

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática



## **TESIS DOCTORAL**

Grafos  $\{k\}$ -romanos : estudio de la complejidad  
computacional de problemas de decisión asociados.

Autor: Lic. Lara Fernández  
Directora: Dra. Valeria Leoni

Abril del 2026

---

# Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me acompañaron a lo largo de esta etapa, que culmina con la finalización de esta tesis doctoral.

Gracias Iván por ser mi compañero incondicional y por todo el apoyo durante mi carrera, incluso desde antes de empezar.

A mis amigos y compañeros, gracias por la motivación diaria y por transformar estos años de intenso trabajo en una experiencia mucho más placentera y compartida.

También quiero agradecer a cada uno de los docentes y colegas que colaboraron en mi formación. Sus enseñanzas y su pasión me inspiraron para elegir esta carrera.

Gracias a los jurados, Dr. Luciano Grippio y Dra. María Pía Mazzoleni, y especialmente al Dr. Pablo Torres por el tiempo y la dedicación en la revisión. Sus comentarios enriquecieron la versión final de esta tesis.

Finalmente, quiero agradecer especialmente a mi directora Valeria Leoni por su dedicación, generosidad y paciencia. Gracias infinitas por todos estos años de trabajo conjunto, por todo el tiempo dedicado y por hacerme sentir siempre acompañada cada paso de este proceso.



Esta tesis doctoral fue realizada durante el período Abril 2020 – Noviembre 2025 con Beca Interna Doctoral otorgada por el CONICET. Además fue parcialmente financiada por los siguientes proyectos de investigación en los cuales fui o soy integrante:

- UNR - 80020190100039UR: *Estudio de la complejidad computacional de una nueva variante del problema de dominación en grafos*. Directora: Valeria Leoni. Período: 2023 - 2026.
- CONICET - PIP 0227: *Algoritmos, estudio estructural de grafos y enfoque poliédrico de problemas de optimización combinatoria*. Investigadora titular: Mariana Escalante. Período: 2023 - 2025.
- Agencia I+D+i - PICT - 2020 - SERIE A - 03032: *Análisis de la complejidad computacional de problemas de optimización combinatoria y diseño de algoritmos para su resolución*. Investigadora responsable: Graciela Nasini. Período: 2021 - 2024
- UNR - ING-539: *"Variaciones del problema de dominación en grafos"*. Directora: Gabriela Argiroffo. Período: 2017 - 2021.

---

# Resumen

En esta tesis se plantean y abordan nuevos cuestionamientos en relación a una reciente variante (introducida en la literatura en 2016 y poco estudiada aún) de la dominación clásica en grafos definida y estudiada desde los años 50.

A lo largo de los años, se han propuesto numerosas variantes del concepto clásico de dominación desde el punto de vista del comportamiento en las vecindades [26]. Una de estas variantes es la  $\{k\}$ -dominación, donde  $k$  es un número entero positivo. Dado un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V$ , una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  se denomina *función  $\{k\}$ -dominante* de  $G$  si cada  $v \in V$  satisface  $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq k$ , donde  $N[v]$  es la vecindad cerrada del vértice  $v$ , es decir el conjunto formado por el vértice  $v$  y todos sus vértices adyacentes [17].

En 2016, Chellali et al. [10] introdujeron la dominación  $\{2\}$ -romana, también denominada dominación italiana en trabajos posteriores (por ejemplo, en [27]) como una variante de la  $\{k\}$ -dominación [17] para  $k = 2$ : una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  se denomina *función  $\{2\}$ -romana dominante* de  $G$  si  $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 2$  para cada  $v \in V$  con  $f(v) = 0$ . El peso mínimo de una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  se denota por  $\gamma_{\{R2\}}(G)$ . Varios resultados de NP-completitud, así como instancias polinomiales del problema de decisión asociado a la dominación  $\{2\}$ -romana, se presentan en [10, 27, 36, 37], y los más recientes en uno de los trabajos derivados de esta tesis [20].

Todo grafo  $G$  satisface  $\gamma(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq 2\gamma(G)$  (véase, por ejemplo, [33]), donde  $\gamma(G)$  es el tan conocido y estudiado número de dominación clásico. Se dice que un grafo  $G$  es un grafo  $\{2\}$ -romano (o un grafo *italiano*) si  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 2\gamma(G)$  [33]. En [27] se presenta una caracterización solo de los grafos árboles  $\{2\}$ -romanos en términos de cuatro operaciones con grafos. La propiedad  $\{2\}$ -romana de un grafo general se caracteriza en [22] por la existencia de una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso mínimo que asume solo valores 0 y 2.

Inspirada en el trabajo de [10], la variante “romana” de la  $\{2\}$ -dominación para cualquier entero positivo  $k$  fue introducida y estudiada por Wang et al. [40] en 2021: una *función  $\{k\}$ -romana dominante* de un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V$  es una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  que satisface  $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq k$  para cada vértice  $v \in V$  con  $f(v) = 0$ . El peso mínimo de una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $G$  se denomina *número de dominación  $\{k\}$ -romana de  $G$*  y se denota por  $\gamma_{\{Rk\}}(G)$ .

---

El problema de decisión asociado con la dominación  $\{k\}$ -romana es NP-completo, incluso para grafos planares bipartitos y grafos bipartitos cordales [40].

Entre las diversas cotas demostradas en [40] para el número de dominación  $\{k\}$ -romana se encuentra la desigualdad  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \leq k\gamma(G)$ , válida para todo entero positivo  $k$  y todo grafo  $G$ . En [40], se definen los *árboles  $\{k\}$ -romanos* como aquellos grafos árboles  $T$  que satisfacen  $\gamma_{\{Rk\}}(T) = k\gamma(T)$ , y se los caracteriza en términos de cinco operaciones. En esta tesis se extiende la definición de árbol  $\{k\}$ -romano a cualquier grafo  $G$ : para un entero  $k \geq 2$ , decimos que un grafo  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano si  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = k\gamma(G)$ .

El primer resultado general de esta tesis muestra que las clases de grafos  $\{k\}$ -romanos con  $k \geq 2$ , forman una secuencia no creciente de clases. Esto lleva a la pregunta de si existe un grafo  $\{k\}$ -romano para todo  $k \geq 2$ . Sin embargo se demuestra que este no es el caso. Como resultado principal de esta tesis, se demuestra que para todo  $k \geq 3$ , el problema de reconocer grafos  $\{k\}$ -romanos es NP-difícil, incluso cuando se restringe a la clase de grafos split. Para probar este resultado, se definen nuevos conceptos en el contexto de hipergrafos (estructuras que generalizan a los grafos). Como corolario se obtienen generalizaciones a hipergrafos de resultados muy relevantes en la literatura relativos a matchings y cubrimientos válidos para grafos.

Por otra parte, en el transcurso del estudio del problema de reconocimiento antes mencionado, no queda cerrado el caso  $k = 2$ . Sin embargo, a través de la definición de una nueva descomposición de grafos split, se avanza en el estudio de una caracterización de los grafos split  $\{2\}$ -romanos que pueden expresarse como una split join de dos grafos split más pequeños. En este sentido, se clasifica la propiedad  $\{k\}$ -romana dentro de dos familias específicas de grafos split que son indescomponibles con respecto a esta nueva operación split join: soles y sus complementos.

También, y con el objeto de profundizar el estudio de los grafos  $\{2\}$ -romanos, se abordan otras clases de grafos conocidas. Entre ellas, una rama de las clases de grafos con pocos caminos  $P_4$  inducidos, y se estudia para cada una de ellas, qué grafos en esa clase son  $\{2\}$ -romanos. Un trabajo similar fue hecho sobre una subfamilia de grafos árboles. Para todas estas familias de grafos, se obtienen resultados que ayudarían a demostrar en un futuro, cuál es la complejidad del problema de reconocimiento de los grafos  $\{2\}$ -romanos.

Por último, se muestran nuevos resultados de NP-completitud del problema de decisión asociado a la dominación  $\{2\}$ -romana, es decir el problema de decidir si para un grafo dado y un valor  $j$  fijo, existe una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $j$ . En particular se prueba que este problema es NP-completo aún en grafos cordales, en grafos bipartitos planares, en grafos bipartitos cordales y grafos bipartitos con grado máximo 3.



# Difusión de resultados

Los resultados presentados en esta tesis dieron origen a las siguientes publicaciones y trabajos en evaluación en revistas de divulgación internacional:

- K. Bešter Štorgel, N. Chiarelli, L. Fernández, J. P. Gollin, C. Hilaire, V. Leoni and M. Milanič. *On  $\{k\}$ -Roman graphs*. *Procedia Computer Science* **273:325–332**, 2025.
- L. Fernández and V. Leoni. *New complexity results on Roman  $\{2\}$ -domination in graphs*. *RAIRO-Operations Research*, **57:1905–1912**, 2023.
- K. Bešter Štorgel, N. Chiarelli, L. Fernández, J. P. Gollin, C. Hilaire, V. Leoni and M. Milanič. *On  $\{k\}$ -Roman graphs: complexity of recognition and the case of split graphs*, 2025. <https://arxiv.org/abs/2511.05674>
- L. Fernández and V. Leoni. *Roman  $\{2\}$ -domination on graphs with "few" 4-paths.*, 2025. <https://arxiv.org/abs/2511.17369>

Los resultados obtenidos también se presentaron en las siguientes reuniones científicas.

- K. Bešter Štorgel, N. Chiarelli, L. Fernández, J. P. Gollin, C. Hilaire, V. Leoni and M. Milanič. *On  $\{k\}$ -Roman graphs*, presentado en XIII Latin American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium, noviembre 2025, Buenos Aires, Argentina.
- L. Fernández y V. Leoni *Dominación italiana en grafos con "pocos" caminos inducidos de cuatro vértices*, presentado en la Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina UMA, septiembre 2023, Salta, Argentina.
- L. Fernández y V. Leoni *Dominación italiana en grafos Caterpillar*, presentado en la Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina UMA, septiembre 2022, Neuquén, Argentina.

---

# Índice general

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                               | <b>15</b> |
| 1.1. Estado del arte . . . . .                                                       | 15        |
| 1.2. Definiciones básicas . . . . .                                                  | 17        |
| 1.3. Dominación clásica y dominación $\{k\}$ -romana . . . . .                       | 20        |
| 1.4. Complejidad computacional y problemas de decisión . . . . .                     | 22        |
| 1.5. Preliminares . . . . .                                                          | 24        |
| 1.6. Descomposición modular . . . . .                                                | 28        |
| <b>2. Grafos <math>\{k\}</math>-romanos</b>                                          | <b>31</b> |
| 2.1. Definición y ejemplos . . . . .                                                 | 31        |
| 2.2. Primeros resultados . . . . .                                                   | 33        |
| 2.3. Reconocimiento de grafos $\{k\}$ -romanos . . . . .                             | 36        |
| <b>3. Sobre el reconocimiento de grafos <math>\{2\}</math>-romanos</b>               | <b>43</b> |
| 3.1. Grafos split y funciones $\{2\}$ -romana dominantes . . . . .                   | 44        |
| 3.2. Una nueva operación entre grafos split . . . . .                                | 45        |
| 3.3. Algunos grafos $\{2\}$ -romanos primos . . . . .                                | 50        |
| <b>4. Avances en dominación <math>\{2\}</math>-romana</b>                            | <b>55</b> |
| 4.1. Resultados de NP-completitud . . . . .                                          | 56        |
| 4.2. Algoritmos eficientes . . . . .                                                 | 58        |
| 4.2.1. Dominación $\{2\}$ -romana y operaciones en grafos . . . . .                  | 58        |
| 4.2.2. Dominación $\{2\}$ -romana en clases particulares de grafos . . . . .         | 65        |
| 4.2.2.1. Orugas . . . . .                                                            | 65        |
| 4.2.2.2. Arañas . . . . .                                                            | 76        |
| 4.2.2.3. Grafos en $ZOO$ . . . . .                                                   | 80        |
| 4.2.2.4. Grafos split $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free . . . . . | 85        |
| 4.2.2.5. Grafos con pocos $P_4$ . . . . .                                            | 88        |
| <b>5. Búsqueda de grafos <math>\{k\}</math>-romanos</b>                              | <b>91</b> |
| 5.1. Orugas $\{k\}$ -romanas . . . . .                                               | 91        |
| 5.1.1. $k = 2$ . . . . .                                                             | 91        |
| 5.1.2. $k > 2$ . . . . .                                                             | 97        |

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2. Más grafos $\{2\}$ -romanos . . . . .                            | 102        |
| <b>6. Conclusiones finales</b>                                        | <b>105</b> |
| <b>A. Modelo de Programación Lineal Entera para <math>D_kR</math></b> | <b>109</b> |
| <b>B. Algunas demostraciones técnicas</b>                             | <b>113</b> |

# Índice de figuras

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Grafos camino, estrella, ciclo y grafo no conexo. . . . .                   | 18 |
| 1.2. Dos particiones split de $P_3$ . . . . .                                    | 19 |
| 1.3. Hipergrafos. . . . .                                                        | 20 |
| 1.4. Conjuntos dominante minimal y mínimo. . . . .                               | 20 |
| 1.5. Dominación $\{k\}$ -romana para distintos valores de $k$ . . . . .          | 21 |
| 1.6. Cotas para $\gamma_{\{R_2\}}(G)$ . . . . .                                  | 26 |
| 1.7. Grafo $R_k$ que verifica $\gamma_{\{R_k\}}(R_k) = k\gamma(R_k)$ . . . . .   | 27 |
| 1.8. Árbol de descomposición modular de un grafo $G$ . . . . .                   | 28 |
| 2.1. Grafo $T_{4,5}$ . . . . .                                                   | 32 |
| 2.2. Grafos $\{k\}$ -romanos. . . . .                                            | 33 |
| 2.3. Grafo que no es $\{3\}$ -romano. . . . .                                    | 35 |
| 2.4. $G$ y $M(G)$ . . . . .                                                      | 37 |
| 2.5. Hipergrafo, grafo compatible y grafos fuertemente compatibles. . . . .      | 39 |
| 2.6. Hipergrafo 2-uniforme y su grafo middle asociado . . . . .                  | 39 |
| 3.1. $G_1$ , $G_2$ y $\wedge_S(G_1, G_2)$ . . . . .                              | 46 |
| 3.2. $S_3$ y $S_4$ . . . . .                                                     | 51 |
| 3.3. $\overline{S_3}$ y $\overline{S_4}$ . . . . .                               | 52 |
| 3.4. $\overline{S_5}$ fuertemente compatible con $H$ . . . . .                   | 53 |
| 3.5. $\overline{S_5}$ . . . . .                                                  | 54 |
| 4.1. $G$ y $G'$ en la demostración del Teorema 11. . . . .                       | 57 |
| 4.2. Suma 1-clique. . . . .                                                      | 58 |
| 4.3. Adición de un mellizo verdadero y de un mellizo falso. . . . .              | 63 |
| 4.4. Grafo oruga $C$ . . . . .                                                   | 65 |
| 4.5. Grafo oruga $C'$ . . . . .                                                  | 67 |
| 4.6. Oruga $C$ . . . . .                                                         | 75 |
| 4.7. Grafo oruga $C$ y una partición que minimiza los vértices aislados. . . . . | 76 |
| 4.8. Araña fina y araña gruesa. . . . .                                          | 77 |
| 4.9. Cuasi-arañas. . . . .                                                       | 78 |
| 4.10. Arañas bien etiquetadas. . . . .                                           | 79 |
| 4.11. Ejemplos de grafos $C_5^u$ y $P_5^u$ . . . . .                             | 80 |

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.12. Grafos $J$ , $K$ , $L$ y $Q$ . . . . .                                                                       | 81  |
| 4.13. Grafos $M_i$ en ZOO, para $i \in [1, 11]$ . . . . .                                                          | 81  |
| 4.14. Grafos $H_1$ , $H_2$ y sus complementos. . . . .                                                             | 85  |
| 4.15. Estable fino (izquierda) y estable grueso (derecha). . . . .                                                 | 86  |
| 4.16. Ejemplos de módulos indescomponibles de un grafo $P_4$ -sparse . . . . .                                     | 89  |
| 4.17. Ejemplos de módulos indescomponibles de un grafo $P_4$ -tidy . . . . .                                       | 90  |
| 5.1. Operaciones $\mathcal{O}_1$ , $\mathcal{O}_2$ , $\mathcal{O}_3$ y $\mathcal{O}_4$ . . . . .                   | 92  |
| 5.2. Diferentes construcciones para $C$ . . . . .                                                                  | 95  |
| 5.3. Oruga $C$ con una única construcción. . . . .                                                                 | 97  |
| 5.4. Operaciones $\mathcal{O}_1$ , $\mathcal{O}_2$ , $\mathcal{O}_3$ , $\mathcal{O}_4$ y $\mathcal{O}_5$ . . . . . | 98  |
| 5.5. Ejemplo Oruga $\{k\}$ -romana ( $k = 4$ ). . . . .                                                            | 101 |
| 5.6. Grafos indescomponibles con $\gamma_{\{R2\}}(G)$ par. . . . .                                                 | 104 |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Estado del arte

Históricamente el problema de dominación surge en la década de 1850 al considerar cuál es el mínimo número de reinas que pueden posicionarse en un tablero de ajedrez de manera que cada posición en un tablero pueda ser atacada por una reina, o esté ocupado con una reina. Si bien inicia como un juego, este problema modela una gran variedad de situaciones como localización de servicios esenciales, vigilancia, asignación de personal entre otras.

Un grafo  $G = (V, E)$  es un par ordenado donde  $V$  es el conjunto de sus vértices y  $E$  el conjunto de sus aristas. El Problema de Dominación en Grafos fue formalmente definido en 1958 por Claude Berge en [4], como el problema de hallar un subconjunto de vértices  $D$  tal que cada vértice que no esté en el conjunto  $D$ , esté conectado con un vértice en  $D$  mediante una arista. De esta forma, diferentes situaciones que pueden modelarse a través de un grafo pueden plantearse como un problema de dominación. Más aún, cada aplicación específica impone restricciones adicionales a los conjuntos dominantes, dando lugar a diferentes variantes del problema.

Una de estas variantes es el Problema de Dominación romana. Esta variante está basada en la estrategia de defensa planteada por el Emperador Constantino el Grande para proteger el Imperio Romano con el objetivo de abaratar los costos de mantener activas a las legiones de soldados. Para esto se considera que una ubicación está protegida si tiene una legión de servicio en el lugar o, si no tiene un batallón apostado, requiere que una localidad cercana tenga más de uno (y pueda viajar de una ubicación a la otra en caso de ser necesario).

En el modelo matemático presentado por Cockayne et al. en [14] para esta situación, cada vértice del grafo corresponde a una ubicación en el Imperio Romano, existe una arista entre dos vértices cuando una legión puede desplazarse entre ambas ya sea a pie o en barco y pueden ubicarse a lo sumo dos legiones por localidad. En este modelo, una ubicación está protegida si al menos una legión se encuentra de servicio en el lugar, o puede ser enviada una legión desde una localidad vecina

(es decir que en el grafo existe una arista entre ambas ubicaciones). Sin embargo, para evitar dejar una localidad desprotegida, no puede enviarse una legión a una localidad vecina si deja la ubicación original indefensa. En otras palabras, una ubicación que no tiene una legión apostada, debe tener al menos una localidad vecina con dos legiones de servicio en el lugar. De esta forma, en [14] Cockayne presenta el Problema de Dominación romana como el problema de hallar el mínimo número de legiones necesarias para proteger el Imperio.

A objeto de reducir los costos de mantener activa la defensa, en [10] se relajan las condiciones en el problema de dominación romana. Ahora, se considera que una ubicación sin ejércitos está protegida si tiene una localidad vecina con dos legiones de servicio, o al menos dos localidades vecinas con una legión en servicio. A esta variante del problema de dominación romana se le llama problema de dominación  $\{2\}$ -romana y es, junto con el problema de dominación, el problema que da origen a esta tesis.

Posteriormente, Wang et al. en [40] definen el problema de dominación  $\{k\}$ -romana. En esta nueva variante se considera que una ubicación sin ejércitos está protegida si entre sus localidades vecinas hay al menos  $k$  legiones apostadas. Este problema claramente incluye al problema de dominación  $\{2\}$ -romana (considerando  $k = 2$ ).

Más allá del planteo que da origen a estos problemas, la importancia de los mismos radica en las aplicaciones. Esto nos lleva a pensar en si es posible encontrar una solución al problema, cuándo es posible y la dificultad para hallar una solución en algún caso particular. Una forma de abarcar el estudio sobre la dificultad de hallar soluciones es el estudio de la complejidad computacional de un problema.

La complejidad computacional de un problema sobre una familia de grafos hace referencia a los pasos que necesita realizar un algoritmo para llegar a la solución del problema, en función de algunas características como podrían ser el número de vértices o el número de aristas del grafo de entrada. De esta forma los problemas se clasifican en polinomiales (P) y difíciles o NP-completos (NP-c).

El estudio de estos problemas muestra que los problemas de dominación arriba mencionados son difíciles para grafos en general, e incluso en otras familias de grafos como grafos split [10, 23, 40]. Sin embargo el problema de dominación y el problema de dominación  $\{2\}$ -romana pueden resolverse en tiempo lineal en árboles [9, 13]. Respecto al problema de dominación  $\{k\}$ -romana, a nuestro entender, no existen otros resultados en la literatura, y creemos que en parte se debe a sus recientes definiciones. Esto nos motiva a profundizar el estudio en este sentido.

Una primera parte de esta tesis está enfocada en determinar la complejidad computacional de decidir si un grafo verifica cierta relación entre los parámetros asociados al problema de dominación usual y al problema de dominación  $\{k\}$ -romana. Esta condición nos lleva a definir una nueva clase de grafos, la de los grafos  $\{k\}$ -



romanos y en esta primera parte estudiamos el problema de reconocimiento de esta clase.

Una segunda parte de esta tesis está enfocada en hallar clases particulares de grafos que verifiquen la condición antes mencionada cuando  $k = 2$ , ya que no pudo resolverse la complejidad computacional del problema de reconocimiento en este caso. Para ello exploramos clases de grafos relacionadas con los grafos árboles, como los grafos oruga. También exploramos otras clases de grafos para las cuales se conoce que la complejidad del problema de dominación es polinomial, como los grafos con pocos  $P_4$ 's inducidos.

Finalmente, recopilamos los resultados obtenidos para grafos orugas y grafos con pocos  $P_4$ . Esto combinado con la construcciones presentadas por Henning y Klostermeyer [27] y Wang et al. [40] nos dará nuevos ejemplos de grafos  $\{2\}$ -romanos.

## 1.2. Definiciones básicas

En esta sección presentamos las definiciones y notaciones que se usarán en esta tesis. Algunos términos particulares se dejaron en inglés debido a su amplia difusión en la comunidad.

Un *grafo* es un par  $G = (V(G), E(G))$  donde  $E(G) \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V(G)\}$ . Llamamos *vértices* a los elementos de  $V(G)$  y decimos que  $G$  es de *orden*  $n$  si  $|V(G)| = n$ . Llamamos *aristas* a los elementos de  $E(G)$ , que notamos  $uv$ . La arista  $uv$  tiene como *extremos* a  $u$  y  $v$ . Cuando no sea necesario especificar, notaremos simplemente  $V$  a  $V(G)$  y  $E$  a  $E(G)$ . Llamamos *grafo trivial* al grafo con un único vértice y sin aristas. En esta tesis trabajaremos con grafos simples, es decir sin bucles (aristas con extremos iguales) ni aristas múltiples.

Dos vértices  $u, v$  de  $G$  se dicen *adyacentes* o *vecinos* si  $uv$  es una arista de  $G$ . Al conjunto de vecinos de  $u$  lo llamamos *vecindad abierta de  $u$*  y lo notamos  $N(u)$  y la *vecindad cerrada de  $u$*  es el conjunto  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ . En caso de ser necesaria la aclaración, usamos  $N_G(u)$  o  $N_G[u]$  para referirnos a la vecindad de  $u$  en el grafo  $G$ . El *grado* de  $u$  es la cantidad de vecinos de  $u$ , es decir  $|N(u)|$ , y lo notamos  $d(u)$ . Cuando sea necesario especificar, notamos  $d_G(u)$  al grado de  $u$  en el grafo  $G$ . En particular un vértice de grado 1 llamado *vértice pendiente* y un vértice de grado  $n - 1$  es un *vértice universal*. Notamos  $\delta(G)$  al mínimo grado entre todos los vértices de  $G$ .

Dado un subconjunto  $S$  de vértices de  $G$ , es decir  $S \subseteq V$ , el *subgrafo inducido por  $S$*  es el grafo cuyo conjunto de vértices es  $S$  y cuyo conjunto de aristas son las aristas en  $G$  con extremos en  $S$ . Lo notamos  $G[S]$ . En este caso decimos que  $S$  *induce* el subgrafo  $G[S]$ . De manera similar, notamos como  $G - S$  al subgrafo de  $G$  inducido por el conjunto  $V \setminus S$ . En el caso en que  $S = \{v\}$ , notamos simplemente

$G - v$ . Decimos que  $S$  es un *conjunto independiente* en  $G$  si el conjunto de aristas de  $G[S]$  es vacío. Decimos que  $C$  es una *clique* en  $G$  si el conjunto de aristas de  $G[C]$  tiene a todas las aristas posibles entre vértices de  $C$ .

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , el *grafo complemento* de  $G$ , que notamos  $\overline{G}$ , es el grafo de vértices  $V$  y aristas  $\{uv : u, v \in V \wedge uv \notin E\}$ .

Dos grafos  $G$  y  $H$  se dicen *isomorfos* si existe una biyección  $\phi$  entre  $V(G)$  y  $V(H)$  tal que  $uv \in E(G)$  si y sólo si  $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$ .

Un *camino* en un grafo es una secuencia finita no vacía  $P = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$  que alterna vértices y aristas de manera que la arista  $e_i$  tiene como extremos a  $v_{i-1}$  y  $v_i$  para  $i = 1, \dots, k$ . Decimos que  $P$  es un camino de  $v_0$  a  $v_k$ , o que  $P$  es un camino  $v_0 - v_k$ . Notamos  $P_n$  a un camino de  $n$  vértices. La *longitud de un camino* es la cantidad de aristas del camino. Dados  $u$  y  $v$  vértices en un grafo, la *distancia entre  $u$  y  $v$* , que notamos  $\text{dist}(u, v)$ , es la menor longitud de un camino de  $u$  a  $v$ , si tal camino existe. Si no existe tal camino,  $\text{dist}(u, v) = \infty$ .

Un grafo se dice *conexo* si para cualquier par de vértices existe un camino como subgrafo de  $G$ , que los contiene. Si  $G$  es un grafo no conexo, un subgrafo inducido  $G'$  se dice una *componente conexa* de  $G$ , si  $G'$  es conexo y maximal por inclusión del conjunto de aristas. Esto es, no existe otro subgrafo inducido conexo de  $G$ , que tenga a  $G'$  como subgrafo.

Un *ciclo* es un grafo cuyos vértices pueden posicionarse sobre una circunferencia de manera que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en la circunferencia. Notamos  $C_n$  al ciclo de  $n$  vértices. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos como subgrafo inducido. Una *hoja* en un árbol es un vértice de grado 1.

Un grafo  $G$  es un grafo *bipartito* si su conjunto de vértices puede ser particionado en dos conjuntos  $U_1, U_2$  de vértices tales que cada uno de estos conjuntos es un conjunto independiente en  $G$ .

Una *estrella* es un grafo conexo de al menos dos vértices en el que a lo sumo uno de ellos tiene grado mayor a uno. Una  $n$ -estrella es una estrella con  $n + 1$  vértices y la notamos  $K_{1,n}$ . Es fácil ver que una estrella es un grafo bipartito con el vértice de grado  $n$  en un conjunto de la bipartición, y los vértices de grado 1 en el otro conjunto de la bipartición.

**Ejemplo 1.** *Ejemplos de grafos camino, estrella, ciclo y grafo no conexo.*

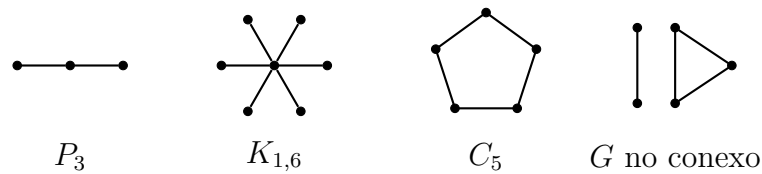


Figura 1.1: Grafos camino, estrella, ciclo y grafo no conexo.

Un grafo  $G$  es *split* si admite una *partición split*, es decir, una partición  $(K, I)$  del conjunto de vértices tal que  $K$  e  $I$  son respectivamente una clique y un conjunto independiente en  $G$ . Nótese que un grafo split puede admitir más de una partición split como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.** *Dos particiones split posibles para el grafo  $P_3$ .*

*El conjunto  $K$  induce una clique en  $P_3$ , y el conjunto  $I$  es independiente en  $P_3$  como puede verse en la Figura 1.2.*

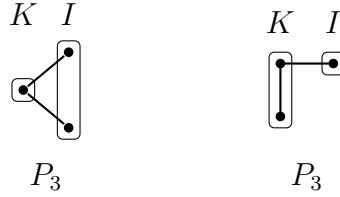


Figura 1.2: Dos particiones split de  $P_3$ .

Dado un grafo  $G$  y una familia de grafos  $\mathcal{H}$ , decimos que  $G$  es  $\mathcal{H}$ -free si  $G$  no tiene ningún grafo de  $\mathcal{H}$  como subgrafo inducido.

Por último, vamos a definir algunas operaciones entre grafos.

Dados dos grafos  $G$  y  $H$  la *unión disjunta* (en adelante unión) de  $G$  y  $H$  es el grafo (no conexo) que notamos  $G \cup H$  de vértices  $V(G) \cup V(H)$  y aristas  $E(G) \cup E(H)$ . El *join* de  $G$  y  $H$  es el grafo que notamos  $G \wedge H$  de vértices  $V(G) \cup V(H)$  y aristas  $E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$ .

Dado un grafo  $G$ , *subdividir la arista  $uv$*  consiste en reemplazar la arista  $uv$  por un camino de vértices  $u, w, v$  con  $w$  un nuevo vértice en  $G$ .

## Hipergrafos

Un *hipergrafo* es un par  $H = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es una familia de subconjuntos distintos y no vacíos de  $V$ . Los elementos de  $V$  y  $E$  son llamados *vértices* e *hiperaristas* respectivamente. Si  $|f| = k$  para cada  $f \in E$ , el hipergrafo se dice *k-uniforme*. Es decir, los grafos son hipergrafos 2-uniformes.

Un hipergrafo  $H = (V, E)$  es *no conexo* si existe un conjunto de vértices  $U \subseteq V$  tal que  $f \subseteq U$  o  $f \subseteq V \setminus U$  para cada hiperarista no vacía  $f$  y  $f \neq V$ .

**Ejemplo 3.** *Hipergrafos*

*Los hipergrafos  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  son conexos.  $H_1$  no es  $k$ -uniforme para ningún  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $H_2$  es 2-uniforme (grafo) y  $H_3$  es 3-uniforme. En todos los casos las hiperaristas aparecen en colores para mayor claridad.*

Un vértice  $v$  en un hipergrafo  $H$  es un *vértice aislado* si no pertenece a ninguna hiperarista. Luego, dado un hipergrafo  $H = (V, E)$  sin vértices aislados, un *cubrimiento por aristas* en  $H$  es un conjunto  $E' \subseteq E$  de hiperaristas tal que cada vértice

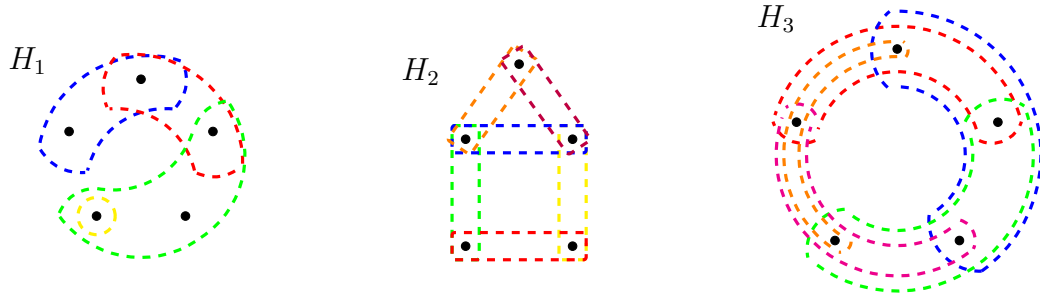


Figura 1.3: Hipergrafos.

de  $H$  pertenece a una hiperarista en  $E'$ . Notamos  $\rho(H)$  al *número de cubrimiento por hiperaristas* de  $H$ , el mínimo cardinal de un cubrimiento por hiperaristas. Un *matching perfecto* en  $H = (V, E)$  es un cubrimiento por hiperaristas disjuntas dos a dos.

Es importante aclarar que, restringiendo estas definiciones a hipergrafos 2-uniformes, obtenemos las definiciones usuales de matching perfecto, cubrimiento por aristas y número de cubrimiento por aristas para grafos.

### 1.3. Dominación clásica y dominación $\{k\}$ -romana

En esta sección presentamos los problemas sobre los cuales trabajaremos en esta tesis.

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un *conjunto dominante* es un subconjunto  $D$  de vértices tal que todo vértice  $u \notin D$  tiene al menos un vecino en  $D$ . Es decir que para todo vértice  $u$ ,  $D \cap N[u] \neq \emptyset$ . Un conjunto dominante  $D$  es *minimal* si es un conjunto dominante y para todo  $v \in D$ ,  $D \setminus \{v\}$  no es un conjunto dominante. Notaremos  $\gamma(G)$  al *número de dominación de  $G$* , que es el mínimo cardinal de un conjunto dominante.

**Ejemplo 4.** *Conjuntos dominantes mínimo y minimal.*

*En el grafo  $G$  el conjunto de vértices azules es un conjunto dominante minimal, mientras que el conjunto de vértices rojos es un conjunto dominante mínimo.*

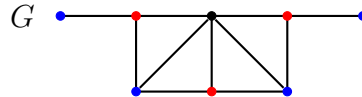


Figura 1.4: Conjuntos dominante minimal y mínimo.

Otra forma de pensar al conjunto dominante es considerar una *función dominante* de  $G$ , es decir una función  $f : V \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\sum_{v \in N[u]} f(v) \geq 1$  para todo  $u \in V$ .

El *peso* de  $f$  es  $\sum_{v \in V} f(v)$  y lo notamos  $w(f)$ . Luego el problema de hallar un conjunto dominante de cardinal mínimo es equivalente al problema de hallar una función dominante de  $G$  de mínimo peso. Dada una función dominante en  $G$ , es claro que el conjunto de vértices cuya imagen a través de  $f$  es 1 es un conjunto dominante. Recíprocamente, dado un conjunto dominante  $D$ , la función característica de  $D$  que asigna 1 a los elementos del conjunto y 0 al resto es una función dominante.

Esta estrategia de considerar a los conjuntos dominantes como funciones permite definir nuevos problemas de dominación, que se obtienen imponiendo distintas restricciones a la función. En particular nos interesa la siguiente:

**Definición 1.** [40] Dado  $G = (V, E)$  un grafo y  $k \in \mathbb{Z}^+$ , una función  $f : V \rightarrow \{0, \dots, k\}$  es una función  $\{k\}$ -romana dominante si para todo  $v \in V$  tal que  $f(v) = 0$  se verifica  $\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq k$ . El número de dominación  $\{k\}$ -romana es el mínimo peso de una función  $\{k\}$ -romana dominante, y lo notamos  $\gamma_{\{Rk\}}(G)$ . Notamos  $\gamma_{\{Rk\}}$ -función de  $G$  a una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $G$  de peso mínimo.

Otra forma de notar a las funciones  $\{k\}$ -romanas dominantes es describiendo la partición del conjunto  $V$  generada por  $f$ , esto es  $f = (V_0, V_1, \dots, V_k)$  donde  $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Observación 1.** En el caso en que  $k \geq n$ , donde  $n = |V(G)|$  una función  $\{k\}$ -romana dominante de peso mínimo es aquella que asigna peso 1 a todos los vértices del grafo, el problema de hallar una función  $\{k\}$ -romana dominante de peso mínimo es trivial y resulta  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = n$ . En general,  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \geq \min\{k, n\}$ .

Por otro lado, en el caso en que  $k < |V(G)|$ , en la búsqueda de una función  $\{k\}$ -romana dominante, la asignación de pesos a los vértices está fuertemente ligada a la estructura del grafo. Si bien para  $k = 2$  no es difícil hallar una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso mínimo cuando el orden del grafo es pequeño (incluso considerando las particiones de vértices en los conjuntos  $V_0, V_1, V_2$ ) esto se hace más complejo al aumentar el valor de  $k$ .

**Ejemplo 5.** Dominación  $\{k\}$ -romana con distintos valores de  $k$ .

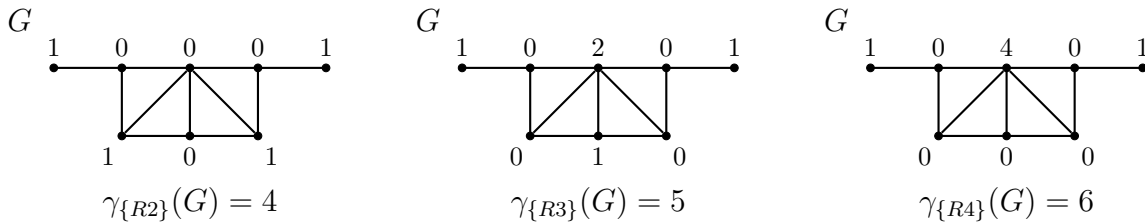


Figura 1.5: Dominación  $\{k\}$ -romana para distintos valores de  $k$ .

Para el cálculo de los números de dominación  $\{k\}$ -romana para grafos en los cuales no exista una fórmula cerrada, puede usarse el modelo de programación lineal entera que presentamos en el Apéndice A. Este modelo también proporciona una asignación de pesos a los vértices que corresponde a una función  $\{k\}$ -romana dominante.

## 1.4. Complejidad computacional y problemas de decisión

En esta sección introducimos los elementos teóricos necesarios para abordar la dificultad que presenta la resolución de los problemas involucrados en esta tesis. Explicamos a qué nos referimos con la complejidad computacional, presentamos los problemas de decisión y comentamos acerca de su dificultad.

Un *problema*  $\pi$  consiste en un conjunto de instancias  $D_\pi$ , que contiene todas las posibles entradas para el problema, y una pregunta sobre esas instancias. Un algoritmo resuelve un problema  $\pi$  si ese algoritmo puede ser aplicado a cualquier instancia  $I \in D_\pi$  y se garantiza que siempre producirá la respuesta correcta para dicha instancia  $I$ .

Un problema  $\pi$  se dice *problema de decisión* si las posibles respuestas son SI o NO. Un problema  $\pi$  se dice *problema de optimización* si la respuesta es una solución óptima para el problema planteado. En general, un problema de decisión puede ser derivado de un problema de optimización. Por ejemplo, el problema de hallar un conjunto dominante de mínimo cardinal es un problema de optimización. De este, puede derivarse el problema de decisión asociado:

### Problema de dominación (DOM)

**Instancia:**  $G = (V, E)$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ .

**Pregunta:** ¿Existe un conjunto dominante en  $G$  de cardinal a lo sumo  $j$ ?

De esta forma, nos interesa hallar un algoritmo que nos permita determinar, dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $j$ , si existe un conjunto dominante de  $G$  de cardinal a lo sumo  $j$ . Esto es, un procedimiento paso a paso que aplicado a una instancia, garantiza una respuesta correcta a la pregunta que define el problema.

Para el estudio de estos problemas, necesitamos tener una cierta medida de la dificultad que representa aplicar un algoritmo. Los requerimientos de un algoritmo se expresan en función del tamaño de una instancia, una medida que refleja de alguna forma la cantidad de datos necesarios para describir esta instancia. Más específicamente, supongamos que la instancia puede escribirse como una cadena finita de símbolos (en un alfabeto predeterminado finito). Luego el *tamaño* de una instancia

$I$  es el número de símbolos en su descripción. En el ejemplo, el tamaño puede ser el número de vértices y aristas del grafo  $G$ , o sólo uno de ellos. Intuitivamente, la complejidad del algoritmo puede pensarse como la cantidad de pasos que efectúa hasta obtener la respuesta.

La *función de complejidad temporal* de un algoritmo expresa el tiempo de ejecución de un algoritmo respecto del tamaño de la entrada. En otras palabras, esta función expresa los requerimientos temporales del algoritmo. Una función  $f$  es  $O(g(n))$  si existe una constante  $c$  tal que  $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$  para todo  $n > 0$ . Un algoritmo *de tiempo polinomial* (o simplemente *polinomial*) se define como aquel que tiene una función de complejidad temporal que es  $O(p(n))$  para algún polinomio  $p$ , donde  $n$  denota el tamaño de la instancia. Un algoritmo se dice *eficiente* si se ejecuta (apropiadamente) en un tiempo acotado por una función polinomial en el tamaño de la entrada.

La *complejidad computacional* de un problema de decisión, es el mínimo tiempo de ejecución entre los peores casos de todos los algoritmos posibles, como función del tamaño del problema. Los problemas de decisión que tienen algoritmos de tiempo polinomial que los resuelven se agrupan en la *clase P*.

Un *algoritmo no determinístico de tiempo polinomial* tiene la capacidad de realizar suposiciones y acertar al azar ciertos cálculos, algunas de estas suposiciones serán correctas y algunas serán incorrectas. Si en cualquiera de estas pruebas (iteración del algoritmo) arroja como resultado un SI, el algoritmo responde SI. En otro caso, responde NO. Esto es suficiente para considerar que si la respuesta es SI, existe una prueba de tiempo polinomial que lo verifica.

La clase de los problemas resolubles a través de algoritmos no determinísticos de tiempo polinomial se denomina *clase NP*. Una computadora capaz de verificar múltiples posibles caminos en simultáneo puede evidentemente seguir sólo uno, por lo que  $P \subseteq NP$ . Se cree que  $P \neq NP$ , aunque esto no ha sido probado, por lo que no podemos llamar “no polinomiales” a los problemas en NP.

Una *transformación (o reducción) polinomial* de un problema de decisión  $\pi_1$  a un problema de decisión  $\pi_2$  es una función  $f : D_{\pi_1} \rightarrow D_{\pi_2}$  que satisface las siguientes dos condiciones:

1.  $f$  es resoluble por un algoritmo de tiempo polinomial; y
2. para toda instancia  $I \in D_{\pi_1}$ , la respuesta a  $I$  en  $\pi_1$  es “SI” si y sólo si la respuesta a  $f(I)$  en  $\pi_2$  es “SI”.

En este caso se dice que el problema  $\pi_1$  se reduce al problema  $\pi_2$ .

En 1971, Cook [15] prueba que un problema particular de la clase NP, el llamado *problema de satisfactibilidad booleana* o SAT, tiene la propiedad de que todo otro problema en NP puede ser reducido polinomialmente a él. Esto significa que si SAT pudiera ser resuelto con un algoritmo polinomial, entonces todos los otros problemas

en NP también, y si algún problema en NP es intratable, es decir que es tan difícil que ningún algoritmo polinomial podría resolverlo, también lo es SAT.

