CURIHAM

CENTRO UNIVERSITARIO ROSARIO DE INVESTIGACIONES HIDROAMBIENTALES

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA-EIC

ICDH-D 19-3_Rev00

UNIDAD 3

DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS INVISCIDOS INCOMPRESIBLES

Pedro A. Basile

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2019

Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

UNIDAD 3
DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS INVISCIDOS INCOMPRESIBLES

UNIDAD 3
DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS INVISCIDOS INCOMPRESIBLES

1. INTRODUCCIÓN

En esta Unidad se presentan los conceptos de circulación y vorticidad, los cuales son esenciales para tipificar las características de rotacionalidad o irrotacionalidad del campo de flujo. La irrotacionalidad implica generalmente un fluido no viscoso (invíscido) cuyas partículas inicialmente se mueven sin rotación. Este tipo de flujos son importantes desde el punto de vista analítico debido a la simplificación que puede realizarse para resolver el campo de flujo.

Se presentan los conceptos de línea de vorticidad y tubo de vorticidad, en analogía con los conceptos de líneas de corriente y tubos de corriente introducidos en la Unidad 2. De esta manera, en analogía con la continuidad del flujo de un fluido incompresible, se obtiene la ecuación de conservación de la vorticidad.

A partir de las ecuaciones de Euler para el flujo de un fluido invíscido incompresible, considerando condiciones de flujo permanente, se deriva el el teorema de Bernoulli, cuya expresión matemática expresa la conservación de la energía mecánica, por unidad de peso del fluido, a lo largo de una línea de corriente. Posteriormente, introduciendo la condición de irrotacionalidad, el teorema de Bernoulli es extendido a la totalidad del campo de flujo tridimensional. Se analiza la dinámica de la vorticidad en flujos de fluidos perfectos (invíscidos e incompresibles) y se describen algunos teoremas que evidencian las restricciones que presentan dichos fluidos para el desarrollo de vorticidad.

Se analiza, además, a partir de las Ecuaciones de Navier-Stokes, la dinámica de la vorticidad en flujos de fluidos viscosos incompresibles. Se pone de manifiesto la posibilidad de utilizar la ecuación de Bernoulli, aún en el caso de fluidos viscosos, si se asume irrotacionalidad del campo de flujo.

Finalmente, se describen los flujos a potencial de la velocidad, en los cuales las componentes de la velocidad se expresan como derivadas de una función escalar. Esto es posible gracias a la hipótesis de irrotacionalidad del campo de flujo. La simplificación que se logra es evidente si se observa que un campo vectorial, como el de la velocidad, puede analizarse en función de un campo escalar.

2. ECUACIONES PARA EL FLUJO DE FLUIDOS NO VISCOSOS INCOMPRESIBLES. ECUACIONES DE EULER

Si en las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de un fluido viscoso incompresible se desprecia el término correspondiente a las fuerzas de origen viscoso se obtienen las ecuaciones de Euler (1755), ya presentadas en la Unidad 2. Por lo tanto, la ecuación de continuidad y las ecuaciones dinámicas para el flujo de un fluido invíscido incompresible (fluido perfecto) se expresan en notación tensorial como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1a}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \tag{1b}$$

y en notación vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2a}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \tag{2b}$$

3. CIRCULACIÓN Y VORTICIDAD

La circulación Γ se define como la integral de línea del vector velocidad **u** a lo largo de una trayectoria cerrada de una región simplemente conexa del campo de flujo. Una región simplemente conexa es aquella que no corta la frontera física del campo de flujo, como, por ejemplo, la sección de un tubo de corriente. En la Figura 1 se esquematizan las líneas de corriente y la trayectoria cerrada, indicada con c, a lo largo de la cual se realiza la integración.

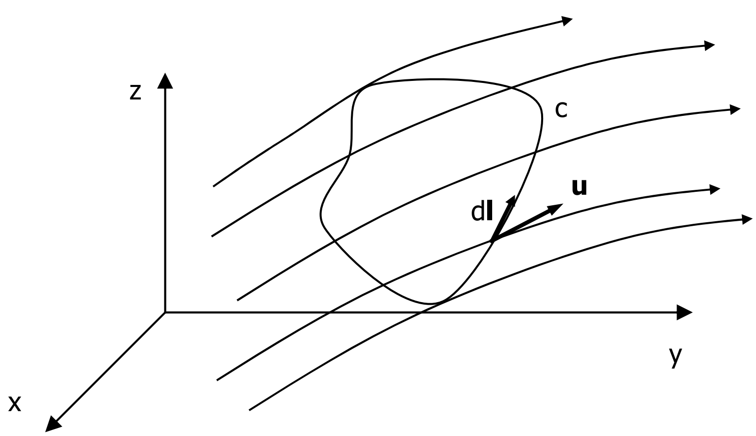

Figura 1. Esquematización de líneas de corriente y trayectoria cerrada c.

La vorticidad ξ de un elemento fluido se define como el rotor del vector velocidad **u** (ξ=rot **u**) y consecuentemente es un vector. Por lo tanto, el vector vorticidad (ξ=rot **u**) es una medida de los efectos rotacionales de un elemento fluido y, en función de lo visto en la Unidad 2, es igual al doble del vector velocidad angular ω, es decir:

$$\xi = 2\omega = \text{rot } \mathbf{u} \tag{3}$$

Recordando que el rotor de **u** es igual al producto vectorial entre el operador nabla y el vector velocidad **u** (Apéndice Unidad 2), tenemos:

$$\xi = \text{rot}\,\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{u} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \tag{4}$$

Por lo tanto, la vorticidad es proporcional a la velocidad angular de un elemento fluido respecto a los ejes principales de dicho elemento (velocidad de rotación rígida). Queda claro entonces que si un elemento fluido no rota respecto a sus ejes principales (ω=0), aún realizando una trayectoria curva, la rotación es nula (irrotacional) y consecuentemente la vorticidad es nula (ξ=rot **u**=0). En caso contrario, si el elemento rota (rotacional) la vorticidad es distinta de cero.

