

CENTRO UNIVERSITARIO ROSARIO DE INVESTIGACIONES HIDROAMBIENTALES

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA-EIC

ICDH-D 19-6_Rev00

UNIDAD 6

FLUJO EN CONDUCTOS A PRESIÓN

Pedro A. Basile

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2019



Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

UNIDAD 6. FLUJO EN CONDUCTOS A PRESIÓN

1.	INTRODUCCIÓN.....	4
2.	FLUJO PERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESIÓN.....	4
2.1	Ecuaciones gobernantes: flujo permanente y uniforme.....	4
2.2	Distribución radial de la tensión de corte.....	6
2.3	Régimen de flujo laminar y flujo turbulento.....	7
2.3.1	Capa límite laminar y turbulenta a lo largo de un conducto.....	8
2.3.2	Capa límite en tramos iniciales de conductos a presión.....	9
2.4	Distribución radial de la velocidad en un conducto circular para flujo laminar.....	10
2.4.1	Caudal y velocidad media en la sección para flujo laminar.....	11
2.4.2	Factor de fricción de Darcy-Weisbach para flujo laminar.....	12
2.5	Distribución radial de la velocidad en un conducto circular en régimen turbulento..	13
2.5.1	Distribución de velocidad en flujo turbulento hidráulicamente liso.....	15
2.5.2	Distribución de velocidad en flujo turbulento hidráulicamente rugoso.....	17
2.5.3	Expresión general de la ley logarítmica de distribución de velocidad para flujo turbulento.....	17
2.5.4	Caudal y velocidad media en la sección para flujo turbulento.....	18
2.5.5	Factor de fricción de Darcy-Weisbach para flujo turbulento.....	20
2.5.6	Otras ecuaciones de resistencia al flujo aplicables en conductos a presión.....	23
2.5.6.1	Fórmula de Chezy.....	23
2.5.6.2	Fórmula de Manning.....	26
2.5.6.3	Fórmula de Hazen y Williams.....	29
2.6	Resolución de problemas simples.....	30
2.7	Pérdidas de carga localizadas.....	31
2.8	Conducto que conecta dos reservorios.....	34
2.8.1	Conductos acoplados en serie.....	35
2.8.2	Conductos acoplados en paralelo.....	36
2.8.3	Consideraciones sobre la altimetría de la conducción a presión.....	38
2.8.4	Energía externa provista en conducciones a presión mediante una bomba.....	40
2.9	Sistemas complejos de tuberías: nodos hidráulicos y redes de distribución.....	41
2.9.1	Nodo hidráulico: conductos que conectan tres reservorios.....	42
2.9.2	Redes de distribución cerradas.....	43
2.9.2.1	Erogación lateral de caudal a lo largo de los conductos.....	48

3.	FLUJO IMPERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESIÓN.....	50
3.1	Flujo impermanente analizado mediante el abordaje inelástico.....	50
3.1.1	Flujo impermanente en un conducto conectado a un reservorio.....	52
3.1.1.1	Tiempo de establecimiento de flujo en un conducto.....	52
3.1.1.2	Vaciado de un reservorio a través de un conducto largo.....	55
3.1.1.3	Llenado de un reservorio.....	58
3.1.2	Golpe de ariete: conducto indeformable y densidad constante.....	59
3.2	Flujo impermanente analizado mediante el abordaje elástico.....	62
3.2.1	Golpe de ariete: interpretación conceptual para conducto deformable.....	63
3.2.2	Celeridad de una onda de presión.....	66
3.2.3	Tiempo de cierre de válvula y sobrepresiones generadas.....	67
3.2.3.1	Maniobra de cierre rápido.....	67
3.2.3.2	Maniobra de cierre lento.....	68
3.2.4	Ecuaciones simplificadas de flujo impermanente elástico.....	68
3.2.5	Resolución de las ecuaciones de flujo impermanente elástico.....	72
3.2.6	Golpe de ariete: conducto deformable y densidad variable.....	73
3.2.6.1	Influencia del tiempo de cierre.....	76
3.2.6.2	Influencia del tipo de maniobra de cierre.....	78
3.2.7	Protección contra el golpe de ariete.....	82
4.	BIBLIOGRAFÍA.....	83

UNIDAD 6

FLUJO EN CONDUCTOS A PRESIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Los flujos a presión en conducciones cerradas se desarrollan en conductos o tubos rígidos totalmente llenos. Las diferencias de presión en un tubo con flujo forzado mantienen al fluido en movimiento independientemente de que el trazado de la conducción sea horizontal, descendente o ascendente. En este sentido, se diferencian de los flujos a superficie libre (ríos, canales, etc.) los cuales presentan la superficie superior en contacto con la atmósfera externa a presión ambiente, donde la fuerza motriz es la gravedad.

En condiciones de flujo permanente las variables hidrodinámicas (presión y velocidad) no varían en el tiempo. Lo contrario ocurre si el flujo es impermanente, en cuyo caso la magnitud de las variaciones de velocidad pueden producir variaciones considerables de presión y determinar variaciones de densidad del agua y deformación del conducto.

En condiciones de flujo permanente y uniforme la velocidad no varía en la dirección principal del flujo. Por lo tanto, en las conducciones a presión, el flujo permanente y uniforme es solo posible si el caudal se mantiene constante y la sección del conducto es constante, al menos por tramos, respecto al eje del mismo.

En la mayoría de las conducciones forzadas la sección transversal de la tubería es de forma circular, ya que, respecto a otras formas, conjuga ventajas de funcionamiento hidráulico eficiente y resistencia estructural.

El flujo en conductos a presión puede ser representado sustancialmente como un flujo unidimensional, ya que la sección transversal del tubo es pequeña en relación a la longitud de la conducción forzada, y, por lo tanto, se puede adoptar una velocidad media en la sección.

2. FLUJO PERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESIÓN

2.1 Ecuaciones gobernantes: flujo permanente y uniforme

Para flujo permanente la ecuación unidimensional de balance de masa de flujo impermanente se reduce a la condición de caudal constante:

$$Q = U A \quad (1)$$

Donde U: velocidad media en la sección del conducto (m/s) y A: área del conducto totalmente lleno (m²). Para un conducto circular de radio interior r_o , el área es: $A = \pi r_o^2$, o en función del diámetro interior D: $A = \pi D^2/4$.

El balance unidimensional de energía mecánica establece que:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = - \frac{\tau_o}{\rho g R} \quad (2)$$

La ec. (2) representa la conservación de la energía mecánica H por unidad de peso del fluido, todos los términos están expresados en (m) de columna de agua (ver Figura 1). Donde z : energía potencial; $p/\rho g$: energía de las fuerzas de presión, siendo p : presión (N/m^2), ρ : densidad del fluido (kg/m^3), g : aceleración de la gravedad (m/s^2); $U^2/2g$: energía cinética por unidad de peso del fluido, siendo la energía cinética igual a: $(1/2)MU^2$ y el peso del fluido: $P=\rho V g = M g$ (con M : masa y V : volumen).

La tensión de corte ejercida por la acción hidrodinámica del flujo sobre el contorno del conducto de radio hidráulico R es τ_o (N/m^2), cuyo valor es positivo. La misma genera una fuerza de reacción, que se opone al movimiento del fluido, originando la resistencia al flujo y consecuente pérdida de energía (o pérdida de carga hidráulica) a lo largo del conducto. En efecto, de (2) se observa que:

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{\tau_o}{\rho g R} = J \quad (3)$$

Es decir, la energía disminuye en el sentido del flujo y , por lo tanto, el gradiente espacial de H es negativo. Consecuentemente, de (3) se desprende que τ_o es positivo.

En la Figura 1 se observa la representación de variables geométricas e hidráulicas del flujo a presión permanente y uniforme en un conducto circular de diámetro $D=2 r_o$. La línea con trazos y puntos, indicada con H , representa la línea de energía. Además, la línea de trazos indicada con h^* representa la línea piezométrica (relativa): $h^*=z+ p/\rho g$.

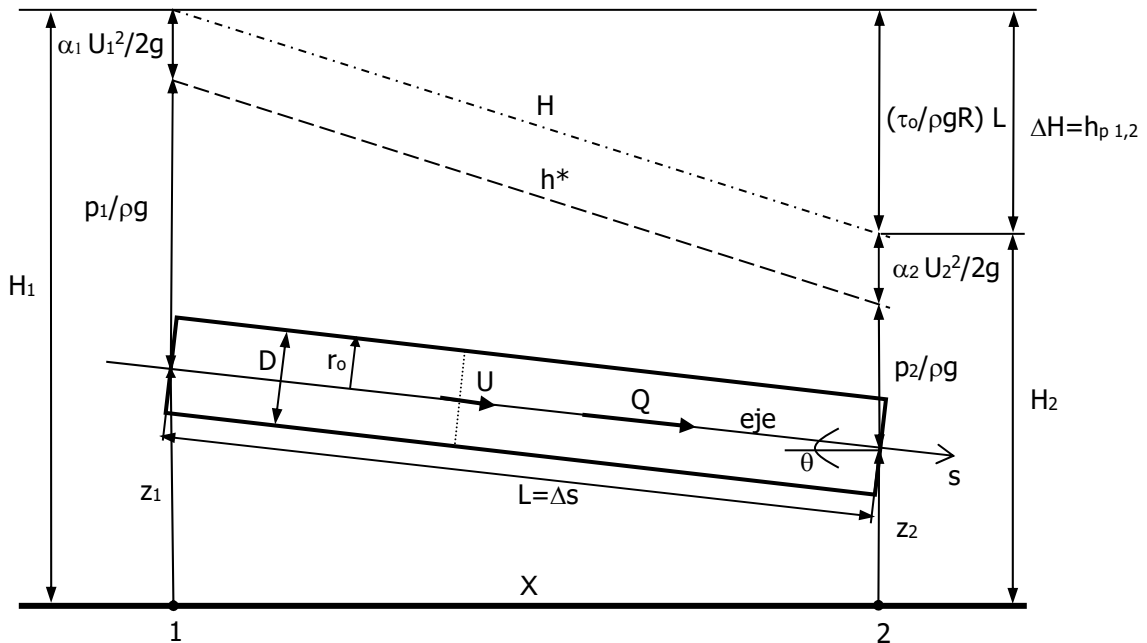


Figura 1. Representación de variables geométricas e hidráulicas del flujo a presión permanente y uniforme en un conducto circular de diámetro $D=2 r_o$.

En la ec. (3) J representa la pendiente de la línea de energía, que define la pérdida de energía unitaria (m/m), es decir, por unidad de longitud del conducto. Dado que consideramos flujo permanente y uniforme (la velocidad media U y la tensión de corte τ_o son constantes en la

dirección del flujo s), la misma es igual, además, a la pendiente de la línea piezométrica, es decir: $-dh^*/ds=J$.

Como comentado anteriormente, las diferencias de presión en el tubo mantienen al fluido en movimiento independientemente de que el trazado de la conducción sea horizontal, descendente o ascendente.

En la ec. (2), el coeficiente de Coriolis α , tiene en cuenta la distribución no uniforme de la velocidad radial en la sección del conducto, y corrige la velocidad media U para el correcto balance unidimensional de energía:

$$\alpha = \frac{I}{U^3 A} \int_A u(r)^3 dA = \frac{2}{U^3 r_o^2} \int_0^{r_o} u(r)^3 r dr \quad (3a)$$

Donde $u(r)$ es la distribución radial de la velocidad. El diferencial de área, para un conducto circular de radio r_o y considerando un radio genérico r , es: $dA=\pi 2r dr$.

Como veremos más adelante, la distribución radial de la velocidad en un conducto circular genera un sólido de revolución de velocidades con simetría axial. Tal distribución es mucho más uniforme en un flujo turbulento que en un flujo laminar. En general, $\alpha=2$ (flujo laminar), $\alpha \approx 1.06 - 1.10$ (flujo turbulento, dependiendo si se trata de flujo turbulento hidráulicamente liso, transicional o rugoso), que abordaremos en los próximos apartados.

2.2 Distribución radial de la tensión de corte

El teorema de conservación de la cantidad de movimiento, para flujo permanente, establece que: "El flujo neto de cantidad de movimiento más la sumatoria de las fuerzas externas que actúan en un volumen de control V es igual a cero".

La cantidad de movimiento es igual al producto entre la masa y la velocidad. Para una representación unidimensional, la cantidad de movimiento por unidad de longitud es: $\rho A U$. El flujo de cantidad de movimiento es igual a la cantidad de movimiento por la velocidad, es decir: $\rho A U^2 = \rho Q U$.

Por lo tanto, haciendo referencia al volumen de control de Figura 1, el flujo neto de cantidad de movimiento es la diferencia entre el flujo neto de entrada menos el de salida: $\rho Q (\beta_1 U_1 - \beta_2 U_2)$.

El coeficiente β de Boussinesq, tiene en cuenta la distribución no uniforme de la velocidad en la sección del conducto, para una correcta evaluación unidimensional del flujo de cantidad de movimiento:

$$\beta = \frac{I}{U^2 A} \int_A u(r)^2 dA = \frac{2}{U^2 r_o^2} \int_0^{r_o} u(r)^2 r dr \quad (4)$$

Para flujo laminar $\beta=1.33$ y para flujo turbulento $\beta=1 - 1.03$, como veremos más adelante.

Las fuerzas actuantes son las de presión, gravedad y fricción. La resultante de las fuerzas de presión es: $F_p = A(p_1 - p_2)$. Donde A es el área del conducto y $p_{1,2}$ las presiones en ambos extremos del volumen de control.

La fuerza de gravedad actuante en la dirección del flujo es: $F_g = \rho g A \Delta s \sin \theta$.

La fuerza de fricción actuante sobre el contorno del conducto circular de perímetro P a lo largo de la longitud $L = \Delta s$ y opuesta a la dirección del flujo es: $F_f = -\tau_o P \Delta s$.

Por lo tanto, de acuerdo al teorema de conservación de cantidad de movimiento tenemos:

$$\rho Q(\beta_1 U_1 - \beta_2 U_2) + A(p_1 - p_2) + \rho g A \Delta s \sin \theta - \tau_o P \Delta s = 0 \quad (5)$$

Si el flujo, además de permanente es uniforme: $\beta_1 U_1 = \beta_2 U_2$, consecuentemente el primer término se anula. Por otra parte: $(p_1 - p_2) = -\Delta p$. Además, para θ pequeño ($\theta < 10^\circ$): $\sin \theta = \text{tg } \theta$ y $X \approx L = \Delta s$, es decir, $\sin \theta = \text{tg } \theta = -\Delta z / \Delta s$. Teniendo en cuenta esto y dividiendo (5) por $A \Delta s \rho g$, se obtiene:

$$-\frac{\Delta}{\Delta s} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) - \tau_o \frac{P}{\rho g A} = 0 \quad (6)$$

El primer término de (6) es igual a la pendiente de la línea piezométrica: $-\Delta h^* / \Delta s = J$. Además, en el segundo término, la relación entre el área A y el perímetro P es el radio hidráulico R ($R = A/P$). Por lo tanto, la tensión de corte sobre la pared del conducto es:

$$\tau_o = \rho g R J \quad (7)$$

Para un conducto circular lleno de radio interno r_o , el radio hidráulico es $R = r_o/2$, o en función del diámetro interior, $R = D/4$. Consecuentemente, la tensión de corte τ_o es:

$$\tau_o = \rho g \frac{r_o}{2} J = \rho g \frac{D}{4} J \quad (8)$$

En caso de flujo permanente no uniforme (espacialmente variado), que no es el caso que estamos analizando, la sección del conducto varía en forma continua a lo largo de su eje. En tal caso, la tensión de corte τ_o se evalúa considerando la pendiente de fricción o la de energía, que contempla el gradiente espacial de la altura de velocidad en el conducto.

La tensión de corte radial sigue una ley lineal, ya que, si se analiza la conservación de la cantidad de movimiento para una porción de área interior, asociada a un radio genérico r , el esfuerzo de corte al interior del fluido es:

$$\tau(r) = \rho g \frac{r}{2} J \quad (9)$$

De (8) y (9) se obtiene la distribución radial de la tensión de corte:

$$\tau(r) = \tau_o \left(\frac{r}{r_o} \right) \quad (10)$$

Es decir, la tensión de corte es nula en el eje del conducto ($r=0$) y máxima (τ_0) sobre la pared del conducto ($r=r_0$). Las expresiones (9) y (10) se utilizarán más adelante para determinar los perfiles de velocidad en flujo laminar y turbulento, respectivamente.

2.3 Régimen de flujo laminar y flujo turbulento

Cuando los efectos de las fuerzas de inercia se vuelven importantes en comparación con las fuerzas viscosas, el flujo de un fluido viscoso no se desarrolla más en estratos paralelos bien ordenados y regulares (flujo laminar), sino que asume un carácter caótico, desordenado e irregular (flujo turbulento). Tal situación fue puesta en evidencia por Reynolds (1883) mediante sus clásicos experimentos.

En dichos experimentos se constató que el pasaje de flujo laminar a flujo turbulento es caracterizado por el número de Reynolds, que proporciona la relación entre las fuerzas inerciales (que tienden a exaltar cualquier perturbación que afecte el campo de flujo) y las fuerzas viscosas (que tienden a amortiguar dichas perturbaciones):

$$Re = \frac{U D}{\nu} \quad (11)$$

Donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática (m^2/s), siendo μ la viscosidad dinámica ($kg/m \cdot s$) y ρ la densidad del agua (kg/m^3).

Para $Re \leq 2000$ cualquier perturbación del flujo laminar, inclusive capaz de producir una ondulación momentánea de las líneas de corriente, es amortiguada en un cierto tiempo, conservando las características de flujo laminar. Al contrario, para $2000 < Re < 2400$, el flujo laminar es extremadamente inestable y basta una mínima perturbación para hacerlo pasar a flujo turbulento. Para $Re > 4000$ el flujo es definitivamente turbulento.

2.3.1 Capa límite Laminar y Turbulenta a lo largo de un conducto

Consideremos un conducto de diámetro $D=2r_0$, con un espesor pequeño de pared, donde ingresa un flujo que presenta una distribución de velocidades uniforme u_0 como se indica en la Figura 2.

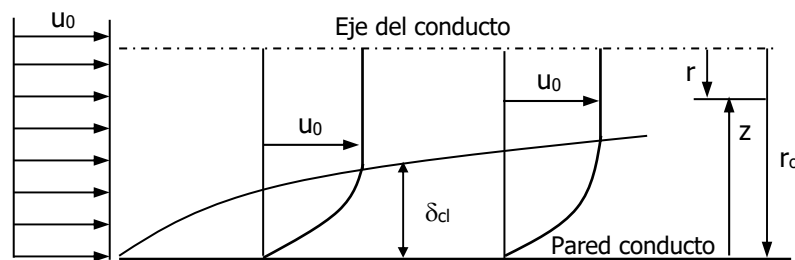


Figura 2. Conducto con ingreso de un flujo con perfil de velocidad uniforme.

Dado el pequeño espesor de la pared del conducto, el campo de flujo no resultará en general perturbado por su presencia, salvo en proximidad de la pared debido a la formación de una

capa límite, que en la parte inicial será laminar. Llamamos δ_{cl} a la altura de esta capa, entendiendo que dicha altura representa la distancia vertical a partir de la pared a la cual la velocidad es 1% inferior a la que presenta el flujo externo no perturbado (u_0). La unión de los puntos donde termina la capa límite marca la frontera entre el flujo laminar viscoso en el interior de la misma y el flujo externo irrotacional. En tales puntos las tensiones tangenciales de origen viscoso (que prevalecen en el interior) y las fuerzas de inercia (que prevalecen en el flujo exterior) son del mismo orden de magnitud.

En el interior de la capa límite y en proximidad de la pared, en virtud del gradiente vertical de velocidad (curvatura del perfil de velocidades) y de la viscosidad del fluido, se crea un esfuerzo tangencial de origen viscoso, verificándose un efecto de retardo entre los distintos estratos de fluido en las inmediaciones de la pared. A medida que se avanza sobre la pared el gradiente de velocidad γ , por lo tanto, el retardo se propaga hacia zonas no inmediatamente próximas a la misma, es decir, se produce el crecimiento de la altura de la capa límite.

Por lo tanto, en el interior de la capa límite se individualiza una zona, para ordenadas muy pequeñas, en la cual el número de Reynolds local es inferior al crítico y persiste la estabilidad del flujo laminar (lo cual se debe sustancialmente al efecto estabilizador que ejerce la pared sobre el fluido). A medida que se avanza sobre la pared, las ordenadas aumentan (la distancia a la pared aumenta) y Re asume valores superiores al crítico, razón por la cual el flujo laminar en la capa límite se inestabiliza dando origen al flujo turbulento, que coexiste con el flujo laminar en una zona de transición, más allá de la cual el flujo turbulento se encuentra totalmente establecido, subsistiendo una subcapa viscosa en proximidad de la pared de altura δ , la cual es una característica del flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso; tal como se esquematiza en la Figura 3.

La inestabilidad de la capa límite y la transición de flujo laminar a turbulento, ha sido objeto de numerosas investigaciones, ya sea en flujos a presión en conductos, sobre placas planas, sobre superficies curvas, etc. El proceso es complejo y depende de diversos factores, tales como, el número de Reynolds, las vibraciones o perturbaciones, el grado de turbulencia del flujo externo, la rugosidad de la superficie y su curvatura, etc. (Rayleigh, 1880; Reynolds, 1883; Orr, 1907; Sommerfeld, 1908; Nikuradse, 1933; Prandtl, 1933; Schlichting, 1960; Draad et al., 1998; Mullin y Peixinho, 2006; Eckhardt, 2018).

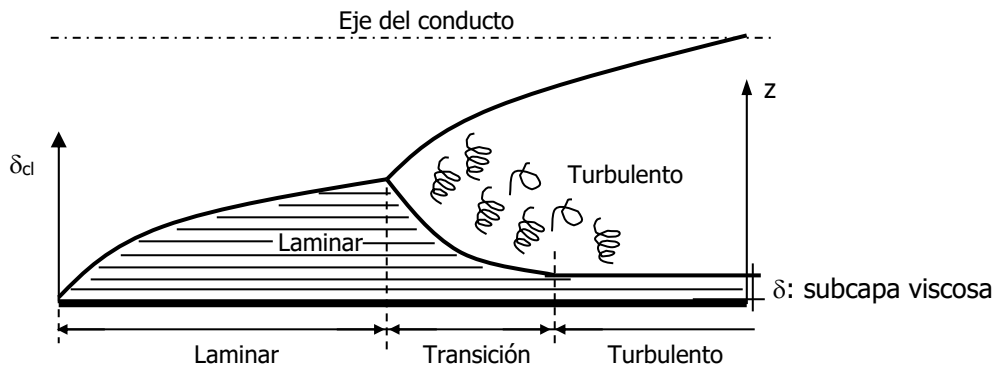


Figura 3. Esquematación del desarrollo de la capa límite laminar, transicional y turbulenta, en un conducto con pared hidráulicamente lisa.

2.3.2 Capa límite en tramos iniciales de conductos a presión

Veamos conceptualmente algunos ejemplos del desarrollo de una capa límite en el tramo inicial de un conducto circular y el posterior establecimiento de flujo laminar y turbulento. Suponemos que el conducto es alimentado desde un reservorio y la embocadura del conducto se encuentra bien perfilada.

Considerando un conducto de sección pequeña, a partir de la embocadura se establece una capa límite que crece progresivamente desde la pared al interior del conducto, como muestra la Figura 4. El núcleo central se va reduciendo hasta que desaparece cuando las dos capas límites laminares se unen y por lo tanto tenemos flujo laminar establecido, con distribución de velocidades parabólica que veremos más adelante. La longitud L que se necesita para que el flujo laminar sea completamente establecido es función del número de Reynolds y del diámetro del conducto: $L=0.058 \text{ Re } D$. Para $\text{Re}=(UD/\nu) \leq 2000$ se obtiene que la longitud es $L \leq 120 D$ aproximadamente.

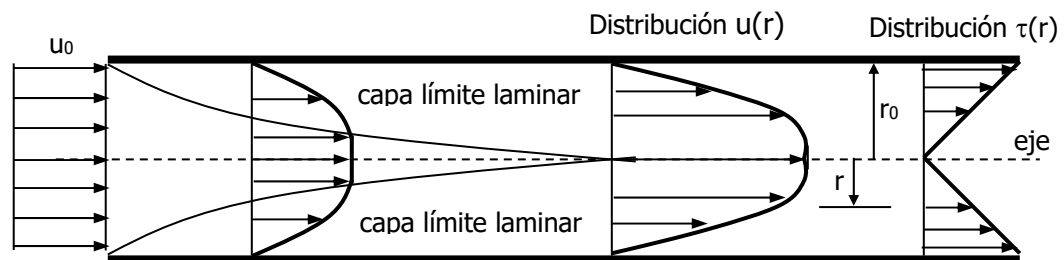


Figura 4. Establecimiento del régimen laminar en un conducto circular de diámetro $D=2 r_0$. Unión de la capa límite laminar.

Si el conducto tiene sección suficientemente grande, la capa límite laminar se inestabiliza y se origina la turbulencia antes de que se unan las capas límites laminares (ver Figura 5), por lo tanto, tendremos flujo turbulento y distribución de velocidades logarítmica. La longitud a la cual el flujo turbulento se encuentra completamente desarrollado o establecido, puede expresarse en función del número de Reynolds y del diámetro del conducto: $L=4.4 \text{ Re}^{(1/6)} D$. La distribución de velocidades en un flujo turbulento no sigue una ley parabólica, como en el caso de flujo laminar, sino que sigue una ley logarítmica o, también potencial, como veremos más adelante.

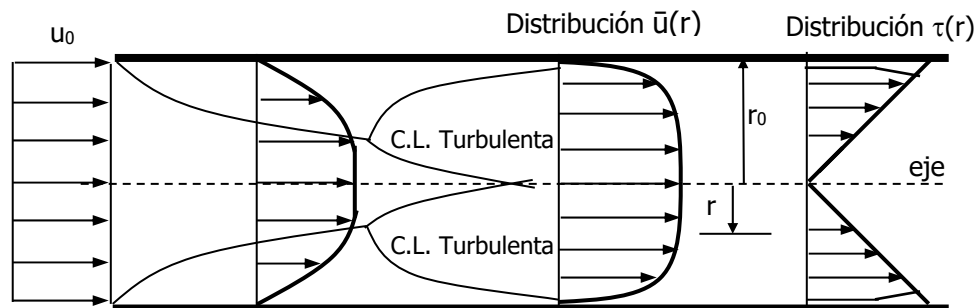


Figura 5. Establecimiento del régimen turbulento en un conducto circular de diámetro $D=2 r_0$. Unión de la capa límite turbulenta.

2.4 Distribución radial de la velocidad en un conducto circular para flujo laminar

Para flujo laminar, permanente y uniforme, en un conducto circular de diámetro $D=2 r_0$, la relación entre tensión de corte y gradiente radial de velocidad se expresa como:

$$\tau(r) = -\mu \frac{du}{dr} \quad (12)$$

Donde μ : viscosidad dinámica (kg/m s), u : velocidad instantánea (m/s) en correspondencia con un radio genérico r (m). Cabe aclarar que el gradiente de velocidad u respecto al radio genérico r es negativo ($du/dr < 0$), por lo tanto, el signo negativo convierte en un valor positivo a la tensión de corte viscosa (laminar).

Reemplazando el valor de $\tau(r)$ dado por (9), se obtiene:

$$\rho g \frac{r}{2} J = -\mu \frac{du}{dr} \quad (13)$$

Integrando se obtiene:

$$u(r) = -\frac{\rho g}{4\mu} J r^2 + const. \quad (14)$$

La constante de integración se determina considerando que para $r=r_0$, es decir, en contacto con la pared del conducto la velocidad es nula $u(r_0)=0$. Por lo tanto, la distribución de velocidad es:

$$u(r) = \frac{g J}{4\nu} (r_0^2 - r^2) \quad (15)$$

Donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática (m^2/s).

Para flujo laminar, la distribución de la velocidad en el conducto describe un paraboloide de revolución de velocidades con simetría radial. Para un radio genérico r , la velocidad es dada por la ecuación (15). Para una determinada sección del conducto, la velocidad es nula en contacto con la pared del conducto ($r=r_0$). La velocidad máxima se verifica en $r=0$, es decir, en correspondencia del eje del conducto, por lo tanto, especificando $r=0$ en la ec. (15) se obtiene:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{g J r_0^2}{4\nu} = \frac{g J D^2}{16\nu} \quad (16)$$

2.4.1 Caudal y velocidad media en la sección para flujo laminar

El caudal en el conducto se determina mediante la siguiente integración:

$$Q = \int_A u(r) dA = \int_0^{r_0} u(r) \pi 2r dr = \frac{g J}{2\nu} \pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr \quad (17)$$

Resolviendo la integral y expresando $r_0=D/2$ se obtiene:

$$Q = \frac{g J \pi D^4}{128 \nu} \quad (18)$$

El valor de la velocidad media en la sección transversal del conducto U , se obtiene como:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{g J D^2}{32 \nu} \quad (19)$$

En la Figura 6 se presenta el perfil de distribución radial de velocidad adimensional $u(r)/U$. Se observa que la velocidad máxima, en correspondencia del eje del conducto para $r=0$, es igual a 2 veces la velocidad media, tal cual surge de la relación entre las ecs. (16) y (19).

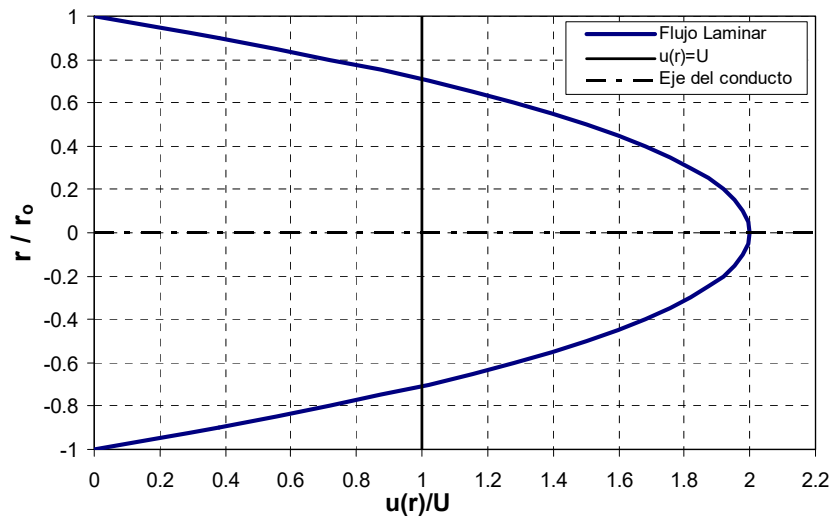


Figura 6. Distribución radial de velocidad adimensional $u(r)/U$ para flujo laminar en un conducto de diámetro $D=2 r_0$.

A partir de (15) y (19) se puede determinar el valor del coeficiente de Coriolis, dado por la ec. (3a), obteniéndose $\alpha=2$. De la misma manera, el coeficiente de Boussinesq (ec. (4)) es $\beta=1.33$.