Cook sugirió que otros problemas en NP debían compartir con SAT esta propiedad de ser los “más difíciles” de la clase NP. Karp [30] y luego Garey y Johnson [23] presentaron más problemas como éste y se definió entonces la clase de problemas *NP-completos*. Formalmente, un problema  $\pi$  es NP-completo si

1.  $\pi$  pertenece a la clase NP; y
2. para todo otro problema  $\pi'$  en NP, existe una transformación polinomial de  $\pi'$  en  $\pi$ .

Si omitimos el primer ítem, entonces decimos que  $\pi$  es *NP-hard* (o *NP-difícil*).

No se conoce hasta el momento un algoritmo de tiempo polinomial que pueda resolver cualquiera de los múltiples problemas NP, lo cual apoya la creencia de que  $P \neq NP$ . En [23], Garey y Johnson presentan una introducción mas completa de este tema.

A lo largo de esta tesis presentaremos algunos resultados de NP-completitud. En los mismos se mencionan reducciones al Problema de Dominación, o al problema 3-Satisfactibilidad Booleana que definimos a continuación.

### Problema 3-Satisfactibilidad Booleana (3-SAT)

**Instancia:** Un conjunto finito de variables lógicas  $U = \{u_j\}$  y un conjunto de cláusulas  $C = \{c_i\}$ .

**Pregunta:** ¿Puede fijarse el valor de cada variable en Verdadero o Falso de manera que cada cláusula esté “satisfecha” (contiene por lo menos un literal verdadero)?

Para este problema, una cláusula es una expresión lógica que consiste en una disyunción de tres literales, siendo los literales una variable  $u_j$  o su negación  $\overline{u_j}$ . Por ejemplo, una instancia para este problema es la cláusula  $C = (u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_4)$ . Luego, si la variable  $u_4$  es verdadera, la cláusula  $C$  se considera satisfecha.

Una de las primeras demostraciones de que el Problema de Dominación pertenece a la clase NP-c se hace mediante una reducción al problema 3-SAT. Detalles de esta reducción pueden verse por ejemplo en [23].

## 1.5. Preliminares

En esta sección presentamos los resultados de la literatura que serán relevantes en el desarrollo de esta tesis.

Como es usual en lo que refiere a complejidad computacional, en [40] se presenta el problema de decisión asociado al Problema de dominación  $\{k\}$ -romana como sigue, donde  $k$  es un número entero mayor o igual a 1.



**Problema de dominación  $\{k\}$ -romana (DkR)****Instancia:**  $G = (V, E)$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ .**Pregunta:** ¿Existe una función  $\{k\}$ -romana dominante en  $G$  de cardinal a lo sumo  $j$ ?

Aunque inicialmente se demuestra la NP-completitud de D2R (caso  $k = 2$ ) incluso en grafos bipartitos mediante una reducción al Problema 3-SAT, Wang y otros demostraron en [40] que DkR es NP-completo incluso para grafos bipartitos planares, cordales bipartitos y caminos no dirigidos. Esto último, realizando una reducción a D( $k - 1$ )R.

En particular Baghirova et al. en [2] demostraron que ciertos problemas que se dicen localmente chequeables, entre los cuales se encuentra D2R son resolubles en tiempo lineal en todas las clases de grafos con cliquewidth acotado. Específicamente, D2R es 2-estable 1-localmente chequeable con una función check:

$$check(v, f) : f(v) = 0 \Rightarrow \sum_{u \in N(v)} f(u) \geq 2$$

En efecto, esta función es 1-localmente chequeable ya que, para cada vértice sólo nos interesan los pesos asignados a sus vecinos (vértices a distancia 1). Además, la función check puede reescribirse como una función que depende de  $v$  y la cantidad de vecinos a los cuales se asigna peso  $i$ , con  $i = 0, 1, 2$ . Siendo que sólo nos interesa si  $v$  tiene por lo menos dos vecinos al cual se asigna peso 1, o al menos un vecino al cual se asigna peso 2, será equivalente reescribir la función check en términos del mínimo entre los vecinos cuyo peso es  $i$ , y 2. Esto es

$$check(v, f) : f(v) = 0 \Rightarrow \min\{n_1^v, 2\} + 2 \cdot \min\{n_2^v, 2\} \geq 2$$

donde  $n_i^v$  es la cantidad de vecinos de  $v$  a los cuales la función  $f$  les asigna peso  $i$ . Lo que muestra que la función check es 2-estable.

Como la función check puede obtenerse en tiempo lineal, se deriva que D2R es resoluble en tiempo lineal en estas clases. Sin embargo, estos resultados son puramente teóricos y no llevan a algoritmos prácticos ya que utilizan técnicas de programación dinámica, por lo que diseñar algoritmos específicos sigue siendo de gran utilidad.

Notar que si se tomara  $k = 1$ , DkR coincide con DOM. De la misma forma el número de dominación  $\{1\}$ -romana de un grafo  $G$  es el número de dominación usual  $\gamma(G)$ . En efecto, estos parámetros están relacionados, como se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 1.** [40] Para todo grafo  $G$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$  se verifica la desigualdad

$$\gamma(G) \leq \gamma_{\{Rk\}}(G) \leq k\gamma(G).$$

*Demostración.* Para la cota inferior de  $\gamma_{\{Rk\}}(G)$ , notemos que dada una función  $\{k\}$ -romana dominante, el conjunto de vértices a los cuáles se asigna un peso no nulo es un conjunto dominante de  $G$ .

Para la cota superior de  $\gamma_{\{Rk\}}(G)$ , si  $D$  es un conjunto dominante mínimo, la función dada por la partición  $V_0 = V \setminus D$ ,  $V_k = D$ ,  $V_i = \emptyset$  para  $i = 1 \dots, k-1$  es una función  $\{k\}$ -romana dominante de peso  $k\gamma(G)$ .  $\square$

Notemos que en general, teniendo en cuenta la Observación 1, para un grafo  $G$  cualquiera  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \leq \max\{n, k\gamma(G)\}$ .

Para analizar mejor el comportamiento de estas cotas consideremos el caso  $k = 2$ , para el cual se tienen los siguientes resultados:

**Proposición 2.** [10] Sean  $P_n$  y  $C_n$  grafos caminos y ciclos de  $n$  vértices respectivamente, entonces

$$\gamma_{\{R2\}}(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad y \quad \gamma_{\{R2\}}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

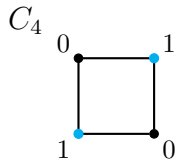
**Proposición 3.** [22] Sea  $G$  de orden  $n \geq 2$ ,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 2$  si y sólo si  $G$  tiene un vértice universal o dos vértices no adyacentes de grado  $n-2$ .

Estos resultados nos indican que existen ejemplos en los cuales se verifican las cotas. Veamos algunos de ellos.

**Ejemplo 6.** Comportamiento de las cotas.

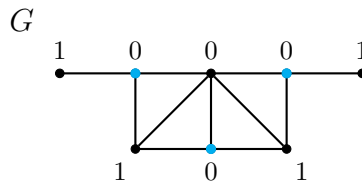
En los siguientes grafos se presenta en color un conjunto dominante mínimo, y una asignación de pesos a los vértices que es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso mínimo.

Para el ciclo  $C_4$  se verifica la cota inferior por igualdad, para el grafo  $K_{1,6}$  se verifica la cota superior por igualdad, y el grafo  $G$  no verifica ninguna de las cotas por igualdad.



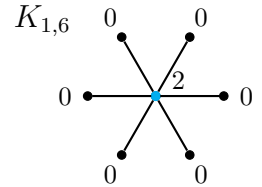
$$\gamma(C_4) = 2$$

$$\gamma_{\{R2\}}(C_4) = 2$$



$$\gamma(G) = 3$$

$$\gamma_{\{R2\}}(G) = 4$$



$$\gamma(K_{1,6}) = 1$$

$$\gamma_{\{R2\}}(K_{1,6}) = 2$$

Figura 1.6: Cotas para  $\gamma_{\{R2\}}(G)$ .

Más generalmente, el grafo  $K_1$  (grafo trivial) verifica  $\gamma(K_1) = \gamma_{\{Rk\}}(K_1) = 1$  para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Por otro lado, consideremos el grafo  $R_k$  dado por un ciclo  $C_6$  en el cual dos vértices diametralmente opuestos se añaden  $k - 1$  vértices pendientes, como se ve en la Figura 1.7.

Es claro que  $\gamma(R_k) = 2$  porque  $R_k$  no tiene un vértice universal. Los vértices de grado mayor a 2 forman un conjunto dominante mínimo (celeste).

Por otro lado, veamos que  $\gamma_{\{R_k\}}(R_k) = 2k$ . Para esto, probaremos primero que  $\gamma_{\{R_k\}}(R_k) \geq 2k$ . Consideremos  $f$  una  $\gamma_{\{R_k\}}$ -función de  $R_k$ . Llamemos  $v_1$  y  $v_2$  a los vértices de grado  $k+1$ . Como para cada hoja  $u$  vale  $f(u) = 1$  o  $f(N(u)) = k$  tenemos que  $f(N[v_1]) \geq k$  y  $f(N[v_2]) \geq k$ . Como los vértices  $v_1$  y  $v_2$  no tienen vecinos en común, resulta  $\gamma_{\{R_k\}}(R_k) \geq 2k$ . Para la desigualdad opuesta, asignando peso  $k$  a  $v_1$  y  $v_2$  y peso  $0$  al resto de los vértices de  $R_k$  se tiene una función  $\{k\}$ -romana dominante de peso  $2k$ .

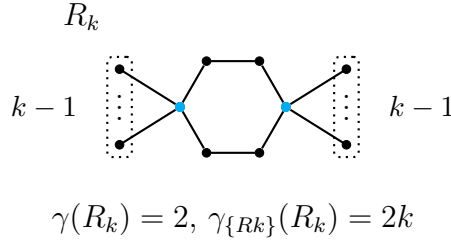


Figura 1.7: Grafo  $R_k$  que verifica  $\gamma_{\{R_k\}}(R_k) = k\gamma(R_k)$ .

Como podemos observar en el ejemplo ambas cotas son ajustadas. En particular, para el caso  $k = 2$ , en [27] Henning y Klostermeyer definen la subfamilia de grafos árboles, que verifica la cota superior por igualdad. Es decir, definen los árboles  $\{2\}$ -romanos como los grafos árboles  $T$  para los cuales  $\gamma_{\{R_2\}}(G) = 2\gamma(G)$  y caracterizan esta clase a través de ciertas operaciones.

Análogamente, en [33] Klostermeyer y MacGillivray definen los grafos italianos y caracterizan subclases de árboles italianos. En [22] Ferrari et al. presentan una caracterización para estos grafos en términos de la existencia de una función  $\{2\}$ -romana dominante óptima particular.

**Proposición 4.** [22] *Un grafo es  $\{2\}$ -romano si y sólo si existe una función  $\{2\}$ -romana dominante con  $V_1 = \emptyset$ .*

Posteriormente, y análogo al trabajo de Henning y Klostermeyer [27], Wang et al. definen en [40] la clase de árboles  $\{k\}$ -romanos como aquellos árboles para los cuales  $\gamma_{\{R_k\}}(G) = k\gamma(G)$ , y prueban que estos árboles se construyen mediante una sucesión de operaciones que preservan la relación entre el número de dominación y el número de dominación  $\{k\}$ -romana. Sobre esta caracterización volveremos en el Capítulo 5.

## 1.6. Descomposición modular

La descomposición modular es una herramienta que permite descomponer un grafo en subgrafos más pequeños, de manera que el grafo original puede obtenerse a partir de estos subgrafos realizando ciertas operaciones. De esta forma, si se conoce el número de dominación  $\{2\}$ -romana en los grafos más pequeños podemos, tal vez, obtener el número de dominación  $\{2\}$ -romana en el grafo original.

Sea  $G$  un grafo, diremos que  $G$  es *indescomponible* si  $G$  y su complemento  $\overline{G}$  son conexos. Si  $G$  es conexo y su complemento no lo es, entonces puede obtenerse como el join entre dos subgrafos inducidos  $G_1$  y  $G_2$ , es decir  $G = G_1 \wedge G_2$ . Si  $G$  es no conexo, entonces puede obtenerse mediante la unión de dos subgrafos  $G_1$ ,  $G_2$ , esto es  $G = G_1 \cup G_2$ . Aplicando este proceso sucesivamente, se obtiene un árbol de descomposición modular. A cada subgrafo que aparece en la descomposición se lo llama un *módulo*.

**Ejemplo 7.** *Descomposición modular de un grafo.*

En el ejemplo que muestra la Figura 1.8 se ilustra el árbol de descomposición modular del grafo  $G$ . En un inicio el grafo se puede escribir como el join entre los vértices azules y los vértices rojos.

Luego, por un lado, consideramos el subgrafo  $G[\{v_1, v_4, v_5\}]$ . Este es no conexo, pero su complemento es conexo, es decir que se puede obtener como la unión entre el grafo que tiene como único vértice a  $v_1$  y el grafo dado por la arista  $v_4v_5$ . Finalmente este último subgrafo se obtiene como el join entre los grafos de un sólo vértice  $v_4$  y  $v_5$ .

Por otro lado, consideramos el subgrafo  $G[\{v_2, v_3\}]$ . Al ser no conexo se obtiene como la unión de los grafos dados por los vértices que lo componen.

En este caso, la descomposición modular dio como resultado que los módulos indescomponibles asociados a este grafo son los grafos triviales asociados a los vértices del grafo. Esto podría no ser así, como ocurre con  $P_4$ , ya que  $\overline{P_4} = P_4$ . Es decir que tanto  $P_4$  como su complemento son conexos.

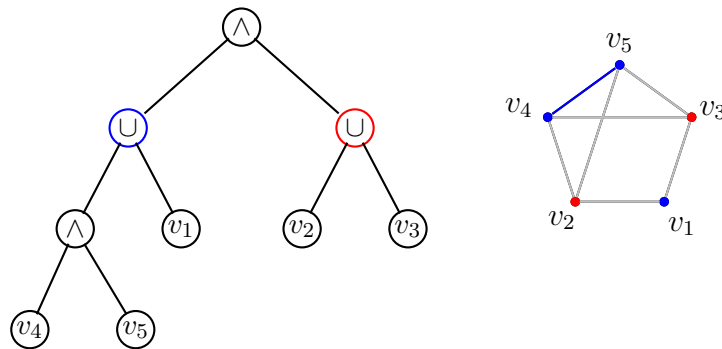


Figura 1.8: Árbol de descomposición modular de un grafo  $G$ .

Algunas de las clases para las cuales se conoce qué tipo de grafos son sus módulos indescomponibles: cografos [34],  $P_4$ -sparse [29],  $P_4$ -tidy [24] y partner limited [38]. Ya que la descomposición modular de un grafo puede obtenerse en tiempo lineal [34], tiene sentido analizar el comportamiento del número de dominación  $\{2\}$ -romana en grafos que se obtienen a partir de las operaciones relacionadas con la descomposición modular: el join y la unión. De esta forma, si los números de dominación  $\{2\}$ -romana de los grafos asociados a los módulos pueden obtenerse en tiempo polinomial en función del orden del grafo, obtenemos un algoritmo de tiempo polinomial para calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en las familias de grafos mencionadas. Sobre esto volveremos en el Capítulo 4.



# Capítulo 2

## Grafos $\{k\}$ -romanos

En este capítulo retomamos la cadena de desigualdades que presenta la Proposición 1. Ésta relaciona el número de dominación con el número de dominación  $\{k\}$ -romana. A partir de la misma, y de manera similar al estudio realizado por Henning et al. en [27] para árboles, iniciamos este capítulo definiendo los grafos  $\{k\}$ -romanos como aquellos grafos que verifican una de estas desigualdades por igualdad. Al introducir una clase nueva de grafos, es interesante estudiar si reconocer cuándo un grafo general está o no en esta clase es un problema fácil o no desde el punto de vista de la complejidad computacional. Es posible que un grafo sea  $\{k\}$ -romano y alguno de sus subgrafos inducidos no lo sea ( $P_6$  es  $\{2\}$ -romano pero  $P_5$  no lo es); esto nos lleva a no poder por ejemplo encontrar una caracterización por subgrafos inducidos. Al no contar con una caracterización de esta nueva clase, debemos encontrar una manera de realizar ese estudio.

Como es usual, primero analizamos tanto condiciones para que un grafo sea  $\{k\}$ -romano como condiciones que cumplen los grafos  $\{k\}$ -romanos, las cuales se presentan en la Sección 2.2. Haciendo uso de estas propiedades, y relacionando  $DkR$  con el problema de matching perfecto en un grafo middle, en la Sección 2.3 estudiamos la complejidad computacional del problema de reconocer si un grafo es efectivamente  $\{k\}$ -romano.

### 2.1. Definición y ejemplos

Como presentan Wang et al. en [40], todo grafo  $G$  verifica

$$\gamma(G) \leq \gamma_{\{Rk\}}(G) \leq k\gamma(G). \quad (2.1)$$

En cuanto a la cota inferior, es interesante notar que a pesar de ser ajustada, la diferencia entre los parámetros puede ser tan grande como se quiera, incluso en grafos conexos, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.** *Número de dominación y número de dominación  $\{k\}$ -romana.*

Dados  $m, k \in \mathbb{Z}^+$  con  $k \geq 3$ , consideremos el grafo  $T_{m,k}$  que se obtiene de un camino de  $m$  vértices al cual, en cada vértice se añade una clique de tamaño  $k$ , como se muestra en la Figura 2.1.

Para este grafo  $\gamma(T_{m,k}) = m$  y  $\gamma_{\{Rk\}}(T_{m,k}) = km$ , es decir que la diferencia entre estos parámetros es  $(k-1)m$ .

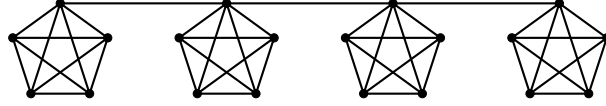


Figura 2.1: Grafo  $T_{4,5}$

Más aún, para los grafos  $T_{m,k}$  se verifica la cota superior por igualdad, es decir que los parámetros en los extremos de la desigualdad 2.1 están lo más alejados posible. Esta condición nos permite definir una nueva clase de grafos, que extiende a la clase de árboles  $\{k\}$ -romanos definida en [40].

**Definición 2.** *Para un entero  $k \geq 2$ , un grafo  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano si  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = k\gamma(G)$ .*

Notar que se considera  $k \geq 2$  ya que todo grafo  $G$  satisface  $\gamma_{\{R1\}}(G) = \gamma(G)$ .

**Observación 2.** *Claramente esta clase de grafos coincide con la clase de grafos italianos definida por Klostermeyer y McGillivray en [33] en el caso en que  $k = 2$ .*

Como es usual al definir un nuevo concepto, las primeras inquietudes que surgen al respecto son: si existen elementos no triviales dentro de la clase y si hay grafos que no verifiquen la propiedad. En respuesta a las mismas presentamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 9.** *Grafos  $\{k\}$ -romanos.*

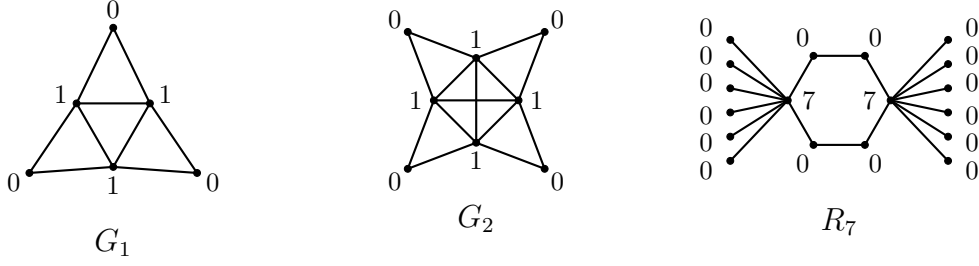
El número de dominación de los grafos  $G_1$  y  $G_2$  en la Figura 2.2 es  $\gamma(G_1) = \gamma(G_2) = 2$ . El grafo  $G_1$  no es  $\{2\}$ -romano, ya que admite una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso 3.

Para el grafo  $G_2$ , no existe una función  $\{2\}$ -romana de peso 3 ya que ningún vértice es adyacente a  $|V(G_2)| - 2$  vértices, ni existe un conjunto de tres vértices tal que cualquier otro vértice es adyacente a dos de ellos. Es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(G_2) \geq 4$ . En la Figura 2.2 se presenta la asignación de una  $\gamma_{\{R2\}}(G_2)$ -función de peso 4. Por lo que  $G_2$  es  $\{2\}$ -romano.

Por otro lado, como vimos en el Ejemplo 6, cada grafo  $R_k$  es un grafo  $\{k\}$ -romano para  $k \geq 2$ . En la Figura 2.2 se muestra  $R_7$ , que es un grafo  $\{7\}$ -romano.

En lo que sigue presentaremos los primeros resultados que surgen del estudio de esta clase.



Figura 2.2: Grafos  $\{k\}$ -romanos.

## 2.2. Primeros resultados

En esta sección analizamos condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea  $\{k\}$ -romano, así como la relación entre grafos  $\{k\}$ -romanos para distintos valores de  $k$ .

Como vimos en el Ejemplo 9, el grafo  $G_2$  es  $\{2\}$ -romano, es decir que la clase de grafos  $\{2\}$ -romanos es no vacía, y el grafo  $G_1$  no es  $\{2\}$ -romano, es decir que hay grafos que no pertenecen a la clase de grafos  $\{2\}$ -romanos. Más aún, cada clase de grafos  $\{k\}$ -romanos es no vacía ya que cada grafo  $R_k$  es  $\{k\}$ -romano. En contraposición, el grafo unión de  $n$  copias de  $K_1$  con  $n < k$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano como se deduce de la Observación 1.

Por otro lado, también es interesante pensar, ya que  $G_2$  es  $\{2\}$ -romano, si puede ser  $\{3\}$ -romano. En otras palabras si existe alguna relación entre los grafos  $\{k\}$ -romanos para distintos valores de  $k$ . Es decir, si un mismo grafo  $G$  puede o no pertenecer a más de una de estas clases. Esto nos lleva a nuestro primer resultado:

**Lema 1.** *Para  $k \geq 2$ , si  $G$  es un grafo  $\{k+1\}$ -romano, entonces  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano.*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano y sea  $f$  una  $\gamma_{\{Rk\}}$ -función de  $G$ , entonces  $w(f) < k\gamma(G)$ .

Sea  $D$  un conjunto dominante mínimo en  $G$ , y sea  $g : V(G) \rightarrow \{0, \dots, k+1\}$  tal que

$$g(v) = \begin{cases} f(v) + 1 & \text{si } v \in D \\ f(v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

entonces  $g$  es una función  $\{k+1\}$ -romana de  $G$  y

$$w(g) = w(f) + |D| = w(f) + \gamma(G) < k\gamma(G) + \gamma(G) = (k+1)\gamma(G).$$

Por lo tanto  $G$  no es un grafo  $\{k+1\}$ -romano. □

Esta condición necesaria nos da una cota sobre el valor de  $k$  para el cual un grafo puede ser  $\{k\}$ -romano. Dado que, si  $|V| = n$  y  $k \geq n$  entonces  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = n$ , un grafo será  $\{k\}$ -romano a lo sumo hasta su orden  $n$ . Más aún, no será  $\{k\}$ -romano para ningún  $k > n$ .

Por otro lado, como es usual con este tipo de resultados, usaremos su contrarrecíproco. Esto es, si un grafo  $G$  no es  $\{k\}$ -romano, entonces no será  $\{\ell\}$ -romano para ningún  $\ell \geq k$ . En particular si un grafo no es  $\{2\}$ -romano, no es  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 3$ .

Una primera observación es la que surge al considerar grafos no conexos. Supongamos que  $G$  tiene como componentes conexas a los grafos  $H_1$  y  $H_2$ , entonces para cada entero positivo  $k$ , el número de dominación  $\{k\}$ -romana de  $G$  es la suma de los números de dominación  $\{k\}$ -romanos de  $H_1$  y  $H_2$ . Aplicando inductivamente este razonamiento a la definición de grafos  $\{k\}$ -romanos, se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 5.** *Para cada  $k \geq 2$ ,  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano si y solo si todas sus componentes conexas son grafos  $\{k\}$ -romanos.*

*Demostración.* Sean  $C_i$  para  $i = 1, \dots, k$  las componentes conexas del grafo  $G$ . Teniendo en cuenta que

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^k \gamma(C_i) \quad \text{y} \quad \gamma_{\{Rk\}}(G) = \sum_{i=1}^k \gamma_{\{Rk\}}(C_i)$$

resulta que, si cada componente conexa  $C_i$  es un grafo  $\{k\}$ -romano, entonces también lo es  $G$ .

Por otro lado, sea  $G$  un grafo  $\{k\}$ -romano y  $f$  es una  $\gamma_{\{Rk\}}$ -función de  $G$ , entonces su restricción a  $V(C_i)$ , digamos  $f_i$  es una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $C_i$  para cualquier componente conexa  $C_i$ . Supongamos que en alguna  $C_j$ , el peso de  $f_j$  es menor o estricto que  $k\gamma(C_j)$ . Luego como para cada componente conexa,  $\gamma_{\{Rk\}}(C_i) \leq k\gamma(C_i)$  resulta que  $\gamma_{\{Rk\}}(G) < k\gamma(G)$  lo que contradice que  $G$  sea un grafo  $\{k\}$ -romano.  $\square$

De este resultado se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 1.** *Para cada  $k \geq 2$ ,  $G$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano si existe una componente conexa  $C$  tal que  $|V(C)| < k\gamma(C)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $C$  es una componente conexa de  $G$  con  $|V(C)| < k\gamma(C)$ . Y sea  $f$  la función en  $V(C)$  que asigna 1 a cada vértice. Entonces  $f$  es una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $C$ , que implica que  $\gamma_{\{Rk\}}(C) \leq f(C) = |V(C)| < k\gamma(C)$ . Luego de la Proposición 5,  $G$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano.  $\square$

En lo que sigue se pretende analizar si un grafo es  $\{k\}$ -romano. Una condición necesaria para que lo sea es que cada componente conexa tenga al menos  $k$  vértices, y en particular para los grafos no conexos, será importante entonces considerar la cantidad de vértices en cada una de sus componentes conexas. En otras palabras, sigue de la Proposición 5 que todo grafo  $\{k\}$ -romano verifica que cada componente conexa tiene al menos  $k$  vértices.

A partir de estos resultados, es válido conjeturar si alguna de estas condiciones necesarias es también suficiente.

**Ejemplo 10.** Grafo con al menos  $k$  vértices que no es  $\{k\}$ -romano.

Para el grafo  $G_2$  del Ejemplo 9, en la Figura 2.3 se presenta la asignación de una función  $\{3\}$ -romana dominante de peso 5. Es decir que  $G_2$  es un grafo  $\{2\}$ -romano pero no es un grafo  $\{3\}$ -romano.

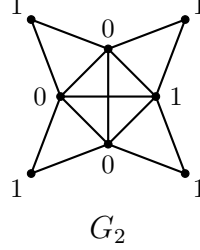


Figura 2.3: Grafo que no es  $\{3\}$ -romano.

Como se ve claramente en el Ejemplo 10, la recíproca del Lema 1 no es cierta en general. Teniendo esto en cuenta, en adelante presentamos algunas condiciones que nos acercan a una caracterización de esta clase de grafos.

**Lema 2.** Todo grafo de orden  $n \geq k$  con un vértice universal es un grafo  $\{k\}$ -romano.

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo de orden al menos  $k$  con un vértice universal, luego  $\gamma(G) = 1$  y  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \leq k$ . Probaremos que  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \geq k$ , de lo cual sigue que  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano.

Sea  $f$  una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $G$ . Si  $f(v) \geq 1$  para todo  $v \in V(G)$ , entonces  $f(G) \geq |V(G)| \geq k$ , y si  $f(v) = 0$  para algún vértice  $v \in V(G)$ , entonces  $f(G) \geq f(N(v)) \geq k$ . Por lo tanto, en ambos casos,  $f(G) \geq k$ , lo que implica que  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \geq k$ .  $\square$

**Teorema 1.** Sea  $G$  un grafo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. existe un  $k \in \{2, 3, 4\}$  tal que todo subgrafo inducido con al menos  $k$  vértices en  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano;
2. para todo  $k \geq 2$ , cada subgrafo inducido de  $G$  con al menos  $k$  vértices es un grafo  $\{k\}$ -romano.
3.  $G$  es  $\{P_4, C_4\}$ -free<sup>1</sup>.

*Demostración.* Mostremos primero que 1 implica 3. Es fácil verificar que  $P_4$  y  $C_4$  no son grafos  $\{k\}$ -romanos para todo  $k \geq 2$ . De hecho,  $\gamma(C_4) = \gamma(P_4) = 2$  pero  $\gamma_{\{R2\}}(C_4) = 2 < 4$ ,  $\gamma_{\{R2\}}(P_4) = 3 < 4$ , y para todo  $k > 2$ ,  $\gamma_{\{Rk\}}(C_4) \leq 4 < 2k$  y

<sup>1</sup>También conocida como la clase de grafos Trivially perfect.

similarmente,  $\gamma_{\{Rk\}}(P_4) \leq 4 < 2k$ . Es decir que  $P_4$  y  $C_4$  no son grafos  $\{2\}$ -romanos, luego del Lema 1 se tiene que  $P_4$  y  $C_4$  no son grafos  $\{k\}$ -romanos para todo  $k \geq 2$ . Por lo tanto, los grafos que satisfacen 1 no pueden contener  $P_4$  ni  $C_4$  como subgrafos inducidos, ya que de contenerlo, este sería un subgrafo con al menos  $k$  vértices que no es un grafo  $\{k\}$ -romano para  $k \in \{2, 3, 4\}$ .

Probemos ahora que 3 implica 2. Esta prueba la hacemos por inducción sobre el tamaño del grafo. Primero la implicancia se cumple para el grafo trivial. Sea  $n > 1$  y supongamos que la propiedad se cumple para grafos con menos de  $n$  vértices.

Sea  $G$  un grafo  $\{P_4, C_4\}$ -free con  $n$  vértices. Sea  $k \geq 2$  y sea  $H$  un subgrafo inducido con al menos  $k$  vértices en  $G$ . Si  $H$  es no conexo, entonces aplicando la hipótesis inductiva sobre cada componente conexa de  $H$ ,  $H$  es un grafo  $\{k\}$ -romano. Si  $H$  es conexo, entonces, como  $H$  es un subgrafo inducido conexo de un grafo  $\{P_4, C_4\}$ -free,  $H$  tiene un vértice universal. Entonces, por el Lema 2,  $H$  es un grafo  $\{k\}$ -romano.

Finalmente, 2 implica 1 de forma trivial, lo que concluye la demostración.  $\square$

Notemos que en el Teorema 1, si bien los ítems 1 y 2 son equivalentes, como condición necesaria es más fuerte la condición 2 mientras que como condición suficiente lo es la condición 1.

### 2.3. Reconocimiento de grafos $\{k\}$ -romanos

En esta sección estudiamos la complejidad computacional del problema asociado a reconocer si un grafo es  $\{k\}$ -romano. Para esto definimos el problema de decisión asociado, y presentamos el grafo middle [25] de un grafo  $G$ . A partir de los resultados asociados a estos grafos en la literatura, empezamos nuestro estudio del problema de reconocimiento para el caso  $k = 2$ . Inspirados en estas propiedades del grafo middle de  $G$ , y mirando a  $G$  como un hipergrafo, generalizamos a continuación esas propiedades al contexto de los hipergrafos, lo que nos permite estudiar el problema de reconocimiento para valores de  $k$  mayores a 2.

El problema de decisión asociado al Problema de Reconocimiento de una familia  $\mathcal{F}$  se define como sigue:

**Problema de Reconocimiento en  $\mathcal{F}$**

**Instancia:**  $G = (V, E)$ .

**Pregunta:** ¿ $G \in \mathcal{F}$ ?

En particular, definimos el problema de reconocimiento de grafos  $\{k\}$ -romanos como sigue:

**Reconocimiento de grafos  $\{k\}$ -romanos ( $GkR$ )**

**Instancia:**  $G = (V, E)$ .

**Pregunta:** ¿Es  $G$  un grafo  $\{k\}$ -romano?

Considerando resultados en la literatura, obtenemos el primer resultado de complejidad computacional para los grafos  $\{2\}$ -romanos. Este resultado involucra la clase de los grafos middle.

Dado un grafo  $G$ , el *grafo middle de  $G$*  (definido en [25]) que notamos  $M(G)$ , es el grafo que se obtiene de  $G$  al subdividir cada arista una vez y añadir aristas entre los nuevos vértices si tienen vecinos en común.

**Ejemplo 11.** Un grafo  $G$  y su grafo middle asociado  $M(G)$ .

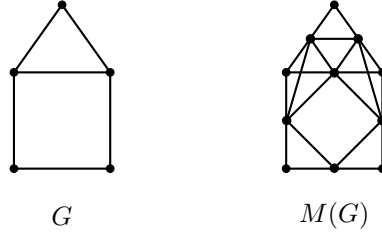


Figura 2.4:  $G$  y  $M(G)$ .

En particular para la clase de los grafos middle, existen resultados que guían el estudio del problema de reconocimiento  $G2R$ .

Kazemnejad et al. [31] probaron que para todo grafo  $G$  de orden  $n \geq 2$  sin vértices aislados, el número de dominación del grafo middle asociado a  $G$  es igual al número de cubrimiento por aristas del grafo, es decir:

**Teorema 2.** [31] Si  $G$  es un grafo de orden  $n \geq 2$  sin vértices aislados entonces  $\gamma(M(G)) = \rho(G)$ .

Observemos que esto implica que si  $G$  es un grafo de  $n$  vértices sin vértices aislados, entonces  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \gamma(M(G)) \leq n - 1$ . La primera desigualdad también fue probada por Basilio et al. [3], quienes demostraron además el siguiente resultado:

**Proposición 6.** [3] Sea  $G$  un grafo de orden  $n$ ,  $\gamma(M(G)) = \frac{n}{2}$  si y sólo si  $G$  tiene un *matching perfecto*.

Otro resultado que relaciona el número de dominación  $\{2\}$ -romana de un grafo middle con el orden del grafo asociado es el siguiente:

**Teorema 3.** [32] Si  $G$  es un grafo de orden  $n$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(M(G)) = n$ .

Estos nos permiten obtener el siguiente teorema.

**Teorema 4.** *Sea  $G$  un grafo sin vértices aislados. Entonces,  $M(G)$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $G$  tiene un matching perfecto.*

*Demostración.* A partir de la Proposición 6,  $\gamma(M(G)) = \frac{n}{2}$  si y sólo si  $G$  tiene un matching perfecto. Por otro lado, del Teorema 3, si  $|V(G)| = n$  entonces  $\gamma_{\{R2\}}(M(G)) = n$ . Luego  $\gamma_{\{R2\}}(M(G)) = 2 \cdot \gamma(M(G)) = n$  si y sólo si  $G$  tiene un matching perfecto.  $\square$

Este teorema es el punto de partida para demostrar el resultado clave en este capítulo. Pero antes de continuar, es interesante mencionar el siguiente corolario.

**Corolario 2.** *El problema de reconocimiento de grafos  $\{2\}$ -romanos es resoluble en tiempo polinomial cuando se restringe a los grafos middle.*

*Demostración.* En [39], Skowrońska y Syslo probaron que los grafos middle pueden ser reconocidos en tiempo lineal y, en caso de una respuesta positiva, un grafo  $G$  tal que el grafo de entrada es igual a  $M(G)$  puede ser calculado en tiempo lineal. Dado que la existencia de un matching perfecto en un grafo puede verificarse en tiempo polinomial (ver por ejemplo [19]), el resultado sigue del Teorema 4.  $\square$

Nuestra generalización del Teorema 4 se basa en una generalización a hipergrafos de los grafos middle y ciertas propiedades que se derivan de estos pares grafo-hipergrafo. Introducimos entonces las siguientes nuevas definiciones en el contexto de hipergrafos.

**Definición 3.** *Dado un hipergrafo  $H = (V, E)$ , un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V \cup E$  es compatible con  $H$  si  $V$  es un conjunto independiente en  $G$  y, para cada vértice  $v \in V$  e hiperarista  $e \in E$ ,  $ve$  es una arista de  $G$  si y solo si  $v \in e$ . Si, además, dos hiperaristas cualesquiera  $e_1, e_2 \in E$  tales que  $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$  son adyacentes en  $G$ , entonces  $G$  es fuertemente compatible con  $H$ .*

**Observación 3.** *Si  $G$  es un grafo fuertemente compatible con un hipergrafo  $H$ , puede haber otras aristas entre vértices en  $E$ , como se muestra en el siguiente ejemplo.*

**Ejemplo 12.** *Hipergrafo, grafo compatible y fuertemente compatible.*

*Dado  $H = (V, E)$  el hipergrafo de la Figura 2.5, los grafos  $G_i$  con  $i = 1, 2, 3$  tienen como vértices  $V \cup E$ . Por simplicidad, en cada  $G_i$  se preservó el color en  $H$ , es decir que los vértices asociados a vértices de  $H$  aparecen en negro, y los vértices asociados a las hiperaristas de  $H$  aparecen en el color de la arista correspondiente.*

*El grafo  $G_1$  es compatible con el hipergrafo  $H$ .*

*Los grafos  $G_2$  y  $G_3$  son fuertemente compatibles con el hipergrafo  $H$ . Notar que en  $G_3$  existen aristas entre vértices asociados a hiperaristas no adyacentes en  $H$ , como la arista entre el vértice naranja y el vértice rojo.*

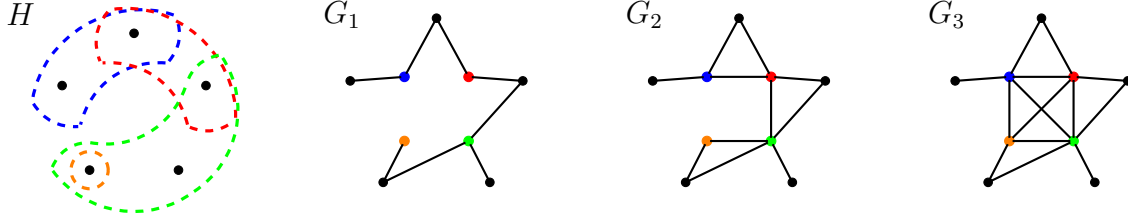


Figura 2.5: Hipergrafo, grafo compatible y grafos fuertemente compatibles.

**Observación 4.** Dado un grafo  $G$ , si consideramos a  $G$  un hipergrafo 2-uniforme,  $M(G)$  es fuertemente compatible con  $G$ .

Notemos que, si  $G = (V, E)$  entonces los vértices de  $M(G)$  son  $V \cup E$ . Además, como en  $M(G)$  se hacen adyacentes los vértices asociados a aristas en  $G$  con extremos en común,  $ee' \in E(M(G))$  si y sólo si  $e \cap e' \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $G$  es un grafo compatible con un hipergrafo dado  $H = (V, E)$ . Entonces:

- Si  $G$  tiene el menor número posible de aristas, entonces  $E$  es un conjunto independiente en  $G$  y  $G$  es precisamente el *grafo bipartito de incidencia* de  $H$ .<sup>2</sup>
- Si  $G$  tiene el mayor número posible de aristas, entonces  $G$  es el grafo split obtenido a partir del grafo bipartito de incidencia de  $H$  de manera que  $E$  induzca una clique. Esta construcción fue utilizada por Bertossi en la demostración de que el problema del conjunto dominante es NP-completo en la clase de los grafos split (ver [5]), así como más recientemente por Boros et al. (ver [8]).
- Si  $H$  es 2-uniforme y  $G$  es el único grafo minimal (con respecto a la relación de subgrafo) que es fuertemente compatible con  $H$ , entonces  $G$  es precisamente el grafo middle de  $H$ , como puede verse en la Figura 2.6.

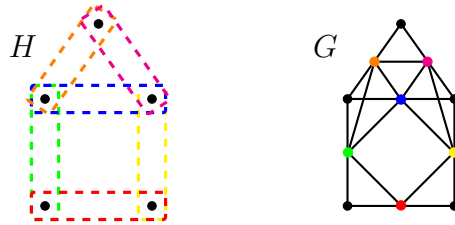


Figura 2.6: Hipergrafo 2-uniforme y su grafo middle asociado

Como puede notarse de la última observación, el siguiente lema generaliza el resultado antes mencionado de Kim [32] (que corresponde al caso  $k = 2$ ).

<sup>2</sup>Dado  $G = (V, E)$ , el grafo *bipartito de incidencia* tiene como vértices a  $V \cup E$  y una arista indica que el vértice pertenece a la arista en el grafo  $G$ .

**Lema 3.** Sea  $k \geq 1$ ,  $H = (V, E)$  un hipergrafo  $k$ -uniforme, y  $G$  un grafo compatible con  $H$ . Entonces  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = |V|$ .

*Demostración.* Dado que  $H$  es  $k$ -uniforme, asignar 1 a cada vértice en  $V$  y 0 a cada vértice en  $E$  resulta en una función  $\{k\}$ -romana dominante en  $G$ . Su peso total es  $|V|$ , por lo tanto,  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \leq |V|$ .

Para probar la desigualdad  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \geq |V|$ , consideramos una función  $\{k\}$ -romana dominante arbitraria  $f$  de  $G$ . Sea  $F$  el subgrafo bipartito de  $G$  con bipartición  $V_0$  y  $E$  tal que para todo  $v \in V_0$  y  $e \in E$ , los vértices  $v$  y  $e$  son adyacentes en  $F$  si y solo si son adyacentes en  $G$ . Es decir, el subgrafo bipartito inducido por  $V_0$  y  $E$ . Ahora consideramos la siguiente función que asigna peso a las aristas de  $F$ : para cada  $v \in V_0$  y  $e \in E$  tal que  $v \in e$ , sea  $w(\{v, e\}) = f(e)$ . Sea  $W$  la suma de todos los pesos de las aristas de  $F$ . Dado que  $f$  es una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $G$ , para cada vértice  $v \in V_0$ , la suma de los pesos de las aristas de  $F$  incidentes con  $v$  es al menos  $k$ . Por lo tanto,  $W \geq k|V_0|$ . Por otro lado, dado que  $H$  es  $k$ -uniforme, para cada  $e \in E$ , el valor  $f(e)$  aparece en como máximo  $k$  aristas incidentes con  $e$ . Por lo tanto,  $W \leq k \cdot (\sum_{e \in E} f(e))$ . Se sigue que  $\sum_{e \in E} f(e) \geq |V_0|$ . Dado que  $f$  le asigna un peso de al menos 1 a cada vértice en  $V \setminus V_0$ , obtenemos  $\sum_{v \in V} f(v) \geq |V \setminus V_0|$ . En consecuencia,

$$\sum_{x \in V(G)} f(x) = \sum_{v \in V} f(v) + \sum_{e \in E} f(e) \geq |V \setminus V_0| + |V_0| = |V|.$$

Como  $f$  era arbitraria, esto demuestra que  $\gamma_{\{Rk\}}(G) \geq |V|$ .  $\square$

Siguiendo el esquema de resultados para el caso  $k = 2$ , el siguiente lema generaliza el Teorema 2 [31].