La vorticidad de un elemento fluido se relaciona con la circulación. Dicha relación se obtiene a través del teorema de Stokes (ver relación integral en Apéndice Unidad 2):

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \; dA \tag{5}$$

donde A es el área definida por la curva cerrada c a lo largo de la cual se calcula la circulación y **n** es el vector unitario normal a dicha superficie. Luego, invocando la definición de vorticidad (ξ=rot **u**=$\nabla\wedge$**u**) de (5) se obtiene:

$$\boxed{\Gamma = \int_A \xi \cdot \mathbf{n} \; dA} \tag{6}$$

La ecuación (6) muestra que si la vorticidad es cero (ξ=0) entonces la circulación es cero (Γ =0) y viceversa. <u>Los flujos para los cuales ξ=rot **u**=0 se denominan irrotacionales</u>. En caso contrario se denominan rotacionales.

La distinción entre flujo rotacional e irrotacional es importante desde el punto de vista analítico como se verá más adelante. En general, puede decirse que si no existen tensiones de corte en el seno del fluido (viscosidad nula o gradientes de velocidad nulos) el flujo puede considerarse irrotacional. Efectivamente, para que se verifique la rotación de una partícula de fluido dentro de un flujo inicialmente irrotacional se requieren que existan tensiones de corte sobre la superficie de la partícula. El caso más simple es el de un flujo paralelo de un fluido viscoso donde la tensión de corte se vincula con la viscosidad y el gradiente de velocidad: $\tau=\mu(du/dz)$, entonces, si el fluido no posee viscosidad elevada el flujo permanecerá irrotacional en aquellas zonas donde no se verifique un gradiente de velocidad pronunciado.

3.1 Tubos de corriente y tubos de vorticidad

El concepto de línea de corriente, introducido en la Unidad 2, sirvió para definir una superficie denominada tubo de corriente formada por las infinitas líneas de corriente que se apoyan en un recorrido o línea cerrada dentro del campo de flujo. En la Figura 2a se observa un tubo de corriente (o tubo de flujo) generado por una línea cerrada de área A_1 en un extremo y en el otro extremo la correspondiente sección es A_2, en general A_1 es distinto de A_2.

Por analogía con las líneas de corriente y los tubos de corriente se pueden introducir los conceptos de líneas de vorticidad y tubos de vorticidad. Una línea de vorticidad es aquella en la cual el vector vorticidad es tangente en cada uno de los puntos que la forman. Por otra parte, todas las infinitas líneas de vorticidad que se apoyan en una línea cerrada dentro del campo de flujo forman un tubo de vorticidad. En la Figura 2b se observa la esquematización de un tubo de vorticidad.

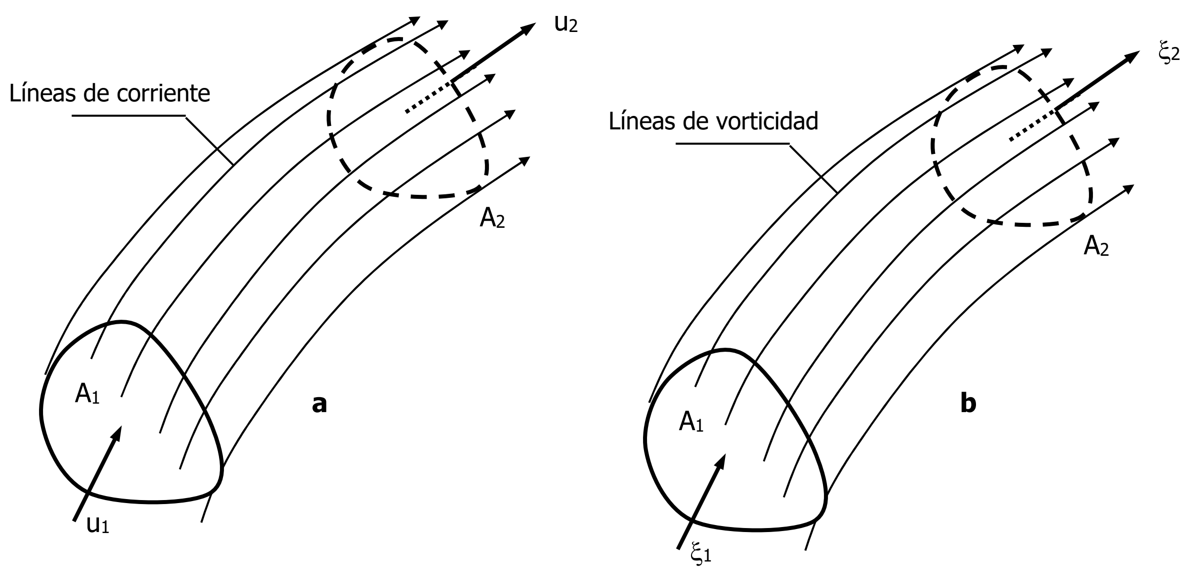

Figura 2. a) Tubo de corriente. b) Tubo de vorticidad

El vector vorticidad ξ fue definido precedentemente como el rotor del vector velocidad **u**. Como la divergencia del rotor de cualquier vector es nula (ver identidades vectoriales en Apéndice Unidad 2), se puede escribir que:

$$\boxed{\nabla \cdot \xi = 0} \tag{7}$$

La (7) establece que no pueden existir fuentes ni sumideros de vorticidad en el seno del fluido. Es decir, representa la ecuación de conservación de la vorticidad. Esto permite realizar una analogía con la continuidad en un flujo incompresible. En dicha analogía, la contraparte del vector velocidad **u** es el vector vorticidad ξ, y la contraparte del caudal Q es la circulación Γ.

