el caso en que x es una variable independiente como cuando depende de otra variable t .

Esta notación conserva, por lo tanto, la ventaja fundamental de la notación análoga del Análisis clásico.

13. La ventaja anterior se conserva igualmente en el caso de las transformaciones de varias variables.

Sea la transformación de varias variables $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferenciable en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ y sea

$$\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n).$$

Aplicando el resultado obtenido al final del párrafo 11, tendremos

$$\delta_{\Delta x}^{x^0} F(X) = \delta_{\Delta x_1}^{x_1^0} F^0_1(x_1) + \delta_{\Delta x_2}^{x_2^0} F^0_2(x_2) + \dots + \delta_{\Delta x_n}^{x_n^0} F^0_n(x_n).$$

que se puede también escribir en las formas

$$\delta_{\Delta x}^{x^0} F(X) = \delta_{dx_1}^{x_1^0} F^0_1(x_1) + \delta_{dx_2}^{x_2^0} F^0_2(x_2) + \dots + \delta_{dx_n}^{x_n^0} F^0_n(x_n).$$

$$dY = dF_1(x_1) + dF_2(x_2) + \dots + dF_n(x_n).$$

Supongamos ahora que las n variables de la transformación $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dependan de otras m variables mediante las transformaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

que supondremos diferenciables en el punto $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ y tales que:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0) \\ x_2^0 &= \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^0 &= \varphi_n(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0). \end{aligned}$$

Consideremos la transformación

$$Y = \psi(t_1, t_2, \dots, t_m) = F[\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)]$$

y vamos a demostrar que es diferenciable en el punto $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$.

Sean X y T los puntos de los espacios productos de los de las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ y $t_1, t_2, \dots, t_m$ respectivamente. Sea $U(X)$ la diferencial de $Y = F(X)$ en el punto X^0 y $V_1(T), V_2(T), \dots, V_n(T)$ las diferenciales de $x_1 = \varphi_1(T), x_2 = \varphi_2(T), \dots, x_n = \varphi_n(T)$, en el punto T^0 .

Sea ahora $T = g(\lambda)$ una transformación, λ siendo un número real, diferenciable en el punto λ_0 y tal que $T^0 = g(\lambda_0)$. En virtud de la diferenciability de las transformaciones $\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T)$ sabemos que las transformaciones

$$x_1 = \Phi_1(\lambda) = \varphi_1[g(\lambda)] \dots x_n = \Phi_n(\lambda) = \varphi_n[g(\lambda)]$$

son diferenciables en el punto λ_0 y que

$$\Phi'_1(\lambda_0) = V_1[g'(\lambda_0)] \dots \Phi'_n(\lambda_0) = V_n[g'(\lambda_0)].$$

Consideremos ahora la transformación

$$X = h(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \dots, \Phi_n(\lambda))$$

y tendremos

$$\begin{aligned} X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) &= (\varphi_1(T^0), \varphi_2(T^0), \dots, \varphi_n(T^0)) = \\ &= (\varphi_1[g(\lambda_0)], \varphi_2[g(\lambda_0)], \dots, \varphi_n[g(\lambda_0)]) = \\ &= (\Phi_1(\lambda_0), \Phi_2(\lambda_0), \dots, \Phi_n(\lambda_0)) = h(\lambda_0). \end{aligned}$$

Formemos la diferencia

$$h(\lambda) - h(\lambda_0) = (\phi_1(\lambda) - \phi_1(\lambda_0), \phi_2(\lambda) - \phi_2(\lambda_0), \dots, \phi_n(\lambda) - \phi_n(\lambda_0)),$$

por la diferenciabilidad de las transformaciones $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$

$$h(\lambda) - h(\lambda_0) =$$

$$((\lambda - \lambda_0)\phi'_1(\lambda_0) + \omega_1, (\lambda - \lambda_0)\phi'_2(\lambda_0) + \omega_2, \dots, (\lambda - \lambda_0)\phi'_n(\lambda_0) + \omega_n)$$

con las condiciones

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega_1, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0 \quad \dots \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega_n, 0)}{\lambda - \lambda_0}$$

es decir

$$h(\lambda) - h(\lambda_0) =$$

$$(\lambda - \lambda_0) (V_1[g'(\lambda_0)], V_2[g'(\lambda_0)], \dots, V_n[g'(\lambda_0)]) + \Omega$$

siendo $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, por consiguiente

$$(\Omega, 0) = (\omega_1, 0) + (\omega_2, 0) + \dots + (\omega_n, 0)$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\Omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

es decir que $h(\lambda)$ es diferenciable en el punto λ_0 y que

$$h'(\lambda_0) = (V_1[g'(\lambda_0)], V_2[g'(\lambda_0)], \dots, V_n[g'(\lambda_0)]).$$

Como $F(X)$ es diferenciable, la transformación

$$Y = \chi(\lambda) = F[h(\lambda)]$$

es diferenciable en el punto λ_0 y

$$\chi'(\lambda_0) = U[h'(\lambda_0)];$$

pero $\chi(\lambda)$ no es otra cosa que $\psi[g(\lambda)]$, ya que

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= F[\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \dots, \phi_n(\lambda)] = \\ &= F[\varphi_1[g(\lambda)], \varphi_2[g(\lambda)], \dots, \varphi_n[g(\lambda)]] = \psi[g(\lambda)].\end{aligned}$$

Si llamamos

$$W(T) = U[V_1(T), V_2(T), \dots, V_n(T)]$$

tendremos que

$$\begin{aligned}W(T') + W(T'') &= \\ U[V_1(T'), V_2(T'), \dots, V_n(T')] + U[V_1(T''), V_2(T''), \dots, V_n(T'')] &= \\ U[V_1(T' + T''), V_2(T' + T''), \dots, V_n(T' + T'')] &= W(T' + T'')\end{aligned}$$

y siendo continuas tanto las $V_1(T), V_2(T), \dots, V_n(T)$, como la $U(X)$, $W(T)$ es también continua.

$W(T)$ es por consiguiente una transformación lineal, y como

$$\begin{aligned}\chi'(\lambda_0) &= U[h'(\lambda_0)] = U[V_1[g'(\lambda_0)], V_2[g'(\lambda_0)], \dots, V_n[g'(\lambda_0)]] = \\ &= W[g'(\lambda_0)],\end{aligned}$$

queda probada la diferenciabilidad de la transformación $\psi(t_1, t_2, \dots, t_m)$ en el punto $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ y vemos además que la diferencial en dicho punto es

$$\begin{aligned}W(t_1, t_2, \dots, t_m) &= \\ U[V_1(t_1, t_2, \dots, t_m), V_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, V_n(t_1, t_2, \dots, t_m)].\end{aligned}$$

Consideremos ahora un incremento

$$\Delta T = (\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_m)$$

tendremos, por lo que acabamos de demostrar, que

$$dY = \delta_{\Delta T}^{T_0} F[\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T)] = W[\Delta T].$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} dx_1 &= \delta_{\Delta T}^{T_0} \varphi_1(T) = V_1(\Delta T) \\ dx_2 &= \delta_{\Delta T}^{T_0} \varphi_2(T) = V_2(\Delta T) \\ &\dots\dots\dots \\ dx_n &= \delta_{\Delta T}^{T_0} \varphi_n(T) = V_n(\Delta T). \end{aligned}$$

Si consideramos la transformación $F^0_1(x_1)$ que sólo depende de x_1 y en donde a su vez x_1 depende de T , y aplicamos el resultado final del párrafo 12

$$dF^0_1(x_1) = U_1(dx_1)$$

y análogamente

$$\begin{aligned} dF^0_2(x_2) &= U_2(dx_2) \\ &\dots\dots\dots \\ dF^0_n(x_n) &= U_n(dx_n). \end{aligned}$$

Aplicando ahora el resultado final del párrafo 11

$$\begin{aligned} dY &= W(\Delta T) = U[V_1(\Delta T), V_2(\Delta T), \dots V_n(\Delta T)] = \\ &= U_1[V_1(\Delta T)] + U_2[V_2(\Delta T)] + \dots + U_n[V_n(\Delta T)] = \\ &= U_1(dx_1) + U_2(dx_2) + \dots + U_n(dx_n) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$dY = dF^0_1(x_1) + dF^0_2(x_2) + \dots + dF^0_n(x_n).$$

Obtenemos así el siguiente

Teorema: *La diferencial de una transformación $Y = F(x_1, x_2, \dots x_n)$ es siempre igual a la suma de sus diferenciales parciales con respecto a cada una de las variables, tanto cuando éstas son independientes como cuando dependen a su vez de otras variables $t_1, t_2, \dots t_n$.*

Nota: Podría presentar interés el ver si se puede o no llegar a dar una definición de la diferencial en los espacios métricos afines poniendo en lugar de la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\omega, 0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

que hemos utilizado, una de las dos condiciones siguientes

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left(\frac{\omega}{\lambda - \lambda_0}, 0 \right) = 0 \qquad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left\| \frac{\omega}{\lambda - \lambda_0} \right\| = 0$$

que son ambas equivalentes a la primera si el espacio es métrico vectorial. También podría presentar interés el ver si se puede reemplazar la condición que hemos impuesto a los espacios de conservar invariantes las distancias en las traslaciones por la más general de que las traslaciones sean operaciones bicontinuas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO-SAN LUIS

MEDIDAS INVARIANTES EN ESPACIOS TOPOLOGICOS COMPACTOS

por

MISCHA COTLAR y R. A. RICABARRA

En una importante memoria sobre la teoría de la medida en la mecánica no lineal, Kryloff y Bogoliuboff⁽¹⁾ establecen la existencia de medidas invariantes (respecto de un grupo mon-paramétrico de automorfismos) y de medidas métricamente transitivas, para el caso de un espacio métrico compacto, y prueban un resultado más profundo aún: la cápsula convexa cerrada de las medidas transitivas contiene a todas las medidas invariantes.

En el presente artículo queremos mostrar que estos resultados se obtienen muy simplemente (y aún para espacios más generales) haciendo uso de teoremas clásicos de espacios vectoriales y particularmente del conocido teorema de Krein-Milman sobre los puntos extremales de conjuntos regularmente convexos. En los §§ 1 y 2 exponemos las nociones necesarias de espacios vectoriales orientándolas hacia nuestro objeto; con ellas deducimos en el § 3 los resultados mencionados de Kryloff-Bogoliuboff generalizándolos para espacios compactos generales y medidas simplemente aditivas. En el § 4 nos colocamos en el punto de vista de los grupos y semigrupos generales y probamos que las medidas métricamente transitivas coinciden exactamente con los puntos extremales del conjunto de las medidas invariantes.

§ 1. Dedicaremos este parágrafo a dar algunos conceptos ge-

⁽¹⁾ N. KRYLOFF et N. BOGOLIUBOFF, *La theorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*, Ann. of Math. vol. 38, 1937, págs. 65-133. Ver también el trabajo de OSTOBY y ULAM en Ann. of Math (1939).

nerales sobre espacios y topologías lineales que necesitaremos en los §§ siguientes⁽²⁾.

Un *espacio vectorial* real (véase por ej. S. Banach, l. c. pág. 26) es un conjunto E de elementos $x, y, \dots$ donde están definidas dos leyes de composición: la suma de vectores que a cada par $x, y \in E$ asigna unívocamente un tercer elemento $x+y \in E$, y la multiplicación por escalares reales (ley «externa») que a cada par λ real, $x \in E$, asigna unívocamente un elemento $\lambda x \in E$, verificándose los axiomas siguientes:

1) $x+y=y+x$; $(x+y)+z=x+(y+z)$; existe el vector nulo 0 : $x+0=x$ para todo x de E .

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$; $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$; $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$; $1x=x$; el elemento $-x=(-1)x$ verifica $x+(-x)=0$.

En el caso de los vectores ordinarios existen tres vectores fijos tales que todo otro puede expresarse como una combinación lineal $(\sum_1^3 \lambda_i x_i)$ de esos tres. Esto se enuncia diciendo que hay una base de tres elementos. Nosotros vamos a considerar espacios vectoriales donde no haya necesariamente una base con un número finito de elementos. Por ej. si $\Omega=\{P\}$ es un espacio compacto (bcompacto de Hausdorff en la terminología antigua) y $E=C(\Omega)$ es el conjunto de las funciones reales continuas definidas sobre Ω , $x=x(P)$, $C(\Omega)$ constituye un ejemplo de espacio vectorial entendiendo por suma y por multiplicación escalar las operaciones ordinarias realizadas punto a punto sobre Ω . Si Ω no tiene un número finito de puntos (por ej. si Ω es el intervalo cerrado $[0,1]$), $C(\Omega)$ no tiene base finita.

Sea pues E un espacio vectorial o, como diremos también, un *espacio lineal*. Un subconjunto L de E se dice un *subespacio lineal* de E , si L contiene todas las posibles combinaciones $\sum_1^n \lambda_i x_i$ formadas con $x_i \in L$. Si A es un subconjunto cualquiera de E , llamaremos $L(A)$ al subespacio lineal formado con las

⁽²⁾ Para los conceptos básicos ver: F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, Leipzig-N. York 1944; S. BANACH, *Théorie des Opérations linéaires*, Warszawa 1932; S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, American Math. Soc., Colloquium Publications, 1942, Cap. I; L. ALAOGU, *Weak topologies in normed linear spaces*, Ann. of Math., vol. 41 (1940), págs. 252-267, así como la nota de N. BOURBAKI en C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 206 (1938), págs. 1701-1704.

combinaciones lineales de elementos de A . Un subconjunto $C \subseteq E$ se dice *convexo* si con cada par de puntos contiene el *segmento* por ellos determinado, es decir, si $x, y \in C$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ implican $\lambda x + \mu y \in C$. E se dice un espacio lineal *normado* si está dada una función real definida sobre E , cuyo valor sobre el elemento x indicaremos con $\|x\|$, que posee las siguientes propiedades:

$$\|x\| \geq 0 \text{ para todo } x \text{ de } E;$$

$$\|x\| = 0 \text{ si y sólo si } x = 0;$$

para λ real y $x, y \in E$ se verifica

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

La función de dos variables $\|x - y\|$ es entonces una métrica, y si E respecto de esta métrica es un espacio métrico completo, esto es si $\{x_n\}$ siendo una sucesión tal que $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ para $n, m \rightarrow \infty$, existe un elemento $x \in E$ tal que $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), entonces, el espacio normado se dice *espacio de Banach*.

Por ej. en el espacio $C(\Omega)$ de arriba la función

$$\|x\| = \|x(P)\| = \sup |x(P)|, \quad P \in \Omega$$

(por «sup» entendemos extremo superior ordinario) convierte a $C(\Omega)$ en un espacio de Banach.

Una función real f definida sobre el espacio lineal E se llama un *funcional lineal* si $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ (λ, μ reales, $x, y \in E$). Si E es un espacio de Banach cabe considerar los funcionales lineales *acotados*: son los que verifican la condición

$$|f(x)| \leq M \|x\|$$

para algún número real M independiente de x . El conjunto E^* de los funcionales lineales acotados forma un espacio lineal respecto de las operaciones de suma y multiplicación escalar realizadas elemento a elemento sobre E .

En E^* la función

$$\|f\|^* = \sup |f(x)| \quad (\|x\| \leq 1)$$

es una norma que convierte a E^* en un espacio de Banach, el conjugado de E . Vale pues la relación

$$|f(x)| \leq \|f\|^* \cdot \|x\|$$

idénticamente en $x \in E$, $f \in E^*$. Por ejemplo, en el espacio $C(\Omega)$ de arriba los funcionales lineales acotados pueden representarse (por el conocido teorema de F. Riesz, generalizado por S. Banach, S. Saks, S. Kakutani⁽³⁾) con funciones de conjunto baireano⁽⁴⁾ completamente aditivas, a variación acotada $\alpha(S)$, $S \subset \Omega$; de manera que, dado $f \in C^*(\Omega)$, existe una tal $\alpha(S)$ con

$$f(x) = \int_{\Omega} x(P) d\alpha(S),$$

siendo $\|f\|^* = \text{Variación total de } \alpha(S)$.

Un subconjunto C de un espacio de Banach E se dice cerrado si $x_n \in C$, $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) implican $x \in C$. Por *cápsula convexa* o *cápsula convexa cerrada* de C se entiende respectivamente el mínimo conjunto convexo o convexo y cerrado que contiene a C . Todo subconjunto de un espacio de Banach posee tales cápsulas.

Sea E un espacio lineal (no necesariamente normado) y F un espacio lineal de funcionales lineales sobre E . Vamos a definir en F una topología lineal que llamaremos w . Sea $f_0 \in F$. A cada sistema finito $x_1, \dots, x_n \in E$, $\epsilon > 0$, asociamos el entorno de f_0 , $U\{f_0; x_1, \dots, x_n; \epsilon\}$, formado por los $f \in F$ tales que $|f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon$ para $i = 1, \dots, n$, simultáneamente. Esto define una noción de topología en el sentido que son satisfechos los axiomas de Hausdorff (*Mengentheorie*, pág. 228). Otra manera de definir esta topología en F es estableciendo una correspondencia biunívoca entre los elementos de F y los complejos infinitos del

(3) Ver por ej. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, y para las generalizaciones S. KAKUTANI, *Abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. vol. 42 (1941), págs. 944-1024.

(4) $S \subset \Omega$ es un baireiano si pertenece al σ -cuerpo de conjuntos generado por los conjuntos $\Omega[P; \alpha < x(P) < \beta]$, $x \in E$, $\alpha < \beta$ arbitrarios (un σ -cuerpo es una familia de conjuntos cerrada respecto de las operaciones de paso al complementario y unión e intersección numerables). Si Ω es separable los baireianos coinciden con los borelianos, es decir forman el σ -cuerpo generado por los conjuntos abiertos de Ω .

producto cartesiano de rectas R_x : a cada $x \in E$ corresponde una recta R_x , f se representa en el complejo $\{f(x)\}$, $x \in E$, y F se representa en un subconjunto del producto cartesiano ΠR_x ($x \in E$). En ΠR_x se considera la topología del producto topológico ordinario (S. Lefschetz, l. c. Cap. I), que se relativiza sobre la imagen de F , y la correspondencia inversa transporta los entornos a F . Llamaremos *cerrado- w* a un subconjunto de F cerrado respecto de la topología w . Análogamente definimos el concepto de *cápsula convexa cerrada- w* . Un subconjunto $C \subset F$ se llamará *acotado- E* si para cada $x \in E$ es $\sup |f(x)| < \infty$ ($f \in C$). En particular si E es normado y $F = E^*$ la topología w así obtenida se llama *topología w^** . Con respecto a la topología w^* vale el siguiente teorema (Bourbaki-Alaoglu, l. c.) ⁽⁵⁾:

El conjunto $E^[f; \|f\|^* \leq N] = S^*(N)$ (esfera de E^* con centro en el origen, cerrada y de radio N) es compacto- w^* .*

O también, los subconjuntos compactos- w^* se pueden caracterizar con ayuda de la norma $\|\cdot\|^*$, diciendo que son los BCE^* cerrados- w^* y acotados, en el sentido de que existe algún N tal que $BCE^*(N)$.