**Lema 4.** Sea  $H = (V, E)$  un hipergrafo sin vértices aislados y sea  $G$  un grafo fuertemente compatible con  $H$ . Entonces  $\gamma(G) = \rho(H)$ .

*Demostración.* Primero, demostramos que  $\gamma(G) \leq \rho(H)$ . Sea  $E'$  un cubrimiento por aristas mínimo en  $H$ . Basta con demostrar que  $E'$  es un conjunto dominante en  $G$ . Esto se verifica fácilmente: Primero, cada vértice  $v \in V$  pertenece a alguna hiperarista  $e \in E'$ , por lo tanto,  $v$  es adyacente a  $e$  en  $G$ . Segundo, para cada hiperarista  $e \in E \setminus E'$ , podemos elegir arbitrariamente un vértice  $v \in e$  y una hiperarista  $e' \in E'$  tal que  $v \in e'$  para obtener un elemento  $e' \in E'$  adyacente a  $e$  en  $G$  (la adyacencia se mantiene ya que  $v \in e \cap e'$  y  $G$  es fuertemente compatible con  $H$ ). Por lo tanto,  $E'$  es un conjunto dominante en  $G$ , como se afirmaba.

A continuación, demostramos que  $\rho(H) \leq \gamma(G)$ . Notar que para cada vértice  $v \in V$ , la vecindad de  $v$  en  $G$  es una clique no vacía en  $G$  (esto se debe a que  $H$  es fuertemente compatible con  $G$ ). Por lo tanto, si  $D$  es un conjunto dominante en  $G$  tal que  $v \in D \cap V$ , entonces podemos elegir cualquier vecino  $e$  de  $v$  en  $G$  y reemplazar  $v$  por  $e$  en  $D$  para obtener un conjunto dominante  $D'$  en  $G$  tal que



$|D'| \leq |D|$ . Se sigue que cualquier conjunto dominante mínimo  $D$  en  $G$  que a su vez minimiza  $|D \cap V|$  satisface  $D \subseteq E$ . Sea  $D$  un tal conjunto dominante mínimo en  $G$ . Entonces, cada vértice  $v \in V$  tiene un vecino en  $D$ . En consecuencia,  $D$  es un cubrimiento por aristas en  $H$ , lo que implica  $\rho(H) \leq \gamma(G)$ .  $\square$

El caso  $k = 2$  de nuestro siguiente lema implica el resultado antes mencionado de Basilio et al. [3] que establece que si  $G$  es un grafo de  $n$  vértices sin vértices aislados, entonces  $\gamma(M(G)) = n/2$  si y sólo si  $G$  tiene un matching perfecto.

**Lema 5.** *Sea  $k \geq 1$ ,  $H = (V, E)$  un hipergrafo  $k$ -uniforme sin vértices aislados, y  $G$  un grafo fuertemente compatible con  $H$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1.  $H$  tiene un matching perfecto.
2.  $\gamma(G) = |V|/k$ .
3.  $\gamma(G) \leq |V|/k$ .

*Demostración.* Primero, demostramos que el ítem 1 implica el ítem 2. Supongamos primero que  $H$  tiene un matching perfecto  $M = \{e_1, \dots, e_p\}$ . Nótese que  $p = |V|/k$ , ya que  $H$  es  $k$ -uniforme.

Para probar que  $\gamma(G) \leq |V|/k$ , aplicamos el Lema 4 y probamos que  $\gamma(G)\rho(H) \leq |V|/k$ , lo que se sigue claramente ya que  $M$  es un cubrimiento por aristas de  $H$ .

Para ver que  $\gamma(G) \geq |V|/k$ , nótese que para cada vértice  $v \in V$ , la vecindad de  $v$  en  $G$  es una clique no vacía en  $G$  (esto se debe a que  $H$  es fuertemente compatible con  $G$ ). Por lo tanto, si  $D$  es un conjunto dominante en  $G$  tal que  $v \in D \cap V$ , entonces podemos elegir cualquier vecino  $e$  de  $v$  en  $G$  y reemplazar  $v$  por  $e$  en  $D$  para obtener un conjunto dominante  $D'$  en  $G$  tal que  $|D'| \leq |D|$ . Se sigue que cualquier conjunto dominante mínimo  $D$  en  $G$  que minimiza  $|D \cap V|$  satisface  $D \subseteq E$ . Sea  $D$  un tal conjunto dominante mínimo en  $G$ . Dado que cada vértice  $e$  en  $G$  tiene exactamente  $k$  vecinos en  $V$ , se sigue que para dominar  $V$ , debe ocurrir que  $|D| \geq |V|/k$ , y la igualdad se sigue.

Trivialmente, el ítem 2 implica el ítem 3.

Finalmente, demostramos que el ítem 3 implica el ítem 1. Supongamos que  $\gamma(G) \leq |V|/k$ . De Lema 4 se sigue que  $\rho(H) \leq |V|/k$ . Sea  $E'$  un cubrimiento por aristas de tamaño  $\rho(H)$  y supongamos que  $E'$  no es un matching perfecto. Entonces  $E'$  contiene dos aristas con intersección no vacía. Dado que  $H$  es  $k$ -uniforme, un matching perfecto tiene tamaño  $|V|/k$ . Así  $\sum_{e \in E'} |e| > |V|$  porque  $E'$  es un cubrimiento y hay un vértice que pertenece a al menos dos aristas. Por lo tanto,  $\rho(H) = |E'| > |V|/k$ , una contradicción. Resulta entonces  $E'$  es un matching perfecto, como queríamos probar.  $\square$

Los Lemas 3 y 5 tienen la siguiente consecuencia, la cual generaliza al Teorema 4.

**Teorema 5.** *Sea  $k \geq 1$ , sea  $H = (V, E)$  un hipergrafo  $k$ -uniforme sin vértices aislados, y sea  $G$  un grafo fuertemente compatible con  $H$ . Entonces  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano si y solo si  $H$  tiene un matching perfecto.*

*Demostración.* Del Lema 3 tenemos que  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = |V|$ . Luego, si  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano,  $\gamma_{\{Rk\}}(G) = k\gamma(G)$ . Es decir que  $\gamma(G) = \frac{|V|}{k}$ , lo cual por Lema 5 es equivalente a que  $H$  tenga un matching perfecto.

Para la recíproca, si  $H$  tiene un matching perfecto entonces  $k\gamma(G) = |V|$  que resulta en  $k\gamma(G) = \gamma_{\{Rk\}}(G)$ . Es decir que  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano.  $\square$

Como resultado del teorema anterior, el problema  $GkR$  es equivalente al problema de determinar si un hipergrafo tiene un matching perfecto. Para  $k \geq 2$ ,  $GkR$  equivalente al problema de decisión *cubrimiento exacto por  $k$ -conjuntos* ( $XkC$ ), que se sabe es NP-completo para todo  $k \geq 3$ , incluso cuando se restringe a hipergrafos  $k$ -partitos [23]. Por lo tanto, a partir del Teorema 5, dado que puede construirse un grafo fuertemente compatible con éste y split (con bipartición  $(V(H), E(H))$ ) se deduce la complejidad computacional para la clase de los grafos split.

**Teorema 6.** *Para cada  $k \geq 3$  fijo, el problema  $GkR$  es NP-difícil, incluso cuando se restringe a la clase de los grafos split.*

*Demostración.* Sea  $H = (V, E)$  una instancia para  $XkC$ , es decir, un hipergrafo  $k$ -uniforme  $k$ -partito. Sea  $G$  el grafo fuertemente compatible con  $H$  tal que  $E$  forma una clique. Dado que  $V$  es un conjunto independiente y  $E$  una clique en  $G$ , el grafo  $G$  es un grafo split. Por el Teorema 5 y la observación anterior,  $H$  tiene un matching perfecto si y solo si  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano. Por lo tanto, determinar si  $G$  es un grafo  $\{k\}$ -romano es NP-difícil.  $\square$

Los resultados presentes en este capítulo fueron publicados en [6].

# Capítulo 3

## Sobre el reconocimiento de grafos $\{2\}$ -romanos

Continuando con el problema de reconocer si un grafo es efectivamente un grafo  $\{k\}$ -romano, en el capítulo anterior mostramos que el problema de reconocimiento para grafos  $\{k\}$ -romanos es NP-difícil para  $k > 2$ . Sin embargo, sigue como una pregunta abierta la complejidad de determinar si un grafo dado es  $\{2\}$ -romano ya que sólo quedó determinada su complejidad, la cual es polinomial, cuando el grafo de entrada es un grafo middle. En este capítulo proporcionamos respuestas parciales a esta pregunta.

Si bien  $GkR$  es difícil incluso para grafos split si  $k > 2$ , las herramientas implementadas para hipergrafos no pueden ser utilizadas para el caso  $k = 2$  (ya que  $XkC$  es NP-difícil cuando  $k \geq 3$ ). Debido a esto, abordamos el estudio del problema  $G2R$  en esta misma clase de grafos con el objetivo de extender o refutar la complejidad del problema de reconocimiento.

Tanto  $DOM$  como  $DkR$  son NP-c en grafos split [5, 40]. Con esto en mente, analizamos las funciones  $\{2\}$ -romanas dominantes óptimas en grafos split, lo que nos permite tener una idea más clara sobre cuales de ellos son  $\{2\}$ -romanos.

Siguiendo esta idea, analizamos si es posible descomponer los grafos split en otros grafos split “más pequeños”. En este sentido, definimos una nueva operación, la operación split join y caracterizamos los grafos split  $\{2\}$ -romanos que pueden descomponerse con respecto a esta operación. El problema de reconocer si un grafo split puede obtenerse como split join de dos grafos split más pequeños puede obtenerse en tiempo polinomial, alcanza con eliminar todas las aristas con ambos extremos en  $K$  y analizar si el grafo obtenido tiene por lo menos dos componentes conexas. Esto reduce el problema de reconocer grafos split  $\{2\}$ -romanos a aquellos grafos split que son primos con respecto a la operación split join. En relación a esta discusión, caracterizamos los grafos  $\{2\}$ -romanos dentro de dos familias específicas de grafos split: los soles y sus complementos.

### 3.1. Grafos split y funciones $\{2\}$ -romana dominantes

Una *partición split* de un grafo  $G$  es una partición  $(K, I)$  de su conjunto de vértices tal que  $I$  es un conjunto independiente y  $K$  induce una clique en  $G$ . Dado un grafo split, la partición split podría no ser única (como se muestra en el Ejemplo 2 del Capítulo 1).

En este capítulo, consideramos los grafos split dotados de una partición. Para simplificar la notación, denotamos el hecho de que  $G = (V, E)$  es un grafo split con una partición split  $(K, I)$  por  $G = (K, I, E)$ . Además, por la Proposición 5, al estudiar qué grafos split son  $\{2\}$ -romanos, podemos restringir nuestra atención a los grafos split conexos.

Comenzamos con un lema general sobre grafos split, identificando ciertas propiedades de las  $\gamma_{\{R2\}}$ -funciones en grafos split.

**Lema 6.** *Sea  $G = (K, I, E)$  un grafo split sin vértices aislados. Entonces existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  tal que  $f(N(u) \cap I) \leq 1$  para cada  $u \in K$  y  $f(K) \geq 2$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $g$  de  $G$  y  $u \in K$  tal que  $g(N(u) \cap I) \geq 2$ . Si  $g(u) \geq 1$  o  $g(N(u) \cap I) \geq 3$ ,  $g$  no es de peso mínimo porque podríamos cambiar por 0 el peso asignado por  $g$  a los vecinos de  $u$  en  $I$ , y por 2 el peso asignado por  $f$  a  $u$  para obtener una nueva función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso menor que  $\gamma_{\{R2\}}(G)$ . Luego,  $g(N(u) \cap I) = 2$  y  $g(u) = 0$ . Sea  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  definida como

$$f(v) = \begin{cases} 2 & \text{si } v = u, \\ 0 & \text{si } v \in N(u) \cap I, \text{ y} \\ g(v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces  $f$  es una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  que satisface las propiedades.

Ahora podemos considerar que toda  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  satisface la primera propiedad. Supongamos que alguna  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $g$  de  $G$  verifica que  $g(K) \leq 1$ . Esto implica que no hay ningún vértice  $v \in I$  tal que  $g(v) = 0$ , ya que de lo contrario  $g(K) \geq g(N(v)) \geq 2$ . Además, como cada vértice  $v \in I$  tiene un vecino  $u \in K$ , tenemos  $1 \leq g(v) \leq g(N(u) \cap I) \leq 1$ , por lo tanto  $g(v) = 1$ .

Como  $G$  no tiene vértices aislados,  $K$  es no vacío. Si  $g(K) = 0$ , entonces cualquier vértice  $u \in K$  tiene  $g(u) = 0$  pero  $g(N(u)) \leq 1$ , una contradicción. Por lo tanto,  $g(K) = 1$  y existe un único vértice  $u \in K$  con  $g(u) = 1$ .

Observemos que  $I$  tampoco es vacío, de lo contrario  $u$  tiene un vecino  $u'$  en  $K$  y  $g(N(u')) \leq g(K) \leq 1$ , una contradicción ya que  $g(u') = 0$ . Sea  $v$  un vértice en  $I$ . Recordemos que  $g(v) = 1$  y  $v$  tiene al menos un vecino en  $K$ , digamos  $u'$

(posiblemente  $u' = u$ ). Sea  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = u', \\ 0 & \text{si } x = u \text{ y } u \neq u', \\ 0 & \text{si } x = v, \text{ y} \\ g(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces  $f$  también es una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ , y  $f(K) \geq 2$ .  $\square$

Como resultado de este lema obtenemos la siguiente caracterización de los grafos split  $\{2\}$ -romanos sin vértices aislados para los cuales ningún par de vértices del conjunto independiente tiene vecinos en común.

**Corolario 3.** *Sea  $G = (K, I, E)$  un grafo split sin vértices aislados tal que para cada  $u \in K$ ,  $|N(u) \cap I| \leq 1$ . Entonces  $G$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $|I| \leq 1$  (es decir que  $G$  tiene un vértice universal).*

*Demostración.* Si  $I = \emptyset$ , entonces  $G$  es una clique con al menos dos vértices y, por lo tanto, un grafo  $\{2\}$ -romano. Supongamos ahora que  $I \neq \emptyset$ . Dado que los vértices en  $I$  tienen vecindades cerradas disjuntas por pares, tenemos que  $\gamma(G) \geq |I|$ . Por otro lado, al seleccionar un vecino de cada vértice en  $I$  se obtiene un conjunto dominante en  $G$ , lo que implica que  $\gamma(G) \leq |I|$ . Por lo tanto,  $\gamma(G) = |I|$ . Fijemos algún  $x \in I$  y  $y \in N_G(x)$  y definamos  $f$  como

$$f(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = x \text{ o } v \in K \setminus \{y\}, \\ 1 & \text{si } v \in I \setminus \{x\}, \text{ y} \\ 2 & \text{si } v = y. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante con peso  $|I| + 1$ . Por otro lado,  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq 2$  por el Lema 6 y, por lo tanto,  $2 \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq |I| + 1 \leq 2|I| = 2\gamma(G)$ , con  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 2\gamma(G)$  si y sólo si  $|I| = 1$ .  $\square$

Aunque este Corolario presenta una condición necesaria y suficiente, esto sólo es válido en una subclase de grafos split. Por esto, en lo que sigue definimos una nueva operación que en ciertos casos nos permitirá descomponer un grafo split para simplificar el problema de reconocimiento.

## 3.2. Una nueva operación entre grafos split

**Definición 4.** *Sean  $G_1 = (K_1, I_1, E_1)$  y  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  dos grafos split. Al grafo split que se obtiene al hacer la unión de los grafos  $G_1$  y  $G_2$  y añadir todas las aristas posibles entre los conjuntos de vértices  $K_1$  y  $K_2$ , lo llamamos split join de  $G_1$  y  $G_2$ , denotada por  $\wedge_S(G_1, G_2)$ .*

**Ejemplo 13.**  $\wedge_S(G_1, G_2)$ .

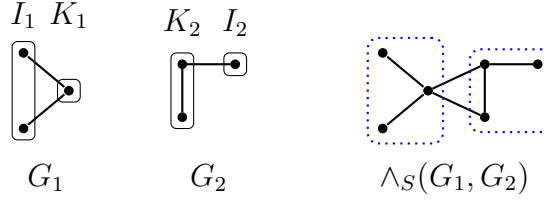


Figura 3.1:  $G_1$ ,  $G_2$  y  $\wedge_S(G_1, G_2)$ .

Es fácil observar que esta operación es conmutativa, es decir que para cualquier par de grafos split  $G_1$  y  $G_2$  se verifica  $\wedge_S(G_1, G_2) = \wedge_S(G_2, G_1)$ . Esta operación es también cerrada en la clase de grafos split, pero no es independiente de la partición split elegida.

A continuación, mostramos condiciones para que el número de dominación del grafo que se obtiene mediante la operación split join de dos grafos split sea la suma de los números de dominación de los grafos que se operan. En la prueba, hacemos uso del siguiente resultado.

**Lema 7** (Bertossi [5]). *Sea  $G = (K, I, E)$  un grafo split sin vértices aislados. Entonces,  $G$  admite un conjunto dominante mínimo  $D$  tal que  $D \subseteq K$ .*

**Lema 8.** *Sean  $G_1 = (K_1, I_1, E_1)$  y  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  grafos split sin vértices aislados tal que  $I_1 \neq \emptyset$  y  $I_2 \neq \emptyset$ . Sean  $D_1$  y  $D_2$  conjuntos dominantes mínimos de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Entonces  $D = D_1 \cup D_2$  es un conjunto dominante mínimo de  $\wedge_S(G_1, G_2)$ . Más aún, si  $D \subseteq K$ , también vale la recíproca.*

*Demostración.* Sea  $G = \wedge_S(G_1, G_2)$ , entonces  $G = (K, I, E)$  donde  $K = K_1 \cup K_2$  e  $I = I_1 \cup I_2$ . Probaremos primero que  $D$  es un conjunto dominante mínimo.

Claramente, si  $D_1, D_2$  son conjuntos dominantes mínimos de  $G_1, G_2$  respectivamente,  $D$  es un conjunto dominante de  $G$ . Supongamos por contradicción que  $D$  no es mínimo. Por el Lema 7, existe un conjunto dominante mínimo  $D'$  de  $G$  tal que  $D'$  es un subconjunto de  $K$ . Dado que  $D$  no es mínimo,  $|D'| < |D|$ . Sea  $D'_1 = D' \cap K_1$  consideremos un vértice arbitrario  $u \in I_1$  (notar que tal vértice existe por hipótesis). Dado que  $D' \subseteq K$ , tenemos que  $u \in V(G) \setminus D'$  y por lo tanto existe un vértice  $v \in D'$  adyacente a  $u$ . Luego como no hay aristas en  $G$  entre vértices de  $I_1$  y vértices de  $K_2$ , el vértice  $v$  debe pertenecer a  $K_1$ . Por lo tanto,  $D'_1$  es un subconjunto no vacío de  $K_1$  que domina a cada vértice en  $I_1$ , es decir,  $D'_1$  es un conjunto dominante de  $G_1$ . En consecuencia,  $|D_1| \leq |D'_1|$ , ya que  $D_1$  es un conjunto dominante mínimo de  $G_1$ . Con un razonamiento análogo, el conjunto  $D'_2 = D' \cap K_2$  es un conjunto dominante de  $G_2$  y  $|D_2| \leq |D'_2|$ . Además,  $D' \subseteq K$  implica que los conjuntos  $D'_1$  y  $D'_2$  forman una partición de  $D'$ . Por lo tanto,  $|D| = |D_1| + |D_2| \leq |D'_1| + |D'_2| = |D'|$ , lo cual es una contradicción.

Para la recíproca, veamos que  $D_1$  y  $D_2$  son conjuntos dominantes mínimos de  $G_1$  y  $G_2$ . Por Lema 7, existe  $D$  un conjunto dominante mínimo de  $G$  tal que  $D \subseteq K$ . Claramente  $D_1 = D \cap (K_1 \cup I_1)$  es un conjunto dominante de  $G_1$ . Más aún, como  $I_1 \neq \emptyset$  y  $D$  es mínimo resulta  $D_1$  mínimo. Análogamente se tiene que  $D_2 = D \cap (K_2 \cup I_2)$  es un conjunto dominante mínimo de  $G_2$  como queríamos probar.  $\square$

Del Lema 8 se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 4.** Sean  $G_1 = (K_1, I_1, E_1)$  y  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  grafos split sin vértices aislados tales que  $I_1 \neq \emptyset$  y  $I_2 \neq \emptyset$ . Entonces  $\gamma(\wedge_S(G_1, G_2)) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ .

*Demostración.* Sean  $D_1$  y  $D_2$  conjuntos dominantes mínimos de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Por el Lema 8, el conjunto  $D = D_1 \cup D_2$  es un conjunto dominante mínimo de  $\wedge_S(G_1, G_2)$ . Dado que  $D_1$  y  $D_2$  son disjuntos, obtenemos  $\gamma(\wedge_S(G_1, G_2)) = |D| = |D_1| + |D_2| = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ .  $\square$

**Observación 5.** Siendo que en ambos resultados se presentan condiciones necesarias para que el número de dominación de la operación split join sea la suma de los números de dominación de cada grafo, es interesante analizar la importancia de las hipótesis en cada uno de ellos. Éstas son, que los grafos no tengan vértices aislados y que los conjuntos independientes en cada una de las particiones split sean no vacíos.

Para la primera condición, consideremos  $G_1 = (\{x\}, \{y\}, \emptyset)$  y  $G_2 = (\{u\}, \{v\}, \emptyset)$ , es decir que ambos grafos tienen vértices aislados. Luego  $\gamma(\wedge_S(G_1, G_2)) = 3$  mientras que  $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) = 2 + 2 = 4$ . Para la segunda condición, consideremos  $G_1 = (\{x, y\}, \emptyset, \{xy\})$  y  $G_2 = (\{w\}, \{z\}, \{wz\})$  y nótese que  $\gamma(\wedge_S(G_1, G_2)) = 1$  y  $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) = 2$ .

A continuación, mostraremos que la split join de dos grafos split es  $\{2\}$ -romana sólo si ambos grafos son  $\{2\}$ -romanos.

**Teorema 7.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos split sin vértices aislados tales que  $\wedge_S(G_1, G_2)$  es un grafo  $\{2\}$ -romano. Entonces,  $G_1$  y  $G_2$  son grafos  $\{2\}$ -romanos.

*Demostración.* Sean  $G_1 = (K_1, I_1, E_1)$  y  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  grafos split sin vértices aislados tales que  $G = \wedge_S(G_1, G_2)$  es un grafo  $\{2\}$ -romano. Supongamos que  $G_1$  o  $G_2$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano, digamos  $G_1$ . Dado que  $G_1$  no es  $\{2\}$ -romano y no tiene vértices aislados, por el Lema 2,  $G_1$  no tiene vértices universales; en particular,  $G_1$  no es una clique.

Supongamos primero que  $I_2 = \emptyset$ . Por el Lema 6, existe una función  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $f$  de  $G_1$  con  $f(K_1) \geq 2$ . Nótese que, dado que  $K_1 \cup K_2$  forma una clique en  $G$ , podemos extender  $f$  a una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando  $f(v) = 0$  para todo  $v \in V(G_2)$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(G_1)$ . Por el Lema 7,  $G$  tiene un conjunto dominante mínimo  $D$  tal que  $D \subseteq K_1 \cup K_2$ . Si  $D \cap K_2 \neq \emptyset$ , entonces

reemplazar el conjunto  $D \cap K_2$  con cualquier vértice en  $K_1$  da lugar a un conjunto dominante  $D'$  en  $G$  tal que  $|D'| \leq |D|$  y  $D'$  es un conjunto dominante en  $G_1$ . Esto prueba que  $\gamma(G_1) \leq \gamma(G)$ . Dado que  $G_1$  no es  $\{2\}$ -romano, tenemos que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(G_1) < 2\gamma(G_1) \leq 2\gamma(G)$ . Por lo tanto  $G$  no es un  $\{2\}$ -romano, una contradicción.

Así, podemos suponer que  $I_2 \neq \emptyset$ . Por el Corolario 4 tenemos que  $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ . Sean  $f_1$  y  $f_2$  funciones  $\gamma_{\{R2\}}$ -funciones de  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente. Ahora construimos una función  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  de tal manera que  $f(v) = f_i(v)$ , para todo  $i \in \{1, 2\}$  y  $v \in V(G_i)$ . Nótese que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  ya que si  $f(v) = 0$  para algún  $v \in V(G_i)$ , el hecho que  $N_{G_i}(v) \subsetneq N_G(v)$  implica que  $2 \leq f_i(N_{G_i}(v)) \leq f(N_G(v))$ . Además, como  $G_1$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano,  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) < 2\gamma(G_1)$ . Obtenemos entonces que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq w(f) = w(f_1) + w(f_2) = \gamma_{\{R2\}}(G_1) + \gamma_{\{R2\}}(G_2) < 2\gamma(G_1) + 2\gamma(G_2) = 2\gamma(G)$ . Por lo tanto,  $G$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano, una contradicción.  $\square$

El recíproco del Teorema 7 no es cierto en general. Para ver esto, consideremos el camino de 4 vértices,  $P_4$ . Este es un grafo split, con una única partición split, que puede obtenerse como la split join de dos copias de  $P_2$  (con particiones bipartitas donde ambos conjuntos son no vacíos). Mientras que el grafo  $P_2$  es  $\{2\}$ -romano, el grafo  $P_4$  no lo es (ver Corolario 3).

Por lo tanto, estamos interesados en las condiciones sobre los factores  $G_1$  y  $G_2$  tales que el recíproco del Teorema 7 se cumple, es decir, condiciones sobre dos grafos  $\{2\}$ -romanos para que su split join sea un grafo  $\{2\}$ -romano. Para esto, primero analizamos el caso en que uno de los grafos a los cuales se aplica la operación es un grafo de un solo vértice.

**Lema 9.** *Sea  $G_1 = (K_1, I_1, E_1)$  un grafo trivial y sea  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  un grafo split conexo. Entonces  $\wedge_S(G_1, G_2)$  es  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $I_1 = \emptyset$  y se cumple una de las siguientes condiciones:*

- $G_2$  consiste en un solo vértice que está en  $K_2$ .
- $G_2$  es un grafo  $\{2\}$ -romano.

*Demostración.* Sea  $G = \wedge_S(G_1, G_2)$ , supongamos primero que  $K_1 = \emptyset$ . Entonces  $G$  tiene un vértice aislado y no es un grafo  $\{2\}$ -romano, independientemente de la elección de  $G_2$ . Luego  $I_1 = \emptyset$ .

Sea ahora  $G_2$  un grafo de un solo vértice. Si  $K_2 = \emptyset$ , al igual que antes  $G$  tiene un vértice aislado y por lo tanto no es un grafo  $\{2\}$ -romano. Por otro lado, si  $I_2 = \emptyset$ , entonces  $G$  es una clique de 2 vértices y por lo tanto un grafo  $\{2\}$ -romano.

Ahora sea  $G_2$  un grafo split sin vértices aislados; en particular,  $K_2 \neq \emptyset$ . Dado que  $I_1 = \emptyset$  y  $|K_1| = 1$ , una partición split del grafo  $G$  también está dada por  $(K_2, I_2 \cup K_1)$ . Además,  $G$  no tiene ningún vértice aislado. Por el Lema 6 existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función



$f$  de  $G$  tal que  $f(K_2) \geq 2$ . Dado que  $N_G(K_1) = K_2$ , obtenemos que  $f(K_1) = 0$ . Así, la restricción de  $f$  a  $V(G_2)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_2$ . De manera similar, aplicando el Lema 6 a  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$ , existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $g$  de  $G_2$  con  $g(K_2) \geq 2$  que puede extenderse a una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando  $g(K_1) = 0$ . Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G_2) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ .

Aplicando el Lema 7 con un razonamiento similar sobre los conjuntos dominantes mínimos de  $G_2$  y  $G$ , podemos deducir que  $\gamma(G_2) = \gamma(G)$ . Usando estas dos igualdades, obtenemos que  $G$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $G_2$  es un grafo  $\{2\}$ -romano.  $\square$

**Corolario 5.** Sea  $G_1 = (K_1, \emptyset, E_1)$  y sea  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  un grafo split sin vértices aislados. Entonces  $\wedge_S(G_1, G_2)$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $G_2$  es un grafo  $\{2\}$ -romano.

*Demostración.* Aplicando el Lema 9 pueden añadirse iterativamente los vértices de  $G_1$  a  $G_2$ . En cada paso, el grafo resultante es un grafo split sin vértices aislados, y es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $G_2$  es un grafo  $\{2\}$ -romano.  $\square$

Con estos resultados, estamos en condiciones de enunciar y probar una caracterización para los grafos split join  $\{2\}$ -romanos.

**Teorema 8.** Sean  $G_1 = (K_1, I_1, E_1)$  y  $G_2 = (K_2, I_2, E_2)$  grafos split sin vértices aislados tales que ambos  $G_1$  y  $G_2$  son grafos  $\{2\}$ -romanos. Entonces  $\wedge_S(G_1, G_2)$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si una de las dos condiciones siguientes se cumple: uno de los conjuntos  $I_1, I_2$  es vacío, o  $|I_1| \geq 2$  y  $|I_2| \geq 2$ .

*Demostración.* Sea  $G = \wedge_S(G_1, G_2)$ . Primero supongamos que  $|I_j| = 1$  para algún  $j \in \{1, 2\}$ , digamos  $j = 1$ , y que  $I_2 \neq \emptyset$ . Por el Lema 6,  $G_2$  admite una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $f_2$  tal que  $f_2(K_2) \geq 2$ . Sea  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  definida como

$$f(u) = \begin{cases} f_2(u) & \text{si } u \in V(G_2), \\ 1 & \text{si } u \in I_1, \text{ y} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ . Dado que  $G$  no tiene vértices aislados, por el Lema 7 existe un conjunto dominante mínimo  $D$  de  $G$  contenido en  $K_1 \cup K_2$ . Dado que  $I_2 \neq \emptyset$ , hay un vértice en  $D \cap K_2$ . Por lo tanto, el conjunto  $D \cap V(G_2)$  es un conjunto dominante de  $G_2$  y, dado que cualquier conjunto dominante de  $G$  debe contener un vértice de  $G_1$ , concluimos que  $\gamma(G_2) \leq |D \cap V(G_2)| \leq \gamma(G) - 1$ . Por lo tanto,

$$\gamma_{\{R2\}}(G) \leq f(G) = \gamma_{\{R2\}}(G_2) + 1 = 2\gamma(G_2) + 1 \leq 2(\gamma(G) - 1) + 1 < 2\gamma(G),$$

es decir que  $G$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano.

Ahora supongamos que  $G$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano y sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  como en el Lema 6. Si para cada  $j \in \{1, 2\}$ , la restricción  $f_j$  de  $f$  a  $V(G_j)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_j$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G_j) \leq f_j(G_j)$  para  $j \in \{1, 2\}$ , y, dado que  $f(G) = f(G_1) + f(G_2)$  observamos que

$$\begin{aligned} 2\gamma(G) &> \gamma_{\{R2\}}(G) = f(G) = f_1(G_1) + f_2(G_2) \geq \gamma_{\{R2\}}(G_1) + \gamma_{\{R2\}}(G_2) \\ &= 2\gamma(G_1) + 2\gamma(G_2) \geq 2\gamma(G), \end{aligned}$$

una contradicción.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f_1$  no es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_1$ . Por el Corolario 5,  $I_1$  e  $I_2$  son no vacíos. Dado que  $f_1$  no es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_1$ , existe un vértice  $x \in V(G_1)$  tal que  $f_1(x) = 0$  y  $f_1(N_{G_1}(x)) < 2$ . De hecho, debe ser  $x \in K_1$ , ya que de lo contrario  $x \in I_1$  y por lo tanto  $f(x) = f_1(x) = 0$  y  $f(N_G(x)) = f_1(N_{G_1}(x)) < 2$ , lo que contradice el hecho de que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ . Resulta en particular que  $f_1(K_1) \leq 1$  ya que  $K_1 \subseteq N_{G_1}[x]$ . Además  $f_1(v) \geq 1$  para cada  $v \in I_1$ , ya que si  $f_1(v) = 0$  entonces  $f(v) = 0$  y  $f(N_G(v)) = f_1(N_{G_1}(v)) \leq f_1(K_1) \leq 1$ , lo que contradice que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ . Dado que  $f$  es como en el Lema 6,  $f_1(N_{G_1}(u) \cap I_1) \leq 1$  para todo  $u \in K_1$ , y dado que  $f_1(v) \geq 1$  para todo  $v \in I_1$  concluimos que  $|N_{G_1}(u) \cap I_1| \leq 1$  para todo  $u \in K_1$ . Luego se deduce del Corolario 3 aplicado a  $G_1$  que  $|I_1| \leq 1$ . Por lo tanto  $|I_1| = 1$ .  $\square$

### 3.3. Algunos grafos $\{2\}$ -romanos primos

Como consecuencia del Teorema 8, es interesante considerar familias de grafos que no pueden obtenerse como un split join de otros dos grafos. Diremos que estos grafos son *primos con respecto a la operación split join*.

Para determinar si un grafo split se puede descomponer en la split join de otros dos grafos split más chicos, alcanza con eliminar todas las aristas con ambos extremos en la clique, y chequear si este nuevo grafo tiene al menos dos componentes conexas. Esto nos lleva a la siguiente observación:

**Observación 6.** *Reconocer si un grafo split  $G = (K, I, E)$  puede obtenerse como un split join de otros dos grafos split puede hacerse en tiempo lineal.*

A continuación, estudiamos algunos grafos split  $\{2\}$ -romanos que son primos respecto de esta operación, es decir, que no se pueden descomponer como la split join de otros dos grafos split. En particular, analizamos los grafos soles y sus complementos.

Para un entero  $t \geq 3$ , el  $t$ -sol que notamos  $S_t$  es un grafo split de  $2t$  vértices con partición split  $(K, I)$  donde  $K = \{u_1, \dots, u_t\}$  es una clique e  $I = \{w_1, \dots, w_t\}$  es un conjunto independiente tal que  $u_i$  es adyacente a  $w_j$  si y sólo si  $i = j$  o  $i = j + 1 \pmod{t}$ .

**Ejemplo 14.**  $3$ -sol y  $4$ -sol

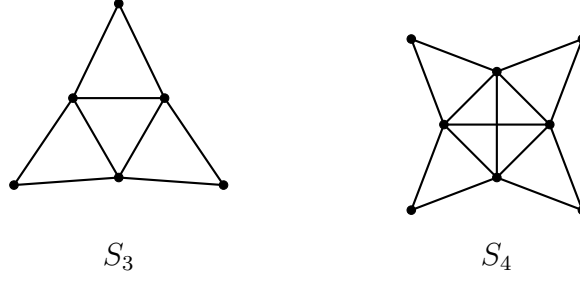


Figura 3.2:  $S_3$  y  $S_4$

Notar que los grafos  $t$ -sol tienen una única partición split. En esta sección analizamos los grafos  $\{k\}$ -romanos dentro de estas clases.

A partir de la caracterización obtenida en el Capítulo 2, un primer abordaje es el de considerar grafos  $S_t$  que sean fuertemente compatibles con algún hipergrafo.

**Observación 7.** *El ciclo  $C_t$  es un hipergrafo 2-uniforme tal que  $S_t$  es fuertemente compatible con  $C_t$ .*

Haciendo uso de esta observación, primero demostramos que para enteros  $k \geq 2$  y  $t \geq 3$ ,  $S_t$  es  $\{k\}$ -romano si y sólo si  $k = 2$  y  $t$  es par.

**Teorema 9.** *Para cada entero  $t \geq 3$ , se cumple lo siguiente.*

1. *El grafo  $S_t$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $t$  es par.*
2. *El grafo  $S_t$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 3$ .*

*Demostración.* Dado que el ciclo  $C_t$  tiene un matching perfecto si y sólo si  $t$  es par, el primer ítem se deduce directamente de la Observación 7 y el Teorema 5.

Sea ahora  $k \geq 3$ . Por el Lema 1, cada grafo  $\{k\}$ -romano es un grafo  $\{k-1\}$ -romano, pero ningún  $S_t$  con  $t$  impar es un grafo  $\{k\}$ -romano, ya que no es  $\{2\}$ -romano, por el primer ítem. Supongamos ahora que  $t \geq 4$  es par, sea  $(K, I)$  la partición split de  $S_t$ , sea  $u$  cualquier vértice en  $K$  y consideremos la función  $f : V(S_t) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $f(v) = 1$  si  $v \in I \cup \{u\}$  y  $f(v) = 0$  en otro caso. Dado que cada vértice en  $K$  tiene dos vecinos en  $I$  y o bien es  $u$  o es adyacente a  $u$ ,  $f$  es una función de dominación  $\{3\}$ -romana con peso  $f(S_t) = t + 1$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R3\}}(S_t) \leq t + 1$ . Por otro lado, de la Observación 7 y el Lema 4, obtenemos  $\gamma(S_t) = \rho(C_t) = \lceil \frac{t}{2} \rceil$ . Se deduce que  $\gamma_{\{R3\}}(S_t) \neq 3\gamma(S_t)$ , ya que  $t + 1 < 3\frac{t}{2} = 3\gamma(S_t)$ . Por lo tanto, dado que para  $t$  par ningún  $S_t$  es un grafo  $\{3\}$ -romano, ningún  $S_t$  es un grafo  $\{k\}$ -romano para  $k \geq 3$  por el Lema 1.  $\square$

Más aún, para  $S_t$  podemos calcular sus números de dominación y de dominación  $\{2\}$ -romana.

**Lema 10.** Sea  $S_t$  un  $t$ -sol. Entonces  $\gamma(S_t) = \lceil \frac{t}{2} \rceil$  y  $\gamma_{\{R2\}}(S_t) = t$ .

*Demostración.* Como un ciclo  $C_t$  es un hipergrafo 2-uniforme y el grafo  $t$ -sun  $S_t$  es fuertemente compatible con  $C_t$ , del Lema 4 surge que  $\gamma(S_t) = \rho(C_t) = \lceil \frac{t}{2} \rceil$ . Por otro lado, del Lema 3  $\gamma_{\{R2\}}(S_t) = |V(C_t)| = t$ .  $\square$

Ahora dirijamos nuestra atención a los complementos de los  $S_t$ . De la misma forma que para  $S_t$ , vale la pena considerar si la caracterización obtenida en el Capítulo 2 puede aportar a esta clase. Sin embargo los grafos  $\overline{S_t}$  son fuertemente compatibles con hipergrafos  $t - 2$  uniforme. Esto sólo nos permite decir que  $\overline{S_t}$  no es  $\{t - 2\}$ -romano (y luego no es  $\{k\}$ -romano para cualquier  $k \geq t - 2$ ) pero igualmente debemos considerar si el grafo es  $\{2\}$ -romano.

**Ejemplo 15.** Grafos  $\overline{S_3}$  y  $\overline{S_4}$ .

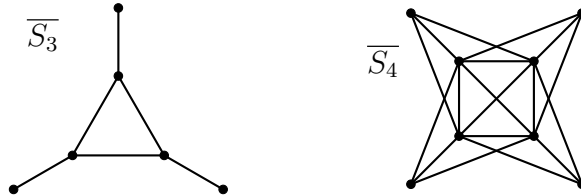


Figura 3.3:  $\overline{S_3}$  y  $\overline{S_4}$

De la misma forma que para  $S_t$ , se tiene la siguiente observación.

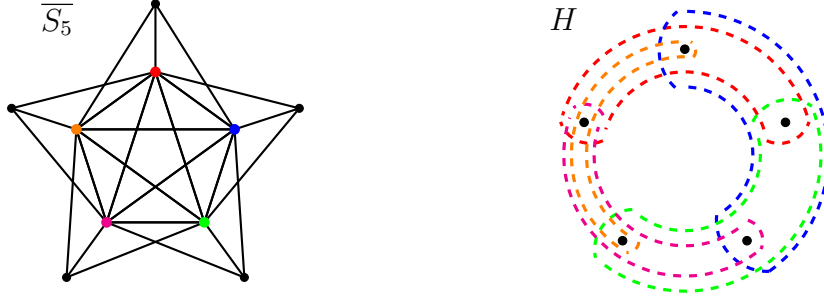
**Observación 8.** Sea  $t \geq 3$ . El grafo  $\overline{S_t}$  es un grafo fuertemente compatible con un hipergrafo  $(t - 2)$ -uniforme con conjunto de vértices  $K$ . Más aún, este hipergrafo es una generalización un ciclo, en el cual las aristas pueden ordenarse de manera que  $f_i = \{v_i, \dots, v_{i+t-2}\}$  para  $i = 1, \dots, t$  considerando en los subíndices de los vértices congruencia módulo  $t$ . Es decir que dos aristas consecutivas tienen  $t - 3$  vértices en común.

El hipergrafo  $(t - 2)$ -uniforme de la Observación 8 tiene  $t$  vértices y, por lo tanto, solo puede tener un matching perfecto si  $t$  es un múltiplo de  $t - 2$ . Dado que este no es el caso para ningún  $t \geq 5$ , la Observación 8 y el Teorema 5 implican que para todo  $t \geq 5$ , el grafo  $\overline{S_t}$  no es  $\{t - 2\}$ -romano (y, por lo tanto, tampoco  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq t - 2$ , por el Lema 1). Veamos esto en un ejemplo.

**Ejemplo 16.**  $\overline{S_5}$  fuertemente compatible con  $H$ .

$H$  es un hipergrafo 3-uniforme con vértices. Claramente este hipergrafo no tiene matching perfecto. Esto nos dice que  $\overline{S_5}$  no es un grafo  $\{3\}$ -romano.

En el siguiente teorema, reforzamos esta observación mostrando que, para enteros  $k \geq 2$  y  $t \geq 3$ , el grafo  $\overline{S_t}$  es  $\{k\}$ -romano si y sólo si  $k = 2$  y  $t \in \{4, 5\}$ . La demostración del teorema se basará en el siguiente lema.


 Figura 3.4:  $\overline{S}_5$  fuertemente compatible con  $H$ .

**Lema 11.** Si  $t \geq 5$ , entonces  $\gamma(\overline{S}_t) = 2$ .

*Demostración.* Sea  $(K, I)$  la partición split de  $S_t$ . Dado que  $S_t$  no tiene vértices aislados,  $\overline{S}_t$  no tiene vértices universales y por lo tanto  $\gamma(\overline{S}_t) > 1$ . Sean  $v_1, v_2$  dos vértices en  $I$  que no tienen vecinos en común en  $S_t$  y consideremos el conjunto de vértices  $D = \{v_1, v_2\}$  de  $\overline{S}_t$ . Nótese que, en  $\overline{S}_t$ , el vértice  $v_1$  es adyacente a todos los vértices excepto a sus dos vecinos en  $S_t$ . Además, dado que  $v_2$  no tiene vecinos en común con  $v_1$  en  $S_t$ , el vértice  $v_2$  es adyacente en  $\overline{S}_t$  a los no vecinos de  $v_1$ . Por lo tanto,  $D$  es un conjunto dominante en  $\overline{S}_t$ , lo que implica que  $\gamma(\overline{S}_t) = 2$ .  $\square$

**Teorema 10.** Para cada entero  $t \geq 3$ , se cumple lo siguiente.

1. El grafo  $\overline{S}_t$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $t \in \{4, 5\}$ .
2. El grafo  $\overline{S}_t$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 3$ .