2.4.2 Factor de fricción de Darcy-Weisbach para flujo laminar

Considerando la ec. (19) y el valor de la tensión de corte sobre la pared del conducto, dada por la ec. (9), se obtiene la expresión que relaciona la tensión de corte τ_0 con la velocidad media, el diámetro del conducto D y la viscosidad dinámica $\mu=\rho\nu$:

$$\tau_0 = \rho g \frac{D}{4} J = \frac{8\mu}{D} U \quad (20)$$

La ec. (20) permite resolver la ec. de balance de energía (2). Sin embargo, en la práctica es común expresar la pérdida de energía por unidad de longitud J (pendiente de la línea de energía), en función de la relación entre la altura de velocidad y cuatro veces el radio hidráulico (ley de Darcy-Weisbach (1857)). Para conductos circulares llenos: $4R=D$. Por lo tanto:

$$J = \frac{f U^2}{D 2g} \quad (21)$$

Donde f es el factor de fricción o índice de resistencia de Darcy-Weisbach (adimensional). Para el caso de flujo laminar, que estamos analizando, el mismo se determina a partir de (19) y (21) como:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (22)$$

Donde Re es el número de Reynolds dado por la ec. (11).

Consecuentemente, para el flujo laminar en conductos a presión, J se determina con (21) expresando el factor de fricción con la (22). Como mencionado anteriormente, en la práctica la (21) es utilizada para determinar la pérdida de energía (o carga hidráulica) continua por fricción a lo largo de un conducto de longitud L :

$$\frac{\tau_o}{\rho g R} L = JL = \frac{f U^2}{D 2g} L \quad (23)$$

Haciendo referencia a la ec. (3), oportunamente integrada, y observando la Figura 1, se tiene:

$$\Delta H_{1,2} = H_1 - H_2 = \frac{f U^2}{D 2g} L = h_{p1,2} \quad (24)$$

Donde los dos primeros términos de (24) representan la diferencia de energía entre la sección aguas arriba y aguas abajo (igual a $-\Delta H_{2,1}$), la cual es igual a la pérdida de energía (o de carga hidráulica) debida a la resistencia ejercida por la fuerza de fricción actuante sobre la pared del conducto, representada por los dos últimos términos. De ahora en más, en relación a la terminología: pérdidas de energía = pérdidas de carga.

Es necesario señalar que el flujo laminar se verifica en conductos de diámetros reducidos y velocidades medias extremadamente bajas, es decir, para valores de $Re < 2000-2400$. En conductos utilizados frecuentemente en redes de distribución de agua, acueductos, etc., el flujo a presión es generalmente turbulento ($Re > 4000$). Por lo tanto, a continuación, abordaremos el tema de distribución de la velocidad en un conducto con flujo turbulento establecido.

2.5 Distribución radial de la velocidad en un conducto circular en régimen turbulento

Para flujo turbulento permanente y uniforme en un conducto circular de diámetro interior $D=2r_0$, la distribución de tensión de corte total $\tau(r)$ está compuesta por dos términos:

$$\tau(r) = -\rho \overline{u'w'} - \mu \frac{d\bar{u}}{dr} \quad (25)$$

Donde μ : viscosidad dinámica (kg/m s), \bar{u} : velocidad media temporal (integrada en el período de la turbulencia); u' , w' : valores de la fluctuación de la velocidad en dirección del flujo principal y radial respectivamente.

El primer término del segundo miembro es la tensión de corte asociada a la turbulencia del flujo (tensión de corte adicional o de Reynolds). El mismo surge de promediar las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el período de la turbulencia, considerando que la velocidad instantánea es igual a un valor medio temporal más una pulsación (Reynolds, 1895). El segundo término es la tensión de corte viscosa, correspondiente al flujo medio y asociada a la viscosidad molecular μ . El campo de flujo turbulento instantáneo es esencialmente impermanente, sin embargo, si los valores medios temporales, en el sentido de Reynolds, se mantienen constantes en el tiempo, el flujo turbulento puede ser considerado permanente.

La tensión de corte total es positiva. Dado que las velocidades pulsantes u' y w' se correlacionan predominantemente en forma negativa, el valor medio temporal del producto $u'w'$ es negativo (Willmarth y Lu, 1972; Orlić et al., 2017). Consecuentemente, el signo negativo convierte en un valor positivo a la tensión de corte asociada a la turbulencia. Asimismo, como vimos anteriormente en el caso de flujo laminar, el gradiente de velocidad media temporal \bar{u} respecto al radio genérico r es negativo ($d\bar{u}/dr < 0$), por lo tanto, el signo negativo convierte en un valor positivo a la tensión de corte viscosa (laminar).

La ec. (25) no puede ser resuelta analíticamente debido a que la parte de la tensión de corte total asociada a la turbulencia del flujo no puede ser expresada en función de las variables independientes. Sin embargo, es posible introducir algunas hipótesis sobre la relación entre la tensión de corte turbulenta, las variables independientes y las características del flujo medio. Esto permitirá determinar el perfil de velocidad media temporal \bar{u} , resolviendo la ec. (25).

En primer lugar, debemos realizar un cambio de variable, pasando de la variable independiente radio genérico r , el cual es nulo sobre el eje del conducto e igual a r_0 en correspondencia de la pared del conducto; a la variable independiente z (distancia de la pared), nula en la pared del conducto e igual a r_0 en correspondencia con el eje del conducto (ver Figura 7). Las dos variables independientes se vinculan mediante la relación:

$$z = r_0 - r \tag{26}$$

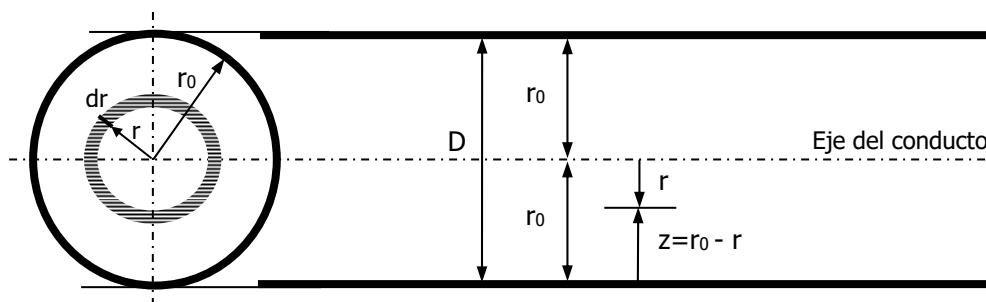


Figura 7. Esquematación de las variables independientes en un conducto: para derivación de distribución de velocidad (derecha) y para integración de velocidad en el área (izquierda).

Por lo tanto, teniendo en cuenta este cambio de variable ($dz = -dr$) y la ec. (10) que brinda la distribución de tensión de corte, se obtiene:

$$\tau_o \left(1 - \frac{z}{r_0} \right) = -\rho \overline{u'w'} + \mu \frac{d\bar{u}}{dz} \tag{27}$$

Para derivar el perfil de distribución de velocidad, consideramos la expresión Boussinesq-Prandtl para representar las tensiones turbulentas (o tensiones de Reynolds) en función de las magnitudes del flujo medio permanente y uniforme:

$$-\rho \overline{u'w'} = \rho \left(\kappa z \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \quad (28)$$

Donde $\kappa=0.4$ (constante de Von Karman). Planteamos que en una región próxima a la pared del conducto ($0 < z < r_o$), pero fuera de la subcapa viscosa, la tensión de corte total es mayormente asociada a la tensión de corte turbulenta, es decir, la misma prevalece respecto a la tensión de corte laminar o viscosa. Además, la tensión de corte en dicha zona es igual aproximadamente a τ_o (ver ec. (27)), es decir, igual a la tensión de corte sobre la pared del conducto.

Por lo tanto, despreciando el segundo término del segundo miembro de (27) e introduciendo (28) en (27) se obtiene:

$$\tau_o = \rho \left(\kappa z \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \quad (29)$$

Operando algebraicamente y luego integrando tenemos:

$$d\bar{u} = \frac{\sqrt{\tau_o/\rho}}{\kappa} \frac{dz}{z} \quad \rightarrow \quad \bar{u}(z) = \frac{\sqrt{\tau_o/\rho}}{\kappa} \ln z + const. \quad (30), (31)$$

La constante de integración se obtiene especificando la condición: $\bar{u}(z_0)=0$, es decir, estableciendo una distancia z_0 a partir de la pared del conducto donde $\bar{u}=0$:

$$const. = -\frac{\sqrt{\tau_o/\rho}}{\kappa} \ln z_0 \quad (32)$$

Reemplazando (32) en (31) obtenemos la ley logarítmica de distribución de la velocidad para un flujo turbulento permanente y uniforme:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (33)$$

donde u_* es la velocidad de corte, definida como:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{g \frac{D}{4} J} \quad (34)$$

La ecuación (33) representa la ley logarítmica de distribución de la velocidad para flujo turbulento. Los valores de z_0 han sido obtenidos a través de experimentos efectuados considerando el flujo turbulento en conductos con contornos hidráulicamente lisos, transicionales y rugosos (Nikuradse, 1933).

2.5.1 Distribución de velocidad en flujo turbulento hidráulicamente liso

Un contorno se define hidráulicamente liso (CHL) cuando existe una subcapa viscosa de espesor δ en proximidad de la pared del conducto, en la cual predominan los efectos viscosos. Esto se observa cuando la altura de rugosidad de Nikuradse e_s se encuentra totalmente inmersa en la subcapa viscosa: $e_s < 0.45 \delta$.

El valor de z_0 referido a δ es:
$$z_0 = 0.01 \delta \tag{35}$$

El espesor aproximado δ es:
$$\delta = 11 \frac{v}{u_*} \tag{36}$$

Reemplazando (36) en (35):
$$z_0 = 0.11 \frac{v}{u_*} \tag{37}$$

Sustituyendo (37) en (33), realizando simples pasajes algebraicos y pasando a logaritmo decimal, se obtiene:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{u_* z}{v}\right) + 5.5 \tag{38}$$

Se observa que para flujo turbulento hidráulicamente liso el perfil de velocidad es independiente de la altura de rugosidad e_s .

Considerando que $z=r_0-r$ y que la velocidad máxima se verifica en $r=0$, es decir, $z=r_0$ (eje del conducto), de (38) se obtiene:

$$\frac{\bar{u}_{m\acute{a}x}}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{u_* r_0}{v}\right) + 5.5 = 5.75 \log\left(\frac{u_* D}{v}\right) + 3.77 \tag{39}$$

Por otra parte, en contornos hidráulicamente lisos, en la subcapa viscosa predominan los efectos viscosos respecto a los turbulentos. Es decir, la tensión de corte total puede asociarse exclusivamente a la tensión de corte laminar o viscosa. Por lo tanto, despreciando el primer término del segundo miembro de (27) y considerando que muy próximo a la pared del conducto ($0 < z < r_0$) la tensión de corte es τ_0 ; se obtiene una ley lineal de la distribución de velocidades en la subcapa viscosa dada por:

$$\tau_0 = \rho u_*^2 = \mu \frac{d\bar{u}}{dz} \rightarrow \frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{u_* z}{v} \tag{40}$$

Igualando la (40) con el perfil logarítmico dado por la (33), para $z=\delta$ y considerando $z_0=0.01 \delta$, se obtiene el valor teórico de la altura de la subcapa viscosa: $\delta=11.5 v/u_*$. Se trata de un valor teórico ya que existe una zona de transición entre el perfil lineal y el logarítmico. Dicha zona de transición se extiende desde $z=(5 \text{ a } 30) v/u_*$, como se muestra esquemáticamente en la Figura 8.

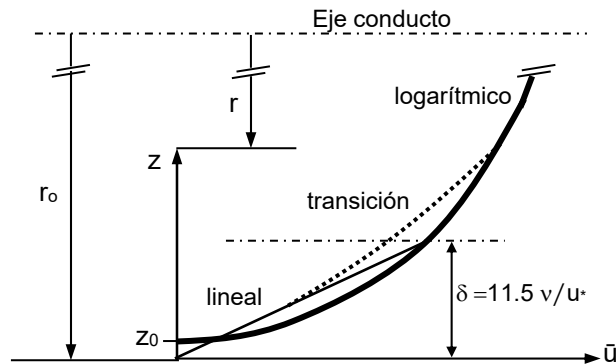


Figura 8. Esquematación de la zona de transición del perfil de velocidad.

2.5.2 Distribución de velocidad en flujo turbulento hidráulicamente rugoso

Cuando los valores de e_s o u_* aumentan de tal manera que se rompe la subcapa viscosa próxima a la pared del conducto, la turbulencia se encuentra completamente desarrollada y el conducto se tipifica como de contorno hidráulicamente rugoso (CHR). Esto se observa cuando: $e_s > 6 \delta$. Para conductos con rugosidad uniforme, z_0 es igual a (Nikuradse, 1933): $z_0 = 0.033 e_s$. Sustituyendo en (33), realizando simples pasajes algebraicos y pasando a logaritmo decimal, se obtiene:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{z}{e_s}\right) + 8.5 \quad (41)$$

Se observa que para turbulencia completamente desarrollada la expresión del perfil de velocidades es independiente de la viscosidad ν , siendo solo función de la altura de rugosidad e_s .

Considerando que $z = r_0 - r$ y que la velocidad máxima se verifica en $r = 0$, es decir, $z = r_0$ (eje del conducto), de (41) se obtiene:

$$\frac{\bar{u}_{m\acute{a}x}}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{r_0}{e_s}\right) + 8.5 = 5.75 \log\left(\frac{D}{e_s}\right) + 6.77 \quad (42)$$

2.5.3 Expresión general de la ley logarítmica de distribución de velocidad para flujo turbulento

Entre conductos con contornos hidráulicamente lisos y rugosos existe una zona transicional donde coexisten los efectos viscosos y turbulentos que influyen en el perfil de velocidad. Los límites de comportamiento pueden expresarse en función del número de Reynolds del contorno del conducto, dado en función de la velocidad de corte $u_* = (\tau_0/\rho)^{0.5}$ y de la altura de rugosidad equivalente e_s :

$$Re_* = \frac{u_* e_s}{\nu} \quad (43)$$

- Hidráulicamente liso (CHL): $Re_* < 5$
- Transición (CHT): $5 \leq Re_* \leq 70$
- Hidráulicamente rugoso (CHR): $Re_* > 70$

La distribución de velocidades puede ser expresada en forma general, considerando los datos experimentales de Nikuradse (1933), como:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{z}{e_s}\right) + B_s \quad (44a)$$

Con $z = r_0 - r$ y donde la función de rugosidad $B_s = f(Re_*)$ se expresa mediante:

$$B_s = (5.75 \log Re_* + 5.5) e^{-0.5913(\log Re_*)^{2.55}} + 8.5 \left(1 - e^{-0.4982(\log Re_*)^{2.55}}\right) \quad (44b)$$

En la Figura 9 se grafica la función de rugosidad dada por la ec. (44b), la cual representa muy bien los datos experimentales de Nikuradse. En particular, para régimen turbulento hidráulicamente liso: $B_s=5.5 + 5.75 \log(\text{Re}^*)$ y para régimen turbulento rugoso (turbulencia completamente desarrollada): $B_s=8.5$.

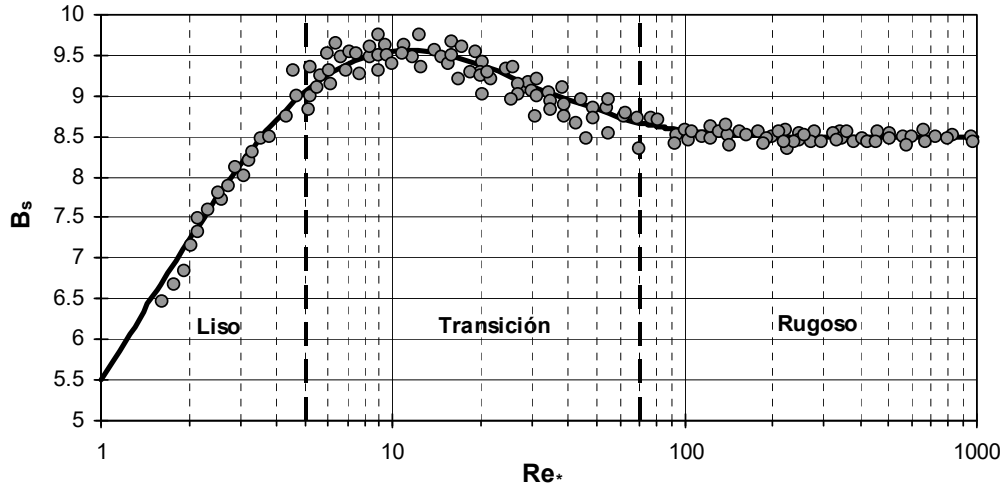


Figura 9. Función de rugosidad $B_s=f(\text{Re}^*)$.

2.5.4 Caudal y velocidad media en la sección para flujo turbulento

El caudal en el conducto se determina mediante la siguiente integración:

$$Q = \int_A \bar{u}(r) dA = 2\pi \int_0^{r_o} \bar{u}(r) r dr \quad (45)$$

Reemplazando en (45) las expresiones (38) y (41) de $\bar{u}(r)$ para contorno hidráulicamente liso y rugoso respectivamente, previo pasaje a logaritmo natural (ln), recordando el cambio de variable $z=r_o-r$; realizando la integración y dividiendo el resultado por el área del conducto circular se obtiene:

Velocidad media para contorno hidráulicamente liso CHL:

$$\frac{U}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{u_* r_o}{\nu}\right) + 1.75 = 5.75 \log\left(\frac{1.01 u_* D}{\nu}\right) \quad (46a),(46b)$$

La velocidad media para contorno hidráulicamente rugoso CHR:

$$\frac{U}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{r_o}{e_s}\right) + 4.75 = 5.75 \log\left(\frac{3.35 D}{e_s}\right) \quad (47a),(47b)$$

Donde la velocidad de corte u_* es dada por la ec. (34).

En la Figura 10 se presentan las distribuciones de velocidades adimensionales $\bar{u}(r)/U$ y $u(r)/U$ (U : velocidad media en la sección transversal del conducto) para flujo turbulento (contorno hidráulicamente liso - CHL) y para flujo laminar, respectivamente, en un conducto de diámetro $D=2 r_o$. La distribución radial de la velocidad para flujo laminar se agrega para poder compararla con la de flujo turbulento.

En ambos casos, la velocidad máxima del sólido de revolución de velocidades se verifica en el eje del conducto para $r=0$. Se observa que en flujo laminar la velocidad media es: $U=0.5 u_{máx.}$ Mientras que, en flujo turbulento CHL, la distribución de velocidad es más uniforme y, consecuentemente, la velocidad media es: $U \approx 0.84 \bar{u}_{máx.}$

Es decir, en flujo turbulento, si se determina el valor del coeficiente de Coriolis, que contempla la no uniformidad de la distribución radial de velocidad en el término de energía cinética por unidad de peso del fluido, se obtiene $\alpha \approx 1$, la mitad del correspondiente a flujo laminar: $\alpha=2$ (ver apartado 2.4.1).

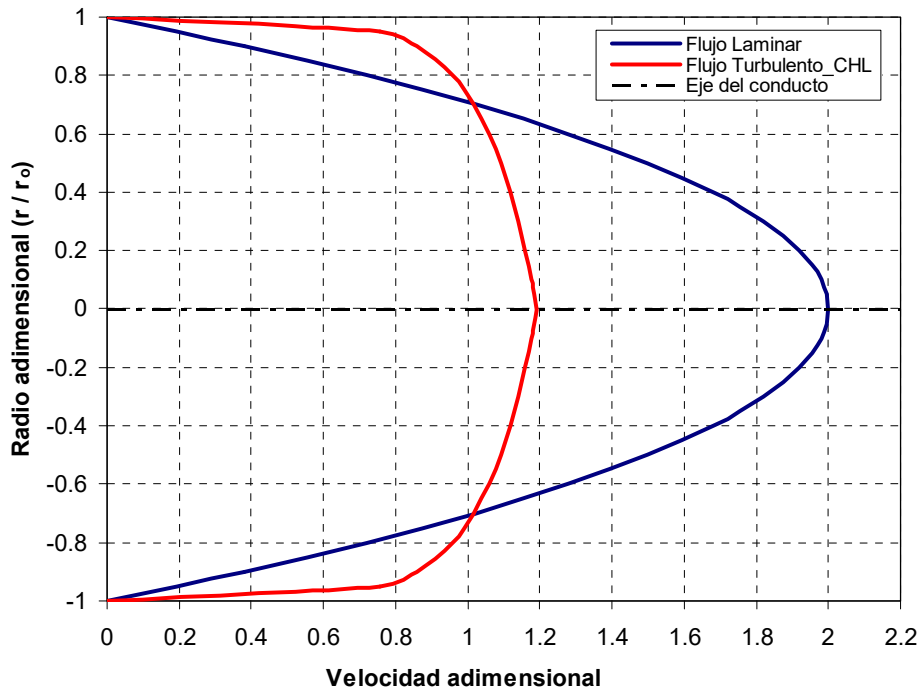


Figura 10. Distribuciones de velocidades adimensionales $\bar{u}(r)/U$ y $u(r)/U$, para flujo turbulento (CHL) y para flujo laminar, respectivamente, en un conducto de diámetro $D=2 r_o$.

Sin embargo, como mencionado en apartados precedentes, en conductos utilizados frecuentemente en redes de distribución de agua, acueductos, etc., el flujo a presión es siempre turbulento. Por ejemplo, para un conducto de diámetro interior $D=0.3$ m y considerando una velocidad media $U=1$ m/s, el número de Reynolds resulta $Re \approx 300000 \gg 4000$. Por lo tanto, el flujo es turbulento y la distribución radial de velocidad es cuasi-uniforme, lo cual implica que no se comete un error importante en la ecuación de balance de energía al adoptar $\alpha=1$.

Por otra parte, hay que considerar además que, en tales casos, el término de altura de velocidad representa una parte muy pequeña de la energía total, por ejemplo, para $U=1$ m/s,

resulta $U^2/2g \approx 5$ cm. Es decir, se puede considerar que el nivel piezométrico $h^* \gg U^2/2g$, y consecuentemente, la línea piezométrica se confunde con la línea de energía (ver Figura 1).

Además, en la Figura 10 se puede observar que, en flujo turbulento, el perfil de distribución logarítmico brinda un valor finito del gradiente de velocidad en correspondencia con el eje del conducto, donde la tensión de corte se anula (ver ec. (10)) y, consecuentemente, el gradiente de velocidad debería ser nulo, tal como sucede con el perfil parabólico de flujo laminar. Sin embargo, esto no reviste mucha importancia desde el punto de vista práctico.

2.5.5 Factor de fricción de Darcy-Weisbach para flujo turbulento

La relación entre la velocidad media y la velocidad de corte se puede vincular con el factor de fricción de Darcy-Weisbach f . En efecto, utilizando la expresión de la velocidad de corte (34):

$$u_*^2 = \frac{\tau_o}{\rho} = g \frac{D}{4} J \quad (48)$$

Reemplazando en (48) la pendiente de energía J por la expresión general de Darcy-Weisbach (21), se obtiene:

$$\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (49)$$

Igualando (46b) y (49), despejando u_* de (49) y sustituyéndola en el término logarítmico de (46b), se obtiene el factor de fricción de Darcy-Weisbach para contorno hidráulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \log \left(\frac{2.8}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (50)$$

Igualando (47b) y (49), se obtiene el factor de fricción de Darcy-Weisbach para contorno hidráulicamente rugoso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \log \left(\frac{(e_s/D)}{3.35} \right) \quad (51)$$

Combinando (50) y (51), a la manera de Colebrook-White, se obtiene una expresión para f que incluye contornos hidráulicamente lisos, transicionales y rugosos:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \log \left(\frac{2.8}{Re \sqrt{f}} + \frac{(e_s/D)}{3.35} \right) \quad (52)$$

Las fórmulas (50), (51) y (52) pueden ser comparadas con las fórmulas experimentales propuestas por Prandtl-Von Karman (1920-1930), Prandtl-Nikuradse (1933) y Colebrook-White (1939), respectivamente.

Prandtl-Von Karman, para flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (53)$$

Prandtl-Nikuradse, para flujo turbulento con contorno hidráulicamente rugoso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{(e_s/D)}{3.71} \right) \quad (54)$$

Colebrook-White, para flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso, transicional y rugoso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{f}} + \frac{(e_s/D)}{3.71} \right) \quad (55)$$

Se observa que los valores de las constantes numéricas muestran pequeñas diferencias, debido sustancialmente a que las constantes numéricas experimentales en las fórmulas (53), (54) y (55) han sido obtenidas por interpolación de los datos experimentales originales y consecuentemente deben considerarse más precisas. De todos modos, por ejemplo, comparando la ec. (51) con la (54), la diferencia en el cálculo de f es muy pequeña, menor al 1% para $0.0008 < e_s/D < 0.022$.

La fórmula de Colebrook-White (55) representa bien las curvas del Ábaco de Moody (1944) y constituye la base de la teoría racional para el cálculo de pérdidas de carga para todo tipo de fluido, temperatura, condiciones de flujo y tipo de material de los tubos. Su estructura es tal que, para valores de Re bajos el primer término dentro del logaritmo asume mayor importancia que el término que contiene la rugosidad relativa (e_s/D). Viceversa, para valores de Re altos, y flujo turbulento completamente desarrollado (contorno rugoso), el primer término pierde importancia y el factor de fricción depende exclusivamente de la rugosidad relativa. Sin embargo, la fórmula de Colebrook-White es complicada, ya que el factor de fricción f es implícito.

Se han propuesto numerosas fórmulas, como aproximación a la fórmula de Colebrook-White, las cuales permiten determinar el factor de fricción f de manera explícita. Entre ellas, se pueden mencionar las fórmulas de Swamee y Jain (1976) y Haaland (1983).

Swamee y Jain (1976):

$$f = 0.25 \left[\log \left(\frac{(e_s/D)}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (56)$$

Haaland (1983):

$$f = 0.309 \left[\log \left(\left(\frac{e_s/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^{-2} \quad (57)$$

Las fórmulas (56) y (57) son simples, de fácil implementación y se aproximan muy bien a la fórmula de Colebrook-White, pudiendo representar el factor de fricción del flujo turbulento a presión en conductos con contornos hidráulicamente lisos, transicionales e hidráulicamente rugosos (turbulento completamente desarrollado).

Una fórmula simple, para el caso de flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso, es la de Blasius (1911), válida para $Re < 100000$:

$$f = 0.316 Re^{-0.25} \tag{58}$$

Para finalizar, recordamos que, para el flujo turbulento en conductos a presión, la pérdida de carga por unidad de longitud J (pendiente de la línea de energía, igual a la pendiente de la piezométrica si el flujo es uniforme), de acuerdo a la ley de Darcy-Weisbach (1857), se expresa como:

$$J = \frac{f U^2}{D 2g} \tag{59a}$$

Utilizando la ecuación de continuidad (1): $U=Q/A$, con $A=\pi D^2/4$, y sustituyendo U en (59), la J también puede expresarse en función del caudal Q , como:

$$J = \frac{8f}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{D^5} \tag{59b}$$

Donde J (m/m), f (-), Q (m³/s), g (m/s²), D (m). El factor de fricción f depende del comportamiento del contorno, es decir, si el mismo es hidráulicamente liso, transicional o rugoso. Como mencionado más arriba, las fórmulas (56) o (57) incluyen las representaciones de los tres comportamientos hidráulicos del contorno.

En la Figura 11 se presenta gráficamente la ecuación (56), para número de Reynolds variando entre $4 \times 10^3 - 1 \times 10^8$ y la rugosidad relativa (e_s/D) variando entre 0.00001 y 0.05. El contorno hidráulicamente liso (CHL) es descrito por la última curva que se superpone satisfactoriamente con la ec. (58) de Blasius hasta $Re=1 \times 10^5$. La zona donde las curvas se transforman en rectas horizontales corresponde al flujo turbulento completamente desarrollado (CHR). La zona de transición de contorno liso-rugoso se verifica entre la última curva y la zona intermedia donde tienen inicio las rectas horizontales independientes de Re .

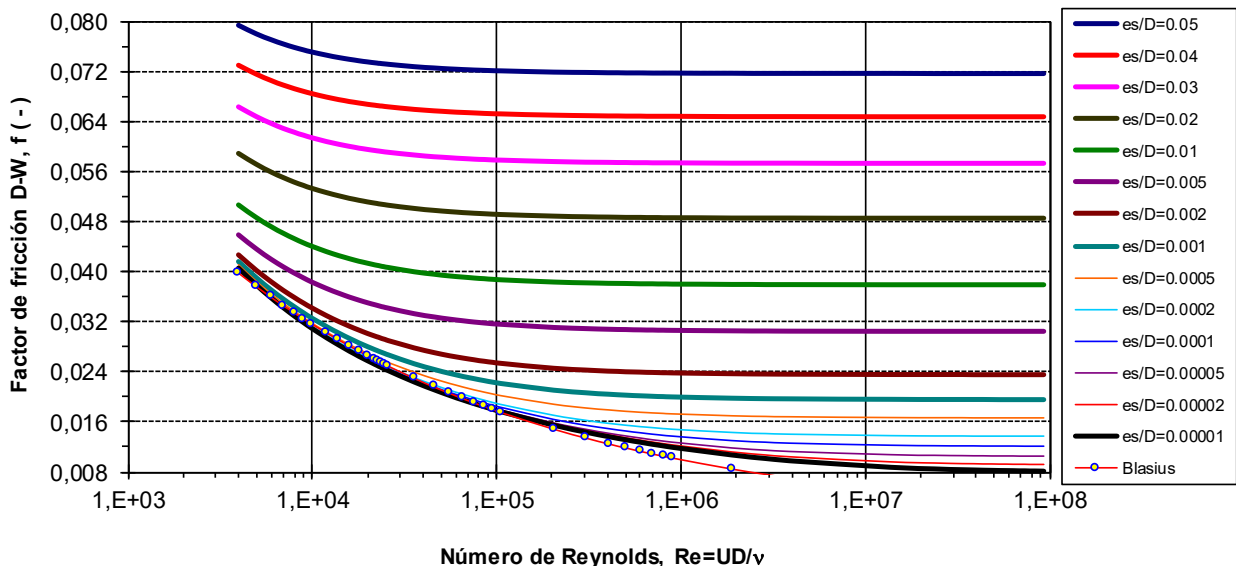


Figura 11. Representación gráfica del factor de fricción f , dado por las ec. (56) y la ec. (58) de Blasius (CHL).

Haciendo referencia a la ec. (3) oportunamente integrada y observando la Figura 1, la pérdida de energía es: $h_{p1,2}=JL$, con J expresada mediante (59a) o (59b).

En general, la pérdida de carga $h_p=J L$, en función de (59b) puede expresarse como:

$$h_p = \frac{8 f L}{\pi^2 g D^5} Q^2 \quad (60)$$

Los experimentos de Nikuradse (1933) se realizaron en tubos con altura de rugosidad e_s uniforme, materializada con granos de arena. Se llama altura de rugosidad equivalente de una tubería comercial, al valor de la altura de rugosidad artificial uniforme que, a igualdad de las demás condiciones del flujo, provoca la misma pérdida de carga por fricción en régimen de turbulencia completamente desarrollada (CHR).

En la Tabla 1 se presentan valores característicos de la altura de rugosidad e_s para algunos materiales utilizados frecuentemente en conductos.

Tabla 1. Altura de rugosidad e_s para algunos tipos de materiales.