Si el espacio de Banach E es separable (es decir contiene un subconjunto numerable denso), $C \subset S^*(N)$, y si un elemento $f_0 \in E^*$ es punto de acumulación- w^* de C , entonces existe una sucesión $g_i \in C$ con la propiedad $g_i(x) \rightarrow f_0(x)$ para todo $x \in E$ (esto último se expresa diciendo que g_i tiende débilmente a f_0).

En efecto, si $\{x_i\}$ es el subconjunto denso en E , existe $g_n \in C$ con $|g_n(x_i) - f_0(x_i)| < 1/n$, $i = 1, 2, \dots, n$, correspondiente al sistema finito $\{x_1, \dots, x_n; 1/n\}$. Evidentemente $g_n(x_i) \rightarrow f_0(x_i)$ ($n \rightarrow \infty$), y si $x \in E$ es arbitrario, es

$$\begin{aligned} & |g_n(x) - f_0(x)| \\ & \leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - f_0(x_i)| + |f_0(x_i) - f_0(x)| \\ & \leq \|g_n\|^* \cdot \|x - x_i\| + |g_n(x_i) - f_0(x_i)| + \|f_0\|^* \cdot \|x - x_i\|; \end{aligned}$$

luego basta elegir x_i como para que $\|x - x_i\|$ sea bastante pequeño, para deducir lo deseado. (Si E no es separable, no es

⁽⁵⁾ Más adelante el lector encontrará la demostración de un teorema más general.

cierto que los puntos límites w^* puedan alcanzarse con sucesiones y se necesitan sucesiones transfinitas adecuadas).

El resultado precedente puede aplicarse a los $C(\Omega)$. En efecto, $C(\Omega)$ es separable si y sólo si Ω es separable. Por una parte si $\{x_i(P)\}$ es una sucesión densa en $C(\Omega)$, los conjuntos $S(i, \alpha, \beta) = \Omega[P; \alpha < x_i < \beta]$, (α, β racionales), forman una base de conjuntos abiertos de la topología de Ω y basta tomar un punto en cada $S(i, \alpha, \beta)$ para tener el conjunto denso en Ω . La recíproca es consecuencia fácil de un conocido teorema de M. H. Stone⁽⁶⁾: si suponemos Ω separable, por ser además compacto, existe una base numerable de conjuntos abiertos $\{S_i\}$, $i=1, 2, \dots$; definiendo para cada par $\{S_i, S_j\}$ con $\bar{S}_i \cap \bar{S}_j = \emptyset$ ($\bar{S}$ indica S más los puntos de acumulación de S) una función $\varphi_{ij}(P)$, continua sobre Ω que vale 1 en $\bar{S}_i$ y 0 en $\bar{S}_j$, la familia $\{\varphi_{ij}\}$ es una familia separadora en el sentido de Stone (l. c.) y los polinomios en las φ_{ij} con coeficientes racionales forman un conjunto numerable denso en $C(\Omega)$.

§ 2. Para lo que sigue será importante considerar un resultado demostrado por M. Krein y Milman (Studia Math., 1940), concerniente a conjuntos convexos en E^* .

Comenzamos con la definición de conjunto *regularmente convexo* (7). Sea E un espacio lineal de elementos $x, y, z, \dots$; F un espacio lineal de funcionales lineales definidos sobre E , de elementos $f, g, h, \dots$. E define en F la topología w del § 1. Sea C un subconjunto de F . Diremos que C es *regularmente convexo* (r. c.) si existen elementos $x_\alpha \in E$ y correspondientes números reales a_α tales que $C = \bigcap_\alpha F[f; f(x_\alpha) \leq a_\alpha]$. Si concebimos cada $F[f; f(x_\alpha) \leq a_\alpha]$ como un semiespacio generalizado, los conjuntos r. c. son los que pueden representarse como intersección de tales semiespacios. En espacios de dimensión finita (con base finita) los conjuntos r. c. son los convexos y cerrados exactamente. En espacios de dimensión no finita los conjuntos r. c. son seguramente convexos y cerrados- w , pero la recíproca no es cierta y solamente puede afirmarse que *los conjuntos convexos, cerrados- w y acotados- E son r. c.* Este resultado demostrado por Krein-Smu-

(6) Trans. Am. Math. Soc. vol. 41 (1937), págs. 376-481. La demostración sin apelar al teorema de Stone, aunque más larga, es fácil y se ofrece al lector como ejercicio.

lian es consecuencia del siguiente lema de extensión (l. c. en ⁽⁷⁾)(⁸).

Lema. Sea $E(\Omega)$ el espacio de Banach particular formado por todas las funciones reales acotadas con un dominio fijo $\Omega = \{P\}$, obtenido poniendo $\|x\| = \|x(P)\| = \sup |x(P)|$ ($P \in \Omega$). Sea $L \subset E(\Omega)$ un subespacio lineal que contiene a la función constante 1 (por tanto a todas las constantes) y $l(x)$ un funcional lineal definido en L , no negativo (es decir $l(x) \geq 0$ si $x(P) \geq 0$ para todo $P \in \Omega$), y sea $x_0 \in E(\Omega) - L$. Entonces, si indicamos con $L + x_0$ al espacio lineal de los elementos de la forma $x + \lambda x_0$, λ real, $x \in L$, existe un funcional lineal no negativo l' definido sobre $L + x_0$ tal que $l'(x) = l(x)$ si $x \in L$.

Demostración. Sean L_1, L_2 los subconjuntos de L formados respectivamente por los $x_1, x_2 \in L$ con $x_1 \leq x_0, x_2 \geq x_0$. Ni L_1 ni L_2 son vacíos, pues x_0 siendo una función acotada sobre Ω , y $1 \in L$ hay un $\lambda_0 > 0$ con $-\lambda_0 \leq x_0(P) \leq \lambda_0$. Además, si $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$ son arbitrarias, es $x_1 \leq x_2$, luego $l(x_1) \leq l(x_2)$. Esto implica que si

$$a = \sup l(x_1), x_1 \in L_1, \quad b = \inf l(x_2), x_2 \in L_2,$$

es $a \leq b$. Sea r_0 un número cualquiera con $a \leq r_0 \leq b$. Si ponemos $l'(x + \lambda x_0) = l(x) + \lambda r_0$ tendremos la extensión deseada. La no negatividad de l' se verifica sin dificultad.

Apliquémonos ahora a demostrar el resultado de Krein-Smulian citado arriba. Para ello basta mostrar que: si f_0 es tal que $f(x) \leq \lambda$ para todo $f \in C$ implica $f_0(x) \leq \lambda$, entonces $f_0 \in C$. A este objeto consideremos el espacio $E(\Omega)$ del lema precedente con $\Omega \equiv C$ y dentro de $E(C)$ el subespacio L' de las funciones $F_x(f) = f(x)$. Cuando x recorre E , F_x recorre L' (naturalmente puede suceder que $x_1 \neq x_2$ y $F_{x_1} \equiv F_{x_2}$). Puesto que C es acotado- E resulta efectivamente $F_x(f)$ acotada y por tanto contenida en $E(C)$. Ahora bien, pongamos $L = L' + 1$ y definamos para cada $F_x + \lambda \in L$, $\varphi_0(F_x + \lambda) = f_0(x) + \lambda$. La propiedad de f_0 que nos sirve de

(⁷) Este concepto fué estudiado detalladamente por M. Krein y V. Smulian (Ann. of Math. vol. 41 (1940), págs. 556-583) quienes lo usan en un sentido algo más particular.

(⁸) El lema referido afirma una extensión a todo el espacio, del funcional de que se trata, pero esto, que exige el axioma de Zermelo, no es absolutamente necesario para el resultado que pensamos deducir de él.

hipótesis trae como consecuencia que φ_0 es un funcional no negativo sobre L , de modo que estamos en las condiciones del lema precedente, y cualquiera sea el número finito $F_1, \dots, F_n$ de funciones de $E(C)$ que consideremos, por aplicación repetida del lema podemos extender φ_0 al espacio $L + F_1 + \dots + F_n$ manteniendo la nonegatividad de φ_0 . Sea $U\{f_0; x_1, \dots, x_N; \varepsilon\}$ un entorno- w de f_0 , y sean $A_1, A_2, \dots, A_n$, subconjuntos de C con la propiedad que cada F_{x_i} tenga en cualquier A_j una variación menor que $\varepsilon > 0$, y que $A_i \cap A_j = 0$ ($i \neq j$), $\sum A_i = C$. Esto es posible por ser acotadas las funciones F_{x_i} . Finalmente pongamos $F_i = \varphi_{A_i}$, función característica del conjunto A_i . Afirmamos que, llamando impropriamente de nuevo φ_0 al funcional extendido a $L + F_1 + \dots + F_n$, es

$$f^* = \varphi_0(F_1) f_1 + \varphi_0(F_2) f_2 + \dots + \varphi_0(F_n) f_n \in U\{f_0; x_1, \dots, x_N; \varepsilon\}$$

cualesquiera sean $f_1, \dots, f_n$ con tal que $f_i \in A_i$, $i=1, \dots, n$, y esto todavía independientemente de la extensión elegida con tal que satisfaga la condición de no negatividad antemencionada. Puesto que $\varphi_0(F_i) \geq 0$, $\sum \varphi_0(F_i) = \varphi_0(\sum F_i) = \varphi_0(1) = 1$, es $f^* \in C$ (pues C es convexo), y esto probará que f_0 es punto de acumulación- w de C , y por lo tanto siendo C cerrado- w que $f_0 \in C$. Calculemos pues los valores de f^* en los elementos x_i :

$$f^*(x_i) = \sum_{k=1}^n \varphi_0(F_k) f_k(x_i) = \varphi_0\left(\sum_{k=1}^n f_k(x_i) \cdot F_k\right)$$

de donde

$$f^*(x_i) - f_0(x_i) = \varphi_0\left(\sum_{k=1}^n f_k(x_i) \cdot F_k - F_{x_i}\right)$$

y las dos funciones separadas dentro del último paréntesis verifican por construcción

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x_i) F_k(f) - F_{x_i}(f) \right| < \varepsilon, \quad f \in C,$$

que por la no negatividad de φ_0 implica $|f^*(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon$, $i=1, \dots, N$, como debíamos probar. Observemos finalmente que

Demostración. Tomemos una buena ordenación de H que comience con ξ_0 : $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\alpha, \dots$ ($\alpha < \eta$). La compacidad de C nos asegura que los conjuntos $C_0, C_1, \dots$ que definiremos a continuación por inducción transfinita, son no vacíos, convexos, compactos- w (consecuencia de la linealidad y semicontinuidad de las ξ_α). Si α tiene antecedente inmediato $\alpha - 1$, C_α se define como el conjunto de los elementos de $C_{\alpha-1}$ que realizan el máximo de ξ_α ; si α es un número límite C_α es el subconjunto de $\bigcap C_\beta$ ($\beta < \alpha$) donde ξ_α , considerada sobre $\bigcap C_\beta$, alcanza su máximo; finalmente C_0 es el subconjunto de las f de C en que ξ_0 alcanza su máximo. Es fácil ver que $\bigcap C_\alpha$ ($\alpha < \eta$) contiene exactamente un solo elemento, que es el f_0 buscado.

En particular E considerada como una clase de funciones sobre C (las F_x del teorema de Krein-Smulian) posee las propiedades de H . En el caso concreto de medidas que consideraremos en el § 3 habrá lugar para una clase H menos trivial.

Corolario 1. Con las notaciones del teorema 1, si $\xi_0 \in H$ y $C_0 \subset C$ es el conjunto donde ξ_0 alcanza su máximo, entonces existe en C_0 por lo menos un punto extremal- H de C .

De este corolario resulta enseguida el teorema de Krein-Milman:

Teorema 2. Sea $C \subset F$, C convexo y compacto- w . Sea C^e el conjunto de sus puntos extremales- E . Entonces la cápsula convexa cerrada- w de C^e coincide con C .

En efecto, si la cápsula convexa cerrada- w de C^e estuviera contenida como parte propia en C , por ser aquélla regularmente convexa (teorema de Krein-Smulian), existiría un $x_0 \in E$ y un $f_0 \in C$ fuera de la cápsula con $f(x_0) \leq f_0(x_0) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, (f de la cápsula). Luego el conjunto C_0 , donde x_0 alcanza su máximo en C , estaría situado fuera de la cápsula convexa cerrada- w de C^e , lo que contradeciría al corolario 1.

Nota. Aunque no sabemos si en general los extremales- E son todos los extremales, puede verse simplemente que esto es así en caso de F de dimensión finita. Otros casos trataremos en el § 4.

Para extender en lo más posible el dominio de aplicación del teorema de Krein-Milman debemos buscar criterios para afirmar la compacidad de subconjuntos de F . El único criterio general que conocemos es el teorema citado de Bourbaki-Alaoglu, que a su vez es consecuencia sencilla del teorema de Tychonoff,

que afirma la compacidad del producto topológico de espacios compactos (S. Lefschetz, l. c.). Como los enunciados ordinarios nos resultan insuficientes para nuestro propósito, daremos lo que quizás pueda llamarse una forma general del teorema de Bourbaki-Alaoglu.

Sea $A \subset E$ tal que $L(A) = E$. Diremos que $C \subset F$ es *acotado-A* si $\sup |f(x)| < \infty$ ($f \in C$) para $y \in A$.

Teorema 3. *Un conjunto $C \subset F$ es compacto- w si y sólo si es acotado-A y cerrado- w .*

Demostración. Una mitad del teorema es trivial. Para la otra, si C es acotado-A es también acotado- E y por tanto su representación en el producto infinito de rectas (§ 1) puede reducirse a una representación en un producto de segmentos $[-a_x, a_x]$, con $a_x = \sup |f(x)|$ ($f \in C$), que es un espacio compacto (teorema de Tychonoff). Si C es además cerrado- w , como subconjunto cerrado de un compacto es también compacto.

Conviene pues tener un criterio para saber cuándo un conjunto es cerrado- w . Para eso introducimos las siguientes definiciones. Sea E un espacio lineal, de elementos $x, y, \dots$ como antes y $\mathcal{M} = \{\mu\}$ el espacio de todas las funciones reales con dominio E (lineales o no lineales), w la topología definida en $\mathcal{M}$ por E análoga a la definida por E en F (§ 1), y sea (P) una propiedad de pares (E', μ) , E' subespacio lineal de E , $\mu \in \mathcal{M}$. Vamos a considerar las siguientes tres condiciones a las que puede satisfacer (P) : a) fijado μ , $(E, \mu) \in (P)$ si y sólo si $(E', \mu) \in (P)$ para todo $E' \subset E$ de dimensión finita; b) fijado E' de dimensión finita, el conjunto de los $\mu \in \mathcal{M}$ tales que $(E', \mu) \in (P)$, que indicaremos $C_{E'}$, es cerrado- w ; b') $C_{E'}$ es cerrado- w y convexo.

Teorema 4. *C_E es cerrado- w , o cerrado- w y convexo, según que (P) satisfaga a) y b) o a) y b').*

En efecto, la condición a) se expresa $C_E = \bigcap C_{E'}$ para los E' subespacios de dimensión finita $E' \subset E$. La condición b) (b')) dice que $C_{E'}$ es cerrado- w (y convexo). Luego, iguales propiedades posee C_E .

Aplicaciones: 1. Supongamos que en E haya una norma $\|x\|$. Pongamos $(E', \mu) \in (P)$ si y sólo si μ es lineal sobre E' , y si $x \in E'$, $\|x\| \leq 1$, implican $|\mu(x)| \leq 1$. Entonces valen a) y b') y $C_E = S^*(1)$ es convexo compacto- w por el teorema precedente (éste es el teorema de Bourbaki-Alaoglu).

2. Sea $\Omega = \{P\}$ un espacio abstracto, $\mathcal{S} = \{S\}$ una clase de

subconjuntos de Ω y E el espacio lineal de las combinaciones lineales de funciones características φ_s de conjuntos S . Sea $\prec$ una relación de parcial ordenación de elementos de E tal que $x \prec 0$, $y \prec 0$, $\lambda \geq 0$ implican $x + y \prec 0$, $\lambda x \prec 0$. Definimos $(E', \mu) \in (P)$ si y sólo si $x \in E'$, $x \prec 0$, implican $\mu(x) \leq 0$, μ es lineal sobre E' y $|\mu(\varphi_s)| \leq 1$ para todo S . (P) satisface entonces a) y b') y C_E es aquí también convexo compacto- w . Se advierte que este ejemplo permite muchas variantes y que de ninguna manera el orden juega un papel esencial. Esta forma particular de 2 nos será útil más adelante (§ 3).

§ 3. En este § nos proponemos mostrar que los resultados fundamentales de la memoria citada de Kryloff-Bogoliuboff son consecuencias más o menos directas de los teoremas generales expuestos en los §§ anteriores. Fijemos antes las notaciones.

Sean: $\Omega = \{P\}$ un espacio compacto; $B(\Omega) = \{S\}$ el σ -cuerpo de los conjuntos baireianos de Ω ; $C^*(\Omega) = \{\alpha(S)\}$ las funciones de conjunto baireiano completamente aditivas, a variación acotada; $M(\Omega) = \{\mu(S)\} \subset C^*(\Omega)$ las medidas no negativas completamente aditivas sobre $B(\Omega)$ con $\mu(\Omega) = 1$; $C(\Omega) = \{x(P)\}$ las funciones reales continuas sobre Ω ; $\mu_P(S) \in M(\Omega)$ la medida «trivial» que vale 1 si $P \in S$ y 0 en caso contrario; T_t , $-\infty < t < +\infty$, un grupo monoparamétrico de automorfismos⁽⁹⁾ de Ω con las propiedades: $T_{t+s} = T_t T_s$, $T_t P$ es una función continua del par (t, P) para $-\infty < t < +\infty$, $P \in \Omega$ ⁽¹⁰⁾; $I(\Omega) = \{m(S)\} \subset M(\Omega)$ las medidas $m(S)$ invariantes- T_t , es decir que verifican $m(T_t S) = m(S)$ para todo $S \in B(\Omega)$ y t real.

Por lo visto en el § 1, $C(\Omega)$ es un espacio de Banach respecto de la norma $\|x\| = \sup |x(P)|$, ($P \in \Omega$), y que por el teorema de Riesz generalizado $C^*(\Omega)$ puede identificarse con el conjugado de $C(\Omega)$ poniendo para $\alpha \in C^*(\Omega)$,

$$\alpha(x) = \int_{\Omega} x(P) d\alpha(S)$$

⁽⁹⁾ Un automorfismo de Ω es una aplicación biunívoca y bicontinua de Ω sobre sí mismo.