*Demostración.* Para  $t = 3$ , es fácil verificar que  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S}_3) \leq 4 < 6 = 2\gamma(\overline{S}_3)$ . Por lo tanto, por el Lema 1,  $\overline{S}_3$  no es  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 2$ .

Para  $t = 4$ ,  $\overline{S}_4$  es isomorfo a  $S_4$ , y es claro del Teorema 9 que  $\overline{S}_4$  es un grafo  $\{2\}$ -romano y no un grafo  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 3$ .

Supongamos que  $t = 5$ . Para demostrar la primera parte de la afirmación, observemos que por el Lema 11  $\gamma(\overline{S}_5) = 2$ , por lo tanto mostrar que  $\overline{S}_5$  es un grafo  $\{2\}$ -romano es equivalente a mostrar que  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S}_5) \geq 4$ . Para ello, sea  $(K, I)$  la partición split de  $\overline{S}_5$ . Por el Lema 6 sabemos que existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $f$  de  $\overline{S}_5$  que asigna un peso de al menos 2 a  $K$ .

Supongamos primero que existe  $v \in K$  con  $f(v) = 2$ . Entonces, existen exactamente dos vértices  $x, y \in I$  que no son adyacentes a  $v$  en  $\overline{S}_5$ . Dado que por la definición de una función  $\{2\}$ -romana dominante, necesitamos un peso de al menos 2 en  $N[\{x, y\}]$ , concluimos que en este caso  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S}_5) = f(\overline{S}_5) \geq 4$ .

Supongamos ahora que existen  $v_1, v_2 \in K$  con  $f(v_1) = f(v_2) = 1$ , y notemos que  $v_1$  y  $v_2$  pueden tener uno o dos vecinos comunes en  $I$ . Consideremos primero el caso en que tienen 2 vecinos comunes en  $I$ . Entonces existe  $x \in I$  que no es adyacente ni

a  $v_1$  ni a  $v_2$ . Además sea  $y_1$  adyacente a  $v_1$  pero no a  $v_2$ , e  $y_2$  adyacente a  $v_2$  pero no a  $v_1$ , como se ve en la Figura 3.5.

Ahora, o bien  $f(N[x]) \geq 2$ , en cuyo caso  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S_5}) = f(\overline{S_5}) \geq 4$ , o bien  $f(x) = 1$ . En ese caso, dado que  $v_1 \in N[y_1]$  y  $f(v_1) = 1$ ,  $f(N[y_1]) \geq 2$  (ya sea  $f(y_1) \geq 1$ , o que otro vecino de  $y_1$  tiene un peso de al menos 1) donde  $y_1$  es uno de los vecinos no comunes de  $v_1$ . Así que en este caso  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S_5}) = f(\overline{S_5}) \geq 4$  también.

Por último, consideremos el caso en que tienen un vecino común en  $I$ , y denotemos por  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , los vértices restantes en  $I$ . Ahora cada  $x_i$  o bien tiene un peso de al menos 1, o hay un vértice distinto de  $v_1$  y  $v_2$  en su vecindad que tiene un peso de al menos 1. Dado que los  $x_i$  no tienen un vecino común, necesitamos un peso de al menos 2 en  $(\bigcup_{i=1}^4 N[x_i]) \setminus \{v_1, v_2\}$ , lo que de nuevo resulta en  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S_5}) = f(\overline{S_5}) \geq 4$ .

Para la segunda parte de la afirmación, por la Observación 8  $\overline{S_5}$  es fuertemente compatible con un hipergrafo 3-uniforme. Entonces, del Teorema 5,  $\overline{S_5}$  no es un grafo  $\{3\}$ -romano ya que este hipergrafo no tiene un matching perfecto como se menciona en el Ejemplo 16. Nuevamente por el Lema 1,  $\overline{S_5}$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 3$ .

Finalmente, consideremos el caso  $t \geq 6$ . Ahora, sea  $(K, I)$  la partición split de  $S_t$ . Dado que  $t \geq 6$ , siempre podemos elegir vértices  $x, y, z \in I$  tales que ningún par de ellos tiene un vecino común en  $S_t$ . Sea  $f : V(\overline{S_t}) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $f(x) = f(y) = f(z) = 1$  y  $f(v) = 0$  en otro caso. Notar que, si  $v \in K$  entonces  $v$  es adyacente en  $\overline{S_t}$  a al menos dos vértices entre  $x, y$ , y  $z$ , por lo tanto  $f(N(v)) \geq 2$ . Luego si  $v \in I \setminus \{x, y, z\}$  entonces, dado que  $I$  es una clique en  $\overline{S_t}$ , el vértice  $v$  será adyacente en  $\overline{S_t}$  a los vértices  $x, y, z$ , es decir,  $f(N(v)) = 3$ . Por lo tanto,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $\overline{S_t}$ , lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S_t}) \leq 3$ . Del Lema 11 se deduce que  $\overline{S_t}$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano, ya que  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{S_t}) \leq 3 < 4 = 2\gamma(\overline{S_t})$ . Resulta por el Lema 1 que  $\overline{S_t}$  no es un grafo  $\{k\}$ -romano para ningún  $k \geq 2$ .  $\square$

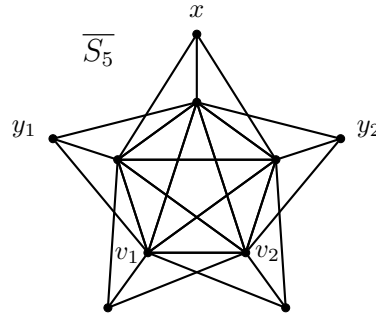


Figura 3.5:  $\overline{S_5}$ .

Los resultados en este capítulo fueron publicados en [6].

# Capítulo 4

## Avances en dominación $\{2\}$ -romana

Por ser dentro de las variantes “romanas” de la dominación la primera en definirse en [10], la dominación  $\{2\}$ -romana es la variante más estudiada hasta el día de hoy. Desde su definición en [10], donde también se prueba que el problema de decisión asociado D2R pertenece a la clase NP-c para grafos en general, la complejidad computacional del problema se ha estudiado para múltiples clases de grafos [11, 36, 37]. En este capítulo presentamos nuestro aporte sobre la complejidad computacional de este problema en algunas otras clases de grafos.

Comenzamos este capítulo presentando los resultados de NP-completitud, con una nueva reducción de D2R a DOM, significativamente más sencilla que la reducción a 3-SAT que se presenta en [10].

Como se mencionó anteriormente, D2R es también conocido como el problema de dominación italiana. En [10] prueban que el número de dominación  $\{2\}$ -romana coincide con el número de dominación 2-rainbow en grafos árboles. Como el problema de dominación 2-rainbow es lineal en árboles [9], resulta que D2R es lineal en árboles. De la misma forma, D2R es resoluble en tiempo lineal para las clases de grafos con cliquewidth acotado por una constante [2]. Además, es interesante diseñar algoritmos que permitan calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana independientemente de otros parámetros de dominación, y que permitan también obtener una función  $\{2\}$ -romana dominante óptima asociada.

Por otro lado, tanto DOM como D2R son polinomiales en cografos [26, 33]. Los cografos no tienen  $P_4$ 's inducidos y se pueden descomponer modularmente a través de uniones y joins de otros cografos. Muchas superclases de estos son estudiadas en la literatura, y de ellos se conoce su descomposición modular. En este capítulo pretendemos extender los resultados de D2R para cografos que se encuentran en [33] a varias de estas superclases.

En la Sección 2 presentamos algoritmos eficientes que derivan polinomialidad de D2R en ciertas clases de grafos. En la primera subsección analizamos el número de

dominación  $\{2\}$ -romana en distintas operaciones. Estas operaciones están relacionadas con una descomposición para los grafos orugas (una subclase de los grafos árboles) y con la descomposición modular.

En la subsección siguiente, primero nos restringimos específicamente a la clase de grafos orugas. A partir de los números de dominación  $\{2\}$ -romana para caminos, y de una adecuada descomposición, presentamos un algoritmo eficiente para calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en orugas.

Luego nos concentramos en los módulos indescomponibles que se obtienen al realizar la descomposición modular de ciertos grafos con pocos  $P_4$ 's inducidos. Esto deriva en el cálculo del número de dominación  $\{2\}$ -romana en cografos y otras superclases con pocos  $P_4$  como subgrafos inducidos, lo cual nos permitirá mostrar que el problema se mantiene polinomial incluso hasta grafos partner limited.

## 4.1. Resultados de NP-completitud

Si bien D2R es NP-completo en grafos generales, en [10] la reducción se hace desde el problema 3-SAT. En la misma, a partir de una instancia de 3-SAT con  $3q$  literales y  $\ell$  cláusulas, se construye convenientemente un grafo bipartito a partir de  $\ell$  ciclos de 6 vértices ( $C_6$ ) con dos vértices extra y ciertas aristas relevantes. En esta sección, proponemos una reducción alternativa y más sencilla a DOM.

Dado que la transformación utilizada en la reducción consiste en añadir vértices pendientes, presentamos un resultado simple que será útil en las demostraciones.

**Proposición 7.** *Sea  $G$  un grafo, entonces existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ , asigna peso al menos 1 a todo vértice pendiente de  $G$ .*

*Demostración.* Sean  $v_i$  con  $i = 1, \dots, k$  los vértices pendientes en  $G$ , y sea  $g$  una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  que no verifica  $g(v_i) \leq 1$  para todo  $i$ . Es decir, supongamos que existe  $v_i$  con  $g(v_i) = 2$  y  $u_i$  el único vecino de  $v_i$  para algún  $i = 1, \dots, k$ . Luego la función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  que asigna  $f(u_i) = 2$  y  $f(v_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, k$ , y  $g(x) = f(x)$  para cualquier otro vértice es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso menor o igual que  $w(g) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ . Por lo tanto,  $w(f) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ .  $\square$

**Teorema 11.** *D2R es NP-completo para grafos en general.*

*Demostración.* Dado un grafo  $G$  con  $n$  vértices,  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , consideremos el grafo  $G'$  con conjunto de vértices  $V(G') = V(G) \cup \{w_1, \dots, w_n\}$  y conjunto de aristas  $E(G') = E(G) \cup \{v_i w_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Es decir, añadimos  $n$  vértices pendientes a  $G$ . Luego  $G$  tiene un conjunto dominante de cardinal a lo sumo  $s$  si y sólo si  $G'$  tiene una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso a lo sumo  $s + n$ .



Supongamos que  $G$  tiene un conjunto dominante  $D$  de cardinal a lo sumo  $s$ . Consideremos la función  $f$  que a cada vértice en  $V(G')$  asigna un valor en  $\{0, 1, 2\}$ , definida por  $f(u) = 1$  si  $u \in D$ ,  $f(u) = 0$  si  $u \in V(G) \setminus D$ , y  $f(w_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Tomemos  $u \in V(G')$  con  $f(u) = 0$ . De la definición de  $f$ ,  $u \in V(G) \setminus D$  entonces  $u = v_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$  y además,  $u$  tiene un vecino  $v \in D$  (ya que  $D$  es un conjunto dominante en  $G$ ). Como  $f(v) = 1$  y  $f(w_i) = 1$ , tenemos  $f(N_{G'}(u)) \geq 2$ . Por lo tanto,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G'$  con peso  $|D| + n \leq s + n$ .

Por otro lado, supongamos que  $G'$  tiene una función  $\{2\}$ -romana dominante  $f$  de peso a lo sumo  $s + n$ . De la Proposición 7, consideramos  $f$  tal que  $f(w_i) \leq 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Ahora, consideremos el conjunto  $D = \{v \in V(G) : f(v) \neq 0\}$ .

Para cualquier vértice  $v_i \in V(G) \setminus D$ , tenemos  $f(v_i) = 0$  y  $f(N_{G'}(v_i)) \geq 2$ . Dado que  $f(w_i) = 1$ , tenemos  $f(u) \neq 0$  para algún  $u \in N_G(v)$  lo que implica  $u \in D$ . Por lo tanto,  $D$  es un conjunto dominante de  $G$ . Resulta a partir de nuestra suposición que el cardinal de  $D$  es a lo sumo el peso de  $f$  menos  $n$ , es decir  $s + n - n = s$ .  $\square$

#### Ejemplo 17. Reducción de D2R a DOM.

Para el grafo  $G$ , el grafo  $G'$  que se construye en la demostración del Teorema 11 se obtiene de añadir  $n$  vértices pendientes.

También se muestra la asignación de pesos de una función  $\{2\}$ -romana dominante para  $G'$ , que verifica la condición de la Proposición 7. Notemos que, a partir de esta función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G'$  se obtiene un conjunto dominante (en celeste) del grafo  $G$ , que corresponde a los vértices de  $G$  a los cuales la función asigna peso 1.

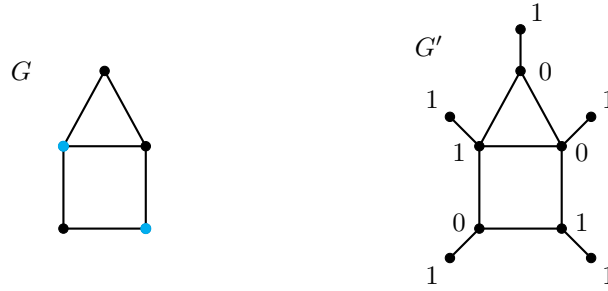


Figura 4.1:  $G$  y  $G'$  en la demostración del Teorema 11.

**Corolario 6.** D2R es NP-completo en cada clase de grafos que sea cerrada bajo la adición de vértices pendientes y para la cual DOM sea NP-completo. En particular, en grafos cordales<sup>1</sup> [7], grafos bipartitos planares<sup>2</sup> [12], grafos bipartitos cordales<sup>3</sup> [35].

<sup>1</sup>Un grafo es *cordal* si todo ciclo de al menos 4 vértices tiene una cuerda.

<sup>2</sup>Un grafo es *planar* si existe una representación en la que no se intersequen aristas.

<sup>3</sup>Un grafo es *bipartito cordal* si todo ciclo de al menos 6 vértices tiene una cuerda.

## 4.2. Algoritmos eficientes

### 4.2.1. Dominación $\{2\}$ -romana y operaciones en grafos

En esta subsección presentamos los resultados que permiten calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en grafos que se obtienen mediante la aplicación de una determinada operación, resultados que a continuación nos permitirán abordar el estudio sobre varias instancias aún no estudiadas en la literatura.

Comenzamos con un lema general, que vale para cualquier grafo.

**Lema 12.** *Sea  $G$  un grafo,  $v \in V$  y  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  con  $v \in V_0$ . Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \sum_k \gamma_{\{R2\}}(G_k)$ , donde cada  $G_k$  es una componente conexas de  $G \setminus \{v\}$ .*

*Demostración.* Notemos que, para  $u \in N_G(v) \cap V_0$ ,  $f(N_G(u)) = f(N_G(u) \setminus \{v\}) = f(N_{G \setminus \{v\}}(u)) \geq 2$ . Es decir que  $(V_0 \setminus \{v\}, V_1, V_2)$ , es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G \setminus \{v\}$  de mismo peso que  $f$ . Entonces resulta  $\gamma_{\{R2\}}(G \setminus \{v\}) \leq \gamma_{\{R2\}}(G)$ , y dado que  $\gamma_{\{R2\}}(G \setminus \{v\}) = \sum_k \gamma_{\{R2\}}(G_k)$ , la desigualdad queda demostrada.  $\square$

Para el estudio del número de dominación  $\{2\}$ -romana en orugas, nos interesará descomponer las mismas en orugas más pequeñas. Una de las operaciones que emplearemos para esto es la operación suma 1-clique.

La *suma 1-clique* de los grafos  $G$  y  $H$ , que notamos  $G \oplus H$ , se obtiene a partir de la unión entre  $G$  y  $H$ , identificando un vértice de  $G$  con un vértice de  $H$ .

**Ejemplo 18.** *Suma 1-clique*

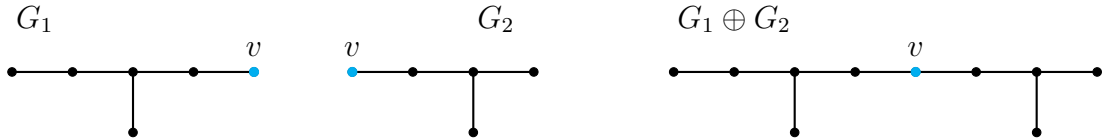


Figura 4.2: Suma 1-clique.

**Proposición 8.** *Sean  $G$  y  $H$  grafos,*

$$\gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 2 \leq \gamma_{\{R2\}}(G \oplus H) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma_{\{R2\}}(H).$$

*Demostración.* Por simplicidad llamemos  $v$  al vértice en  $V(G)$  y al vértice en  $V(H)$  que se identifican en  $G \oplus H$ .

Para la cota superior, sean  $g$  y  $h$   $\gamma_{\{R2\}}$ -funciones de  $G$  y  $H$  respectivamente. Sea  $f : V(G \oplus H) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que

$$f(u) = \begin{cases} g(u) & \text{si } u \in V(G) \setminus \{v\} \\ h(u) & \text{si } u \in V(H) \setminus \{v\} \\ \max\{g(v), h(v)\} & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Luego  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G \oplus H$  de peso

$$w(f) = \gamma_{\{R2\}}(G) - g(v) + \gamma_{\{R2\}}(H) - h(v) + \max\{g(v), h(v)\} \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma_{\{R2\}}(H)$$

Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G \oplus H) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma_{\{R2\}}(H)$ .

Para la cota inferior, sea ahora  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G \oplus H$ , y consideremos los posibles valores de  $f(v)$ .

Si  $f(v) \neq 0$ , las restricciones de  $f$  a  $V(G)$  y  $V(H)$  son respectivamente funciones  $\{2\}$ -romana dominantes de  $G$  y  $H$ , es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq w(f|_G)$  y  $\gamma_{\{R2\}}(H) \leq w(f|_H)$  luego

$$\gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma_{\{R2\}}(H) \leq w(f|_G) + w(f|_H) = w(f) + f(v) \leq \gamma_{\{R2\}}(G \oplus H) + 2.$$

Si  $f(v) = 0$ , consideramos la función  $g$  sobre  $V(G)$  que asigna peso 1 a  $v$  y  $f(u)$  al resto de los vértices. Esta función es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $w(g) = w(f|_G) + 1$ . Análogamente consideramos la función  $h$  sobre  $V(H)$ , entonces

$$\gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma_{\{R2\}}(H) \leq w(f|_G) + w(f|_H) + 2 = w(f) + 2 \leq \gamma_{\{R2\}}(G \oplus H) + 2.$$

□

Notemos que, en el caso en que  $G$  y  $H$  son caminos, si se identifican extremos del camino, la suma 1-clique resulta un camino. Más específicamente, la suma 1-clique de dos caminos  $P_n$  y  $P_m$  en los cuales se identifican hojas, es un camino de  $n + m - 1$  vértices. A partir de la fórmula que se conoce para el número de dominación  $\{2\}$ -romana de caminos, surgen las siguientes observaciones que serán de utilidad para calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en orugas.

**Observación 9.** 1. Si los vértices que se identifican son hojas, el número de dominación  $\{2\}$ -romana de la suma 1-clique de caminos  $P_n$  y  $P_m$  con  $n, m \geq 1$  es igual a  $\lceil \frac{n+m}{2} \rceil$ .

2. Para un camino  $P_n$  con  $n \geq 1$ , sabemos que  $\gamma_{\{R2\}}(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil [10]$ . Luego es claro que

$$\gamma_{\{R2\}}(P_{n+1}) = \begin{cases} \gamma_{\{R2\}}(P_n) + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \gamma_{\{R2\}}(P_n) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Además, para caminos, las funciones  $\{2\}$ -romana dominantes verifican las siguientes propiedades.

**Proposición 9.** Sea  $P_n$  un camino,

- i. Si  $n$  es par, existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $P_n$   $f = (V_0, V_1, V_2)$  tal que o  $u_{n-1} \in V_1$  (y así  $u_n \in V_1$ ) o  $u_{n-1} \in V_2$  (y así  $u_n \in V_0$ ).
- ii. Si  $n \geq 5$  es impar, una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $P_n$  es única y satisface  $V_2 = \emptyset$  y  $\{u_1, u_n\} \subset V_1$ .

*Demostración.* Denotemos  $P_n = u_1, u_2, \dots, u_n$ .

- i. En ambos casos, las funciones se obtienen considerando  $u_i \in V_0$  para cada  $i$  impar salvo  $i = n - 1$  y  $u_j \in V_1$  para cada  $j$  par salvo  $j = n$ . En el primer caso,  $u_{n-1}, u_n \in V_1$ , y en el segundo caso  $u_{n-1} \in V_2$  y  $u_n \in V_0$ .
- ii. La función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  en este caso se obtiene considerando  $u_i \in V_0$  para cada  $i$  y  $u_j \in V_1$  para cada  $j$  par.

Es claro que no existe otra  $\gamma_{\{R2\}}$ -función con  $V_2 = \emptyset$ . Para demostrar que  $f$  es la única  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ , supongamos que existe  $g = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $P_n$  tal que  $u_i \in V_2$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Luego, los vecinos de  $u_i$  están en  $V_0$  y la restricción de  $g$  al subgrafo  $G = P_n - N[v_i]$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ . Consideremos los posibles valores de  $i$ :

Si  $i = 1$  o  $i = n$ ,  $G$  es un camino de  $n - 2$  vértices, luego la restricción de  $g$  a  $G$  tiene peso al menos  $\frac{n-1}{2}$  y  $w(g) = \frac{n+3}{2}$ , lo que contradice que  $g$  sea de peso mínimo.

Si  $i = 2$  o  $i = n - 1$ ,  $G$  es un camino de  $n - 3$  vértices. y la restricción de  $g$  a  $G$  tiene peso al menos  $\frac{n-2}{2}$ . Al igual que en el caso anterior, esto contradice la minimalidad de  $g$ .

Si  $i \in \{3, \dots, n-3\}$ ,  $G$  es la unión disjunta de dos caminos de  $m_1$  y  $m_2$  vértices tales que  $m_1 + m_2 = n - 3$ . Entonces, la restricción de  $g$  a  $G$  tiene peso al menos  $\lceil \frac{m_1+1}{2} \rceil + \lceil \frac{m_2+1}{2} \rceil \leq \frac{m_1+m_2+2}{2} = \frac{n-1}{2}$ . Al igual que en los casos anteriores, esto contradice que  $g$  sea de peso mínimo. Por lo tanto,  $V_2 = \emptyset$  y la función  $f$  es única. □

En lo que sigue nos enfocaremos en las operaciones de grafos relacionadas con la descomposición modular, la unión de grafos y el join de grafos.

**Observación 10.** De la definición de unión y la Proposición 5 sigue que  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \cup G_2) = \gamma_{\{R2\}}(G_1) + \gamma_{\{R2\}}(G_2)$  para  $G_1$  y  $G_2$  cualesquiera.

Para el join de grafos, es claro que  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) \leq \min\{\gamma_{\{R2\}}(G_1), \gamma_{\{R2\}}(G_2)\}$  para  $G_1$  y  $G_2$  no triviales. En lo que sigue mostraremos cómo calcular exactamente el valor de  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2)$ .

**Teorema 12.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos con  $|V(G_i)| \geq 2$  para  $i = 1, 2$  y  $m = \min\{\gamma_{\{R2\}}(G_1), \gamma_{\{R2\}}(G_2)\}$ . Entonces

1.  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 2$  si y sólo si  $m = 2$ ;
2.  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 3$  si y sólo si  $m = 3$  o,  $m = 4$  y  $\gamma(G_i) = 2$  para algún  $i = 1, 2$ ;
3.  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 4$  si y sólo si  $m \geq 4$  y  $\gamma(G_i) > 2$  para ambos  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* 1. Sea  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 2$  y  $g = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G_1 \wedge G_2$ . Como  $|V(G_i)| \geq 2$  para  $i = 1, 2$ , resulta  $m \geq 2$ . Si  $V_2 = \{v\}$  para algún  $v \in V(G_1) \cup V(G_2)$ , cualquier otro vértice en  $V(G_1) \cup V(G_2)$  es adyacente a  $v$ , entonces  $v$  es un vértice universal en  $G_1 \wedge G_2$ . Además,  $v$  es un vértice universal en  $G_i$  para algún  $i$ , y por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G_i) = 2$  para dicho  $i$ , lo que implica  $m \leq 2$ . Supongamos ahora que  $V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 = \{u, v\}$  y  $u, v \in V(G_i)$  para algún  $i$ , entonces todo vértice en  $V(G_i) \setminus \{u, v\}$  es adyacente a ambos  $u$  y  $v$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G_i) = 2$  por lo que resulta  $m \leq 2$ . Si por el contrario,  $u \in V(G_1)$  y  $v \in V(G_2)$ , todo vértice en  $G_1$  es adyacente a  $u$  y todo vértice en  $G_2$  es adyacente a  $v$ . Así, tanto  $u$  como  $v$  son vértices universales en  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente, por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = \gamma_{\{R2\}}(G_2) = 2$ .

Para la recíproca, es claro que, si  $1 < \gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) \leq \gamma_{\{R2\}}(G_i)$  para cada  $i$ ,  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = 2$  (o  $\gamma_{\{R2\}}(G_2) = 2$ ). Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 2$ .

2. Sea  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 3$  y  $g = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $(G_1 \wedge G_2)$ . Del ítem anterior,  $\gamma_{\{R2\}}(G_i) > 2$  para ambos  $i$ . Consideremos las posibles funciones asignaciones de  $g$ .

- Si  $V_2 \neq \emptyset$ ,  $V_2 = \{v\}$  para algún  $v$  y  $V_1 = \{u\}$  para algún  $u$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\{u, v\} \subseteq V(G_1)$ . Entonces la restricción de  $g$  a  $V(G_1)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_1$ , implicando  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = 3$ , y por lo tanto  $m = 3$ . Si, por el contrario  $v \in V(G_1)$  y  $u \in V(G_2)$ , todo vértice de  $G_1$  distinto de  $v$  es adyacente a  $v$ , lo que implica que  $v$  es universal en  $G_1$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = 2$  lo cual contradice la hipótesis.
- Si  $V_1 = \{u, v, w\}$  y  $u, v, w \in V(G_i)$  para  $i = 1$  o  $i = 2$ , entonces nuevamente la restricción de  $g$  a  $V(G_i)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_i$ , implicando  $\gamma_{\{R2\}}(G_i) = 3$  y por tanto  $m = 3$ .
- Si  $V_1 = \{u, v, w\}$  supongamos sin pérdida de generalidad que  $u, v \in V(G_1)$  y  $w \in V(G_2)$ . Como todo vértice en  $G_1$  es adyacente a  $w$ , todo vértice en  $G_1$  debe ser también adyacente a  $u$  o  $v$ . Entonces  $\{u, v\}$  es un conjunto dominante en  $G_1$ , concluyendo que  $\gamma(G_1) = 2$ . Más aún,  $\gamma(G_1)$  no puede ser igual a 1 ya que en ese caso  $G_1$  tendría un vértice universal lo que implicaría  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = 2$ , una contradicción.

Para probar la recíproca, supongamos primero que  $m = 3$  (sin pérdida de generalidad  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = 3$ ). Entonces una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G_1$  se extiende a una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_1 \wedge G_2$  y resulta  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) \leq 3$ .

Ahora supongamos  $m > 3$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $\gamma(G_1) = 2$ ,  $\{u, v\}$  un conjunto dominante para  $G_1$  y sea  $w \in V(G_2)$ . Notemos que todo vértice en  $V(G_1)$  es adyacente en  $G_1 \wedge G_2$  a  $u$  o  $v$  y también es adyacente a  $w$ . Además,

todo vértice en  $V(G_2)$  es adyacente a ambos  $u$  y  $v$ . Entonces la función que asigna 1 a  $u$ ,  $v$  y  $w$ , y asigna 0 a todos los demás vértices en  $V(G_1 \wedge G_2)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_1 \wedge G_2$  con peso 3, por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) \leq 3$ .

Sin embargo,  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) > 2$ . De lo contrario  $G_1 \wedge G_2$ , y también  $G_i$  para  $i = 1, 2$ , tendría un vértice universal por lo que  $\gamma_{\{R2\}}(G_1) = \gamma_{\{R2\}}(G_2) = 2 < m$ , una contradicción.

3. De los ítem anteriores,  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) \geq 4$ . Sea  $u \in V(G_1)$ ,  $v \in V(G_2)$  y consideremos la función  $f = (\emptyset, \emptyset, \{u, v\})$ . De esta forma,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G_1 \wedge G_2$  ya que todo vértice en  $V(G_1)$  es adyacente a  $v$  y todo vértice en  $V(G_2)$  es adyacente a  $u$ . Como  $f$  tiene peso 4, resulta que  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 4$ .

□

Además del join y la unión, al analizar los módulos indescomponibles de ciertas clases de grafos será importante contar con el siguiente resultado en relación al complemento de un grafo.

**Proposición 10.** *Sea  $G$  un grafo conexo con  $|V| \geq 3$  y  $\delta(G) = 1$ . Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{G}) = 3$ .*

*Demostración.* Sea  $u \in V$  con  $d(u) = 1$  y sea  $v$  el único vecino de  $u$ . Entonces  $f = (V \setminus \{u, v\}, \{v\}, \{u\})$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $\overline{G}$  ya que el único no vecino de  $u$  en  $\overline{G}$  es  $v$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{G}) \leq 3$ .

Para probar la desigualdad opuesta, procedemos por contradicción. Supongamos que  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{G}) = 2$ , luego  $\overline{G}$  tiene un vértice universal o dos vértices que son adyacentes a todos los demás vértices. Si  $\overline{G}$  tiene un vértice universal,  $G$  tiene un vértice aislado, lo que contradice  $\delta(G) = 1$ . Supongamos que  $\overline{G}$  tiene dos vértices, digamos  $x, z$  no adyacentes entre si, pero ambos adyacentes al resto de los vértices. Luego en  $G$ ,  $x$  y  $z$  son adyacentes entre si, pero no adyacentes a ninguno de los otros vértices, es decir que  $G$  es no conexo, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{G}) \geq 3$ .

□

Ahora nuestro enfoque está orientado a calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en los módulos indescomponibles que puedan aparecer en la descomposición modular. En particular para los cografos, cada módulo es un grafo con un único vértice. Es claro que un grafo  $G$  tiene número de dominación  $\{2\}$ -romana igual a 1 si y sólo si  $|V(G)| = 1$ .

Sin embargo, en clases más grandes los módulos pueden ser grafos no triviales, algunos conocidos y otros que se obtienen a partir de otras operaciones como el añadido de vértices pendientes y el añadido de mellizos.

Dos vértices  $u, v$  se dicen *mellizos* si las vecindades cerradas coinciden. Esto es,  $N[u] = N[v]$ . Luego, decimos que  $u$  y  $v$  son *mellizos verdaderos* si  $u$  y  $v$  son vecinos entre sí y *mellizos falsos* si no lo son. Es decir,  $u$  y  $v$  son mellizos verdaderos (falsos) si  $N[u] = N[v]$  ( $N(u) = N(v)$ ).

Dado un grafo  $G$  y un vértice  $v \in V$ , consideremos ahora la operación que añade a  $G$  un nuevo vértice  $\tilde{v}$ , de manera que  $v$  y  $\tilde{v}$  son mellizos en el grafo resultante, que notamos  $G \sim v$ . Si es necesario especificar que mellizo es verdadero (falso) lo notamos  $G \sim_T v$  ( $G \sim_F v$ ).

**Ejemplo 19.** *Mellizo verdadero y mellizo falso.*

Para un mismo grafo  $G$  y un vértice  $v$ , se muestran los grafos  $G \sim_T v$  y  $G \sim_F v$  que se obtienen de añadir el mellizo verdadero o falso de  $v$ , que notamos  $\tilde{v}$  respectivamente.

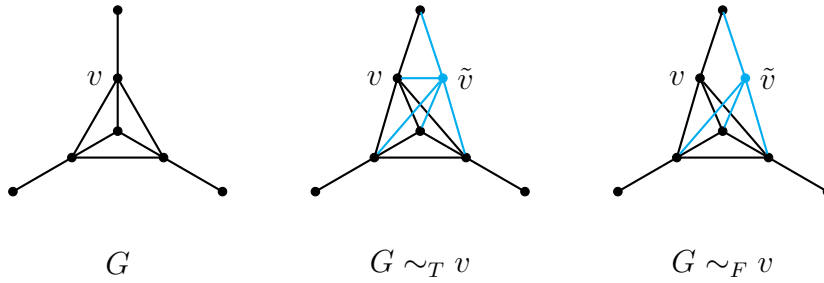


Figura 4.3: Adición de un mellizo verdadero y de un mellizo falso.

En relación al número de dominación  $\{2\}$ -romana cuando se añade un mellizo podemos probar:

**Proposición 11.** *Sea  $G$  un grafo y  $v \in V(G)$ . Si existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  tal que  $v \notin V_1$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G \sim v) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ . En el caso contrario,  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(G \sim v) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $g$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G \sim v$ . Notemos que  $g(v) + g(\tilde{v}) \leq 2$ , de lo contrario  $g$  no es de peso mínimo (la función  $\bar{g}$  tal que  $\bar{g}(v) = \bar{g}(\tilde{v}) = 1$  y  $\bar{g}(u) = g(u)$  para todo otro  $u \in V(G)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G \sim v$  con  $w(\bar{g}) < w(g)$ ). Entonces definimos  $f$  sobre  $V$  tal que  $f(v) = g(v) + g(\tilde{v})$  y  $f(u) = g(u)$  para  $u \in V$  y  $u \neq v$ . Es claro que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(G \sim v)$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G \sim v) \geq \gamma_{\{R2\}}(G)$ .

Ahora, para probar la igualdad, sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ . Si  $f(v) = 0$ , como todo vecino de  $v$  en  $G$  es también vecino de  $\tilde{v}$ , podemos extender  $f$  a una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G \sim v$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(G)$ . Si  $f(v) = 2$ , definimos una función  $g$  tal que  $g(v) = g(\tilde{v}) = 1$  y  $g(u) = f(u)$  para todo otro  $u \in V(G)$ . Como todo vecino  $w$  de  $v$  con  $g(w) = 0$  es también vecino de  $\tilde{v}$ , se cumple que  $g(N(w)) \geq 2$

y  $g$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G \sim v$  con  $w(g) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ . Resulta  $\gamma_{\{R2\}}(G \sim v) \leq \gamma_{\{R2\}}(G)$  y por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G \sim v) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ .

Para probar la desigualdad restante, supongamos que toda  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ , digamos  $f$ , asigna 1 a  $v$ . Entonces podemos definir una función  $g$  sobre  $G \sim v$  asignando  $g(\tilde{v}) = 1$  y  $g(u) = f(u)$  para todo  $u \in V(G)$  y obtener una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G \sim v$  con  $g(G \sim v) = \gamma_{\{R2\}}(G) + 1$ , lo que implica que  $\gamma_{\{R2\}}(G \sim v) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + 1$ .  $\square$

Respecto a la adición de vértices pendientes en un grafo, por un lado la Proposición 7 asegura que existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función que asigna a lo sumo 1 a cada pendiente. Utilizando este resultado, podemos probar la siguiente proposición.

**Proposición 12.** *Sea  $G$  un grafo,  $v \in V(G)$  y  $H^v$  el grafo que se obtiene de  $G$  al añadir un vértice pendiente a  $v$ . Entonces*

$$\gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(H^v) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + 1.$$

*Demostración.* Sea  $w$  el vértice (pendiente) adyacente a  $v$  en  $H^v$ . Claramente, si  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ ,  $(V_0, V_1 \cup \{w\}, V_2)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $H^v$ . Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(H^v) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + 1$ .

Consideremos ahora una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $H^v$ , digamos  $h$ , que asigna a lo sumo peso 1 a  $w$  (que existe por Proposición 7). Si  $h(w) = 0$ , entonces la restricción de  $h$  a  $G$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(H^v)$ .

Si por el contrario,  $h(w) \neq 0$  (es decir que  $h(v) \neq 2$ ), podemos definir una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ , digamos  $f$ , del mismo peso simplemente transfiriendo  $h(w)$  a  $h(v)$ . Observemos que  $h(v) + h(w) \leq 2$  porque el peso de la función  $h$  es mínimo y  $v$  es el único vecino de  $w$ . Entonces  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(H^v)$ , lo que implica que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(H^v)$ .  $\square$

Más aún, si existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función  $f$  de  $G$  tal que  $f(v) = 2$ , es claro que  $\gamma_{\{R2\}}(G) = \gamma_{\{R2\}}(H^v)$ . Sin embargo la recíproca no es cierta, como puede verse al considerar  $P_4$  y  $v$  un vértice de grado 1. En efecto,  $P_4^v = P_5$  y  $\gamma_{\{R2\}}(P_4) = \gamma_{\{R2\}}(P_5)$ .

El siguiente resultado presenta una cota inferior que será de utilidad al considerar familias de grafos con múltiples vértices pendientes.

**Proposición 13.** *Dado  $G = (V, E)$  un grafo sin vértices pendientes,  $S \subseteq V$  y  $H^S$  el grafo que se obtiene de  $G$  al agregar vértices pendientes a cada vértice del conjunto  $S$ . Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(H^S) \geq |S| + 1$ .*

*Demostración.* Llamemos respectivamente  $v_i$  y  $u_i$ , al vértice pendiente en  $H^S$  y a su vecino, para cada  $i = 1, \dots, |S|$ . Sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $H^S$ . Notemos que para cada  $i = 1, \dots, |S|$ ,  $f(N[v_i]) \geq 1$ , y si  $f(N[v_i]) = 1$  entonces  $f(v_i) = 1$ . Luego, como las vecindades de los vértices pendientes son disjuntas dos a dos resulta  $w(f) \geq \sum_{i=1}^{|S|} f(N[v_i]) \geq |S|$ .



Ahora supongamos que  $\gamma_{\{R2\}}(H^S) = |S|$ . Luego  $f(v_i) = 1$  y  $f(u_i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, |S|$ . Es decir que  $f(N(u_i)) < 2$  lo cual contradice que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $H^S$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(H^S) \geq |S| + 1$ .  $\square$

## 4.2.2. Dominación $\{2\}$ -romana en clases particulares de grafos

### 4.2.2.1. Orugas

Una clase de grafos que suele considerarse a la hora de construir algoritmos, es la clase de grafos árboles. Si bien se conoce de [9] que D2R en grafos árboles es resoluble en tiempo polinomial, el algoritmo que lo demuestra requiere del cálculo de otro número de dominación (ninguno de los mencionados anteriormente). En esta sección presentamos un algoritmo alternativo que sólo depende del número de dominación  $\{2\}$ -romana.

Comenzamos considerando una subclase de los grafos árboles, los grafos oruga, para los cuales obtenemos un algoritmo a través del cual es posible calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en tiempo polinomial. Para esto primero analizamos algunas características de las funciones  $\{2\}$ -romanas dominantes en orugas.

Un grafo *oruga* es un árbol en el cual, si se eliminan todas las hojas, resulta un camino. A un camino maximal que es subgrafo inducido lo llamamos *camino central*. Luego cada vértice que no está en el camino central es adyacente a sólo un vértice del camino.

En una oruga  $C$ , un *padre* es un vértice de grado al menos 3. Una hoja adyacente a un padre es un *hijo*. Además, llamamos  $F_1^C$ ,  $F_2^C$  y  $F_{>2}^C$  a los subconjuntos del conjunto de padres con exactamente un hijo, exactamente dos y más de dos hijos en  $C$ , respectivamente.

**Ejemplo 20.**  $C$  oruga.

*El camino central en  $C$  es el camino  $v_1 - v_8$ .*

*Los conjuntos de padres son  $F_1^C = \{v_5\}$ ,  $F_2^C = \{v_3, v_7\}$  y  $F_{>2}^C = \{v_2, v_6\}$ .*

*Los hijos de  $v_2$  son  $v_1$ ,  $v_9$  y  $v_{10}$ , los hijos de  $v_3$  son  $v_{11}$  y  $v_{12}$ , el hijo de  $v_5$  es  $v_{13}$ , los hijos de  $v_6$  son  $v_{14}$ ,  $v_{15}$  y  $v_{16}$  y los hijos de  $v_7$  son  $v_8$  y  $v_{17}$ .*

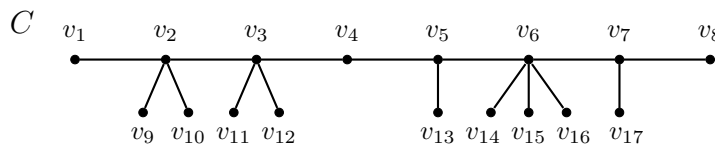


Figura 4.4: Grafo oruga  $C$

**Observación 11.** *Notemos que una oruga es conexa. Sin embargo, es claro que un subgrafo inducido de una oruga puede ser no conexo. Cada una de las componentes conexas es un camino, o una oruga que no es un camino.*

*Por otro lado, cualquier padre tiene dos vecinos en el camino central y al menos un vecino de grado 1 (hijo).*

Recordemos que, para un grafo no conexo  $G$ , es claro que la restricción de una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  a cada una de sus componentes conexas es una función  $\{2\}$ -romana dominante para cada componente conexa. Más aún, el número de dominación  $\{2\}$ -romana de  $G$  es la suma de los números de dominación  $\{2\}$ -romana de sus componentes conexas, como se menciona en la demostración de la Proposición 5.

Considerando los posibles subgrafos inducidos de una oruga, y dado que existe una fórmula cerrada para el número de dominación  $\{2\}$ -romana de caminos, en lo que sigue vamos a considerar orugas que no son caminos y tales que el camino central tiene al menos tres vértices. Luego estas orugas tienen al menos cuatro vértices.

Comenzamos probando una caracterización simple de aquellas orugas con número de dominación  $\{2\}$ -romana igual a dos.

Recordemos que, cuando  $|V(G)| \geq 2$ ,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 2$  si y sólo si  $G$  tiene un vértice universal o dos vértices no adyacentes entre sí pero adyacentes a cualquier otro vértice de  $G$ . Luego, podemos probar el siguiente lema.

**Lema 13.** *Sea  $C$  una oruga. Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(C) = 2$  si y sólo si  $C$  es una estrella  $(K_{1,n})$ .*

*Demostración.* Claramente, si  $C$  es una estrella entonces tiene un vértice universal y por Lema 2,  $\gamma_{\{R2\}}(C) = 2$ .

Ahora sea  $C$  una oruga con  $\gamma_{\{R2\}}(C) = 2$  y sean  $u, v$  dos vértices distintos de  $C$ . Entonces, existen a lo sumo dos funciones  $\{2\}$ -romana dominantes diferentes, digamos  $f = (V \setminus \{u\}, \emptyset, \{u\})$  y  $g = (V \setminus \{u, v\}, \{u, v\}, \emptyset)$ . Veremos que, de hecho,  $g$  no es factible.

Por un lado,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  y  $V \setminus \{u\}$  es un conjunto no vacío, entonces cada vértice es adyacente a  $u$  en  $C$ . Como  $C$  es un árbol, no tiene ciclos como subgrafos, en particular no tiene ciclos de 3 vértices (triángulos). Luego, ningún par de vértices en  $V \setminus \{u\}$  es adyacente entre sí, por lo que resulta  $C$  una estrella.