Material	e_s (mm)
Acero sin costura (nuevo)	0.0015
Acero comercial soldado	0.05 – 0.1
Acero remachado	0.6 - 0.7
Acero laminado (nuevo)	0.04 – 0.1
Asbesto Cemento (nuevo)	0.025
Asbesto Cemento (protección interior asfáltica)	0.0015
Cobre, latón, tubos vitrificados lisos	0.0015
Cemento liso	0.3 – 0.8
Cemento sin pulido interior	1 – 2
Hierro fundido (nuevo)	0.12 – 0.60
Hierro fundido (protección interior asfáltica)	0.12
Hierro fundido (oxidado)	1 – 1.5
Hierro fundido (con incrustaciones)	1.5 - 3
Hierro galvanizado (0.06 – 0.24)	0.15
Hormigón acabado interior liso	0.3 - 3
Hormigón acabado interior rugoso	3 - 20
Poliéster reforzado con fibra de vidrio	0.01
PVC, CPVC	0.0015

2.5.6 Otras ecuaciones de resistencia al flujo aplicables en conductos a presión

Hay otras ecuaciones de resistencia que pueden utilizarse para el flujo en conductos a presión, en este apartado se presentan ecuaciones empíricas, las cuales son muy utilizadas y pueden ser interpretadas en función de los desarrollos descriptos en los apartados anteriores.

2.5.6.1 Fórmula de Chezy

En primer lugar, se puede mencionar la ecuación de Chezy. Desde el punto de vista histórico, Chezy (1769), fue el primero en presentar una ecuación de resistencia al flujo en canales y que luego aplicó en conductos a presión:

$$U = C R^{1/2} J^{1/2} \quad (61)$$

Donde U: velocidad media en el conducto (m/s), C: coeficiente de Chezy ($m^{1/2}/s$), R: radio hidráulico (m) y J: pendiente de la línea de energía o pérdida de energía por unidad de longitud (m/m), igual a la pendiente de la piezométrica en flujo permanente uniforme.

El coeficiente C de Chezy debe interpretarse como un coeficiente de conducción, ya que al aumentar (disminuir) la resistencia al flujo su valor disminuye (aumenta). Tadini (1830), independientemente de Chezy, propuso un valor constante de $C=50 m^{1/2}/s$. A la luz de los desarrollos posteriores, tal como descrito en los apartados precedentes, es evidente que el coeficiente C varía en función de la rugosidad relativa, de la viscosidad del agua y de la velocidad vía el número de Reynolds.

Para conductos circulares llenos de diámetro interno D, el radio hidráulico es: $R=D/4$, introduciendo en (61) y despejando J se obtiene:

$$J = \frac{4}{C^2 D} U^2 \quad (62)$$

Reemplazando en (48) la pendiente de energía J dada por (62), se obtiene otra forma de expresar la ecuación de Chezy en función de la velocidad de corte u_* :

$$\frac{U}{u_*} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (63)$$

Es interesante observar que $C/g^{0.5}$ es el coeficiente de Chezy adimensional y, en cierta forma, (63) es dimensionalmente homogénea y análoga a la (49) derivada de la teoría racional. Para flujo turbulento completamente desarrollado (contorno hidráulicamente rugoso), comparando (63) con (47b) se obtiene el valor de C, a partir de la velocidad media del perfil logarítmico, en función del diámetro D y la altura de rugosidad e_s :

$$C = 5.75 \sqrt{g} \log \left(\frac{3.35 D}{e_s} \right) \quad (64)$$

Es necesario señalar que, de acuerdo a Prandtl-Nikuradse, el coeficiente 3.35 en (64) debería ser levemente modificado adoptando el valor 3.71 (ver ecs. (54) y (51)).

A partir de (63) y (49) se puede determinar la relación entre el coeficiente de Chezy y el factor de fricción de Darcy-Weisbach:

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (65)$$

Por lo tanto, una expresión general de C, que extiende su rango de aplicación contemplando flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso, transicional y rugoso, puede determinarse sustituyendo (56) en (65). Se debe recordar que (56) proviene de la fórmula de Colebrook-White (55), siendo (56) una aproximación a la misma para calcular f en forma explícita.

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5.657 \left[\log \left(\frac{(e_s / D)}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right] \quad (66)$$

En la Figura 12 se presenta gráficamente la ecuación (66), para número de Reynolds variando entre $4 \times 10^3 - 1 \times 10^8$ y la rugosidad relativa variando entre 0.00001 y 0.05. Donde se agrega la ec. (58) de Blasius, válida para contorno hidráulicamente liso, transformada mediante (65) en: $C/g^{0.5} = 5.03 Re^{1/8}$.

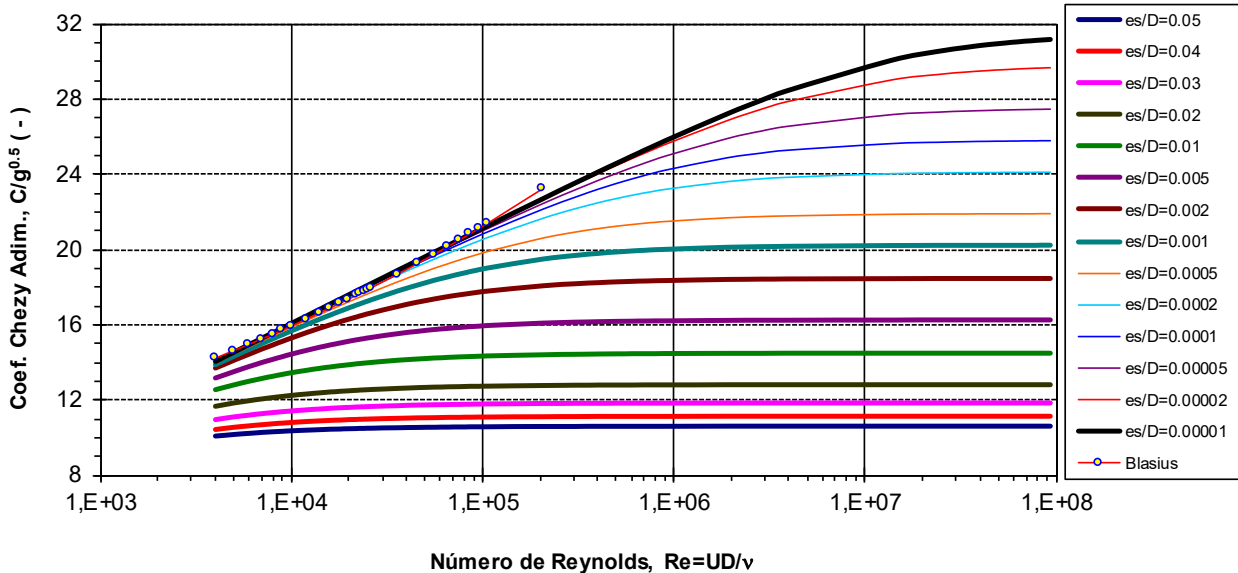


Figura 12. Representación gráfica del coeficiente de Chezy adimensional, dado por la ec. (66) y por Blasius (ec. (58)) transformada a C.

Consecuentemente, para el flujo turbulento en conductos a presión, utilizando la ecuación de Chezy, J puede ser determinada con (62) y C puede expresarse con la (66). Como mencionado anteriormente, en la práctica la (62) es utilizada para determinar la pérdida de carga continua por fricción a lo largo de un conducto de longitud L:

$$\frac{\tau_o}{\rho g R} L = JL = \frac{4}{C^2 D} U^2 L \quad (67)$$

Haciendo referencia a la ec. (3) oportunamente integrada y observando la Figura 1, se tiene:

$$\Delta H_{1,2} = H_1 - H_2 = \frac{4}{C^2 D} U^2 L = h_{p1,2} \quad (68)$$

Es decir, la diferencia de energía entre la sección aguas arriba y aguas abajo $\Delta H_{1,2}$ es igual a la pérdida de energía (o de carga) $h_{p1,2}$ debida a la resistencia ejercida por la fuerza de fricción actuante sobre la pared del conducto, la cual se expresa en forma general como: $h_p = JL$.

La J también puede expresarse en función del caudal Q. En efecto, a partir de la ecuación de continuidad (1): $U = Q/A$, con $A = \pi D^2/4$, y sustituyendo U en (62), se obtiene:

$$J = \frac{64}{\pi^2 C^2} \frac{Q^2}{D^5} \quad (69a)$$

Donde: J (m/m), C (m^{1/2}/s), Q (m³/s), D (m). En general, la pérdida de carga $h_p = J L$, en función de (69a) puede expresarse como:

$$h_p = \frac{64 L}{\pi^2 C^2 D^5} Q^2 \quad (69b)$$

2.5.6.2 Fórmula de Manning

Manning (1891) propuso una fórmula de resistencia al flujo aplicable en canales abiertos con flujo turbulento completamente desarrollado, la cual ha sido y es actualmente también utilizada para el cálculo de pérdidas de carga en conductos a presión:

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad (70)$$

Donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning (s/m^{1/3}) y las demás variables (y sus unidades) ya han sido definidas. Contrariamente al factor de fricción f o al coeficiente de Chezy adimensional C/g^{0.5}, el coeficiente de rugosidad de Manning es dimensional.

Sustituyendo R=D/4 en (70) y despejando J se obtiene:

$$J = \frac{6.35 n^2}{D^{4/3}} U^2 \quad (71)$$

Reemplazando en (48) la pendiente de energía J dada por (71), se obtiene otra forma de expresar la ecuación de Manning en función de la velocidad de corte u_* :

$$\frac{U}{u_*} = \frac{(D/4)^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (72)$$

Para el caso de flujo turbulento completamente desarrollado (contorno hidráulicamente rugoso), comparando (72) con (47b) se obtiene el valor de n, a partir de la velocidad media del perfil logarítmico, en función del diámetro D y la altura de rugosidad e_s :

$$n = \left(\frac{D}{4}\right)^{1/6} \left[5.75 \sqrt{g} \log\left(\frac{3.35 D}{e_s}\right) \right]^{-1} \quad (73)$$

En este caso, vale el mismo comentario realizado en el apartado anterior sobre el coeficiente 3.35. A partir de (72) y (49) se puede determinar la relación entre el coeficiente de rugosidad de Manning y el factor de fricción de Darcy-Weisbach:

$$\frac{(D/4)^{1/6}}{n\sqrt{g}} = \sqrt{f} \tag{74}$$

Por lo tanto, una expresión general de n , que contempla flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso, transicional y rugoso, puede determinarse sustituyendo (56) en (74). Se debe recordar que (56) proviene de la fórmula de Colebrook-White (55), siendo (56) una aproximación a la misma para calcular f en forma explícita.

$$n = -0.14 \frac{D^{1/6}}{\sqrt{g}} \left[\log \left(\frac{(e_s/D)}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-1} \tag{75}$$

En la Figura 13 se presenta gráficamente la relación $n/D^{1/6}$, a partir de la ec. (75), para número de Reynolds variando entre $4 \times 10^3 - 1 \times 10^8$ y la rugosidad relativa variando entre 0.00001 y 0.05. Se agrega la ec. (58) de Blasius, válida para contorno hidráulicamente liso, transformada con (74) en: $n/D^{1/6} = 0.0503 Re^{-1/8}$.

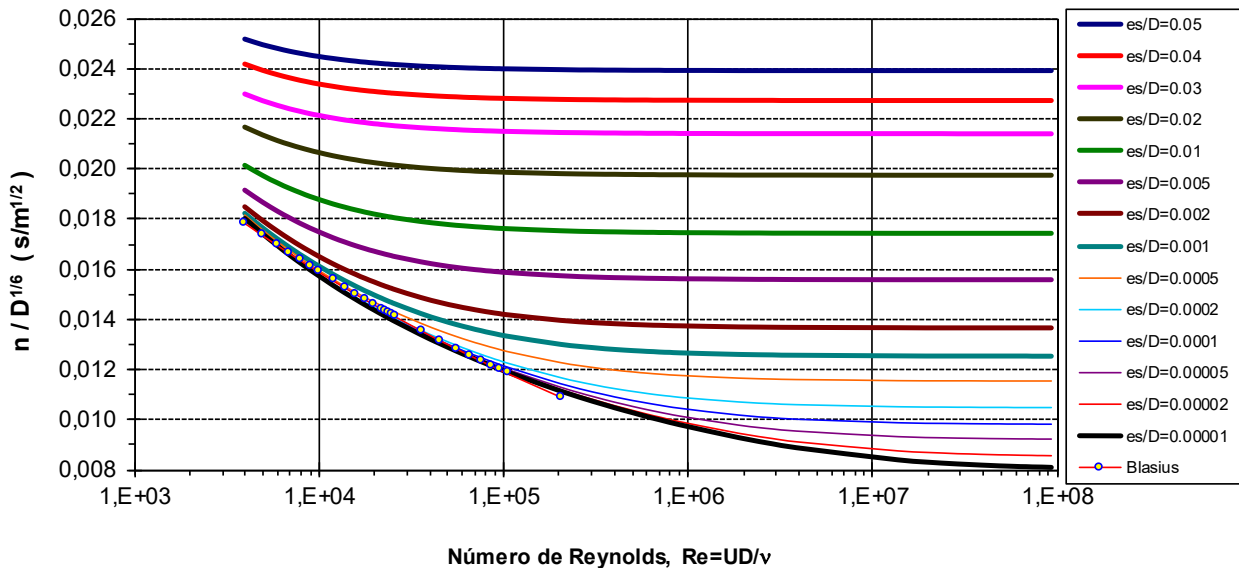


Figura 13. Representación gráfica de la relación entre el coeficiente de rugosidad de Manning n y $D^{1/6}$: $(n/D^{1/6})$ dada por la ec. (75) y por la ec. de Blasius para tubos en régimen hidráulicamente liso.

Consecuentemente, para el flujo turbulento en conductos a presión, utilizando la ecuación de Manning, J se determina con (71) y el coeficiente de rugosidad puede expresarse con la (75). Como mencionado anteriormente, en la práctica la (71) es utilizada para determinar la pérdida de carga continua por fricción a lo largo de un conducto de longitud L :

$$\frac{\tau_o}{\rho g R} L = JL = \frac{6.35 n^2}{D^{4/3}} U^2 L \tag{76}$$

Haciendo referencia a la ec. (3) oportunamente integrada y observando la Figura 1, se tiene:

$$\Delta H_{1,2} = H_1 - H_2 = \frac{6.35 n^2}{D^{4/3}} U^2 L = h_{p1,2} \quad (77)$$

Considerando la ecuación de continuidad (1): $U=Q/A$, con $A=\pi D^2/4$, y sustituyendo U en (71), la J también puede expresarse en función del caudal Q , como:

$$J = 10.294 n^2 \frac{Q^2}{D^{16/3}} \quad (78a)$$

Donde: J (m/m), n (s/m^{1/3}), Q (m³/s), D (m). En general, la pérdida de carga $h_p=J L$, en función de (78a) puede expresarse como:

$$h_p = \frac{10.294 n^2 L}{D^{16/3}} Q^2 \quad (78b)$$

Cabe señalar que la fórmula de Darcy-Weisbach también es empírica en su origen. Cuando Darcy la propuso por primera vez en 1857, no la obtuvo mediante el desarrollo descrito en el apartado 1.5, ni tampoco por vía de análisis dimensional. El concepto racional que se le atribuye, se asocia a la evaluación del factor de fricción f por medio de la fórmula de Colebrook-White (o el ábaco de Moody).

Si bien C y n pueden vincularse con el factor de fricción f , incluyendo de esta manera al número de Reynolds y a la rugosidad relativa en su formulación, el punto débil lo constituye la evaluación de la altura de rugosidad e_s .

En efecto, como se observa en la Tabla 1, para algunos materiales el rango de variación de la altura de rugosidad es muy grande y la incertidumbre en la estimación de su valor se traducirá en un cálculo impreciso del factor de fricción f (y por extensión de C ó n al cual se vinculan).

Consecuentemente, la implementación de una fórmula empírica, utilizando valores tabulados de coeficientes de rugosidad globales, puede arrojar resultados tan plausibles como la fórmula de Colebrook-White o el ábaco de Moody, a pesar de no incluir a la viscosidad como variable. El material que constituye la tubería estará representado en las fórmulas, pero no por su altura de rugosidad absoluta sino por coeficientes de rugosidad globales.

Desde el punto de vista de la sencillez de los cálculos, esto es importante sobre todo para el cálculo de redes complejas, ya que cualquier variable puede ser despejada en función de las demás; contrariamente a lo que sucede con la fórmula de Colebrook-White (o el ábaco de Moody) donde para resolver algunos problemas, es necesario realizar cálculos iterativos por predicción-corrección, como veremos en el próximo apartado.

Por lo tanto, dadas las incertezas mencionadas en la determinación de e_s , en la práctica es común adoptar un valor de n desde Tablas de acuerdo al tipo de material que constituye el conducto. En la Tabla 2 se presentan los valores del coeficiente de rugosidad de Manning para algunos materiales.

Tabla 2. Coeficiente de rugosidad de Manning para algunos tipos de materiales.

Material	n (s/m ^{1/3})
Acero comercial soldado	0.010 – 0.013
Acero remachado	0.015 – 0.016
Metal corrugado	0.020 - 0.024
Tubos vitrificados	0.011 – 0.013
Hierro fundido (nuevo sin revestimiento)	0.012 - 0.013
Hormigón, encofrados metálicos acabado interior liso (D>1.25 m)	0.010 – 0.011
Hormigón, bien encofrado y pulido interior (D>1.25 m)	0.011 – 0.013
Hormigón, encofrado de madera acabado interior rugoso (D>1.25 m)	0.015 - 0.017
Hormigón, tubos premoldeados con juntas macho-campana (D>0.8 m)	0.011 – 0.012
Hormigón, tubos premoldeados con juntas toscas (D< 0.5 m)	0.014 – 0.017
Hormigón, tubos premoldeados con juntas toscas (D> 0.5 m)	0.013 - 0.014
Plástico PVC	0.009 – 0.013
Túneles perforados en roca (sin revestir)	0.024 - 0.040

El coeficiente de conducción de Chezy, en función del coeficiente de rugosidad de Manning dado por Tabla 2, puede obtenerse a partir de (65) y (74) como: $C = D^{1/6}/1.26 n$.

2.5.6.3 Fórmula de Hazen y Williams

La fórmula empírica propuesta por Hazen y Williams (1933) presenta una estructura similar a las fórmulas de Chezy y de Manning descriptas anteriormente:

$$U = 0.849 C_{hw} R^{0.63} J^{0.54} \quad (79)$$

Donde C_{hw} : coeficiente de Hazen-Williams, y las otras variables ya fueron definidas, siendo sus unidades: U (m/s), R (m), J (m/m). La (79) es válida para agua, $50 \text{ mm} < D < 3500 \text{ mm}$. Despejando J de (79), previo reemplazo de $R=D/4$, se obtiene:

$$J = 6.824 \left(\frac{U}{C_{hw} D^{0.63}} \right)^{1.852} \quad (80)$$

Considerando la ecuación de continuidad (1): $U=Q/A$, con $A=\pi D^2/4$, y sustituyendo U en (80), la J también puede expresarse en función del caudal Q, como:

$$J = \frac{10.67}{C_{hw}^{1.852} D^{4.87}} Q^{1.852} \quad (81)$$

Haciendo referencia a la ec. (3), la pérdida de energía utilizando la (81) es:

$$\Delta H_{1,2} = H_1 - H_2 = \frac{10.67}{C_{hw}^{1.852} D^{4.87}} Q^{1.852} L = h_{p1,2} \quad (82)$$

El coeficiente C_{hw} debe considerarse como un coeficiente de conducción, análogo al C de Chezy. En la Tabla 3 se presentan algunos valores sugeridos de C_{hw} para distintos materiales.

Tabla 3. Valores del coeficiente de Hazen-Williams para algunos materiales.

Material	C_{hw}
Acero sin costura (nuevo)	140 - 150
Acero comercial soldado	130
Acero remachado	110
Acero corrugado	60
Asbesto Cemento (nuevo)	135
Cobre y Latón	130 - 140
Cerámica, tubos vitrificados	140
Hierro fundido (nuevo)	130
Hierro fundido (10 años)	107 - 113
Hierro fundido (20 años)	89 - 100
Hierro fundido (30 años)	75 - 90
Hierro fundido (40 años)	64 - 83
Hierro dúctil, Hierro galvanizado	120
Hormigón acabado interior liso	130
Hormigón acabado común	120
Plomo	130 - 140
Poliéster reforzado con fibra de vidrio	140 - 150
PVC, CPVC	150

2.6 Resolución de problemas simples

Los problemas simples sirven de base para la solución de problemas más complejos. Por ejemplo, en forma sintética, los tres problemas simples que pueden plantearse son: a) determinar la pérdida de carga h_p (o la potencia requerida para elevar un Q), b) determinar el diámetro D (diseño de la tubería), c) determinar el caudal Q (verificación de diseño). Utilizando la teoría racional, las soluciones serían:

a) Determinar la pérdida de carga h_p (ver Figura 1), conociendo: L , v , e_s , D , Q , y por lo tanto, $U=Q/A$.

- 1) Calcular $Re=UD/v$ y la rugosidad relativa e_s/D .
- 2) Calcular f (alternativamente C ó n con el cual se vinculan).
- 3) Calcular J .

4) Calcular la pérdida de carga $h_p=JL$.

Si se parte de la condición conocida H_1 entonces se puede determinar la energía $H_2=H_1-h_{p1,2}$.

b) Determinar D , conociendo las demás variables en juego (ver Figura 1). Se debe realizar un cálculo iterativo de predicción–corrección hasta convergencia.

- 1) Proponer un valor de D . Al conocer Q se puede limitar la velocidad a un valor plausible $U=2.1\pm 0.9$ (m/s) (USACE, 2002). Con la ecuación de continuidad estimar el primer valor aproximado de D .
- 2) Calcular: $U=4Q/\pi D^2$, $Re=UD/v$ y e_s/D .
- 3) Calcular f (C ó n).
- 4) Despejar D de la expresión de J correspondiente a la ec. de resistencia utilizada.
- 5) Utilizar el valor de D calculado en 4) y recomenzar el cálculo desde 2) hasta convergencia.

c) Determinar Q o U, conociendo las demás variables en juego (ver Figura 1). Se debe realizar un cálculo iterativo de predicción–corrección hasta convergencia.

- 1) Proponer un valor de f , C ó n (dado que e_s y D son datos, suponer contorno hidráulicamente rugoso como primer valor).
- 2) Despejar Q de la expresión de J correspondiente a la ec. de resistencia utilizada.
- 3) Calcular: $U=4Q/\pi D^2$, $Re=UD/\nu$ y e_s/D .
- 4) Calcular f (C ó n), incorporando la dependencia de Re .
- 5) Utilizar el valor de f , C ó n calculado en 4) y recomenzar el cálculo desde 2) hasta convergencia.

Si en lugar de calcular los coeficientes C de Chezy o n de Manning con las ecuaciones (66) y (75) respectivamente, los mismos se adoptan de Tablas de acuerdo al tipo de material independientemente de Re , los tres problemas descritos tienen solución directa utilizando la ec. (69a) para Chezy y la ec. (78a) para Manning.

Análogamente, la resolución de los problemas simples utilizando la fórmula de Hazen-Williams, se realiza en forma directa con la ec. (81), ya que en este caso el coeficiente C_{hw} se adopta de Tabla de acuerdo al material de la tubería independientemente de Re .

2.7 Pérdidas de carga localizadas

Si en una conducción a presión no existen pérdidas locales, la pérdida de carga es: $h_p=h_c$. Es decir, es igual a la pérdida de carga continua por fricción descrita precedentemente, que puede expresarse como: $h_c=J L$.

Las pérdidas localizadas (h_L) se presentan en secciones determinadas de la conducción y se asocian a: i) la entrada desde un reservorio de almacenamiento; ii) la inserción de elementos de alineamiento de la tubería y accesorios de control (codos, curvas, uniones, bifurcaciones, válvulas, etc.); iii) los cambios bruscos de dimensiones de la sección de los tubos por tramos, es decir, aumento de D (expansión) o disminución de D (contracción) y iv) la salida (descarga ahogada en otro reservorio o libre a la atmósfera).

La influencia de las pérdidas locales, en la pérdida de carga total, depende de la longitud de la tubería y de la cantidad y tipo de singularidades y/o accesorios insertados en la conducción. Cuando estas son importantes, la pérdida de carga o energía se expresa globalmente como: $h_p=h_c+h_L$.

Las pérdidas de carga localizadas son proporcionales a la altura de velocidad (energía cinética por unidad de peso del fluido):

$$h_L = K \frac{U^2}{2g} \quad (83)$$

Donde el coeficiente K para distintos tipos de singularidades y/o accesorios se presenta en la Tabla 4.

Tabla 4. Algunos valores característicos del coeficiente K.

Singularidad	Descripción	K
Entrada (r _c : radio curva emb.)	Sin perfilar (brusca, aristas vivas)	0.5
	Descarga en el interior de otro tubo	1
	Bien perfilada (redondeada) r _c /D ≥ 0.1	0.07 – 0.05
Salida	A reservorio	1
	Libre a la atmósfera	0
Contracción (D ₂ <D ₁)	Brusca	0.5 [1- (D ₂ /D ₁) ⁴]
	Gradual (φ<22°)	0.8 (sen φ) [1- (D ₂ /D ₁) ²]
	Gradual (φ>22°)	0.5 (sen φ) ^{0.5} [1- (D ₂ /D ₁) ²]
Expansión (D ₂ >D ₁)	Brusca	[1- (D ₁ /D ₂) ⁴] ²
	Gradual (φ<22°)	2.6 (sen φ) [1- (D ₁ /D ₂) ²] ²
	Gradual (φ>22°)	[1- (D ₁ /D ₂) ²] ²
Codo	90° (radio corto)	0.9
	90° (radio grande)	0.6
	45° (radio corto)	0.45
	45° (radio grande)	0.35
T	Salida lateral	1.8
	Entrada lateral	0.6
Válvula	Esférica (totalmente abierta)	10
	Angulo recto (totalmente abierta)	5
	Retención (totalmente abierta)	2
	Compuerta (3/4 abierta)	1.15
	Compuerta (1/2 abierta)	5.6
	Compuerta (1/4 abierta)	24
	Mariposa (totalmente abierta)	0

Considerando que en el tramo de longitud L existan más de una singularidad y/o accesorio, y se computan las pérdidas de entrada y salida, etc., el coeficiente K total se obtiene mediante la sumatoria de los K individuales. Por lo tanto, utilizando, por ejemplo, la ec. (59) de Darcy-Weisbach para J, la pérdida de carga, continua más localizadas, se expresa como:

$$h_p = \left(\frac{f L}{D} + \sum K \right) \frac{U^2}{2g} \tag{84a}$$

Reemplazando f en (84a) por la relación que lo vincula a C y n (relaciones (65) y (74) respectivamente), se obtiene la pérdida de carga total expresada en función del coeficiente de Chezy y del coeficiente de rugosidad de Manning:

$$h_p = \left(\frac{8g}{C^2} \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{U^2}{2g} \tag{84b}$$

$$h_p = \left(\frac{12.7g}{D^{4/3}} n^2 L + \sum K \right) \frac{U^2}{2g} \tag{84c}$$

O, mediante la fórmula de Hazen y Williams (80), se obtiene:

$$h_p = \frac{6.824 L}{C_{hw}^{1.852} D^{1.167}} U^{1.852} + \frac{\sum K}{2g} U^2 \quad (84d)$$

Alternativamente, para calcular las pérdidas locales, se puede utilizar el método de la *longitud equivalente*. El mismo consiste en suponer que la magnitud de las mismas es igual a la producida por la fricción continua en un tramo de tubería recta cuya longitud ficticia se denomina *longitud equivalente*, L_e . Es decir, la pérdida continua por fricción en un tramo de tubería L_e produce una pérdida igual a la local (singularidad o accesorio). Por lo tanto:

$$h_L = J L_e \quad (85)$$

Igualando (85) con (83) y expresando J mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$K \frac{U^2}{2g} = L_e \frac{f U^2}{D 2g} \quad (86)$$

De donde se deduce que:

$$L_e = \frac{D K}{f} \quad (87)$$

Considerando que en el tramo de longitud L existan más de una singularidad y/o accesorio, y se computan las pérdidas de entrada y salida, etc., la longitud equivalente es:

$$L_e = \frac{D \sum K}{f} \quad (88)$$

El método de la longitud equivalente simplifica los cálculos, ya que la pérdida de carga total se puede expresar como:

$$h_p = J(L + L_e) \quad (89)$$

Donde L_e (m) se puede determinar con (88), en función del factor de fricción f de Darcy-Weisbach, o utilizando las ecuaciones de resistencia al flujo de Chezy y de Manning, como:

$$L_e = \frac{D C^2 \sum K}{8g} \quad , \quad L_e = \frac{D^{4/3} \sum K}{12.7 g n^2} \quad (90a), (90b)$$

Donde n ($s/m^{1/3}$): coeficiente de rugosidad de Manning, C ($m^{1/2}/s$): coeficiente de conducción de Chezy, D : diámetro (m), g : aceleración de la gravedad (m/s^2).

Para la fórmula de Hazen y Williams, la longitud equivalente puede determinarse mediante la siguiente expresión simplificada (Guaycochea, 1995):

$$L_e = \frac{D^{1.15} C_{hw}^{1.85} \sum K}{120} \quad (90c)$$

Donde C_{hw} es el coeficiente de Hazen-Williams (Tabla 3), D : diámetro (m), L_e (m).

2.8 Conducto que conecta dos reservorios

Un caso simple de analizar es el representado por un conducto único, alimentado en el extremo aguas arriba por un reservorio con superficie libre y que descarga en otro reservorio con superficie libre, como esquematizado en la Figura 14. El conducto es de diámetro D constante, tiene una longitud determinada L y no existen accesorios que producen pérdidas de energía localizadas, solo se contemplan como pérdidas localizadas las de entrada y salida.

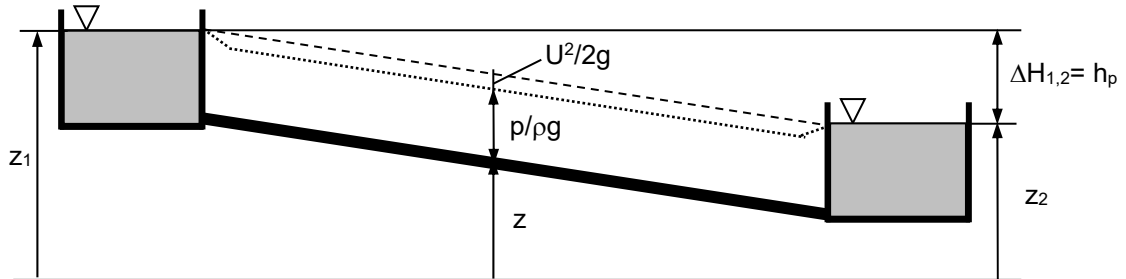


Figura 14. Conducto de diámetro constante que conecta dos reservorios.

Las ecuaciones básicas son la de energía y la de continuidad. Las energías en los reservorios 1 y 2 son totalmente energías de posición z , es decir: $\Delta H_{1,2} = \Delta z_{1,2}$, denominada *carga disponible* que permite transportar el caudal Q ; la cual es igual a la pérdida de carga h_p . Por lo tanto, utilizando por ejemplo la (84c), con n adoptado de Tabla 2:

$$\Delta H_{1,2} = h_p = \left(\frac{12.7 g n^2}{D^{4/3}} L + \sum K \right) \frac{U^2}{2g} \quad (91)$$

Despejando de (91) la velocidad U y utilizando la ecuación de continuidad: $Q = U A = U (\pi D^2/4)$, se obtiene el caudal Q como (se omiten los subíndices 1 y 2 en ΔH):

$$Q = \mu \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g \Delta H} \quad (92)$$

donde el coeficiente de descarga μ contiene las pérdidas continuas y las pérdidas localizadas de entrada (K_e) y salida (K_s):

$$\mu = \left(\frac{12.7 g n^2}{D^{4/3}} L + K_e + K_s \right)^{-1} \quad (93)$$

Es evidente la conveniencia de materializar constructivamente emboaduras bien perfiladas (redondeadas) para disminuir la pérdida de entrada (ver valores de K en Tabla 4) y, consecuentemente, aumentar la eficiencia de la conducción vía el incremento del valor del coeficiente de descarga μ . En el mismo sentido, también ayuda a incrementar μ , materializar una superficie lisa para disminuir el valor de la pérdida continua por fricción (disminución de n).

