

**CENTRO UNIVERSITARIO ROSARIO DE INVESTIGACIONES HIDROAMBIENTALES**

**DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA-EIC**

---

ICDH-D 19-5\_Rev00

# **UNIDAD 5**

## **FLUJO EN CANALES ABIERTOS Y EMBALSES**

Pedro A. Basile

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

2019



Facultad de Ciencias Exactas,  
Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

# UNIDAD 5

## FLUJO EN CANALES ABIERTOS Y EMBALSES

<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>4</b>
<b>2. REVISIÓN DE LOS TIPOS DE FLUJOS EN CANALES ABIERTOS.....</b>	<b>5</b>
<b>3. CLASIFICACIÓN DE ONDAS DE AGUA.....</b>	<b>6</b>
<b>4. FLUJO IMPERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO 1D (FIGV 1D).....</b>	<b>6</b>
<b>4.1 Ecuaciones gobernantes. Modelos hidrodinámicos 1D</b>	
4.1.1 Ecuación de continuidad	
4.1.2 Ecuación de cantidad de movimiento	
<b>4.2 Curva h-Q en flujo impermanente gradualmente variado</b>	
<b>4.3 Clasificación de modelos hidrodinámicos</b>	
4.3.1 Modelo de onda dinámica	
4.3.2 Modelo de onda difusiva	
4.3.3 Modelo de onda cinemática	
<b>4.4 Ondas inerciales</b>	
<b>5. MÉTODO NUMÉRICO DE DIFERENCIAS FINITAS.....</b>	<b>19</b>
<b>5.1 Discretización del dominio espacio-tiempo</b>	
<b>5.2 Esquemas en diferencias finitas</b>	
5.2.1 Esquemas explícitos	
5.2.2 Esquemas implícitos	
5.2.3 Esquemas de predicción-corrección	
<b>5.3 Resolución del modelo de onda dinámica mediante un esquema implícito</b>	
5.3.1 Discretización de términos y coeficientes	
5.3.2 Continuidad y momentum en forma discreta	
5.3.3 Sistema de ecuaciones algebraicas	
5.3.4 Solución del sistema de ecuaciones mediante el método del barrido doble	
5.3.5 Condiciones al contorno	
5.3.6 Descripción del proceso de resolución	
<b>6. FLUJO PERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO 1D (FPGV 1D).....</b>	<b>34</b>
<b>6.1 Ecuaciones gobernantes</b>	
<b>6.2 Relaciones numéricas en una sección</b>	

6.2.1	Energía específica, $E=\text{constante}$ , $f(h,q)=0$	
6.2.2	Energía específica, $q=\text{constante}$ , $f(E,h)=0$	
6.2.3	Cantidad de movimiento, relación $f(M,Q,h)=0$	
<b>6.3</b>	<b>Concepto de pendiente de fondo crítica</b>	
<b>6.4</b>	<b>Perfiles longitudinales del flujo permanente gradualmente variado</b>	
6.4.1	Perfiles tipo M para pendiente de fondo moderada	
6.4.2	Perfiles tipo S para pendiente de fondo fuerte	
<b>6.5</b>	<b>Resolución del FPGV 1D</b>	
6.5.1	Flujo subcrítico	
6.5.2	Flujo supercrítico	
<b>7.</b>	<b>MODELOS PROPAGATORIOS 0D.....</b>	<b>44</b>
<b>7.1</b>	<b>Modelo de Muskingum</b>	
<b>7.1.1</b>	Determinación de parámetros. Método gráfico	
<b>7.1.2</b>	Método de Muskingum-Cunge (MC)	
<b>8.</b>	<b>MODELO INTEGRADO PARA PROPAGACIÓN EN EMBALSES.....</b>	<b>51</b>
<b>8.1</b>	<b>Ecuación de continuidad integrada para el embalse</b>	
<b>8.2</b>	<b>Análisis esquemático de la evolución de la variación de volumen</b>	
<b>8.3</b>	<b>Resolución del tránsito en embalse mediante predicción-corrección</b>	
<b>8.4</b>	<b>Resolución del tránsito en embalse mediante un método explícito</b>	
<b>9.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>58</b>