La ecuación de continuidad para el flujo de un fluido incompresible es dada por la ecuación (2a), que repetimos acá:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

Integrando (8) sobre un volumen V:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \; dV = 0 \tag{9}$$

Usando el teorema de Gauss para convertir (9) en una integral de superficie:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \; dV = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \; dA = 0 \tag{10}$$

donde A es la superficie que encierra a V. Considerando que A es la superficie total de un tubo de corriente (como el mostrado en la Figura 2a), donde A incluye la superficie lateral más las superficies de las secciones terminales del tubo. Entonces, como $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ sobre toda la superficie lateral (recordar que en una línea de corriente el vector **u** es tangente en todos los puntos y por lo tanto, si **n** es el vector unitario normal exterior, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$). Consecuentemente la (10) se puede escribir como:

$$\int_{A_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \; dA + \int_{A_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \; dA = 0 \tag{11}$$

Al ser **n** definido como el vector unitario normal exterior se obtiene:

$$\int_{A_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \; dA = -Q_1 \tag{12}$$

$$\int_{A_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \; dA = Q_2 \tag{13}$$

Sustituyendo en (12) y (13) en (11) se obtiene:

$$Q_1 = Q_2 \tag{14}$$

El caudal a lo largo del tubo de corriente es constante. De esta manera, indicando con u la velocidad media en el área de la sección del tubo se tiene:

$$\boxed{Q = u\,A = \text{const.}} \qquad (15)$$

Se observa que el caudal es constante y, por lo tanto, a un incremento del área transversal del tubo de corriente le corresponde una disminución de la velocidad.

Similarmente, considerando ahora el vector vorticidad, integrando (7) sobre un volumen V y utilizando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$\int_V \nabla \cdot \xi \; dV = \int_A \xi \cdot \mathbf{n} \; dA = 0 \qquad (16)$$

Donde A es la superficie total del tubo de vorticidad que encierra a V (ver Figura 2b). Entonces, como $\xi \cdot \mathbf{n}=0$ sobre toda la superficie lateral (recordar que en una línea de vorticidad el vector ξ es tangente en todos los puntos y por lo tanto, si **n** es el vector unitario normal exterior, $\xi \cdot \mathbf{n}=0$). Consecuentemente la (16) se puede escribir como:

$$\int_{A_1} \xi \cdot \mathbf{n} \; dA + \int_{A_2} \xi \cdot \mathbf{n} \; dA = 0 \qquad (17)$$

Por lo tanto, en función de la ecuación (6) se obtiene:

$$\int_{A_1} \xi \cdot \mathbf{n} \; dA = -\Gamma_1 \qquad (18)$$

$$\int_{A_2} \xi \cdot \mathbf{n} \; dA = \Gamma_2 \qquad (19)$$

Sustituyendo en (18) y (19) en (17) se obtiene:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \qquad (20)$$

La circulación en cualquier sección a lo largo del tubo de corriente es constante. Así como anteriormente definimos la velocidad media en la sección mediante el caudal por unidad de área, podemos definir la vorticidad media como la circulación por unidad de área. De esta manera, indicando con ξ la vorticidad media en el área de la sección del tubo, se tiene:

$$\boxed{\Gamma = \xi\,A = \text{const.}} \qquad (21)$$

Se observa que la circulación es constante y, por lo tanto, a un incremento del área transversal del tubo de vorticidad le corresponde una disminución de la vorticidad.

4. TEOREMA DE BERNOULLI

Considerando que las componentes del vector **f** de las fuerzas de cuerpo son debidas a la gravedad, las ecuaciones de Euler (2b) se escriben como:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - \rho\, g\, \nabla \dot{z} \tag{22}$$

el término de aceleración convectiva puede ser expresado utilizando la siguiente identidad vectorial (ver Apéndice del Unidad 2):

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) - \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \tag{23}$$

ya utilizada en la Unidad 2 (ecuación (13), Unidad 2) para expresar la aceleración del campo de flujo.

Por lo tanto, reemplazando (22) en (23) y reordenando, las ecuaciones de Euler quedan expresadas como:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\, g\, \dot{z}\right) = \rho\, \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \tag{24}$$

Considerando <u>flujo permanente</u> ($\partial \mathbf{u}/\partial t=0$), dividiendo todo por ρ y reemplazando rot $\mathbf{u}$ = ξ, se obtiene:

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + g\, \dot{z}\right) = \mathbf{u} \wedge \xi \tag{25}$$

Efectuando el producto escalar entre el vector velocidad **u** y la ecuación (25) se observa que:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + g\, \dot{z}\right) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \wedge \xi) \tag{26}$$

dado que el producto vectorial entre **u** y ξ produce un vector perpendicular a **u**, el miembro derecho es nulo, ya que: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \wedge \xi)=0$. Por otra parte, el miembro izquierdo representa una derivada material en flujo permanente. Por lo tanto, la ecuación (26) establece que el trinomio del miembro izquierdo es constante a lo largo de una trayectoria s, y por ser el flujo permanente, es también constante a lo largo de una línea de corriente; dividiendo todo por g se obtiene:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2g} + \dot{z} = \text{const.}(s) \tag{27}$$

es decir, entre dos puntos 1 y 2 de la trayectoria tenemos:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{|\mathbf{u}_2|^2 - |\mathbf{u}_1|^2}{2g} + \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = 0 \tag{28}$$

Las ecuaciones (27) y (28) son las expresiones fundamentales del teorema de Daniel Bernoulli (1738) cuyo enunciado puede expresarse como:

> Para el flujo permanente de un fluido invíscido e incompresible, es constante a lo largo de la trayectoria la suma en cada punto de la altura piezométrica (p/γ) de la altura de velocidad ($|\mathbf{u}|^2/2g$) y de la cota $\dot{z}$ respecto a un plano de referencia establecido.

La ecuación (27) representa un balance de energía mecánica para los fluidos perfectos. Sus términos pueden ser definidos como energía por unidad de peso del fluido. Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli asegura la conservación de la energía mecánica por unidad de peso del fluido a lo largo de una trayectoria.