Por otro lado,  $g$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$ , si cada vértice en  $V \setminus \{u, v\}$  es adyacente tanto a  $u$  como a  $v$ . En este caso  $C$  es  $P_3$  (una estrella pero no tiene al menos 4 vértices), o tiene un ciclo de 4 vértices como subgrafo. Ambas situaciones llevan a una contradicción.  $\square$

Para construir un algoritmo que nos permita calcular el número de dominación

$\{2\}$ -romana en orugas, en un principio será importante detectar los subgrafos inducidos que son estrellas de al menos 4 vértices.

Más aún, como en cada estrella el número de dominación  $\{2\}$ -romana es el mismo, será suficiente que cada estrella tenga 4 vértices, como se ve en el siguiente Ejemplo.

**Ejemplo 21.**  $C'$  oruga sin padres con más de dos hijos.

En la oruga  $C$  de la Figura 4.4, los padres con más de dos son  $v_2$  y  $v_6$ . La oruga  $C'$  de la Figura 4.5 se obtiene de la oruga  $C$  eliminando hojas de manera que no existan padres con más de dos hijos. Es decir, se eliminan de  $C$  los vértices  $v_9$  y  $v_{15}$ .

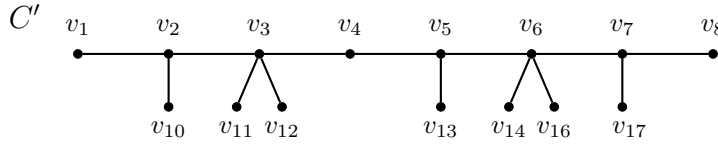


Figura 4.5: Grafo oruga  $C'$

En la siguiente proposición probaremos que la transformación presentada en el ejemplo nos permite reducir D2R en orugas a D2R en orugas con  $F_{>2} = \emptyset$ . Como nuestro foco está puesto en calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana de orugas, tengamos en cuenta que, como cada hijo es un vértice pendiente, por el Proposición 7, siempre puede considerarse una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función tal que el peso asignado a cada hijo es a lo sumo 1.

**Proposición 14.** *Existe una transformación en tiempo lineal que reduce D2R en una oruga general a D2R en una oruga sin padres con más de dos hijos.*

*Demostración.* Sea  $C$  una oruga con  $F_{>2}^C \neq \emptyset$  y sea  $C'$  el subgrafo inducido de  $C$  que se obtiene al eliminar todos salvo dos hijos de cada vértice en  $F_{>2}^C$ .

Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$ , veamos que puede obtenerse una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso a lo sumo  $\gamma_{\{R2\}}(C)$  para  $C'$ . Si  $F_{>2}^C \subseteq V_2$  (y por lo tanto todos los hijos de los vértices en  $F_{>2}^C$  están en  $V_0$ ), la restricción de  $f$  a  $V(C')$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C'$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C)$ . De lo contrario, si existe  $x \in F_{>2}^C$  que no pertenece a  $V_2$ , todos sus hijos están en  $V_1$  (un hijo en  $V_2$  contradice optimalidad de  $f$ ). Entonces la restricción de  $f$  a  $V(H)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C'$  con peso menor a  $w(f)$ .

Ahora, sea  $g = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C'$ . Veamos que puede construirse una función  $\{2\}$ -romana de  $C$  de peso a lo sumo  $\gamma_{\{R2\}}(C')$ . Sea  $z$  un vértice de  $V(C')$  que también pertenece a  $F_{>2}^C$ . Notemos que  $z$  tiene solo dos hijos en  $C'$ . Si  $z \in V_2$ , entonces sus dos hijos en  $C'$  están en  $V_0$ . Al asignar 0 a los hijos de  $z$  en  $C$  que fueron eliminados de  $C$ , obtenemos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  de peso  $w(g)$ . De lo contrario, si  $z \notin V_2$ , sus dos hijos en  $C'$  están en  $V_1$ , al asignar

0 a cada hijo de  $z$  en  $C$ , y 2 a  $z$ , obtenemos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  con peso menor o igual que  $w(g)$ .

Notar que esta transformación consta de dos partes: identificar los padres en  $F_{>2}^C$  y sucesivamente eliminar hijos hasta que queden sólo 2. La identificación puede realizarse comparando las vecindades con el conjunto de hojas, que cuesta a lo sumo chequear el grado de todos los vértices del grafo. Luego para la eliminación, en cada paso se considera un padre en  $F_{>2}^C$  y se eliminan todos salvo dos hijos. En cada paso, se obtiene una oruga, y el cardinal del conjunto de padres con dos hijos disminuye hasta obtenerse  $C'$ .  $\square$

**Observación 12.** *Notar que de la demostración surge que si  $C$  es una oruga y  $H$  el grafo que se obtiene al eliminar todos menos dos hijos de cada vértice en  $F_{>2}^C$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(H)$ .*

Esta proposición reduce nuestro estudio a orugas  $C$  con  $F_{>2}^C = \emptyset$ . Considerando esta hipótesis podemos demostrar el siguiente Lema:

**Lema 14.** *Sea  $C$  una oruga con  $F_2^C \neq \emptyset$  y  $F_{>2}^C = \emptyset$ . Entonces existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$ ,  $(V_0, V_1, V_2)$ , tal que  $F_2^C \subseteq V_2$  y  $N_C(F_2^C) \setminus F_2^C \subseteq V_0$ .*

*Demostración.* Sea  $g$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$ , digamos  $g = (V_0, V_1, V_2)$ . A partir de  $g$  construiremos otra  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$  que verifica las condiciones.

Supongamos que  $F_2^C \cap (V_0 \cup V_1) \neq \emptyset$ , para un padre  $x$  en  $F_2^C \cap (V_0 \cup V_1)$  y sean  $u, v$  los hijos de  $x$ . Es claro de la definición de  $g$  que  $u, v \in V_1$ . Sea  $f : V(C) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $f(x) = 2$ ,  $f(u) = f(v) = 0$  y  $f(z) = g(z)$  para cualquier otro  $z$ . Entonces  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $w(f) = w(g) = \gamma_{\{R2\}}(C)$ .

Supongamos ahora que  $F_2^C \cap (V_0 \cup V_1) = \emptyset$ , pero  $(N_C(F_2^C) \setminus F_2^C) \cap (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$ . Sea  $z \in (N_C(x) \setminus F_2^C) \cap (V_1 \cup V_2)$  para algún  $x \in F_2^C$ . Notemos que  $z$  tiene a lo sumo dos vecinos en  $C \setminus F_2^C$  y a lo sumo un hijo. En particular, como  $g$  es de peso mínimo,  $z$  tiene exactamente un vecino distinto de  $x$  en el camino principal. Llamemos  $u$  al posible hijo de  $z$  e  $y$  al vecino de  $z$  en el camino principal.

Si  $z \in V_1$ , (y existe  $u$ )  $u \in V_1$ , e  $y \notin V_2$  (ya que contradice la minimalidad de  $g$ ). Luego podemos definir  $f : V(C) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $f(z) = 0$ ,  $f(y) = g(y) + 1$  y  $f(w) = g(w)$  para cualquier otro vértice  $w$ . De esta forma  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $w(f) = w(g)$  que verifica lo pedido.

Si  $z \in V_2$ , (de existir  $u$ )  $u \in V_0$ , e  $y \notin V_2$  (ya que contradice la minimalidad de  $g$ ). Ahora podemos definir  $f : V(C) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $f(z) = 0$ ,  $f(u) = 1$ ,  $f(y) = g(y) + 1$  y  $f(w) = g(w)$  para cualquier otro vértice  $w$ . Nuevamente,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $w(f) \leq w(g)$  que verifica la condición.  $\square$

Este lema nos permite probar la siguiente proposición.

**Proposición 15.** Sea  $C$  una oruga con  $F_2^C \neq \emptyset$  y  $F_{>2}^C = \emptyset$ . Entonces

$$\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(C \setminus \bigcup_{x \in F_2^C} N_C[x]) + 2|F_2^C|,$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $|F_2^C|$ .

- Si  $F_2^C = \{x\}$ , a partir del Lema 14 podemos elegir una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$ ,  $f = (V_0, V_1, V_2)$  tal que  $x \in V_2$  y  $N_C(x) \subseteq V_0$ . Denotemos  $C' = C \setminus N_C[x]$ . Luego, la restricción de  $f$  a  $C'$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C'$ . Así,  $\gamma_{\{R2\}}(C') \leq \gamma_{\{R2\}}(C) - 2$ . Para probar la desigualdad opuesta, consideremos una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C'$  que extendemos a  $V(C)$  asignando peso 2 a  $x$  y 0 a sus cuatro vecinos. Esta función resulta una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(C') + 2$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C') + 2$ .
- Si  $|F_2^C| \geq 2$ , sea  $x \in F_2^C$ . Nuevamente, denotemos  $C' = C \setminus N_C[x]$ .
  - Si ambos vecinos de  $x$  en el camino central no pertenecen a  $F_2^C$ , observemos que  $F_2^{C'} = F_2^C \setminus \{x\}$ . Luego la hipótesis inductiva es válida para  $C'$ , esto es  $\gamma_{\{R2\}}(C') = \gamma_{\{R2\}}(C'') + 2(|F_2^C| - 1)$ , donde

$$C'' := C' \setminus \bigcup_{y \in F_2^{C'}} N_{C'}[y] = C \setminus \bigcup_{y \in F_2^C} N_C[y].$$

Ahora consideremos una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C'$ , digamos  $(V_0, V_1, V_2)$ . Luego la función  $f = (V_0 \cup N_C(x), V_1, V_2 \cup \{x\})$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C') + 2$ . Así  $\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C') + 2$  y la hipótesis inductiva implica

$$\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C'') + 2(|F_2^C| - 1) + 2 = \gamma_{\{R2\}}(C \setminus \bigcup_{y \in F_2^C} N_C[y]) + 2|F_2^C|.$$

- Si exactamente uno de los dos vecinos de  $x$  en el camino central, digamos  $w$ , pertenece a  $F_2^C$ , notemos que  $F_2^{C'} = F_2^C \setminus \{x, w\}$  y que  $C'$  tiene dos vértices aislados (los hijos  $w_1$  y  $w_2$  de  $w$  en  $C$ ). La hipótesis inductiva es válida para  $C'$ , esto es  $\gamma_{\{R2\}}(C') = \gamma_{\{R2\}}(C'') + 2(|F_2^C| - 2)$ , donde

$$C'' := C' \setminus \bigcup_{y \in F_2^{C'}} N_{C'}[y] = (C \setminus \bigcup_{y \in F_2^C} N_C[y]) \cup 2K_1$$

con  $2K_1$  el grafo sin aristas con dos vértices (en este caso,  $w_1$  y  $w_2$ ).

Sea  $(V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}(C')$ -función. Dado que  $w_1$  y  $w_2$  son vértices aislados en  $C'$ ,  $\{w_1, w_2\} \subseteq V_1$ . Así la función  $f = (V_0 \cup N_C(x), V_1, V_2 \cup \{x\})$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(C') + 2$ . Luego

$\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C') + 2$ . En este caso, la hipótesis inductiva para  $C'$  implica

$$\begin{aligned} \gamma_{\{R2\}}(C) &\leq \gamma_{\{R2\}}(C'') + 2(|F_2^C| - 2) + 2 \\ &\leq \gamma_{\{R2\}}((C \setminus \bigcup_{y \in F_2^C} N_C[y]) \cup 2K_1) + 2|F_2^C| - 2 \\ &= \gamma_{\{R2\}}(C \setminus \bigcup_{y \in F_2^C} N_C[y]) + 2 + 2|F_2^C| - 2, \end{aligned}$$

y la desigualdad deseada se cumple.

- Omitimos el análisis para el caso en el que ambos vecinos de  $x$  en el camino central pertenecen a  $F_2^C$  ya que sigue un razonamiento similar.

Para probar la desigualdad opuesta, seguimos el razonamiento del caso base: aplicando el Lema 14, podemos elegir una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$ ,  $f = (V_0, V_1, V_2)$  tal que  $F_2^C \subseteq V_2$  y  $N_C(F_2^C) \setminus F_2^C \subseteq V_0$ . La restricción de  $f$  al subgrafo  $C \setminus \bigcup_{x \in F_2^C} N_C[x]$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C \setminus \bigcup_{x \in F_2^C} N_C[x]$ . Así,  $\gamma_{\{R2\}}(C \setminus \bigcup_{x \in F_2^C} N_C[x]) \leq \gamma_{\{R2\}}(C) - 2|F_2^C|$ .

□

Demostrada esta proposición, ahora podemos considerar orugas  $C$  con  $F_2^C = \emptyset$ . Esto nos permite enunciar y probar el siguiente resultado que concierne a orugas con un único hijo. Para su demostración haremos uso de la Proposición 5 y del Lema 12.

**Proposición 16.** *Sea  $C$  una oruga, y sea  $x \in F_1^C$  tal que  $C' := C \setminus N_C[x]$  es la unión de dos caminos  $P_n$  y  $P_m$ , para enteros no negativos  $n$  y  $m$ . Entonces,*

1.  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) + 1$  para  $n$  y  $m$  pares positivos,
2.  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) + 2$  en caso contrario.

*Demostración.* Claramente, que  $C'$  sea la unión de dos caminos implica que  $F_2^C = \emptyset$  y  $F_{>2}^C = \emptyset$ .

Sean  $P_n := u_1, u_2, \dots, u_n$  y  $P_m := v_m, v_{m-1}, \dots, v_1$ , donde  $u_n$  y  $v_m$  están ambos a distancia 2 de  $x$  en el camino central. También, sea  $u_{n+1} \in N_C(u_n) \cap N_C(x)$ ,  $v_{m+1} \in N_C(v_m) \cap N_C(x)$  e  $y$  el único hijo de  $x$ , esto es  $N_C(x) = \{y, u_{n+1}, v_{m+1}\}$ .

Sea  $(V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $P_n \cup P_m$ . Claramente,  $(V_0 \cup N_C(x), V_1, V_2 \cup \{x\})$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  y resulta

$$\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) + 2.$$

En particular, cuando  $n$  y  $m$  son ambos pares, de la Proposición 9 podemos suponer que  $\{u_{n-1}, v_{m-1}\} \subseteq V_1$ , y así  $\{u_n, v_m\} \subseteq V_1$ . Entonces  $(V_0 \cup \{x, u_n, v_m\}, (V_1 \setminus \{u_n, v_m\}) \cup N_C(x), \emptyset)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$ , es decir que

$$\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) + 1.$$

Para ver las desigualdades opuestas, sea  $g = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$  y consideremos todos los casos posibles para  $x$ .

- Si  $x \in V_2$ , dado que  $g$  es de peso mínimo podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $N_C(x) \subset V_0$ . Así,  $(V_0 \setminus N_C(x), V_1, V_2 \setminus \{x\})$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $P_n \cup P_m$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m)$  es a lo sumo  $\gamma_{\{R2\}}(C) - 2$ .
- Si  $x \in V_1$  entonces  $y \in V_1$ . Podemos entonces trasladar el peso de  $y$  a  $x$  para obtener otra función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  con peso  $\gamma_{\{R2\}}(C)$  y seguir el razonamiento del caso anterior.
- Si  $x \in V_0$ , entonces  $y \in V_1$  y del Lema 12 resulta  $\gamma_{\{R2\}}(C) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_{n+1}) + \gamma_{\{R2\}}(P_{m+1}) + 1$ .

Luego, por lo visto en la Observación 9, tenemos

$$\gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) \leq \begin{cases} \gamma_{\{R2\}}(C) - 1 & \text{si } n \text{ y } m \text{ son pares} \\ \gamma_{\{R2\}}(C) - 2 & \text{si } n \text{ y } m \text{ con distinta paridad} \\ \gamma_{\{R2\}}(C) - 3 & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impares,} \end{cases}$$

Notemos que en el caso en que  $n$  y  $m$  son ambos impares, se tiene que  $\gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) \leq \gamma_{\{R2\}}(C) - 3$ . En particular,  $\gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) \leq \gamma_{\{R2\}}(C) - 2$ , lo que implica

$$\gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_m) \leq \begin{cases} \gamma_{\{R2\}}(C) - 1 & \text{si } n \text{ y } m \text{ son pares} \\ \gamma_{\{R2\}}(C) - 2 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□

Notemos que si una oruga  $C$  tiene  $|F_1^C| = 2$ , puede escribirse como la suma 1-clique de dos orugas  $C_1, C_2$  que tienen un único padre en  $F_1$  (como las mencionadas en la Proposición 16) o en  $F_2$  (en cuyo caso  $C_i - x$  es un camino). En el siguiente resultado calculamos el número de dominación  $\{2\}$ -romana en  $C_1 \oplus C_2$ .

**Proposición 17.** *Sean  $C$  y  $H$  dos orugas con único padre, tales que  $C \oplus H$  es una oruga con dos padres, ambos en  $F_1^{C \oplus H}$ . Sea  $x \in F_1^C \cup F_2^C$  tal que  $C' := C \setminus N_C[x]$  es la unión de dos caminos  $P_n$  y  $P_m$ , e  $y \in F_1^H \cup F_2^H$  tal que  $H' := H \setminus N_H[y]$  es la unión de dos caminos  $P_r$  y  $P_s$ , para enteros no negativos  $n, m, r$  y  $s$ . Entonces, si en  $C$  y  $H$  se identifican el último vértice de  $P_m$  y el primer vértice de  $P_r$  tenemos:*

1.  $\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) = \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 2$  cuando  $n$  y  $m$ , y  $r$  y  $s$  tienen distinta paridad, todos positivos,
2.  $\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) = \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H)$  cuando  $n$  y  $s$  impares, y  $m = r = 0$ .
3.  $\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) = \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 1$ , en caso contrario.

*Demostración.* Por simplicidad, llamamos  $v$  tanto al vértice en  $C$  como  $H$  que se identifica en  $C \oplus H$ .

De la Proposición 8, tenemos que

$$\gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 2 \leq \gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) \leq \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H).$$

Si existen  $g$  y  $h$  funciones  $\{2\}$ -romana dominantes de  $C$  y  $H$  respectivamente que asignan peso 1 a  $v$ , entonces la función que asigna  $g$  a los vértices de  $C$  y  $h$  a los vértices de  $H$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C \oplus H$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 1$ . Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) \leq \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 1$ . De la demostración de la Proposición 15 y la Observación 9, el único caso en que esto no ocurre es cuando  $m = r = 0$  y  $n$  y  $s$  son impares.

Supongamos entonces que  $m = r = 0$ ,  $n$  y  $s$  son impares y sea  $f$  una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C \oplus H$ . Claramente, si  $f(v) = 1$ , la restricción de  $f$  a  $V(C)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante que asigna peso 1 a  $v$ , una contradicción. Por otro lado, si  $f(v) = 2$ , como  $v$  tiene grado 2, podemos definir una función  $\{2\}$ -romana dominante de manera que asigne 0 a  $v$  y al menos 1 a cada uno de sus vecinos. Esto es,  $\tilde{f}(u) = \min\{f(u) + 1, 2\}$  para  $u \in N_{C \oplus H}(v)$ ,  $\tilde{f}(v) = 0$  y  $\tilde{f}(u) = f(u)$  para el resto de los vértices. Entonces resulta  $\tilde{f}$  una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C \oplus H$  de peso  $w(\tilde{f}) \leq w(f)$ . Por lo tanto podemos suponer que  $f(v) = 0$ . Luego, del Lema 12 resulta

$$\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) \geq \gamma_{\{R2\}}(C - v) + \gamma_{\{R2\}}(H - v)$$

Ahora,  $C - v = P_{n+3}$  y  $H - v = P_{s+3}$ , entonces de la Observación 9 y la Proposición 15 resulta

$$\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_n) + 2 + \gamma_{\{R2\}}(P_s) + 2 = \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H).$$

Por lo tanto, de la desigualdad en la Proposición 8, se tiene que  $\gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) = \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H)$  cuando  $m = r = 0$  y  $n$  y  $s$  son impares.

Para el resto de los casos, notemos que, si que  $n$  y  $m$  son no nulos con distinta paridad, y también lo son  $r$  y  $s$ . Entonces la oruga  $C \oplus H$  puede escribirse como la suma 1-clique de dos orugas  $C_1$ ,  $H_1$  en las hipótesis del ítem 2 considerando  $C_1 \setminus N[x] = P_n \cup P_{m+1}$  y  $H_1 \setminus N[y] = P_{r-1} \cup P_s$ . En este caso, no existen simultáneamente  $g$  y  $h$   $\gamma_{\{R2\}}$ -funciones de  $C$  y  $H$  respectivamente, tales que ambas asignen peso 1 a  $v$  y a su correspondiente vecino.

Supongamos que existe una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C \oplus H$ , digamos  $f$ , de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 2$  y llamemos  $f_C$  y  $f_H$  a las restricciones de  $f$  a  $V(C)$  y  $V(H)$  respectivamente. Consideremos los posibles valores  $f(v)$ .

Si  $f(v) = 1$ , en particular tanto  $f_C$  como  $f_H$  son funciones  $\{2\}$ -romana dominantes de  $C$  y  $H$  respectivamente. Luego

$$\gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 2 = w(f) = w(f_C) + w(f_H) - 1 \geq \gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) - 1,$$

una contradicción.



Supongamos entonces que  $f(v) = 0$ . En este caso, existen dos posibilidades, que  $f$  asigne peso 2 a un vecino de  $v$ , o que  $f$  asigne 1 a ambos vecinos de  $v$ . Sean  $z_1$  el vecino de  $v$  en  $C$  y  $z_2$  el vecino de  $v$  en  $H$ .

Para el primero de estos subcasos, supongamos sin pérdida de generalidad que  $f(z_1) = 2$ . Entonces  $f_C$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$ , así  $w(f_C) \geq \gamma_{\{R2\}}(C)$ . Más aún,  $w(f_C) = \gamma_{\{R2\}}(C)$ , ya que de lo contrario, existiría una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C \oplus H$  de peso menor a  $f$ .

Ahora, definamos una función  $h$  sobre  $V(H)$  que asigna peso 1 a  $v$  y peso  $f(u)$  para el resto de los vértices.  $h$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $H$ , luego

$$\gamma_{\{R2\}}(H) + \gamma_{\{R2\}}(C) \leq w(f_H) + w(f_C) + 1 = \gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) + 1.$$

Supongamos que  $f(z_1) = f(z_2) = 1$ , digamos  $u_i$  vecino de  $z_i$  que no es  $v$  para  $i = 1, 2$ , y definimos  $\tilde{f} : V(C \oplus H) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que

$$\tilde{f}(u) = \begin{cases} 0, & u = z_1 \text{ o } u = z_2 \\ 1, & u = v \\ \min\{f(u) + 1, 2\}, & u = u_1 \text{ o } u = u_2 \\ f(u), & \text{otro caso.} \end{cases}$$

La función  $\tilde{f}$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C \oplus H$  de peso  $w(\tilde{f}) = w(f) + 1$ . Más aún, las restricciones de  $\tilde{f}$  a  $C$  y  $H$ , son funciones  $\{2\}$ -romana dominantes de  $C$  y  $H$  respectivamente. Por lo que resulta,

$$\gamma_{\{R2\}}(C) + \gamma_{\{R2\}}(H) \leq w(f) + 1 = \gamma_{\{R2\}}(C \oplus H) + 1.$$

□

Notemos que, si  $\text{dist}(x, y) > 1$ , siempre puede considerarse  $r = 1$  y  $m \geq 1$ . Para el caso en que  $\text{dist}(x, y) = 1$ , se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 18.** *Sea  $C$  una oruga con  $x, y \in F_1^C$  tal que  $C \setminus (N(x) \cup N(y)) = P_n \cup P_m$  con  $n, m$  enteros positivos. Sea  $C' := C - v$  con  $v$  hijo de  $y$ . Entonces*

1.  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(C')$  si  $n, m$  son ambos pares,
2.  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(C') + 1$  en caso contrario.

*Demostración.* Notemos que  $\text{dist}(x, y) = 1$ , entonces  $C'$  es una oruga con un único padre ( $x$ ). Llamemos  $u$  al hijo de  $x$ .

Si  $f$  es una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C'$ , puede construirse una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  asignando peso 1 a  $v$  y el peso que asigna  $f$  al resto de los vértices, de lo que resulta  $\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C') + 1$ .

En el caso particular que  $n$  y  $m$  son pares, notemos que  $C \setminus \{x, y, u, v\}$  es la unión de caminos (impares)  $P_{n+1} \cup P_{m+1}$ . Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  la  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de

$P_{n+1} \cup P_{m+1}$  con  $V_2 = \emptyset$  que existe por la Proposición 9. Notemos que  $w(f) = \gamma_{\{R2\}}(C') - 2$ , entonces asignando peso  $(V_0 \cup \{x, y\}, V_1 \cup \{u, v\}, V_2)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C')$ . Resulta  $\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C')$ .

Para las desigualdades opuestas, por la Proposición 7, consideremos  $g$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$  que asigna a lo sumo 1 a  $v$ . Si  $g(v) = 1$ , supongamos que  $g(y) = 0$  y consideremos el grafo que se obtiene al eliminar  $y$ ,  $C - y = P_{n+3} \cup P_{m+1} \cup \{v\}$ . Del Lema 12,  $\gamma_{\{R2\}}(C) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_{n+3}) + \gamma_{\{R2\}}(P_{m+1}) + 1$  dependiendo de la paridad de  $n$ , se tiene

$$\gamma_{\{R2\}}(C) \geq \begin{cases} \gamma_{\{R2\}}(P_n) + 1 + \gamma_{\{R2\}}(P_{m+1}) + 1 & \text{si } n \text{ par,} \\ \gamma_{\{R2\}}(P_n) + 2 + \gamma_{\{R2\}}(P_{m+1}) + 1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Por otro lado,  $C'$  es una oruga con un padre tal que  $C' \setminus N[x] = P_n \cup P_{m+1}$ , entonces de la Proposición 16

$$\gamma_{\{R2\}}(C') = \begin{cases} \gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_{m+1}) + 1 & \text{si } n \text{ par, } m \text{ impar} \\ \gamma_{\{R2\}}(P_n) + \gamma_{\{R2\}}(P_{m+1}) + 2 & \text{si no.} \end{cases}$$

De donde resulta,

$$\gamma_{\{R2\}}(C) \geq \begin{cases} \gamma_{\{R2\}}(C') + 1 & \text{si } n \text{ par, } m \text{ impar} \\ \gamma_{\{R2\}}(C') & \text{si } n \text{ par, } m \text{ par} \\ \gamma_{\{R2\}}(C') + 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Supongamos ahora que  $g(v) = 0$ . Del Lema 12,  $\gamma_{\{R2\}}(C) \geq \gamma_{\{R2\}}(C - v) = \gamma_{\{R2\}}(C')$ , por lo tanto cuando  $n$  y  $m$  son pares resulta  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(C')$  como queríamos probar.

Para el caso en que  $n$  y  $m$  no son ambos pares, como  $g(v) = 0$ ,  $g(y) = 2$  y  $g$  asigna peso 0 a alguno de los vecinos de  $y$  en el camino principal. Si por el contrario asigna peso 0 a  $y$  y peso 1 a  $v$  se tiene una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  de peso menor a  $w(g)$ , lo que contradice la minimalidad de  $g$ .

Si  $g(x) = 0$ , con un argumento análogo al caso en que  $g(y) = 0$  se tiene  $\gamma_{\{R2\}}(C) \geq \gamma_{\{R2\}}(C') + 1$  ya que  $n$  y  $m$  no son ambos pares. Entonces  $g(y) = g(x) = 2$ , y llamemos  $z$  al vecino de  $y$  que no es  $x$  ni  $v$ . Luego podemos definir una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  que asigne peso 1 a  $v$ , peso 0 a  $y$ , peso  $\min\{g(z) + 1, 2\}$  a  $z$ , y el peso que asigna  $g$  al resto de los vértices, obteniendo una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C$  que asigna peso 1 a  $v$  como en el caso anterior. Por lo tanto, si  $n$  y  $m$  no son ambos pares resulta  $\gamma_{\{R2\}}(C) = \gamma_{\{R2\}}(C') + 1$ .  $\square$

En resumen, para una oruga general dada, a partir de los resultados hasta ahora demostrados en esta sección podemos restringir su estudio de dominación  $\{2\}$ -romana a un subgrafo oruga  $C$  con  $F_2^C = F_{>2}^C = \emptyset$ . Claramente,  $C$  es la suma 1-clique (identificando hojas) de un cierto número de orugas como las de la Proposición 16 o de la Proposición 18, con el añadido de pendientes (vértices aislados en la descomposición).

Supongamos que los vértices en el camino central están ordenados de  $v_0$  a  $v_k$ .  $F$  es el conjunto de padres y  $|F| \geq 2$ . Una descomposición que minimice los vértices aislados puede obtenerse realizando el siguiente procedimiento para orugas con  $F_2^C = F_{>2}^C = \emptyset$ :

### Descomposición de una oruga

**Inicio:** Consideramos  $j = 1$ ,  $i = 1$  y  $v_0 \in C_1$ .

**Paso 1:** Agregamos a  $C_j$  los vértices  $v_i, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}$  donde  $v_\ell$  es el primer padre en  $F$ . Actualizamos  $F := F \setminus \{v_\ell, v_{\ell+1}\}$  e  $i := \ell$ .

**Paso 2:** Si  $F = \emptyset$ , agregamos a  $C_j$  los vértices  $v_{i+2}, \dots, v_k$ , y el proceso termina.

**Paso 3:** Si  $F \neq \emptyset$  y  $v_{i+2} \notin F$ , agregamos a  $C_j$  el vértice  $v_{i+2}$  y el hijo de  $v_i$ . Hacemos  $j := j + 1$ ,  $i = i + 2$ ,  $F := F \setminus \{v_i, v_{i+1}\}$  y vamos al paso 1.

**Paso 4:** Si  $v_{i+2} \in F$ , actualizamos  $j := j + 1$  e  $i := i + 1$  y vamos al paso 1.

La descomposición que se obtiene al aplicar este procedimiento minimiza el número de vértices aislados (véase la Figura 4.7). Ahora las Proposiciones 14 a 16 y 18 derivan en un algoritmo que calcula el número de dominación  $\{2\}$ -romana de la oruga dada. Así podemos afirmar:

**Teorema 13.** *Para cualquier oruga, el número de dominación  $\{2\}$ -romana puede obtenerse eficientemente.*

**Ejemplo 22.** *Cálculo de  $\gamma_{\{R2\}}(C)$  aplicando el algoritmo.*

*En particular consideramos  $F_2^C = F_{>2}^C = \emptyset$ , que es donde yace la dificultad del algoritmo. Para el grafo  $C$ , tenemos los vértices  $\{v_0, \dots, v_{23}\}$  en el camino central y*

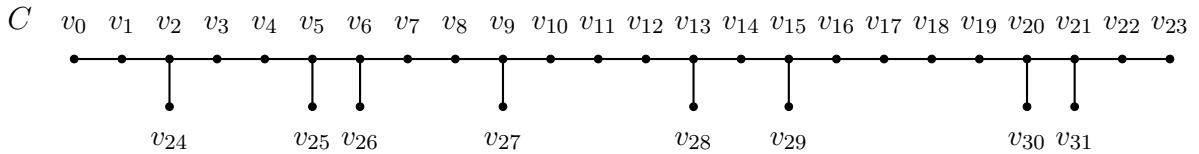


Figura 4.6: Oruga  $C$

$F = \{v_2, v_5, v_6, v_9, v_{13}, v_{15}, v_{20}, v_{21}\}$ . Aplicando el procedimiento "Descomposición de una oruga", se obtiene una partición en 1-cliques que minimiza los vértices aislados como se ve en la Figura 4.7.

Como el algoritmo involucra determinar la paridad de ciertos caminos, para cada uno de los subgrafos  $C_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  inducido por la partición, la unión de caminos  $C'_i$  que se obtienen al eliminar el padre y su vecindad cerrada son:  $C'_1 = P_1 \cup P_1$ ,  $C'_2 = P_0 \cup P_1$ ,  $C'_3 = P_1 \cup P_1$ ,  $C'_4 = P_1 \cup P_0$ ,  $C'_5 = P_0 \cup P_1$  y  $C'_6 = P_2 \cup P_2$ .

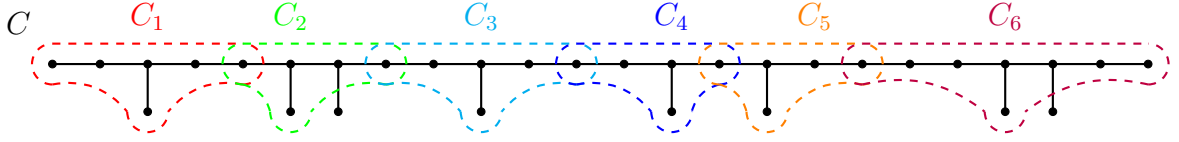


Figura 4.7: Grafo oruga  $C$  y una partición que minimiza los vértices aislados.

De esta forma se tienen 2 vértices aislados y las sumas 1-clique indicadas en colores. En particular en este ejemplo se tiene  $(-1)$  por cada suma 1-clique distinta de  $C_4 \oplus C_5$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\{R2\}}(C) &= 2 + C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \\
 &= 2 + \gamma_{\{R2\}}(C_1) + \gamma_{\{R2\}}(C_2) - 1 + \gamma_{\{R2\}}(C_3) - 1 + \gamma_{\{R2\}}(C_4) - 1 \\
 &\quad + \gamma_{\{R2\}}(C_5) + \gamma_{\{R2\}}(C_6) - 1 \\
 &= 2 + \gamma_{\{R2\}}(C_1) + \gamma_{\{R2\}}(C_2) + \gamma_{\{R2\}}(C_3) + \gamma_{\{R2\}}(C_4) \\
 &\quad + \gamma_{\{R2\}}(C_5) + \gamma_{\{R2\}}(C_6) - 4 \\
 &= 2 + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + 2 + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + 2 \\
 &\quad + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + 2 + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + 2 \\
 &\quad + \gamma_{\{R2\}}(P_1) + 2 + \gamma_{\{R2\}}(P_2) + \gamma_{\{R2\}}(P_2) + 1 - 4 \\
 &= 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 - 4 \\
 &= 2 + 4 + 3 + 4 + 3 + 3 + 5 - 4 = 20.
 \end{aligned}$$

En las siguientes subsecciones calculamos el número de dominación  $\{2\}$ -romana en clases de grafos que resultan módulos indescomponibles en la descomposición modular de los cografos, grafos  $P_4$ -sparse, grafos  $P_4$ -tidy y grafos Partner limited.

#### 4.2.2.2. Arañas

Un grafo  $G$  es una *araña* si el conjunto de vértices puede particionarse en tres conjuntos  $(S, C, H)$  con  $C = \{c_1, \dots, c_r\}$  y  $S = \{s_1, \dots, s_r\}$  ( $r \geq 2$ ) tales que cada vértice en  $H$  es adyacente a cada vértice en  $C$  pero no es adyacente a ninguno de los vértices en  $S$ , los vértices en  $C$  forman una clique y los vértices en  $S$  un conjunto independiente, y tales que sólo una de las siguientes condiciones se verifica:  $s_i$  es adyacente a  $c_j$  si y sólo si  $i = j$  (en cuyo caso  $G$  se dice una *araña fina* y la arista  $s_i c_i$  una *pata*), o  $s_i$  es adyacente a  $c_j$  si y sólo si  $i \neq j$  (en cuyo caso  $G$  se dice una *araña gruesa*).

#### Ejemplo 23. Arañas finas y gruesas.

En ambos casos se consideran arañas con  $r = 3$ . Los vértices en verde corresponden a cada cabeza, los vértices en azul corresponden a las cliques y los vértices en rojo a los conjuntos independientes respectivamente.

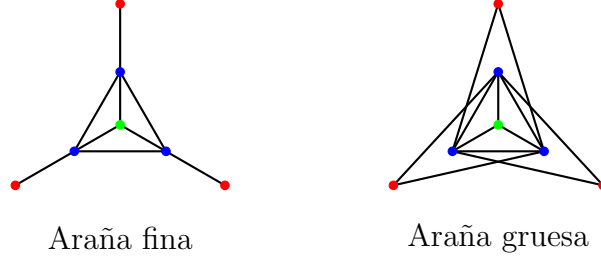


Figura 4.8: Araña fina y araña gruesa.

De la definición podemos notar que el complemento de una araña fina es una araña gruesa y viceversa. Llamaremos a  $(S, C, H)$  la *partición (araña)* del grafo y a los conjuntos  $C$  y  $H$ , *cuerpo* y *cabeza* respectivamente. Dado que esta partición puede encontrarse en tiempo lineal [29], el cálculo del número de dominación  $\{2\}$ -romana para la clase de grafos araña nos indica que la complejidad computacional de D2R en clases de grafos cuyos módulos indescomponibles sean arañas, será al menos lineal.

**Proposición 19.** *Sea  $G$  una araña, entonces*

$$\gamma_{\{R2\}}(G) = \begin{cases} 3 & \text{si } G \text{ es gruesa} \\ |S| + 1 & \text{si } G \text{ es fina.} \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $G$  una araña con partición araña  $(S, C, H)$ ,  $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ ,  $C = \{c_1, \dots, c_r\}$  y  $r \geq 2$ .

Si  $G$  es gruesa, definimos sobre  $V$  la función  $f = (V \setminus \{c_j, s_j\}, \{s_j\}, \{c_j\})$ , donde  $j = 1, \dots, r$ . Como  $c_j$  es adyacente a todo vértice en  $H \cup C$  y también a todo vértice en  $S$  excepto  $s_j$ , entonces  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso 3 y por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq 3$ . Para probar la desigualdad opuesta, supongamos que existe una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso 2. Como  $G$  no tiene un vértice universal, deben existir dos vértices  $u, v$  tales que todo vértice restante debe ser adyacente tanto a  $u$  como a  $v$ . Luego,  $u$  y  $v$  pertenecen a  $C$ , por lo tanto  $u = c_i$  y  $v = c_j$  para algunos  $i, j = 1, \dots, r$ . Sin embargo,  $s_i$  es no adyacente a un solo vértice en  $C$ , que es  $c_i$  (análogamente ocurre con  $s_j$ ), lo cual contradice que  $g$  sea una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ . Así,  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq 3$ .

Si  $G$  es fina, notemos que  $G$  puede obtenerse añadiendo un vértice pendiente a cada vértice en  $S$ . Como todo vértice en  $H$  es adyacente a cada vértice en  $S$ , estamos bajo la hipótesis de la Proposición 13 y se tiene que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq |S| + 1$ . Para la desigualdad opuesta, definimos en  $G$  la función  $f = (H \cup (C \setminus \{c_j\}) \cup \{s_j\}, S \setminus \{s_j\}, \{c_j\})$ , que es claramente una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ , donde  $j = 1, \dots, r$ . Como  $f(G) = |S| + 1$ , resulta  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |S| + 1$ .

□

### Cuasi-arañas

Dados dos grafos,  $G$  y  $H$ , el grafo que se obtiene de *reemplazar*  $w$  de  $G$  por  $H$  es el grafo de vértices  $V(G - w) \cup V(H)$ , y aristas  $E(G - w) \cup E(H) \cup \{uv : u \in N_G(w), v \in V(H)\}$ .

Un grafo es una *cuasi-araña* si puede obtenerse de un grafo araña con partición  $(S, C, H)$  reemplazando a lo sumo un vértice de  $S \cup C$  por  $K_2$  o  $S_2$ , donde  $K_2$  ( $S_2$ ) es el grafo con dos vértices adyacentes (no adyacentes) [24]. Notemos que toda araña es una cuasi-araña.

Por otro lado, reemplazar un vértice por  $S_2$  equivale a añadir un mellizo falso, y reemplazar un vértice por  $K_2$  equivale a añadir un mellizo verdadero.

#### Ejemplo 24. Cuasi-arañas.

Presentamos dos cuasi-arañas, a la izquierda a partir de una araña fina añadiendo un mellizo falso a  $v$  y a la derecha añadiendo un mellizo verdadero a  $v$ .

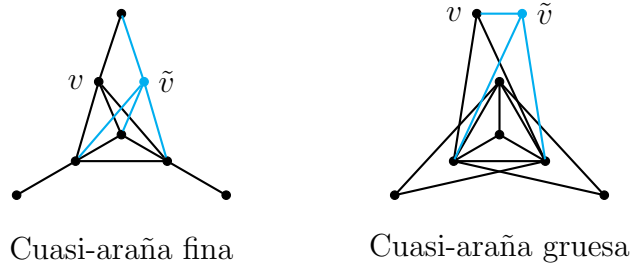


Figura 4.9: Cuasi-arañas.

Gracias a esta caracterización para las cuasi-arañas, como corolario de las Proposiciones 11 y 19, se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 20.** *Si  $Q$  es una cuasi-araña obtenida a partir de una araña  $G$ , entonces  $\gamma_{\{R_2\}}(Q) = \gamma_{\{R_2\}}(G)$ .*

*Demostración.* Claramente, si no se reemplaza ningún vértice, vale la igualdad. Supongamos que  $Q$  se obtiene efectivamente reemplazando un vértice. Luego  $Q$  es isomorfo a  $G \sim v$  para algún  $v \in S \cup C$ . A partir de la demostración de la Proposición 19, existe una función  $\{2\}$ -romana dominante mínima de  $G$  que asigna 0 a  $v$ . Por lo tanto, el resultado se sigue de la Proposición 11.  $\square$

### Arañas bien etiquetadas

Si bien no es la definición original dada en [38], consideramos la definición equivalente presentada en [1]. Un grafo  $W$  es una *araña bien etiquetada* si y sólo si  $W$  se obtiene a partir de una araña fina  $(S, C, H)$  realizando una de las operaciones  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  una única vez, donde:

- $R_1$ : reemplazar un vértice  $v \in S$  por un grafo con tres vértices;
- $R_2$ : reemplazar ambos extremos de una pata de  $(S, C, H)$  por grafos con dos vértices;
- $R_3$ : reemplazar a lo sumo un extremo de cada pata de  $(S, C, H)$  por un grafo con dos vértices.

**Observación 13.** Una cuasi araña puede pensarse también como una araña bien etiquetada que se obtiene al aplicar la operación  $R_3$ . Más específicamente al reemplazar un único extremo de una pata de una araña.

**Ejemplo 25.** Arañas bien etiquetadas, en donde se aplica  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

Consideremos los grafos de la Figura 4.10. En el grafo a la izquierda se reemplaza un vértice en el cuerpo por  $S_3$  (grafo con 3 vértices sin aristas).

En el grafo del centro, se reemplazan ambos extremos de una pata: El vértice en  $C$  se reemplaza por  $S_2$  y el vértice en  $S$  por  $K_2$ .

En el grafo de la derecha se reemplazan dos vértices en  $S$  por  $K_2$  y un vértice en  $C$  por  $S_2$ .

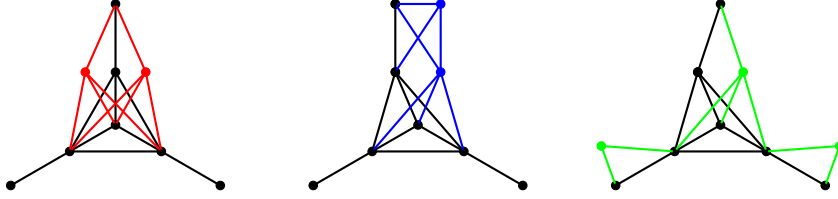


Figura 4.10: Arañas bien etiquetadas.