⁽¹⁰⁾ Esta condición permite la aplicabilidad del teorema ergódico e implica la siguiente propiedad: para toda $x \in C(\Omega)$ existe la integral $\int_a^b x(T_t P) dt$ y es función continua de P .

(Omitiremos el dominio de integración cuando éste sea Ω). Análogamente $m(x)$ o $\mu(x)$ designarán $\int x(P) dm(S)$ o $\int x(P) d\mu(S)$. Del mismo teorema de Riesz generalizado se deduce también la siguiente propiedad:

a) Si $F \in B(\Omega)$ es un conjunto cerrado y $\mu \in M(\Omega)$ entonces

$$\mu(F) = \infimum \mu(x) = \int x(P) d\mu(S),$$

donde el infimum se toma para las posibles $x \in C(\Omega)$ que verifican $x(P) \geq \varphi_F(P)$ ⁽¹¹⁾.

Además, por el teorema de Bourbaki-Alaoglu se tiene:

b) $M(\Omega)$ es compacto- w^* (y convexo).

Ahora mostraremos que $I(\Omega)$ es no-vacío. Para cada $\mu \in M(\Omega)$ pongamos

$$\mu^\tau(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\int_\Omega x(T_t P) d\mu(S) \right] dt, \quad (x \in C(\Omega), \tau \text{ real}).$$

Se verifica fácilmente que $\mu^\tau(x)$ es un funcional lineal acotado no negativo sobre $C(\Omega)$, de modo que existe una $\mu^\tau(S) \in M(\Omega)$ tal que

$$\mu^\tau(x) = \int x(P) d\mu^\tau(S).$$

Por b) existe una $\mu' \in M(\Omega)$ que es de acumulación- w^* del conjunto $\{\mu^\tau(S)\}$ para $\tau \rightarrow \infty$. Vamos a probar que $m(S) = \mu'(S)$ es invariante, $m(S) \in I(\Omega)$. Pongamos $x_r = x(T_r P)$ y sea K_n una sucesión que tiende a $+\infty$ tal que $\mu^{K_n} \in U\left\{\mu'; x, x_r; \frac{1}{n}\right\}$, r real fijado. Entonces $\mu^{K_n}(x_r) \rightarrow \mu'(x_r)$, $\mu^{K_n}(x) \rightarrow \mu'(x)$.

Probemos ahora que $|\mu^{K_n}(x_r) - \mu^{K_n}(x)| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$: en efecto

$$\begin{aligned} |\mu^{K_n}(x_r) - \mu^{K_n}(x)| &= \\ &= \left| \frac{1}{K_n} \int_0^{K_n} \left[\int_\Omega x(T_{r+t} P) d\mu(S) \right] dt - \frac{1}{K_n} \int_0^{K_n} \left[\int_\Omega x(T_t P) d\mu(S) \right] dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{K_n} \int_0^{K_n+r} \left[\int_\Omega x(T_t P) d\mu(S) \right] dt \right| \leq \frac{\|x\| \cdot |r|}{K_n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾ $\varphi_s(P)$ designará la función característica del conjunto S .

Hemos obtenido así el primer teorema fundamental de Kryloff-Bogoliuboff que estos autores demostraron para el caso más particular de Ω métrico compacto:

Teorema I. Para cada $\mu \in M(\Omega)$ el conjunto $\{\mu^\tau(S)\}$ admite por lo menos un punto de acumulación- w^* ($\tau \rightarrow \infty$), $m(S)$, y cada tal $m(S)$ es invariante: $m(S) \in I(\Omega)$. Luego $I(\Omega)$ es no vacío.

Siendo $I(\Omega)$ no vacío podemos hablar de las medidas invariantes $m(S)$ y hacer uso del teorema individual de la teoría ergódica ⁽¹²⁾:

Teorema ergódico de Birkhoff-Khintchine. Para toda medida invariante $m \in I(\Omega)$ y toda función real $y(P)$, $P \in \Omega$, sumable- m existe el límite

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau y(T_t P) dt = y^*(P),$$

para todo $P \in \Omega$, salvo a lo sumo un conjunto invariante $N \subset \Omega$, $N = N(y, m)$, de medida m -nula; además $y^*(P)$ es sumable- m , invariante- T_t : $y^*(P) = y^*(T_t P)$, y verifica $\int y^* dm(S) = \int y dm(S)$.

El conjunto excepcional N depende en general de $m(S)$ y de $y(P)$. Pero si Ω es separable y se consideran solamente funciones $y(P) = x(P) \in C(\Omega)$ continuas, entonces N puede tomarse fijo con $m(S)$, es decir: si Ω es separable, a cada $m \in I(\Omega)$ corresponde un conjunto invariante $N \subset \Omega$, $N = N(m)$, tal que $m(N) = 0$ y el límite

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(T_t P) dt = x^*(P) \quad (1)$$

existe para todo $P \in \Omega - N$ y toda $x(P) \in C(\Omega)$. Esto resulta inmediatamente observando que toda $x(P)$ continua es m -integrable, cualquiera sea $m \in I(\Omega)$, y que siendo Ω separable existe (§ 1) una sucesión numerable $x_n(P) \in C(\Omega)$ tal que dada una $x \in C(\Omega)$ arbitraria y $\varepsilon > 0$, existe una x_n de la sucesión que verifica $|x_n(P) - x(P)| < \varepsilon$ para todo $P \in \Omega$.

⁽¹²⁾ Ver por ej. E. HOPF, *Ergodentheorie* (Ergebnisse der Math., vol. 5, fasc. 2). Berlin, J. Springer, 1937.

Un conjunto $S \subset \Omega$ se dice de *probabilidad máxima* si para toda $m \in I(\Omega)$ es $m(S) = 1$. Un punto $P \in \Omega$ se dice *casi regular* si en él existe el límite (1) cualquiera sea $x \in C(\Omega)$; el conjunto de tales puntos se designará con U . La proposición precedente se enuncia pues así:

Teorema II. *Si Ω es compacto y separable, el conjunto U de sus puntos casi regulares es invariante y de probabilidad máxima.*

De la definición de $\mu^\tau(S)$ resulta inmediatamente que si $\mu = \mu_P$ es una medida trivial, entonces

$$\mu^\tau_P(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(T_t P) dt, \quad (2)$$

luego si $P \in U$ la medida μ^τ_P converge para $\tau \rightarrow \infty$ hacia un único límite $m_P \in I(\Omega)$ que se llama la *medida individual* correspondiente al punto casi regular P , y se tiene:

Corolario I. *Para todo $P \in U$ hay una medida individual $m_P \in I(\Omega)$ bien definida y para toda $x \in C(\Omega)$ el límite (1) existe y es igual a $m_P(x)$.*

Vamos a mostrar que los resultados más profundos de Kryloff-Bogoliuboff concernientes a las medidas transitivas son consecuencias casi inmediatas de los teoremas de Krein-Milman (§ 2). Empecemos por examinar el significado de los puntos extremales de subconjuntos de $C^*(\Omega)$. El conjunto $M(\Omega) \subset C^*(\Omega)$ es por a) convexo y compacto- w^* . Veamos cuáles son sus puntos extremales. Si μ es punto extremal de $M(\Omega)$ entonces para todo $S \in B(\Omega)$ debe ser o $\mu(S) = 1$ o $\mu(S) = 0$, pues de lo contrario para algún S_0 sería $\mu(S_0) = a > 0$, $\mu(\Omega - S_0) = b > 0$, luego poniendo $\mu_1(S) = a^{-1} \cdot \mu(S \cap S_0)$, $\mu_2(S) = b^{-1} \cdot \mu(S \cap (\Omega - S_0))$, sería $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$, $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$, contrariamente a que μ es extremal. Sea ahora $\{F_\alpha\}$ la clase de los conjuntos cerrados con $\mu(F_\alpha) = 1$; evidentemente si $F_1, \dots, F_n \in F_\alpha$ es también $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \in F_\alpha$, luego por la compacidad de Ω , existe un punto $P \in \Omega$ común a todos los F_α . Si $S \ni P$ debe ser $\mu(S) = 1$, pues de lo contrario $\Omega - S$ contendría un F_α . Así pues toda μ extremal de $M(\Omega)$ es una medida trivial, y como la recíproca es inmediata, se obtiene:

c) *Si Ω es compacto, las medidas triviales coinciden con los puntos extremales de $M(\Omega)$.*

Aplicando el teorema de Krein-Milman (§ 1, Teorema 2) se obtiene de c) la siguiente proposición de Kakutani (l. c.): *toda $\mu \in M(\Omega)$ es límite- w^* de combinaciones convexas de medidas triviales*, lo que puede interpretarse así: *la aproximación de las integrales por sumas de Riemann-Lebesgue, constituye un aspecto particular del teorema de Krein-Milman.*

Nota. La última proposición y c) valen todavía para Ω localmente compacto, tomando como $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas nulas en el punto en el infinito.

Una medida $m \in I(\Omega)$ se dice *métricamente transitiva* (omitiremos generalmente la palabra métricamente) si para todo conjunto $S \in B(\Omega)$ invariante (es decir $T_t S = S$ para todo t real) se verifica $m(S) = 1$ o $m(S) = 0$.

Lema 1. *Si Ω es compacto, $I(\Omega)$ es un conjunto convexo, compacto- w^* , y todo punto extremal $m(S)$ de $I(\Omega)$ es una medida métricamente transitiva⁽¹³⁾.*

En efecto, si $\mu \in M(\Omega)$ es de acumulación- w^* de $I(\Omega)$, dados $\varepsilon > 0$, $x \in C(\Omega)$, $x_t = x(T_t P)$, existe $m \in I(\Omega)$ tal que simultáneamente se verifica $|m(x) - \mu(x)| < \varepsilon$, $|m(x_t) - \mu(x_t)| < \varepsilon$, y como $m(x_t) = m(x)$, por ser m invariante, resulta $|\mu(x) - \mu(x_t)| < 2\varepsilon$, luego $\mu(x) = \mu(x_t)$, es decir $\mu \in I(\Omega)$, lo que prueba que $I(\Omega)$ es cerrado- w^* y siendo $I(\Omega) \subset M(\Omega)$ resulta de b) que $I(\Omega)$ es compacto- w^* . La segunda parte del lema se prueba en forma análoga a c).

Lema 2. *Si para cada conjunto cerrado $F \in B(\Omega)$ se pone $\xi_F(\mu) = \mu(F)$ ($\mu \in M(\Omega)$), entonces la clase $H = \{\xi_F\}$ es una clase separadora de funciones reales, lineales, semicontinuas inferiormente sobre $M(\Omega)$.*

Demostración. Puesto que dos medidas $\mu, \mu' \in M(\Omega)$ se suponen idénticas si dan el mismo funcional lineal sobre $C(\Omega)$, si coinciden sobre los conjuntos cerrados de $B(\Omega)$, coinciden idénticamente, luego H es una clase separadora. La semicontinuidad inferior resulta también sencillamente: Sea $M' \subset M(\Omega)$ el conjunto de $\mu \in M(\Omega)$ donde $\mu(F) \geq a$, y μ' punto de acumulación- w^* de M' . Sea $x(P) \geq \varphi_F(P)$ y $\mu_n \in M'$ tales que $\mu_n(x) \rightarrow \mu'(x)$ ($x \in C(\Omega)$ fija). Puesto que $\mu_n(x) \geq \mu_n(F) \geq a$ resulta $\mu'(x) \geq a$ y por a) que $\mu'(F) \geq a$, esto es $\mu' \in M'$.

⁽¹³⁾ En el § 4 probaremos que también recíprocamente toda medida transitiva es extremal de $I(\Omega)$.

De los últimos dos lemas y los teoremas 1 y 2 de § 2, resulta inmediatamente el siguiente teorema, cuya segunda parte fué probada por Kryloff-Bogoliuboff en el caso más particular de Ω métrico compacto.

Teorema III. (1) Si Ω es compacto, dados un $F \in B(\Omega)$ cerrado y una $m \in I(\Omega)$ existe una $m' \in I(\Omega)$ métricamente transitiva tal que $m'(F) \geq m(F)$. En particular si toda medida invariante, transitiva se anula en F entonces también se anula en F cualquier otra medida invariante, transitiva o no.

(2) Si Ω es compacto, $I(\Omega)$ coincide con la cápsula cerrada- w^* del subconjunto de las medidas invariantes transitivas, es decir toda $m \in I(\Omega)$ es una combinación convexa de medidas invariantes transitivas, o punto de acumulación- w^* de tales combinaciones convexas.

En el § 4 examinaremos con más detalle los puntos extremos de $I(\Omega)$. En el caso de Ω compacto y separable se puede decir algo más sobre las medidas transitivas:

Lema 3. Si Ω es separable, dada una $m \in I(\Omega)$ transitiva, existe un conjunto $N \subset \Omega$ tal que $m(N) = 0$ y para todo $P \in \Omega - N$ es $m_P = m$. Luego toda m transitiva es una medida individual.

En efecto, por el corolario 1 para todo $P \in U$ y $x \in C(\Omega)$ es $x^*(P) = m_P(x)$. Como $x^*(P)$ es invariante y m es transitiva, debe existir un conjunto $N_1 = N_1(x)$ de medida $m(N_1) = 0$ tal que $x^*(P)$ es constante en $\Omega - N_1$ ⁽¹⁴⁾. Como $\int x^* dm = \int x dm = m(x)$, resulta que $x^*(P) = m(x) = \text{const.}$ para todo $P \in \Omega - N_1$. Poniendo $N = N(x) = N_1 \cup (\Omega - U)$, como U es de probabilidad máxima, sigue $m(N) = 0$ y $x^*(P) = m_P(x) = m(x)$ para todo $P \in \Omega - N(x)$. Haciendo uso de la existencia de una sucesión $x_n \in C(\Omega)$ tal que toda otra $x(P) \in C(\Omega)$ sea límite uniforme de funciones $x_n(P)$, (§ 1), se ve enseguida que se puede conseguir un conjunto N de medida $m(N) = 0$ y tal que $N(x) \subset N$ para toda $x \in C(\Omega)$. Es decir $m_P(x) = m(x)$ para toda $x \in C(\Omega)$ y $P \in \Omega - N$. Luego para $P \in \Omega - N$ es $m_P = m$.

Se llama *conjunto ergódico* a todo conjunto $G \subset U$ tal que:

- 1º, si $P \in G$, $Q \in G$ es $m_P = m_Q$,
- 2º, si $P \in G$, $Q \notin G$ es $m_P \neq m_Q$.

⁽¹⁴⁾ Para probarlo basta observar que si $a < b$, $S_1 =$ conjunto de los P en que $x^*(P) > b$, $S_2 =$ conjunto de los P en que $x^*(P) < a$, ambos conjuntos S_1, S_2 son invariantes y disjuntos, luego siendo m transitiva debe ser o $m(S_1) = 0$ o $m(S_2) = 0$.

Luego U queda dividido en conjuntos ergódicos disjuntos, siendo cada conjunto compuesto por los puntos de U que dan origen a una misma medida individual. Por el lema 3 toda $m(S)$ transitiva es una m_P ; los puntos $P \in U$ tales que m_P es transitiva se llaman *puntos transitivos*. Cada $P \in U$ y en particular cada P transitivo pertenece a uno y sólo un conjunto ergódico que se indicará G_P .

Lema 4. Si Ω es separable, P transitivo y G_P el conjunto ergódico de P , entonces $m_P(\Omega - G_P) = 0$.

En efecto, si fuera $m_P(\Omega - G_P) > 0$, como por el lema 3 existe un $N \subset \Omega$ tal que $m_P(N) = 0$ y para todo $Q \in \Omega - N$ es $m_Q = m_P$, el conjunto $\Omega - N$ tendría un punto Q común con $\Omega - G_P$, es decir para algún $Q \in \Omega - G_P$ sería $m_Q = m_P$, luego $Q \in G_P$, lo que es absurdo.

Teorema IV. Si Ω es compacto separable, el conjunto U_T de los puntos transitivos es de probabilidad máxima.

Pues por el lema 4 es $m_P(\Omega - U_T) = 0$ para todo $P \in U_T$, luego toda medida transitiva se anula en $\Omega - U_T$, y en virtud del teorema III, (i), resulta $m(\Omega - U_T) = 0$, cualquiera sea la medida invariante $m(S)$, transitiva o no, luego $m(U_T) = 1$ y U_T es de probabilidad máxima.

Un punto $P \in U$ se dice *denso* ⁽¹⁵⁾ si para todo conjunto abierto $S \subset \Omega$ que contiene a P se verifica $m_P(S) > 0$. Los teoremas precedentes permiten deducir muy fácilmente la siguiente proposición de Kryloff-Bogoliuboff.

Corolario II. Si Ω es compacto separable, el conjunto $R \subset U_T$ de los puntos $P \in U_T$ que son densos es de probabilidad máxima ⁽¹⁶⁾.

En efecto, por el teorema IV basta probar que si $N \subset U_T$ es el conjunto de puntos transitivos y no densos es $m(N) = 0$, cualquiera sea $m \in I(\Omega)$. Suponiendo lo contrario, existiría un cerrado $F \subset N$ y una $m \in I(\Omega)$ con $m(F) > 0$, y para cada $P \in F$ un abierto $S_P \ni P$ con $m_P(S_P) = 0$. Por el teorema III, (i), existe una $m' \in I(\Omega)$ transitiva tal que $m'(F) \geq m(F) > 0$, y por el lema 3 existe un cerrado $F' \subset F$ tal que $m'(F') > 0$ y $m_P = m'$

⁽¹⁵⁾ Los puntos densos tienen importancia en vista de que todo tal punto es fuertemente estable en sentido de Poisson (véase KRYLOFF-BOGOLIUBOFF, l. c.).

⁽¹⁶⁾ Los puntos $P \in R$ se llaman regulares.

para todo $P \in F'$. Pero siendo F' compacto existe un número finito de puntos $P_1, \dots, P_n$ de F' tales que $F' \subset S_{P_1} \cup \dots \cup S_{P_n}$, luego $m'(F') \leq m'(S_{P_1}) + \dots + m'(S_{P_n}) = m_{P_1}(S_{P_1}) + \dots + m_{P_n}(S_{P_n}) = 0$, absurdo.

Terminaremos este § indicando una propiedad de los puntos extremales del conjunto de las medidas invariantes, *simplemente* aditivas, que permite profundizar la parte (i) del teorema III.