El término: $1 \times \dot{z} = \dot{z}$ es la energía potencial de un peso unitario de fluido respecto a un cierto plano de referencia. El término: $|\mathbf{u}|^2/2g$ (altura de velocidad o altura cinética), es la energía cinética $(1/2)\ \mathcal{M}\ |\mathbf{u}|^2$ poseída por la masa fluida $\mathcal{M}$ por unidad de peso del fluido $P=\rho g \mathcal{V} = \mathcal{M}\,g$. El término: p/γ (altura piezométrica) es la energía que brindan las fuerzas de presión.

Con las consideraciones realizadas, la constante de la ecuación (27) representa la suma de las tres formas de energía mecánica (potencial, de presión y cinética) por unidad de peso del fluido, la cual puede indicarse con H:

$$H = \dot{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2\,g} \tag{29}$$

Todos los términos son expresados como una altura, por lo tanto, la representación gráfica puede realizarse como se esquematiza en la Figura 3. A cada trayectoria le compete, en general, un valor distinto de H.

Es importante señalar que la suma de $\dot{z}$ y p/γ se denomina cota piezométrica h^* y la línea que une los extremos de h^*, correspondiente a los distintos puntos de la trayectoria, se denomina línea piezométrica. Se note que, en condiciones estáticas, la cota piezométrica es constante en todo el campo fluido. Mientras que, en condiciones dinámicas, la misma varía a lo largo de la trayectoria en función de la variación de la velocidad.

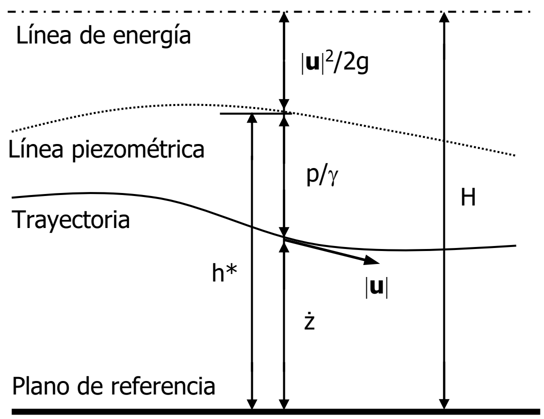

Figura 3.

5. TEOREMA DE BERNOULLI EXTENDIDO A TODO EL CAMPO DE FLUJO

En el punto anterior vimos que, a partir de las ecuaciones de Euler, considerando condiciones de flujo permanente para un fluido incompresible se obtiene el teorema de Bernoulli, el cual expresa la conservación de la energía mecánica por unidad de peso del fluido a lo largo de una trayectoria (o línea de corriente por ser el flujo permanente). Por lo tanto, para diferentes líneas de corriente del campo de flujo se pueden tener distintos valores de energía H.

Las mismas ecuaciones de Euler conducen a un resultado de notable importancia si se supone que el flujo del fluido perfecto (inviscido e incompresible) sea irrotacional (ξ=rot $\mathbf{u}$=0). Efectivamente, re-escribiendo las ecuaciones de Euler como expresadas en (24):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho g \dot{z}\right) = \rho\, \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \tag{30}$$

considerando flujo permanente: $\partial\mathbf{u}/\partial t$=0 e irrotacional: rot $\mathbf{u}$=0 (por lo tanto el miembro derecho es idénticamente nulo) y dividiendo todo por γ se obtiene:

$$\boxed{\nabla\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2g} + \dot{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla H = 0} \tag{31}$$

Es decir, la energía mecánica por unidad de peso del fluido H es constante en las tres direcciones (por lo tanto, en todo el campo de flujo) y no solamente a lo largo de una línea de corriente. Efectivamente, expandiendo (31):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{32}$$

Consecuentemente, para el flujo irrotacional de fluidos perfectos (inviscidos e incompresibles) bajo la acción del campo de fuerzas gravitacional, la validez del teorema de Bernoulli no se limita a una línea de corriente, sino que se extiende a la totalidad del campo de flujo tridimensional.

6. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE LA VORTICIDAD EN FLUJOS DE FLUIDOS PERFECTOS

Derivemos una expresión para la tasa de cambio de la vorticidad en el campo de flujo de un fluido perfecto, para lo cual consideramos la ecuación de Euler (22):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - g\,\nabla \dot{z} \qquad (33)$$

Introduciendo la identidad vectorial (23) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right) - \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + g\,\dot{z}\right) \qquad (34)$$

Tomando el rotor a ambos miembros y recordando la identidad vectorial (Apéndice Unidad 2): rot grad (escalar)=0, obtenemos:

$$\frac{\partial\,(\mathrm{rot}\ \mathbf{u})}{\partial t} - \mathrm{rot}\left(\mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\ \mathbf{u}\right) = 0 \qquad (35)$$

la cual es idéntica a:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \xi) = 0 \qquad (36)$$

Considerando la identidad vectorial (Apéndice Unidad 2):

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \xi) = \mathbf{u}\,(\nabla \cdot \xi) - \xi\,(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi + (\xi \cdot \nabla)\mathbf{u} \qquad (37)$$

recordando que la divergencia del rotor de un vector es cero (div rot **b**=0, es decir, $\nabla\cdot\xi=0$) y que div **u**=0 por continuidad de un flujo incompresible ($\nabla\cdot\mathbf{u}=0$), tenemos que el primer y segundo término del miembro derecho de (37) son nulos, por lo tanto, reemplazando en (36):

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi = (\xi \cdot \nabla)\mathbf{u}} \qquad (38)$$

o en función de la derivada total (Lagrangiana):

$$\boxed{\frac{D\xi}{Dt} = (\xi \cdot \nabla)\mathbf{u}} \tag{39}$$

La ecuación (38) describe la dinámica de la vorticidad ξ en el interior del campo de flujo de un fluido perfecto en función de derivadas Eulerianas. Mientras la (39) es idéntica a la (38) pero escrita en derivadas Lagrangianas. Las dos ecuaciones están representando un proceso de convección de vorticidad por el campo de velocidad, es decir, la vorticidad es transportada por el campo de velocidad con celeridad **u**. El término del miembro derecho de (38) representa la "elongación de vorticidad" por acción del tensor gradiente de velocidad.