# UNIDAD 5

## FLUJO EN CANALES ABIERTOS Y EMBALSES

---

### 1. INTRODUCCIÓN

En condiciones de flujo impermanente 1D, la velocidad media en la sección (que indicaremos con  $U$ ) y la profundidad  $h$  cambian a través del tiempo y del espacio. Para flujo permanente 1D, ambas variables cambian solo en el espacio. En canales abiertos el flujo es generalmente impermanente y no uniforme. Esto significa que, para poder realizar la descripción matemática unidimensional del proceso, las dos variables dependientes (velocidad  $U$  y profundidad  $h$ , o caudal  $Q$  y profundidad  $h$ ) deben expresarse en función del tiempo  $t$  y del espacio  $x$ . Por lo tanto, para resolver el problema de flujo impermanente en canales abiertos es necesario contar con dos ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que vinculan tales variables.

En el caso de los modelos hidrodinámicos, las mismas están representadas por la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento o "momentum". La forma diferencial completa de las dos ecuaciones que gobiernan el proceso de flujo impermanente se conocen como ecuaciones de Saint Venant o ecuaciones de onda dinámica. Existen además modelos simplificados de tipo "hidrológico" los cuales se basan en la ecuación de continuidad integrada en un segmento elemental de traslado y en una función de almacenamiento, como por ejemplo el modelo de Muskingum.

Problemas de flujo impermanente en canales abiertos se observan, por ejemplo, como consecuencia de la propagación de crecidas, operación de compuertas en presas, etc. El tipo de ondas que se consideran en tales situaciones son denominadas traslatorias (en contraposición con las ondas oceánicas no traslatorias, periódicas u oscilatorias), longitudinales (porque progresan longitudinalmente en el sentido principal de la corriente) y de aguas poco profundas (ya que toda la sección del canal es perturbada por el paso de la onda).

En esta Unidad se realiza una revisión de los tipos de flujos, se clasifican las ondas de agua de acuerdo a diferentes criterios y se describe cualitativamente el proceso propagatorio de una onda de crecida en un canal. Asimismo, se derivan las ecuaciones gobernantes del flujo impermanente gradualmente variado 1D y se describen los distintos tipos de modelos hidrodinámicos, analizando las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento con sus posibles simplificaciones. Dado que la solución analítica de las ecuaciones es posible bajo hipótesis muy restrictivas, es decir, en casos muy simples e ideales (difíciles de encontrar en la práctica), se presentan técnicas numéricas apropiadas para la solución de las ecuaciones gobernantes. Como caso particular de flujo impermanente, se describe la dinámica del flujo permanente 1D, los posibles perfiles de flujo y su resolución. Se describen los modelos propagatorios 0D y los correspondientes métodos de resolución. Finalmente, se describen modelos integrados para propagación de ondas en embalses y se presentan esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones.

## 2. REVISIÓN DE LOS TIPOS DE FLUJOS EN CANALES ABIERTOS

Considerando los cambios que experimenta la profundidad (o la velocidad) de la corriente hídrica en un canal abierto con respecto al tiempo y al espacio, el flujo puede clasificarse en distintos tipos como se expone en la Tabla 1.

En el caso de flujo permanente las variaciones temporales de la profundidad son nulas y además, dependiendo de que la misma experimente o no variaciones espaciales, el flujo permanente puede ser uniforme o variado. En este último caso la variación espacial puede ser gradual como en los perfiles de remanso (flujo permanente gradualmente variado) o rápida como en un resalto hidráulico (flujo permanente rápidamente variado). Cabe señalar que la constancia del caudal  $Q$  en el espacio y el tiempo, como se verá más adelante, es condición necesaria y suficiente para que las variaciones temporales de profundidad y velocidad sean nulas.