En conducciones a presión de longitud L de algunos kilómetros, como, por ejemplo, los acueductos; las pérdidas localizadas de entrada y salida pueden, con buena aproximación, ser despreciadas. En efecto, mediante la (90b), adoptando un coeficiente de rugosidad de Manning $n=0.011 \text{ s/m}^{1/3}$, para diámetros comprendidos entre 0.3 m - 1 m; en ambos casos con entrada redondeada ($K_e=0.05$) y salida a otro reservorio ($K_s=1$); la longitud equivalente L_e varía aproximadamente entre $50 D$ y $70 D$ respectivamente. Es decir, se trata de valores de L_e muy pequeños comparados con la longitud L de algunos kilómetros ($L_e \ll L$), por lo cual: $L+L_e \approx L$.

Por otra parte, en tales casos, la altura de velocidad en el conducto $U^2/2g$ es muy pequeña comparada con el nivel piezométrico $h^*=z + p/\rho g$. Por lo tanto, la línea piezométrica se confunde con la línea de energía. Vale recordar, además, que estamos considerando flujo permanente y uniforme, por lo cual las pendientes de ambas líneas (energía y piezométrica) son iguales.

2.8.1 Conductos acoplados en serie

En algunos casos puede ser conveniente materializar la conducción mediante *conductos acoplados en serie*, con diámetros D_i variables por tramos de distinta longitud L_i . O sea, los conductos en serie, consisten en un conducto único con diámetro variable por tramos (Figura 15).

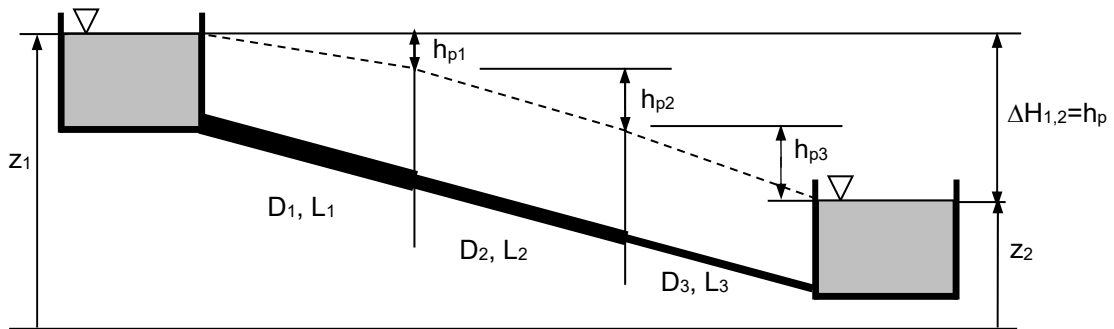


Figura 15. Ejemplo particular de conductos acoplados en serie.

Para flujo permanente y uniforme en cada tramo, como recordado anteriormente, la pendiente de la piezométrica es idéntica a la pendiente de energía J . Por lo tanto, la pérdida de carga $h_{pi}=J_i L_i$, en un tramo genérico i de la tubería, puede expresarse como:

$$h_{pi} = \xi_i Q^m \quad (94)$$

Considerando que en un tramo genérico i , además de las pérdidas continuas por fricción se incluyen las pérdidas locales; utilizando, por ejemplo, la ecuación de resistencia al flujo de Manning (84c), se deduce que: $m=2$ y ξ_i (s^2/m^5) es dado por:

$$\xi_i = \left(\frac{10.294 n^2 L_i}{D_i^{16/3}} + \frac{8}{g \pi^2 D_i^4} \sum_i K_i \right) \quad (95a)$$

donde n ($\text{s/m}^{1/3}$) es el coeficiente de rugosidad de Manning, que en esta instancia lo adoptamos de Tabla 2.

Análogamente, si se aplica la ecuación de Hazen-Williams, utilizando el concepto de longitud equivalente, tendríamos que $m=1.852$ y ξ_i es dado por:

$$\xi_i = \frac{10.67}{C_{hw}^{1.852} D^{4.87}} (L_i + L_{ei}) \quad (95b)$$

donde la longitud equivalente para el tramo i (L_{ei}) es evaluada mediante la (90c) y el coeficiente C_{hw} se determina con la Tabla 3.

La pérdida de carga global $\Delta H_{1,2}$, es igual a la sumatoria de las pérdidas de carga parciales asociadas a cada tramo, por lo tanto (se omiten los subíndices 1 y 2, en ΔH):

$$\Delta H = h_p = \sum_i h_{pi} = \sum_i \xi_i Q^m \quad (96)$$

Para una determinada carga disponible ΔH y conociendo las demás variables en juego, el caudal Q transportado por el sistema de conductos en serie es:

$$Q = \left(\frac{\Delta H}{\sum_i \xi_i} \right)^{1/m} \quad (97)$$

Si se conoce la carga disponible ΔH y el caudal Q a transportar, es posible adoptar las longitudes de cada tramo y determinar los diámetros de cada tramo. A tales efectos, es necesario referenciar previamente los diámetros al valor del diámetro de referencia especificado para un conducto en particular y resolver la (96) o la (97) por tanteos. En última instancia se deben adoptar los diámetros comerciales más próximos a los calculados y recalcular Q .

2.8.2 Conductos acoplados en paralelo

Un sistema de *conductos acoplados en paralelo* está constituido por dos o más conductos conectados como se observa en la Figura 16.

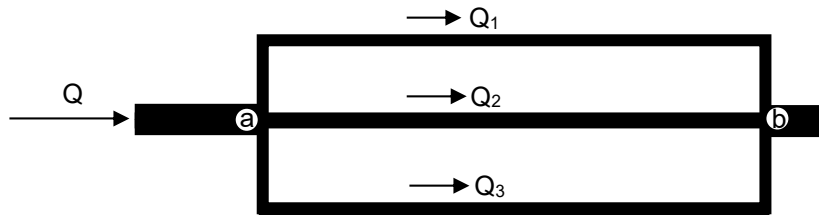


Figura 16. Ejemplo particular de conductos acoplados en paralelo.

En los conductos acoplados en serie (apartado anterior), el caudal Q es igual para todos los tramos y las pérdidas de carga h_{pi} de cada tramo son acumulativas para brindar la pérdida de carga global h_p .

Por el contrario, en los conductos acoplados en paralelo, la pérdida de carga global h_p entre la ramificación (aguas arriba) y la confluencia (aguas abajo) es igual para todos los tramos, mientras que los caudales Q_i en los tramos son acumulativos para satisfacer la ecuación de continuidad en los nodos.

Aplicando la ecuación de resistencia al flujo seleccionada y haciendo referencia a la Figura 16, tendremos que la pérdida de carga entre a y b, igual para los tres tramos, es:

$$h_{p\ a,b} = \xi_i Q_i^m \quad (98)$$

donde $i=1,2,3$ y ξ_i es dado por: la (95a) en cuyo caso $m=2$, o (95b) con $m=1.852$.

Por otra parte, la continuidad en el nodo aguas arriba establece que el caudal Q que entra al nodo es igual a la suma de los caudales que salen del mismo:

$$Q = \sum_i Q_i \quad (99)$$

El problema más interesante consiste en determinar la pérdida de carga entre a y b ($h_{p\ a,b}$) conociendo el caudal Q que ingresa al nodo aguas arriba. En tal caso, no se conoce como se distribuye el caudal Q en los tramos y tampoco la pérdida de carga global causada por los mismos.

Para resolver el problema despejamos el caudal de cada tramo de la ec. (98) (se omiten los subíndices a y b en h_p):

$$Q_i = \xi_i^{-1/m} h_p^{1/m} \quad (100)$$

Sustituyendo (100) en la ecuación de continuidad (99):

$$Q = h_p^{1/m} \sum_i \xi_i^{-1/m} \quad (101)$$

Consecuentemente, despejando la incógnita h_p , se obtiene:

$$h_p = \left(\frac{Q}{\sum_i \xi_i^{-1/m}} \right)^m \quad (102)$$

Luego los caudales Q_i de cada tramo, se obtienen sustituyendo (102) en (100):

$$Q_i = \frac{\xi_i^{-1/m}}{\sum_i \xi_i^{-1/m}} Q \quad (103)$$

Es necesario señalar que resulta más eficiente y económico, diseñar un sistema con un único conducto de diámetro D , que con dos o más conductos en paralelo con diámetros menores.

2.8.3 Consideraciones sobre la altimetría de la conducción a presión

Un conducto de diámetro D que conecta dos reservorios, por condiciones topográficas, puede tener distintas posiciones altimétricas en su recorrido, sin modificar sustancialmente su longitud L , como se observa en la Figura 17. Se pueden distinguir varios casos, de acuerdo a la posición altimétrica de la tubería respecto a la línea piezométrica relativa, a la línea hidrostática relativa y a la línea piezométrica absoluta.

La línea piezométrica relativa, como es conocido, se vincula con la presión $p/\rho g$, que rige en el conducto, relativa a la presión atmosférica $p_{at}/\rho g$.

La línea piezométrica absoluta se asocia a la presión $(p+p_{at})/\rho g$, es decir, al valor absoluto de la presión $p_{abs}/\rho g$.

Por lo tanto, la piezométrica absoluta se obtiene desplazando la línea piezométrica relativa paralelamente a ella misma en un valor de $p_{at}/\rho g$. En correspondencia tendremos, la línea hidrostática relativa, representada por la horizontal que coincide con el nivel del reservorio aguas arriba y la línea hidrostática absoluta (ver Figura 17).

Cabe recordar que, la línea piezométrica relativa se confunde con la línea de energía ya que usualmente: $U^2/2g \ll h^*=z + p/\rho g$.

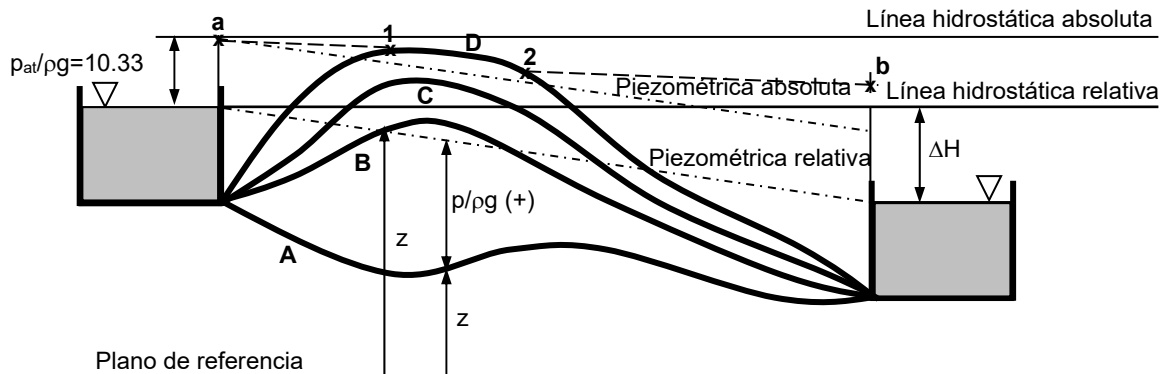


Figura 17. Posiciones altimétricas de un conducto a presión que conecta dos reservorios.

Caso A

En este caso el conducto se posiciona en todo su recorrido por debajo de la línea piezométrica relativa. La presión es siempre positiva, es decir, mayor que la presión atmosférica. Es la mejor posición para su funcionamiento, ya que el flujo es regular y el caudal real es igual al caudal calculado de acuerdo al desnivel de energía ΔH . En los puntos más elevados del recorrido deben ser instaladas válvulas de expulsión de aire que posibiliten la salida del aire acumulado. En este caso, dichas válvulas funcionarán bien, porque la presión en el interior del conducto siempre será mayor que la atmosférica. En los puntos más bajos del conducto, deben ser previstas descargas con válvulas para limpieza de la tubería.

Caso B

En el caso B, un tramo del conducto supera la línea piezométrica relativa, pero se mantiene debajo de la línea hidrostática relativa. En los puntos donde el conducto corta la piezométrica relativa, la presión es igual a la atmosférica. Mientras que, en el tramo que queda por encima de dicha línea, la presión absoluta es positiva $p_{abs}/\rho g (+)$, pero la presión que rige en el conducto es negativa $p/\rho g (-)$, es decir, dicho tramo está en depresión. Si se produjera una fisura en el conducto podría entrar aire, perturbando el flujo, el cual no sería regular como en el caso anterior, sino que tendría carácter irregular o intermitente debido justamente a la incorporación de aire. Además, existiría el peligro de que ingresarán contaminantes externos y contaminarán el agua transportada. Más allá de esto, aún si el conducto fuera perfectamente estanco, en el tramo en depresión, podría liberarse el mismo aire disuelto en el agua, creando bolsas de acumulación de aire en los puntos más elevados del conducto, lo cual igualmente perturbaría la condición de flujo regular.

Caso C

En el caso C un tramo del conducto se posiciona por encima de la línea hidrostática relativa manteniéndose debajo de la piezométrica absoluta. El funcionamiento es similar al anterior (caso B), aunque más irregular e intermitente. Sin embargo, como el conducto supera la línea hidrostática relativa, el flujo no puede establecerse naturalmente porque el agua no llena completamente el conducto y el mismo funciona como un "sifón invertido". Si en dicho tramo se ejerciera la aspiración del aire interior, el conducto podría ser "cebado" y el flujo se establecería naturalmente. Cuando el conducto se posiciona cerca de la línea piezométrica absoluta, es necesario controlar que la presión absoluta sea mayor que la presión de vapor, de lo contrario, se produciría la cavitación.

En los tres casos anteriores el caudal Q no cambia, solo las condiciones de funcionamiento debido a los diferentes valores de la presión.

Caso D

En este caso un tramo del conducto supera la línea piezométrica absoluta manteniéndose debajo de la línea hidrostática absoluta. Como no se puede tener una presión absoluta inferior a cero (negativa), se modifica la piezométrica absoluta. Es decir, el conducto adopta una piezométrica absoluta menor a la precedente e igual a la máxima compatible con su posición. La piezométrica que adopta es dada por la línea **a-1**, tangente al punto **1** (ver Figura 17). La piezométrica del último tramo se obtiene trazando, desde el punto **b**, la paralela a la línea **a-1** hasta intersectar el conducto en el punto **2** (ver Figura 17). El caudal Q' resulta obviamente menor que el caudal Q transportado por los conductos analizados en los casos anteriores.

La presión va disminuyendo desde la embocadura **a** hasta hacerse cero en el punto **1** (atención con la presión de vapor) y va aumentando desde el punto **2** hasta la salida **b**, en el tramo **1-2** la presión es nula. Consecuentemente, en el tramo **1-2** el caudal Q' es transportado por gravedad ocupando parcialmente la sección del conducto. Una posición altimétrica del conducto, como la descrita en este caso, no es recomendable.

Finalmente, si la posición altimétrica del conducto es tal que supera la línea hidrostática absoluta, no se puede establecer el flujo entre los dos reservorios, al menos que se introduzca energía externa aguas arriba con una bomba. Igualmente, se debe proveer energía externa, en

todos los casos donde no se cumplan los requerimientos de presión relativa mínima en los conductos.

Por otra parte, es evidente que, si el nivel de la superficie libre del reservorio aguas arriba es menor que el correspondiente nivel del reservorio aguas abajo, también es necesario proveer energía externa aguas arriba mediante una bomba.

2.8.4 Energía externa provista en conducciones a presión mediante una bomba

Cuando sea necesario introducir una bomba para elevar un caudal requerido Q^* desde un reservorio a otro, la bomba no solo debe elevar el caudal Q^* a una altura geométrica H_g (diferencia de energía de posición ΔH) sino que, además, debe vencer las pérdidas de energía $h_{p\ asp}$ en el conducto de aspiración y $h_{p\ imp}$ en el conducto de impulsión. En la Figura 18 se observa un caso particular, entre los diferentes casos posibles, de la instalación de una bomba para elevar un caudal Q^* .

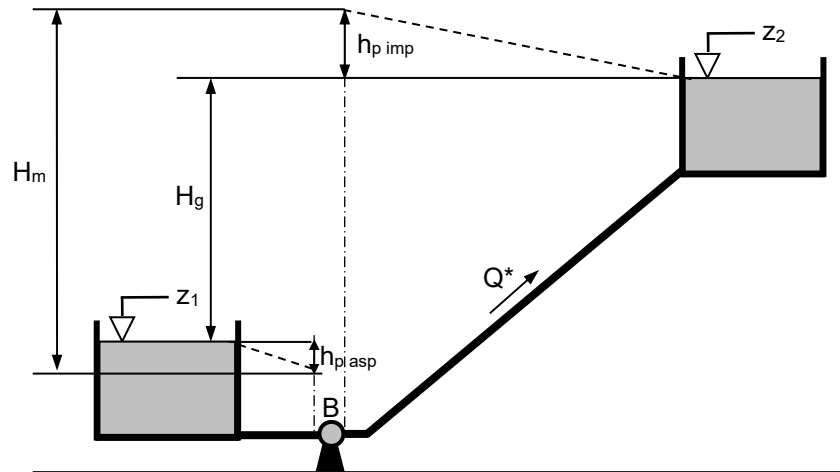


Figura 18. Representación esquemática de la inserción de una bomba para elevar un caudal.

Por lo tanto, la bomba deberá proveer una altura manométrica H_m , denominada altura manométrica de bombeo, igual a la altura geométrica H_g más las pérdidas de energía globales $h_p = h_{p\ asp} + h_{p\ imp}$:

$$H_m = H_g + h_p \quad (104)$$

Debido a que H_g es constante para una determinada instalación y las pérdidas de carga globales varían con Q^2 (Darcy-Weisbach, Chezy y Manning) o con $Q^{1.852}$ (Hazen-Williams); conocida la curva característica de la bomba $H_m(Q)$ se pueden superponer, en el mismo diagrama H_m-Q , las curvas $h_p(Q)$ denominadas curvas de resistencia del sistema, considerando distintos diámetros comerciales (ver Figura 19).

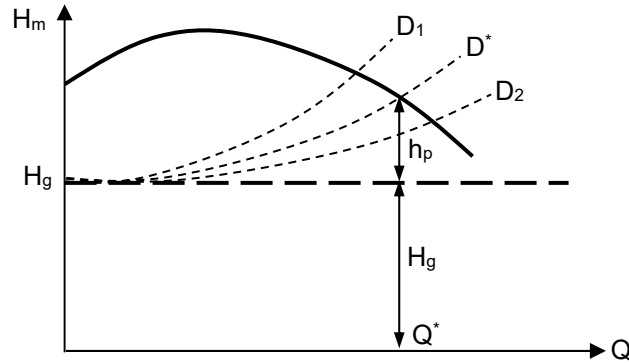


Figura 19. Representación conjunta de: curva característica de la bomba $H_m(Q)$ y curvas de resistencia $h_p(Q)$.

De esta manera, se establece el diámetro D^* necesario para elevar el caudal requerido Q^* , el cual debe ubicarse en la zona del máximo rendimiento de la bomba.

2.9 Sistemas complejos de tuberías: nodos hidráulicos y redes de distribución

Los sistemas complejos de tuberías están formados por dos o más conductos o líneas que se interconectan en nodos hidráulicos para constituir una red hidráulica de distribución. Una red hidráulica tiene como objetivo distribuir caudales, y para el caso de conducciones forzadas, con una presión determinada. Las redes de distribución forzadas, por lo tanto, constituyen un conjunto de conductos interconectados a través de los cuales se transporta agua a presión a los diferentes puntos de consumo. Pueden ser abiertas o ramificadas (Figura 20a), cerradas formando mallas (Figura 20b) o mixtas ramificadas-malladas (Figura 20c).

Las redes abiertas se usan, por ejemplo, en acueductos de pequeñas poblaciones y están constituidas por uno o más ramales troncales y una serie de ramificaciones que terminan en puntos ciegos u otros reservorios.

Las redes cerradas o malladas forman una retícula con circuitos cerrados. El objetivo es tener un sistema redundante de tuberías para que cualquier zona dentro del área cubierta por el sistema pueda ser alcanzada simultáneamente por más de una tubería, aumentando así la confiabilidad del abastecimiento. Este tipo de red conforma el sistema de suministro de agua potable dentro del esquema de acueducto de una población.

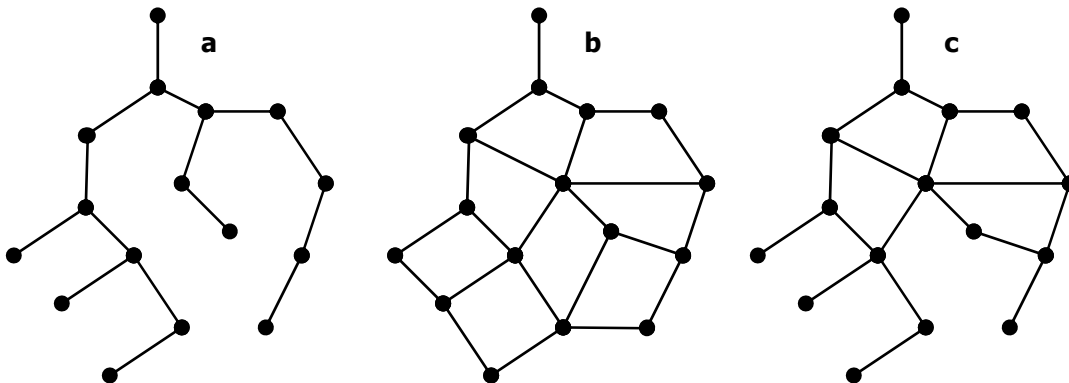


Figura 20. Sistemas complejos de red de tuberías: a) Abierta o Ramificada, b) Cerrada o Mallada, c) Mixta.

2.9.1 Nodo hidráulico: conductos que conectan tres reservorios

Un ejemplo simple de red abierta o ramificada, lo constituye el sistema de conductos ramificados que conectan tres reservorios, como representado en la Figura 21. Los tres conductos que salen de los reservorios se conectan en un nodo hidráulico.

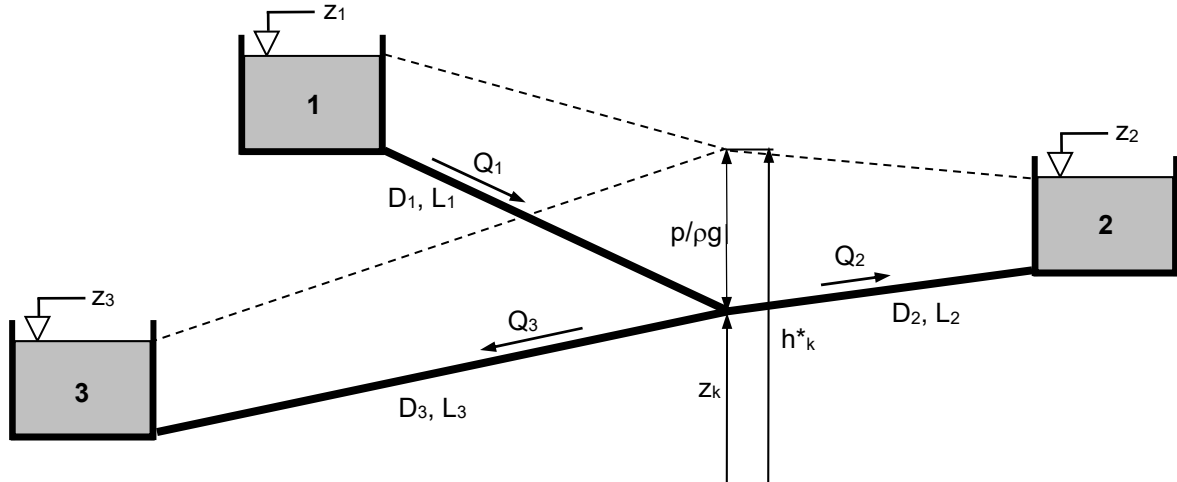


Figura 21. Representación esquemática de un sistema de conductos ramificados que conectan tres reservorios.

Para resolver el problema se utiliza la ecuación de continuidad y la ecuación de resistencia al flujo. La ecuación de continuidad en el nodo k es:

$$\sum_{\text{nodo}} Q_i = 0 \quad (105)$$

donde se considera que los caudales que entran al nodo son positivos (+ Q) y los que salen del mismo son negativos (− Q). Es claro que no pueden existir valores de caudales negativos, solo se trata de una convención para establecer como se reparten los caudales en el nodo.

La ecuación de resistencia al flujo brinda la pérdida de carga en flujo permanente y uniforme para cada conducto i:

$$h_{pi} = \xi_i Q_i^m \quad (106)$$

Donde $i=1,2,3$. El coeficiente ξ_i y el exponente m dependen de la ecuación de resistencia adoptada. Por ejemplo, para la ecuación de Manning: $m=2$ y ξ_i dado por la (95a); para la ecuación de Hazen-Williams: $m=1.852$ y ξ_i dado por la (95b).

Conocidos los niveles del agua z_i en los reservorios, las características de los conductos (diámetros, materiales, longitudes) y las eventuales singularidades y/o accesorios en cada conducto; quedan definidas cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Las ecuaciones son tres para las pérdidas de carga en cada conducto y una ecuación de continuidad en el nodo. Las incógnitas son los tres caudales Q_i para cada conducto y el nivel piezométrico en el nodo h^*_k .

Es evidente que, si el nivel piezométrico en el nodo $h_k^* > z_2$ (nivel del agua en el reservorio intermedio), tal como representado en la Figura 21, el reservorio 1 alimentará a los reservorios 2 y 3. La continuidad en el nodo será: $Q_1 = Q_2 + Q_3$. Por otra parte, si $h_k^* < z_2$, entonces los reservorios 1 y 2 alimentarán al reservorio 3, es decir: $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Por lo tanto, se debe proponer el valor del nivel piezométrico en el nodo, determinar los caudales y verificar la continuidad en el nodo.

Proponiendo el valor de h_k^* se calcula:

$$z_i - h_k^* = h_{pi} \begin{cases} > 0 \Rightarrow +Q \text{ (positivo : entra al nodo)} \\ < 0 \Rightarrow -Q \text{ (negativo : sale del nodo)} \end{cases} \quad (107)$$

Despejando los Q_i de la (106), los caudales en cada conducto se determinan como:

$$Q_i = \left(\frac{|h_{pi}|}{\xi_i} \right)^{1/m} \quad (108)$$

Y se le asignan los signos correspondientes según (107), es decir, de acuerdo a los signos que adopta: $h_{pi} = z_i - h_k^*$. Luego se aplica la (105) que brinda la continuidad en el nodo. Si la continuidad no es satisfecha, se debe proceder por tanteos, modificando el valor del nivel piezométrico en el nodo h_k^* , hasta que la misma sea satisfecha.

De la misma manera, excepto por la mayor complicación, se procede en el caso de dos o más nodos o de un número mayor de reservorios.

El problema inverso, es decir, el de determinar los diámetros, para una preestablecida distribución de caudales; presenta también cuatro incógnitas: los tres diámetros y el nivel piezométrico en el nodo. Nuevamente se tienen cuatro ecuaciones, por lo tanto, el problema es cerrado. A cada valor propuesto del nivel piezométrico en el nodo, le corresponde una terna de diámetros diferente. Entre esas puede seleccionarse aquella terna que brinde el mínimo costo global de los conductos.

2.9.2 Redes de distribución cerradas

Las redes cerradas están constituidas por mallas que forman una retícula con circuitos cerrados, tal como se representa en la Figura 22.

El método de Cross (1936), para redes malladas cerradas, con corrección de caudales en las mallas (o circuitos), se basa en predecir los caudales en cada uno de los tubos de la red e ir corrigiendo esa predicción hasta que el balance de pérdidas de carga h_p en todos los nodos de las mallas M (o circuitos) llegue a valores razonablemente cercanos a cero (ver Figura 22). Dado que todas las características de las tuberías como diámetros, longitudes, materiales y accesorios se conocen, el método consiste en un procedimiento de verificación de diseño.

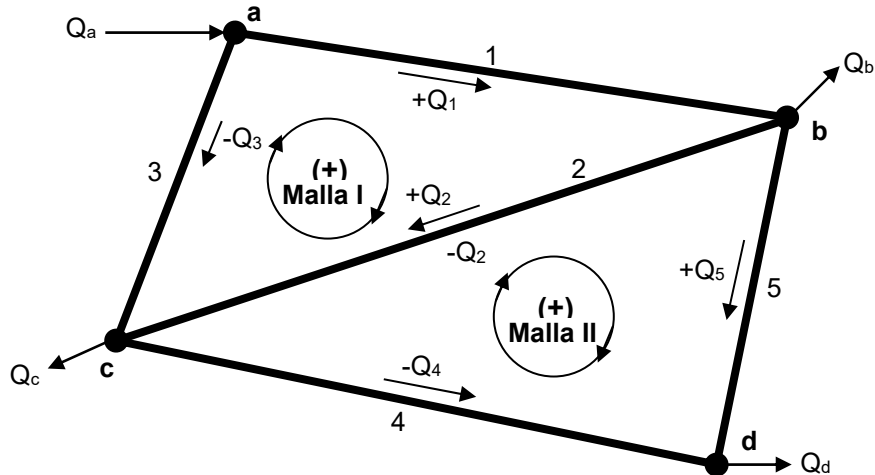


Figura 22. Sistema de red de tuberías en mallas.

La ecuación de continuidad en un nodo $k=a, b, c, d, \dots$, etc.; establece que:

$$Q_k + \sum_k Q_i = 0 \quad (109)$$

Donde Q_k es el caudal externo dato que entra (positivo) o sale (negativo) del nodo (Q_a, Q_b , etc., ver Figura 22) y Q_i es el caudal del conducto correspondiente al tramo genérico i que entra (positivo) o sale (negativo) del nodo. Como comentado anteriormente, esta convención clásica de signos se aplica para verificar la continuidad en cada nodo.

Dado que se considera flujo permanente y uniforme en cada tramo, la pendiente de la piezométrica es idéntica a la pendiente de energía J . Por lo tanto, la pérdida de carga $h_{pi} = J_i L_i$, en un tramo genérico i de tubería, puede expresarse como:

$$h_{pi} = \xi_i Q_i^m \quad (110)$$

Donde, para las ecuaciones de resistencia de Darcy-Weisbach, de Chezy y de Manning, el exponente $m=2$. Considerando que en un tramo genérico i se consideren conjuntamente las pérdidas continuas por fricción y las pérdidas locales, de (84a), (84b) y (84c) se deduce que, para esas tres fórmulas, ξ_i (s^2/m^5), es dado respectivamente por:

$$\xi_i = \left(\frac{8 f_i L_i}{g \pi^2 D_i^5} + \frac{8}{g \pi^2 D_i^4} \sum_i K \right) \quad (111a)$$

$$\xi_i = \left(\frac{64 L_i}{\pi^2 C^2 D_i^5} + \frac{8}{g \pi^2 D_i^4} \sum_i K \right) \quad (111b)$$

$$\xi_i = \left(\frac{10.294 n^2 L_i}{D_i^{16/3}} + \frac{8}{g \pi^2 D_i^4} \sum_i K \right) \quad (111c)$$

Alternativamente, si las pérdidas locales se expresan mediante el método de la *longitud equivalente*, entonces la pérdida de carga global resulta: $h_{pi}=J_i (L_i+L_{ei})$. Donde las pendientes J_i y las longitudes equivalentes L_{ei} , se determinan de acuerdo a la ecuación de resistencia adoptada. En tal caso, los ξ_i dados por (111a), (111b) y (111c), se reescriben eliminando el segundo término encerrado en el paréntesis y reemplazando L_i por $L_{ti}= L_i+L_{ei}$. Por otra parte, si se utiliza la fórmula (81) de Hazen-Williams, $m=1.852$ y ξ_i es dado por la (95b).