Sea como antes $\Omega = \{P\}$ un espacio compacto, $B(\Omega) = \{S\}$ los conjuntos baireianos, $E = \{x(P)\}$ el espacio lineal de las combinaciones lineales (finitas) de funciones características $\varphi_S(S)$ de conjuntos S , y T_t como antes un grupo de automorfismos de Ω . Designaremos con $M'(\Omega)$ el conjunto de las posibles medidas $\nu(S)$ definidas sobre $B(\Omega)$, simplemente aditivas (es decir $S = S_1 + S_2$, $S_1 \cap S_2 = 0$ implica $\nu(S) = \nu(S_1) + \nu(S_2)$) con $\nu(\Omega) = 1$, $\nu(S) \geq 0$. Si $x \in E$ es de la forma $x(P) = \lambda_1 \varphi_{S_1}(P) + \dots + \lambda_n \varphi_{S_n}(P)$, pondremos $\nu(x) = \sum \lambda_i \nu(S_i)$ (esta definición es coherente por la aditividad de ν), y $\nu(x)$ será un funcional lineal sobre E . En $E = \{x\}$ introducimos una relación $\prec$ definida como sigue. Escribimos $x \prec y$ si existen $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ de E , y números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $t_1, \dots, t_n$ tales que $x(P) \leq \lambda_1 x_1(P) + \dots + \lambda_n x_n(P)$, $y(P) = \lambda_1 y_1(P) + \dots + \lambda_n y_n(P)$, $y_i(P) = x_i(T_{t_i} P)$ para todo $P \in \Omega$ e $i = 1, 2, \dots, n$. Se comprueba inmediatamente que una función $\nu(x)$ definida sobre E verifica $\nu(x) \leq 0$ para $x \prec 0$ si y sólo si $\nu(S) = \nu(\varphi_S)$ es una medida simplemente aditiva e invariante: $\nu(S) = \nu(T_t S)$ para todo t real. Designando con $I'(\Omega) \subset M'(\Omega)$ el subconjunto de $M'(\Omega)$ formado por las $\nu(S)$ invariantes se tiene que toda $\nu \in I'(\Omega)$ verifica: $\nu(x) \leq 0$ si $x \prec 0$. En virtud de lo visto al final del § 2, aplicación 2, es $I'(\Omega)$ un conjunto convexo y compacto- w según la definición de topología w allí adoptada, y por tanto valen para $I'(\Omega)$ los teoremas 1 y 2 del § 2. Igual que en c) se ve que los puntos extremales de $I'(\Omega)$ son medidas $m \in I'(\Omega)$ transitivas, es decir que sobre todo conjunto invariante valen cero o uno. Entre los puntos extremales de $I'(\Omega)$ consideraremos una clase especial que llamaremos *punto extremal* $-F$ de $I'(\Omega)$, que es un caso particular de la definición de punto extremal $-H$ dada en el § 2, y que resulta tomando como H la clase de las funciones características φ_F de los conjuntos cerrados $F \in B(\Omega)$. Vamos a probar que toda $\nu(S) \in I'(\Omega)$ extremal- F es completamente aditiva y transitiva. En efecto, sea $\nu(S) \in I'(\Omega)$ y pongamos para cada $S \in B(\Omega)$, $m_\nu(S) =$

infimum $\sum v(S_i)$, correspondiente a los posibles cubrimientos $S \subset \bigcup S_i$ de S por conjuntos abiertos S_i , en número numerable. Se comprueba fácilmente (haciendo uso de la teoría de la medida de Caratheodory⁽¹⁷⁾) que $m_v(S)$ es una medida completamente aditiva invariante sobre $B(\Omega)$, y como Ω es compacto todo cubrimiento $\Omega \subset \bigcup_1^\infty S_i$ puede reducirse a uno finito, $\Omega \subset \bigcup_1^n S_i$, luego $1 = v(\Omega) \leq \sum_1^n v(S_i)$, de donde se concluye $m_v(\Omega) = 1$, es decir, $m_v \in I(\Omega)$. Así pues toda $v \in I'(\Omega)$ da origen a una $m_v \in I(\Omega)$ con $v(F) \leq m_v(F)$ para todo F cerrado baireiano. Ahora si $v(S)$ es extremal- F de $I'(\Omega)$, como $m_v \in I(\Omega) \subset I'(\Omega)$, la última desigualdad y la definición de extremal- F implican, como es fácil ver, que debe ser $v(F) = m_v(F)$ para todo F cerrado baireiano, luego también $v(S) = m_v(S)$ para todo S abierto. Si $S \in B(\Omega)$, $S \subset \bigcup_1^\infty S_i$, $S_0 = \bigcup_1^\infty S_i \supset S$ se tiene $v(S) \leq v(S_0) \leq m_v(S_0) \leq \sum_1^\infty m_v(S_i) = \sum_1^\infty v(S_i)$ luego $v(S) \leq m_v(S)$ para todo $S \in B(\Omega)$. Por tanto debe ser $v(S) = m_v(S)$ para todo $S \in B(\Omega)$ ⁽¹⁸⁾; luego $v = m_v \in I(\Omega)$ y $v(S)$ es completamente aditiva. Esto permite probar que toda $m \in I'(\Omega)$ extremal- F es extremal de $I'(\Omega)$. En efecto, de lo contrario sería $m = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2$, $m_i \in I'(\Omega)$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y para todo S es $m_1(S) \geq m(S) \geq m_2(S)$ o $m_1(S) \leq m(S) \leq m_2(S)$. Por ser $m(S)$ extremal- F esto exige $m_1(F) = m(F) = m_2(F)$ para todo F , luego m_1, m_2 son también extremales- F , luego por lo recién probado $m_1, m_2 \in I(\Omega)$, y la última igualdad da $m(S) = m_1(S) = m_2(S)$ para todo $S \in B(\Omega)$. Finalmente observemos que toda $m \in I(\Omega)$ extremal- F de $I(\Omega)$ es también extremal- F de $I'(\Omega)$; en efecto, existe una buena ordenación F_α de los cerrados tal que $m(F_1)$ realiza el máximo entre todas las medidas de $I(\Omega)$, después $m(F_2)$ realiza el máximo entre todas las que lo realizaban en F_1 , etc. Pero esta buena ordenación determina también un punto extremal- F de $I'(\Omega)$, $v(S)$, que es la v que alcanza el máximo para $v(F_1)$ entre todas las medidas de $I'(\Omega)$, etc. Por lo demostrado $v(S) \in I'(\Omega)$ y como corresponde a la misma ordenación F_α que $m(S)$ debe ser $v(S) = m(S)$ y $m(S)$ es extremal- F de $I'(\Omega)$.

(17) Véase p. ej. S. SAKS, *Theory of the integral*, Cap. 2, Stechert, 1937

(18) Pues si fuera $v(S) < m_v(S)$, como $v(\bar{Q} - S) \leq m_v(\bar{Q} - S)$ sería $1 = v(\bar{Q}) = v(S) + v(\bar{Q} - S) < m_v(S) + m_v(\bar{Q} - S) = 1$, absurdo.

cerrada de $\{T_h^*(x)\}$. Si ponemos $\|T_g\| = \inf M_g$ para los posibles M_g que satisfacen la desigualdad de arriba, y vale $\|T_g\| \leq 1$ para todo $T_g \in T$, entonces $\|T_h^*\| \leq 1$ para todo T_h^* . Si $T_g(x_0) = x_0$ para todo T_g diremos que x_0 es un *punto fijo* (concepto relativo al semigrupo dado); si x_0 es un punto fijo entonces también es $T_h^*(x_0) = x_0$ para todo T_h^* . En lo que sigue supondremos $\|T_g\| \leq 1$ para todo T_g .

Lema A. Si para todo $y \in E$, $K(y)$ contiene por lo menos un punto fijo, y si $K(x)$ contiene un solo punto fijo ξ , entonces dados $\varepsilon > 0$ y T_h^* arbitrarios, existe $T_{h'}^*$ tal que cualquiera sea $T_{h''}^*$ vale $\|T_{h''}^* T_{h'}^* T_h^*(x) - \xi\| < \varepsilon$.

En efecto, $K(T_h^*(x)) \subset K(x)$ contiene por hipótesis un punto fijo que debe coincidir con ξ , luego existe $T_{h'}^*$ tal que $\|T_{h'}^* T_h^*(x) - \xi\| < \varepsilon$. De $\|T_{h''}^*\| \leq 1$ sigue enseguida la tesis.

Supongamos ahora que $E = L^2$, espacio de Hilbert (por ej. un espacio de funciones a cuadrado sumable). Birkhoff y Alaoglu (l. c.) muestran que si $\|T_g\| \leq 1$ entonces $K(x)$, cualquiera sea $x \in L^2$, contiene uno y sólo un punto fijo, de modo que es aplicable al lema A (cuya tesis puede interpretarse como una convergencia generalizada de $T_h^*(x)$ hacia ξ).

Diremos que un semigrupo $G = \{g\}$ es *medible* si existe una medida $\nu(A)$ no negativa, simplemente aditiva, invariante (es decir $\nu(A) = \nu(gA)$), definida para todos los subconjuntos A de G y que vale uno en G ; por ej. los semigrupos abelianos y los grupos resolubles son medibles⁽²⁰⁾.

Volvemos ahora al espacio $C(\Omega)$ de los §§ anteriores, donde Ω es un compacto general. Sea $G = \{g\}$ un semigrupo de aplicaciones continuas de Ω en sí mismo, y $B(\Omega)$ el σ -cuerpo de los conjuntos baireianos. Indicaremos con $g^{-1}S$, $S \in B(\Omega)$, al conjunto de los puntos $Q \in \Omega$ tales que $gQ \in S$, de modo que si S es baireiano $g^{-1}S$ también lo es. Sea $M(\Omega) \subset C^*(\Omega)$ el conjunto convexo compacto- w^* de las medidas m no negativas con $m(\Omega) = 1$. Diremos que $m \in M(\Omega)$ es *invariante* si $m(S) = m(g^{-1}S)$, $S \in B(\Omega)$, e indicaremos con $I(\Omega)$ al conjunto de tales m . Diremos que $S \in B(\Omega)$ es *m-invariante* si $m(S - g^{-1}S) + m(g^{-1}S - S) = 0$ para todo $g \in G$. Llamaremos $K(T) \subset I(\Omega)$ al conjunto de las medidas transitivas: $m(S) = 0$ o 1 para todo S invariante (es decir

⁽²⁰⁾ Cfr. J. VON NEUMANN, *Zur allgemeine Theorie des Masses*, Fund. Math. vol. 13, 1929, págs. 73-116.

$S = g^{-1}S$); y llamaremos $K(T^*) \subset K(T)$ al conjunto de las medidas m fuertemente transitivas, en el sentido que $m(S) = 0$ o 1 para todo S m -invariante. Indicaremos con J_m^*, J respectivamente las clases de los subconjuntos de Ω m -invariantes, o invariantes y con $K(I^*), K(I) \subset I(\Omega)$ las m *extremales*- J_m^* , o respectivamente *extremales*- J , en el sentido del § 2, entendiendo naturalmente que la clase H de funciones es $\xi_S = m(S)$, S invariante del tipo especificado, $m \in I(\Omega)$ (debemos solamente aclarar que aquí las funciones no son semicontinuas, por lo que todavía no podemos asegurar que existan tales tipos de extremales; véase Teorema 2 de este §). Indicaremos con K^e a los extremales ordinarios de $I(\Omega)$ y finalmente con $K(F) \subset I(\Omega)$ al conjunto de las $m \in I(\Omega)$ que poseen la siguiente propiedad: si $m_1, m_2 \in I(\Omega)$ son tales que o bien $m(F)$ pertenece al interior del intervalo de extremos $m_1(F), m_2(F)$, o bien $m(F) = m_1(F) = m_2(F)$, para todo subconjunto cerrado $F \in B(\Omega)$, entonces $m_1 \equiv m_2 \equiv m$. Se observa que $K(F) \subset K^e$. El resultado fundamental sobre los conjuntos K definidos aquí está contenido en el Teorema 2 de más abajo.

Teorema 1. Si G es medible $I(\Omega)$ es no vacío.

Demostración. Sea $\nu(g)$ la medida sobre el semigrupo, $\mu \in M(\Omega)$ arbitraria, y pongamos para cada $S \in B(\Omega)$

$$m(S) = \int_G \mu(g^{-1}S) d\nu(g).$$

m es una medida simplemente aditiva invariante definida sobre $B(\Omega)$ con $m(\Omega) = 1$. Para obtener la completa aditividad basta aplicar el procedimiento usual, indicado en la última parte del § 3, de tomar cubrimientos numerables con abiertos de $B(\Omega)$. La compacidad de Ω asegura que la medida obtenida vale uno en Ω y por tanto pertenece a $I(\Omega)$ ⁽²¹⁾.

Si $m \in I(\Omega)$, en el espacio $L^2(m)$ de las funciones reales de-

⁽²¹⁾ El uso de semigrupos medibles remite el problema de la existencia de punto fijo al problema de la existencia de medida invariante en el grupo, que puede tratarse directamente. También podemos adoptar el teorema de punto fijo para conjuntos convexos compactos en espacios lineales topológicos localmente convexos (véase por ej. S. KAKUTANI, Proc. Imp. Acad. Japan, vol. 14 (1938), págs. 242-245).

finidas sobre Ω a cuadrado m -sumable, podemos definir un semigrupo $\{T_g\}$, $g \in G$, de operadores lineales con $\|T_g\|=1$. Basta poner para cada x continua $T_g(x) = T_g x(P) = x(gP)$. La invariancia de m asegura que

$$\|x\|_m = \int_{\Omega} |x(P)|^2 dm = \int_{\Omega} |x(gP)|^2 dm = \|T_g(x)\|_m$$

luego T_g puede extenderse por continuidad a $L^2(m)$ y, usando la misma notación, será $\|T_g\|=1$.

Lema 1. *Dado un número finito de medidas $m_1, \dots, m_n \in I(\Omega)$ y $x \in C(\Omega)$, existe una función real $\xi(P) = \xi(x; m_1, \dots, m_n)$ definida sobre Ω medible Baire y con las propiedades: si $S_g = \Omega[P; \xi(P) = \xi(gP)]$, es $m_i(S_g) = 1$ para todo $g \in G$;*

$$\int |\xi(P)|^2 dm_i < \infty; \int x(P) dm_i = \int \xi(P) dm_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Demostración. Haremos la demostración para $n=2$. Sea $\xi_i \in L^2(m_i)$ con las propiedades del ξ del lema A, k entero positivo y h tal que $\|T_h^*(x) - \xi^1\|_{m_1} < 1/k$. Por el lema A existe h_0 tal que $\|T_{h_0}^* T_h^*(x) - \xi^2\|_{m_2} < 1/k$, y como $\|T_{h_0}^*\|=1$ también es $\|T_{h_0}^* T_h^*(x) - \xi^1\|_{m_1} < 1/k$. La función continua $T_{h_0}^* T_h^*(x) = x_k$, verifica pues simultáneamente $\|x_k - \xi^1\|_{m_1} < 1/k$, $\|x_k - \xi^2\|_{m_2} < 1/k$, $k=1, 2, \dots$, y ξ^1, ξ^2 son puntos fijos de los respectivos $L^2(m_i)$. Sea x_j una subsucesión de x_k que converge punto a punto hacia ξ^1 , salvo medida m_1 nula, y x_h una subsucesión de x_j que converge hacia ξ^2 punto a punto, salvo medida m_2 nula. Si ponemos $\xi(P) = \lim x_h(P)$ ($h \rightarrow \infty$) donde dicho límite existe y $\xi(P) = 0$ en el conjunto donde el límite no existe, tendremos una función que cumple con la tesis del lema.

Lema 2. *Sea $\xi(x; m_1, \dots, m_n)$ la función del lema precedente. Supongamos que $m_i \in K(T^*)$. Entonces existen conjuntos S_i disjuntos, m_i -invariantes tales que $m_i(S_i) = 1$, y ξ es constante (e igual a a_i) sobre cada S_i , $i=1, \dots, n$.*

En efecto, pongamos $S(a, b) = \Omega[P; a \leq \xi(P) < b]$ luego $g^{-1}S(a, b) = \Omega[P; a \leq \xi(gP) < b]$. Evidentemente será $[S(a, b) - g^{-1}S(a, b)] + [g^{-1}S(a, b) - S(a, b)] \subset \Omega - S_g$ (el S_g del lema precedente). Luego $S(a, b)$ es m_i -invariante, $i=1, \dots, n$. Fijemos i y sea a_i el extremo finito de la semirrecta formada por los a tales que

$m_i[S(a, \infty)] = 0$. Entonces $m_i[S(a_i - \varepsilon, a_i)] = 1$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$, de modo que $S_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(a_i - \varepsilon, a_i) = \Omega[P; \xi(P) = a_i]$ verifica la tesis del lema.

Corolario. En las hipótesis del lema precedente, si para un par i, j es $a_i = a_j$, entonces $\int x dm_i = \int x dm_j$.

$$\begin{aligned} \text{Porque } \int_{\Omega} x dm_i &= \int_{\Omega} \xi dm_i = \int_{S_i} \xi dm_i = a_i = a_j = \int_{S_j} \xi dm_j = \\ &= \int_{\Omega} \xi dm_j = \int_{\Omega} x dm_j. \end{aligned}$$

La demostración de este corolario se aplica igualmente al siguiente resultado más general.

Lema 3. Sea $\xi(x; m_1, \dots, m_n)$, $m_i \in I(\Omega)$. Si S es un conjunto tal que $m_i(S) = m_j(S) = 1$ y ξ es constante sobre S , entonces $m_i(x) = m_j(x) = \int x dm_i = \int x dm_j$.

Ahora volvemos a nuestro objeto de interés, los puntos extremos de $I(\Omega)$.

Teorema 2. $K(T^*) = K(F) = K^e$. Si G es un grupo mono-paramétrico T_t (§ 3) es además $K(T) = K(T^*) = K(I) = K(I^*)$.

Demostración. 1) $K^e \subset K(T^*)$. Igual demostración que para c) del § 3. 2) $K(T^*) \subset K(F)$. Sean $m \in K(T^*)$, $m \in I(\Omega)$, $i = 1, 2$, tales que sobre cada conjunto cerrado $F \in \mathcal{B}(\Omega)$, o bien $m_1(F) < m(F) < m_2(F)$, o bien $m_2(F) < m(F) < m_1(F)$, o bien $m_1(F) = m(F) = m_2(F)$. Sea $x \in C(\Omega)$, $\xi = \xi(x; m, m_1, m_2)$ del lema 1 y S un conjunto m -invariante donde ξ es constante y $m(S) = 1$ (lema 2). Sea $F_n \subset S$ una sucesión de conjuntos cerrados tales que $m(S - F_n) \rightarrow 0$.