La dinámica de la vorticidad de flujos de fluidos perfectos se completa con el teorema de Kelvin, el cual establece que la circulación Γ alrededor de una curva material cerrada es constante: $D\Gamma/Dt=0$.

Si un tubo material de vorticidad es transportado y sufre una elongación dentro del campo de flujo, es decir, reduce su sección transversal y se alarga, como la circulación debe permanecer constante la vorticidad debe aumentar. Un ejemplo simple de elongación de vorticidad es el caso de un flujo acelerado debido a una contracción, tal como se esquematiza en la Figura 4.

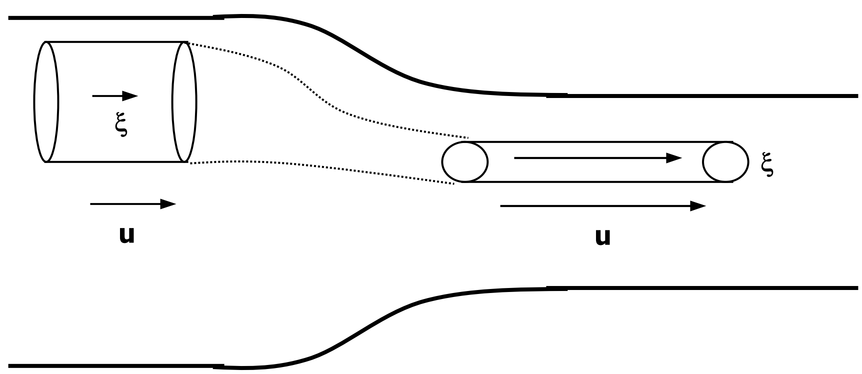

Figura 4. Elongación de vorticidad en una contracción.

Por otra parte, si el tensor gradiente de velocidad es cero entonces la vorticidad de un elemento fluido material es constante, en efecto, el término del miembro derecho se anula y consecuentemente: $D\xi/Dt=0$.

Además, el término del miembro derecho de (38) es cero en el caso de un flujo bidimensional o plano. Recordamos que un flujo bidimensional se caracteriza por poseer una de las componentes de **u** nula y en los distintos planos paralelos el flujo es idéntico. Por lo tanto, en ese caso ξ tiene una sola componente la cual es perpendicular al plano de flujo. Por ejemplo, si v=0, las componentes de **u** son u y w en el plano xz (las cuales no varían con y) y la única componente de ξ es ξ_y, perpendicular al plano xz. En ese caso, el término del miembro derecho es nulo y en derivadas Eulerianas tenemos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \tag{40}$$

que representan un proceso de convección pura, lo cual indica que la vorticidad permanece constante durante la propagación (no existe deformación de los tubos de vorticidad), como se observa en la ecuación (39) si se considera que el miembro derecho es cero.

En síntesis, la vorticidad en el flujo de un fluido perfecto (inviscido e incompresible) encuentra restricciones muy fuertes para su desarrollo. Puede decirse que si en un instante inicial la vorticidad de un elemento fluido material es nula permanecerá nula en todo otro instante posterior. Por consiguiente, el campo de flujo de un fluido invíscido e incompresible inicialmente irrotacional seguirá siendo constantemente irrotacional.

7. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE LA VORTICIDAD EN FLUJOS DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

Generalmente la vorticidad (ξ=rot $\mathbf{u}$) no se utiliza en los análisis de flujos de fluidos como una de las variables principales, ya que el campo de velocidad $\mathbf{u}$ es más importante y significativo. De todos modos, es extremadamente instructivo examinar el impacto del vector vorticidad ξ en las ecuaciones de Navier-Stokes. Consideremos que la densidad y la viscosidad son constantes y el campo de fuerzas de cuerpo es debido a la gravedad, por lo tanto, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben en notación indicial como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{41a}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho g \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_i} \tag{41b}$$

o vectorialmente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{42a}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho g \nabla \dot{z} \tag{42b}$$

Introducimos vorticidad en el término de aceleración convectiva y en el término de fuerzas viscosas, similar a lo realizado precedentemente con las ecuaciones de Euler, utilizando las siguientes identidades vectoriales (ver Apéndice del Unidad 2):

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) - \mathbf{u} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u} \tag{43}$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \tag{44}$$

Recordando que para densidad constante el fluido es incompresible y consecuentemente la ecuación de continuidad se expresa mediante (42a):

$$\mathrm{div}\, \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{45}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes resultan:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho\, g\, \dot{z} \right) = \rho\, \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\, \mathbf{u} - \mu\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \tag{46}$$

La ecuación resultante es verdaderamente ilustrativa. Si el fluido es inviscido (μ=0) el segundo término del miembro derecho de (46) es cero y encontramos nuevamente las ecuaciones de Euler, expresadas incluyendo vorticidad en los términos de aceleración convectiva:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho\, g\, \dot{z} \right) = \rho\, \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \tag{47}$$

Si el fluido es viscoso ($\mu \neq 0$) pero la vorticidad es cero (ξ=rot **u**=0), entonces todo el miembro derecho de (46) es idénticamente nulo. Por lo tanto, si rot **u**=0, que es la clásica suposición de flujo irrotacional, obtenemos:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho\, g\, \dot{z} \right) = 0 \tag{48}$$

que son las ecuaciones de Euler, pero con la suposición de irrotacionalidad del campo de flujo. Es decir, aún existiendo viscosidad y esfuerzos tangenciales, si el flujo es irrotacional las ecuaciones de Euler coinciden con las de Navier-Stokes. Por otra parte, si el flujo es irrotacional, el campo de velocidad admite la existencia de una función ϕ denominada <u>potencial de la velocidad</u> (que veremos en detalle más adelante):