**Proposición 21.** Sea  $W$  una araña bien etiquetada obtenida al realizar las operaciones  $R_1$  o  $R_2$  a una araña fina  $G = (S, C, H)$ . Entonces  $\gamma_{\{R_2\}}(W) = \gamma_{\{R_2\}}(G)$ .

*Demostración.* Por un lado, notemos que la operación  $R_1$  es equivalente añadir sucesivamente dos mellizos a un vértice  $v \in S \cup C$ . Entonces, de la demostración de la Proposición 19, existe una  $\gamma_{\{R_2\}}$ -función de  $G$  que asigna 0 a  $v$ . El resultado se sigue aplicando dos veces la Proposición 11.

Por otro lado, notemos que realizar la operación  $R_2$  a  $G$  es equivalente a agregar un mellizo a ambos extremos de una pata, digamos  $c_i s_i$ , de  $G$ . De la demostración de la Proposición 19, existe  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_{\{R_2\}}$ -función de  $G$  con  $c_i \in V_2$  y  $s_i \in V_0$ . El resultado se sigue aplicando la Proposición 11.  $\square$

**Proposición 22.** Sea  $W$  una araña bien etiquetada (no araña) obtenida al realizar la operación  $R_3$  sobre una araña fina  $G = (S, C, H)$ . Entonces  $\gamma_{\{R_2\}}(W) = \gamma_{\{R_2\}}(G) + t - 1$ , donde  $t$  es la cantidad de vértices en  $S$  que se reemplazaron por un grafo de dos vértices.

*Demostración.* Notemos primero que realizar la operación  $R_3$  a  $G$  es equivalente a agregar al menos un mellizo a algunos vértices de  $S$  y de  $C$ . Sea  $t$  la cantidad de mellizos agregados a vértices de  $S$ .

Para cada vértice  $s_j$  en  $S$  al cual se le añadió un mellizo mediante la operación  $R_3$ , sea  $\tilde{s}_j$  su mellizo ( $j \in \{1, \dots, |S|\}$ ).

Por un lado, la función

$$f(v) = \begin{cases} 2 & \text{si } v = c_i \\ 1 & \text{si } v = s_j \text{ o } v = \tilde{s}_j, j \neq i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $W$  con peso  $f(W) = 2 + (|S| - 1) + (t - 1) = \gamma_{\{R2\}}(G) + (t - 1)$ . Entonces,  $\gamma_{\{R2\}}(W) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) + (t - 1)$ .

Por otro lado, sea  $g$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $W$ . Notar que si  $s_j$  tiene un mellizo  $\tilde{s}_j$  en  $W$ , entonces  $g(s_j) + g(c_j) + g(\tilde{s}_j) = 2$ . En efecto, si  $g(s_j) + g(c_j) + g(\tilde{s}_j) = 1$ , se contradice que  $g$  sea una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $W$ , y si  $g(s_j) + g(c_j) + g(\tilde{s}_j) > 2$ , se contradice que  $g$  sea de peso mínimo (la función  $h$  tal que  $h(c_j) = 2$ ,  $h(s_j) = h(\tilde{s}_j) = 0$  y  $h(u) = g(u)$  para todo otro vértice de  $W$ , es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $W$  con  $h(W) < g(W)$ ). Resulta,

$$g(W) \geq \sum_{i=1}^{|S|} g(s_i) + g(c_i) + g(\tilde{s}_i) \geq 2t + (|S| - t) = |S| + t = \gamma_{\{R2\}}(G) + (t - 1),$$

lo que implica que  $\gamma_{\{R2\}}(W) \geq \gamma_{\{R2\}}(G) + (t - 1)$ . □

#### 4.2.2.3. Grafos en ZOO

Al igual que en [38], llamamos *ZOO* a la familia de grafos formada por los siguientes grafos y sus complementos: caminos  $P_k$  con  $k \geq 6$ , ciclos  $C_k$  con  $k \geq 5$ , los grafos  $C_5^u$  (un ciclo  $C_5$  junto con un vértice  $u$  adyacente a lo sumo a 4 vértices del  $C_5$ ), los grafos  $P_5^u$  (un camino  $P_5$  junto con un vértice  $u$  adyacente a lo sumo a 4 vértices del  $P_5$ ) en la Figura 4.11, los grafos  $J$ ,  $K$ ,  $L$  y  $Q$  presentados en la Figura 4.12,  $J - \{w\}$ ,  $J - \{v, w\}$  y los once grafos en la Figura 4.13.

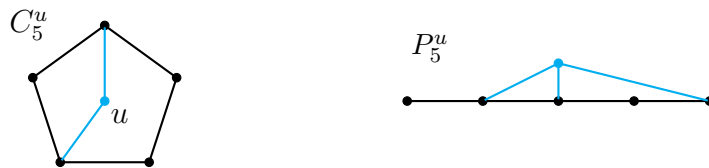
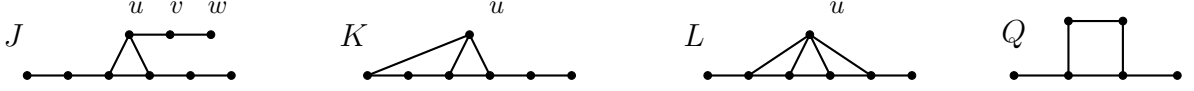
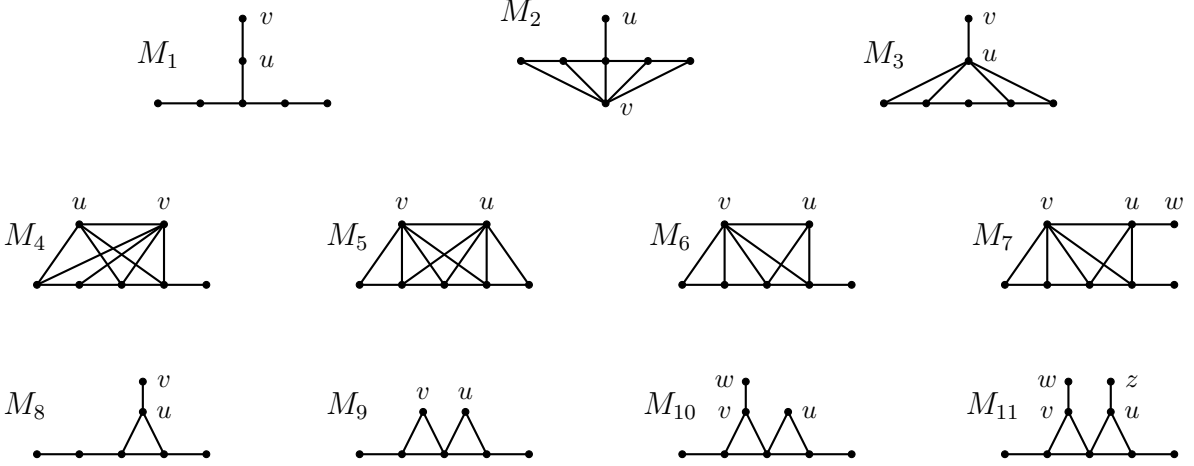


Figura 4.11: Ejemplos de grafos  $C_5^u$  y  $P_5^u$ .




 Figura 4.12: Grafos  $J$ ,  $K$ ,  $L$  y  $Q$ .

 Figura 4.13: Grafos  $M_i$  en ZOO, para  $i \in [1, 11]$ .

En esta subsección, calculamos el número de dominación  $\{2\}$ -romana para cada grafo de la familia ZOO, excepto para los caminos y ciclos, cuyos números de dominación  $\{2\}$ -romana ya fueron calculados en [10]. Recordemos que, para un ciclo  $C_n$ , se tiene que  $\gamma_{\{R2\}}(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , y para un camino  $P_n$ ,  $\gamma_{\{R2\}}(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ .

**Proposición 23.**  $\gamma_{\{R2\}}(C_5^u) = 3$  si  $u$  es adyacente a al menos dos vértices del  $C_5$ . En caso contrario,  $\gamma_{\{R2\}}(C_5^u) = 4$ .

*Demostración.* Dado que  $C_5^u$  no tiene vértice universal ni dos vértices distintos adyacentes a todos los demás, entonces  $\gamma_{\{R2\}}(C_5^u) > 2$ . Si  $u$  tiene grado al menos 2, entonces una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C_5^u$  se puede construir extendiendo una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C_5$  asignando peso 0 a  $u$ . De lo contrario,  $G$  es un  $C_5$  con un vértice pendiente, y en este caso es fácil ver que  $\gamma_{\{R2\}}(C_5^u) = 4$ .  $\square$

Observemos que  $\overline{C_5} = C_5$ , y que  $\overline{C_5^u}$  también es un grafo de la forma  $C_5^u$ . Para los complementos de los ciclos restantes en ZOO, se tiene:

**Proposición 24.**  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{C_k}) = 3$  para  $k > 5$ .

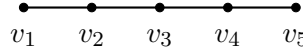
*Demostración.* Para  $k > 5$ , dado que cada vértice en  $C_k$  tiene grado 2, cada vértice en  $\overline{C_k}$  tiene grado  $k - 3$ . Entonces  $\overline{C_k}$  no tiene vértices universales ni dos vértices distintos adyacentes a todos los demás. Se deduce que  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{C_k}) \geq 3$ .

Para probar  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{C_k}) \leq 3$ , nombraremos los vértices como  $u_i$  con  $i = 1, \dots, k$  y de tal manera que  $u_i$  no sea adyacente a  $u_{i-1}$  ni a  $u_{i+1}$  (módulo  $k$ ). Sea  $f$  la

función que asigna 1 a  $u_1$ , 1 a  $u_2$  y 1 a  $u_3$ , y 0 a los vértices restantes. Probaremos que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $\overline{C_k}$ . Tomemos  $u_j$  con  $j \neq 1, 2, 3$  y supongamos que  $u_j$  es adyacente en  $\overline{C_k}$  a como máximo uno entre  $u_1, u_2$  y  $u_3$ ; entonces  $u_j$  es adyacente en  $C_k$  a como máximo dos entre  $u_1, u_2$  y  $u_3$ . Pero entre ellos, el único par que comparte un vecino ( $u_2$ ) en  $C_k$  son  $\{u_1, u_3\}$ , lo que implica que  $u_j = u_2$ , lo que lleva a una contradicción. Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{C_k}) = 3$ .  $\square$

**Proposición 25.**  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) = 3$  si  $u$  es adyacente a ambos extremos del camino  $P_5$ , o si  $u$  es adyacente exactamente a uno de estos vértices y al vértice central de  $P_5$ . En cualquier otro caso,  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) = 4$ .

*Demostración.* Consideremos los vértices de  $P_5$  como sigue:



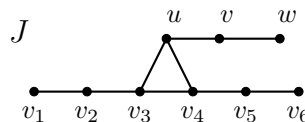
De su definición,  $P_5^u$  tiene seis vértices, ninguno de los cuales es un vértice universal. Además, en  $P_5^u$  no hay dos vértices distintos con grado 4. Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) \geq 3$ .

Supongamos que entre los vecinos de  $u$  en  $P_5^u$  están  $v_1$  y  $v_5$ . Luego la función  $f = (\{u, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \emptyset)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $P_5^u$  y por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) = 3$ . Lo mismo ocurre cuando  $u$  es adyacente a exactamente un vértice entre  $v_1$  y  $v_5$ , y también adyacente a  $v_3$ . Cuando  $u$  no es adyacente a  $v_3$ , la función  $g = (\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5, u\}, \emptyset)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $P_5^u$  lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) \leq 4$ . Si  $d(u) = 1$ , entonces  $P_5^u$  es un  $P_6$  o, en su defecto, una oruga. Resulta de la Proposición 16 o del número de dominación  $\{2\}$ -romana en caminos que  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) = 4$ . Para los casos restantes, análogamente se tiene que cualquier función  $\{2\}$ -romana dominante de  $P_5^u$  tiene peso al menos 4, lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(P_5^u) = 4$ .  $\square$

**Proposición 26.**  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{v, w\}) = \gamma_{\{R2\}}(Q) = \gamma_{\{R2\}}(K) = \gamma_{\{R2\}}(L) = 4$ ,  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{w\}) = 5$ , y  $\gamma_{\{R2\}}(J) = 6$ , donde los grafos  $J$ ,  $K$ ,  $L$  y  $Q$  se muestran en la Figura 4.12.

*Demostración.* Para esta demostración, hacemos uso de la Proposición 5 (cota inferior):  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \sum_k \gamma_{\{R2\}}(G_k)$ , donde cada  $G_k$  es una componente conexa del grafo  $G \setminus \{v\}$ .

Llamaremos a los vértices de  $J$  como sigue:



Comenzamos con el grafo  $J - v - w$ . Claramente  $(\{u, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_4, v_6\}, \emptyset)$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $J - v - w$  con peso 4. Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{v, w\}) \leq 4$ .

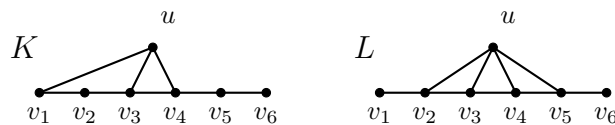
Sea  $g$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $J - \{v, w\}$ . Si  $g(u) \geq 1$ , al menos un vecino de  $u$  pertenece a  $V_0$ . Eliminando este vecino de  $u$  y aplicando el Lema 12, obtenemos  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{v, w\}) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_2 \cup P_4) = 5$ , lo que contradice que  $g$  sea de peso mínimo. Por lo tanto  $g(u) = 0$ , y entonces la restricción de  $g$  a  $J - \{u, v, w\}$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $J - \{u, v, w\} = P_6$ . Aplicando el Lema 12, obtenemos  $g(J - \{v, w\}) \geq g(P_6) = 4$ . Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{v, w\}) = 4$ .

Para el grafo  $J - w$ , observemos que se puede obtener de  $J - \{v, w\}$  añadiendo un vértice pendiente, entonces  $4 \leq \gamma_{\{R2\}}(J - w) \leq 5$  por la Proposición 12. Ahora, sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $J - \{w\}$ . Si  $f(u) = 0$ , la restricción de  $f$  a  $J - \{u, v, w\}$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $J - \{u, v, w\}$  y  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{w\}) \geq 5$  por el Lema 12, lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{w\}) = 5$ . Si  $f(u) > 0$ , al menos un vecino de  $u$  en  $J - \{u, v, w\}$  pertenece a  $V_0$ . Luego, el grafo obtenido al eliminar este vértice es un  $P_2 \cup P_5$ , y por el Lema 12 obtenemos  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{w\}) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_2) + \gamma_{\{R2\}}(P_5) = 5$ , lo que implica nuevamente  $\gamma_{\{R2\}}(J - \{w\}) = 5$ .

Para el grafo  $J$ , siguiendo un razonamiento similar, notemos que se puede obtener de  $J - \{w\}$  añadiendo el vértice pendiente  $w$ . Entonces  $5 \leq \gamma_{\{R2\}}(J) \leq 6$ . Sea  $g$  una función  $\gamma_{\{R2\}}(J)$ . Si  $g(u) = 0$ , entonces por el Lema 12 tenemos  $\gamma_{\{R2\}}(J) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_2) + \gamma_{\{R2\}}(P_6) = 6$ . De lo contrario, al menos un vecino de  $u$  en  $J - \{u, v, w\}$  pertenece a  $V_0$ , y entonces  $g(J) \geq \gamma_{\{R2\}}(P_2) + \gamma_{\{R2\}}(P_6) = 6$ . Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(J) = 6$ .

Para el grafo  $Q$ , asignando 1 a sus vértices pendientes y 1 a cualquier par de vértices no adyacentes entre sí en el ciclo de 4 vértices inducido, obtenemos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $Q$  con peso 4. Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(Q) \leq 4$ . Dado que  $Q$  no tiene vértice universal ni dos vértices no adyacentes con grado 4,  $\gamma_{\{R2\}}(Q) \geq 3$ . Supongamos que  $\gamma_{\{R2\}}(Q) = 3$  y sea  $g$  una función  $\gamma_{\{R2\}}(Q)$ . Si  $g$  asigna 2 a cualquiera de los vértices con grado 3 y 1 a cualquier otro, entonces hay al menos un vértice en  $Q$  que para el cual la suma de los pesos asignados por  $g$  en su vecindad es menor a 2, lo que contradice que  $g$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $Q$ . De lo contrario,  $g$  asigna 1 a tres vértices distintos, dos de los cuales son pendientes. No es difícil ver que al menos uno de los vértices restantes no tiene al menos peso 2 asignado por  $g$  en su vecindad. Por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(Q) \geq 4$  y resulta  $\gamma_{\{R2\}}(Q) = 4$ .

Para los grafos  $K$  y  $L$ , nombramos los vértices de la siguiente manera



La función  $f = (\{v_2, v_5, u\}, \{v_1, v_3, v_4, v_6\}, \emptyset)$  es una función  $\{2\}$ -romana domi-

nante tanto para  $K$  como para  $L$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(K) \leq 4$  y  $\gamma_{\{R2\}}(L) \leq 4$ . Como  $K$  no tiene un vértice universal ni dos vértices no adyacentes con grado 5, entonces  $\gamma_{\{R2\}}(K) \geq 3$ . No es difícil notar que  $\gamma_{\{R2\}}(K) \neq 3$  y por lo tanto  $\gamma_{\{R2\}}(K) = 4$ .

La prueba para el grafo  $L$  es análoga y resulta  $\gamma_{\{R2\}}(L) = 4$ .  $\square$

**Proposición 27.** Sean  $M_i$ , para  $i = 1, \dots, 11$ , los grafos en la Figura 4.13. Entonces

$$\gamma_{\{R2\}}(M_i) = \begin{cases} 3, & \text{para } i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 4, & \text{para } i = 1 \text{ o } i \in \{7, 8, 9\}, \\ 5, & \text{para } i \in \{10, 11\}. \end{cases}$$

*Demostración.* Para cada  $i = 1, \dots, 11$ ,  $M_i$  no tiene vértice universal ni dos vértices no adyacentes con grado  $|M_i| - 2$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(M_i) \geq 3$ . Llamemos de izquierda a derecha  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  a los vértices del  $P_5$  inducido por  $V \setminus \{u, v, w, z\}$  en cada  $M_i$ . El Cuadro 4.1 muestra las respectivas funciones {2}-romana dominantes para  $M_i$  con  $i = 2, \dots, 6$ . El peso de cada una de estas funciones coincide con la cota inferior, lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(M_i) = 3$  para  $i = 2, \dots, 6$ .

Cuadro 4.1: Funciones {2}-romana dominantes para los grafos  $M_2$  a  $M_6$ .

|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $u$ | $v$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| $M_2$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1   | 2   |
| $M_3$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2   | 0   |
| $M_4$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0   | 2   |
| $M_5$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 2   | 0   |
| $M_6$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0   | 2   |

De la Proposición 13 se deduce que  $\gamma_{\{R2\}}(M_i) \geq 4$  para  $i = 1, 8, 10$  y  $\gamma_{\{R2\}}(M_{11}) \geq 5$ . El Cuadro 4.2 muestra las respectivas funciones {2}-romana dominantes para estos grafos (excepto para  $M_{10}$  que necesita otro enfoque). Dichas funciones alcanzan la respectiva cota inferior, lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(M_1) = \gamma_{\{R2\}}(M_8) = 4$  y  $\gamma_{\{R2\}}(M_{11}) = 5$ .

Cuadro 4.2: Funciones {2}-romana dominantes para los grafos  $M_1$ ,  $M_8$  y  $M_{11}$ .

|          | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $u$ | $v$ | $w$ | $z$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|
| $M_1$    | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0   | 1   | -   | -   |
| $M_8$    | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0   | 1   | -   | -   |
| $M_{11}$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0   | 0   | 1   | 1   |

Para  $M_{10}$ , supongamos que  $\gamma_{\{R2\}}(M_{10}) = 4$ . Dado que este grafo tiene 3 vértices pendientes sin vecinos en común, y existen vértices que no son adyacentes a ninguno ellos, resulta que  $\gamma_{\{R2\}}(M_{10}) \geq 5$ . La función que asigna 1 a  $v_1$ , y 2 tanto a  $v_4$

como a  $v$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $M_{10}$  con peso 5. Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(M_{10}) = 5$ .

Para  $M_7$  y  $M_9$ , no es difícil notar que cualquier función  $\{2\}$ -romana dominante de cualquiera de ellos tiene peso al menos 4, entonces  $\gamma_{\{R2\}}(M_7) \geq 4$  y  $\gamma_{\{R2\}}(M_9) \geq 4$ . El Cuadro 4.3 muestra, respectivamente, ejemplos de funciones  $\{2\}$ -romana dominantes de  $M_7$  y  $M_9$ , lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(M_7) = \gamma_{\{R2\}}(M_9) = 4$ .

Cuadro 4.3: Funciones  $\{2\}$ -romana dominantes para los grafos  $M_7$  y  $M_9$ .

|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $u$ | $v$ | $w$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|
| $M_7$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0   | 2   | 1   |
| $M_9$ | 0     | 2     | 0     | 2     | 0     | 0   | 0   | -   |

□

Finalmente, para los complementos de los grafos mencionados en la definición de  $ZOO$ , aplicamos la Proposición 10 y obtenemos:

**Corolario 7.** Si  $G$  es uno de los siguientes:  $P_k$  con  $k \geq 6$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $Q$ ,  $M_i$  con  $i \neq 5$ , o  $H = P_5^u$  o  $H$  una araña bien etiquetada con  $\delta(H) = 1$ , entonces  $\gamma_{\{R2\}}(\overline{G}) = 3$ .

#### 4.2.2.4. Grafos split $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free

Recordemos que D2R es NP-completo incluso para grafos split [11].

En esta sección, hacemos uso de la caracterización dada en [38] (establecida en el Lema 15 a continuación) para la subclase de grafos split que no contienen ni  $H_1$ ,  $H_2$  ni sus complementos como subgrafos inducidos (véase la Figura 4.14 a continuación). Luego demostramos que D2R puede resolverse eficientemente en grafos split que son a su vez  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free.

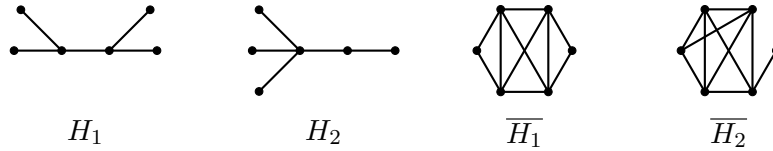


Figura 4.14: Grafos  $H_1$ ,  $H_2$  y sus complementos.

Con el objetivo de enunciar la caracterización para grafos  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free dada en [38], introducimos la notación y definiciones específicas. En esta sección, dados  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  con  $a \leq b$  usamos la notación  $[a, b]$  para indicar el conjunto de números enteros  $\{a, \dots, b\}$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un conjunto  $M \subseteq V$  es un módulo si todo vértice en  $V \setminus M$  es adyacente a todos los vértices en  $M$ , o a ninguno de ellos. Un grafo  $G$  de

al menos dos vértices se dice *primo* si sus únicos módulos son  $V$  o un único vértice. En particular todo grafo primo es indescomponible.

Sea  $G = (S, K)$  un grafo split. Sea  $\ell$  el grado máximo en  $G$  de los vértices de  $S$  y, para cualquier  $i \in [1, \ell]$ ,  $i \geq 3$  para  $C'_i$  denotemos

$$A_i = \{s \in S : d_G(s) = i\}, \quad B_i = \bigcap_{s \in A_i} N(s), \quad C_i = \bigcup_{s \in A_i} N(s) \quad \text{y} \quad C'_i = \bigcup_{j=1}^{i-2} C_j.$$

Además, consideremos las siguientes definiciones:  $A_i$  es un *conjunto estable fino* si  $|B_i| \geq i - 1$  y un *conjunto estable grueso* si  $|C_i| \leq i + 1$ .

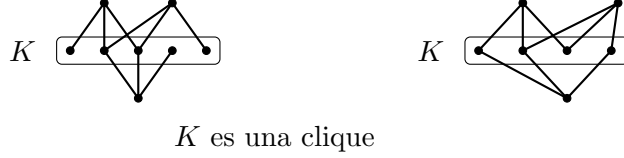


Figura 4.15: Estable fino (izquierda) y estable grueso (derecha).

**Observación 14.** [38, Remark 6] Para cada  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ , observemos que  $A_i$  es un estable grueso o un estable fino si y sólo si, para cada  $x, y \in A_i$  con  $x \neq y$ ,  $|N(x) \cap N(y)| = i - 1$ .

Comenzamos esta sección, mostrando una generalización de la Observación 14 cuya prueba se presenta en el Apéndice B por ser enteramente técnica.

**Proposición 28.** Sea  $G = (S, K)$ ,  $G$  primo e  $i \in [1, \ell]$  y  $A_i = \{s_1, s_2, \dots, s_{|A_i|}\}$ . Entonces  $A_i$  es estable grueso o estable fino si y sólo si  $\left| \bigcap_{j=1}^{k+1} N(s_j) \right| = i - k$ , para cada  $k \in [1, i - 1]$ .

*Demostración.* Ver Apéndice B. □

La siguiente caracterización, presentada en [38] será fundamental en el resto de esta sección para obtener el número de dominación  $\{2\}$ -romana en grafos split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free graphs.

**Lema 15.** [38, Lema 3] El grafo primo split  $G = (S, K)$  es  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free si y sólo si para todo  $i \in [1, \ell]$ , se verifican las siguientes:

1.  $A_i$  es estable fino o estable grueso.
2.  $C'_i \subseteq B_i$ .
3. Si  $|A_i| \geq 4$  y  $A_i$  es estable grueso entonces  $i = \ell$ . Más aún, si  $A_{i-1} \neq \emptyset$  entonces  $|A_{i-1}| \leq 3$ ,  $C_{i-1} \subseteq C_i$  y  $A_i \cup A_{i-1} \cup K$  es  $\{H_1, H_2\}$ -free.
4. Si  $|A_{i-1}| \geq 4$  y  $A_{i-1}$  es estable fino entonces  $i = 2$ ,  $B_{i-1} \subseteq B_i$  y  $A_i \cup A_{i-1} \cup K$  es  $\{H_1, H_2\}$ -free.

5. Si  $|A_i| < 4$  y  $|A_{i-1}| < 4$  entonces para todo  $s \in A_i$ ,  $s$  no es vértice de un subgrafo inducido de  $A_i \cup A_{i-1} \cup S_i \cup K$  isomorfo a  $H_1$  o  $H_2$ , y para todo  $s' \in A_{i-1}$ ,  $|N(s') \setminus N(s)| \leq 1$ .

Previo al resultado central de esta subsección, presentamos algunos resultados que derivan del Lema 15. Las pruebas están incluidas en el Apéndice B por ser enteramente técnicas.

**Corolario 8.** Si  $G$  es un grafo primo split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free entonces:

- i. Si  $|A_i| \geq 4$  entonces  $i = 1$  o  $i = \ell$ , luego  $|A_i| \leq 3$  para  $i \in [2, \ell - 1]$ .
- ii.  $B_j \subseteq C_j \subseteq B_i$  para  $j \in [1, i - 2]$  y  $i \in [3, \ell]$ .
- iii. Si  $B_j = \emptyset$  para cada  $j \geq 3$ , entonces  $C'_j = \emptyset$  y  $A_i \subseteq C_i = \emptyset$  para cada  $i \in [1, j - 2]$ .
- iv. Para  $i \in [2, \ell]$ ,  $B_i = \emptyset$  si y sólo si  $|A_i| = i + 1$  or  $A_i = \emptyset$ . Más aún, si  $|A_i| = i + 1$  entonces cada vértice en  $C_i$  es vecino de exactamente  $i$  vértices en  $A_i$ .
- v. Si  $|A_i| < 4$ ,  $|A_{i+1}| < 4$  y
  - $C_i \cap B_{i+1} = \emptyset$  para  $i = 2, 3$  o
  - $B_i \cap B_{i+1} = \emptyset$  para  $i \in [4, \ell - 1]$ ,
 entonces  $C_i \subseteq C_{i+1}$  y cada vértice en  $B_i$  no es vecino de a lo sumo un vértice en  $A_{i+1}$ .
- vi. Si  $\ell > 2$ , entonces  $A_1, A_2$  y  $A_\ell$  son los únicos conjuntos no vacíos entre los  $A_i$  con  $B_i = \emptyset$ .

*Demostración.* Ver Apéndice B □

Con estos resultados ahora podemos obtener el número de dominación  $\{2\}$ -romana de cualquier grafo split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free

**Teorema 14.** Sean  $G = (S, K)$  un grafo split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free,  $\ell \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\ell \geq 1$  y los conjuntos  $A_i, B_i$  y  $C_i$  para  $i \in [1, \ell]$  anteriormente definidos, e  $i_{\min} = \min_{B_i \neq \emptyset} \{i \in [1, \ell]\}$ . Entonces

$$|A_1| + 1 \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq |A_1| + 3.$$

Más precisamente,

■  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 1$  en los siguientes casos:

- $\ell = 1$ ,
- $\ell = 2$  y  $C_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ,

- $\ell = 3$ ,  $B_3 \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$  e  $i_{\min} = 1$ ,
  - $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 2$  y  $C_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 3$ ,  $B_3 \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ .
- $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 2$  en los siguientes casos:
- $\ell = 2$ ,  $B_2 \neq \emptyset$  y  $C_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,
  - $\ell = 2$ ,  $B_2 = \emptyset$  y  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ,
  - $\ell = 3$ ,  $|A_3| < 4$  y  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 2$ ,  $B_2 \neq \emptyset$  y  $C_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 2$ ,  $B_2 = \emptyset$  y  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 3$ ,  $|A_3| < 4$  y  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$ ,  $4 \leq i_{\min} \leq \ell - 1$ ,  $B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1} \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ ,
  - $\ell \geq 4$  y  $i_{\min} = \ell$ ,
- $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 3$  en cualquier otro caso.

La prueba de este teorema se presenta en el Apéndice B por ser también enteramente técnica.

Para finalizar esta sección, reunimos los resultados presentados para derivar algoritmos prácticos de tiempo lineal que calculan el número de dominación  $\{2\}$ -romana de varias clases de grafos con pocos  $P_4$ 's inducidos.

#### 4.2.2.5. Grafos con pocos $P_4$

D2R en cografos fue estudiado en [33]. Sin embargo aquí presentamos otra manera de hallar el número de dominación  $\{2\}$ -romana en cografos que nos permite extender el procedimiento a superclases de estos como son los grafos  $P_4$ -sparse,  $P_4$ -tidy y Partner Limited.

### Cografos

Un *cografo* es un grafo que no tiene ningún  $P_4$  como subgrafo inducido. Aplicando la descomposición modular, se tiene que un cografo puede construirse a partir de grafos triviales mediante unión y join. Luego, del Teorema 12 y la Observación 10, obtenemos un procedimiento de tiempo lineal para obtener el número de dominación  $\{2\}$ -romana de cualquier cografo dado.



### Grafos $P_4$ -sparse

Un grafo es  $P_4$ -sparse si cada conjunto de cinco vértices contiene a lo sumo un  $P_4$  inducido [28].

En [29] estos grafos se caracterizan como los grafos que verifican una y sólo una de las siguientes:

1.  $G$  o su complemento es no conexo y cada una de sus componentes conexas es un grafo  $P_4$ -sparse.
2.  $G$  es una araña  $(S, C, H)$  y  $G[H]$  es un grafo  $P_4$ -sparse.

En otras palabras, en este caso la descomposición modular tiene como módulos indescomponibles a grafos triviales y grafos araña del grafo  $P_4$ -sparse dado. Entonces del Teorema 12, la Observación 10 y la Proposición 19, obtenemos un procedimiento de tiempo lineal para obtener el número de dominación  $\{2\}$ -romana de cualquier grafo  $P_4$ -sparse dado.

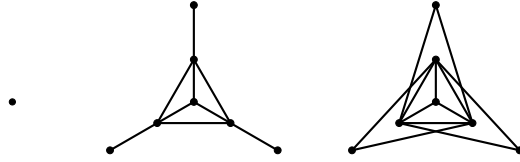


Figura 4.16: Ejemplos de módulos indescomponibles de un grafo  $P_4$ -sparse

### Grafos $P_4$ -tidy

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, y sea  $A$  un  $P_4$  inducido en  $G$ . Un *partner* de  $A$  es un vértice  $v$  en  $G \setminus A$  tal que  $A \cup \{v\}$  induce un grafo con al menos dos  $P_4$  inducidos.

Un grafo es  $P_4$ -tidy si cualquier  $P_4$  inducido tiene como máximo un partner. Los grafos  $P_4$ -tidy se caracterizan en [24] como aquellos que verifican una única de las siguientes:

1.  $G$  o su complemento es no conexo y cada una de sus componentes conexas es un grafo  $P_4$ -tidy.
2.  $G$  es una quasi-araña  $(S, C, H)$  y  $G[H]$  es un grafo  $P_4$ -tidy.
3.  $G$  es  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$ ,  $C_5$  o  $K_1$ .

En [24] también se demuestra que los módulos indescomponibles de grafos  $P_4$ -tidy son isomorfos a  $C_5$ ,  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$  y cuasi-arañas cuya cabeza es vacía o tiene a lo sumo un vértice.

Luego aplicando estos resultados, el Teorema 12 y las Proposiciones 19 y 20 se obtiene un procedimiento de tiempo lineal que calcula el número de dominación  $\{2\}$ -romana de cualquier grafo  $P_4$ -tidy dado.

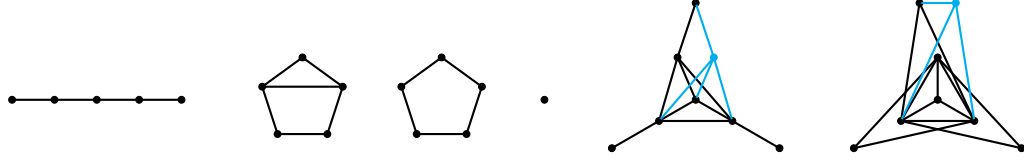


Figura 4.17: Ejemplos de módulos indescomponibles de un grafo  $P_4$ -tidy

### Grafos Partner Limited

$G$  es un grafo *Partner Limited* (o grafo  $PL$ ) si cualquier  $P_4$  inducido en  $G$  tiene como máximo dos partners.

Los grafos Partner Limited se caracterizan en [38, Teorema 1]. Esta caracterización puede reformularse de la siguiente manera:  $G$  es un grafo Partner Limited si y sólo si veifica una de las siguientes:

1.  $G$  o su complemento es no conexo y cada una de sus componentes conexas es un grafo Partner Limited.
2.  $G$  es una araña bien etiquetada o su complemento.
3.  $G$  es isomorfo a un módulo en  $ZOO$ .
4.  $G$  es un grafo split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free, donde  $H_1$  y  $H_2$  se muestran en la Figura 4.14.

Luego aplicamos la caracterización en [38], el Teorema 12 y los resultados en los Párrafos 4.2.2.2 al 4.2.2.4, y obtenemos un procedimiento de tiempo lineal que calcula el número de dominación  $\{2\}$ -romana de cualquier grafo Partner Limited dado.

Los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en [20, 21].

# Capítulo 5

## Búsqueda de grafos $\{k\}$ -romanos

Teniendo ahora, a partir del trabajo mostrado en el Capítulo 4, algoritmos eficientes para el cálculo del número de dominación  $\{2\}$ -romana en múltiples clases de grafos, el objetivo de este capítulo es analizar cuáles de estos son grafos  $\{2\}$ -romanos. También, identificamos algunos grafos  $\{k\}$ -romanos para  $k > 2$ .

### 5.1. Orugas $\{k\}$ -romanas

Siguiendo el orden del capítulo anterior, iniciamos con los grafos oruga. Como los grafos orugas son casos particulares de árboles, y existen caracterizaciones para los árboles  $\{2\}$ -romanos (caracterizados en [27]) y  $\{k\}$ -romanos con  $k \geq 3$  (caracterizados en [40]) estudiamos qué debería tenerse en cuenta en la caracterización para obtener orugas  $\{2\}$ -romanas y orugas  $\{k\}$ -romanas.

#### 5.1.1. $k = 2$

Como ya fue mencionado anteriormente en esta tesis, en [27] Henning y Klostermeyer estudian la dominación  $\{2\}$ -romana en árboles. Para esto, consideran desigualdades que relacionan el número de dominación con el número de dominación  $\{2\}$ -romana y caracterizan las clases de árboles que verifican las cotas por igualdad, es decir la clase de los árboles  $\{2\}$ -romanos. Nuestro objetivo en esta sección es restringir esa construcción a la clase de orugas. Para esto analizamos si la construcción es minimal incluso en orugas, y presentamos condiciones bajo las cuáles pueden aplicarse las operaciones para construir orugas  $\{2\}$ -romanas.

Veamos las definiciones y operaciones necesarias para la caracterización mostrada en [40].

Una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  es *casi  $\{2\}$ -romana relativa al vértice  $v$*  si, cuando  $f(u) = 0$  entonces  $f(N(u)) \geq 1$  si  $u = v$  o  $f(N(u)) \geq 2$  en el caso contrario. De esta forma toda función  $\{2\}$ -romana es casi  $\{2\}$ -romana. Denotamos al número de

dominación casi  $\{2\}$ -romano relativo al vértice  $v$  como  $\gamma_{\{R2\}}^n(G, v)$ . Un vértice  $v$  es un *vértice estable* si  $\gamma_{\{R2\}}(G - v) \geq \gamma_{\{R2\}}(G)$ . Decimos que un vértice  $v$  es *casi estable* si  $\gamma_{\{R2\}}^n(G, v) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ . Un vértice en un árbol se dice *stem* si tiene grado al menos dos y es adyacente a una hoja.

**Ejemplo 26.** *Vértices estables y casi estables.*

En  $P_4$  los vértices *stem* son vértices estables porque  $P_4 - u = K_1 \cup P_2$  con  $u$  vértice *stem* en  $P_4$ . Sin embargo, las hojas no son vértices estables porque  $\gamma_{\{R2\}}(P_3) = 2 < 3 = \gamma_{\{R2\}}(P_4)$ . Es decir, no cualquier vértice es un vértice estable en un grafo.

Más aún, una hoja  $v$  en un camino par no es un vértice estable ya que, de la Observación 9, se tiene que  $\gamma_{\{R2\}}(P_{2n-1}) < \gamma_{\{R2\}}(P_{2n})$ .

Por otro lado, una hoja en un camino par no es un vértice casi estable. Sea  $P_{2n}$  de vértices  $v_1, \dots, v_{2n}$ . La función que asigna peso 0 a los vértices de índice impar y peso 1 a los vértices de índice par es una función casi  $\{2\}$ -romana relativa al vértice  $v_1$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(P_{2n}) - 1$ , pero no es una función  $\{2\}$ -romana dominante.

Sin embargo, una hoja en un camino impar  $P_{2n+1}$  es un vértice casi estable. Notemos que cualquier función casi  $\{2\}$ -romana dominante relativa a una hoja, de mínimo peso, y que asigne 0 a dicho vértice es una función  $\{2\}$ -romana dominante del camino inducido  $P_{2n}$ , es decir que tiene peso  $\gamma_{\{R2\}}(P_{2n}) = \gamma_{\{R2\}}(P_{2n+1})$ .

Dadas las definiciones, podemos presentar la clase de grafos que son árboles y  $\{2\}$ -romanos.

Sea  $\mathcal{H}$  la familia de árboles que puede obtenerse mediante una sucesión  $T_0, \dots, T_k$  donde  $k \geq 0$ ,  $T_0 = P_3$  y  $T = T_k$ . Más aún, si  $k \geq 1$  entonces el árbol  $T_i$  se obtiene aplicando al árbol  $T' = T_{i-1}$  alguna de las siguientes operaciones (Figura 5.1):

**Operación  $\mathcal{O}_1$ :** Añadir un nuevo vértice  $u$ , y la arista  $uv$  para algún vértice  $v$  estable y *stem* en  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_2$ :** Añadir un camino  $P_3$  con vértice central  $u$  y la arista  $uv$  para algún  $v$  vértice estable de  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_3$ :** Añadir un camino  $P_3$  y la arista  $uv$ , donde  $u$  es un vértice de grado 1 en  $P_3$  y  $v$  un vértice casi estable de  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_4$ :** Añadir una estrella  $K_{1,3}$  y la arista  $uv$ , donde  $u$  es un vértice de grado 1 en  $K_{1,3}$  y  $v$  es un vértice (cualquiera) de  $T'$ .

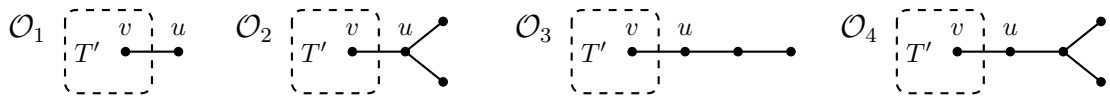


Figura 5.1: Operaciones  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$ .

**Observación 15.** *En esta tesis usamos la notación  $T_k = \mathcal{O}_i(T_{k-1}, v)$  para indicar que el árbol  $T_k$  se obtiene de aplicar la operación  $\mathcal{O}_i$  con  $i = 1, \dots, 4$  al árbol  $T_{k-1}$  sobre el vértice  $v$ .*

**Teorema 15.** [27] *Un árbol  $T$  es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $T \in \mathcal{H}$ .*

Como corolario de este teorema, dado un árbol que en particular es una oruga, será  $\{2\}$ -romano si y solo si se puede obtener a partir de un camino  $P_3$  aplicando una sucesión de las operaciones descriptas. Considerando la operación  $\mathcal{O}_1$ , es claro que todo padre es stem. Por otro lado, para las operaciones  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$  es claro que aplicar cualquiera de éstas a un vértice que no sea extremo de un camino central en la oruga, resulta en un grafo que no es una oruga. Luego tenemos la siguiente observación.

**Observación 16.** *Sea  $C$  una oruga en la clase  $\mathcal{H}$ , entonces  $C$  se obtiene a partir de un grafo  $P_3$  realizando la operación  $\mathcal{O}_1$  a un padre, o a un vértice a distancia 1 del extremo del camino central, que es un vértice estable, realizando la operación  $\mathcal{O}_2$  a un vértice que es extremo del camino central y vértice estable, realizando la operación  $\mathcal{O}_3$  a un vértice que es extremo del camino central y vértice casi estable o realizando la operación  $\mathcal{O}_4$  a un vértice que es extremo del camino central.*

Cabe aclarar que en el caso particular de una oruga que es un camino, el número de dominación  $\{2\}$ -romana para un camino  $P_n$  es  $\gamma_{\{R2\}}(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$  [10]. Por otro lado el número de dominación de un camino es  $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  [18]. De esta forma los únicos caminos que son  $\{2\}$ -romanos son  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_6$ . Por esto, en adelante vamos a considerar orugas que no sean caminos.