Existe además la posibilidad de definir el flujo como quasi-permanente asumiendo que el caudal  $Q$  pueda variar en el tiempo, pero no en el espacio. En este caso, a cada intervalo de tiempo se le asocia un caudal (constante en dicho intervalo) el cual define un determinado perfil de flujo permanente a lo largo del tramo del canal.

Si las variaciones temporales de la profundidad no son nulas el flujo es impermanente. Análogamente al caso de flujo permanente, este puede ser uniforme (se acepta solo localmente) o variado. En este último caso la variación espacial puede ser gradual como en la propagación de una onda de crecida en un canal natural (flujo impermanente gradualmente variado) o rápida como en la propagación de una onda producida por la rotura de una presa o la apertura brusca de compuertas, resaltos hidráulicos móviles, etc. (flujo impermanente rápidamente variado).

**Tabla 1.** Tipos de flujo en canales abiertos.

Tiempo $t$ como criterio	Espacio $x$ como criterio	
Flujo Permanente $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ $Q = \text{constante} \forall x, t$ $h=f(x)$	Uniforme $\frac{dh}{dx} = 0$	
	No Uniforme o Variado $\frac{dh}{dx} \neq 0$	Gradualmente Variado
		Rápidamente Variado
Flujo Impermanente $\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$ $Q=f(x,t)$ $h=f(x,t)$	Uniforme (solo localmente) $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$	
	No Uniforme o Variado $\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$	Gradualmente Variado
		Rápidamente Variado

### 3. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS DE AGUA

Considerando el movimiento que realizan las partículas de agua durante el traslado de la onda, las ondas pueden definirse no traslatorias, periódicas u oscilatorias cuando las partículas efectúan trayectorias cerradas durante el movimiento, tal como sucede con las ondas oceánicas; mientras que son traslatorias cuando las partículas evolucionan propagándose continuamente en el espacio durante el traslado de la onda, como en el caso de la crecida de un río.

De acuerdo a la dirección de propagación de la onda respecto al sentido principal de la corriente hídrica, las ondas pueden clasificarse en longitudinales o transversales. Las ondas superficiales relevantes que se verifican en ríos y canales son consideradas longitudinales.

Además, las ondas pueden propagarse en aguas profundas, en cuyo caso solo los estratos superficiales serán perturbados, o en aguas poco profundas, perturbando la totalidad de la columna de agua. En ríos y canales se consideran que las ondas se propagan en aguas poco profundas.

Las ondas traslatorias, longitudinales que se propagan en aguas poco profundas pueden a su vez clasificarse de acuerdo a la tasa con que cambia el caudal respecto al espacio en ondas grandes y empinadas de corta longitud (ondas de choque) y ondas largas (como las ondas de crecidas en ríos y embalses).

Otro criterio se relaciona con las fuerzas preponderantes. De esta manera se pueden distinguir ondas gobernadas por gravedad y fricción (generalmente ondas de crecidas en ríos) y ondas gobernadas por la cantidad de movimiento donde la fricción puede ser despreciada (ondas inerciales).

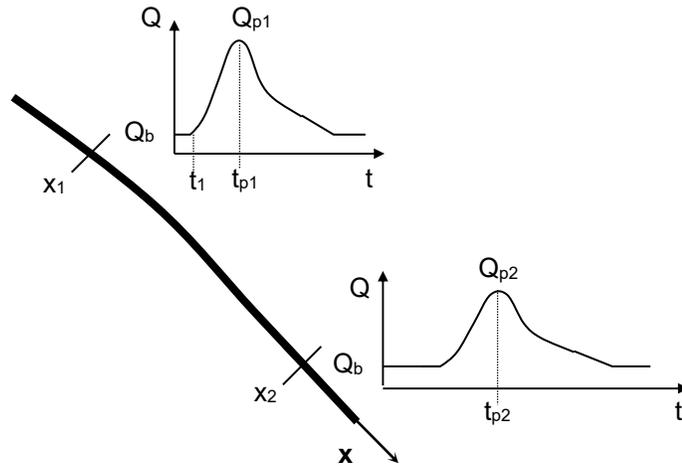
Otro criterio de clasificación se refiere a la frecuencia de ocurrencia. Una onda simple solitaria es una onda que define un régimen de flujo impermanente gradualmente variado que es precedido y seguido por un régimen de flujo permanente. Tal onda presenta una rama ascendente, un pico y una rama descendente y es el ejemplo típico de onda de crecida en un río. Una sucesión de ondas origina un tren de ondas en donde se van superponiendo pico y ramas ascendentes y descendentes.