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \equiv \begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \tag{49}$$

Por lo tanto, reemplazando (49) en (48) obtenemos la ecuación de Bernoulli válida para la totalidad del campo de flujo impermanente de un fluido incompresible:

$$\nabla\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\rho g\dot{z}\right)=0 \tag{50}$$

Además, expandiendo (48):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\rho g\dot{z}\right)=-\rho\frac{\partial u}{\partial t} \tag{51}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\rho g\dot{z}\right)=-\rho\frac{\partial v}{\partial t} \tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\rho g\dot{z}\right)=-\rho\frac{\partial w}{\partial t} \tag{53}$$

dividiendo todo por γ y considerando flujo permanente ($\partial\mathbf{u}/\partial t$ = 0), se reconoce que el trinomio de la ecuación de Bernoulli:

$$H=\frac{p}{\gamma}+\frac{|\mathbf{u}|^2}{2g}+\dot{z} \tag{54}$$

es constante en las tres direcciones (por lo tanto, en todo el campo de flujo) y no solamente a lo largo de una línea de corriente.

Por lo tanto, hemos visto que <u>bajo la hipótesis de irrotacionalidad</u> (ξ=rot $\mathbf{u}$=0) se observa que:

- La ecuación de Bernoulli es válida para la totalidad del campo de flujo (ya visto en el punto 5 con el análisis efectuado a partir de las ecuaciones de Euler),
- La ecuación de Bernoulli es válida inclusive para el flujo de fluidos viscosos.

Ahora bien, respecto a la segunda conclusión es necesario observar que, la solución de los flujos a potencial de la velocidad (para fluidos perfectos e irrotacionales) aplicadas al caso de flujo de fluidos viscosos no pueden satisfacer la <u>condición de no deslizamiento</u> en contacto con la pared o contorno. Esto es porque, asumiendo irrotacionalidad, desaparece la derivada de segundo orden de la velocidad en las ecuaciones (42b) y aparecen solo derivadas de primer orden, de manera tal que, solo una condición de velocidad puede ser satisfecha en correspondencia de la pared. En un flujo a potencial de la velocidad se requiere que, en correspondencia de la pared, la velocidad normal sea cero y la tangencial generalmente desliza con la velocidad del fluido.

Esto parece invalidar cualquier posibilidad de analizar el campo de flujo de un fluido viscoso mediante un flujo a potencial de la velocidad. Sin embargo, para el flujo de un fluido viscoso con número de Reynolds elevado, que fluye alrededor de un cuerpo sólido (como veremos en el Unidad 4) el flujo es irrotacional en la mayor parte del dominio menos en una zona cercana a la pared donde la velocidad, a los efectos de satisfacer la condición de no deslizamiento, cae abruptamente a través de una delgada capa viscosa de contorno hasta hacerse cero en la pared. Por lo tanto, en dicha capa el flujo no es a potencial de la velocidad porque hay vorticidad (originada por gradientes de velocidad no nulos) y no puede considerarse invíscido. En dicha zona, la viscosidad adquiere importancia, se origina curvatura del perfil de velocidad y por ende gradientes de velocidad y tensiones de corte. En la mayoría de los casos la capa es tan delgada que no perturba absolutamente el flujo potencial externo. Otro tipo de flujos que admiten potencial de velocidad son los flujos de lento escurrimiento (creeping flows) de fluidos viscosos.

Derivemos una expresión para la tasa de cambio de la vorticidad en el campo de flujo de un fluido viscoso incompresible, para lo cual consideramos la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - g\,\nabla \dot{z} \qquad (55)$$

Introduciendo la identidad vectorial (43) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right) - \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + g\,\dot{z}\right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \qquad (56)$$

Tomando el rotor a ambos miembros y recordando la identidad vectorial (Apéndice Unidad 2): rot grad (escalar)=0 y que el operador rotor conmuta con el Laplaciano, obtenemos:

$$\frac{\partial\,(\mathrm{rot}\;\mathbf{u})}{\partial t} - \mathrm{rot}\left(\mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\;\mathbf{u}\right) = \nu \nabla^2 \mathrm{rot}\;\mathbf{u} \qquad (57)$$

la cual es idéntica a:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \xi) = \nu \nabla^2 \xi \qquad (58)$$

Considerando la identidad vectorial dada por (37):

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \xi) = \mathbf{u}\,(\nabla \cdot \xi) - \xi\,(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi + (\xi \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

recordando que la divergencia del rotor de un vector es cero (div rot **u** =0, es decir, $\nabla \cdot \xi = 0$) y que div **u**=0 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) por continuidad de un flujo incompresible, tenemos que el primer y segundo término del miembro derecho son nulos, por lo tanto:

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi = (\xi \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi} \qquad (59)$$

o en función de la derivada total (Lagrangiana):

$$\boxed{\frac{D\xi}{Dt} = (\xi \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi} \tag{60}$$

Las ecuaciones (59) y (60) son idénticas respectivamente a las ecuaciones (38) y (39) con el agregado de un término que involucra la viscosidad cinemática, el cual representa la difusión de vorticidad debido a la viscosidad. En los fluidos viscosos la condición de no deslizamiento hace que dicho término no pueda nunca desaparecer cerca del contorno o pared. De esta manera, en los fluidos viscosos la vorticidad está siempre presente cerca de la pared y es forzada por el movimiento relativo de los estratos de fluidos, animados por distintas velocidades debido al importante gradiente de velocidad que se crea cerca de la pared.