Sobre infinitos F_n será por ej. $m_1(F_n) \geq m(F_n)$. Luego $m_1(S) = 1$. Si $F \subset \Omega - S$ es $m(F) = m_1(F) = 0$, luego $m_2(F) = 0$. Por tanto $m_2(\Omega - S) = 0$, $m_2(S) = 1$. Por el lema 3 resulta $m_1(x) = m_2(x)$, y esto siendo válido para cada $x \in C(\Omega)$, implica $m_1 = m_2 = m$. Luego $m \in K(F)$. 3) $K(F) \subset K^e$, trivial. Supongamos ahora $G = \{T_t\}$ como en el § 3. 4) $K(T) \subset K(T^*)$. Sea $m \in K(T)$ y S m -invariante. Se sabe (véase por ej. E. Hopf, l. c., cap. 3) que existe un conjunto S' invariante tal que $m(S - S') + m(S' - S) = 0$, luego $m(S) = m(S') = 0$ o 1. 5) $K(T) \subset K(I^*)$. Puesto que vale el teorema ergódico individual la sucesión

$$x_n(P) = \frac{1}{n} \int_0^n x(T_t P) dt$$

puede ser usada en lugar de la x_k de la demostración del lema 1 para definir todas las $\xi(x; m_1, \dots, m_n)$. Es decir $\xi(x; m_1, \dots, m_n) = \xi(x; m'_1, \dots, m'_n) = \lim x_n(P)$ donde existe el límite y cero en caso contrario. Sea ahora $m \in K(T)$ y $S_x, x \in C(\Omega)$, un conjunto invariante donde $\xi(x; m)$ es constante y $m(S_x) = 1$ (lemas 1 y 2), y sea $S_{x_1}, \dots, S_{x_\alpha}, \dots, \alpha < \eta$, una ordenación de los conjuntos invariantes que comience con los S_x . Sea $m_1 \in I(\Omega)$ tal que $m_1(S_x) = 1$. Puesto que $\xi(x; m, m_1) = \xi(x; m)$ es constante en S_x , el lema 3 es aplicable. Luego $m(x) = m_1(x)$ y $m = m_1$. Por tanto m es extremal- J_m^* (y todavía más, en una buena ordenación que comienza con conjuntos invariantes de medida 1).. Esto prueba, en particular, que $K(I^*)$ es no vacía lo que no podemos asegurar si G es general. La demostración precedente se apoya exclusivamente en el teorema individual, por tanto caben generalizaciones para grupos m-paramétricos y otros más generales para los cuales se aplica el teorema ergódico individual⁽²²⁾. 6) $K(I) \subset K(T)$. Sea m extremal- J y no transitiva. Sea $S_1, \dots, S_\alpha, \dots, \alpha < \eta$, la ordenación correspondiente de los conjuntos invariantes. Sea S_β el primero en la ordenación en el que $m(S_\beta) \neq 0, 1$, y sea $m_1(S) = m(S \cap S_\beta) : m(S_\beta)$. Si $m(S) = 0$ o 1 será también $m_1(S) = 0$ o 1, por tanto si $\alpha < \beta$ es $m_1(S_\alpha) = m(S_\alpha)$ en cambio $m_1(S_\beta) > m(S_\beta)$ que es una contradicción.

Del teorema que acabamos de demostrar sigue en particular la identidad entre los puntos extremales de $I(\Omega)$, las medidas transitivas y las medidas extremales- J , respecto de la clase de los conjuntos invariantes. Sería interesante saber si las medidas transitivas coinciden también con las extremales- F , respecto de la clase de los conjuntos cerrados.

BUENOS AIRES.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS.

INSTITUTO MATEMÁTICO.

⁽²²⁾ Para una forma general del teorema ergódico individual véase por ej. YOSIDA-KAKUTANI, *An ergodic treatment of the individual ergodic theorem*, Proc. Imp. Acad. Japan, 1941.

ON THE HARMONIC ANALYSIS OF HYPERGEOMETRICAL FUNCTIONS

by

AUREL WINTNER

1. — If λ denotes a parameter, Legendre's differential equation is

$$(1) \quad \{(1-x^2)y'\}' + \lambda y = 0,$$

where $' = d/dx$ or, if $-1 < x < 1$,

$$(2) \quad x = \cos \Theta, \quad 0 < \Theta < \pi$$

and $' = d/d\Theta$, then

$$(3) \quad (y' \sin \Theta)' + \lambda y \sin \Theta = 0.$$

If

$$(4) \quad \lambda = l(l+1), \text{ where } l=0, 1, \dots,$$

then a solution of (3) is the trigonometric polynomial $P_l(\cos \Theta)$, and «the» other (that is, a linearly independent) solution, that depending on $Q_l(\cos \Theta)$, is logarithmic. It turns out, however, that (i) the general solution of (3) has a simple trigonometric expansion,

$$(5) \quad y(\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\Theta, \quad 0 < \Theta < \pi,$$

in which the coefficients c_n can be calculated recursively (in

terms of an arbitrary pair of initial constants c_0, c_1), and that (ii) the same is true if λ , instead of being an «eigenvalue», (4), is arbitrary ($-\infty < \lambda < \infty$).

The function-theoretical reason for the success of the method will become clear in connection with (15) below. It will then be seen that the situation is sufficiently peculiar for (1) to fail when (1) is generalized to

$$(6) \quad x(1-x) \ddot{y} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \dot{y} - \alpha\beta y = 0,$$

the hypergeometric differential equation.

As will be seen at the end of the paper, the method of undetermined trigonometric coefficients can formally be applied to (6) also, provided that a suitable factor $v=v(x)$ is split off from $y=y(x)$. But the expansion resulting by this factorization in the case

$$(6_0) \quad \gamma = 1, \alpha + \beta = 1; \quad \lambda = -\alpha\beta,$$

which (after the replacement of the range $-1 < x < 1$ by the range $0 < x < 1$) becomes the case (1) of (6), is not identical with the expansion (5) of the solutions of (3).

2.—First, a formal substitution of (5) into (3) gives

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n \cos n\Theta \sin \Theta - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \sin n\Theta \cos \Theta + \\ + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\Theta \sin \Theta = 0, \end{aligned}$$

where the first two sums represent the contribution of the first term of (3).

Hence, if $\cos \Theta \sin n\Theta$ and $\cos n\Theta \sin \Theta$ are expressed as $\frac{1}{2} \sin(n+1)\Theta \pm \frac{1}{2} \sin(n-1)\Theta$, it follows by straightforward contractions that

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - [n-1]^2) c_{n-1} \sin n\Theta - \sum_{n=-1}^{\infty} (\lambda - [n+1]^2) c_{n+1} \sin n\Theta \\ - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) c_{n-1} \sin n\Theta - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} \sin n\Theta = 0. \end{aligned}$$

But what this requires is the identical vanishing of a pure sine series of the form

$$\sum_{n=-1}^{\infty} C_n \sin n\Theta, \text{ or simply } \sum_{n=-1}^{\infty} \gamma_n \sin n\Theta = 0, \quad (0 < \Theta < \pi),$$

where $\gamma_n = C_n$ if $n > 1$ and $\gamma_n = C_n - C_{-n}$ if $n = 1$; so that $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \dots = 0$.

It is readily seen from the preceding two formula lines that if $n > 1$, then $\gamma_n = 0$ means that

$$(7) \quad (\lambda - [n-1]^2) c_{n-1} - (\lambda - [n+1]^2) c_{n+1} - (n-1) c_{n-1} - (n+1) c_{n+1} = 0,$$

and that the remaining condition, $\gamma_1 = 0$, becomes

$$(8) \quad \lambda c_0 + \lambda c_0 - (\lambda - 4) c_2 - 2c_2 = 0.$$

But (7) can be contracted into

$$(9) \quad (\lambda - n^2 - n) c_{n+1} = (\lambda - n^2 + n) c_{n-1}, \text{ where } n > 1,$$

and (8) into

$$(9 \text{ bis}) \quad (\lambda - 2) c_2 = 2\lambda c_0.$$

Accordingly, if c_0 and c_1 are given, then $c_2, c_4, c_6, \dots$ and $c_3, c_5, c_7, \dots$ follow from (9 bis) and (9) recursively, provided that the first factor on the left of (9 bis), (9), does not vanish for any positive even n or any positive odd n , respectively.

3. — Since $-n^2 - n = -(n+1)n$, the proviso just mentioned is satisfied in both cases, $n \equiv 0, 1 \pmod{2}$, if and only if λ is not of the form (4). Suppose first that this is the case. Thus, if c_0 and c_1 are given arbitrarily, c_n can be calculated from (9) and (9 bis) for every $n \geq 2$. In other words,

$$(10) \quad c_{n+1} = f_n(\lambda) c_{n-1},$$

where, for the given value of λ , the denominator of

$$(11) \quad f_1(\lambda) = 2\lambda(\lambda-2) \text{ and } f_n(\lambda) = (n^2 - n - \lambda)/(n^2 + n - \lambda),$$

where $n > 1$, never vanishes.

It is clear from (11) that, for every fixed λ ,

$$(12) \quad f_n(\lambda) = 1 - 2n^{-1} + O(n^{-2}) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

It follows therefore from (10) that, if the sequence $\{c_n\}$ is defined by either of the initial conditions

$$(13) \quad (c_0, c_1) = (1, 0), \quad (c_0, c_1) = (0, 1),$$

then *one* of the two sequences $\{c_{2n}\}, \{c_{2n+1}\}$ is the sequence $\{0\}$, and *the other* a sequence which is monotone from a certain n onward.

Hence, if $c_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, it follows from the boundedness of the partial sums of $\sum \cos n\Theta$, where $0 < \Theta < \pi$ that the trigonometric series (5) is convergent in both cases (13). But the hypothesis, $c_n \rightarrow 0$, of this conclusion is satisfied. This follows from (10) and (12), since the infinite product $\prod(1-p/n)$, where $p=2>0$, diverges to 0.

In addition, since the n -th partial sum of $\sum p/n$ is about $p \log n$, the n -th partial product of $\prod(1-p/n)$ is of the order of $\exp(p \log n) = n^p$. But these estimates can be applied, by

$$(10) \text{ and } (12), \text{ with } p = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \text{ instead of just with } p=2,$$

in both of the cases (13), since (10) defines c_n in terms of c_{n-2} , rather than in terms of c_{n-1} . Hence, the above estimate of the partial products of $\prod(1-p/n)$, when applied to $p=1$, shows $c_n = O(n^{-1})$.

This O -estimate implies that the trigonometric series (5) is a Fourier series; in fact, it follows to be of class L^2 (Fisher-Riesz) and, as a matter of fact, of class L^m for every m ; (W. H. Young). In addition, as shown above, (5) is convergent for $0 < \Theta < \pi$ (and uniformly for $\varepsilon < \Theta < \pi - \varepsilon$, if $0 < \varepsilon < \pi$). Finally, since all of this holds for both particular choices (13) of (c_0, c_1) , it holds, by the structure of (10), for an arbitrary choice of (c_0, c_1) .

4. — In view of the above deduction of $c_n = O(1)$, it appears that n^{-1} is the true order of c_{2n} or c_{2n-1} in the respective cases (13). This indicates that, after the above exclusion of the λ -values (4), every solution $y(\Theta) \neq 0$ of (3) has at $\Theta=0$ and/or $\Theta=\pi$ the same singularity as the function having the Fourier series $\sum n^{-1} \cos n\Theta$. But this function is the real part of (the principal determination of) $\log(1-z)^{-1}$ on the circle $z=e^{i\Theta}$, that is, $-\log(2 \sin \frac{\Theta}{2})$. Correspondingly, it is easy to see

that, for every value λ , every solution $y(x) \neq 0$ of (1) has at $x=-1$ and/or $x=1$ a logarithmic singularity, at most.

First, it is clear, for reasons of symmetry, that it is sufficient to consider only one of the two finite singular points, $x=\pm 1$, of (1). Next, a translation and a change of the unit of length on the x -axis transform the singular points, $x=\pm 1$, of (1) into the singular points, $x=\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$, of

$$(14) \quad x(1-x) \ddot{y} + (1-2x) \dot{y} + \lambda y = 0.$$

But the indicial equation of (14) at $x=0$ is the same as that of $x \ddot{z} + \dot{z} + \lambda z = 0$, since only the lowest terms (in x) are relevant, and the indicial equation of the latter differential equation is seen to be $\mu(\mu-1) + \mu = 0$, that is,

$$(15) \quad \mu^2 = 0.$$

Accordingly, both characteristic exponents, the roots of (15), are 0 for (14) at $x=0$, no matter what the value of the parameter λ of (14) may be. Consequently (14) has, for every λ , two linearly independent solutions of the form

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^\mu p_1(x), \\ y_2(x) &= y_1(x) \log x + x^\mu p_2(x), \end{aligned}$$

where $p_1(x)$, $p_2(x)$ are regular power series (for $|x|<1$), and $x^\mu = x^0 = 1$.

This proves that, for every value of the parameter λ , the singularities of the solutions of (1) at $x=\pm 1$ are logarithmic

at most. The (L^2) -property of all solutions of (3), found above, is now evident. In other words, (15) makes evident the *Grenzkreis* character of Legendre's equation on the segment joining the two finite singular points; cf Weyl [2].

5. — It also follows from (15) that, if (3) is thought of as a (singular) Hill equation, then (5) represents precisely the substitution called for by the theory of linear differential equations with periodic coefficients. But Hill's infinite determinants did not appear, since the equations of condition (9), proved to be recursive. This was due, of course, to (15) and to the Fuchsian character of the singular points $x = \pm 1$ in (1), along with the fact that, by virtue of (2), and of de Moivre's rule, every recursion formula in $1, x, x^2, \dots$ is equivalent to a recursion formula in $1, \cos \Theta, \cos 2\Theta, \dots$.

Needless to say, the above procedure remains valid if (5) is replaced by

$$(5') \quad y(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \sin n\Theta, \quad 0 < \Theta < \pi.$$

In fact, the recursion formula resulting for the sine coefficients, $c'_1, c'_2, \dots$, will be of the same type as (10).

6. — The classical λ -values, (4), were excluded at the beginning of Section 3. The asymptotic estimates of Section 3 and the function-theoretical remarks of Sections 4-5 are valid, of course, in the case (4) also. But if $\lambda = l^2 + l$, where $l = 0, 1, \dots$, then the denominator of (11) vanishes when $n = l$, hence (10) ceases to be an unrestricted recursion formula.

It is, however, clear from the structure of the definition (10) that, depending on the parity of l , one of the sequences $\{c_n\}$ belonging to the two (linearly independent) initial values (13) will not be arrested by the vanishing of a denominator in (11), when $\lambda = l^2 + l$ and $n = 0, 1, 2, \dots$. It is also seen that the *other* choice of (c_0, c_1) in (13) can be used in order to define c_n by (10) if $n \leq l$, and by $c_n = 0$ if $n > l$ (and (10) is then satisfied for $n > l$ also). Clearly, (5) reduces to the Legendre polynomial $P_l(\cos \Theta)$ in the case of the *second* sequence $\{c_n\}$ (that is, of the sequence arrested at $n = l$), whe-

reas the *first* sequence $\{c_n\}$ supplies a logarithmic solution $y(\Theta)$, one involving the classical function $Q_l(\Theta)$.

In the arrested case, there results quite a natural proof of the wellknown fact that all non-vanishing coefficients of the trigonometric polynomial $P_l(\cos \Theta)$ are positive (and that every second of these coefficients vanishes). This is seen from (10) and (11), since both the numerator and the denominator (11) are positive if $0 < n < l$ and $\lambda = l^2 + l$.

7. — If Legendre's equation (14), is replaced by the hypergeometric equation (6), an equation which reduces to (14) in the particular case (6_0) , then the situation found after (15) is changed considerably.

In fact, what corresponds to (15) in the general case (6) is

$$(16) \quad \mu(\mu - 1 + \gamma) = 0 \text{ at } x=0; \quad \mu(\mu + \alpha + \beta - \gamma) = 0 \text{ at } x=1;$$

(cf., e. g., Whittaker and Watson [3], p. 286); whilst (15) belongs to both $x=0$ and $x=1$, in accordance with the fact that both indicial equations (16) reduce to (15) in the case (6_0) . But the indicial equations mean that the general solution of (6) contains, besides solutions which are regular at $x=0$ and $x=1$, respectively $(\mu=0; \mu=0)$, solutions carrying the respective factors $x^{1-\gamma}$, $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$. But the latter are integrable, or have integrable squares (near $x=+0$ and $x=1-0$), only for specific values of the parameters of (6).

8. — In order to see what can be saved for (6) from the method based on (5), put

$$(17) \quad \cos \Theta = 2x - 1, \text{ where } 0 < x < 1, \text{ i.e., } 0 < \Theta < \pi.$$

The substitution (17) corresponds to (2), since (2) belongs to (1), where the finite singular points are $x=-1$ and $x=1$, rather than $x=0$ and $x=1$, as in (6). But (17) transforms (6), where $y = dy/dx$, into

$$(18) \quad y'' + \frac{a+b \cos \Theta}{\sin \Theta} y' + \lambda y = 0$$

where $y' = dy/d\Theta$ and

$$(19) \quad a = \alpha + \beta + 1 - 2\gamma, \quad b = \alpha + \beta; \quad \lambda = -\alpha\beta.$$

If (18) is written in the form

$$(18') \quad (y'' + \lambda y) \sin \Theta + (a + b \cos \Theta) y' = 0$$

and y is then substitute as a cosine series, (5), it is readily seen that comparison of the coefficients leads to a contradiction (namely, to sine *and* cosine terms) unless $a=0$. But $a=0$ requires, by (19), the restriction $\alpha + \beta = 2\gamma - 1$, and this restriction is equivalent to $\mu_1 = \mu_2$, if μ_1 and μ_2 denote the non-trivial roots of indicial equations (16) (that is, $\mu_1 = 1 - \gamma$ and $\mu_2 = \gamma - \alpha - \beta$). Hence, barring the question of convergence, the method of undetermined cosine coefficients applies to (18) if Legendre's case or (15) is generalized to $\mu_1 = \mu_2$, but it fails to apply when $\mu_1 \neq \mu_2$.

9. — It turns out that the method becomes applicable without the restriction $\mu_1 = \mu_2$ if (18) is replaced by the differential expression which results when the first derivative is removed from (18) in the usual way. The latter consists of a direct application of the variation of constants («Tschnirnau-sen»), which leads to

$$(20) \quad y = vu, \text{ where } v = \left(\sin \frac{1}{2} \Theta\right)^{-\frac{1}{2}(a+b)} \left(\cos \frac{1}{2} \Theta\right)^{-\frac{1}{2}(b-a)}.$$

In fact, substitution of (20) into (18) gives

$$(21) \quad u'' + \left\{ \lambda^* + \frac{a^* + b^* \cos \Theta}{\sin^2 \Theta} \right\} u = 0$$

(cf. Schrödinger [1]), where

$$(22) \quad a^* = -\frac{1}{4} (a^2 + b^2 - 2b) \quad b^* = \frac{1}{2} (1 - b) a;$$

$$\lambda^* = \lambda + \left(\frac{1}{2} b\right)^2.$$

Corresponding to the above treatment of (3) by (5), put

$$(23) \quad u(\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos n\Theta.$$

If (21) is written in the form

$$(24) \quad (A + B \cos \Theta + C \cos 2\Theta) u'' + (D + E \cos \Theta + F \cos 2\Theta) u = 0,$$

where $A, B, \dots$ denote constants, and if (23) is substituted into (24), it turns out that the contradiction referred to in Section 8 does not arise this time. The resulting recursion formula for the coefficients of (23) has more terms than does the binary relation (10). Correspondingly, the issue of convergence is not as simple as in Section 3, and, for function-theoretical reasons which are clear enough from Section 7, convergence can result unless the hypergeometric parameters α, β, γ are subject to certain inequalities. Details will be given elsewhere.