Respecto a la forma de la onda se encuentran las ondas de una sola rama (ondas monoclinales) y las ondas de dos ramas.

### 4. FLUJO IMPERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO 1D (FIGV 1D)

Una onda superficial es un cambio en la superficie del agua que se propaga en el tiempo y el espacio. Una onda de crecida que se propaga en un tramo de canal o río originará cambios espacio-temporales de las variables relevantes del flujo como la velocidad, el caudal y la profundidad.

Para ilustrar cualitativamente el proceso consideremos un tramo de canal como se muestra en la Figura 1, donde en x1 entra un determinado hidrograma (ver Figura 1).

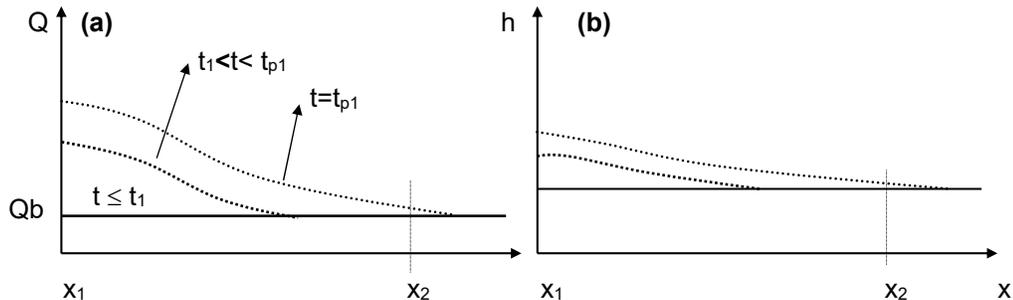


**Figura 1.** Hidrogramas en sección de entrada  $x_1$  y salida  $x_2$ .

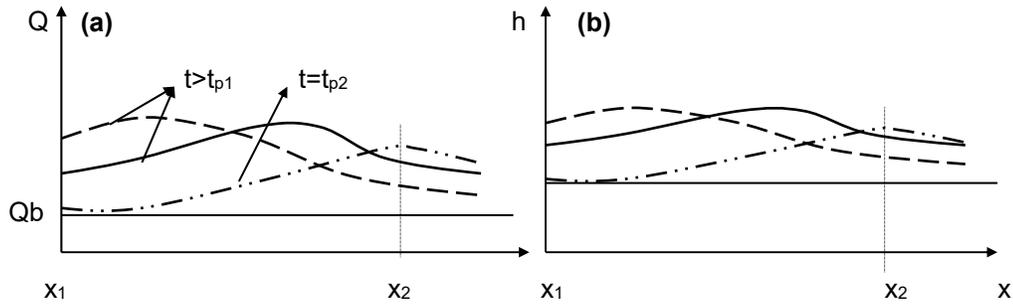
Para  $t \leq t_1$  el caudal en el tramo  $x_1x_2$  será constante e igual a  $Q_b$ , donde  $Q_b$  es el caudal de base. En estas condiciones el flujo en dicho tramo será permanente. A los efectos de clarificar mejor el proceso de propagación supondremos que es además uniforme.

Para  $t > t_1$  el caudal en  $x_1$  comenzará a aumentar hasta alcanzar el máximo valor  $Q_{p1}$  para  $t = t_{p1}$ . Dichos caudales se propagarán aguas abajo como se muestra esquemáticamente en la Figura 2(a). Consecuentemente la profundidad aumentará gradualmente en el tiempo y el espacio como se observa en la Figura 2(b). En estas condiciones el flujo será impermanente gradualmente variado, con el caudal y la profundidad funciones continuas del espacio y del tiempo.