Si consideramos un flujo bidimensional, el término de elongación de vorticidad (primer término del miembro derecho de (59)) es cero. Por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) \tag{61}$$

la cual describe un proceso de convección-difusión pura de vorticidad. La convección se produce por el campo de velocidades bidimensional y el coeficiente de difusión está representado por la viscosidad cinemática. Contrariamente al caso de fluido inviscido, en este caso la vorticidad no se propaga sin deformación, ya que se difunde por efecto de la viscosidad. Efectivamente, existe deformación de los tubos de vorticidad debido a difusión, como se desprende de la ecuación (60):

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \nabla^2 \xi \tag{62}$$

8. FLUJOS A POTENCIAL DE LA VELOCIDAD

8.1 Flujo potencial tridimensional

Si en un determinado campo de flujo las componentes del vector velocidad **u** pueden expresarse mediante derivadas parciales continuas de una función escalar $\phi=\phi(x,y,z,t)$, es decir:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (63)$$
$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

entonces el campo de flujo es irrotacional. La función escalar $\phi=\phi(x,y,z,t)$ se denomina <u>potencial de la velocidad</u>. Por lo tanto, para demostrar esto debemos verificar que las expresiones (63) satisfagan efectivamente la condición de irrotacionalidad, es decir, ξ=rot **u**=0. Recordando que el rotor de **u** es igual al producto vectorial entre el operador nabla y el vector velocidad **u**:

$$\xi = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{u} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Debemos verificar que, expresando **u** en función de las (63), las componentes de ξ sean todas nulas, es decir:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \qquad (64)$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Por lo tanto, reemplazando las expresiones (63) en las (64) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = 0 \qquad (65)$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0$$

Dado que se trata de derivadas parciales continuas, donde el orden de derivación no influye, las igualdades (65) son satisfechas y por lo tanto puede decirse que las (63) satisfacen efectivamente la irrotacionalidad del campo de flujo. Viceversa, puede también decirse que si el flujo es irrotacional el campo de velocidad admite la existencia de una función ϕ denominada potencial de la velocidad, según la cual el vector velocidad se pueden expresar en forma compacta vectorial e indicial como:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \qquad , \qquad u_j = \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \tag{66}$$

Este tipo de abordaje es útil sobre todo para analizar los fluidos perfectos e irrotacionales. Existen otros flujos que, aún dentro del ámbito viscoso, admiten igualmente un potencial de la velocidad, se trata de flujos de fluidos viscosos extremadamente lentos (por ejemplo, flujos de filtración en medios porosos).

La simplificación que se logra es evidente si se observa que un campo vectorial, como el de la velocidad, puede analizarse en función de un campo escalar. Recordando la ecuación de continuidad para el flujo de un fluido incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{67}$$

e introduciendo (66) en (67) se obtiene:

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \tag{68}$$

Es decir, se obtiene la ecuación de Laplace, cuya resolución, para determinadas condiciones al contorno, es suficiente para determinar la función ϕ y, por lo tanto, la distribución de la velocidad en la totalidad del campo de flujo. La función ϕ es unívocamente definida, si para los puntos del contorno se prescriben los valores de ϕ o de $\partial\phi/\partial n$ (donde n es la normal al contorno). Una vez determinado el campo de velocidad puede determinarse sucesivamente el campo de presión aplicando la ecuación de Bernoulli.

8.2 Superficies equipotenciales

Si se unen todos los puntos que presentan el mismo valor de ϕ se obtienen superficies de ϕ=constante denominadas <u>superficies equipotenciales</u>. Considerando que en una superficie equipotencial el cambio total $\delta\phi$ es nulo ($\delta\phi$=0), tenemos:

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \tag{69}$$

reemplazando las (63):

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0 \tag{70}$$

que es la ecuación de una superficie equipotencial.

8.3 Flujo potencial bidimensional

Consideremos un flujo bidimensional donde v=0, por lo tanto, si el flujo es a potencial de la velocidad se tendrá que:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \phi(x,z)}{\partial x} \\
w &= \frac{\partial \phi(x,z)}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{71}
$$

En este tipo de esquematización del flujo, tanto u como w no varían en la dirección y. Por lo tanto, la única componente del vector vorticidad es ξ_y, la cual debe ser cero por ser el flujo irrotacional. Es decir, se debe cumplir que:

$$\xi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{72}$$

la cual de acuerdo a las (65) se cumple. Además, la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{73}$$

la cual, de acuerdo a las (63) se expresa mediante:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{74}$$

Consecuentemente, en el flujo potencial bidimensional, si se unen los puntos que presentan el mismo valor de ϕ se obtienen líneas de ϕ=constante denominadas <u>líneas equipotenciales</u>. Considerando que a lo largo de en una línea equipotencial el cambio total $\delta\phi$ es nulo ($\delta\phi=0$), tenemos:

$$\delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0 \tag{75}$$

reemplazando en (75) las (71) se obtiene:

$$u\,dx + w\,dz = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{n} = 0 \tag{76}$$

donde d**n** es un elemento de la línea equipotencial cuyas componentes son (dx,dy). La ecuación (76) muestra la relación de ortogonalidad de dos vectores, ya que el producto escalar entre **u** y d**n** es nulo. A partir de dicha relación se concluye que el <u>vector velocidad **u**</u> y consecuentemente las <u>líneas de corriente</u> son <u>normales a las líneas equipotenciales</u>, como se esquematiza en la Figura 5.