10. — If the procedure, just described, is applied to Legendre's particular case, then what results is not identical with the above treatment of Legendre's equation.

In fact, the problem of (1), where $-1 < x < 1$, is equivalent to (14), where $0 < x < 1$, and (14) represents the case (6₀) of (6). But (6₀) reduces (19) to

$$(19_0) \quad a = 0, \quad b = 1 \quad (\lambda = -\alpha\beta).$$

Hence, (22) shows that (21) reduces to

$$(24_0) \quad (1 - \cos^2 \Theta) u'' + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \cos^2 \Theta \right) u = 0,$$

where, according to (20),

$$(20_0) \quad y = (\sin \Theta)^{-\frac{1}{2}} u, \text{ that is, } u = (\sin \Theta)^{\frac{1}{2}} y$$

(if a superfluous constant factor, resulting from the 2 in $\sin \Theta = 2 \sin \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} \Theta$, is discarded).

Consequently, the two Fourier expansions (5), (23) for the general solution, instead of being identical, result from each other by multiplication with the respective Fourier series

$$(\sin \Theta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\Theta, \quad (\sin \Theta)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos n\Theta,$$

where $0 < \Theta < \pi$ and

$$\pi \alpha_n = 2 \int_0^{\pi} (\sin \Theta)^{\frac{1}{2}} \cos n\Theta \, d\Theta, \quad \pi \beta_n = 2 \int_0^{\pi} (\sin \Theta)^{-\frac{1}{2}} \cos n\Theta \, d\Theta.$$

Both of these Fourier series are convergent for $0 < \Theta < \pi$, but neither of them converges absolutely and only the first of the two (positive, integrable) functions $(\sin \Theta)^{\frac{1}{2}}$, $(\sin \Theta)^{-\frac{1}{2}}$ has an integrable square.

THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY. BALTIMORE.

REFERENCES

- [1] E. SCHRÖDINGER, *The factorization of the hypergeometric equation*, Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 46A (1941), pp. 53-54.
- [2] H. WEYL, *Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (II)*, Göttinger Nachrichten, 1910, pp. 442-467.
- [3] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge, 1927.

SOBRE LA FIGURA POLAR DE UNA DADA RESPECTO DE UN CIRCULO CON CENTRO EN EL BARICENTRO

POR

PEDRO PI CALLEJA

1.- En el trabajo *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*, de L. A. Santaló ⁽¹⁾, se pide dilucidar la siguiente cuestión:

Una figura convexa de contorno Γ está determinada por la función

$$(1) \quad h = h(\varphi),$$

en que h es la distancia desde un punto fijo O a la tangente genérica al contorno Γ y φ el ángulo que la normal a dicha tangente forma con una dirección fija del plano (la del eje Ox por ejemplo). Se pide aclarar si las condiciones

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{h^3} d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{h^3} d\varphi = 0;$$

implican que el punto O sea el centro de gravedad de la figura de contorno Γ , supuesta ésta cubierta con masa homogénea.

Vamos a ver que *en general esto no es cierto*, aun cuando *sí lo sea en casos particulares*, tales como el nimio en que O sea centro de simetría o el más interesante en que la figura sea un

⁽¹⁾ Math. Notae. Año VIII, pág. 108.

triángulo cualquiera, dejándose ya de cumplir para el caso de un cuadrilátero.

Si introducimos la función

$$(3) \quad k = k(\varphi) = 1 : h(\varphi),$$

entonces la curva K que tiene el radio vector k de ángulo φ , es la conjugada de la curva Γ representada tangencialmente por (1) en la correlación involutoria determinada por la transformación por polares recíprocas respecto a la circunferencia de centro O y radio unidad. Las condiciones (2) se escriben entonces

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} k^3 \cos \varphi \, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} k^3 \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

y expresan que el punto O es el baricentro del área limitada por la curva K , por ser equivalentes a anular las dos componentes

$$\int_0^k \int_0^{2\pi} \rho \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \cdot \cos \varphi, \quad \int_0^k \int_0^{2\pi} \rho \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \cdot \sin \varphi$$

de las proyecciones del momento de dicha superficie respecto del punto O sobre dos ejes ortogonales $\varphi=0$ y $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

La cuestión propuesta por L. A. Santaló se traduce así en decidir si tal baricentro es necesariamente también baricentro del área limitada por el contorno Γ .

Para el caso del triángulo la respuesta es afirmativa, como vamos a ver basándonos sobre la observación siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que el punto interior O del triángulo ABC sea su baricentro es que los triángulos parciales OAB , OBC , OCA tengan áreas iguales. En efecto, por la propiedad del baricentro de dividir cada mediana en la razón $2:1$, resulta que sus distancias a los lados son $1/3$ de las alturas correspondientes y son por lo tanto inversamente proporcionales a las longitudes de esos lados; recíprocamente, cada mediana es el

lugar geométrico de los puntos que tienen las distancias a dos lados inversamente proporcionales a las longitudes de éstos.

Si ABC de baricentro O tiene, respecto a la circunferencia de centro O y radio unidad, el triángulo $A_1B_1C_1$ como polar recíproco, es decir A_1 es polo de a , B_1 de b y C_1 de c respecto a dicha circunferencia, los ángulos en O de los triángulos OB_1C_1 , OC_1A_1 y OA_1B_1 son suplementarios de los ángulos internos del triángulo ABC . Las respectivas alturas h_1 , h_2 , h_3 en O de los triángulos OBC , OCA y OAB tienen longitudes recíprocas de los segmentos $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ y $\overline{OC_1}$, es decir

$$(5) \quad h_1/h_2 = \overline{OB_1}/\overline{OA_1}; \quad h_2/h_3 = \overline{OC_1}/\overline{OB_1}.$$

En virtud del teorema que constituye la observación inicial, es

$$(6) \quad h_1a = h_2b = h_3c$$

y por tanto

$$(7) \quad h_1/h_2 = b/a = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } C_1 \hat{O} A_1}{\text{sen } B_1 \hat{O} C_1}; \quad h_2/h_3 = \frac{c}{b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } A_1 \hat{O} B_1}{\text{sen } C_1 \hat{O} A_1}.$$

De (5) y (7) deducimos

$$(8) \quad \overline{OB_1} \cdot \text{sen } B_1 \hat{O} C_1 = \overline{OA_1} \cdot \text{sen } C_1 \hat{O} A_1; \\ \overline{OC_1} \cdot \text{sen } C_1 \hat{O} A_1 = \overline{OB_1} \cdot \text{sen } A_1 \hat{O} B_1,$$

es decir

$$(9) \quad \overline{OB_1} \cdot \overline{OC_1} \cdot \text{sen } B_1 \hat{O} C_1 = \\ = \overline{OA_1} \cdot \overline{OC_1} \cdot \text{sen } C_1 \hat{O} A_1 = \\ = \overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} \cdot \text{sen } A_1 \hat{O} B_1,$$

que prueba la igualdad de las áreas de los triángulos OB_1C_1 ,

OC_1A_1 y OA_1B_1 y por la misma observación inicial queda demostrado que O es también baricentro del triángulo $A_1B_1C_1$.

Sin embargo, para un cuadrilátero cualquiera $ABCD$, de baricentro O , el polar recíproco $PQRS$ respecto a la circunferencia de centro O y radio unidad puede tener un baricentro G distinto de O . Basta considerar el cuadrilátero cuyos vértices tengan por coordenadas $A = (-13; -5)$, $B = 23; -5$, $C = (-1; 7)$, $D = (-13; 7)$ cuyo baricentro es el origen de coordenadas $O = (0; 0)$. Su cuadrilátero polar recíproco, respecto a la circunferencia de radio unidad y centro O , tiene por vértices los puntos $P = (ab) = (0; -1/5)$, $Q = (bc) = (1/13; 2/13)$, $R = (cd) = (0; 1/7)$, $S = (da) = (-1/13; 0)$ de baricentro $G = (0; 3/455)$, distinto del punto O ⁽¹⁾.

Por tanto, en general, las condiciones (2) no implican que el punto O sea el baricentro de la figura de contorno Γ .

2. - Las figuras polares recíprocas presentan otras relaciones de carácter diferencial que no sabemos hayan sido observadas y que parecen de interés.

Si W es el ángulo que forma el radio vector de un punto de (3) con su tangente en él, ángulo que es sabido se determina mediante

⁽¹⁾ Las coordenadas de ambos baricentros se calculan facilmente como sigue:

a) Cuadrilátero $A B C D$. En éste basta observar que si C_1 es la proyección ortogonal del vértice sobre el lado AB , resultan un cuadrado AC_1CD y un triángulo C_1CB de áreas iguales, cuyos respectivos baricentros $(-7; 1)$ y $(7; -1)$ tienen el origen O como punto medio.

b) Cuadrilátero $P Q R S$. Los centros de gravedad de los triángulos PQR y PRS son, respectivamente

$$x_1 = \frac{1}{3}(0 + \frac{1}{13} + 0) = \frac{1}{39}; \quad y_1 = \frac{1}{3}(-\frac{1}{5} + \frac{2}{13} + \frac{1}{7}) = \frac{44}{1365}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(0 + 0 - \frac{1}{13}) = -\frac{1}{39}; \quad y_2 = \frac{1}{3}(-\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + 0) = -\frac{2}{105},$$

cuya recta de unión es la

$$(10) \quad 455x - 455y + 3 = 0.$$

Además por tener Q y S abscisas de valores opuestos, la recta PR es mediana de los triángulos PQS y RQS , y en ella, de ecuación $x = 0$, estará el centro de gravedad del cuadrilátero $PQRS$.

La intersección de $x = 0$ con la (10) da el punto $x = 0$, $y = 3/455$ de acuerdo a lo afirmado.

$$(11) \quad \operatorname{tg} W = \frac{k}{dk/d\varphi},$$

entonces, respecto a la tangente y punto de contacto homólogos de la curva Γ de ecuación polar $r=r(\vartheta)$ con ángulo V dado por

$$(12) \quad \operatorname{tg} V = \frac{r}{dr/d\vartheta},$$

se cumplirá

$$(13) \quad \varphi - \vartheta = V - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi - W,$$

resultando suplementarios los ángulos V y W .

Si se tiene en cuenta que $r \operatorname{sen} V = h = 1/k$, queda

$$(14) \quad \operatorname{sen} V = \operatorname{sen} W = \frac{1}{rk},$$

$$(15) \quad k = \frac{Vr^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{ds}{d\vartheta}$$

$$(16) \quad r = \frac{Vk^2 + \left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2}{k^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d\sigma}{d\varphi}$$

si ds y $d\sigma$ son, respectivamente, los elementos de arco de las curvas Γ y K .

En coordenadas polares, el radio de curvatura R de la curva Γ no viene dado por $ds/d\vartheta$, pues el ángulo de contingencia es $dV + d\vartheta$. Si se tiene en cuenta (13), resulta aquí

$$(17) \quad R = ds/d\varphi;$$

análogamente, el radio de curvatura K de la curva (3) es:

$$(18) \quad K = d\sigma/d\vartheta.$$

De (15), (16), (17) y (18) resulta

$$(19) \quad R \cdot K = r^3 k^3.$$

Por aplicación de (13) y (12) se obtiene

$$(20) \quad d\varphi = dV + d\vartheta = \frac{r^2 + 2 \cdot (dr/d\vartheta)^2 - r \cdot (d^2r/d\vartheta^2)}{r^2 + (dr/d\vartheta)^2} d\vartheta$$

y sustituyendo en (17) resulta la conocida fórmula explícita

$$(21) \quad R = \frac{r^2 + 2 \cdot (dr/d\vartheta)^2 - r \cdot (d^2r/d\vartheta^2)}{r^2 + (dr/d\vartheta)^2}.$$

Facultad de Ciencias Físicomatemáticas
LA PLATA, diciembre 1949.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

Nº 153. — Se considera una elipse de semiejes a, b . Llamando φ al ángulo que una recta por el centro de la elipse forma con el eje mayor, sea $h(\varphi)$ la distancia de dicho centro a la tangente a la elipse perpendicular a esa recta. Se propone calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2(\varphi)}$$

y demostrar que el producto de ella por el área de la elipse vale $2\pi^2$.

Se propone tratar también el problema análogo en el espacio. Deberá considerarse un elipsoide de ejes a, b, c . Llamando ϑ, φ las coordenadas esféricas (ϑ latitud y φ longitud) de una recta por el centro del elipsoide, se llamará $h(\vartheta, \varphi)$ a la distancia de dicho centro al plano tangente perpendicular a la dirección de coordenadas ϑ, φ y se calculará la integral

$$\iint \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{h^3(\vartheta, \varphi)}$$

extendida a toda la esfera, es decir para $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Demostrar que el producto de ella por el volumen del elipsoide vale $16/3 \cdot \pi^2$.

1º. La recta normal a la dirección φ a la distancia h del origen de un sistema de coordenadas ortogonales x, y está representada por la ecuación

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + h = 0. \quad (1)$$

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

la ecuación de la elipse considerada por el problema; se sabe que la ecuación de la tangente a esta elipse en el punto (x_0, y_0) es

$$x \cdot x_0 b^2 + y \cdot y_0 a^2 = a^2 b^2; \quad (3)$$

esta recta coincidirá por lo tanto con la (1) si

$$x_0 b^2 : y_0 a^2 : -a^2 b^2 = \cos \varphi : \sin \varphi : h$$

es decir

$$x_0 = \frac{-a^2 \cos \varphi}{h}, \quad y_0 = \frac{-b^2 \sin \varphi}{h}.$$

Por cuanto el punto (x_0, y_0) se supone estar sobre la cónica (2), será luego

$$\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{h^2} = 1$$

es decir

$$h^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

Reemplazando este valor de $h(\varphi)$ en la integral propuesta esta resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d\varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{d\varphi / \cos^2 \varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{ab} \int \frac{d \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi}{1 + (\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi)^2}. \end{aligned}$$

El valor de la integral indefinida correspondiente al último miembro es

$$\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right)$$

y, reemplazando para φ los valores extremos de integración se obtendría en ambos casos $(1/ab) \operatorname{arctg} 0$, es decir 0 o un múltiplo indeterminado de π .

Pero debemos observar que en el denominador de la función integrando la función $\operatorname{tg} \varphi$ sufre un salto al pasar φ por los valores $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. Para obtener el verdadero valor de la integral

definida convendrá pues dividir el intervalo de integración en tres partes, $0 - \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} - 2\pi$, obteniendo así

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ab} [(\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 0) + \\ &\quad (\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} -\infty) + (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} -\infty)] \\ &= \frac{1}{ab} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2\pi}{ab}. \end{aligned}$$

El área de la elipse vale πab ; multiplicando por el valor obtenido de I se obtiene $2\pi^2$, como se pedía demostrar.

2º. En el caso del espacio de tres dimensiones deberá considerarse análogamente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

la ecuación del plano normal a la dirección (ϑ, φ) es

$$x \cos \vartheta \cos \varphi + y \cos \vartheta \sin \varphi + z \sin \vartheta + h = 0$$

y para que este plano sea tangente al elipsoide en el punto (x_0, y_0, z_0) deberá ser

$$\begin{aligned} x_0 b^2 c^2 : y_0 c^2 a^2 : z_0 a^2 b^2 : -a^2 b^2 c^2 = \\ \cos \vartheta \cos \varphi : \cos \vartheta \sin \varphi : \sin \vartheta : h \end{aligned}$$

de donde se calculan valores de x_0, y_0, z_0 que, reemplazados en la ecuación del elipsoide dan para h^2 la expresión

$$h^2 = a^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \vartheta,$$

que, reemplazada en la integral propuesta

$$I = \iint \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{h^3(\vartheta, \varphi)},$$

da

$$I = \iint \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{(a^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}$$

siendo los extremos de integración, como está dicho, $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ para ϑ y 0, 2π para φ .

Suponiendo primero φ constante, pongamos por brevedad

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = A^2;$$

la integral respecto de ϑ se escribe entonces

$$J(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta}{(A^2 \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} = \frac{1}{A^2 c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \frac{c}{A} \operatorname{tg} \vartheta}{(1 + \frac{c^2}{A^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{3/2}}.$$

La integral indefinida correspondiente al último miembro difiere de la I del caso 1º. solamente por haberse reemplazado φ por ϑ y por el exponente $3/2$ que aparece en el denominador; teniendo en cuenta el cálculo hecho en el caso 1º., escribimos por tanto

$$J(\varphi) = \frac{1}{A^2 c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{arctg} \frac{c}{A} \operatorname{tg} \vartheta}{(1 + \frac{c^2}{A^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{1/2}};$$

pongamos todavía

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{A} \operatorname{tg} \vartheta = \xi,$$

lo que da

$$\frac{c}{A} \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \xi,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{A} \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{A} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2};$$

resulta

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \frac{1}{A^2 c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1+\operatorname{tg}^2 \xi)^{1/2}} = \frac{1}{A^2 c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi \, d\xi = \frac{2}{A^2 c} \\ &= \frac{2}{c} \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Para calcular la I del caso presente habrá ahora que integrar esta $J(\varphi)$ respecto φ entre 0 y 2π , lo cual lleva sin más, aparte el factor $\frac{c}{2}$, a la misma integral I del caso 1º.

Tenemos por lo tanto ahora

$$I = \frac{4\pi}{abc}$$

y, multiplicando por el volumen del elipsoide $V = \frac{4}{3} \pi abc$,

$$IV = \frac{16}{3} \pi^2$$

como está dicho en el enunciado.

La solución que precede es debida, salvo detalles secundarios, al señor NÉSTOR DISTEFANO, estudiante de 3er. año de ingeniería civil; otra solución sustancialmente equivalente fué enviada por el señor JUAN V. BUSSAGLIA, también estudiante del mismo curso. Para calcular la integral respecto ϑ el señor Distefano reemplaza $\operatorname{tg} \vartheta = 1/t$; el cálculo del señor Bussaglia queda más próximo, en este particular, al elegido arriba.