Para  $t > t_{p1}$  el caudal máximo  $Q_{p1}$  ya ha transitado a través de  $x_1$  y ha comenzado la fase propagatoria de la rama descendente del hidrograma. Los caudales en  $x_1$  van disminuyendo progresivamente en el tiempo y el proceso de propagación continúa como se observa en las Figuras 3(a) y 3(b). El caudal en  $x_2$  alcanza el valor máximo  $Q_{p2} < Q_{p1}$  en el tiempo  $t = t_{p2} > t_{p1}$ . Es decir, la onda de crecida experimenta una atenuación  $\Delta Q$ , un retardo  $\Delta t$  y generalmente una cierta difusión, dependiendo sustancialmente de las características topobatimétricas del cauce, que determinan la magnitud y la permanencia de los volúmenes almacenados longitudinal y lateralmente, y de las rugosidades del mismo.



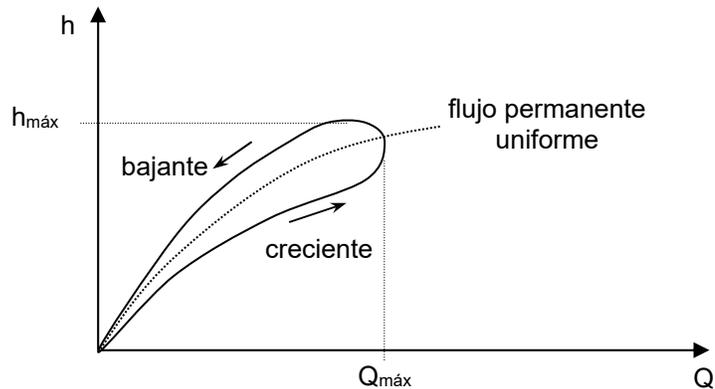
**Figura 2.** Evolución espacio-temporal esquemática de: **(a)** caudales y **(b)** profundidad, durante la fase propagatoria de la rama ascendente del hidrograma en  $x_1$ .



**Figura 3.** Evolución espacio-temporal esquemática de: **(a)** caudales y **(b)** profundidad, durante fase propagatoria rama ascendente y descendente del hidrograma en  $x_1$ .

En el caso de flujo permanente uniforme los caudales y las profundidades en una sección están relacionados mediante una función única. Sin embargo, en condiciones de flujo impermanente, como las descritas precedentemente, los caudales y las profundidades están relacionados mediante dos funciones, una para la fase de creciente y otra para la fase de bajante.

En el caso de flujo impermanente la curva  $h$ - $Q$  asume una forma de lazo como se muestra esquemáticamente en la Figura 4. Se observa que el caudal máximo precede en el tiempo a la profundidad máxima. Es posible demostrar además que la velocidad máxima precede en el tiempo a los dos valores anteriores. Es decir, considerando una sección fija en el espacio, durante la propagación de una onda de crecida se presentarán en sucesión temporal los valores máximos de velocidad, caudal y profundidad respectivamente.



**Figura 4.** Curva  $h$ - $Q$  para flujo impermanente gradualmente variado y flujo permanente uniforme.

#### 4.1 Ecuaciones gobernantes. Modelos hidrodinámicos 1D

Los modelos hidrodinámicos 1D se basan en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento de Barre de Saint Venant (1871), las cuales brindan la representación unidimensional completa del flujo impermanente gradualmente variado en función del caudal

$Q(x,t)$  y de la profundidad  $h(x,t)$ . Ambas variables son dependientes del tiempo  $t$  y del espacio  $x$ .

A los efectos de comprender mejor el significado físico de las ecuaciones y sus diferentes términos, las mismas serán derivadas a partir del lenguaje normal de las palabras, para luego expresarlas matemáticamente en términos discretos y arribar finalmente a la representación en el medio continuo.