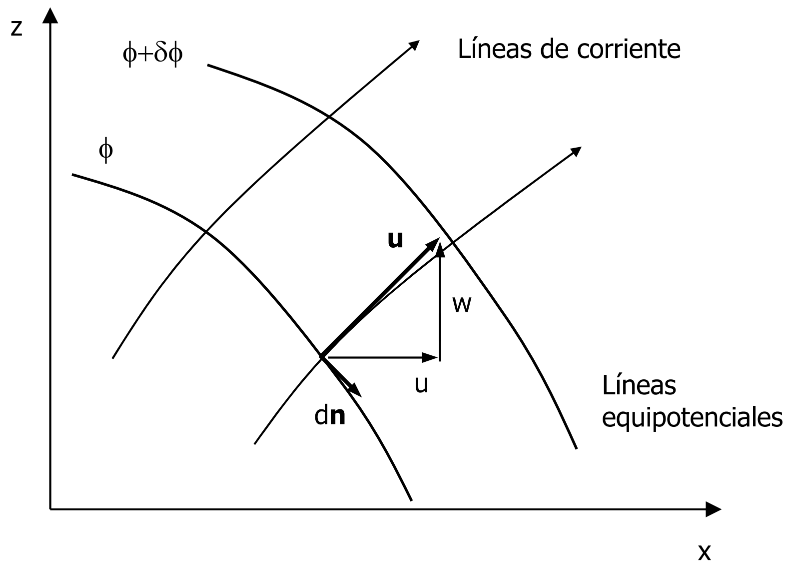

Figura 5. Líneas de corriente y equipotenciales.

8.3.1 Función de corriente. Red de corriente

La ecuación de continuidad bidimensional (73) verifica la condición de existencia de una función ψ, introducida por Lagrange, tal que las derivadas de dicha función ψ satisfagan las relaciones:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$
$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{77}$$

sustituyendo (77) en la ecuación de continuidad (73) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = 0 \tag{78}$$

efectivamente se satisface.

Si se introducen las relaciones (77) en las ecuaciones de línea de corriente:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad , \quad w = \frac{dz}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dz}{w}$$

se obtiene:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} = -\frac{dz}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \delta\psi = 0$$

Esto significa que ψ es constante a lo largo de una línea de corriente y por eso se denomina <u>función de corriente</u>. Por lo tanto, en el flujo potencial bidimensional, las líneas ψ=constante son normales a las líneas equipotenciales ϕ=constante.

La configuración en el plano de las dos familias de líneas ϕ=constante y ψ=constante constituyen la denominada <u>red de corriente</u> o red de flujo, tal como se muestra en la Figura 6.

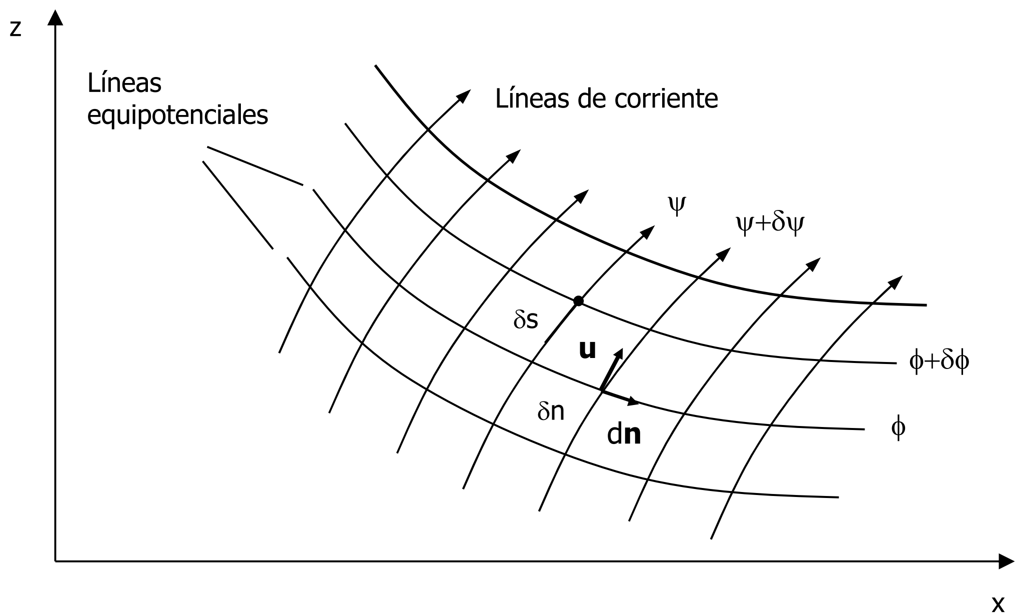

Figura 6. Representación de una red de flujo.

El valor de la velocidad resulta:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{79}$$

A partir de la ecuación (79) y viendo la representación esquemática de la Figura 6, realizada para incrementos $\delta\phi$ y $\delta\psi$ constantes, la velocidad queda definida como: $u=\delta\phi/\delta s=\delta\psi/\delta n$, por lo tanto, dos líneas de corriente ψ_1, ψ_2 forman un tubo de corriente en el cual el caudal específico es:

$$q = \int_1^2 u \ \delta n = \psi_2 - \psi_1 \tag{80}$$

es decir, el caudal específico es igual a la diferencia del valor que la función ψ presenta sobre estas líneas.

9. BIBLIOGRAFÍA

Abbot, M.B. and Basco, D.R. (1989). COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS. An Introduction for Engineers. John Wiley & Sons, New York.

Currie, I.G. (1974). FUNDAMENTAL MECHANICS OF FLUIDS. McGraw Hill, Inc., New York.

Franzini, J.B. y Finnemore, E.J. (1999). MECÁNICA DE FLUIDOS. McGraw Hill, Interamericana de España, S.A.U, Madrid.

Ghetti, A. (1996). IDRAULICA. ISBN 88-7784-052-8, Librería Cortina, Padova, Italia.

Marchi y Rubatta (1981). MECCANICA DEI FLUIDI. UTET-Torino, Italia.

Mott, R.L. (2006). MECÁNICA DE FLUIDOS APLICADA. Prentice-Hall; 2006; IV Ed.

Shames, I.H. (2003). MECHANICS OF FLUIDS. McGraw Hill, 4th Ed., 2003.

White, F.M. (2004). MECÁNICA DE FLUIDOS. McGraw-Hill, V Ed., 2004.

Yunus Cengel (2006). MECÁNICA DE FLUIDOS. McGraw-Hill, 2006.