Asumiendo para las pérdidas de carga h_{pi} valores positivos o negativos, según que los caudales Q_i circulantes sean concordantes o discordantes con el sentido de circulación preestablecido para toda la red y consecuentemente para cada malla (por ejemplo, sentido horario positivo, ver Figura 22); en condiciones de equilibrio para cada malla M o circuito de la red se tendrá que:

$$\sum_M h_{pi} = \sum_M \xi_i Q_i^m = 0 \quad (112)$$

Es decir, en cada malla, el equilibrio se alcanza cuando la sumatoria de las pérdidas de carga h_{pi} de cada tramo, es nula. Es evidente que esto implica el equilibrio de los niveles piezométricos en cada nodo.

Las ecuaciones (109) y (112) aplicadas a todos los N nodos y a todas las M mallas de la red respectivamente, definen un conjunto de $X=M+N-1$ ecuaciones: N-1 ecuaciones de continuidad en los nodos (si se satisface continuidad en N-1 nodos, en el nodo restante queda automáticamente satisfecha) y M ecuaciones de equilibrio de pérdidas de carga en cada malla; que hacen posible resolver el problema.

A tales fines, siguiendo el método de Cross (1936), se predice (asume) para cada malla M, una distribución inicialmente arbitraria de los caudales en los nodos, que satisfaga la ecuación de continuidad (109).

Dado que con esos caudales iniciales o de predicción la (112) no será generalmente satisfecha, se debe aplicar una corrección ΔQ_M , igual para todos los caudales Q_i circulantes en una malla M: $Q_i^c=Q_i+\Delta Q_M$.

Para determinar el valor de la corrección ΔQ_M se plantea:

$$\sum_M \xi_i (Q_i + \Delta Q_M)^m = 0 \quad (113)$$

La (113) puede escribirse como:

$$\sum_M \xi_i Q_i^m \left(1 + \frac{\Delta Q_M}{Q_i} \right)^m = 0 \quad (114)$$

Desarrollando en serie de potencias el término entre paréntesis:

$$\left(1 + \frac{\Delta Q_M}{Q_i} \right)^m = 1 + m \frac{\Delta Q_M}{Q_i} + \frac{m(m-1)}{2!} \left(\frac{\Delta Q_M}{Q_i} \right)^2 + \dots \quad (115)$$

Truncando el desarrollo, es decir, conservando los dos primeros términos de (115), sustituyendo en (114) y arreglando se obtiene:

$$\sum_M \xi_i Q_i^m + m \Delta Q_M \sum_M \xi_i Q_i^{m-1} = 0 \quad (116)$$

Consecuentemente, despejando la incógnita ΔQ_M :

$$\Delta Q_M = - \frac{\sum_M \xi_i Q_i^m}{m \sum_M |\xi_i Q_i^{m-1}|} \quad (117)$$

Es importante conservar el signo de la sumatoria de las pérdidas de carga en cada malla (numerador de (117)), de acuerdo al sentido de circulación de los caudales: $+Q_i$ (positivos, sentido horario) y $-Q_i$ (negativos, sentido antihorario). A tales efectos, la (110) puede expresarse como:

$$h_{pi} = \xi_i Q_i |Q_i|^{m-1} \rightarrow \sum_M h_{pi} = \sum_M \xi_i Q_i |Q_i|^{m-1} \quad (118a),(118b)$$

Por lo tanto, la (117) queda convenientemente expresada como:

$$\Delta Q_M = - \frac{\sum_M \xi_i Q_i |Q_i|^{m-1}}{m \sum_M |\xi_i Q_i^{m-1}|} \quad (119)$$

El significado del signo negativo (-) en (119) está expresando que:

- Si en una malla M, la $\sum h_{pi}$ es negativa, esto indica que prevalecen las pérdidas de carga asociadas a los caudales que circulan en sentido antihorario, que tienen signo negativo. Por lo tanto, como $(-) \times (-) = (+)$, el valor de ΔQ_M que se obtiene es positivo ($\Delta Q_M > 0$). Consecuentemente, al sumar tal corrección a los Q_i que circulan en la malla; los caudales $-Q_i$ (negativos, sentido antihorario) disminuyen y los caudales $+Q_i$ (positivos, sentido horario) aumentan. Es decir, en pos de alcanzar el equilibrio, esto inducirá una disminución de las pérdidas de carga en los tramos donde los Q_i circulan en sentido antihorario y un aumento de las pérdidas de carga en los tramos donde los Q_i circulan en sentido horario.
- Si en una malla M, la $\sum h_{pi}$ es positiva, esto indica que prevalecen las pérdidas de carga asociadas a los caudales que circulan en sentido horario, que tienen signo positivo. Por lo tanto, como $(-) \times (+) = (-)$, el valor de ΔQ_M que se obtiene es negativo ($\Delta Q_M < 0$). Consecuentemente, al sumar tal corrección a los Q_i que circulan en la malla; los caudales $+Q_i$ (positivos, sentido horario) disminuyen y los caudales $-Q_i$ (negativos, sentido antihorario) aumentan. Es decir, en pos de alcanzar el equilibrio, esto inducirá una disminución de las pérdidas de carga en los tramos donde los Q_i circulan en sentido horario y un aumento de las pérdidas de carga en los tramos donde los Q_i circulan en sentido antihorario.

Es decir, la corrección dada por (119) se debe sumar con su signo a los Q_i de cada malla M , los cuales también poseen signo de acuerdo al sentido de circulación: $+Q_i$ (positivos, sentido horario) y $-Q_i$ (negativos, sentido antihorario).

Para los tramos de tuberías comunes a dos mallas, la corrección ΔQ_M de cada malla, debe aplicarse conjuntamente al Q_i del tramo compartido. Por ejemplo, en la Figura 22, el tramo 2 es compartido por la Malla I y la Malla II, entonces la corrección se realiza mediante:

- Malla I: $Q_2^C = Q_2 + \Delta Q_I + (-\Delta Q_{II})$
- Malla II: $Q_2^C = -Q_2 + \Delta Q_{II} + (-\Delta Q_I)$

Es decir, para la malla I, se suma ΔQ_I (con su signo) y se suma ΔQ_{II} (con el signo cambiado). Para la malla II, se suma ΔQ_{II} (con su signo) y se suma ΔQ_I (con el signo cambiado). Está claro que, el caudal Q_2 es igual en magnitud para las dos mallas y tiene un único sentido de circulación, solo que su signo es distinto en una y otra malla.

Aplicando tales correcciones a los caudales Q_i , las ecuaciones de continuidad en los nodos (109) son todavía satisfechas. Sin embargo, a partir de la distribución arbitraria de predicción inicial Q_i^{P1} , aplicando la primera corrección que brinda los caudales corregidos Q_i^{C1} ; generalmente no es suficiente para satisfacer la (112), es decir, para equilibrar los niveles piezométricos en los nodos de cada malla.

Por lo tanto, la corrección se debe aplicar en forma iterativa. El procedimiento iterativo de predicción-corrección consiste en utilizar los valores de caudal obtenidos en la primera corrección y adoptarlos para una segunda predicción: $Q_i^{P2} = Q_i^{C1}$ y, de esa manera, obtener una segunda corrección Q_i^{C2} . El procedimiento se repite sucesivamente hasta convergencia, o sea, hasta que los valores de caudal predichos y corregidos no muestren diferencias apreciables, o lo que es lo mismo, el valor de las correcciones ΔQ_M sean prácticamente nulas; lo cual indica que se alcanza el equilibrio de los niveles piezométricos en todos los nodos de la red.

Síntesis del procedimiento iterativo de predicción-corrección:

- 1) Conociendo los diámetros, longitudes y material de las tuberías, determinar los coeficientes ξ_i para cada tramo. Si las pérdidas locales debido a accesorios son importantes, se deben incluir en los coeficientes ξ_i . Las pérdidas locales en los nodos no se tienen en cuenta.
- 2) A partir de los datos conocidos de caudales externos en los nodos, predecir una primera distribución arbitraria, pero criteriosa, de los caudales Q_i^{P1} (con sus signos de circulación en cada malla) que satisfaga la ecuación de continuidad (109) en los nodos. Recordar que, a los efectos de la continuidad, los caudales que entran a un nodo son positivos y los que salen del mismo son negativos. Mientras que, para la circulación, los que circulan en sentido horario son positivos y antihorario negativos.
- 3) Determinar la pérdida de carga, para cada tramo de tubería, mediante la ec. (118a). Las pérdidas de carga de cada tramo, correspondientes a caudales que circulan en sentido horario se consideran positivas y en sentido antihorario negativas. Esto se asegura

asignando el signo correspondiente a cada uno de los caudales circulantes ($+Q_i^{P1}$: circulación sentido horario, $-Q_i^{P1}$: circulación sentido antihorario), ver Figura 22.

- 4) Calcular la sumatoria de las pérdidas de carga en cada malla mediante la ec. (118b).
- 5) Calcular la corrección del caudal en cada malla ΔQ_M^1 aplicando la ec. (119).
- 6) Corregir los caudales en cada malla: $Q_i^{C1} = Q_i^{P1} + \Delta Q_M^1$. Considerar en forma conjunta las correcciones para los tramos de tubería compartidos por dos mallas.
- 7) Calcular el error: $E_i(\%) = |(1 - (Q_i^{P1}/Q_i^{C1})|100$.
- 8) Adoptar $Q_i^{P2} = Q_i^{C1}$
- 9) Recalcular desde 2) hasta que: $E_i(\%) < \text{Tolerancia}$.

El procedimiento iterativo descrito, puede ser realizado en una hoja electrónica de Excel©, en forma manual, copiando la columna de caudales corregidos y pegándolos como valores en la columna de caudales predichos. La tolerancia, fijada por el diseñador, puede establecerse en un valor menor al 1%.

Por otra parte, el procedimiento puede realizarse en forma automática mediante la herramienta Solver de Excel©. En este caso, las ecuaciones se pueden resolver en forma conjunta, mediante métodos de optimización por programación lineal o no lineal con restricciones, incluidos en Solver.

Para optimización por programación lineal Solver utiliza el método Simplex, donde la Función Objetivo (FO) se define mediante el promedio $\hat{E}(\%)$ del error, calculado a partir de los errores $E_i(\%)$ de todos los tramos de la red. A dicha FO se le debe asignar un valor de tolerancia, fijado por el diseñador, por ejemplo 0.1% - 0.5%. Las restricciones que se deben imponer consisten en la verificación de las ecuaciones de continuidad en los nodos de la red.

Actualmente existen modelos matemáticos, que se basan conceptualmente en el método de Cross descrito anteriormente, pero sustituyen el procedimiento de predicción-corrección por la resolución numérica compacta del sistema completo de ecuaciones (Por ej.: EPANET, <https://www.epa.gov/water-research/epanet>) y pueden ser aplicados a los diferentes tipos de redes de distribución mencionadas anteriormente, inclusive considerando erogaciones laterales de caudal en los diferentes tramos o líneas de la red y la inserción de accesorios, reservorios, bombas, etc..

2.9.2.1 Erogación lateral de caudal a lo largo de los conductos

En el apartado anterior se supuso que entre dos nodos de un tramo de tubería el caudal Q es constante. En las redes de distribución para abastecimiento de agua potable, debido a las derivaciones para las conexiones domiciliarias, el caudal Q_{ent} que entra a un tramo de tubería es mayor al que sale Q_{sal} . La diferencia $Q_{ent} - Q_{sal}$ puede considerarse, con buena aproximación, uniformemente distribuida a lo largo del tramo de conducto de longitud L , en una magnitud q por unidad de longitud:

$$Q_{ent} - Q_{sal} = qL \quad (120)$$

Se trata entonces de establecer la pérdida de carga h_p entre los extremos del conducto de longitud L (ver Figura 23). A una distancia genérica s de la entrada, para un diferencial de longitud ds , se tendrá que el diferencial de la pérdida de carga es:

$$dh_p = \varphi Q_s^2 ds \quad (121)$$

donde el coeficiente $\varphi = \xi / L$, siendo ξ dado por alguna de las ecs. (111a), (111b) o (111c).

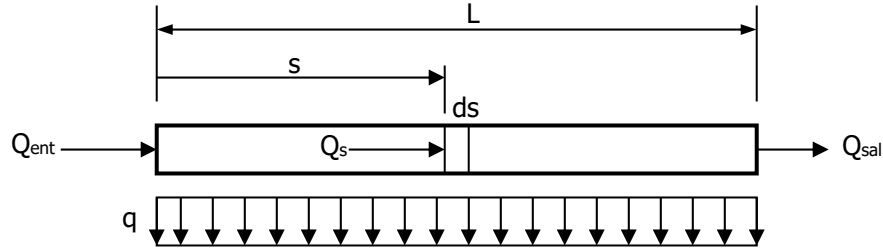


Figura 23. Esquematación de un tramo de conducto con erogación de caudal lateral q .

Por lo tanto, para todo el conducto de longitud L , h_p se expresa como:

$$h_p = \varphi \int_0^L Q_s^2 ds = \varphi \int_0^L (Q_{ent} - qs)^2 ds \quad (122)$$

Integrando se obtiene:

$$h_p = \varphi \left(Q_{ent}^2 - Q_{ent} qL + \frac{1}{3} q^2 L^2 \right) L \quad (123)$$

Utilizando la (120), la ec. (123) se puede expresar en función del caudal saliente Q_{sal} y q , mediante:

$$h_p = \varphi \left(Q_{sal}^2 + Q_{sal} qL + \frac{1}{3} q^2 L^2 \right) L \quad (124)$$

Dado que $(1/3)^{0.5} = 0.577$, podemos plantear la siguiente aproximación:

$$h_p \approx \varphi (Q_{sal} + 0.55 qL)^2 L \quad (125)$$

O, expresándola en función del caudal entrante con (120):

$$h_p \approx \varphi (Q_{ent} - 0.45 qL)^2 L = \varphi L Q_*^2 = \xi Q_*^2 \quad (126)$$

Es decir, a los efectos de determinar las pérdidas de carga h_p con erogación lateral de caudal, el tramo de conducto entre dos nodos de la red puede considerarse a caudal constante introduciendo el concepto de caudal efectivo:

$$Q_* = Q_{ent} - 0.45 qL \quad (127)$$

De esta manera, el método de Cross descrito anteriormente puede ser extendido al cálculo de redes con erogación de caudal lateral a lo largo de los tramos de conductos.

3. FLUJO IMPERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESIÓN

Diferentes procesos dan lugar a fenómenos de flujo impermanente en los conductos a presión, por ejemplo, el vaciado o llenado de un reservorio, las maniobras de cierre o apertura de válvulas, la puesta en funcionamiento de máquinas hidráulicas, el arresto repentino de equipos de bombeo, etc.

El flujo impermanente unidimensional que se desarrolla en conductos a presión se representa mediante la ecuación dinámica y la ecuación de continuidad expresada en términos de caudal másico:

$$\frac{l}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} = -J \quad (128)$$

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 \quad (129)$$

Donde H es la energía por unidad de peso de fluido (m), vista en el apartado 2.1: $H=z+(p/\rho g)+(U^2/2g)$, J: pérdida de energía por unidad de longitud (m/m), U: velocidad (m/s), Q: caudal (m^3/s), ρ : densidad (kg/m^3), A: área transversal del conducto (m^2), g: aceleración de la gravedad (m/s^2), s: coordenada espacial (m) y t: tiempo (s).

En el caso más general, denominado abordaje elástico del flujo impermanente, las variables dependientes son la presión p, la velocidad U, la densidad ρ y el área transversal del conducto A. Evidentemente, para resolver el problema se necesitan ecuaciones adicionales, denominadas ecuaciones constitutivas. Particularmente, en tal caso se asume que el flujo sea barotrópico, es decir, que la densidad sea función de la presión: $\rho=\rho(p)$ y que el conducto sea deformable elásticamente por la presión: $A=A(p)$.

Sin embargo, en ciertos casos puede ser introducida una simplificación, asumiendo constante en el tiempo y en el espacio la densidad del fluido ρ y constante en el tiempo el área transversal del conducto A (si el diámetro del conducto es constante, A será además constante en el espacio). En tal caso, el problema puede ser resuelto sin necesidad de relaciones constitutivas adicionales. Esta hipótesis constituye lo que se denomina abordaje inelástico del flujo impermanente en conductos a presión.

La hipótesis de conducto indeformable y densidad constante (abordaje inelástico) es correcta para procesos relativamente lentos. Mientras que, para perturbaciones ocasionadas por maniobras bruscas de regulación o arresto repentino de equipos, el abordaje inelástico es aproximado y debe ser sustituido por el elástico, es decir, considerando el conducto deformable y la densidad del fluido variable.

3.1 Flujo impermanente analizado mediante el abordaje inelástico

Cuando se asume que el conducto es indeformable y la densidad del fluido constante (abordaje inelástico), la ecuación de continuidad se simplifica notablemente. Expandiendo las derivadas en la ecuación (129):

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} + Q \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \quad (130)$$

Si el conducto es indeformable A es constante en el tiempo ($\partial A/\partial t=0$) y si la densidad es constante en el tiempo y en el espacio ($\partial \rho/\partial t=0$, $\partial \rho/\partial s=0$), que se corresponde con el abordaje inelástico comentado en el apartado anterior. Por lo tanto, la (130) se reduce a:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = U \frac{\partial A}{\partial s} + A \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (131)$$

Asumiendo que el área transversal del conducto tampoco varía en el espacio, es decir, el diámetro del conducto D es constante a lo largo del recorrido ($\partial A/\partial s=0$). Por lo tanto, en (131) se observa que la velocidad U no varía en el espacio. Es decir, la velocidad U solo variara en el tiempo, lo cual permite reemplazar la derivada parcial en (129) por la derivada ordinaria y expresar la ecuación dinámica (128) mediante:

$$-\frac{dH}{ds} = J + \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} \quad (132)$$

En tal caso, el proceso hidrodinámico no depende de la modalidad de propagación, ya que cualquier variación de la velocidad que se verifique en una determinada sección del conducto, la misma se propaga simultáneamente a lo largo de todo el sistema.

El segundo término del segundo miembro de (132) es la aceleración temporal, que le imprime impermanencia al flujo. Además, una de las hipótesis básicas del flujo impermanente unidimensional, es que la pérdida de energía por fricción es igual a la producida en flujo permanente, entonces, el primer término del segundo miembro es igual a la pendiente de energía J (ver apartado 2.1).

Considerando la ecuación de resistencia de Darcy-Wesibach (ver ec. (59a), la pendiente de la línea de energía, se expresa como: $J=(f/D) U^2/2g$. Por lo tanto, si la (132) se integra entre dos puntos 1 y 2 que define una longitud L del conducto, se obtiene:

$$-(H_2 - H_1) = \frac{f L U^2}{D 2g} + \frac{L}{g} \frac{dU}{dt} \quad (133)$$

Considerando que existan pérdidas localizadas debidas a singularidades de la conducción (curvas, expansiones, etc.) o inserción de accesorios (válvulas, etc.), tendremos:

$$-(H_2 - H_1) = \Psi \frac{U^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dU}{dt} \quad (134)$$

con:
$$\Psi = \left(\frac{f L}{D} + \sum K \right) \quad (135a)$$

donde Ψ (ver ecuación (84a)) contempla las pérdidas de carga continuas por fricción y localizadas, siendo f el factor de fricción de Darcy-Weisbach y K los coeficientes de pérdidas localizadas (Tabla 4). Los valores de Ψ para las ecuaciones de resistencia al flujo de Chezy y Manning, están incluidos en las ecuaciones (84b) y (84c) respectivamente:

$$\Psi = \left(\frac{8g}{C^2} \frac{L}{D} + \sum K \right) \quad (135b)$$

$$\Psi = \left(\frac{12.7gn^2}{D^{4/3}} L + \sum K \right) \quad (135c)$$

3.1.1 Flujo impermanente en un conducto conectado a un reservorio

En este apartado se analizarán los procesos de llenado y vaciado de un reservorio, de superficie importante, tal que se pueda considerar: i) superficie libre horizontal durante el gradual aumento o disminución del nivel del agua en el reservorio, ii) la velocidad del aumento o descenso del nivel es suficientemente pequeña y, por lo tanto, puede despreciarse el término de inercia (aceleración local y convectiva) en el reservorio.

3.1.1.1 Tiempo de establecimiento de flujo en un conducto

Consideremos un conducto de sección constante, de longitud L , cuyo extremo aguas abajo se encuentra cerrado y está conectado a un reservorio que ejerce una carga hidráulica constante h_0 como se muestra en la Figura 24.

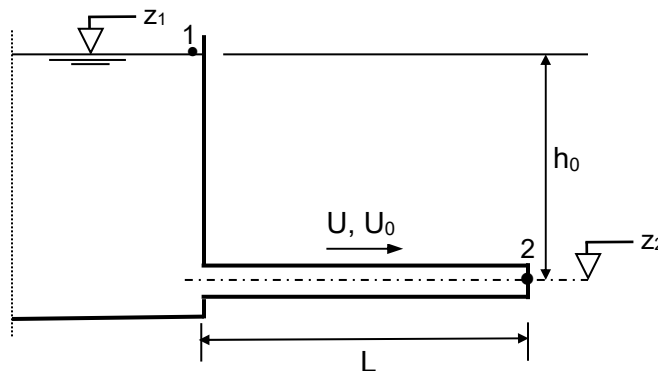


Figura 24. Representación de variables geométricas e hidráulicas del flujo a presión impermanente en un conducto circular de diámetro $D=2r_0$, que sale de un reservorio.

Si se libera rápidamente la salida, en el instante inicial la energía H_2 en el extremo aguas abajo desciende a cero, mientras permanece la energía $H_1=h_0$ en el extremo aguas arriba del conducto. Consecuentemente, la masa líquida contenida en el mismo se verá inducida a desplazarse con una aceleración dU/dt definida por la ecuación (133). Despreciando las pérdidas de carga en el conducto y la altura de velocidad, e integrando la (133) entre 1 y 2:

$$\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} = -(H_2 - H_1) = h_0 \quad (136)$$

Considerando que también en el tiempo sucesivo se mantiene nula la energía en el extremo aguas abajo, la ecuación (136) puede ser oportunamente integrada:

$$\frac{L}{g} \int_0^{U_0} dU = h_0 \int_0^{T_e} dt \quad (137)$$

Por lo tanto, el tiempo T_e necesario para alcanzar el establecimiento del flujo en el conducto con velocidad U_0 (inicialmente con el agua contenida en el mismo en reposo) es:

$$T_e = \frac{LU_0}{gh_0} \quad (138)$$

Es necesario señalar que, el tiempo efectivo que emplea el conducto para alcanzar la velocidad U_0 es superior al tiempo T_e determinado con la ecuación (138). En efecto, la hipótesis de energía nula a la salida no es real ya que, desde los primeros instantes, cuando aumenta la velocidad en el conducto, se establece una altura cinética $U^2/2g$ y se verifican pérdidas de carga debido al movimiento del fluido. Por lo tanto, la aceleración dU/dt va progresivamente disminuyendo.

Considerando las pérdidas de carga totales, continuas y localizadas, con la expresión $h_p = \Sigma L = \Psi (U^2/2g)$; conjuntamente con la altura de velocidad en la sección 2; y despreciando la altura de velocidad en el reservorio, por ser la velocidad extremadamente pequeña; la ecuación que reemplaza a la ecuación (136), se expresa como:

$$\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} = - \left(z_2 - z_1 - \frac{U^2}{2g} \right) - \Psi \frac{U^2}{2g} = h_0 - (1 + \Psi) \frac{U^2}{2g} \quad (139)$$

Evidentemente, para la condición de establecimiento de flujo en régimen ($dU/dt=0$) se tiene que:

$$h_0 = (1 + \Psi) \frac{U_0^2}{2g} \quad (140)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (139) y (140) se deriva que:

$$\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} = h_0 \left(1 - \frac{U^2}{U_0^2} \right) \quad (141)$$

Explicitando dt de la ecuación (141) se obtiene:

$$dt = \frac{L}{gh_0} \frac{U_0^2}{(U_0^2 - U^2)} dU \quad (142)$$

Integrando y sabiendo que:

$$\int \frac{dU}{U_0^2 - U^2} = \frac{1}{U_0} \operatorname{arctgh} \frac{U}{U_0} + \text{const.} \quad (143)$$

con $U=0$ para $t=0$ (fluido inicialmente en reposo), se obtiene:

$$t = \frac{LU_0}{g h_0} \operatorname{arctgh} \left(\frac{U}{U_0} \right) = T_e \operatorname{arctgh} \left(\frac{U}{U_0} \right) \quad (144)$$

Es decir:

$$\frac{U}{U_0} = \operatorname{tgh} \left(\frac{t}{T_e} \right) \quad (145)$$

La relación entre U/U_0 y t/T_e se muestra en la Figura 25. El valor de la velocidad U_0 se alcanza en forma asintótica en el tiempo, aunque ya para $t/T_e=3$ la diferencia es pequeña ($\operatorname{tgh} 3 = 0.995$). Sin embargo, para $t/T_e=1$ la diferencia es relevante ($\operatorname{tgh} 1 = 0.761$), es decir que para $t=T_e$ no se alcanza la velocidad U_0 sino aproximadamente solo $3/4$ de la misma. O sea, el tiempo efectivo para establecimiento del flujo en el conducto, considerando pérdidas y altura de velocidad, es aproximadamente $t_{ef}=3 T_e$.

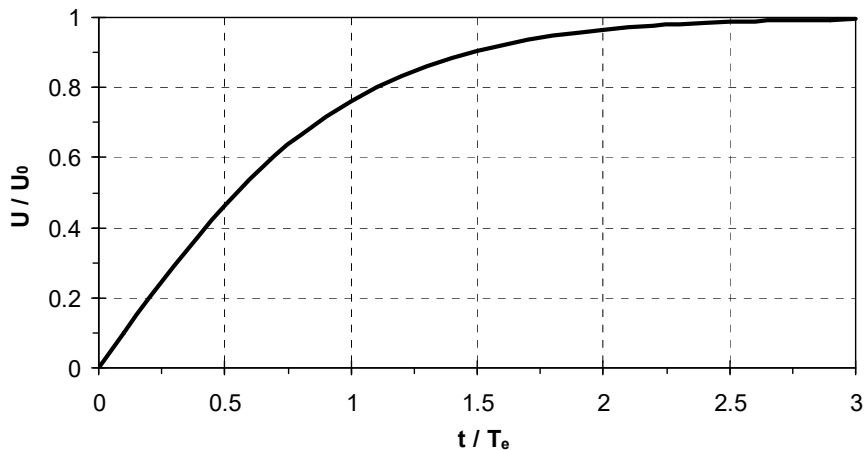


Figura 25. Relación $U/U_0=f(t/T_e)$ dada por ec. (145).

La evolución temporal de la línea de la energía, durante la fase del flujo impermanente, depende de la intensidad de la variación temporal de la velocidad en el conducto. Efectivamente, para pérdidas de carga nulas, se tiene:

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} \quad (146)$$

En primer lugar, se observa un pasaje brusco, en el instante de la puesta en movimiento de la masa líquida, desde la posición horizontal de la línea de energía (agua en reposo) a la inclinación máxima posible inmediatamente después de la apertura (ver Figura 26 (a) y (b)). La Figura 26 (c) representa una situación intermedia (por simplicidad se desprecian las pérdidas de carga). Finalmente, en la Figura 26 (d) se observa la situación final de establecimiento de flujo, en la cual la línea de la energía retoma su posición horizontal, siendo en este caso transformada completamente en altura cinética.

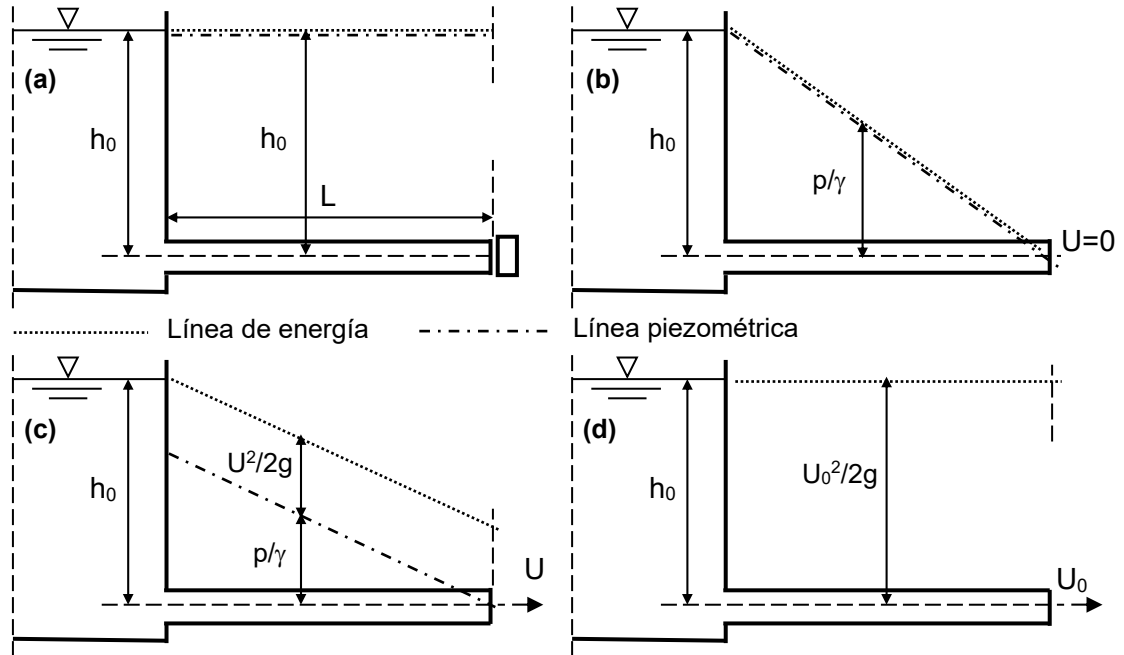


Figura 26. Evolución temporal de la línea de energía y piezométrica, durante la fase del flujo impermanente.

3.1.1.2 Vaciado de un reservorio a través de un conducto largo

Un problema asociado al anterior es el proceso de vaciado de un reservorio. Haciendo referencia a la Figura 24, y repitiendo la integración de la ecuación dinámica del flujo entre 1 y 2, se obtiene la ec. (139), donde ahora el nivel del reservorio z_1 (que omitiendo el subíndice llamaremos z) será variable en el tiempo (y no constante h_0 como en el caso anterior, si consideramos que el plano de referencia pasa por el eje del conducto). Consecuentemente, la ecuación dinámica es:

$$z = \frac{L}{g} \frac{dU}{dt} + (1 + \Psi) \frac{U^2}{2g} \quad (147)$$

En esta situación las variables dependientes del problema son el nivel en el reservorio z (m) y la velocidad en el conducto U (m/s). Por lo tanto, a la ecuación dinámica (147) se le debe agregar la ecuación de continuidad de flujo impermanente de reservorios, cuya expresión clásica es:

$$Q_{ent} - Q_{sal} = A_R \frac{dz}{dt} \quad (148)$$

Donde Q_{ent} y Q_{sal} , son los caudales entrantes y salientes del reservorio (m^3/s) y A_R es el área horizontal del reservorio (m^2), considerada constante, es decir, independiente del nivel z . En el caso que estamos analizando $Q_{ent}=0$ y $Q_{sal}=U A$, donde U es la velocidad en el conducto (m/s) y A es el área de la sección transversal del mismo (m^2). Por lo tanto, la (148) puede ser escrita explicitando la velocidad U en el conducto como:

$$U = - \left(\frac{A_R}{A} \right) \frac{dz}{dt} \quad (149)$$

Cabe señalar que, al tratarse del proceso de vaciado del reservorio, en (149) $dz/dt < 0$; con lo cual la velocidad en el conducto U es positiva (el flujo sale del reservorio).