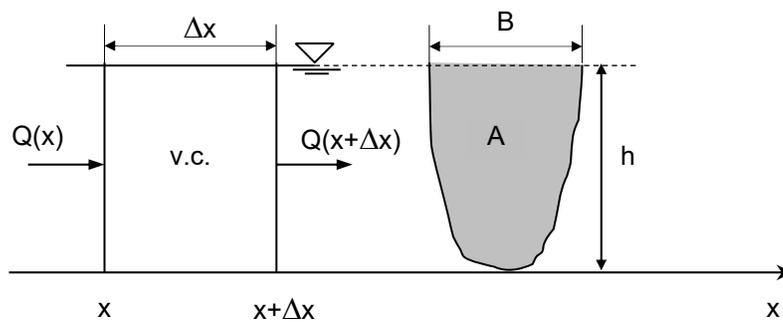
Las hipótesis básicas utilizadas en la derivación de las mismas son:

- El flujo es unidimensional, es decir en cada sección del curso de agua se considera un único valor de velocidad (distribución uniforme) y la superficie del agua es horizontal.
- El flujo es gradualmente variado, por lo tanto, las aceleraciones verticales pueden despreciarse y de consecuencia la presión es la hidrostática.
- El flujo no presenta curvatura acentuada en planta (eje longitudinal aproximadamente recto).
- El ángulo  $\alpha$  que forma el fondo del cauce con la horizontal es pequeño, por lo tanto:  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = \text{tg } \alpha = \text{pendiente del fondo}$ .
- Para describir los efectos de resistencia al flujo se asumen como válidas las ecuaciones utilizadas en el caso de flujo permanente (Chezy, Manning, etc.).
- El fondo es fijo, es decir, no se consideran procesos de erosión/sedimentación del fondo.

#### 4.1.1 Ecuación de continuidad

Consideremos un volumen de control (v.c.) en un tramo de longitud  $\Delta x$  y área  $A$ , como se observa en la Figura 5. La ecuación de continuidad establece la conservación del volumen en el mismo y puede expresarse en palabras como:

Entrada de volumen líquido al v.c.	-	Salida de volumen líquido del v.c.	=	Variación temporal del almacenamiento en el v.c.	(1)
(i)		(ii)		(iii)	



**Figura 5.** Esquemmatización del volumen de control para establecer continuidad.

La expresión (1) puede ser escrita matemáticamente en forma discreta como:

$$\underbrace{[Q(x)\Delta t]}_{(i)} - \underbrace{[Q(x + \Delta x)\Delta t]}_{(ii)} = \underbrace{[A(t + \Delta t)\Delta x - A(t)\Delta x]}_{(iii)} \quad (2)$$

Reordenando y dividiendo la ec. (2) por  $\Delta x \Delta t$  se obtiene:

$$\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} + \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} = 0 \quad (3)$$

donde el primer término del miembro izquierdo de la ec. (3) representa el cociente incremental del área respecto al tiempo y el segundo representa el cociente incremental del caudal respecto al espacio. Pasando al límite para  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene la ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

De la ec. (4) se observa que  $\partial A/\partial t = -\partial Q/\partial x$ . Por lo tanto si el gradiente espacial del caudal es negativo:  $\partial Q/\partial x < 0$  (entra más de lo que sale), el gradiente temporal del área es positivo:  $\partial A/\partial t > 0$  (se almacena). Por el contrario, si el gradiente espacial del caudal es positivo:  $\partial Q/\partial x > 0$  (sale más de lo que entra), el gradiente temporal del área es negativo  $\partial A/\partial t < 0$  (se produce un desalmacenamiento).

El ingreso o egreso de un caudal lateral  $q_l$  por unidad de longitud  $\Delta x$  puede ser fácilmente representado incorporado respectivamente la correspondiente contribución en los términos (i) o (ii) en la ecuación (2).