Con esto en mente, ahora nuestro objetivo es determinar con mayor claridad qué tipo de orugas son  $\{2\}$ -romanas. Para ello, buscamos condiciones necesarias para poder aplicar las operaciones  $\mathcal{O}_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Proposición 29.** *Si  $C$  es una oruga,  $v$  un vértice stem que no es padre, y  $v$  no tiene vecinos en común con un padre en  $C$ , entonces  $v$  es un vértice estable.*

*Demostración.* Claramente  $C - v$  es la unión entre una oruga  $C'$  (al menos 4 vértices) y un grafo trivial. Llamemos  $u$  al vecino de  $v$  que no es hoja,  $x$  al vértice a distancia 2 de  $v$  y  $z$  al vértice a distancia 3 de  $v$  (que es único porque, como  $x$  no es padre,  $d(x) = 2$ ).

Es claro que si una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C - v$  asigna 1 a  $u$ , la extensión de esta función a  $C$  asignando peso 0 a  $v$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$ , es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}(C - v)$

Veamos que siempre existe una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C'$  que asigna peso 1 a  $u$ . Sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C'$ . Si  $f(x) \leq 1$ ,  $f(u) = 1$ . Supongamos que  $f(x) = 2$ , entonces podemos definir  $g : V(C') \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $g(u) = 1$ ,  $g(v) = 0$ ,

$g(z) = \min\{f(z) + 1, 2\}$  y coincide con  $f$  para el resto de los vértices de  $C'$ . Luego  $g$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $w(g) \leq w(f)$  que asigna peso 1 a  $u$ .

Por lo tanto,  $v$  es un vértice casi estable de  $C$ .  $\square$

**Lema 16.** *Sea  $C$  una oruga y  $v$  un vértice en  $C$ . Si  $v$  tiene más de un hijo, entonces  $v$  es un vértice estable y un vértice casi estable.*

*Demostración.* Sea  $v$  con al menos dos hijos, veamos primero que es un vértice estable, es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(C - v) \geq \gamma_{\{R2\}}(C)$ .

Si  $v$  tiene al menos dos hijos,  $C - v$  tiene al menos dos vértices aislados a los cuales una función  $\{2\}$ -romana dominante  $f$  asigna peso 1. Luego, considerando  $\tilde{f}(u) = f(u)$  para todo  $u \in V(C) \setminus \{v\}$  y  $\tilde{f}(v) = 0$ , resulta que  $\tilde{f}$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$ . Por lo tanto  $v$  es un vértice estable.

Veamos ahora que  $v$  es casi estable. Como toda función  $\{2\}$ -romana es casi  $\{2\}$ -romana, tenemos que  $\gamma_{\{R2\}}^n(C, v) \leq \gamma_{\{R2\}}(C)$ . Para la desigualdad opuesta, sea  $f$  una función casi  $\{2\}$ -romana relativa a  $v$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}^n(C, v)$ . Claramente si  $f(v) \geq 1$ ,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana. Si  $f(v) = 0$ ,  $f$  asigna peso 1 a cada uno de los hijos de  $v$  por ser  $v$  su único vecino. Como  $v$  tiene al menos dos hijos,  $f(N(v)) \geq 2$  y entonces resulta que  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante. Sigue que  $\gamma_{\{R2\}}(C) \leq \gamma_{\{R2\}}^n(C, v)$  y por lo tanto  $v$  es casi estable.  $\square$

**Lema 17.** *Sea  $C$  un oruga en la clase  $\mathcal{H}$ , entonces pueden aplicarse las operaciones  $\mathcal{O}_1$  a  $\mathcal{O}_4$  según las siguientes condiciones:*

$\mathcal{O}_1$ : *si el vértice  $v$  es stem pero no padre, y no tiene vecinos en común con un padre, o el vértice  $v$  es un padre tal que los vértices a distancia 2 no son ambos padres de al menos dos hijos.*

$\mathcal{O}_2$ : *si el vértice  $v$  es extremo del camino central (maximal) y está a distancia mayor a 2 de un padre de al menos dos hijos.*

$\mathcal{O}_3$ : *si el vértice  $v$  es extremo de un camino central y está a distancia a lo sumo 2 de un padre con al menos dos hijos.*

$\mathcal{O}_4$ : *si el vértice  $v$  es extremo de un camino central.*

*Demostración.* Para las operaciones  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , veamos que un padre que no tiene vecinos en común con padres de al menos dos hijos es un vértice estable. Haremos esta prueba por contradicción.

Supongamos que  $v$  no es estable, es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(C - v) < \gamma_{\{R2\}}(C)$ . Del Lema 16,  $v$  tiene a lo sumo un hijo.

Sea  $x$  un vecino de  $v$  en el camino central y  $g$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $C - v$ . Si  $g(x) \neq 0$ , podemos construir una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C - v)$

para  $C$  asignando peso 0 al vértice  $v$  y el peso que asigne  $g$  al resto de los vértices. Luego  $g(x) = 0$  para toda función  $\{2\}$ -romana dominante óptima de  $C - v$ . Es decir que todo vecino de  $v$  en el camino central debe ser vecino de un vértice al cual una función  $\{2\}$ -romana dominante siempre asigna peso 2. Resulta entonces que los vecinos de  $v$  en el camino central son vecinos de padres con al menos dos hijos.

Para la operación  $\mathcal{O}_3$ , sea  $v$  extremo de un camino central. Veamos que, si est  a distancia al menos 2 de un padre con al menos dos hijos, entonces  $v$  es un vértice casi estable. Claramente, como  $v$  es extremo del camino principal, no es padre. Sea  $u$  el vecino de  $v$ . De la definición,  $\gamma_{\{R2\}}^n(C, v) \leq \gamma_{\{R2\}}(C)$ . Supongamos que existe  $f$ , una función casi  $\{2\}$ -romana dominante relativa al vértice  $v$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C) - 1$ . Si  $f(v) = 1$ ,  $f$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C) - 1$ , una contradicción. Consideremos entonces que  $f(v) = 0$ .

Como debe ser  $f(u) \geq 1$ , supongamos  $f(u) = 1$ . Si  $u$  es padre de al menos dos hijos, tiene al menos un hijo al cual  $f$  asigna peso 1, digamos  $x$ . Definiendo una función que asigne peso 0 a  $x$ , peso 2 a  $u$  y el peso que asignaba  $f$  al resto de los vértices, se obtiene una función  $\{2\}$ -romana de  $C$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C) - 1$ , una contradicción. Si  $u$  es vecino de un padre de al menos dos hijos, digamos  $z$ . Si  $f(z) \leq 1$ ,  $f$  asigna peso 1 a todos sus hijos y podemos redefinir como en el caso anterior y obtener una función que asigna peso 2 a  $z$ . Ahora, si  $f(z) = 2$ , podemos definir una función que asigna peso 1 a  $v$ , peso 0 a  $u$  y el mismo peso que  $f$  al resto de los vértices. Esta es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $C$  de peso  $\gamma_{\{R2\}}(C) - 1$ , que es una contradicción. Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}^n(C, v) = \gamma_{\{R2\}}(C)$  y  $v$  es un vértice casi estable.  $\square$

Habiéndonos restringido a una subclase de los grafos árboles, en este caso a los grafos oruga, nos interesa determinar si la caracterización presentada es minimal. Para esto estudiamos el comportamiento de las operaciones.

**Ejemplo 27.** *Una oruga con múltiples construcciones.*

*El grafo  $C$  puede construirse a partir de  $P_3$  aplicando la operación  $\mathcal{O}_4$  al vértice  $v$ . Es decir  $C = \mathcal{O}_4(P_3, v)$ .*

*Este grafo también puede construirse aplicando la operación  $\mathcal{O}_3$  al vértice  $v$  y luego aplicando la operación  $\mathcal{O}_1$  al vértice  $w$ . Es decir  $C = \mathcal{O}_1(\mathcal{O}_3(P_3, v), w)$ .*

*Notar que  $v$  es casi estable en  $P_3$  porque  $\gamma_{\{R2\}}(P_3) = \gamma_{\{R2\}}^n(P_3, v) = 2$ . Y  $w$  es estable en  $P_6$  porque  $P_6 \setminus \{w\} = P_4 \cup \{u\}$  y  $\gamma_{\{R2\}}(P_6) = 4 = \gamma_{\{R2\}}(P_4) + 1$ .*



Figura 5.2: Diferentes construcciones para  $C$ .

Con el objetivo de demostrar o refutar la minimalidad de las operaciones para grafos oruga  $\{2\}$ -romanos, probamos el siguiente resultado.

**Proposición 30.** *Si  $C$  es un grafo oruga en la clase  $\mathcal{H}$ , entonces al aplicar  $\mathcal{O}_3$  se obtiene un vértice que es padre y estable.*

*Demostración.* Sea  $C$  una oruga en  $\mathcal{H}$ ,  $\tilde{C} = \mathcal{O}_3(C)$  donde la operación se aplica a un vértice  $v$ . Por definición de la operación en orugas,  $v$  es un vértice de grado 1 en el camino central de  $C$  y  $v$  es casi estable. Luego, en  $\tilde{C}$ , llamemos  $x, y, z$  a los vértices del  $P_3$  que añade la operación  $\mathcal{O}_3$ . De esta forma  $v$  es adyacente a  $x$ . Veamos que  $y$  es un vértice estable en  $\tilde{C}$ .

Sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $\tilde{C}$  que asigna 0 al vértice  $y$ . Esta función existe porque  $v$  es casi estable, es decir que existe una función casi estable óptima que tiene el mismo peso que una función  $\{2\}$ -romana dominante óptima. Construimos entonces una función  $\tilde{f}$  en  $V(\tilde{C})$  tal que  $\tilde{f}(u) = f(u)$  si  $u \in V(C)$ ,  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(z) = 1$  y  $\tilde{f}(y) = 0$ . Luego  $\tilde{f}$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $\tilde{C}$  y la restricción de  $\tilde{f}$  a  $\tilde{C} \setminus \{y\}$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de este grafo, por lo que  $\gamma_{\{R2\}}(\tilde{C} \setminus \{y\}) \leq \gamma_{\{R2\}}(\tilde{C})$ .

Supongamos ahora que  $g$  es una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $\tilde{C} \setminus \{y\}$ . En cualquier caso,  $g(z) = 1$  por ser un vértice aislado. Si  $g(x) = 0$ , la restricción de  $g$  al grafo  $C$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante de peso  $\gamma_{\{R2\}}(\tilde{C} \setminus \{y\}) - 1$ . Luego asignando 1 al vértice  $y$ , y  $g(u)$  al resto de los vértices se tiene una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $\tilde{C}$ , de peso  $\gamma_{\{R2\}}(\tilde{C} \setminus \{y\})$ . Es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(\tilde{C}) \leq \gamma_{\{R2\}}(\tilde{C} \setminus \{y\})$ .

Si  $g(x) = 1$  existen dos posibilidades. Si  $g(v) = 1$ , podemos trasladar el peso en  $x$  a  $v$ , volviendo al caso anterior. Si  $g(v) = 0$ , entonces asignando 0 al vértice  $y$ , y  $g(u)$  al resto de los vértices se tiene una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $\tilde{C}$  peso  $\gamma_{\{R2\}}(\tilde{C} \setminus \{y\})$ . Es decir que  $\gamma_{\{R2\}}(\tilde{C}) \leq \gamma_{\{R2\}}(\tilde{C} \setminus \{y\})$ .

Por lo tanto  $y$  es estable y padre de  $z$ . □

Considerando la definición de la operación  $\mathcal{O}_1$ , como consecuencia de esta proposición tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 9.** *Siempre que se aplique la operación  $\mathcal{O}_3$ , existe un vértice al que puede aplicarse la operación  $\mathcal{O}_1$ .*

Este corolario nos lleva a pensar que la operación  $\mathcal{O}_4$  es redundante. Contrario a lo esperado, si el grafo  $C \in \mathcal{H}$  se obtiene a partir del camino  $P_3$  aplicando en alguna de las iteraciones la operación  $\mathcal{O}_4$ , no siempre es posible obtener  $C$  a partir de  $P_3$  aplicando sólo las operaciones  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ . El problema yace en que la operación  $\mathcal{O}_3$  se aplica sobre un vértice casi estable, al contrario de la operación  $\mathcal{O}_4$  como puede verse en el siguiente ejemplo.



**Ejemplo 28.** *Minimalidad de las operaciones.*

El grafo  $C$  de la Figura 5.3 se obtiene con la siguiente sucesión de operaciones:

$$C = \mathcal{O}_4(\mathcal{O}_3(\mathcal{O}_2(P_3, v_2), v_4), v_7)$$

Es decir,  $C$  se construye a partir de un  $P_3$  aplicando  $\mathcal{O}_2$  sobre  $v_2$ , luego  $\mathcal{O}_3$  sobre  $v_4$  y finalmente  $\mathcal{O}_4$  sobre  $v_7$ .

En este caso no es posible reemplazar este último paso por la aplicación sucesiva de  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_1$ , ya que el vértice  $v_7$  en el subgrafo inducido por  $\{v_0, \dots, v_7, v_{11}\}$ , digamos  $C'$ , no es casi estable. A partir del algoritmo para orugas se tiene  $\gamma_{\{R2\}}(C') = 6$  pero si se considera una función casi  $\{2\}$ -romana dominante relativa a  $v_7$  con  $V_0 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ ,  $V_1 = \{v_0, v_2, v_4, v_6, v_{11}\}$  y  $V_2 = \emptyset$ , esta función tiene peso 5.

Analicemos las posibles construcciones alternativas para  $C$ . Notemos que, como las operaciones  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  resultan en la adición de 3 vértices, y  $\mathcal{O}_1$  sólo se aplica a padres, no cualquier  $P_3$  que sea subgrafo inducido es un punto de partida válido para la construcción de  $C$ .

Si  $P_3 = v_0, v_1, v_2$  se tiene la construcción mencionada. Si  $P_3 = v_{11}, v_3, v_4$ ,  $\mathcal{O}_3(\mathcal{O}_3(P_3, v_3), v_4) = C'$ . Y finalmente si  $P_3 = v_5, v_6, v_7$ ,  $\mathcal{O}_3(\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_3(P_3, v_5), v_3), v_5) = C'$ . Es decir que en cualquier caso se tiene que  $v_7$  no es casi estable, por lo que no puede aplicarse  $\mathcal{O}_3$  seguido de  $\mathcal{O}_1$  en lugar de  $\mathcal{O}_4$ .

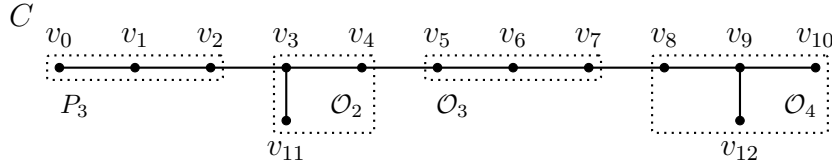


Figura 5.3: Oruga  $C$  con una única construcción.

En conclusión, debido a que no existen operaciones redundantes en esta clase de grafos, la caracterización por operaciones es minimal incluso para grafos oruga.

### 5.1.2. $k > 2$

Similar al trabajo realizado por Henning y Klostermeyer en [27], en [40] se caracterizan los árboles  $\{k\}$ -romanos mediante operaciones entre las cuales encontramos generalizaciones de las operaciones presentadas en la subsección anterior.

Se dice que una función es  $\{k\}$ -romana dominante relativa al vértice  $v$  si es una función  $\{k\}$ -romana dominante que asigna  $k$  o  $k - 1$  al vértice  $v$ . Se nota  $\gamma_{\{Rk\}}^r(G, v)$  al número de dominación  $\{k\}$ -romano relativo al vértice  $v$ . Una función es *casi  $\{k\}$ -romana dominante relativa al vértice  $v$*  si es una función  $f : V \rightarrow \{0, \dots, k\}$  tal que, si  $f(u) = 0$  entonces  $f(N(u)) \geq k - 1$  si  $u = v$  o  $f(N(u)) \geq 2$  si  $u \neq v$ . Notemos que si  $k = 2$  tenemos una función casi  $\{2\}$ -romana, por lo que esta es una generalización

de la anterior. El número de dominación casi  $\{k\}$ -romano relativa al vértice  $v$  es  $\gamma_{\{Rk\}}^{n_1}(G, v)$ . Una función es *segunda casi  $\{k\}$ -romana dominante relativa al vértice  $v$*  si es una función  $f : V \rightarrow \{0, \dots, k\}$  tal que, si  $f(u) = 0$  entonces  $f(N(u)) \geq k - 2$  si  $u = v$  o  $f(N(u)) \geq 2$  en otro caso. Como es de esperarse, toda función  $\{k\}$ -romana es casi  $\{k\}$ -romana y toda función casi  $\{k\}$ -romana es segunda casi  $\{k\}$ -romana. Análogamente, el número de dominación segundo casi  $\{k\}$ -romano relativa al vértice  $v$  es  $\gamma_{\{Rk\}}^{n_2}(G, v)$ .

Un vértice  $v$  es *vértice  $\{k\}$ -estable* si  $\gamma_{\{Rk\}}(G - v) \geq \gamma_{\{Rk\}}(G)$ . Un vértice  $v$  es *casi  $\{k\}$ -estable* si  $\gamma_{\{Rk\}}^{n_1}(G, v) = \gamma(G)$ . De la misma forma, un vértice  $v$  es *segundo casi  $\{k\}$ -estable* si  $\gamma_{\{Rk\}}^{n_2}(G, v) = \gamma(G)$ .

A partir de estas definiciones podemos presentar la clase de los árboles  $\{k\}$ -romanos. Se define  $\mathcal{T}_k$  como la familia de árboles que se construyen a partir de la estrella  $K_{1,k-1}$  aplicando sucesivamente alguna de las siguientes 5 operaciones (Figura 5.2):

**Operación  $\mathcal{O}_1$ :** Añadir un nuevo vértice  $u$ , y la arista  $uv$  para algún vértice  $v$  adyacente a al menos un vértice de grado 1 (pendiente) en  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_2$ :** Añadir una estrella  $K_{1,k}$  con vértice central  $u$  y la arista  $uv$  para algún  $v$  vértice  $\{k\}$ -estable de  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_3$ :** Añadir una estrella  $K_{1,k}$  y la arista  $uv$ , donde  $u$  es un vértice de grado 1 en  $K_{1,k}$  y  $v$  un vértice casi  $\{k\}$ -estable de  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_4$ :** Añadir una estrella  $K_{1,k+1}$  y la arista  $uv$ , donde  $u$  es un vértice de grado 1 en  $K_{1,k+1}$  y  $v$  es un vértice (cualquiera) de  $T'$ .

**Operación  $\mathcal{O}_5$ :** Añadir una estrella  $K_{1,k-1}$  y la arista  $uv$ , donde  $d_{K_{1,k-1}}(u) = 1$  es un vértice de grado 1 en  $K_{1,k-1}$  y  $v$  es un vértice segundo casi  $\{k\}$ -estable de  $T'$  que verifica  $\gamma_{\{Rk\}}(T') < \gamma_{\{Rk\}}^r(T', v)$ .

Para estas definiciones se considera  $k \geq 2$ , salvo para la operación  $\mathcal{O}_5$  que debe ser  $k \geq 3$ . En esta tesis consideramos  $k \geq 3$ .

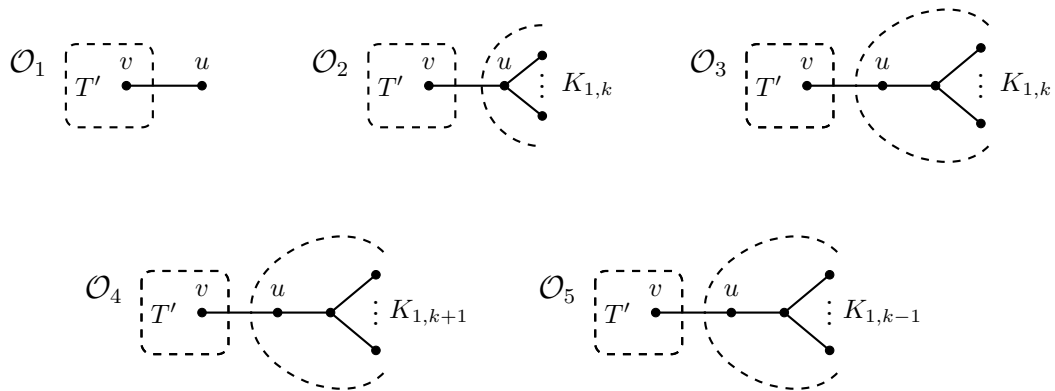


Figura 5.4: Operaciones  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$ ,  $\mathcal{O}_4$  y  $\mathcal{O}_5$ .

**Teorema 16.** [40] *Un árbol  $T$  es un grafo  $\{k\}$ -romano si y sólo si  $T \in \mathcal{T}_k$ .*

**Observación 17.** *De este teorema sigue que los grafos oruga que son grafos  $\{k\}$ -romanos son aquellos que pertenecen a la clase  $\mathcal{T}_k$ . Es decir, aquellos para los cuales a partir de una estrella  $K_{1,k-1}$  la operación  $\mathcal{O}_1$  se realiza sobre un vértice  $v$  que es un padre en el camino central o no es padre pero es stem. Las operaciones  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$ ,  $\mathcal{O}_4$  u  $\mathcal{O}_5$  se realizan sobre un vértice  $v$  que es extremo de un camino central.*

A partir de esta observación podemos determinar con mayor claridad qué tipo de orugas son las orugas  $\{k\}$ -romanas. Sólo en el caso  $k = 3$  es necesario tener en cuenta algunas consideraciones respecto de la operación  $\mathcal{O}_5$ .

**Lema 18.** *Sea  $C = K_{1,k-1}$  y  $u$  un hijo en  $C$ . Entonces  $u$  no es  $\{k\}$ -estable. En particular si  $k = 3$ ,  $u$  no es segundo casi  $\{k\}$ -estable.*

*Demostración.* Sea  $v$  el vértice universal en  $C$ , y  $u$  un hijo de  $v$ . Notemos que  $\gamma_{\{Rk\}}(C) = k$  y  $d(v) = k - 1$ . Luego  $\gamma_{\{Rk\}}(C \setminus v) = k - 1$  ya que el grafo  $C \setminus v$  tiene  $k - 1$  vértices, es decir que  $u$  no es  $\{k\}$ -estable.

Por otro lado, sea  $f$  la función que asigna peso 0 al vértice  $u$ , peso  $k - 2$  a  $v$  y peso 1 al resto de los vértices. Luego la función  $f$  es una función segunda casi  $\{k\}$ -romana de peso  $w(f) = f(N[v]) = k - 2 + k - 2 = 2k - 4$ . Luego  $\gamma_{\{Rk\}}^{n_1}(C, u) = \min\{2k - 4, k\}$ . Como  $\gamma_{\{Rk\}}(C) = k$ , resulta que  $u$  no es segundo casi estable sólo si  $k = 3$ .  $\square$

**Corolario 10.** *En el primer paso para construir orugas  $\{k\}$ -romanas no puede aplicarse la operación  $\mathcal{O}_2$ , si  $k = 3$  tampoco puede aplicarse la operación  $\mathcal{O}_5$ .*

Ya que existen restricciones a las operaciones que pueden aplicarse en el primer paso, veamos que para el caso  $k = 3$  existe otra restricción en la operación  $\mathcal{O}_5$ .

**Lema 19.** *Si  $k = 3$ , la operación  $\mathcal{O}_5$  no puede aplicarse sobre un vértice que se añade al aplicar  $\mathcal{O}_5$ .*

*Demostración.* Sean  $C' = \mathcal{O}_5(C)$  y  $z, v, u$  en ese orden los vértices añadidos al aplicar la operación  $\mathcal{O}_5$  a  $C$  tal que  $u$  es hijo de  $v$  en  $C'$ . Veamos que  $u$  no es segundo casi  $\{k\}$ -estable.

Análogo a la demostración del Lema 18, sea  $f$  una  $\gamma_{\{R3\}}(C)$ -función y  $\tilde{f}$  la extensión de  $f$  a  $V(C')$  tal que  $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(v) = 1$  y  $\tilde{f}(u) = 0$ . Luego  $\tilde{f}$  es una función segunda casi  $\{k\}$ -romana de peso  $\gamma_{\{R3\}}(C) + 2$ , por lo que resulta  $\gamma_{\{R3\}}^{n_2} \leq \gamma_{\{R3\}}(C) + 2 < \gamma_{\{R3\}}(C') = \gamma_{\{R3\}}(C) + 3$ .

Por lo tanto, no pueden aplicarse la operación  $\mathcal{O}_5$  sobre  $u$ .  $\square$

Notemos que este lema nos dice que si una oruga  $\{k\}$ -romana tiene dos vértices de grado 2 que son vecinos, entonces uno de ellos es un padre (con un único hijo) o ambos son vecinos de algún padre (claramente no del mismo).

**Teorema 17.** *Sea  $C$  una oruga  $\{k\}$ -romana en la cual se aplican  $\ell$  operaciones  $\mathcal{O}_i$  con  $i = 2, 3, 4, 5$ , entonces en  $C$  se verifican:*

1. *En  $C$  hay  $\ell + 1$  padres.*
2. *Si  $k > 3$ , cada padre tiene al menos  $k - 3$  hijos.*
3. *Si  $k = 3$  cada padre tiene al menos un hijo.*
4. *Dos padres consecutivos en el camino central están a distancia 2 o 3.*

*Demostración.* 1. Como consecuencia de la Observación 17, notemos que al aplicar la operación  $\mathcal{O}_1$  a una oruga  $C'$ , sólo se añaden hijos a un padre ya existente en  $C'$ . Mientras que al aplicar el resto de las operaciones se añade un padre. Luego en  $K_{1,k-1}$  hay un único padre y al aplicar  $\ell$  operaciones  $\mathcal{O}_i$  con  $i = 2, 3, 4, 5$  se obtienen  $\ell + 1$  padres.

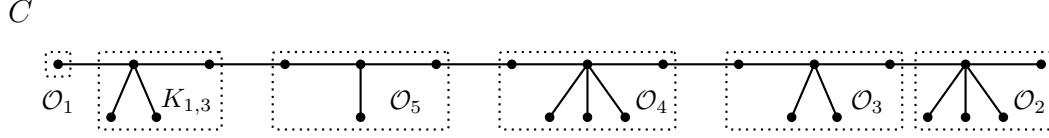
2. De las definiciones de las operaciones, la operación  $\mathcal{O}_4$  añade  $k$  hijos, las operaciones  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  añaden  $k - 1$  hijos cada una y  $\mathcal{O}_5$  añade  $k - 2$  hijos. Luego cada vez que se aplica la operación  $\mathcal{O}_1$  se agrega un hijo a un padre ya existente, y si se aplica una operación  $\mathcal{O}_i$  con  $i = 2, 3, 4, 5$ , un hijo pasa a ser un vértice en el camino central de grado 2. Es decir que cada vez que se aplica una de estas operaciones, un padre a lo sumo pierde un hijo, pero en cada aplicación de una operación esto sucede sobre un padre distinto. Resulta entonces que si se aplican dos veces sucesivas  $\mathcal{O}_5$  un padre con  $k - 2$  hijos pasa a tener  $k - 3$  hijos. Por lo tanto cada padre tiene al menos  $k - 3$  hijos.
3. Para el caso particular de  $k = 3$ , teniendo en cuenta el ítem anterior y el Lema 19, como no puede aplicarse dos veces sucesivas la operación  $\mathcal{O}_5$ , cada padre tiene al menos  $k - 2 (= 1)$  hijos.
4. Sean  $v_1$  y  $v_2$  padres consecutivos en  $C$ . Si  $v_2$  se añadió al aplicar la operación  $\mathcal{O}_2$  sobre un hijo  $u$  de  $v_1$ , entonces  $u$  es vecino tanto de  $v_1$  como de  $v_2$ . Si  $v_2$  se añadió al aplicar alguna de las operaciones  $\mathcal{O}_3$ ,  $\mathcal{O}_4$  u  $\mathcal{O}_5$  sobre un hijo  $u$  de  $v_1$ , entonces  $u$  es adyacente a un vecino de  $v_2$ . Luego entre  $v_1$  y  $v_2$  hay uno o dos vértices en el camino central.

□

**Ejemplo 29.** *Oruga  $\{4\}$ -romana.*

*Notar que en particular en este ejemplo,  $C$  se construye aplicando 4 operaciones que no son  $\mathcal{O}_1$  ( $\ell = 4$ ). Luego  $C$  tiene 5 padres, los padres tienen al menos  $k - 3$  hijos y entre dos padres consecutivos en el camino central hay uno o dos vértices.*

Habiendo mostrado cómo son las orugas  $\{k\}$ -romanas, vale la pena analizar la minimalidad de las operaciones. Notemos que, siempre que sea posible aplicar las


 Figura 5.5: Ejemplo Oruga  $\{k\}$ -romana ( $k = 4$ ).

operaciones, resulta  $\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_5(C)) = \mathcal{O}_3(C)$  y  $\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_5(C))) = \mathcal{O}_4(C)$ . Sin embargo cada operación tiene sus restricciones, las cuales analizamos en el siguiente lema.

**Lema 20.** *Sea  $C$  una oruga donde  $u$  es hijo de  $v$  y extremo de un camino central. Luego*

1.  $u$  es casi  $\{k\}$ -estable.
2.  $u$  es segundo casi  $\{k\}$ -estable.
3.  $\gamma_{\{Rk\}}(C) < \gamma_{\{Rk\}}^r(C, u)$ .

*Demostración.* Tanto para las funciones casi  $\{k\}$ -romanas, como para las funciones  $\{k\}$ -romanas relativas a  $u$ , la diferencia entre una de estas funciones y una función  $\{k\}$ -romana se da en el peso asignado a  $N[v]$ . Para todos los ítems, sea  $g$  una  $\gamma_{\{Rk\}}(C)$ -función. Luego  $g(N[v]) = k$ .

Para probar los ítems 1 y 2, notemos que  $\gamma_{\{Rk\}}^{n_2}(C, u) \leq \gamma_{\{Rk\}}^{n_1}(C, u) \leq \gamma_{\{Rk\}}(C)$ .

Supongamos que  $f$  es una función segunda casi  $\{k\}$ -romana. Como la diferencia entre una función  $\{k\}$ -romana y una función segunda casi  $\{k\}$ -romana relativa a  $u$  se da en la vecindad de  $v$ , analizamos el peso de  $f$  en  $N[v]$ . Entonces, si  $f(u) = 0$  debe ser  $f(v) = k - 2$ . Pero como  $v$  tiene al menos  $k - 2$  vecinos distintos de  $u$  a los cuales  $f$  debería asignar peso 1, resulta  $f(N[v]) \geq 2k - 4$ . Así,  $f(N[v]) \geq g(N[v]) = k$  para todo  $k \geq 4$ . Luego  $u$  es segundo casi  $\{k\}$ -estable, y también casi  $\{k\}$ -estable.

Para la prueba del ítem 3, sea  $h$  una función  $\{k\}$ -romana relativa a  $u$  de peso mínimo. Si  $h(u) = k - 1$ ,  $h(v) > 0$  y  $h(N[v]) \geq k - 1 + k - 2 + 1 > k$  para todo  $k \geq 3$ . Por otro lado si  $h(u) = k$  y  $h(v) = 0$ ,  $h(N[v]) \geq k + k - 2 > k$  para todo  $k \geq 3$ . En ambos casos  $h(N[v]) > g(N[v])$ . Por lo tanto  $u$  verifica la condición necesaria para aplicar la operación  $\mathcal{O}_5$ .  $\square$

A partir de este lema y del comentario posterior al Ejemplo 29 se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 18.** *Si  $k \geq 4$ , las operaciones  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$  son redundantes en la construcción de orugas  $\{k\}$ -romanas.*

*Demostración.* Del lema anterior se tiene que, dado  $u$  un vértice al que se pueden aplicar las operaciones  $\mathcal{O}_3$  u  $\mathcal{O}_4$ ,  $u$  verifica las condiciones para aplicar  $\mathcal{O}_5$ .  $\square$

## 5.2. Más grafos $\{2\}$ -romanos

En esta sección analizamos condiciones bajo las cuales las operaciones relacionadas con la descomposición modular (join y unión) resultan en grafos  $\{2\}$ -romanos. También estudiamos los módulos indescomponibles que son  $\{2\}$ -romanos para identificar los grafos con pocos  $P_4$ 's inducidos que son  $\{2\}$ -romanos.

Recordemos que dados dos grafos  $G$  y  $H$  la *unión* de  $G$  y  $H$  es el grafo (no conexo)  $G \cup H$  de vértices  $V(G) \cup V(H)$  y aristas  $E(G) \cup E(H)$ . El *join* de  $G$  y  $H$  ( $G \wedge H$ ) tiene como vértices  $V(G) \cup V(H)$ , las aristas de cada grafo y todas las aristas entre vértices de  $V(G)$  y  $V(H)$ .

**Proposición 31.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos y  $m = \min\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$ , entonces

$$\gamma(G_1 \wedge G_2) = \begin{cases} 1 & \text{si y sólo si } m = 1 \\ 2 & \text{si no.} \end{cases}$$

*Demostración.* El caso  $m = 1$  es inmediato. Consideremos  $m \geq 2$ .

Sean  $G_1$  y  $G_2$  con al menos dos vértices y sin vértice universal, y sean  $u \in V(G_1)$  y  $v \in V(G_2)$ . Como  $G_1 \wedge G_2$  no tiene vértice universal, tenemos que  $\gamma(G_1 \wedge G_2) \geq 2$ . Para mostrar la desigualdad opuesta, consideremos el conjunto  $D = \{u, v\}$  en  $G_1 \wedge G_2$ . De la definición de esta operación, dado  $w \in V(G_1 \wedge G_2)$  resulta que  $w \in N_{G_1 \wedge G_2}(u)$  si  $w \in V(G_2)$  o  $w \in N_{G_1 \wedge G_2}(v)$  si  $w \in V(G_1)$ . Esto es,  $D$  es un conjunto dominante y por lo tanto  $\gamma(G_1 \wedge G_2) \leq 2$  como queríamos probar.  $\square$

Gracias a este resultado, el join de dos grafos será un grafo  $\{2\}$ -romano si

- $\gamma(G_1 \wedge G_2) = 1$  y  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 2$ , o
- $\gamma(G_1 \wedge G_2) = 2$  y  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 4$ .

El primer caso ocurre si y sólo si uno de los grafos tiene un vértice universal. Veamos cuándo ocurre el segundo caso.

Por lo demostrado en el Teorema 12,  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) = 4$  si  $\min\{\gamma_{\{R2\}}(G_1), \gamma_{\{R2\}}(G_2)\} \geq 4$  y  $\min\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\} \geq 3$ .

Con el objetivo de analizar qué grafos con pocos  $P_4$  son grafos  $\{2\}$ -romanos, supongamos ahora que tanto  $G_1$  como  $G_2$  se obtienen como join de pares de grafos.

**Teorema 19.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos que se obtienen como join de otros pares de grafos, entonces  $G_1 \wedge G_2$  es  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $G_1$  o  $G_2$  tienen un vértice universal.

*Demostración.* Si alguno de los grafos tiene un vértice universal, entonces  $G_1 \wedge G_2$  tiene un vértice universal y por Lema 2 es un grafo  $\{2\}$ -romano.

Por el contrario, si  $G_1$  ni  $G_2$  tienen vértice universal, como  $\gamma(G_1 \wedge G_2) = 2$  resulta que  $\gamma_{\{R2\}}(G_1 \wedge G_2) \leq 3$  por lo que  $G_1 \wedge G_2$  no es un grafo  $\{2\}$ -romano.  $\square$

**Teorema 20.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos no conexos con  $|V(G_i)| \geq 2$ . Entonces  $G_1 \wedge G_2$  es  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $\gamma(G_i) \geq 3$  para  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* Como  $G_1$  y  $G_2$  son grafos no conexos, no tienen vértice universal, entonces  $\gamma(G_1) > 1$  y  $\gamma(G_2) > 1$ .

Si  $\gamma(G_1) = 2$  o  $\gamma(G_2) = 2$ , se tiene de la Proposición 31 que  $\gamma(G_1 \wedge G_2) = 2$  mientras que, del Teorema 12 se tiene que  $\gamma_{\{R_2\}}(G_1 \wedge G_2) = 3$ . Es decir que  $G_1 \wedge G_2$  no es  $\{2\}$ -romano.

Supongamos ahora que  $\gamma(G_1) \geq 3$  y  $\gamma(G_2) \geq 3$ . Resulta que  $\gamma(G_1 \wedge G_2) = 2$  de la Proposición 31, y  $\gamma_{\{R_2\}}(G_1 \wedge G_2) = 4$  del Teorema 12. Por lo tanto  $G_1 \wedge G_2$  es un grafo  $\{2\}$ -romano.  $\square$

Con estos resultados podemos caracterizar completamente los grafos  $\{2\}$ -romanos para las clases de grafos estudiadas en el Capítulo 4 y para las cuales se conoce su descomposición modular. Sólo nos resta analizar los módulos indescomponibles en estas clases.

**Observación 18.** Los únicos (entre los analizados en las secciones 4.2.2.2 a 4.2.2.5) grafos indescomponibles que son  $\{2\}$ -romanos son los grafos en ZOO:  $P_6$ ,  $C_5^u$  con  $d(u) = 1$ ,  $P_5^u$  particulares, arañas bien etiquetadas que se obtienen aplicando operación  $R_3$  a todas las patas,  $L$ ,  $Q$  y  $M_9$ .

*Demostración.* Como un grafo  $\{2\}$ -romano  $G$  verifica  $\gamma_{\{R_2\}}(G) = 2\gamma(G)$ , y ambos parámetros son números enteros, claramente aquellos grafos para los cuales  $\gamma_{\{R_2\}}(G)$  sea impar no serán grafos  $\{2\}$ -romanos. De la Proposición 19, el número de dominación  $\{2\}$ -romana en una araña es  $|S| + 1$  si es fina y 3 si es gruesa. Luego si  $G$  una araña fina, tiene número de dominación  $|S|$ , ya que tiene  $|S|$  vértices pendientes, por lo que  $C$  es un conjunto dominante. Por lo tanto una araña es un grafo  $\{2\}$ -romano si y sólo si  $|S| = 1$ , es decir que no es una araña.

De la Proposición 20, el número de dominación  $\{2\}$ -romana de una cuasi-araña coincide con el número de dominación de la araña a partir de la cual se obtiene. Por otro lado, como se calculó en [16], una cuasi-araña que se obtiene de una araña fina tiene número de dominación  $|S|$ . Por lo tanto sólo es un grafo  $\{2\}$ -romano si  $|S| = 1$ , que no es una cuasi araña.

De la Proposición 21, si  $G$  es una araña bien etiquetada que se obtiene de aplicar  $R_1$  o  $R_2$  a una araña fina  $\gamma_{\{R_2\}}(G) = |S| + 1$ .

Para todos los casos,  $C$  es un conjunto dominante, luego  $\gamma(G) \leq |S|$ . Por otro lado como una araña fina tiene  $|S|$  vértices pendientes, dos de estos vértices no tienen vecinos en común y el añadir mellizos no modifica esta condición, cada uno de estos vértices o su vecino en  $C$  deben ser elementos de un conjunto dominante  $D$  por lo que resulta  $\gamma(G) \geq |S|$ .

Resulta entonces que una araña bien etiquetada es un grafo  $\{2\}$ -romano sólo en el caso en que se aplica  $R_3$  en  $|S|$  vértices.

Los grafos en ZOO para los cuales  $\gamma_{\{R2\}}(G)$  es par a partir de lo obtenido en las Proposiciones 23 y 25 a 27 son los que se presentan en la Figura 5.6. Como ninguno de estos presenta un vértice universal,  $\gamma(G) \geq 2$ , luego los vértices azules en la figura presentan un conjunto dominante mínimo en cada caso y los grafos  $C_5^u$  con  $d(u) = 1$ ,  $P_5^u$  particulares,  $L$ ,  $Q$  y  $M_9$  son grafos  $\{2\}$ -romanos.

Para los grafos  $J$ ,  $M_1$  y  $M_8$  notar que existen tres vértices pendientes que no tienen vecinos en común, por lo que  $\gamma(G) \geq 3$ . Resulta entonces que estos grafos no son  $\{2\}$ -romanos.

Para el grafos  $K$ , notar que el conjunto dominante mínimo del camino  $P_5$  inducido no domina al vértice  $u$ . Más aún, si  $u \in D$  un conjunto dominante, como  $K \setminus \{N[u]\}$  es un grafo no conexo, no puede dominarse con un único vértice. Por lo tanto  $\gamma(K) \geq 3$ .

Finalmente para el grafo  $M_7$ , como tiene dos vértices pendientes estos vértices o sus vecinos deben estar en cualquier conjunto dominante. Más aún, como los vértices vecinos de los vértices pendientes no dominan a todo el grafo resulta  $\gamma(M_7) \geq 3$ .  $\square$

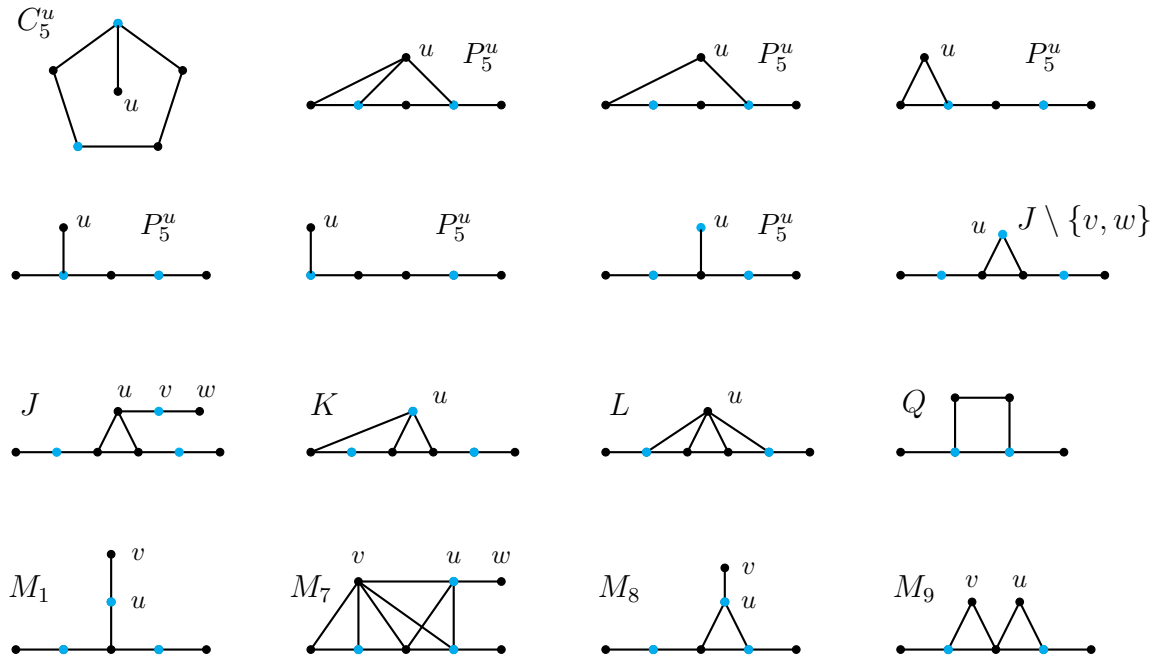


Figura 5.6: Grafos indescomponibles con  $\gamma_{\{R2\}}(G)$  par.