El sistema compuesto por las ecuaciones (147) y (149) es no lineal y su solución analítica es de hecho impracticable. En el caso que estamos analizando, exceptuando la breve fase inicial de establecimiento del flujo en el conducto (vista en el apartado anterior), las variaciones de la velocidad en la segunda fase de vaciado son modestas, pudiéndose despreciar el término de aceleración temporal en (147). Bajo esta hipótesis, explicitando la velocidad U de la (147) se obtiene:

$$U = \sqrt{\frac{2g}{(I + \Psi)}} z^{1/2} \quad (150)$$

Igualando (149) y (150), para eliminar la velocidad U , se obtiene:

$$\frac{A_R}{z^{1/2}} dz = -A \sqrt{\frac{2g}{(I + \Psi)}} dt \quad (151)$$

Integrando se obtiene:

$$z^{1/2} = -\frac{A}{2A_R} \sqrt{\frac{2g}{(I + \Psi)}} t + const. \quad (152)$$

La constante de integración se determina utilizando la condición al contorno: para $t=0$ se tiene $z=h_0$, es decir: $const.=h_0^{1/2}$. Por lo tanto:

$$z = \left(\sqrt{h_0} - \frac{A}{2A_R} \sqrt{\frac{2g}{(I + \Psi)}} t \right)^2 \quad (153)$$

Resumiendo, la (153) determina la variación temporal del nivel en el reservorio y, reemplazándola en la (150), se determina como varía en el tiempo la velocidad en el conducto.

El tiempo de vaciado t_v se obtiene poniendo en (153) $z=0$ y despejando el tiempo. Para este caso particular se obtiene:

$$t_v = \frac{2A_R}{A} \frac{\sqrt{h_0(I + \Psi)}}{\sqrt{2g}} \quad (154)$$

En (154) se observa que, el tiempo de vaciado disminuye si aumenta el área del conducto y disminuyen las pérdidas en el mismo. Por otra parte, t_v aumenta con el aumento del área del reservorio y la carga hidráulica inicial y, obviamente, también aumenta si aumentan las pérdidas de carga en el conducto.

Resolución numérica del proceso de vaciado de un reservorio

Para la resolución numérica del proceso de vaciado se deben resolver la ecuación dinámica (147) y la ecuación de continuidad (149), las cuales pueden ser escritas respectivamente como:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{g}{L} \left[z - (I + \Psi) \frac{U^2}{2g} \right] \quad (155)$$

$$\frac{dz}{dt} = -U \left(\frac{A}{A_R} \right) \quad (156)$$

Utilizando un esquema en diferencias finitas de tipo explícito y discretizando se obtiene:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{g}{L} \left[z - (1 + \Psi) \frac{U^2}{2g} \right]^n \quad (157)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = -U^n \left(\frac{A}{A_R} \right) \quad (158)$$

Donde n es el índice temporal que describe la discretización del tiempo: $t=n\Delta t$, con $n=0,1,2,3,\dots,N$ y Δt : paso de tiempo (s). Como comentado en el apartado anterior, el área horizontal del reservorio A_R se considera independiente del nivel z .

Por lo tanto, despejando las incógnitas en el tiempo $t=(n+1)\Delta t$:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \frac{g}{L} \left[z - (1 + \Psi) \frac{U^2}{2g} \right]^n \quad (159)$$

$$z^{n+1} = z^n - \Delta t U^n \left(\frac{A}{A_R} \right) \quad (160)$$

Conocidas las condiciones al contorno e iniciales: $n=0$ ($t=0$), $U(0)=0$ y $z(0)=h_0$; las ecuaciones (159) y (160) aplicadas recursivamente permiten describir la evolución temporal $z(n\Delta t)$ y $U(n\Delta t)$ para intervalos discretos de tiempo, adoptando un paso de integración temporal Δt , el cual puede adoptarse como una fracción del tiempo inicial de establecimiento de flujo en régimen: $\Delta t=(0.1 \text{ a } 0.2) T_e$.

Ejemplo. Determinar el tiempo de establecimiento del flujo, el tiempo de vaciado y la evolución temporal $z(t=n\Delta t)$ y $U(t=n\Delta t)$. El área horizontal del reservorio es $A_R=700 \text{ m}^2$; el diámetro del conducto es $D=0.4 \text{ m}$, el coeficiente de rugosidad de Manning es $n=0.011 \text{ s/m}^{1/3}$ (no confundir con el índice temporal), la longitud del conducto es $L=1000 \text{ m}$ y la carga hidráulica inicial: $h_0=25 \text{ m}$.

Solución. Se determina el coeficiente Ψ , considerando pérdidas continuas por fricción mediante la ecuación de resistencia al flujo de Manning y pérdidas localizadas: embocadura bien redondeada ($K_e=0.05$) y salida libre ($K_s=0$).

$$\Psi = \left(\frac{12.7 g n^2}{D^{4/3}} L + K_e + K_s \right) = 51.2$$

De (140) se determina la velocidad de establecimiento de flujo del conducto: $U_0=3.07 \text{ m/s}$. Con la (138) se determina el tiempo de establecimiento de flujo: $T_e=12.5 \text{ s}$ y el $t_{ef}=3 T_e=37.5 \text{ s}$; con la (154) el tiempo de vaciado del reservorio es: $t_v=25.2 \text{ hs}$. Es dable destacar que, en la fase inicial (muy breve) de establecimiento de flujo, la velocidad en el conducto pasa de cero a U_0 en 37.5 s ; mientras que, en la fase de vaciado, la velocidad pasa de U_0 a cero en aproximadamente un día (25.2 hs). Es decir, en relación con la fase inicial de establecimiento de flujo, la segunda fase de vaciado es muy lenta, y consecuentemente, es atendible la hipótesis de despreciar el término de aceleración local, realizada para

determinar (150). El proceso de vaciado resulta muy lento (en relación a t_{ef}) inclusive si se reduce el área horizontal del reservorio y la longitud del conducto.

Adoptando un $\Delta t = 0.16 T_e = 2$ s y resolviendo (159) y (160) se obtiene la evolución temporal $z(t)$ y $U(t)$ del proceso de vaciado. En la Figura 27 se muestra la solución numérica del vaciado $z(t)$ y $U(t)$ hasta los 100 s, conjuntamente con la ecuación (145) que describe el proceso de establecimiento del flujo en el conducto.

En la Figura 28, la solución numérica se extiende hasta los 1000 s, donde se puede apreciar el breve tiempo de establecimiento del flujo en el conducto en comparación con el tiempo de vaciado, el cual obviamente se prolonga hasta las 25.2 hs (aunque aquí se muestra solo hasta los 1000 s).

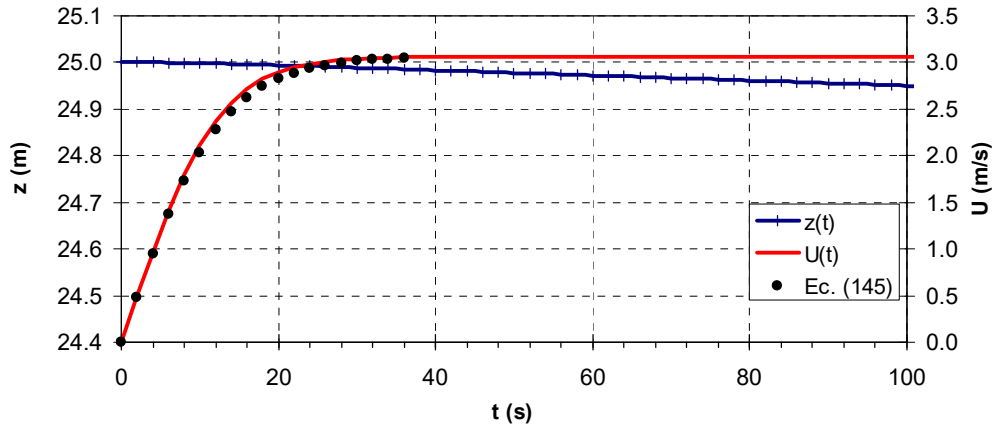


Figura 27. Solución numérica de la evolución temporal $z(t)$ y $U(t)$ del vaciado: primeros 100 s y ec. (145) de establecimiento del flujo en el conducto.

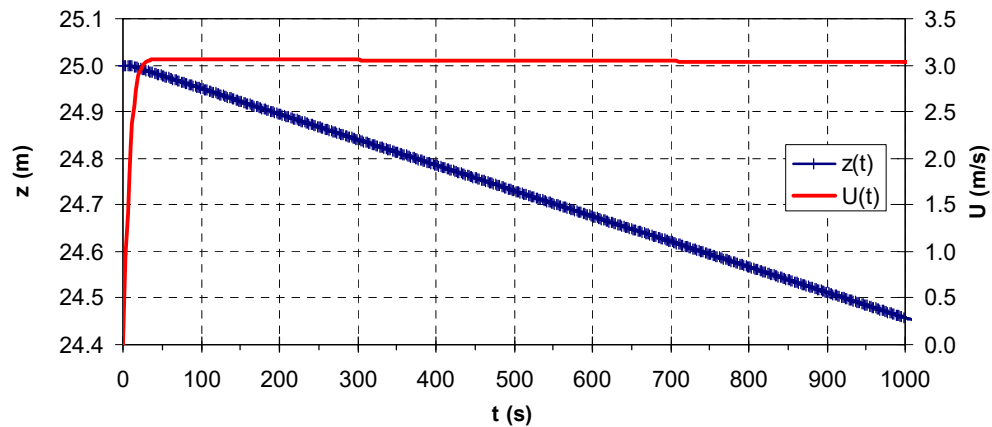


Figura 28. Solución numérica de la evolución temporal $z(t)$ y $U(t)$ del vaciado: solución hasta los 1000 s.

3.1.1.3 Llenado de un reservorio

Para el proceso de llenado de un reservorio podemos utilizar la situación representada en la Figura 24, aunque en este caso se considera que el caudal entrante que alimenta el reservorio no es nulo. Además, se asume que el nivel inicial en el reservorio es pequeño, coincidente con el nivel de la embocadura del conducto, y tal que el caudal de salida descargado por el conducto sea menor que el caudal entrante.

Para la solución del problema se utilizan las ecuaciones (147) y (148). En particular, como supuesto para el proceso de vaciado, podemos despreciar la aceleración temporal en la ec. (147) y escribir: $Q_{sal}=UA$. De esta manera se obtiene:

$$z = (I + \Psi) \frac{U^2}{2g} \quad (161)$$

$$Q_{ent} - U A = A_R \frac{dz}{dt} \quad (162)$$

Considerando un caudal de entrada constante y despejando la velocidad de la (161) e introduciéndola en la ec. de continuidad (162) se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_{ent}}{A_R} - \frac{A}{A_R} \sqrt{\frac{2gz}{I + \Psi}} \quad (163)$$

La (163) es una ecuación diferencial a variables separables, cuya solución es:

$$t(z) = -\frac{(I + \Psi)A_R}{g A^2} \left[Q_{ent} \ln \left(1 - \frac{A}{Q_{ent}} \sqrt{\frac{2gz}{I + \Psi}} \right) + A \sqrt{\frac{2gz}{I + \Psi}} \right] + const. \quad (164)$$

La constante de integración se determina imponiendo que, para $t=0$ el nivel inicial en el reservorio es $z=h_0$. Por lo tanto, se obtiene:

$$t(z) = -\frac{(I + \Psi)A_R}{g A^2} \left[Q_{ent} \ln \left(\frac{Q_{ent} - A \sqrt{2gz/(I + \Psi)}}{Q_{ent} - A \sqrt{2gh_0/(I + \Psi)}} \right) + A \sqrt{\frac{2gz}{I + \Psi}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{z}) \right] \quad (165)$$

El nivel de equilibrio se alcanza cuando el reservorio entra en régimen ($Q_{ent}=Q_{sal}$), por lo cual $dz/dt=0$. Por lo tanto, de la (163) se obtiene:

$$z_{eq} = \frac{I + \Psi}{2g} \left(\frac{Q_{ent}}{A_R} \right)^2 \quad (166)$$

Consecuentemente, con la (166) se determina el z_{eq} e introduciéndolo en (165) se puede determinar el tiempo total de llenado.

3.1.2 Golpe de ariete: conducto indeformable y densidad constante

El fenómeno de golpe de ariete ocasiona variaciones bruscas de las condiciones de flujo y produce importantes estados de sobrepresión y fuertes depresiones en los conductos. El fenómeno, como veremos más adelante analizándolo mediante el abordaje elástico, es agravado debido a que estas variaciones positivas y negativas de presión se alternan con frecuencias muy elevadas.

En este apartado se analiza el golpe de ariete mediante el abordaje inelástico, obteniendo una solución que puede ser considerada aceptable solo si las variaciones del flujo son relativamente lentas y, consecuentemente, las variaciones de presión son modestas. Consideremos el sistema que se muestra esquemáticamente en la Figura 29, constituido por un reservorio con carga constante h_0 y un conducto de descarga de longitud L , cuyo extremo aguas abajo es sujeto a maniobras de cierre mediante un elemento regulable. Consideremos además que el flujo es inicialmente permanente y se cierra el extremo aguas abajo del conducto. Se trata de un proceso opuesto al analizado precedentemente en el punto 3.1.1.1 de establecimiento de flujo en un conducto.

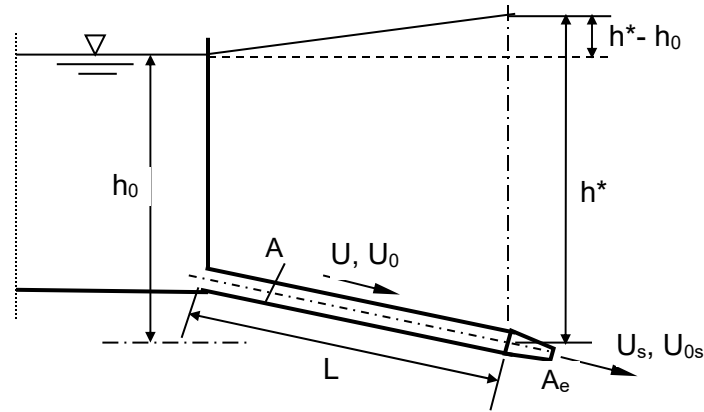


Figura 29. Representación de variables geométricas e hidráulicas del flujo a presión impermanente en un conducto conectado a un reservorio.

Como primera aproximación se pueden despreciar la altura cinética y las pérdidas de carga. Por lo tanto, la ecuación dinámica se escribe como:

$$\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} = h_0 - h^* \quad (167)$$

donde $h^* = p/\gamma$ es la altura piezométrica instantánea en el extremo aguas abajo del conducto ($\gamma = \rho g$) y U es la velocidad instantánea. Si U_s es la correspondiente velocidad instantánea de salida, $A_e(t)$ es el área regulable temporalmente del obturador y A_c es el área del conducto, la ecuación de continuidad se escribe como:

$$AU = A_e(t)U_s \quad , \quad U_s = \sqrt{2gh^*} \quad (168a),(168b)$$

En régimen de completa apertura se tiene:

$$AU_0 = A_{e_{max}}U_{0s} \quad , \quad U_{0s} = \sqrt{2gh_0} \quad (169a),(169b)$$

Por lo tanto, de (168a,b) y (169a,b) se deriva que:

$$U = U_0 \frac{A_e(t)}{A_{e_{max}}} \sqrt{\frac{h^*}{h_0}} \quad (170)$$

Introduciendo las siguientes variables auxiliares:

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{h^*}{h_0}} \quad , \quad \eta(t) = \frac{A_e(t)}{A_{e_{max}}} \quad (171a),(171b)$$

la ecuación (170) puede expresarse como: $U = U_0 \eta(t) \zeta(t)$. Por lo tanto, derivando esta última ecuación respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{dU}{dt} = U_0 \frac{d\eta}{dt} \zeta + U_0 \frac{d\zeta}{dt} \eta \quad (172)$$

Sustituyendo (172) en (167) se obtiene:

$$\frac{LU_0}{g h_0} \left(\frac{d\eta}{dt} \zeta + \frac{d\zeta}{dt} \eta \right) = 1 - \zeta^2 \quad (173)$$

La ecuación (173) puede ser integrada si se conoce la ley que describe la evolución temporal de la maniobra de cierre del elemento de regulación $\eta(t)$. Considerando una variación lineal en el tiempo, donde T_c es el tiempo total de la maniobra:

$$\eta(t) = \frac{T_c - t}{T_c} \quad (174)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{T_c} \quad (175)$$

Recordando que $T_e = LU_0 / gh_0$ es el tiempo de régimen del conducto y reemplazando (174) y (175) en (173) se obtiene:

$$-\frac{T_e}{T_c} \zeta + \frac{T_e}{T_c} (T_c - t) \frac{d\zeta}{dt} = 1 - \zeta^2 \quad (176)$$

Se trata de una ecuación diferencial no lineal que puede ser resuelta analíticamente mediante el método de separación de variables. Sin embargo, a los fines prácticos es suficiente determinar el valor máximo de ζ . Si se analiza la solución analítica mencionada precedentemente se observa que para un tiempo muy breve $t=T_e$ se alcanza un valor de h^* muy cercano al valor máximo que se verifica en $t=T_c$, por lo tanto, la variación en el tiempo de h^* y consecuentemente de ζ son muy pequeñas. En tal caso, considerando $d\zeta/dt=0$, la ecuación (176) se reduce a una ecuación algebraica para el valor máximo de ζ :

$$\zeta_{max}^2 - \zeta_{max} \frac{T_e}{T_c} - I = 0 \quad (177)$$

Resolviendo la ecuación (177) se obtiene el valor de $\zeta_{m\acute{a}x}$, luego utilizando la expresión (171a), el valor de la altura piezométrica máxima en el extremo aguas abajo del conducto se expresa como:

$$h_{max}^* = h_0 \left[\frac{I}{2} \left(\frac{T_e}{T_c} \right) + \frac{I}{2} \sqrt{\left(\frac{T_e}{T_c} \right)^2 + 4} \right]^2 \quad (178)$$

La hipótesis inelástica es válida para maniobras de cierre relativamente lentas, es decir, aproximadamente para valores de $T_c \geq 5T_e$ ($T_e/T_c \leq 0.2$). En el límite, para $T_e/T_c = 0.2$ el valor $(T_e/T_c)^2 \ll 4$, por lo tanto, la ec. (178) puede simplificarse como:

$$h_{max}^* = h_0 \left[I + \frac{I}{2} \left(\frac{T_e}{T_c} \right) \right]^2 \quad (179)$$

Expandiendo el termino entre corchetes de la (179) y utilizando la misma hipótesis simplificada anterior, se obtiene:

$$h_{max}^* = h_0 \left(I + \frac{T_e}{T_c} \right) \quad (180a)$$

Consideremos una situación como la descrita en el apartado 3.1.1.1 para el establecimiento de flujo en un conducto. Representando la maniobra de apertura del elemento de regulación con la ley lineal: $\eta(t) = t/T_c$ y realizando el mismo análisis anterior, se obtiene:

$$h_{min}^* = h_0 \left(I - \frac{T_e}{T_c} \right) \quad (180b)$$

Donde, en este caso, con T_c se indica el tiempo total de la maniobra de apertura y T_e es el conocido tiempo de establecimiento de flujo en régimen del conducto.

Los valores extremos de la altura piezométrica determinados con (180a) y (180b) se alcanzan al final de la maniobra de cierre o apertura, en el extremo aguas abajo del conducto. A lo largo del conducto la variación $h^* - h_0$ disminuye linealmente desde el extremo aguas abajo del conducto hasta anularse en el extremo aguas arriba del mismo, como se indica en la Figura 30. Evidentemente, las variaciones $h_{m\acute{a}x}^* - h_0$ o $h_{min}^* - h_0$ presentarán la misma evolución a lo largo del conducto.

3.2 Flujo impermanente analizado mediante el abordaje elástico

Cuando se realizan maniobras rápidas de cierre de válvulas, detenimiento de máquinas hidráulicas, etc., las variaciones de velocidad de flujo determinan fuertes variaciones de presión,

las cuales producen deformaciones en el conducto y cambios de la densidad del fluido. Tal fenómeno, como mencionado en el punto anterior, se denomina golpe de ariete. Para describir este fenómeno con más rigurosidad es necesario recurrir al abordaje elástico.

3.2.1 Golpe de ariete: interpretación conceptual para conducto deformable

Para realizar una descripción conceptual del fenómeno de golpe de ariete consideremos un sistema esquemático como el que se observa en la Figura 30.a, representado por un conducto de diámetro D y de longitud L conectado a un reservorio de dimensiones importantes que ejerce una carga hidráulica constante h_0 . En tal situación, la válvula en el extremo aguas abajo del conducto se encuentra abierta y la velocidad del flujo es U_0 a lo largo del conducto (flujo permanente).

Si la válvula en el tiempo $t=0$ se cierra instantáneamente, la velocidad del flujo en inmediaciones de la válvula se anula y consecuentemente la energía cinética se transforma en potencial produciendo un aumento de la presión ($h_0+\Delta p/\gamma$). La variación de presión se vincula a la variación de velocidad: $\Delta p = -\rho c \Delta U$; dado que $\Delta U = 0 - U_0 = -U_0$, $\Delta p > 0$. El incremento de la presión determina un aumento de la densidad del fluido $\rho + \Delta \rho$ (ley de Hooke) y la dilatación del conducto ($D + \Delta D$). La perturbación de presión, generada por el cierre de la válvula, se propaga desde la válvula al reservorio con celeridad c . Transcurridos algunos instantes, para $t < L/c$, una parte del tramo final del conducto se encuentra con velocidad nula. Mientras que, la parte del conducto no alcanzada por la perturbación de presión, permanece con las condiciones iniciales (Figura 30.b).

Para $t = L/c$, la perturbación de presión llega al reservorio, todo el conducto se encuentra sometido a una presión mayor que la inicial y la velocidad de flujo en el conducto es cero (Figura 30.c). Para $t > L/c$, dado que el nivel del agua en el reservorio es constante y la presión en el conducto es mayor que la inicial, el flujo en el conducto invierte su sentido y trata de ir hacia el reservorio con velocidad $-U_0$, la perturbación de presión es reflejada por el reservorio y se propaga hacia la válvula con la misma celeridad c , generando una depresión o succión $-\Delta p/\gamma$ que va restableciendo las condiciones de presión iniciales en el conducto, el cual asume nuevamente su diámetro inicial (Figura 30.d).

Para $t = 2L/c$ la perturbación de presión alcanza la válvula y todo el conducto se encuentra sometido nuevamente a la presión inicial pero el flujo es hacia el reservorio con velocidad $-U_0$ (Figura 30.e). Encontrando la válvula cerrada, la perturbación de presión es reflejada hacia el reservorio. Como la velocidad en el conducto es negativa ($-U_0$) se genera una onda de depresión, que en $t > 2L/c$ se propaga hacia el reservorio y deja a sus espaldas el conducto con un estado de depresión ($h_0 - \Delta p/\gamma$) y velocidad nula. La disminución de la presión determina una disminución de la densidad $\rho - \Delta \rho$ (ley de Hooke) y la contracción del conducto ($D - \Delta D$). (Figura 30.f).

Para $t = 3L/c$ la perturbación de presión llega al reservorio dejando todo el conducto contraído y con velocidad nula (Figura 30.g). La perturbación de presión es reflejada hacia la válvula. En $t > 3L/c$, dado que la presión en el reservorio es mayor que en el interior del conducto, el flujo en el conducto es hacia la válvula con velocidad U_0 , generando una onda de sobrepresión que va restableciendo las condiciones de presión iniciales en el conducto, el cual asume nuevamente su diámetro inicial (Figura 30.h).

En $t=4L/c$ la perturbación de presión llega a la válvula, todo el conducto se encuentra sometido nuevamente a la presión inicial y el flujo es hacia la válvula con velocidad U_0 (Figura 30.i). Encontrando la válvula cerrada, la perturbación de presión es reflejada hacia el reservorio, repitiéndose el ciclo descrito a partir del momento de cierre de la válvula en $t=0$.

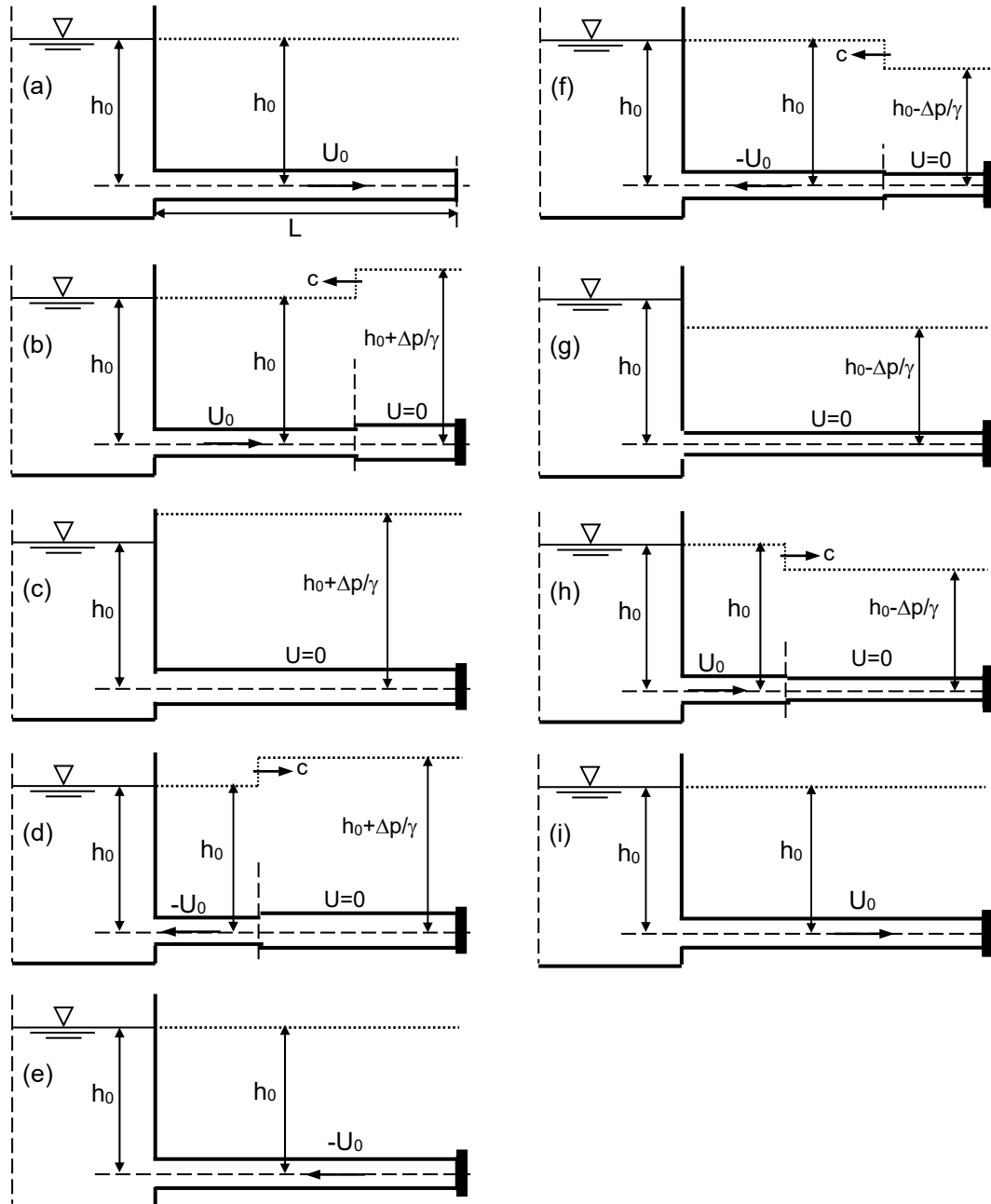


Figura 30. Evolución temporal de las diferentes fases del golpe de ariete.

En la Figura 31 se representa la evolución temporal de la variación de presión en la válvula ($s=L$) y de la velocidad de flujo en correspondencia con la embocadura del conducto en el reservorio ($s=0$).

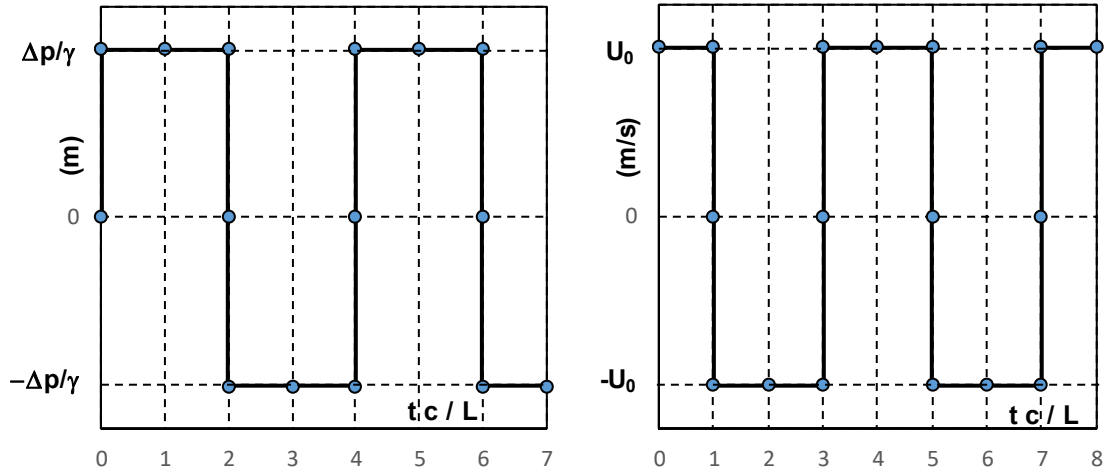


Figura 31. Evolución temporal de la variación de presión en la válvula (izquierda) y de la velocidad en la embocadura del conducto con el reservorio (derecha).

El tiempo $t=2L/c$, necesario para la que onda de presión producida por el cierre de la válvula llegue al reservorio, sea reflejada por el mismo y retorne a la válvula, se denomina ritmo del conducto y se indica generalmente con T :

$$T = \frac{2L}{c} \tag{181}$$

Para describir, todavía conceptualmente, el flujo que se desarrolla a partir del cierre de la válvula, conviene representar gráficamente de manera distinta la propagación de las ondas de presión.

Dado que el fenómeno es lineal, es válido el principio de superposición de efectos. Por lo tanto, se puede representar el campo de flujo global sumando las ondas que a pasos de tiempo iguales a $T/2$ parten de la válvula o del reservorio.

En la Figura 32 se representan, a la izquierda, las diferentes ondas de presión y, a la derecha, se representa la suma de las mismas, es decir, la presión efectiva en el conducto.