N.º 155 -- Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2+y^2)dx+xydy=(x+y)^2(xdy-ydx)$$

Esta ecuación pertenece al tipo general

$$f_m(x, y) dx + g_m(x, y) dy + h_n(x, y) (ydx - xdy) = 0$$

donde $f_m(x, y)$, $g_m(x, y)$, $h_n(x, y)$ son funciones homogéneas respectivamente de los órdenes m y n ; este tipo se reduce al de Bernoulli por la observación siguiente: Dividiendo por y^m , y poniendo $x/y = z$, la ecuación se escribe

$$f_m(z, 1) dx + g_m(z, 1) dy + y^{n-m+2} h_n(z, 1) \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$$

es decir, a raíz de

$$dx = ydz + zdy,$$

$$[f_m(z, 1)z + g_m(z, 1)] dy/dz + f_m(z, 1)y = -h_n(z, 1)y^{n-m+2}.$$

En el caso especial de la ecuación propuesta se tendrá luego

$$(z^2+2)zy' + (z^2+1)y = -(z+1)^3y^3,$$

cuya solución se expresa por

$$y = e^v u \quad (*)$$

con

$$v' = -\frac{z^2+1}{z(z^2+2)}, \quad u' = -\frac{(z+1)^3}{z(z^2+2)} e^{2v} u^3.$$

Resulta

$$\begin{aligned} v &= -\int \frac{z^2+1}{z(z^2+2)} dz = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2} \int \frac{zdz}{z^2+2} \\ &= \log \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{2}} + \log \left(\frac{1}{z^2+2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (**) \end{aligned}$$

$$\frac{u'}{u^3} = - \frac{(z+1)^3}{z(z^2+2)} \cdot \frac{1}{z\sqrt{z^2+2}}$$

$$\frac{1}{u^2} = 2 \int \frac{(z+1)^3 dz}{z^2(z^2+2)^{3/2}}.$$

Se calcula fácilmente esta última integral mediante la sustitución

$$z = \sqrt{2} \operatorname{tg} \xi, \quad dz = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 \xi} d\xi$$

por la cual resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{(\sqrt{2} \operatorname{sen} \xi + \cos \xi)^3}{\operatorname{sen}^2 \xi} d\xi = \\ &= \int \left(\sqrt{2} \operatorname{sen} \xi + 3 \cos \xi + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos^2 \xi}{\operatorname{sen} \xi} + \frac{1}{2} \frac{\cos^3 \xi}{\operatorname{sen}^2 \xi} \right) d\xi \\ &= -\sqrt{2} \cos \xi + 3 \operatorname{sen} \xi - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos^2 \xi d \cos \xi}{1 - \cos^2 \xi} + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \xi}{\operatorname{sen}^2 \xi} d \operatorname{sen} \xi \\ &= \left(-\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \cos \xi + \left(3 - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \xi - \\ &\quad - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{d \cos \xi}{1 - \cos^2 \xi} + \frac{1}{2} \int \frac{d \operatorname{sen} \xi}{\operatorname{sen}^2 \xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \xi + \frac{5}{2} \operatorname{sen} \xi + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \frac{1 - \cos \xi}{1 + \cos \xi} - \frac{1}{2 \operatorname{sen} \xi} + C. \end{aligned}$$

Para volver ahora de la variable ξ a la z , bastará recordar que

$$\operatorname{sen} \xi = \frac{\operatorname{tg} \xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi}} = \frac{z}{\sqrt{2 + z^2}}, \quad \cos \xi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + z^2}} ;$$

reemplazando resulta, después de simples transformaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^2} &= \frac{2z^2+z-1}{z\sqrt{z^2+2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2+z^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+z^2}+\sqrt{2}} + C. \\ &= \frac{2x^2+xy-y^2}{x\sqrt{x^2+2y^2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{x^2+2y^2}-\sqrt{2}y}{\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{2}y} + C\end{aligned}$$

Análogamente resulta para v , expresado antes por (**)

$$v = \log \left(\frac{y^2}{x\sqrt{x^2+2y^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Queda solamente por reemplazar estos valores en (*); para obtener una expresión más cómoda convendrá escribir ésta en la forma

$$\frac{1}{u^2} = \frac{e^{\varepsilon v}}{y^2};$$

se obtiene así la ecuación

$$\frac{2x^2+xy-y^2-1}{x\sqrt{x^2+2y^2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{x^2+2y^2}-\sqrt{2}y}{\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{2}y} = \text{constante}$$

o

$$\frac{\sqrt{x^2+2y^2}-\sqrt{2}y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{2}y^2} = C \exp \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1+y^2-xy-2x^2}{x\sqrt{x^2+2y^2}}.$$

Una solución no totalmente completa de este problema fué enviada por los señores HUGO J. VERCELLI y JUAN V. BUSSAGLIA alumnos del 3er. año de ingeniería civil de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales aplicadas a la Industria de la Universidad Nacional del Litoral. Igualmente trajo una solución el señor NÉSTOR DISTÉFANO.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

159. - Determinar la envolvente de las elipses cuyos ejes están sobre los ejes de coordenadas ortogonales y cuya área tiene un valor constante F .

160. - Determinar la integral general de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{2\sqrt{2}-1}{x} y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y = 0.$$

161. - Determinar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x(x-1) = 2y(y-1).$$

162. - De una transformación equivalente (es decir que conserva las áreas) entre dos planos (x, y) , (ξ, η) se conocen las curvas del primer plano que corresponden a las rectas $\xi = \text{const.}$ del segundo; sean representadas por

$$\xi = \varphi(x, y);$$

se pide determinar las curvas que corresponden a $\eta = \text{const.}$

Como ejemplo particular, considérese el caso en que las primeras curvas son los círculos concéntricos, con centro el origen de coordenadas.

163. - Se supone dada una curva alabeada, por ej., mediante la representación paramétrica de su punto corriente; se pide determinar la condición que debe satisfacerse entre la curvatura y la torsión para que la reglada que tiene por generatrices las rectas que unen los centros de curvaturas y de torsión correspondientes a los distintos puntos de la curva dada sea desarrollable. Suponiendo verificada esta condición, determinar la representación paramétrica de la arista de retroceso.

ERRATA. - En el problema 156 (año VIII, fasc. 3-4, p. 161) la última línea que aparece " $f_x = f_y$." debe corregirse en " $f_x = f_y = 0$."

BIBLIOGRAFIA

HELMUT HASSE - ZAHLENTHEORIE. Un vol. en 8º grande, págs. 468 + XII. Akademie-Verlag. Berlin, 1949.

Segun lo expresa el autor en el prefacio, deriva este libro de algunos cursos que él tuvo la oportunidad de dictar durante el espacio de 30 años de su actuación en las universidades de Marburg y de Göttingen. La redacción estaba completa en 1938, cuando, al estallar la guerra, tuvo que demorarse la publicación; y recuerda el autor que en el planeamiento tuvo vital influencia el consejo y la obra de Kurt Hensel (1861-1941) a cuya memoria el libro está dedicado.

Del dominio enormemente extendido y variado que, por razones históricas y etimológicas, se abarca bajo el nombre de *teoría de los números*, tiene en mira este volumen esencialmente solo la *teoría de los números algebraicos*; en efecto solo las primeras 75 páginas, bajo el título: *Die Grundlagen der Arithmetik im rationalen Zahlkörper* se refieren a los problemas propios del campo de los números racionales, por tratar, a manera de introducción y de preparación a las teorías que siguen después, los conceptos de divisibilidad, de congruencias y restos, de grupos finitos y de restos cuadráticos, como ingenuamente aparecen en el manejo de los números naturales. Ahora el problema de extender a cuerpos numéricos más generales los teoremas que rigen el cuerpo de los números racionales y, más particularmente, del conjunto de los números enteros (pues, según la definición tradicional "la teoría de los números trata las propiedades de los números naturales"), depende de la posibilidad de definir, para los nuevos cuerpos, una noción que repita con alguna fidelidad la descomponibilidad finita y unívoca de los números en factores primos. Para los cuerpos que resultan de ampliar el de los números racionales por la adición de raíces de determinadas ecuaciones algebraicas — brevemente, los *cuerpos algebraicos* — la cuestión ha sido resuelta ha poco menos de un siglo por la obra de Kummer, Kronecker y Dirichlet mediante la invención de la noción de *ideal*; pero el ideal, más bien que el concepto del divisor, reproduce, por decir así, una idea complementaria, la de la clase de los múltiplos de un determinado número, y ya el mismo Kronecker le reprochaba el defecto de faltarle así la efectiva existencia, e intentó redimirlo en sus *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, que tan grande importancia han tenido en un sentido mucho más amplio, pero sin desplazar la particular teoría de los cuerpos algebraicos devenida rápidamente clásica.

El mismo deseo ha sido encarado con nuevas ideas en los años que van del siglo actual, con asociar la noción de los *números p -ádicos* debida a K. Hensel con la de *valuación* (*Bewertung*) debida a J. Kürschak y admirablemente desarrollada por A. Ostrowski; y es este el punto de vista que forma

la base de este interesante libro de H. Hasse, donde quizás por primera vez se encuentran utilizados dichos conceptos como metódica sistemática y podría decirse con fines didácticos.

Se dice que un cuerpo está *valuado* cuando se haya definido una función $\varphi(x)$ de sus elementos que satisface a las condiciones:

1º $\varphi(x)$ es un número real

2º $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$; $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Desde luego la $\varphi(x)$ resultará definida, en particular, en cualquier subcuerpo contenido en el dado y, puesto que cada cuerpo contiene uno isomorfo al de los números racionales (característica 0) o se descompone en un cuerpo finito de clases congruentes respecto de un modulo primo p , (característica p), deberá primero la función φ satisfacer estas condiciones, considerándola dentro de estos conjuntos parciales. Demuestra entonces Ostrowski que, despreciando la solución banal $\varphi(x) = x$, en el caso de la característica 0, las valuaciones posibles se clasifican en dos tipos; las *arquimedianas* que en el subcuerpo de los números racionales se reducen a poner $\varphi(x) = |x|^s$ donde s representa un número positivo arbitrario fijo, ≤ 1 ; y las *no-arquimedianas* que consisten en elegir arbitrariamente un número primo p y, después de escribir cada número racional x en la forma $x = \frac{a}{b} p^s$ con a, b primos con p y s entero, positivo o negativo, poner $\varphi(x) = c^s$ donde c representa un número positivo, < 1 , y por lo demás arbitrario (que puede por tanto concretarse en p^{-1}). Si el cuerpo tiene característica p , la función φ , considerada en el subcuerpo de los números racionales, debe necesariamente ser la no-arquimediana correspondiente al mismo p . Las valuaciones no-arquimedianas se relacionan con la noción de los números p -adicos de Hensel, formalmente representados por las series de potencias crecientes del número primo p , con un número finito (eventualmente 0) de términos de exponentes negativo, y con coeficientes enteros positivos $< p$. Los números p -adicos constituyen un cuerpo, y se define para ellos una noción de *continuidad* a raíz de la cual el anillo de los enteros p -adicos resulta denso en el cuerpo mismo.

De pronto, no puede evitarse la impresión de que la definición de la noción de valuación presenta para el lector algo de artificial que parece mal compensado por lo sencillo que resulta esta construcción efectiva de las valuaciones posibles, y poco más se gana todavía al tener en cuenta una observación de Ostrowski de que, ya en el dominio de los números naturales, aquella definición basta para caracterizar la totalidad de los números primos; pero donde ella alcanza su máximo valor es al traspasar de un cuerpo dado K a una ampliación del mismo, sea ella algebraica o trascendente, por cuanto ella caracteriza entonces, en función de las valuaciones correspondientes al cuerpo de partida, las que corresponden al cuerpo ampliado, una o más, pero siempre en número finito, para cada una de las primeras; y, como en el caso anterior, para cada una de las valuaciones no-arquimedianas del cuerpo ampliado así determinadas, queda definido un ente abstracto —que por costumbre se representa con la p en letra gótica— que cumple el mismo oficio que el número primo del caso racional.

A una amplia y detallada exposición de esta teoría de la valuación está dedicada la segunda sección del libro de Hasse, con el título: *Theorie der be-*

werter Körper (p. 77-220); la sección siguiente, *Die Grundlagen der Arithmetik der algebraischen Zahlkörper*, puede dividirse todavía útilmente en dos partes aproximadamente iguales, constituyendo la primera una precisa continuación de los conceptos desarrollados en la sección anterior y su aplicación a la teoría general de los cuerpos algebraicos, y la segunda la aplicación a algunos temas especiales.

He aquí como el autor caracteriza el tema de aquella primera parte: “Nosotros partimos de la aritmética en el cuerpo P de los números racionales que hemos desarrollado en la primera sección. Ella se expresa por un grupo de propiedades del sistema total de las valuaciones no-equivalentes que dicho cuerpo admite; en la segunda sección hemos mostrado, por medio de los teoremas sobre la continuación de las valuaciones, que una parte de estas propiedades se transporta a una ampliación algebraica finita cualquiera K del cuerpo P . Vamos ahora a desarrollar para K una aritmética, la cual reproduce las líneas esenciales de la aritmética en P y en la cual esta aritmética en P queda naturalmente involucrada”.

Como hemos aludido en el principio de esta nuestra exposición, el problema principal para esta generalización de la aritmética reside en la definición de la noción de *divisor* y *divisibilidad* y constituye ésta el argumento de tres amplios párrafos (22-24), que son la parte central del libro (p. 249-310), precedidos por el examen (§§ 19-21) de cómo las propiedades fundamentales del conjunto de las valuaciones reconocidas posibles en el cuerpo de los números racionales (ser, para cada número particular, en número finito y unívocamente determinadas las que le hacen corresponder valores $\neq 1$; ser el producto de estos valores siempre el mismo para todos los números, y normalizable en 1; por fin, en cada una de las valuaciones no-arquimedianas, corresponder a cada valor fijado la descomposición del cuerpo considerado en un número finito de clases —clases de restos congruentes— que a su vez constituyen un cuerpo) se mantienen, generalizadas, al extender la valuación a un cuerpo ampliado. Queda entonces razonable llamar *divisor* del nuevo cuerpo a la asociación de un grupo de aquellos entes abstractos que hemos recordado como análogos de los números primos en el estudio de la valuación, la que se representa convencionalmente como producto formal de potencias enteras de los correspondientes símbolos p . Se demuestra que a estos divisores corresponden complementariamente los ideales de Dirichlet, pero la representación se hace más sintética y calculatoria.

Comenta el autor a principio del § 19: “Queremos todavía llamar aquí la atención sobre una diferencia esencial de esta fundación de la aritmética de los cuerpos algebraicos en comparación con la que ha sido en uso hasta ahora por medio de la teoría de los ideales. Mientras en aquella estaba como punto de partida una definición del concepto de número entero algebraico que a primera vista parece arbitraria, brota aquí el campo de integridad de los enteros algebraicos del cuerpo K , que está al fundamento de la aritmética en K , espontáneamente del conjunto teórico de la valuación, y su habitual caracterización por los coeficientes de las ecuaciones aparece como un teorema en vez de una definición”. Por lo que hemos dicho antes, nos parece poder observar que la preparación necesaria para llegar a la demostración no deja de ser considerable y que las características que dan razón del nombre de “números enteros alge-

braicos'', según la definición clásica, emergen de demostraciones bastante elementales para que no pueda fundarse aquí el juicio de preferencia en favor de la nueva metódica. Pero, no por eso son menos apreciables los méritos que le pertenecen, principalmente de carácter estético y, en determinados casos, también deductivos.

Los últimos cinco párrafos (§§ 25-30) aplican esta metódica de los divisores a los temas clásicos: Cuerpos cuadráticos, raíces de la unidad, unidades, clases de divisores, teoremas de aproximación. Todo a lo largo de la tractación están interpoladas frecuentes digresiones con el título "Funktionenkörper" que se refieren a la ampliación trascendente del cuerpo por agregación de una o más variables; ya Kronecker consideraba esta forma ampliada de la aritmética; ella pone un puente entre la teoría de los números y la de las funciones algebraicas y es conocido que la primera idea del cálculo p -adico se le presentó a Hensel al intentar el camino inverso de aplicar al dominio de los números los métodos que habían dado frutos notables en la teoría de las funciones algebraicas de una variable y precedió en el tiempo a la idea de la valuación. Estas digresiones mantienen la conexión sin contribuir esencialmente, según nos parece, a la estructura de la obra; citamos sin embargo una más extendida, en posición central, en la cual se llega hasta el teorema de Riemann-Roch y sus aplicaciones.

El volumen termina con un índice de autores citados y un índice por argumentos; el autor llama este último *Begriffsverzeichnis* advirtiéndole que ello no contiene una guía a través de los sujetos tratados, sino solamente, de acuerdo con la palabra, los conceptos y los términos con la indicación de los lugares donde se encuentran las definiciones.

Con el análisis que acabamos de hacer entendemos haber puesto de relieve el interés de este libro por la estructuración sintética que de él resulta a la teoría de los cuerpos algebraicos fundada sobre un instrumento que posiblemente más se acuerde con muchas tendencias modernas del pensamiento matemático; quiero decir la forma aparentemente abstracta y podría decir imperativa de las hipótesis iniciales; y, con la aplicación a un conjunto de conceptos que desde tiempo el matemático está acostumbrado a considerar como realidad concreta, ofrece una justificación a posteriori de aquellas mismas posiciones iniciales. Tal vez pueda esta posición abstracta poner en más clara evidencia el hecho, el cual sin embargo fué bien conocido y tenido en cuenta desde el nacimiento de la teoría general de las ecuaciones algebraicas al principio del siglo XIX, de que lo de pertenecer los números algebraicos al dominio de los números reales y complejos en el sentido del análisis del continuo, no tiene importancia — hasta tanto nos quedamos en el campo estrictamente algébrico — más que accidental, siendo al contrario fundamentales las propiedades operatorias. Este ya fué el concepto director de Kronecker y de Steinitz. Refuerza el A. en el prefacio que la metódica de la teoría de los divisores y de la valuación, no solamente permite expresar en modo más simple y natural las leyes de estructura aritmética, sino que esta metódica permite igualmente presentar la teoría de los cuerpos de clases y la general ley de reciprocidad de los números algebraicos en su verdadera y profunda significación. Por esto — dice — la balanza se ha inclinado hoy con preferencia en favor de ella; no entendemos

pronunciarnos sobre el particular por pensar que en el concepto más que en el símbolo queda el guía esencial.

B. LEVI

B. L. VAN DER WAERDEN. *Modern Algebra*. Vol. I. Translated, from the second revised german edition by FRED BLUM. Ungar Publishing Co. New York, 1949, págs. 264 + XII.