# Capítulo 6

## Conclusiones finales

Esta tesis doctoral se centra en el estudio de los grafos  $\{k\}$ -romanos y la complejidad computacional de dos problemas de decisión asociados a la dominación  $\{k\}$ -romana. A continuación, se presentan las principales conclusiones y resultados obtenidos a lo largo de la investigación:

En el Capítulo 2 se extiende la definición de árbol  $\{k\}$ -romano dada por Wang et al. en [40] a un grafo  $G$  cualquiera para cada entero  $k \geq 2$ . Ésta a su vez generaliza la definición de grafo italiano presentada por Klostermeyer y MacGillivray en [33]. Se demuestra que las clases de grafos  $\{k\}$ -romanos con  $k \geq 2$  forman una secuencia no creciente de clases; es decir que si un grafo es  $\{k+1\}$ -romano entonces es un grafo  $\{k\}$ -romano. Además, se prueba que no existe un grafo  $\{k\}$ -romano para todo  $k \geq 2$ .

Definida la clase de grafos  $\{k\}$ -romanos, se estudia el Problema de Reconocimiento ( $GkR$ ) de esta clase. Respecto a la complejidad computacional de  $GkR$  para el caso  $k = 2$ , a partir de los resultados de Bertossi et al., Kim y Kazemnejad et al. en [3, 31, 32] respectivamente se prueba que  $G2R$  es polinomial cuando nos restringimos a grafos middle.

Para el caso  $k \geq 3$ , se demuestra que  $GkR$  es NP-difícil, incluso cuando nos restringimos a grafos split. Para la prueba de este resultado se introducen nuevas estructuras —los grafos compatibles y fuertemente compatibles con un hipergrafo— y se generalizan los resultados de Bertossi et al., Kim y Kazemnejad et al. en [3, 31, 32] al contexto de hipergrafos. Esto resulta en la caracterización de la propiedad de un grafo  $\{k\}$ -romano a través de la existencia de un matching perfecto en un hipergrafo  $k$ -uniforme con el cual el grafo dado es fuertemente compatible.

Dado que la complejidad computacional de  $G2R$  queda abierta para un grafo general, en el Capítulo 3 se avanza sobre el estudio de los grafos  $\{2\}$ -romanos restringiéndonos a la clase de los grafos split. En particular se define una nueva operación entre grafos split, la split join ( $\wedge_S$ ). Se muestra que esta operación es cerrada dentro de la clase de los grafos  $\{2\}$ -romanos. También, se caracterizan los grafos  $\{2\}$ -romanos que pueden descomponerse en dos grafos split “más pequeños” a través de

esta operación. Sin embargo, no cualquier grafo split puede descomponerse en la split join de otros dos grafos. En relación a los grafos no descomponibles respecto de la operación split join, caracterizamos la propiedad de ser un grafo  $\{k\}$ -romano completamente dentro de dos familias de grafos indescomponibles: los soles  $S_t$  y sus complementos. En particular se obtuvo que los grafos que resultaron  $\{2\}$ -romanos son  $S_t$  con  $t$  par,  $\overline{S_4}$  (isomorfo a  $S_4$ ) y  $\overline{S_5}$ .

Respecto al Problema de dominación  $\{2\}$ -romana (D2R), en el Capítulo 4 se presentaron los avances respecto a la complejidad computacional del problema. Se proporciona una nueva reducción de D2R a DOM (Problema de dominación clásico), la cual es significativamente más sencilla que la reducción a 3-SAT previamente conocida. Esta reducción introduce una prueba alternativa de que D2R es NP-completo en grafos generales e incluso que la complejidad se preserva cuando nos restringimos a grafos cordales, grafos bipartitos planares, grafos bipartitos cordales.

También en este capítulo se estudia el número de dominación  $\{2\}$ -romana bajo distintas operaciones de grafos, lo que nos permite diseñar algoritmos eficientes en múltiples clases de grafos. Por un lado, el problema D2R se sabe polinomial en la clase de grafos árboles [9]. Sin embargo no existen algoritmos prácticos que permitan calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana independientemente de otros números de dominación. En este sentido, diseñamos un algoritmo eficiente que permite calcular el número de dominación  $\{2\}$ -romana en una subclase de los grafos árboles, los grafos oruga, que no depende de ningún otro parámetro.

Por otro lado, se consideran las operaciones relacionadas con la descomposición modular de un grafo. En particular esta descomposición aporta una caracterización para los cografos. Si bien D2R en cografos fue estudiado en [33], nuestro estudio de las operaciones relacionadas con la descomposición modular resulta en un algoritmo eficiente. Más aún, este algoritmo es válido para grafos en las clases para las cuales se conoce la descomposición modular. Esto resulta en un algoritmo que calcula el número de dominación  $\{2\}$ -romana en las superclases de cografos:  $P_4$ -sparse,  $P_4$ -tidy y Partner Limited.

En cuanto a los grafos  $\{k\}$ -romanos, en el Capítulo 5 se presentan ejemplos de estos en las clase de grafos estudiadas en el Capítulo 4. Para las orugas  $\{2\}$ -romanas se considera la caracterización mediante ciertas operaciones, presentada por Henning y Klostermeyer en [27]. Como resultado se obtuvo que la caracterización es minimal incluso para grafos oruga. Para el caso de orugas  $\{k\}$ -romanas con  $k \geq 3$ , consideramos la caracterización presentada por Wang et al. en [40], que generaliza la caracterización dada en [27]. Al contrario de lo esperado, en este caso se obtuvo una mejor descripción de las orugas  $\{k\}$ -romanas, sin embargo las operaciones resultaron no minimales en orugas cuando  $k \geq 4$ . Intuimos que para el caso  $k = 3$  estas operaciones también son minimales, aunque permanece como una pregunta abierta.

Respecto a los grafos con pocos  $P_4$ 's inducidos, primero determinamos cuándo

---

las operaciones relacionadas con la descomposición modular preservan o resultan en un grafo  $\{2\}$ -romano. Para completar el análisis de los grafos  $\{2\}$ -romanos con pocos  $P_4$ 's, y analizamos cuáles de los módulos indescomponibles son  $\{2\}$ -romanos.

Finalmente, en esta tesis quedan líneas de estudio abiertas. Para mencionar alguna, hallar algún tipo de caracterización estructural de la clase de grafos  $\{k\}$ -romanos. Como ya se detalló en esta tesis, estos grafos no cumplen con la propiedad de que sus subgrafos inducidos están dentro de la clase, por lo cual no es factible hallar una caracterización por subgrafos prohibidos. Otra pregunta abierta para la cual tal caracterización podría ser de mucha utilidad, es determinar en general la complejidad computacional del problema de reconocimiento de los grafos  $\{k\}$ -romanos para  $k = 2$ , más allá de los grafos middle para los cuales se pudo probar polinomialidad de ese reconocimiento. Tal como muestra parte de esta tesis, ésto último resultó difícil de llevar a cabo dentro de la clase de los grafos split. De seguir siendo difícil este camino, podrían ser exploradas otras clases de grafos y, en ellas, estudiar cuán difícil es determinar que un grafo de esa clase sea  $\{2\}$ -romano.



# Apéndice A

## Modelo de Programación Lineal Entera para DkR

Proponemos el siguiente modelo de programación lineal entera para DkR que nos sirvió para validar o refutar conjeturas a lo largo de esta tesis. Este modelo se programó en Python usando Jupyter y se resolvieron diferentes instancias usando CPLEX. De esta forma, ingresando un grafo  $G$  de  $n$  vértices y el número  $k$ , obtuvimos un vector  $x = (x_v) \in \{0, \dots, k\}^n$  asociado a una función  $\{k\}$ -romana dominante óptima para la cual  $f(v) = x_v$ .

### Modelo PLE

Consideramos para cada  $v \in V(G)$  la variable  $x_v \in \{0, \dots, k\}$ . Ésta representa la asignación de una función  $f$  al vértice  $v$ , es decir que  $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$  tal que  $f(v) = x_v$ .

Como se quiere obtener una función  $\{k\}$ -romana dominante de peso mínimo, la función objetivo será el peso de la función, ésta es:

$$\sum_{v \in V(G)} x_v$$

Las restricciones son inecuaciones asociadas a que la asignación  $x_v$  resulte una función  $\{k\}$ -romana dominante. Así, si  $x_v = 0$ , la suma de los valores asignados a las variables  $x_u$  con  $u \in N(v)$  debe ser por lo menos  $k$ . Una forma de modelar estas restricciones es la siguiente:

$$\sum_{u \in N[v]} x_u \geq k(1 - x_v) \quad \forall v \in V(G) \quad (\text{A.1})$$

En resumen consideramos el Problema Lineal Entero:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{v \in V(G)} x_v \\
 \text{(PLE)} \quad & \sum_{u \in N[v]} x_u \geq k(1 - x_v) \quad \forall v \in V(G) \\
 & x_v \in \{0, \dots, k\} \quad \forall v \in V(G).
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

**Teorema 21.** *Dado un grafo  $G = (V, E)$  de orden  $n$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $x^* \in \mathbb{Z}^n$  es una solución factible de A.2 si y sólo si  $x^*$  representa las asignaciones de una función que es  $\{k\}$ -romana dominante de  $G$ .*

*Demostración.* Probaremos primero que una  $x^*$  solución factible de A.2 está asociada a una función  $\{k\}$ -romana dominante de  $G$ .

De la definición de las variables,  $x^* \in \{0, \dots, k\}^n$ . Entonces es apropiado definir  $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$  tal que  $f(v) = x_v$ .

Sea ahora  $v \in V(G)$  tal que  $f(v) = 0$ . Por las restricciones A.1, tenemos que  $\sum_{u \in N[v]} x_u \geq k(1 - 0)$  es decir que

$$f(N(v)) = \sum_{u \in N[v]} x_u \geq k.$$

Por lo tanto  $f$  es una función  $\{k\}$ -romana dominante del grafo  $G$ .

Por otro lado, por ser  $g$  una función  $\{k\}$ -romana dominante del grafo  $G$ , y sea  $x_v = g(v)$  para todo  $v \in V(G)$ . De la definición de  $g$ ,  $x$  verifica que pertenece a  $\{0, \dots, k\}^n$ . Analicemos ahora si  $x$  satisface las restricciones A.1.

Por ser  $g$   $\{k\}$ -romana dominante, si  $g(v) = 0$  entonces  $g(N[v]) \geq k$ . Es decir que  $x_v = 0$  y  $\sum_{u \in N[v]} x_u \geq k = k(1 - x_v)$ . Por otro lado, si  $g(v) > 0$  entonces  $x_v \geq 1$  y  $k(1 - x_v) \leq 0$ . Como  $g(u) \geq 0$  para todo  $u \in V(G)$ , en particular  $g(N(v)) \geq 0$ . Luego

$$\sum_{u \in N[v]} x_u = g(N[v]) = g(N(v)) + g(v) \geq k(1 - x_v).$$

Por lo tanto  $x$  es una solución factible del PLE. □

### Código de la función `krom`

```
def krom(G,k):
    modelo = Model(name='kromana')

    # Variables
    X = [modelo.integer_var(name='x_' + str(v), lb=0, ub=k) for v in G]

    # Funcion objetivo
    modelo.minimize(modelo.sum(X[v] for v in G))
```

---

```

# Restricciones
for v in G:
    modelo.add_constraint(modelo.sum(
        X[u] for u in G.neighbors(v)) >= k*(1-X[v]))

# Resolver modelo
sol = modelo.solve() # No imprimimos el log

assert sol, "No se encontró solución"

resumen(modelo, sol) #Imprimimos sólo los datos de interés

def resumen(modelo, sol):
    print(
        "Variables: ", modelo.number_of_variables, ", ",
        "Restricciones: ", modelo.number_of_constraints, ", ",
        "Estado: ", modelo.solve_details.status, ", ",
        "Tiempo: ", modelo.solve_details.time, "s, ",
        "Gap: ", modelo.solve_details.gap, ", ",
        "Valor: ", sol.get_objective_value(), " , "
        "Solucion:", sol.display(),
        "Verificación",
    )

# Verificación
def verif(G,X,k):
    for v in G:
        if X[v] <= 0.5:
            a = sum(X[u] for u in G.neighbors(v))
            if a < k:
                return False
    return True

```





# Apéndice B

## Algunas demostraciones técnicas

**Proposición 28.** Sea  $G = (S, K)$ ,  $G$  primo e  $i \in [1, \ell]$  y  $A_i = \{s_1, s_2, \dots, s_{|A_i|}\}$ . Entonces  $A_i$  es estable grueso o estable fino si y sólo si  $\left| \bigcap_{j=1}^{k+1} N(s_j) \right| = i - k$ , para cada  $k \in [1, i - 1]$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$ , la tesis se cumple por la Observación 14. Para  $k > 1$ , escribamos

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k+1} N(s_j) \right| = \left| \bigcap_{j=1}^k N(s_j) \right| + |N(s_{k+1})| - \left| N(s_{k+1}) \bigcup \bigcap_{j=1}^k N(s_j) \right|.$$

Notemos que  $i \leq \left| \bigcap_{j=1}^k N(s_j) \bigcup N(s_{k+1}) \right| \leq i + 1$  debido a que  $|N(s_{k+1})| = i$  y la Observación 14. Si  $\left| \bigcap_{j=1}^k N(s_j) \bigcup N(s_{k+1}) \right| = i$ , entonces  $\bigcap_{j=1}^k N(s_j) \subseteq N(s_{k+1})$  y  $\left| N(s_{k+1}) \setminus \bigcap_{j=1}^k N(s_j) \right| = k - 1$  y  $\left| [N(s_{k+1}) \setminus \bigcap_{j=1}^k N(s_j)] \cap N(s_j) \right| = k - 2$ , para cada  $j \in [1, k]$ . Pero en un conjunto de  $k - 1$  elementos hay exactamente  $k - 1$  subconjuntos diferentes de tamaño  $k - 2$ . Resulta que dos vértices distintos en  $A_i$  tienen la misma vecindad, y esto contradice la Observación 14. Así,  $\left| N(s_{k+1}) \bigcup \bigcap_{j=1}^k N(s_j) \right| = i + 1$ . De la hipótesis inductiva,  $\left| \bigcap_{j=1}^{k+1} N(s_j) \right| = (i + 1 - k) + i - (i + 1) = i - k$ , y la proposición queda demostrada.  $\square$

**Corolario 8.** Si  $G$  es un grafo primo split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free entonces:

- i. Si  $|A_i| \geq 4$  entonces  $i = 1$  o  $i = \ell$ , luego  $|A_i| \leq 3$  para  $i \in [2, \ell - 1]$ .
- ii.  $B_j \subseteq C_j \subseteq B_i$  para  $j \in [1, i - 2]$  y  $i \in [3, \ell]$ .
- iii. Si  $B_j = \emptyset$  para cada  $j \geq 3$ , entonces  $C'_j = \emptyset$  y  $A_i \subseteq C_i = \emptyset$  para cada  $i \in [1, j - 2]$ .
- iv. Para  $i \in [2, \ell]$ ,  $B_i = \emptyset$  si y sólo si  $|A_i| = i + 1$  or  $A_i = \emptyset$ . Más aún, si  $|A_i| = i + 1$  entonces cada vértice en  $C_i$  es vecino de exactamente  $i$  vértices en  $A_i$ .

v. Si  $|A_i| < 4$ ,  $|A_{i+1}| < 4$  y

- $C_i \cap B_{i+1} = \emptyset$  para  $i = 2, 3$  o
- $B_i \cap B_{i+1} = \emptyset$  para  $i \in [4, \ell - 1]$ ,

entonces  $C_i \subseteq C_{i+1}$  y cada vértice en  $B_i$  no es vecino de a lo sumo un vértice en  $A_{i+1}$ .

vi. Si  $\ell > 2$ , entonces  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_\ell$  son los únicos conjuntos no vacíos entre los  $A_i$  con  $B_i = \emptyset$ .

*Demostración.* i., ii. y iii. se deducen del Lema 15.

iv. Claramente si  $A_i = \emptyset$ , entonces  $B_i = \emptyset$ . Si  $|A_i| \neq \emptyset$ , de la Observación 28  $B_i = \emptyset$  si y sólo si  $|A_i| = i + 1$ . Además, si  $|A_i| = i + 1$  entonces  $|C_i| = i + 1$  y cada vértice en  $C_i$  no es adyacente a un solo vértice en  $A_i$ .

v. Comenzaremos probando que  $C_i \subseteq C_{i+1}$  para cada  $i \in [2, \ell - 1]$ . Para  $i = 2$ , sea  $u \in C_2 \setminus C_3$  y sea  $s' \in A_2$  tal que  $N(s') = \{u, v\}$ . Del ítem 5. en el Lema 15,  $|N(s') \setminus N(s)| \leq 1$  para cada  $s \in A_3$ . Entonces  $v \in B_3$  para todo  $s \in A_3$ , contradiciendo  $C_2 \cap B_3 = \emptyset$ . Para  $i = 3$  el razonamiento es análogo. Para  $i \geq 4$ , sea  $u \in C_i \setminus C_{i+1}$  y  $s' \in A_i$  un vecino de  $u$ . Nuevamente del ítem 5. en el Lema 15,  $|N(s') \setminus N(s)| \leq 1$  para cada  $s \in A_{i+1}$ . Entonces  $N(s') \setminus \{u\} \subseteq N(s)$  para cada  $s \in A_{i+1}$ . Así,  $N(s') \setminus \{u\} \subseteq B_{i+1}$  y  $B_i = \{u\}$  ya que  $B_i \cap B_{i+1} = \emptyset$ . Entonces, cuando  $|A_i| < 4$  tenemos  $|B_i| \geq i - 2$  lo que contradice iv. Por lo tanto  $C_i \subseteq C_{i+1}$ .

Para probar que cada vértice en  $B_i$  no es adyacente a como máximo un vértice en  $A_{i+1}$ , sea  $k' \in B_i$  y  $s_1, s_2 \in A_{i+1} \setminus N(k')$ . Del ítem 5. en el Lema 15,  $|N(s') \setminus N(s_j)| \leq 1$  y entonces  $N(s') \setminus \{k'\} \subseteq N(s_j)$  para cada  $s' \in A_i$  y  $j = 1, 2$ . De la definición de  $C_i$ , tenemos  $C_i \setminus \{k'\} \subseteq N(s_1) \cap N(s_2)$ . Dado que  $|A_i| < 4$  y  $|A_{i+1}| < 4$  tenemos  $i - 1 \leq |C_i \setminus \{k'\}| \leq i + 1$ . Probaremos que de hecho  $|C_i \setminus \{k'\}| = i - 1$ . Si  $|A_i| = 3$  y  $|B_i| = i - 1$  entonces  $|C_i| = i + 2$ . Sin embargo  $|C_i \setminus \{k'\}| \leq |N(s_1) \cap N(s_2)| = i$ , lo cual es una contradicción. Si  $|A_i| = 2$ , o ambos  $|A_1| = 3$  y  $|B_i| = i - 2$ , entonces  $|C_i \setminus \{k'\}| = i$  y por lo tanto,  $C_i \setminus \{k'\} = N(s_1) \cap N(s_2)$  y  $B_{i+1} \subseteq C_i \setminus \{k'\}$ , lo cual contradice la hipótesis para  $i = 2, 3$  ya que  $C_i \cap B_{i+1} = \emptyset$ . Para el caso  $i \geq 4$ , dado que  $B_i \cap B_{i+1} = \emptyset$ , tenemos  $B_i = \{k'\}$ . De la Observación 28,  $|B_i| = i - 1$  lo que implica que  $i = 2$ , llegando de nuevo a una contradicción. Si  $|A_i| = 1$ , entonces  $B_i = C_i$  y, de la hipótesis,  $C_i \cap B_{i+1} = \emptyset$  para  $i \in [2, \ell - 1]$ . Por 5. en el Lema 15,  $|N(s') \setminus N(s_j)| \leq 1$  para  $j = 1, 2$ . Entonces existe  $k'' \in [N(s') \cap N(s_j)]$ , y dado que  $k'' \notin B_{i+1}$ ,  $|A_{i+1}| \geq 3$ . Sea  $s_3 \in A_{i+1}$  (diferente de  $s_1$  y  $s_2$ ). Entonces  $|N(s') \setminus N(s_3)| \leq 1$  y  $k'' \notin N(s_3)$ , lo que significa que  $k' \in N(s_3)$ . Se deduce

de la Observación 14 y el hecho de que  $k'' \in (N(s_1) \cap N(s_2)) \setminus N(s_3)$  que  $N(s_3) \cap N(s_1) = N(s_3) \cap N(s_2)$  y entonces  $s_1 = s_2$ . Por lo tanto, cada vértice en  $B_i$  no es adyacente a como máximo un vértice en  $A_{i+1}$ .

vi. Es directo de i. y iv. □

**Teorema 14.** Sean  $G = (S, K)$  un grafo split  $\{H_1, H_2, \overline{H_1}, \overline{H_2}\}$ -free,  $\ell \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\ell \geq 1$  y los conjuntos  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  para  $i \in [1, \ell]$  anteriormente definidos, e  $i_{\min} = \min_{B_i \neq \emptyset} \{i \in [1, \ell]\}$ . Entonces

$$|A_1| + 1 \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq |A_1| + 3.$$

Más precisamente,

■  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 1$  en los siguientes casos:

- $\ell = 1$ ,
- $\ell = 2$  y  $C_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ,
- $\ell = 3$ ,  $B_3 \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$  e  $i_{\min} = 1$ ,
- $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 2$  y  $C_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 3$ ,  $B_3 \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ .

■  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 2$  en los siguientes casos:

- $\ell = 2$ ,  $B_2 \neq \emptyset$  y  $C_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,
- $\ell = 2$ ,  $B_2 = \emptyset$  y  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ,
- $\ell = 3$ ,  $|A_3| < 4$  y  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 2$ ,  $B_2 \neq \emptyset$  y  $C_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 2$ ,  $B_2 = \emptyset$  y  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$ ,  $i_{\min} = 3$ ,  $|A_3| < 4$  y  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$ ,  $4 \leq i_{\min} \leq \ell - 1$ ,  $B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1} \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ ,
- $\ell \geq 4$  y  $i_{\min} = \ell$ ,

■  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 3$  en cualquier otro caso.

*Demostración.* Si  $\ell = 1$ , por la Observación 14 que  $G$  es una araña fina con partición  $(A_1, C_1, \emptyset)$ . Aplicando la Proposición 19, se obtiene  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 1$ .

Si  $\ell \geq 2$ , de la Proposición 13 y teniendo en cuenta la Observación 14, se sigue que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq |A_1| + 1$ . Mostraremos que esta cota inferior se alcanza en varios casos y, en otros, puede mejorarse. Dividimos el estudio en los casos  $\ell = 2$ ,  $\ell = 3$  y  $\ell \geq 4$ .

**Caso  $\ell=2$ :**

- Si  $B_2 \neq \emptyset$ :
  - Si  $C_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ , entonces se puede construir una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando 2 a cualquier vértice  $u$  en  $B_2$ , 1 a los vértices en  $A_1$  no adyacentes a  $u$ , y 0 a los demás vértices, obteniendo así  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq |A_1| + 1$ .
  - Si  $C_1 \cap B_2 = \emptyset$ , notemos que una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G$ , digamos  $f$  satisface  $f(N_G[s]) \geq 1$  para todo  $s \in A_1$ , y también que no hay vértices en  $A_1$  adyacentes a vértices en  $B_2$ . Entonces una función  $\{2\}$ -romana dominante asigna al menos peso 2 a los vértices en  $B_2 \cup A_2$  (esto puede lograrse asignando 2 a un vértice cualquiera en  $B_2$  y 1 a cada vértice en  $A_1$ ; y para el caso  $|A_2| = 1$ , asignando 1 al vértice en  $A_2$ , 1 a cada vértice en  $A_1$  salvo  $s' \in A_1$ , 2 al vértice en  $C_1$  adyacente a  $s'$  y 0 a los demás vértices). Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq |A_1| + 2$ . Para probar que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq |A_1| + 2$ , notemos que una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  puede construirse asignando 1 a cada vértice en  $A_1$  y 2 a un vértice cualquiera en  $B_2$ .
- Si  $B_2 = \emptyset$ , entonces  $|A_2| = 3$  por el ítem *iv* del Corolario 8. Analicemos los siguientes dos casos exclusivos posibles:
  - $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ : una función  $\{2\}$ -romana dominante asigna peso al menos  $|A_1| + 1$  al grafo  $G[A_1 \cup K]$ . Si esto es así, en el mejor caso la restricción de tal función al subgrafo  $G \setminus s$ , con  $s \in A_2$  es una función  $\{2\}$ -romana dominante (porque del el ítem *iv* del Corolario 8, un vértice en  $C_2$  es adyacente a dos vértices en  $A_2$ ). Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq |A_1| + 2$ . Asignando 2 a un vértice  $u$  en  $C_1 \cap C_2$ , 1 a los vértices en  $A_1 \cup A_2$  no adyacentes a  $u$  (hay uno en cada conjunto) y 0 al resto, se obtiene una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso  $|A_1| + 2$ . Así,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 2$ .
  - $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ : sea  $f$  una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso estrictamente menor que  $|A_1| + 3$ . Claramente en este caso, la restricción de  $f$  a  $A_2 \cup C_2$  es una función Roman  $\{2\}$ -dominante de  $G[A_2 \cup C_2]$ . Como  $f(N_G[A_1]) \geq |A_1|$ , ocurre que  $f(A_2 \cup C_2)$  debe ser como mucho 2. Pero  $G[A_2 \cup C_2]$  es un 3-sol, tiene 6 vértices, ninguno universal ni hay dos vértices no adyacentes de grado 4. Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G[A_2 \cup C_2]) \geq 3$ , implicando que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq |A_1| + 3$ . En total,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 3$ .

**Caso  $\ell=3$ :**

- Si  $B_3 \neq \emptyset$ , entonces  $C_1 \subseteq B_3$  por el ítem *ii* del Corolario 8. Entonces,
  - Si  $|A_2| = \emptyset$ , entonces se puede obtener una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando 2 a un vértice  $u$  en  $C_1$ , 1 a los vértices en  $A_1$  no adyacentes a  $u$ , y 0 al resto de los vértices de  $G$ , implicando que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq |A_1| + 1$ .

- 
- Si  $A_2 \neq \emptyset$  entonces:
    - Si  $C_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ , entonces se puede construir una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando 2 a un vértice cualquiera en  $C_1 \cap B_2$  y 0 a cada vértice en  $A_2$ , implicando que  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq |A_1| + 1$ .
    - Si  $C_1 \cap B_2 = \emptyset$ , entonces:
      - ◊ Si  $|A_3| \geq 4$ , entonces  $A_3$  no es estable fino por el ítem 4 del Lema 15 y  $|B_3| \leq 1$ . Pero por la Observación 14,  $B_3 = \emptyset$ , lo cual lleva a una contradicción.
      - ◊ Si  $|A_3| < 4$ , del ítem 5 del Lema 15,  $N(s') \cap N(s) \neq \emptyset$  para todo  $s \in A_3$  y  $s' \in A_2$ . Si  $C_2 \cap B_3 = \emptyset$  y  $|A_2| \geq 2$ , entonces  $|C_2| = 3$ . Asignando 1 a cada vértice en  $C_2$ , todos los vértices en  $A_2 \cup A_3$  son Roman  $\{2\}$ -dominados ya que  $C_2 \subseteq C_3$  por v. del Corolario 8. Si  $C_2 \cap B_3 = \emptyset$  y  $|A_2| = 1$ , entonces asignando 1 a cualquier vértice en  $A_2$ , 2 a cualquier vértice en  $C_1$  y 0 al resto, se obtiene una función  $\{2\}$ -romana dominante. De otro modo —si  $C_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ — hay dos casos a considerar. Si  $B_2 = \emptyset$ , asignamos 2 a un vértice cualquiera en  $C_2 \cap B_3$  y 1 al vértice en  $A_2$  no adyacente a él; si  $B_2 \neq \emptyset$  y  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$ , asignamos 2 a cualquier vértice en  $B_2 \cap B_3$  se obtiene una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G[A_2 \cup A_3]$ . Cuando  $B_2 \cap B_3 = \emptyset$ ,  $C_2 \subseteq C_3$  y cada vértice en  $A_3$  no es adyacente a lo sumo a un vértice en  $C_2$  del ítem v. del Corolario 8. En este último caso, asignamos 2 a un vértice en  $B_2$  y 1 al vértice no adyacente a él. De esta manera, obtenemos en cada caso una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso  $|A_1| + 2$  ( $|A_1| + 3$ ) si  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$  (si  $B_2 \cap B_3 = \emptyset$ ). notemos que una función  $\{2\}$ -romana dominante asigna al menos peso 3 a  $A_2 \cup A_3$ , ya que  $A_2$  no es adyacente a  $C_1$ , a menos que  $|A_2| = 1$ , en cuyo caso sólo se necesitaría peso 2.
  - Si  $B_3 = \emptyset$ , entonces  $|A_3| = |C_3| = 4$  por el ítem *iv.* en el Corolario 8,  $A_1 = \emptyset$  por el ítem *iii.* en el Corolario 8 y  $C_2 \subseteq C_3$  por el ítem 3 en el Lema 15. Dado que  $B_3 = \emptyset$ , no hay dos vértices no adyacentes de grado  $n - 2$ .
  - Si  $A_2 \neq \emptyset$  y  $B_2 = \emptyset$  entonces  $|C_2| = 3$  del ítem *iv.* en el Corolario 8 y la Observación 14. Asignando 1 a los vértices en  $C_2$  y 0 a cada otro vértice en  $G$ , obtenemos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ , porque cada vértice en  $A_3$  no es adyacente a como máximo un vértice en  $C_2$  ( $|C_3 \setminus C_2| = 1$ ). Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 3 = 3$ . De lo contrario ( $B_2 \neq \emptyset$ ), obtenemos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando 2 a cualquier vértice en  $B_2$ , 1 al vértice en  $A_3$  no adyacente a este, y 0 a los vértices restantes. Entonces,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 3 = 3$ .

- Si  $A_2 = \emptyset$ , asignando 2 a cualquier vértice en  $C_3$ , 1 al vértice en  $A_3$  no adyacente a este, y 0 a los vértices restantes, obtenemos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = |A_1| + 3 = 3$ .

**Case  $\ell \geq 4$ :**

Aplicando el ítem *iii.* del Corolario 8, dado que  $B_i \subset B_{i+2}$  pero posiblemente  $B_i \not\subseteq B_{i+1}$ , consideremos las diferentes posibilidades para  $i_{\min} = \min_{B_i \neq \emptyset} \{i \in [1, \ell]\}$ :

- $i_{\min} \leq 3$ : claramente si  $B_1 \neq \emptyset$  entonces  $|A_1| = 1$  y  $B_1 \subseteq B_j$  para cada  $j \geq 3$ . Sea  $G'$  el subgrafo de  $G$  inducido por  $K \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , y sea  $f$  una  $\gamma_{\{R2\}}$ -función de  $G'$ . Ahora  $f$  puede extenderse a una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  asignando 0 a los vértices en  $V \setminus (K \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ . Luego, procedemos de manera similar al caso  $\ell \leq 3$ .
- $4 \leq i_{\min} \leq \ell - 1$ : en este caso,  $A_1 = \emptyset$  porque  $C_1 \subseteq B_3 = \emptyset$  por el ítem 2 en el Lema 15. Además, debido al ítem *vi.* en el Corolario 8,  $A_i = \emptyset$  para cada  $i \leq k - 1$  pero posiblemente  $A_2$ . Por *ii.* en el Corolario 8,  $C_2 \subseteq B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1}$ .
  - Si  $B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1} = \emptyset$ , entonces  $A_2 = \emptyset$  y no hay un vértice universal en  $G$  ni dos vértices adyacentes a todos los demás excepto entre sí (si no, estarían incluidos en  $B_{i_{\min}}$ , pero esto contradice que  $B_{i_{\min}} \subseteq K$ ). Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G) > 2$ . Sea  $u$  un vértice en  $B_{i_{\min}}$ . Entonces  $u \in B_j$  para  $j = i_{\min}$  y para cada  $j \geq i_{\min} + 2$ . Pero también de *v.* en el Corolario 8,  $u$  no es adyacente a como máximo un vértice en  $A_{i_{\min}+1}$ . Entonces, asignando 2 a  $u$ , 1 al vértice en  $A_{i_{\min}+1}$  que no es adyacente a  $u$ , y 0 a los vértices restantes, construimos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso 3, y entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq 3$ .
  - Si  $B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1} \neq \emptyset$  y  $A_2 \neq \emptyset$ , la prueba es análoga al caso anterior. Entonces, asignando 2 a un vértice  $u$  en  $B_{i_{\min}}$ , 1 al vértice en  $A_2$  que no es adyacente a  $u$ , y 0 a los vértices restantes, construimos una función  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  llegando a  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 3$ .
  - Si  $B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1} \neq \emptyset$  y  $A_2 = \emptyset$ , entonces un vértice en la intersección  $\text{---}B_{i_{\min}} \cap B_{i_{\min}+1}\text{---}$  es un vértice en  $B_j$  para cada  $j \geq i_{\min}$  y por lo tanto, un vértice universal. Entonces  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 2$ .
- $i_{\min} = \ell$ : del ítem *iii.* en el Corolario 8,  $|A_j| = \emptyset$  para  $1 < j < \ell$ , ya que  $B_j = \emptyset$  y  $|A_j| \leq 4$ . Además  $A_1 = \emptyset$  porque  $A_3 = \emptyset$ . Entonces, un vértice en  $B_j$  es un vértice universal y  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 2$ .
- Cuando  $B_i = \emptyset$  para cada  $i$ , del ítem *iv.* en el Corolario 8 tenemos  $|A_\ell| = \ell + 1 \geq 4$ . Entonces no hay un vértice universal ni dos vértices distintos que sean adyacentes a todos los demás excepto entre sí, lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(G) > 2$ .

---

Sea  $s' \in A_\ell$  y consideremos  $A_\ell \setminus \{s'\}$  y  $B'_\ell = \bigcap_{s \in A_\ell \setminus \{s'\}} N(s)$ . notemos que  $B'_\ell \neq \emptyset$  por la Observación 14. Entonces, asignando 2 a cualquier v3rtice en  $B'_\ell$  y 1 a  $s'$ , obtenemos una funci3n  $\{2\}$ -romana dominante de  $G$  con peso 3, lo que implica  $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq 3$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\{R2\}}(G) = 3$ .

□





# Bibliografía

- [1] G. Argiroffo, G. Nasini, and P. Torres. The packing coloring problem for lobsters and partner limited graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 164:373–382, 2014.
- [2] N. Baghirova, C. L. Gonzalez, B. Ries, and D. Schindl. Locally Checkable Problems Parameterized by Clique-Width. In S. W. Bae and H. Park, editors, *33rd ISAAC 2022*, volume 248 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 31:1–31:20, Germany, 2022.
- [3] L. A. Basilio, J. C. Simon, J. Leños, and O. R. Cayetano. The differential on graph operator  $Q(G)$ . *Symmetry*, 12(5):751, 2020.
- [4] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Collection universitaire de mathématiques. Dunod, 1958.
- [5] A. A. Bertossi. Dominating sets for split and bipartite graphs. *Information Processing Letters*, 19(1):37–40, 1984.
- [6] K. Bešter Štorgel, N. Chiarelli, L. Fernández, J. P. Gollin, C. Hilaire, V. Leoni, and M. Milanič. On  $\{k\}$ -Roman graphs. *Procedia Computer Science*, 273:325–332, 2025.
- [7] K. S. Booth and J. H. Johnson. Dominating sets in chordal graphs. *SIAM Journal on Computing*, 11(1):191–199, 1982.
- [8] E. Boros, V. Gurvich, and M. Milanič. Characterizing and decomposing classes of threshold, split, and bipartite graphs via 1-Sperner hypergraphs. *J. Graph Theory*, 94(3):364–397, 2020.
- [9] B. Brešar, M. A. Henning, and D. F. Rall. Rainbow domination in graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 12(1):213–225, 2008.
- [10] M. Chellali, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and A. A. McRae. Roman  $\{2\}$ -domination. *Discrete Applied Mathematics*, 204:22–28, 2016.
- [11] H. Chen and C. Lu. Roman  $\{2\}$ -domination problem in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 42(2):641–660, 2022.

- [12] B. N. Clark, C. J. Colbourn, and D. S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1):165–177, 1990.
- [13] E. Cockayne, S. Goodman, and S. Hedetniemi. A linear algorithm for the domination number of a tree. *Information Processing Letters*, 4(2):41–44, 1975.
- [14] E. Cockayne, P. D. Jr., S. Hedetniemi, and S. Hedetniemi. On Roman domination. *Discrete Math.*, 278:11–22, 2004.
- [15] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *STOC'71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*. New York, USA, ACM Press, 1971.
- [16] P. Dobson, v. Leoni, and G. Nasini. The multiple domination and limited packing problems in graphs. *Information Processing Letters*, 111(23):1108–1113, 2011.
- [17] G. S. Domke, S. T. Hedetniemi, R. C. Laskar, and G. Fricke. Relationships between integer and fractional parameters of graphs. *Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proceedings of the Sixth Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, 1:371–387, 1991.
- [18] J. Dunbar, S. Hedetniemi, M. A. Henning, and A. McRae. Minus domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 199(1-3):35–47, 1999.
- [19] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian J. Math.*, 17:449–467, 1965.
- [20] L. Fernández and V. Leoni. New complexity results on Roman  $\{2\}$ -domination in graphs. *RAIRO-Operations Research*, 57:1905–1912, 2023.
- [21] L. Fernández and V. Leoni. Roman  $\{2\}$ -domination on graphs with "few" 4-paths. *arXiv:2511.17369*, 2025.
- [22] A. J. Ferrari, V. Leoni, and M. I. L. Pujato. Characterizations of italian graphs and sicilian graphs. *RAIRO-Operations Research*, 59(1):239–249, 2025.
- [23] M. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, N.Y., 1979.
- [24] V. Giakoumakis and H. T. F. Roussel. On  $P_4$ -tidy graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 1:17–41, 1997.
- [25] T. Hamada and I. Yoshimura. Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. *Discrete Math.*, 14(3):247–255, 1976.
- [26] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. 1998.

- 
- [27] M. Henning and W. Klostermeyer. Italian domination in trees. *Discrete Appl. Math.*, 217:557–564, 2017.
- [28] C. T. Hoang. Perfect graphs. *PhD thesis, School of Computer Science*, 1985.
- [29] B. Jamison and S. Olariu. Recognizing  $P_4$ -sparse graphs in linear time. *SIAM Journal on Computing*, 21(2):381–406, 1992.
- [30] R. Karp. *Complexity of Computer Computations*, chapter Reducibility among combinatorial problems. Plenum Press, 1972.
- [31] F. Kazemnejad, B. Pahlavsay, E. Palezzato, and M. Torielli. Domination number of middle graphs. *Trans. Comb.*, 12(2):79–91, 2023.
- [32] K. Kim. Italian, 2-rainbow and Roman domination numbers in middle graphs. *RAIRO Oper. Res.*, 58(2):2045–2053, 2024.
- [33] W. Klostermeyer and G. MacGillivray. Roman, italian, and 2-domination. *J. Combin. Math. Combin. Comput*, 108:125–146, 2019.
- [34] R. McConnel and J. Spinrad. *Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs*. Dept. of Computer Science, University of Colorado, co 80309, usa edition, 1993.
- [35] H. Müller and A. Brandstädt. The np-completeness of steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs. *Theoretical Computer Science*, 53(2-3):257–265, 1987.
- [36] C. Padamutham and V. S. R. Palagiri. Complexity of Roman  $\{2\}$ -domination and the double Roman domination in graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(3):1081–1086, 2020.
- [37] A. Poureidi and N. J. Rad. On the algorithmic complexity of Roman  $\{2\}$ -domination (italian domination) research paper. *Iran J Sci Technol Trans Sc*, 44(3):791–799, 2020.
- [38] F. Roussel, I. Rusu, and H. Thuillier. On graphs with limited number of  $P_4$ -partners. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 10(01):103–121, 1999.
- [39] M. Skowrońska and M. M. Sysło. An algorithm to recognize a middle graph. *Discrete Appl. Math.*, 7(2):201–208, 1984.
- [40] C.-X. Wang, Y. Yang, H.-J. Wang, and S.-J. Xu. Roman  $\{k\}$ -domination in trees and complexity results for some classes of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 42:174–186, 2021.



# Índice alfabético

- $P_4$ 
  - sparse, 89
  - tidy, 89
- $S_t$ , 50
- $\gamma_{\{Rk\}}$ -función de  $G$ , 21
- $t$ -sol, 50
- 3-SAT, 24
- DOM, 22
- SAT, 23
- algoritmo
  - eficiente, 23
  - polinomial, 23
- araña, 76
  - bien etiquetada, 78
  - fina, 76
  - gruesa, 76
- arista, 17
- cabeza, 77
- camino, 18
  - central, 65
- ciclo, 18
- clase
  - NP, 23
  - P, 23
- clique, 18
- cografo, 88
- complejidad computacional, 23
- componente conexa, 18
- conjunto
  - dominante, 20
  - conjunto estable
    - fino, 86
    - grueso, 86
  - conjunto independiente, 18
  - cuasi-araña, 78
  - cubrimiento
    - exacto por  $k$ -conjuntos, 42
    - por aristas, 19
  - cuerpo, 77
  - distancia, 18
  - extremos, 17
  - función
    - $\{k\}$ -romana dominante
      - relativa al vértice  $v$ , 97
    - $\{k\}$ -romana dominante, 21
    - casi
      - $\{2\}$ -romana, 91
    - casi  $\{k\}$ -romana dominante, 97
    - segunda casi  $\{k\}$ -romana
      - dominante, 98
  - función de complejidad temporal, 23
  - grado, 17
  - grafo, 17
    - $\{k\}$ -romano, 32
    - bipartito, 18
      - cordal, 57
    - bipartito de incidencia, 39
    - compatible, 38
    - complemento, 18

- conexo, 18
- cordal, 57
- estrella, 18
- fuertemente compatible, 38
- isomorfo, 18
- middle, 37
- planar, 57
- split, 19
- trivial, 17
- hijo, 65
- hiperarista, 19
- hipergrafo, 19
  - 2-uniforme, 19
  - $k$ -uniforme, 19
  - no
    - conexo, 19
- hoja, 18
- indescomponible, 28
- join, 19, 102
- longitud de un camino, 18
- matching perfecto, 20
- mellizo, 63
  - falso, 63
  - verdadero, 63
- NP-completo, 24
- NP-difícil, 24
- NP-hard, 24
- número de dominación, 20
  - $\{k\}$ -romana, 21
- orden de un grafo, 17
- oruga, 65
- padre, 65
- partición
  - araña, 77
  - split, 44
- partición split, 19
- partner, 89
- Partner Limited, 90
- pata, 76
- primos con respecto a la operación
  - split join, 50
- problema
  - de satisfactibilidad booleana, 23
- Problema de dominación, 22
- reducción polinomial, 23
- split join, 45
- subdivisión de aristas, 19
- subgrafo
  - inducido, 17
- suma 1-clique, 58
- transformación polinomial, 23
- unión, 19, 102
  - disjunta, 19
- vecindad, 17
- vecinos, 17
- vértice
  - $\{k\}$ -estable, 98
  - adyacente, 17
  - casi  $\{k\}$ -estable, 98
  - casi estable, 92
  - estable, 92
  - segundo casi  $\{k\}$ -estable, 98
  - stem, 92
  - universal, 17
- vértice pendiente, 17
- vértices, 17
- árbol, 18