En el instante $t=0$ parte de la válvula una onda de sobrepresión positiva ($0 < t < T/2$), la cual llega al reservorio y es reflejada como una onda de depresión negativa ($T/2 < t < T$). La onda reflejada por el reservorio llega a la válvula en $t=T$ y es nuevamente reflejada como onda de depresión negativa ($T < t < 1.5T$). Cuando la misma llega al reservorio, es reflejada con signo opuesto, es decir, como onda de sobrepresión ($1.5T < t < 2T$). Esta onda alcanza la válvula en $t=2T$ y es nuevamente reflejada como onda de sobrepresión positiva; la situación es igual a la que se observa en $t=0$ y el fenómeno se repite periódicamente.

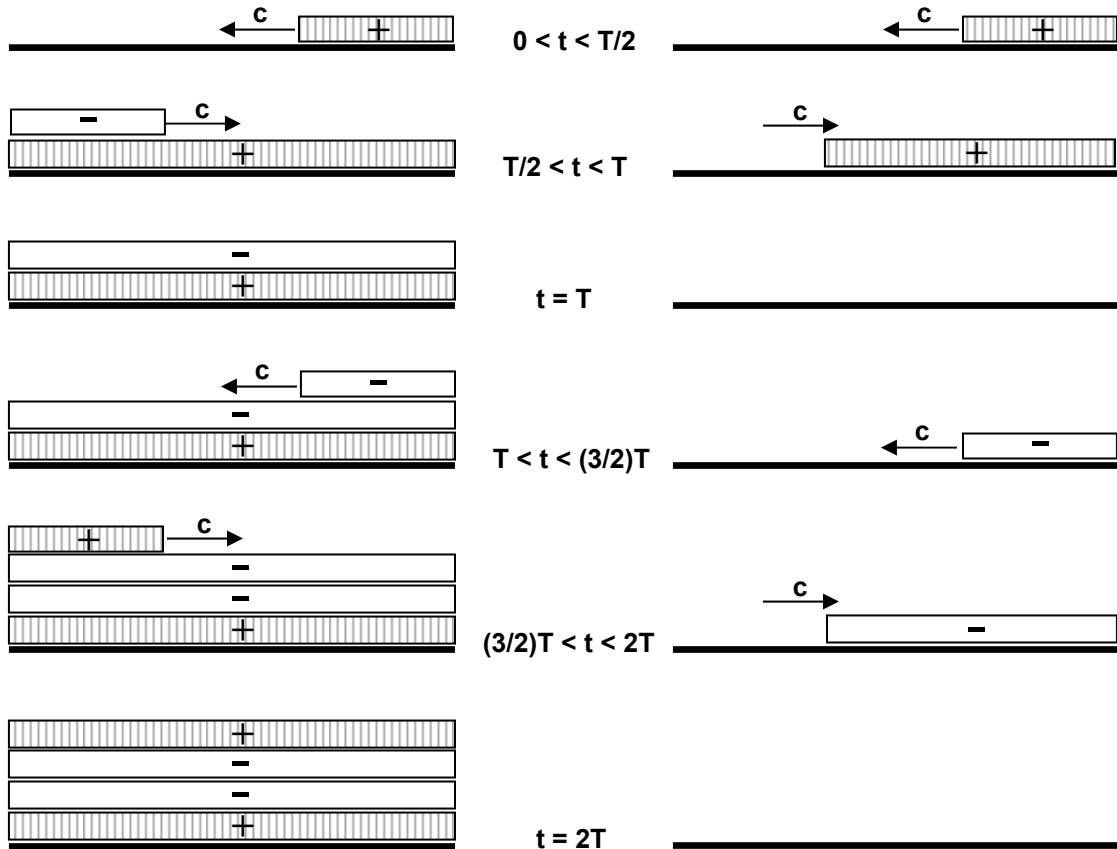


Figura 32. Superposición, para diferentes tiempos, de estados de sobrepresión y depresión en un conducto por propagación cíclica de ondas de presión.

Una variación de presión Δp (positiva o negativa) que sale de la válvula y llega al reservorio, es reflejada por éste con el signo opuesto. Por otra parte, una variación de presión Δp (positiva o negativa) que sale del reservorio y llega a la válvula, es reflejada por ésta con el mismo signo.

3.2.2 Celeridad de una onda de presión

El valor absoluto de la celeridad de propagación de una onda de presión, en un conducto de pared delgada deformable elásticamente, se determina mediante:

$$c = \frac{\sqrt{E/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{E}{E_m}}} \quad (182)$$

Donde E: módulo de elasticidad del agua (N/m^2), ρ : densidad del agua (kg/m^3), D: diámetro del conducto (m), e: espesor de la pared del conducto (m), E_m : módulo de elasticidad del material del conducto (N/m^2). Más adelante, mediante el desarrollo de las ecuaciones simplificadas de flujo impermanente, se describe la determinación de la ecuación (182).

Considerando los valores típicos para el agua de: $E=2.07 \times 10^9 N/m^2$ y $\rho=1000 kg/m^3$, el numerador de (182) es igual aproximadamente a 1440 m/s, que representa la celeridad de propagación de una onda de presión (sonica) en el agua. Es evidente que si $E_m \gg E$, el conducto no se comporta elásticamente y ese será el valor absoluto máximo de la celeridad. Por lo tanto,

la celeridad c es sustancialmente función del diámetro D , del espesor e y del módulo de elasticidad del material del conducto E_m . Aproximadamente, en conductos de material plástico los valores de c varían entre 300 y 400 m/s, mientras que, en conductos de materiales más rígidos c varía entre 980 y 1200 m/s.

3.2.3 Tiempo de cierre de válvula y sobrepresiones generadas

Una maniobra de cierre instantánea es prácticamente imposible, siempre existe un cierto tiempo para realizar el cierre de la válvula. En general, se distinguen dos tipos de maniobras: i) cierre rápido o brusco y ii) cierre lento. En la práctica, para definir ambas maniobras se compara el tiempo de cierre T_c con el ritmo del conducto $T=2L/c$ (ec. 181).

3.2.3.1 Maniobra de cierre rápido

La maniobra de cierre rápido o brusco se observa cuando se cumple la condición:

$$T_c \leq T = \frac{2L}{c} \quad (183)$$

En este caso la sobrepresión máxima se determina mediante la fórmula de Allievi:

$$\frac{\Delta p_{max}}{\rho g} = \Delta h_{max} = \frac{cU}{g} \quad (184)$$

Donde la celeridad de onda c (m/s) se calcula con la (182), g : aceleración de la gravedad (m/s^2) y U : velocidad de flujo (m/s). Por ejemplo, considerando una celeridad $c=1000$ m/s y una velocidad de diseño del orden de $U=1$ m/s; se obtiene una sobrepresión máxima del orden de 100 m de columna de agua.

En la Figura 33 se presentan los diagramas de sobrepresiones máximas para tres diferentes tiempos de cierre rápidos. El caso de cierre instantáneo ($T_c=0$) es obviamente un caso extremo particular de cierre rápido.

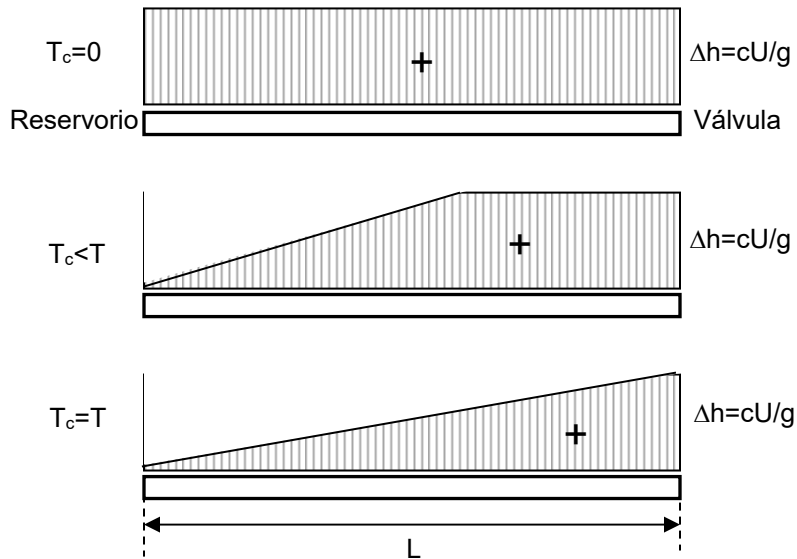


Figura 33. Diagramas de sobrepresiones máximas para diferentes tiempos de cierre rápidos.

3.2.3.2 Maniobra de cierre lento

La maniobra de cierre lento se observa cuando el tiempo de cierre T_c es mayor que el ritmo del conducto:

$$T_c > T = \frac{2L}{c} \quad (185)$$

En este caso la sobrepresión máxima se determina mediante la fórmula de Michaud:

$$\frac{\Delta p_{max}}{\rho g} = \Delta h_{max} = \frac{2L U}{g T_c} \quad (186)$$

Donde las variables ya han sido definidas anteriormente. El valor determinado mediante (186) es menor que el valor máximo determinado para la maniobra de cierre rápido. Se observa que la sobrepresión máxima puede reducirse aumentando convenientemente el tiempo de cierre T_c respecto al ritmo del conducto T .

En la Figura 34 se observa el diagrama de sobrepresiones máximas para un tiempo de cierre lento.

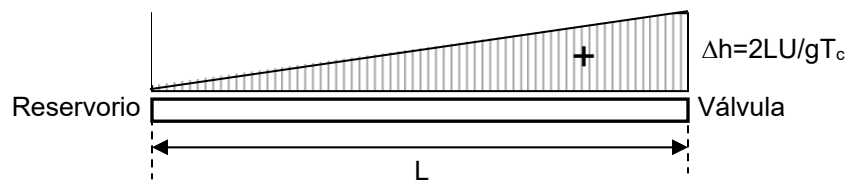


Figura 34. Diagrama de sobrepresiones máximas para tiempo de cierre lento.

3.2.4 Ecuaciones simplificadas de flujo impermanente elástico

Consideremos las ecuaciones (128) y (129) escritas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h^* + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - J \quad (187)$$

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} + Q \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \quad (188)$$

Donde $h^*=z+(p/\rho g)$ es la altura piezométrica y las demás variables ya han sido definidas. Desarrollando la derivada espacial en (187) y sustituyendo $Q=UA$ en la (188) y desarrollando las derivadas, se obtiene:

$$\frac{\partial h^*}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - J \quad (189)$$

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho U \frac{\partial A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial U}{\partial s} + UA \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \quad (190)$$

Consideremos la derivada total o material de una variable cualquiera F (presión, densidad, etc.) en un marco de referencia Lagrangiano expresada en términos de la aceleración local y convectiva, propia de un marco de referencia Euleriano. Si el observador se mueve solidario con la perturbación de la onda de presión, resulta $dF/dt=0$. Por lo tanto:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \quad (191)$$

Donde la $ds/dt=c$, es la celeridad de la onda. Despejando la celeridad c y dividiendo ambos miembros por la velocidad U en el conducto, se obtiene:

$$\frac{c}{U} = - \frac{\partial F / \partial t}{U \partial F / \partial s} \quad (192)$$

Como vimos anteriormente, la celeridad c es mucho más grande que la velocidad U . De la (192) se deduce que, los términos del tipo $U \partial F / \partial s$ son sustancialmente más chicos que los del tipo $\partial F / \partial t$, y por lo tanto, pueden ser despreciados.

En la (189) el término $U \partial U / \partial s$ puede ser despreciado respecto al término $\partial U / \partial t$, siendo ambos divididos por $1/g$. Esto implica que, en la ecuación dinámica se desprecia la altura de velocidad en el conducto, obteniéndose:

$$\frac{\partial h^*}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - J \quad (193)$$

En la (190), agrupando los términos primero y tercero, sacando factor común la densidad ρ , se observa que el tercero resulta despreciable respecto al primero. Asimismo, agrupando los términos segundo y quinto, sacando factor común el área A , se observa que el quinto resulta despreciable respecto al segundo. Por lo tanto, la ecuación de continuidad (190) se reduce a:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho A \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (194)$$

Consideremos que el flujo sea barotrópico y, por lo tanto, en la ecuación de continuidad (194), el área y la densidad pueden modificarse solo por el efecto de la presión: $A=A(p)$ y $\rho=\rho(p)$. Dividiendo la (194) por ρA , se obtiene:

$$\left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (195)$$

Siendo la altura piezométrica $h^*=z+p/\rho g = z+p/\gamma$, derivándola respecto al tiempo y considerando que la altura de posición z no varía en el tiempo, se obtiene:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} \left(1 - \frac{p}{E} \right) \quad (196)$$

Donde se ha utilizado la ley de Hooke: $d\rho/\rho = dp/E$, con E: módulo de elasticidad del agua, el cual es mucho mayor que las presiones p reinantes en los conductos, consecuentemente $p/E \ll 1$. Por lo tanto, de (196) se deduce que: $\partial p/\partial t = \gamma \partial h^*/\partial t$ y la ec. de continuidad (195) puede ser escrita como:

$$\gamma \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (197)$$

En esta instancia se trata de formular las expresiones para los dos términos encerrados en el paréntesis de la (197). Utilizando nuevamente la ley de Hooke, se tiene que el segundo término entre paréntesis es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{E} \quad (198)$$

Para un conducto circular de diámetro D, el primer término entre paréntesis es:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{1}{(\pi D^2/4)} \frac{d(\pi D^2/4)}{dp} = \frac{2}{D} \frac{dD}{dp} \quad (199)$$

A partir de la fórmula de Mariotte: $pD = 2e\sigma$, donde e es el espesor de la pared del conducto y σ el esfuerzo de tracción, se obtiene:

$$dp = \frac{2e}{D} d\sigma \quad (200)$$

Utilizando la ley de Hooke expresada como: $dD/D = d\sigma/E_m$, con E_m : módulo de elasticidad del material del conducto, la ecuación (200) puede ser escrita como:

$$dp = \frac{2eE_m}{D^2} dD \quad (201)$$

Sustituyendo la (201) en la (199) se obtiene finalmente:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{D}{eE_m} \quad (202)$$

Sustituyendo (198) y (202) en (197), la ecuación de continuidad se expresa como:

$$\gamma \left(\frac{D}{eE_m} + \frac{1}{E} \right) \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (203)$$

Despejando la variación temporal de la altura piezométrica de (203):

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{(E/\rho)}{\left(1 + \frac{D}{e} \frac{E}{E_m}\right)} \frac{\partial U}{\partial s} \quad (204)$$

De la ecuación (192), asumiendo $F=h^*$, se obtiene:

$$c = -\frac{\partial h^*/\partial t}{\partial h^*/\partial s} \quad (205)$$

Sustituyendo en (205) la expresión de $\partial h^*/\partial t$ dada por (204) y la expresión $\partial h^*/\partial s$ dada por (193) despreciando las pérdidas de energía, se obtiene:

$$c = -\frac{(E/\rho)}{\left(1 + \frac{D}{e} \frac{E}{E_m}\right)} \frac{\partial U/\partial s}{\partial U/\partial t} \quad (206)$$

Utilizando nuevamente la (192), asumiendo $F=U$, la (206) se expresa como:

$$c^2 = \frac{(E/\rho)}{\left(1 + \frac{D}{e} \frac{E}{E_m}\right)} \Rightarrow c = \pm \frac{\sqrt{E/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \frac{E}{E_m}}} \quad (207a),(207b)$$

La (207b) es la celeridad de onda de presión (sonica) en un conducto de pared delgada deformable elásticamente, cuyo valor absoluto fue presentado anteriormente en el apartado 3.2.2.

Sustituyendo (207a) en la (204), se obtiene:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} = -\frac{c^2}{g} \frac{\partial U}{\partial s} \quad (208)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (193) y (208), la primera multiplicada por $c=ds/dt$, se obtiene:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{\partial h^*}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\frac{c}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) - cJ \quad (209)$$

La (209) puede expresarse en términos de derivadas totales o materiales en un marco de referencia Lagrangiano como:

$$\frac{dh^*}{dt} = -\frac{c}{g} \frac{dU}{dt} - cJ \quad (210)$$

La ecuación (210) gobierna los fenómenos de flujo impermanente elástico en los conductos a presión. En la (210), como se observa en la (207b), la celeridad puede asumir valores positivos

o negativos, en función de la dirección de propagación de la onda de presión. Por lo tanto, la (210) representa un sistema de dos ecuaciones.

3.2.5 Resolución de las ecuaciones de flujo impermanente elástico

Para resolver la (210) conviene hacer referencia con c al módulo de la celeridad, especificando con el signo la dirección de propagación. Para una onda que se propaga en la dirección positiva de la coordenada espacial s se tendrá $c=ds/dt$. Tal relación describe la denominada "línea característica positiva" que se indica con C^+ . A lo largo de dicha línea vale la (210) que, utilizando para la pérdida de energía la fórmula de Darcy-Weisbach, podemos escribirla como:

$$\frac{dh^*}{dt} = -\frac{c}{g} \frac{dU}{dt} - c \frac{f}{D} \frac{U|U|}{2g} \quad (C^+) \quad (211a)$$

Para una onda que se propaga en la dirección negativa de la coordenada espacial s se tendrá que $c=-ds/dt$. Tal relación describe la denominada "línea característica negativa" que se indica con C^- . A lo largo de dicha línea vale la (210), que se escribe como:

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} + c \frac{f}{D} \frac{U|U|}{2g} \quad (C^-) \quad (211b)$$

Dichas relaciones permiten, con oportunas condiciones iniciales y al contorno, calcular numéricamente los valores de las variables dependientes h^* (altura piezométrica) y U (velocidad de flujo), discretizándolas con pasos de integración espacial Δs y temporal Δt , como se esquematiza en la Figura 35.

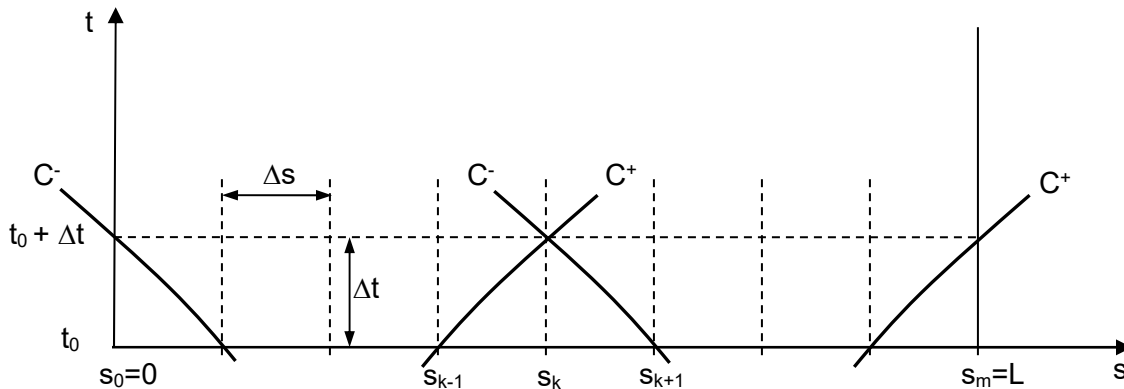


Figura 35. Representación esquemática de la discretización espacial y temporal.

De acuerdo a la representación esquemática de la Figura 35, podemos realizar la discretización de las ecuaciones (211a) y (211b), para las características positiva y negativa, respectivamente como:

$$h_k^{*n+1} - h_{k-1}^{*n} = -\frac{c}{g} (U_k^{n+1} - U_{k-1}^n) - \frac{f}{D} \frac{U_{k-1}^n |U_{k-1}^n|}{2g} \Delta s \quad (C^+) \quad (212a)$$

$$h_k^{*n+1} - h_{k+1}^{*n} = \frac{c}{g} (U_k^{n+1} - U_{k+1}^n) + \frac{f}{D} \frac{U_{k+1}^n |U_{k+1}^n|}{2g} \Delta s \quad (C^-) \quad (212b)$$

Donde $t_n = n \Delta t$, con n índice temporal $n=0, 1, 2, 3, \dots, N$ y $s_k = k \Delta s$, con k índice espacial $k=0, 1, 2, 3, \dots, m$.

Sumando las dos expresiones algebraicas (212a) y (212b) y despejando la altura piezométrica en $(n+1)\Delta t$, $k\Delta s$: se obtiene:

$$h_k^{*n+1} = \frac{1}{2} (h_{k-1}^{*n} + h_{k+1}^{*n}) + \frac{c}{2g} (U_{k-1}^n - U_{k+1}^n) - \frac{f}{D} \frac{\Delta s}{4g} (U_{k-1}^n |U_{k-1}^n| - U_{k+1}^n |U_{k+1}^n|) \quad (213)$$

Análogamente, restando a la expresión (212a) la (212b) y despejando la velocidad en $(n+1)\Delta t$, $k\Delta s$: se obtiene:

$$U_k^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{k-1}^n + U_{k+1}^n) + \frac{g}{2c} (h_{k-1}^{*n} - h_{k+1}^{*n}) - \frac{f}{D} \frac{\Delta s}{4c} (U_{k-1}^n |U_{k-1}^n| + U_{k+1}^n |U_{k+1}^n|) \quad (214)$$

La (213) y la (214) permiten calcular respectivamente la altura piezométrica y la velocidad, en el tiempo $(n+1)\Delta t$ a partir de las variables de flujo conocidas en un tiempo antecedente $n\Delta t$, en todos los puntos de cálculo $s_k = k\Delta s$ interiores del dominio, es decir, exceptuando los contornos ($k=0$ y $k=m$). Por lo tanto, para obtener la solución completa es necesario especificar las condiciones iniciales y las condiciones al contorno en los extremos aguas arriba y aguas abajo.

Las condiciones iniciales se refieren a los valores de altura piezométrica y velocidad que deben ser conocidos en el tiempo inicial $t_0 = n\Delta t$ ($n=0$) en todos los puntos de cálculo. Las condiciones al contorno, una para cada extremo del dominio de cálculo, pueden consistir en una altura piezométrica o una velocidad, constantes o variables en el tiempo, o una relación entre altura piezométrica y velocidad.

Es necesario señalar que, Δs y Δt están vinculados por la relación: $\Delta s = c \Delta t$, por lo cual, no pueden ser especificados arbitrariamente. Por lo general, se especifica la discretización espacial adoptando un valor de Δs y, consecuentemente, se determina Δt de acuerdo al valor conocido de la celeridad c .

3.2.6 Golpe de ariete: conducto deformable y densidad variable

En el apartado 3.1.2 se analizó el golpe de ariete en un conducto mediante el abordaje inelástico. En este apartado se presenta el análisis del mismo fenómeno mediante el abordaje elástico, a partir de la simulación numérica aplicando las ecuaciones (213) y (214).

Consideremos un sistema como el representado esquemáticamente en la Figura 30, asumiendo que el conducto es de longitud $L=1000$ m y diámetro $D=0.5$ m. Además, consideremos que la celeridad de propagación es $c=1000$ m/s y $h_0=10$ m. En tal caso, despreciando la pérdida de energía, la velocidad en el extremo aguas abajo del conducto es $U_{0s} = (2gh_0)^{1/2} = 14$ m/s. Consideremos en el extremo aguas abajo un obturador que regula la velocidad en el conducto, cuya sección completamente abierta es $A_{e \text{ max}} = 0.0148$ m². Por continuidad se tiene que la velocidad a lo largo del conducto en flujo permanente es $U_0 = 1.65$ m/s.

Si discretizamos el conducto adoptando $\Delta s=100$ m, quedan conformados m tramos: $m=L/\Delta s=10$. Además, el paso de integración temporal Δt resulta: $\Delta t=\Delta s/c=0.1$ segundo.

La condición inicial es representada por:

$$h^*(s_k,0)=h_0 \quad y \quad U(s_k,0)=U_0 \quad , \quad k=1,2,\dots,10 \quad (215)$$

La condición en el contorno aguas arriba (embocadura del conducto con el reservorio) es:

$$h^*(s_0,t_n)=h_0 \quad , \quad n=0,1,2,\dots,N \quad (216)$$

La condición en el contorno aguas abajo, simulando un cierre instantáneo del obturador, se puede asumir como:

$$U(s_m,t_n)=0 \quad , \quad n=1,2,\dots,N \quad (217)$$

Sistematizando la condición al contorno aguas arriba ($k=0 \rightarrow s_0=0$) con la línea característica negativa (212.b) se obtiene:

$$h_0 = h_{k=1}^{*n} + \frac{c}{g} (U_{k=0}^{n+1} - U_{k=1}^n) + \frac{f}{D} \frac{U_{k=1}^n |U_{k=1}^n|}{2g} \Delta s$$

Es decir, despejando la velocidad en el contorno aguas arriba en el tiempo $(n+1)\Delta t$:

$$U_{k=0}^{n+1} = U_{k=1}^n + \frac{g}{c} (h_0 - h_{k=1}^{*n}) - \frac{f}{D} \frac{\Delta s}{2c} U_{k=1}^n |U_{k=1}^n| \quad (218)$$

Sistematizando la condición al contorno aguas abajo ($k=m \rightarrow s_m=L$) con la línea característica positiva (212.a) se obtiene:

$$h_{k=m}^{*n+1} = h_{k=m-1}^{*n} - \frac{c}{g} (U_{k=m}^{n+1} - U_{k=m-1}^n) - \frac{f}{D} \frac{\Delta s}{2g} U_{k=m-1}^n |U_{k=m-1}^n| \quad (219)$$

Donde la velocidad en el contorno aguas abajo ($k=m$), representa la ley de cierre, la cual en el caso de cierre instantáneo es dada por la (217), es decir, en el primer Δt se anula y permanece igual a cero durante todo el tiempo de la simulación.

La aplicación de las relaciones (213) y (214), con las condiciones iniciales indicadas en la (215) y las condiciones al contorno expresadas por las relaciones (218) y (219) permiten simular las evoluciones discretas, en el espacio y en el tiempo, de la altura piezométrica y de la velocidad a lo largo del conducto.

Asumiendo en primer lugar $f=0$ (pérdidas de energía nulas) y el tiempo de "cierre instantáneo" $T_c=0.1$ s (que consiente el paso de integración temporal adoptado), en la Figura 36 se presenta la evolución temporal de la altura piezométrica h^* en el obturador ($s=L=1000$ m) y en $s=L/2=500$ m, y de la velocidad en la embocadura con el reservorio ($s=0$ m) y $s=500$ m.

En la Figura 36 se observa que el fenómeno se repite periódicamente de acuerdo al ritmo del conducto: $T=2L/c=2$ s; sin experimentar ninguna atenuación, debido a que se han despreciado las pérdidas de energía en el conducto ($f=0$).

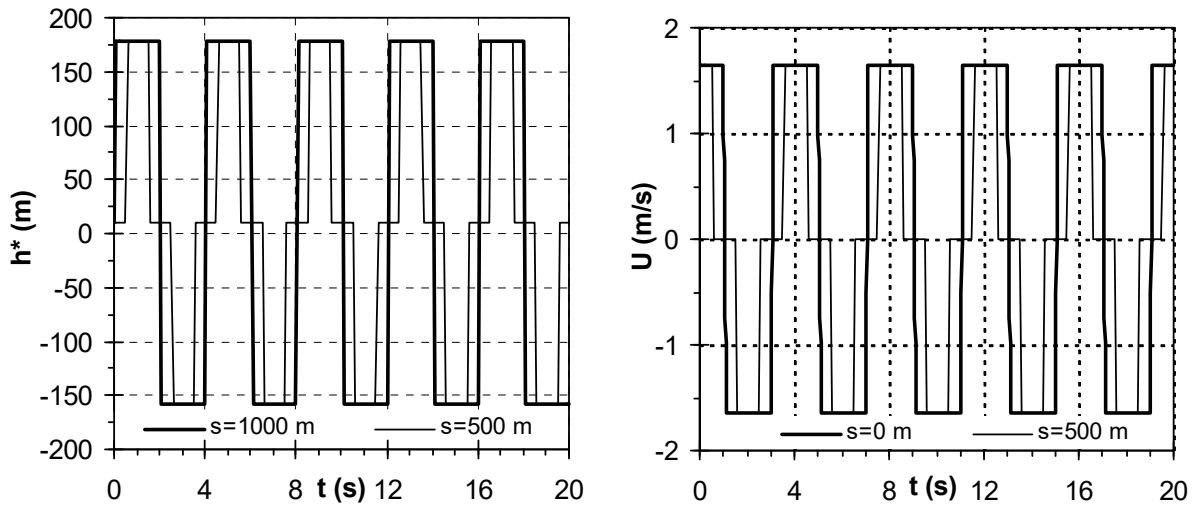


Figura 36. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) y en $s=L/2$ (izquierda) y de la velocidad en la embocadura con el reservorio ($s=0$) y $s=L/2$ (derecha), para cierre instantáneo ($T_c=0.1$ s) despreciando pérdidas de energía en el conducto ($f=0$).

Si se tienen en cuenta las pérdidas de energía en el conducto, las condiciones iniciales se modifican, ya que la altura piezométrica inicial no es constante como en el caso anterior ($f=0$), sino que disminuye desde el reservorio (extremo aguas arriba) al obturador (extremo aguas abajo).

Consideremos, por simplicidad, un valor constante del factor de fricción de Darcy-Weisbach $f=0.02$. La situación de flujo permanente inicial se obtiene de un balance de energía, donde se desprecia la altura de velocidad en el extremo aguas abajo (hipótesis incluida también en las ecuaciones de flujo impermanente elástico). Por lo tanto, la altura piezométrica inicial ($t=0$) a lo largo del conducto, es:

$$h^*(s_k,0) = h_0 - \frac{f k \Delta s U_0^2}{D 2g} \quad y \quad U(s_k,0) = U_0 \quad k = 1,2,\dots,10 \quad (220)$$

Para el mismo caso de "cierre instantáneo" $T_c=0.1$ s, en la Figura 37 se presentan los resultados de la evolución temporal de la altura piezométrica h^* en el obturador ($s=L=1000$ m) y en $s=L/2=500$ m, y de la velocidad en la embocadura con el reservorio ($s=0$ m) y $s=500$ m, incluyendo las pérdidas de energía en el conducto asumiendo $f=0.02$.

En la Figura 37 se observa que el fenómeno se repite periódicamente de acuerdo al ritmo del conducto: $T=2L/c=2$ s, pero debido a las pérdidas de energía la perturbación se va amortiguando a medida que avanza el tiempo.

En ambos casos presentados en las Figuras 36 y 37, la sobrepresión máxima al final del primer ritmo son idénticas.

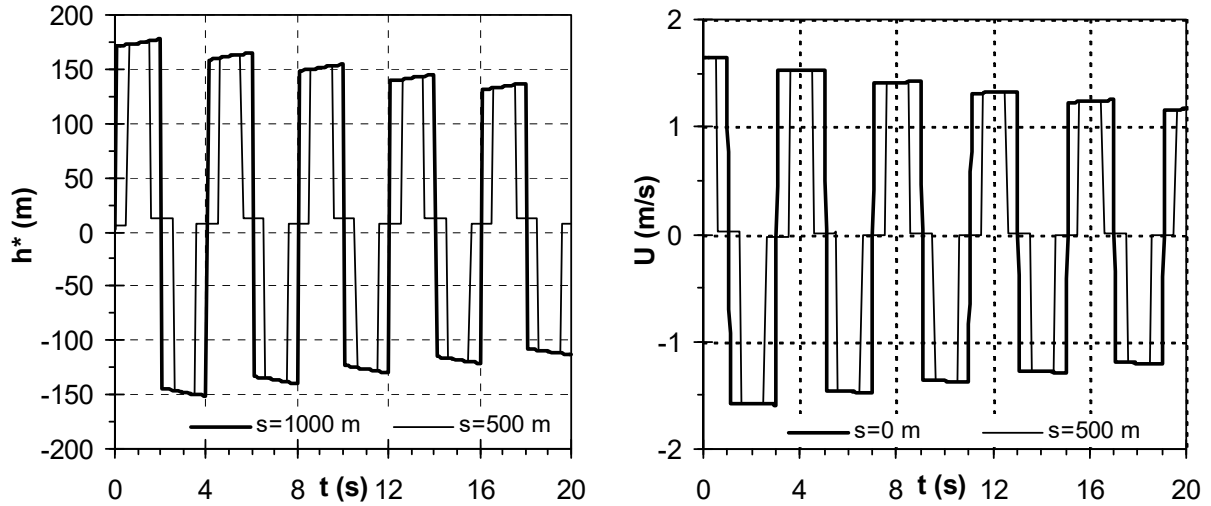


Figura 37. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) y en $s=L/2$ (izquierda) y de la velocidad en la embocadura con el reservorio ($s=0$) y $s=L/2$ (derecha), para cierre instantáneo ($T_c=0.1$ s) incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$).