Es la versión inglesa de la segunda edición (1937) de la bien conocida *Moderne Algebra* de la colección *Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften* del editor J. Springer, con algunas pocas variantes introducidas por el mismo autor, pero de secundaria importancia; y hoy, como en 1930, cuando apareció la primera edición, le asigna el autor el propósito de introducir al lector en el nuevo universo de conceptos que han sido creados en el dominio del álgebra por efecto de las modernas tendencias “abstractas”, “formales”, o “axiomáticas”. Quizas las tres definiciones que así se presentan a nuestra elección no sean precisamente equivalentes y deban más bien sumarse; de todos modos, y principalmente en este primer volumen, el contacto con las ideas del álgebra clásica está plenamente mantenido.

El primer capítulo (Números y conjuntos) introduce al lector en la noción general de conjunto y en particular de conjunto numerable y de números naturales. Estos están definidos según el modo axiomático de Peano, pues el concepto de ellos precede y no sigue a cualquier teoría matemática; notamos que el traductor ha querido introducir una innovación que atribuye a E. Kasner al verter el término *Mächtigkeit*, potencia, por *cardinality*; la palabra, si no equivocamos, no tiene mayor oportunidad de volver en todo el volumen, pero no sabríamos recomendarla por la falta de sentido que tiene cambiar los nombres en una teoría que ha alcanzado su forma definitiva y puede decirse clásica; mientras, si bien no sabemos por noticia cierta la razón por la cual G. Cantor eligió la palabra, podemos suponer haya sido, un recuerdo clásico del uso que hicieron de ella los griegos, no menos significativo y apropiado traslaticamente de lo que puede justificarse la otra palabra.

En los capítulos II (Grupos), III (Anillos y Cuerpos), IV (Polinomios) se establecen las ideas que, más propiamente caracterizan el álgebra en su moderna acepción: de resulta se habla de *elementos* y no de *números*, es decir que por largo rato, el número no tendrá que ser más que aquel entero dicho antes; y se habla de *variables* que son signos o letras, con propiedades de composición análogas a los elementos del cuerpo; y se habla de polinomios que son agrupaciones de elementos (coeficientes), variables, y números enteros. Es bien sabido que tal es el concepto de Kronecker y de Steinitz al cual también se refiere el A, en la introducción. En el cap. III (§ 18) aparece conjuntamente con el término de *anillos euclidianos* un concepto fundamental (ya utilizado por Gauss): es la ordenabilidad del anillo aplicando a cada elemento a un número natural (entero positivo) $g(a)$ con las propiedades de que $g(a) = 0$ solamente para $a = 0$ y que, cualquiera que sean los elementos a, b , existe un múltiplo de a (positivo o negativo) qa , tal que $g(b - qa) < g(a)$; es la condición

para la aplicabilidad del llamado procedimiento de Euclides de las divisiones sucesivas. El título de *Polinomios* atribuido al Cap. IV pretende traducir el *Ganze rationale Funktionen* (Funciones racionales enteras) del texto alemán y, en nuestra opinión, habría sido preferible una traducción más literal, primero porque de polinomios ya se tuvo oportunidad de hablar en páginas anteriores, y además porque en este capítulo deja el polinomio de ser considerado como simple expresión formal, para adquirir valores; innegable sin embargo que en muchos casos todavía los teoremas pueden interpretarse sólo formalmente.

Los capítulos V (Teoría de los cuerpos), VI (Continuación de la teoría de los grupos), VII (La teoría de Galois) constituyen la parte central y más clásica del libro; el primero destinado principalmente al estudio de la ampliación algebraica, el último (al cual el cap. VI sirve de preparación) la clásica teoría de las ecuaciones de la cual lleva el nombre. Un detalle de método, que vale la pena notar, es que se habla aquí de "raíces", mientras, en rigor, los números reales y complejos y por lo tanto el teorema fundamental del álgebra todavía no existe para el lector; pero existe la ampliación (cap. V) a la cual el lector tendrá que acudir para dar sentido concreto al cap. VII, aunque, con razón, el autor afirme la independencia en las palabras de introducción. Incidentalmente en el cap. VII está tratada la resolución de las ecuaciones de 2º, 3º y 4º grado, con un breve comentario sobre los problemas geométricos resolvibles con regla y compás.

La observación de arriba encuentra respuesta en el cap. IX (Cuerpos reales); aquí los primeros párrafos están destinados precisamente a recordar las definiciones y propiedades de los números reales y complejos; pero la propiedad característica que separa los dos cuerpos se concreta en una hipótesis algebraica: la de admitir o no admitir el número -1 la representabilidad como suma de dos cuadrados.

Los capítulos VIII y X pueden considerarse como complementos, un poco fuera de la estructura esencial del volumen, siendo el primero (Extensión infinita de un cuerpo) una rápida excursión en el dominio de las funciones algebraicas de una variable y el otro (Cuerpos con valuación) una exposición (ampliada con respecto a la edición alemana) de una teoría sobre la cual el lector puede encontrar alguna indicación en otra nota bibliográfica que aparece conjuntamente con la presente (Ver H. Hasse - Zahlentheorie).

Explica el A. en la breve introducción que el libro está expresamente estructurado de manera que el lector pueda informarse sobre una u otra parte de las distintas teorías que se reúnen bajo la denominación de álgebra, en modo independiente, sin la obligación de profundizar todo el dominio; aún se presenta en forma gráfica una especie de cuadro genealógico de los capítulos para ayudar al lector apresurado en recorrer el camino más breve para llegar a determinados conocimientos. El fin indicado ha sido indudablemente alcanzado en el modo más completo posible; y un índice por argumentos con que termina el volumen complementa todavía esa tarea. Y cosa admirable también es la brevedad del espacio en el cual ha podido reducirse tan amplio material, manteniendo una completa claridad y limpidez de exposición.

B. LEVI

MARIE J. WEISS. *Higher algebra for Undergraduate*. John Wiley, inc. New York, 1949 (p. 165 + viii).

El lector encuentra en este pequeño tratado una breve exposición de los conceptos fundamentales del álgebra moderna: así el cap. 1 trata de los números enteros hasta la noción de congruencia; el cap. 2 de los números racionales, números reales, números complejos; el cap. 3 contiene una teoría elemental de los grupos; el cap. 4 trata de anillos y cuerpos; el 5 de polinomios sobre un cuerpo general; el 6 de las operaciones sobre matrices; el 7 de determinantes; el 8 —titulado: grupos, anillos e ideales— puede considerarse como un complemento del cap. 3, conteniendo los elementos de la factorización de los grupos. Dados los fines puramente didácticos y de introducción que la autora asigna al libro, no necesita poner de relieve la casi identidad programática de este con una parte importante del tratado fundamental analizado precedentemente, con la diferencia de atender más bien a una información que podría decirse técnica sobre las distintas nociones que a la razón de ser de ellas en relación de los problemas algebraicos y a su derivación histórica. Es, por otra parte, esta una interpretación del programa que bien responde a las modernas tendencias abstractistas y también a la corta extensión que puede tener un curso semestral como el del cual este tratado trae la oportunidad, y que suponía en los oyentes una previa preparación en los fundamentos del álgebra clásica y del cálculo infinitesimal “necesaria para proporcionar al estudiante una suficiente madurez”.

B. LEVI

HELMUT HASSE. *Invariante Kennzeichnung relativ-Abelscher Zahlkörper mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers* (Caracterización invariante de cuerpos abelianos relativos, con dado grupo de Galois con respecto a un subcuerpo del cuerpo fundamental). Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse - Jahrgang 1947 N. 8 - (Akademie-Verlag, Berlin, 1949).

En su clásica monografía “*Theorie der algebraischen Zahlkörper*” publicada por primera vez en el Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung de 1894-95 (') define Hilbert *cuerpo relativo* respecto de un dado cuerpo algebraico k , a una extensión de k por la adjunción de una raíz de una ecuación algebraica irreducible en k , extendiendo luego a los cuerpos relativos las clásicas definiciones relacionadas a los cuerpos algebraicos sobre el campo de los números racionales; así será un *cuerpo de Galois* relativo al cuerpo k el que se obtiene por la simultánea adjunción de todas las raíces de una misma ecuación irreducible en k (o de una raíz cualquiera de la resolvente de Galois de esta), y será el cuerpo *abeliano relativo* cuando las funciones racionales que expresan las distintas raíces de esta resolvente por una de ellas definen entre ellas un grupo de sustituciones permutables.

(') Reeditada luego varias veces; citamos en particular la edición francesa: *Théorie des corps de nombres algébriques* - Paris - Hermann - 1913.

La teoría de los cuerpos abelianos relativos puede considerarse definitivamente establecida con los trabajos de Hilbert, Takagi, Artin y del A. (v. H. HASSE. *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Jahresbericht d. d. Math. Vereinigung, 1926-27); para llevar más adelante el estudio de los cuerpos algebraicos se señala por tanto el caso cuyo cuerpo de Galois, sin ser abeliano relativamente al cuerpo fundamental, es tal relativamente a un propio subgrupo. Ya en 1929 dirige el A. la investigación en esta dirección con la memoria "*Aritmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage*" (Math. Zeitschrift 31) observando que vale la pena intentar una teoría aritmética de los cuerpos cúbicos, como un paradigma que podrá imitarse en el caso general de los cuerpos numéricos cuyo cuerpo de Galois es abeliano sobre un subcuerpo cíclico (en el caso especial cuadrático).

Generalizado ahora el problema se considera pues, en la memoria en examen, un cuerpo K que se supone abeliano relativo respecto de un subcuerpo Ω , mientras es genéricamente cuerpo de Galois relativo a un subcuerpo Ω_0 de Ω . Desde luego será a su vez Ω cuerpo de Galois respecto de Ω_0 . Se indican con A el grupo abeliano ligado a K , respecto Ω y respectivamente con G y g los grupos de Galois ligados a K y a Ω respecto Ω_0 ; se demuestra que G , considerado como extensión de A por medio de g está caracterizado por dos invariantes es decir una representación homomorfa Γ de g sobre el grupo de automorfismo de A y una clase C de sistemas de coeficientes pertenecientes a A para asociar los elementos de g y Γ . Por otra parte, si Ω contiene las necesarias raíces de la unidad, puede considerarse a K como cuerpo de Kummer invariante, con una clase de sistemas de coeficientes caracterizados por el carácter grupal de A ; y si Ω es cuerpo algebraico, también como cuerpo de clases correspondiente a un determinado grupo H de divisores.

La memoria está dividida en tres capítulos; el primero, de introducción, está destinado a aclarar el problema y resume, en el § 2, los resultados obtenidos anteriormente en algunos casos particulares por el autor y por alumnos suyos (H. Reichardt, I. Porusch, E. Rosenblüth). Los dos capítulos siguientes tratan respectivamente de las dos caracterizaciones como cuerpo de Kummer y como cuerpo de clases.

B. LEVI

VICENTE INGLADA GARCÍA SERRANO. *Métodos para la resolución de los Problemas Geométricos*. Madrid. Editorial Dossat, 1948, págs. 478.

"Este libro", dice muy oportunamente el autor en una breve presentación inserida en la solapa, "no es una colección más de problemas de Geometría escogidos con mejor o peor criterio"; es más bien, en nuestro modo de ver, un *Tratado* que se aleja, si así se quiere, del contenido que la costumbre didáctica asigna a los de geometría, pero tiende en buena parte a cumplir con el mismo fin. Se divide en dos partes, titulada la primera *Nociones sobre transformaciones geométricas y grupos de transformaciones* y la segunda *Métodos para la resolución de los problemas geométricos*; esta se subdivide a su vez en tres secciones con los subtítulos: *Métodos sintéticos o geométricos*, *Método complejo* y *Método vectorial*. Por cierto el método más general para resolver problemas geométricos es de conocer geometría; pero la tradición le ha atri-

buido al título preferentemente el significado de una orientación para separar los problemas en tipos según el orden de conceptos que convendrá encarar, guiándose por el examen inteligente del enunciado del problema, para acrecentar la probabilidad de alcanzar la solución. Entre estos métodos hay la transformación geométrica de la figura del problema en otra para la cual el problema se exprese en forma más simple o sin más en un problema del cual ya se conozca la solución.

El programa que el autor desarrolla es por contrario principalmente teórico. El cap. I trata de *Generalidades sobre transformaciones geométricas* (representación analítica de una transformación geométrica, transformaciones univocas y no-univocas, transformaciones algebraicas, racionales y birracionales, etc.); el cap. II trata de *Figuras y propiedades invariantes en una transformación* y los dos siguientes de *Productos y trasmutaciones de transformaciones*; el cap. V trata de *las transformaciones proyectivas* principalmente planas (homografías, correlaciones, polaridades, etc.) con notable extensión; en el VI, bajo el título de *Transformaciones circulares y anticirculares* se trata de la interpretación de la proyectividad sobre la recta compleja en la correspondencia entre los planos de Gauss que representan dichas rectas; las inversiones se presentan como casos particulares. La representación compleja de los vectores de un plano y su aplicación al cálculo geométrico es bien conocida, pero muy poco ha entrado en la enseñanza y en el uso común de los matemáticos; el A. tiene evidentemente un afecto particular para este instrumento sobre el cual vuelve más tarde y del cual sabe obtener resultados interesantes. Los capítulos VII y VIII (*Las transformaciones cuadráticas y Nociones sobre grupos de transformaciones*) tienen, en comparación, importancia menor. Los capítulos IX y X (*Problemas de lugares y envolventes y Diferenciales y límites geométricos*) tratan principalmente algunas cuestiones de geometría diferencial y cinemática. El cap. XI, contiene una selección de problemas de máximos y mínimos. Los capítulos XII, XIII y XIV constituyen la sección titulada *Método Complejo* que, vinculándose con las ideas ya recordadas, el autor extiende para reemplazar, en muchos casos, la representación cartesiana con asociar con cada punto el complejo conjugado. Se tiene así la ventaja de no encontrar efectivamente límites a las figuras planas sobre las cuales puede aplicarse dicho cálculo complejo, llegando hasta poder desarrollar una teoría de las curvas algebraicas y, en particular, de las cónicas. La última sección (Método vectorial) se compone de tres capítulos, cuyos títulos, respectivamente: *Generalidades y operaciones con vectores*; *Cuestiones relacionadas a puntos, rectas y planos*; *Aplicaciones a la teoría de curvas y superficies*, denotan suficientemente el contenido (el último se refiere esencialmente a los elementos de la geometría diferencial).

Cada capítulo está acompañado por numerosos *ejemplos y ejercicios propuestos*, generalmente con notable carácter de originalidad y constituidos frecuentemente por los enunciados de proposiciones que se proponen por demostrar, igualmente como en forma de problemas resueltos está presentada mucha parte de la teoría; y el libro cierra con dos índices por capítulos y por argumentos.

El que escribe siente el deber, al terminar este corto resumen, de volver sobre algunas de las observaciones del principio; la geometría es en sí un mé-

todo, el *método geométrico* que, un poco escolásticamente, puede ser representado por las consideraciones iniciales del último libro de Euclides sobre análisis y síntesis; la geometría analítica traduce estos análisis y síntesis en la transformación idéntica por ecuaciones; los vectores no son más que una variación simbólica de este procedimiento. Y es posiblemente este un punto de divergencia con lo que considera método el autor; método que señalaríamos preferentemente como eurístico o de invención que como de resolución. En efecto llama la atención el autor, en la breve presentación a la que aludimos ya en principio, sobre algunos resultados particulares que estima dignos de nota. Coincidimos con gusto en el juicio para algunos de ellos; para otros hay que presentar reservas; citamos por ej. la prop. 1 del n. 44. El cálculo analítico del método complejo lleva al A a afirmar que si dos triángulos del mismo plano son semejantes y homológicos, los centros de semejanza y de homología son los puntos de intersección de los círculos circunscritos a los dos triángulos, y la deducción podría ser impecable si no fuera de caer en defecto precisamente en el caso que geométricamente se presenta como caso general, él de ser los dos puntos coincidentes y el único punto no relacionado con los círculos circunscritos. El teorema, por contrario, resulta cierto si se agrega la hipótesis de estar uno de los dos centros sobre el círculo circunscrito a uno (y por consecuencia también sobre el círculo circunscrito al otro) de los dos triángulos y mismo la demostración elemental es entonces interesante.

El material que el libro contiene es por otra parte tan abundante que estas reservas no le quitan de algún modo su amplio valor de inspiración.

B. LEVI

LUIGI BERZOLARI

Mientras estaba por terminarse la composición del presente fascículo, recibimos la noticia, por publicaciones italianas, de la muerte de Luigi Berzolari ocurrida en Pavia en la noche entre el 10 y el 11 de diciembre de 1949 a la edad de 86 años, habiendo nacido el 1º de mayo de 1863. Su nombre es bien conocido en la Argentina, principalmente por su labor didáctica, y *Mathematica Notæ* quiere dedicarle una palabra de recuerdo.

El que escribe fué uno de los primeros alumnos en su enseñanza universitaria, por haber sido nombrado Berzolari profesor de Geometría Proyectiva y Descriptiva en la Universidad de Torino en 1893, mientras él cursaba el 2º año; fué luego, por algunos años, su asistente para el mismo curso y mantuvo después para él durante toda la vida admiración y afecto.

En 1899 Berzolari pasó a la Universidad de Pavia, donde enseñó sucesivamente Geometría analítica y Álgebra y Análisis algebraico e infinitesimal hasta 1936, cuando tuvo que retirarse de la cátedra por límite de edad, manteniendo entera su actividad científica.

Como matemático se ocupó principalmente de geometría algebraica, con algunas exploraciones en campos afines y por su profunda información al respecto fué designado para redactar los artículos sobre la teoría de las curvas algebraicas planas, sobre las correspondencias y transformaciones algebraicas y sobre las curvas algebraicas alabeadas (este último en reemplazo de Rohn, fallecido) de la *Encyclopaedie der Math. Wissenschaften*. Asimismo trató estos argumentos en la edición alemana del Repertorio de Pascal (Vol. 2, caps. XIII a XVI). En el último veintenio dirigió con extrema dedicación la publicación de la *Enciclopedia delle matematiche elementari*, primero en colaboración con Vivanti y Gigli, luego solo; y todavía corrigió todas las pruebas del volumen que acaba de aparecer, ya después de su muerte.

B. LEVI

- El precio de suscripción a "Mathematicae Notae" es de 8 \$ (m/n) anuales.
 - El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título "Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.", cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
 - Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a "Mathematicae Notae" dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
 - Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
 - Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.
-

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EN LA IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL
EL DÍA 21 DE JUNIO 1950
AÑO DEL LIBERTADOR GENERAL SAN MARTÍN



Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m.\$n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLA — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.30
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	2.00
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	4.50
	2 - G. GRIOLI. — Sul comportamento di un vincolo concentrato nel centro di una piastra circolare	2.00
	3 - M. COTLAR - E. ZARANTONELLO. — Grupos semíordenados y L-ideales de Riesz-Birkhoff	6.00
	4 - P. CAPELLI. — Algunas observaciones sobre las funciones univalentes y una clase particular de las mismas	3.50