3.2.6.1 Influencia del tiempo de cierre

En los dos casos anteriores se consideró un cierre instantáneo, aunque en realidad, el proceso de discretización numérica permitió adoptar un tiempo finito muy pequeño $T_c=\Delta t=0.1$ s.

Consideremos ahora el efecto de la duración de la maniobra de cierre, suponiendo una maniobra de cierre lineal, indicada con (A). En tal caso, en la (219), el valor de la velocidad en el contorno aguas abajo ($k=m$) es dada por:

$$(A): \quad U_{k=m}^{n+1} = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{t_n}{T_c} \right) & , \quad t_n \leq T_c \\ 0 & , \quad t_n > T_c \end{cases} \quad (221)$$

con $t_n=n \Delta t$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots, N$).

En la Figura 38 se presenta la evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para distintos tiempos de cierre (maniobra lineal) e incluyendo pérdidas de energía en el conducto. En relación a los resultados que se observan en la Figura 38, pueden realizarse las siguientes consideraciones:

i) El valor de la sobrepresión máxima en el obturador (correspondiente a la altura piezométrica máxima) no varía sustancialmente para tiempos de cierre menores o iguales al ritmo del conducto ($T_c \leq T$), que denominamos cierre rápido. Los valores máximos de sobrepresión se producen en $t=T_c$.

ii) Para tiempos de cierre mayores que el ritmo ($T_c > T$), que denominamos cierre lento, la sobrepresión máxima en el obturador se reduce a medida que aumenta el tiempo de cierre. Los valores máximos de sobrepresión no se producen en $t=T_c$ (finalización de la maniobra de cierre) sino en tiempos que son múltiplos del ritmo del conducto.

iii) El valor de la subpresión máxima en el obturador (correspondiente a la altura piezométrica mínima) no varía sustancialmente para tiempos de cierre menores o iguales al ritmo del conducto ($T_c \leq T$).

iv) Para tiempos de cierre mayores que el ritmo ($T_c > T$), es decir cierre lento, la máxima subpresión es menor que la correspondiente a cierre rápido, pero no se atenúa monótonicamente a medida que aumenta el tiempo de cierre.

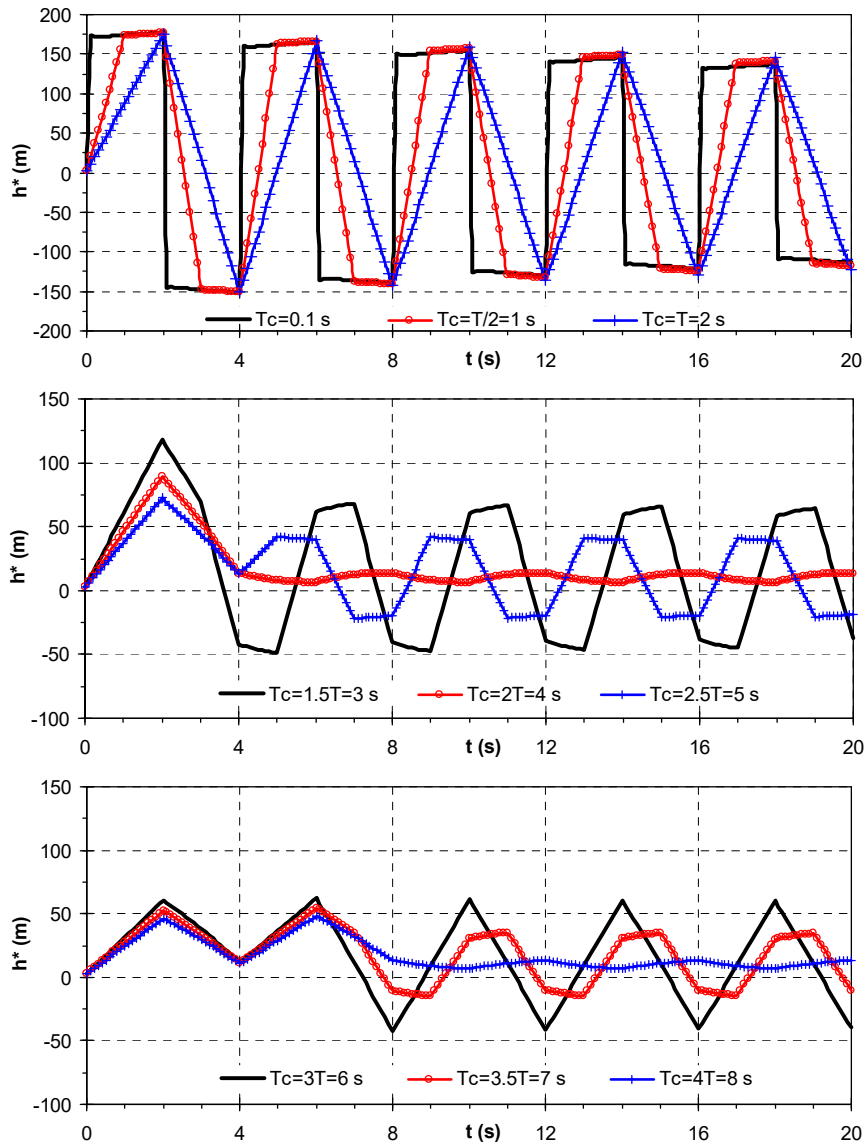


Figura 38. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para distintos tiempos de cierre (maniobra lineal) incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$).

En la Figura 39 se observa la evolución de los valores máximos de sobrepresión y subpresión en el obturador, en función del tiempo de cierre, considerando maniobra lineal e incluyendo pérdidas de energía. Para comparación se agregaron los valores que se obtienen con el abordaje inelástico, calculados con las ecuaciones (180a) y (180b).

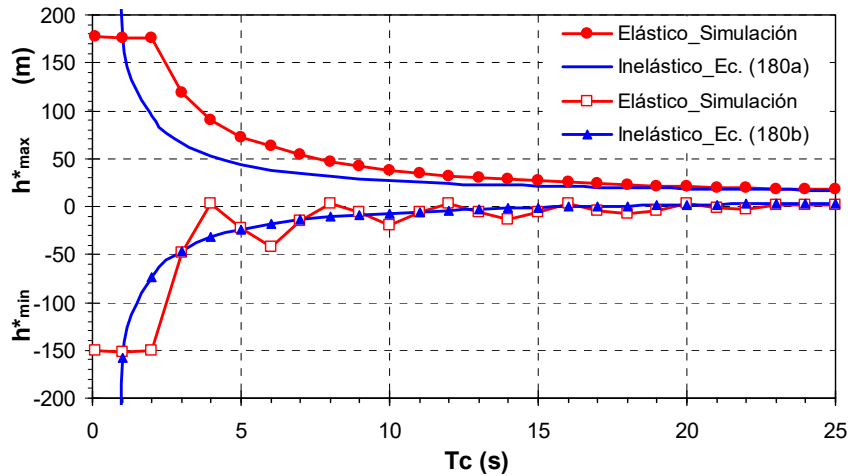


Figura 39. Alturas piezométricas (máxima y mínima) en el obturador ($s=L$) en función del tiempo de cierre (maniobra lineal) incluyendo pérdidas de energía en el conducto y considerando abordajes elástico e inelástico.

Se nota que el abordaje inelástico produce resultados comparables con el elástico, solo si las maniobras son lentas, es decir, aproximadamente para tiempos de cierre superiores aproximadamente a 6 veces el ritmo del conducto: $T_c > 6T = 12$ s.

3.2.6.2 Influencia del tipo de maniobra de cierre

Consideremos ahora el efecto del tipo de la maniobra de cierre (evolución temporal del cierre), suponiendo, además de la maniobra de cierre lineal dada por (221); maniobras de cierre exponencial indicadas con (B) y (C). En tal caso, el valor de la velocidad en el contorno aguas abajo ($k=m$) es dada respectivamente por:

$$(B): \quad U_{k=m}^{n+1} = \begin{cases} U_0 \text{EXP}\left(-\alpha \frac{t_n}{T_c}\right) & , \quad t_n \leq T_c \\ 0 & , \quad t_n > T_c \end{cases} \quad (222)$$

$$(C): \quad U_{k=m}^{n+1} = \begin{cases} U_0 \left\{ 1 - \text{EXP}\left[-\alpha \left(1 - \frac{t_n}{T_c}\right)\right] \right\} & , \quad t_n \leq T_c \\ 0 & , \quad t_n > T_c \end{cases} \quad (223)$$

con $t_n = n \Delta t$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots, N$).

En la Figura 40 se representan las distintas maniobras de cierre dadas por (221), (222) y (223), donde $\alpha=4$.

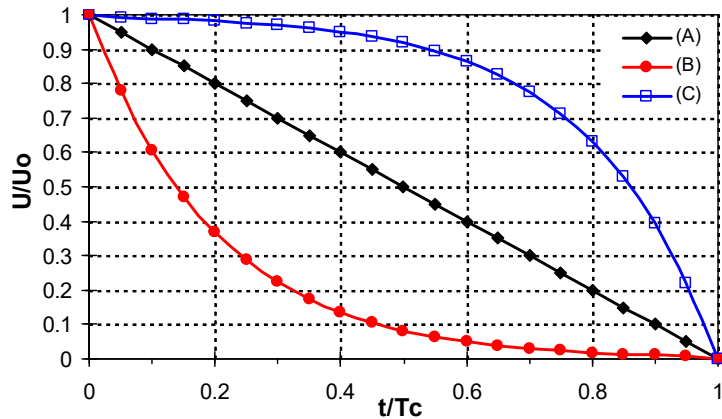


Figura 40. Evolución temporal de las maniobras de cierre.

En la Figura 41 se observa la evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para un tiempo de cierre igual al ritmo del conducto: $T_c=T=2$ s (cierre rápido), considerando las distintas maniobras de cierre e incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$). La maniobra indicada con B es exponencial rápidamente decreciente en la primera mitad del ritmo ($t=T/2$), la cual produce una sobrepresión máxima en el obturador ligeramente superior a las que producen las maniobras A y C. En otras palabras, las diferencias no son significativas. Lo mismo ocurre con las subpresiones máximas.

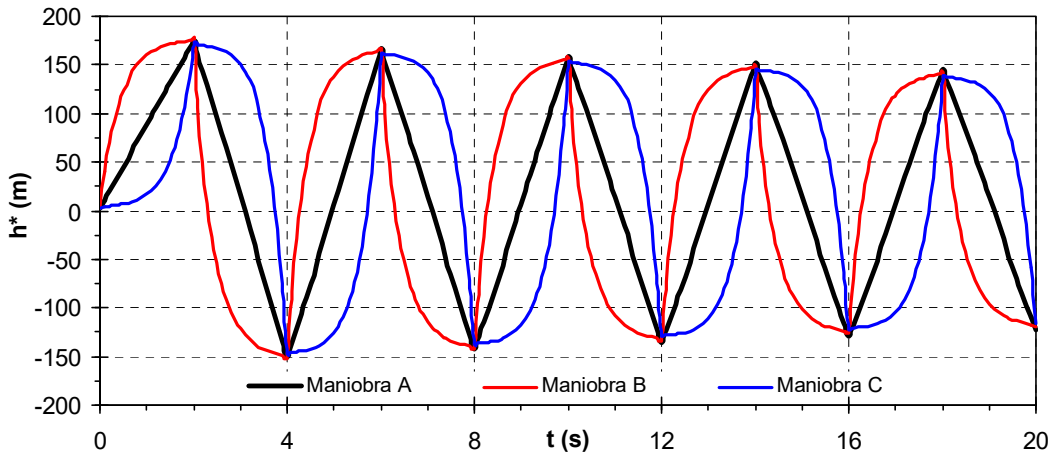


Figura 41. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para $T_c=T=2$ s (cierre rápido) y distintos tipos de maniobras de cierre, incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$).

En la Figura 42 se observa la evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para un tiempo de cierre igual a: $T_c=1.5T=3$ s (cierre lento), considerando las distintas maniobras de cierre e incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$). Se observa que, no obstante se trate de un cierre lento ($T_c>T$), la maniobra B produce una sobrepresión máxima en el obturador casi igual a la correspondiente a un cierre rápido $T_c\leq T$ (ver Figura 41). Dicha sobrepresión es superior a la que produce la maniobra lineal A y ligeramente superior a la que produce la maniobra C. Lo mismo ocurre con las subpresiones máximas.

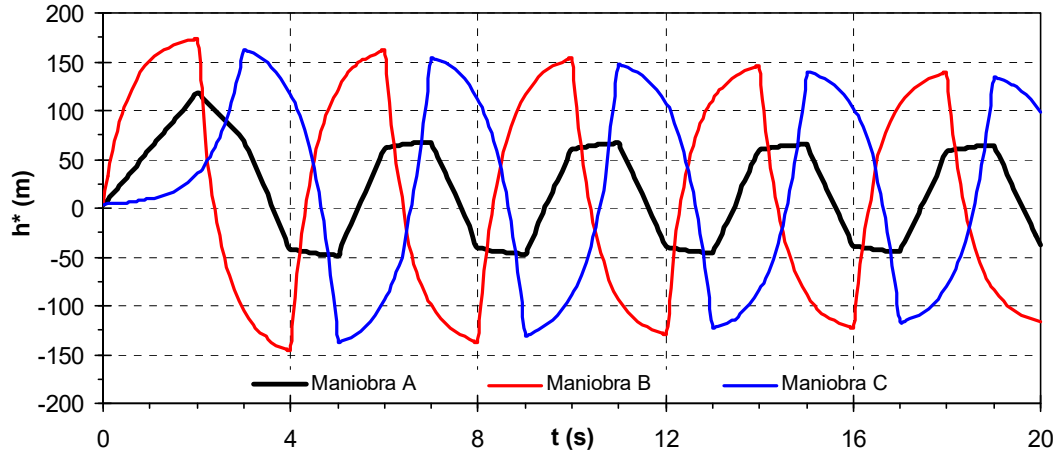


Figura 42. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para $T_c=1.5T=3$ s (cierre lento) y distintos tipos de maniobras de cierre, incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$).

En la Figura 43 se observa la evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para un tiempo de cierre igual a: $T_c=3T=6$ s (cierre lento), considerando las distintas maniobras de cierre e incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$). Se observa que, la maniobra B produce una sobrepresión máxima en el obturador 2.15 veces mayor que la que produce la maniobra lineal A y aproximadamente 2.18 veces mayor que la estimada con la fórmula de Michaud (186) para cierre lento. Por otra parte, la misma es similar a la que produce la maniobra C, la cual es ligeramente superior a la B solo a partir de $t>2T=4$ s.

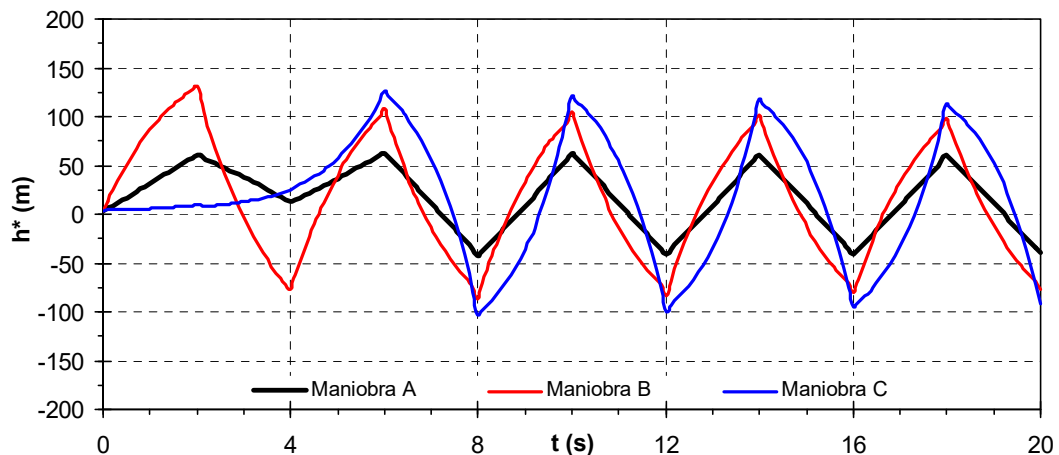


Figura 43. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para $T_c=3T=6$ s (cierre lento) y distintos tipos de maniobras de cierre, incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$).

En la Figura 44 se presenta la evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para $T_c=4T=8$ s (cierre lento). Ante los distintos tipos de maniobras de cierre, se observa un comportamiento similar al comentado en el caso anterior (Figura 43).

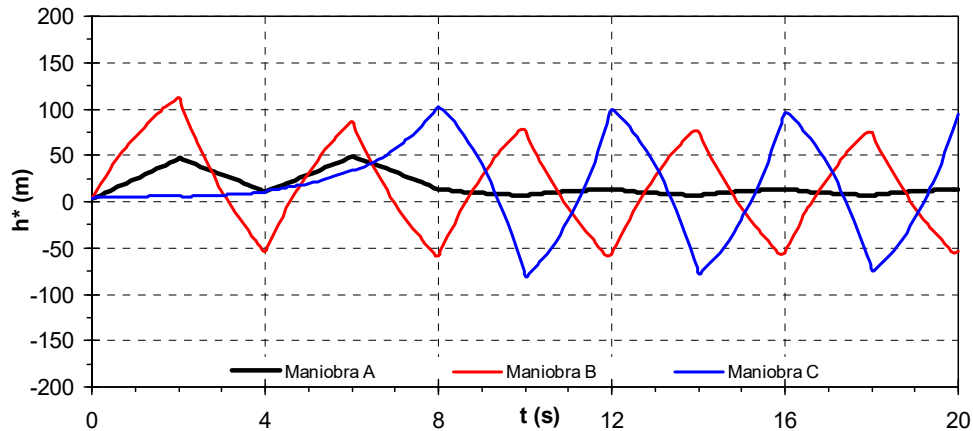


Figura 44. Evolución temporal de la altura piezométrica en el obturador ($s=L$) para $T_c=4T=8$ s (cierre lento) y distintos tipos de maniobras de cierre, incluyendo pérdidas de energía en el conducto ($f=0.02$).

En síntesis, se observa que el tipo de maniobra de cierre tiene una influencia muy importante en los resultados. En primer lugar, la evolución temporal del fenómeno en todos los casos (cierre rápido o lento) es diferente para cada una de las maniobras de cierre consideradas. Por otra parte, con respecto a los valores máximos y mínimos de altura piezométrica en el obturador, se observa que:

- i) Para cierre rápido ($T_c < T$) la sobrepresión máxima (correspondiente a la altura piezométrica máxima) y la subpresión máxima (correspondiente a la altura piezométrica mínima) son independientes del tipo de maniobra de cierre, ya que sus valores no varían significativamente.
- ii) Para cierre lento ($T_c > T$), la maniobra de cierre A (lineal) produce sobrepresiones y subpresiones máximas, siempre mucho menores que las correspondientes a las maniobras de cierre B y C.

En el caso de detenimiento de una bomba, el arresto instantáneo del motor (por interrupción del suministro de energía eléctrica) no es el tiempo de cierre T_c , ya que el rotor de la bomba continua moviéndose por la inercia del flujo hasta que el caudal se va anulando progresivamente. Por lo tanto, el tiempo de cierre puede asociarse al tiempo de agotamiento del caudal, el cual puede estimarse con la fórmula experimental de Mendiluce Rosich (1965, 1972).

En tal caso, una reducción exponencial de la velocidad, como la expresada genéricamente por la maniobra de cierre B, representará mejor la evolución temporal del cierre. De acuerdo a lo expresado en i), si el tiempo de agotamiento del caudal es menor o igual que el ritmo del conducto, los valores de sobrepresión máximas calculadas con la expresión (184) de Allievi serán correctos. Por otra parte, según lo expresado en ii), si el tiempo de agotamiento del caudal es mayor que el ritmo del conducto, los valores de sobrepresión máximas calculadas con la expresión (186) de Michaud (válida para cierre lineal) serán mucho menores que los valores reales del sistema.

3.2.7 Protección contra el golpe de ariete

Tal como ha sido descrito, el fenómeno del golpe de ariete genera sobrepresiones y subpresiones muy importantes en los conductos. Cuando la longitud de la tubería es muy grande, como por ejemplo en los acueductos, éstas alcanzan valores muy altos, por lo cual se debería sobredimensionar el espesor de las tuberías para que puedan soportarlas. Por tal motivo se utilizan dispositivos que amortigüen estas presiones y permitan proteger los conductos. A continuación, se detallan sintéticamente algunos de ellos:

Chimeneas de equilibrio. Para proteger una conducción puede colocarse, antes del obturador, un reservorio que permita transformar una onda de sobrepresión en una semioscilación positiva y una onda de subpresión en una semioscilación negativa (ver Figura 45). Tal dispositivo se denomina *chimenea de equilibrio* y generalmente se utiliza en una presa hidroeléctrica para proteger los conductos de aducción que conectan el embalse con la casa de máquinas.

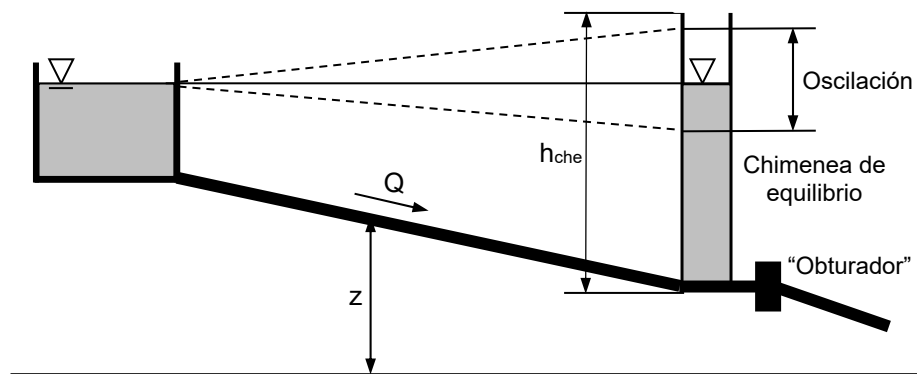


Figura 45. Representación esquemática de la inserción de una chimenea de equilibrio.

Cámaras de aire. Para proteger una instalación de impulsión con una chimenea de equilibrio, la altura de la misma debería ser mayor que la altura manométrica H_m provista por la bomba. Generalmente dicha altura es importante, por lo cual el costo de una chimenea es muy grande. Por lo tanto, la chimenea de equilibrio es reemplazada por una *Cámara de aire* (ver Figura 46).

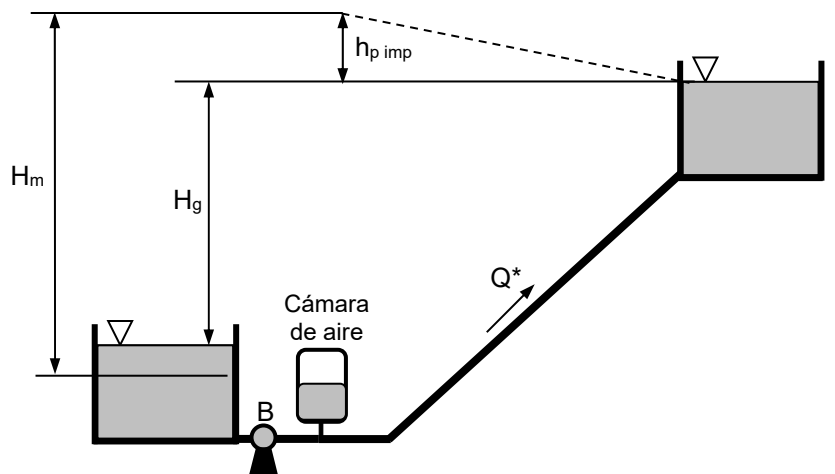


Figura 46. Representación esquemática de la inserción de una cámara de aire en una instalación de impulsión.

La misma consiste en una cámara cerrada de dimensiones reducidas, que en la parte superior contiene un determinado volumen de aire, el cual se comprime o se expande, amortiguando las ondas de sobrepresión o subpresión producidas por el golpe de ariete como consecuencia de un detenimiento repentino de la bomba.

Válvula Anticipadora de Presión y Válvulas de Aire. Una alternativa para protección de una impulsión, consiste en la instalación de una *Válvula Anticipadora de Presión* (VAP) para contrarrestar las ondas de presión positiva y negativa. Se trata de una válvula automática, diseñada para proteger bombas y conductos de la propagación de ondas de presión ocasionadas por el arranque y detención de bombas, especialmente en el caso de detención abrupta a causa de un corte de energía eléctrica. La VAP se complementa en toda la conducción con *Válvulas de Aire* (VA), cuya función es que no sea superada una especificada depresión.

Tanques de carga. Con el fin de atenuar una onda de presión negativa, estos tanques permiten el ingreso de agua en el conducto principal. El flujo es unidireccional, es decir, solamente pueden alimentar a la conducción, pero no a la inversa (Figura 47). Para lograr esto, el sistema posee una *Válvula de No Retorno* (VNR) en la tubería de conexión a la conducción principal.

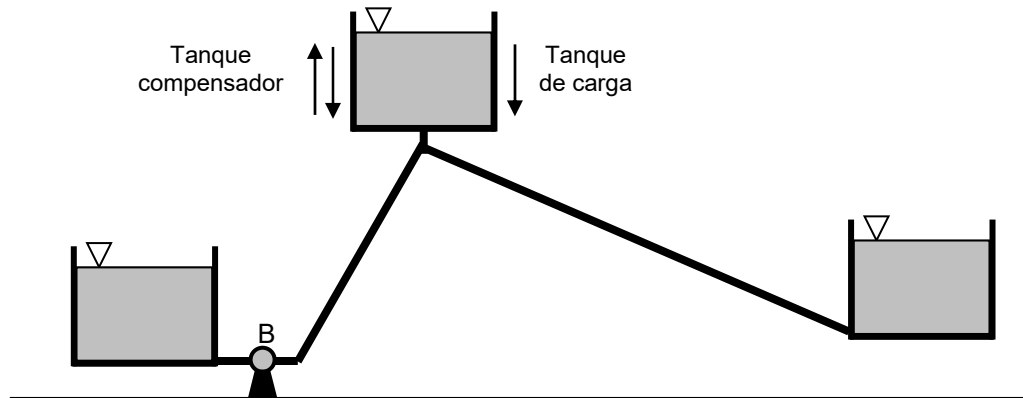


Figura 47. Representación esquemática de la inserción de tanques de carga y compensadores en una instalación de impulsión.

Tanques compensadores. En estos tanques el flujo es bidireccional; ya que, ante una onda negativa (subpresión), descarga agua en la tubería; mientras que, ante una onda positiva (sobrepresión), alivia a la tubería permitiendo la erogación del caudal de la misma (Figura 47). Este último dispositivo, además, regula las presiones estáticas en el caso del detenimiento del sistema.

4. BIBLIOGRAFÍA

Colebrook, C.F. (1939). Turbulent Flow in Pipes, with particular reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11(4), 133–156.

Cross, H. (1936). Analysis of flow in networks of conduits or conductors. *Engineering Experiment Station. Bulletin 286*.

Darcy, H. (1857). Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. París, Imprimerie impériale.

Defina (2010). Moto Vario nelle Condotte. Università degli Studi di Padova. Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Marittima, Ambientale e Geotecnica.

Draad, A.A., Kuiken, G.D.C. Y Nieuwstadt, F.T.M. (1998). Laminar-turbulent transition in pipe flow for Newtonian and non-Newtonian fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 377, 267-312.

Eckhardt, B. (2018). Transition to turbulence in shear flows. *Physics Fluid Dynamics*. Jan. 2018.

EPA (2000). EPANET 2: Users Manual, U.S. Environmental Protection Agency, Report EPA/600/R-00/057.

Ghetti, A. (1996). Idraulica. Seconda edizione. Librería Cortina. Padova, Italia.

Guaycochea, D. (1995). Fórmulas sencillas para el cálculo de longitudes equivalentes de accesorios teniendo en cuenta la rugosidad de la tubería. *Ingeniería Hidráulica en México*. X(2), 53-58.

Haaland, S.E. (1983). Simple and explicit formulas for the friction-factor in turbulent pipe flow, *Trans. ASME, JFE*, 105, 89, 1983.

Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*. 20: 161-207.

Marchi y Rubatta (1981). *Meccanica dei Fluidi*. UTET-Torino, Italia.

Mendiluche Rosich, E. (1965). Tiempos de parada en las impulsiones. *Revista de Obras Públicas*, pp. 121-125.

Mendiluche Rosich, E. (1972). Golpe de ariete: Nueva comprobación analítica y experimental de la fórmula de tiempo de parada en impulsiones. *Revista de Obras Públicas*, pp. 575-586.

Moody, L.F. (1944). Friction factor for pipe flow. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 66, 671-678, 1944.

Mullin, T. and Peixinho, J. (2006). Transition to Turbulence in Pipe Flow. *Journal of Low Temperature Physics*, 145, 75-88.

Nikuradse, J. (1933). Stromungsgesetz in rauhren rohren. *VDI Forschungshefte*, 361.

Orlú, R, Fiorini, T, Segalini, A, Bellani, G, Talamelli, A and Alfredsson, PH. (2017). Reynolds stress scaling in pipe flow turbulence first results from Ciclope. *Phil. Trans. R. Soc. A* 375 (2089), 20160187.

Orr, W.M.F. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid, Part I: A perfect liquid; Part II: A viscous liquid, *Proc. Roy. Irish Acad.*, A, 27, 9-68 and 69-138.

Prandtl, L. (1933). Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. *Z.VDI*, 77, 105-114.

Rayleigh, L. (1880). On the stability of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, 11, 57.

Reynolds, Osborne (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London* 35 (224-226), 84-99.

Schlichting, H. (1960). *Boundary Layer Theory*. New York, MacGrawHill.

Shames, I.H. (1995). *Mecánica de Fluidos*. McGraw Hill Interamericana, Bogotá.

Sommerfield, A. (1908). Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. *Atti Congr. Int. Math. 4th Rome*.

Swamee, P.K. y Jain, A.K. (1976). Explicit equation for pipe flow problems. *Journal of Hydraulic Division, ASCE*, 102(5), 657-664, 1976.

von Karman, T. (1930). Mechanische aehnlichkeit und turbulenz. In *Third international congress on applied mechanics, Stockholm, Sweden*, pp. 85–93.

White, F.M. (1974). *Viscous Fluid Flow*. McGraw Hill, Inc., New York.

Williams, G.S. y Hazen, A. (1933). *Hydraulic Tables*. John Wiley and Sons. New York, 3rd Ed.

Willmarth, W.W., Lu, S.S. (1972). Structure of the Reynolds stress near the wall. *Journal of Fluid Mech.* 55, 65–92.