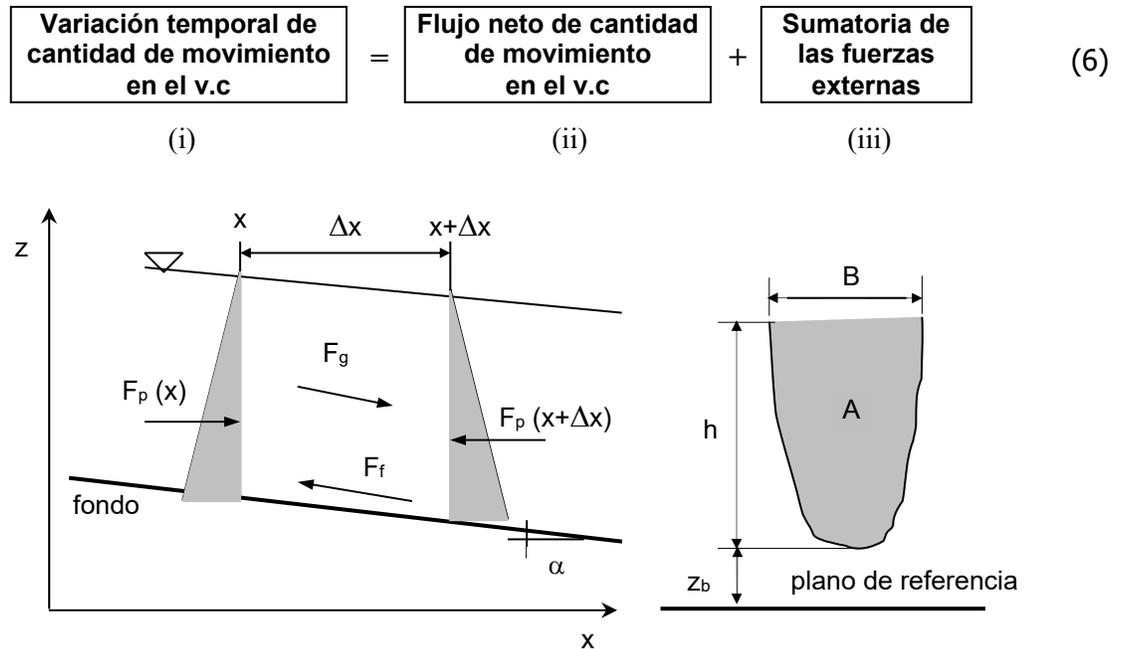
El área es función de la profundidad:  $A=f(h)$ , por lo tanto, la ecuación de continuidad (4) puede escribirse también como:

$$\frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

donde B es el ancho de almacenamiento. Vimos anteriormente que para flujo permanente la derivada temporal de la profundidad es nula  $\partial h/\partial t = 0$ . Por lo tanto, de la ecuación (5) se desprende que en condiciones de flujo permanente el gradiente espacial del caudal es nulo:  $\partial Q/\partial x = 0$ , es decir, el caudal es constante para todo valor de x (y necesariamente constante en el tiempo t).

#### 4.1.2 Ecuación de cantidad de movimiento

Consideremos un volumen de control (v.c.) en un tramo de longitud  $\Delta x$  y área A, como se observa en la Figura 6. La ecuación de cantidad de movimiento plantea la conservación de dicha propiedad y puede expresarse en palabras de la siguiente manera:



**Figura 6.** Esquematación del volumen de control para derivar la ecuación de cantidad de movimiento.

Se define cantidad de movimiento como el producto de la masa ( $\rho A \Delta x$ ) por la velocidad media en la sección transversal (la cual se indica con  $U$ , es decir, se omite la barra superior en  $U$  que simboliza dicha velocidad). La cantidad de movimiento por unidad de longitud es:

$$[\text{Cantidad de movimiento}] = \rho AU$$

El flujo de cantidad de movimiento se obtiene mediante el producto entre cantidad de movimiento y la velocidad:

$$[\text{Flujo de cantidad de movimiento}] = \rho AU^2 = \rho QU$$

Por lo tanto, la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control, expresada matemáticamente en forma discreta, es igual a:

$$(i): \{ [\rho AU]_{t+\Delta t} - [\rho A U]_t \} \Delta x \quad (7)$$

El flujo neto de cantidad de movimiento, es decir la diferencia entre el flujo de cantidad de movimiento en entrada al v.c. y salida del v.c, se expresa como:

$$(ii): \{ [\rho Q U]_x - [\rho Q U]_{x+\Delta x} \} \Delta t \quad (8)$$

Asumimos que las fuerzas externas más importantes, actuantes en el mismo instante  $\Delta t$ , son las de presión, fricción y gravedad. De consecuencia el término (iii) estará compuesto por la sumatoria de las tres fuerzas mencionadas precedentemente:

$$(iii): F_p + F_f + F_g \quad (9)$$

La resultante de las fuerzas de presión es:

$$F_p = \{ [F_p]_x - [F_p]_{x+\Delta x} \} \Delta t \quad (10)$$

La fuerza de fricción, dirigida en sentido contrario al del escurrimiento, se expresa como:

$$F_f = -\tau_b P \Delta x \Delta t = -\rho g A S_f \Delta x \Delta t \quad (11)$$

donde  $\tau_b = \rho g R S_f$  es la tensión de corte media sobre el contorno, P el perímetro mojado, R el radio hidráulico y  $S_f$  es la pendiente de fricción, la cual se asume igual al gradiente de energía necesario para superar las resistencias friccionales en flujo permanente.

La fuerza de gravedad actuante en el sentido del escurrimiento es igual a:

$$F_g = \rho g A \Delta x S_b \Delta t \quad (12)$$

donde  $S_b = -dz_b/dx$  es la pendiente del fondo. La misma es igual a menos el gradiente espacial de la cota del fondo  $z_b$ , dado que esta última disminuye en el sentido positivo de x.

Incorporando las ecuaciones (7), (8), (10), (11) y (12) en la expresión (6) reordenando, dividiendo por  $\Delta x \Delta t$  y pasando al límite para  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene la ecuación dinámica en forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial(AU)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(QU)}{\partial x} + \frac{\partial F_p}{\partial x} - \rho g A S_b + \rho g A S_f = 0 \quad (13)$$

El gradiente de la fuerza de presión se deduce a partir de la integración vertical de la distribución hidrostática de la presión. En el caso más general cuando el ancho  $B=f(x,z)$ , el mismo resulta ser igual a:

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (14)$$

Una de las hipótesis fundamentales consiste en describir los efectos de resistencia al escurrimiento de un flujo impermanente utilizando las ecuaciones válidas en el caso de flujo permanente. Es decir, la pendiente de fricción  $S_f$  puede ser obtenida a través de las ecuaciones de Chezy o Manning:

$$S_f = \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} = \frac{n^2 Q|Q|}{A^2 R^{4/3}} \quad (15)$$

donde C es el coeficiente de Chezy ( $m^{1/2}/s$ ), el cual se relaciona con el coeficiente de rugosidad de Manning n ( $s/m^{1/3}$ ), mediante:  $C = R^{1/6} / n$ .

Introduciendo (14) y una de las (15) en (13) y recordando que  $Q = U A$  se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gAS_b + g \frac{Q|Q|}{C^2AR} = 0 \quad (16)$$

La ecuación (16) plantea la conservación de la cantidad de movimiento y es expresada en función de  $Q$  y  $h$  como se utiliza generalmente en las aplicaciones prácticas. La ecuación de continuidad (4) conjuntamente con la ecuación dinámica (16) constituyen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del flujo impermanente gradualmente variado 1D. Dichas ecuaciones son idénticas a las presentadas en el Unidad 4, punto 12; obtenidas a partir de Navier-Stokes.

La suposición de distribución uniforme de velocidad puede ser flexibilizada considerando la velocidad media ( $Q/A$ ) de una distribución no uniforme en la sección transversal y corrigiendo el segundo término de la ecuación (16) mediante la introducción del coeficiente  $\beta$  de Boussinesq.

La adición de cantidad de movimiento debido al ingreso de un caudal lateral  $q_l$  puede ser representada incorporando la correspondiente contribución en el término (ii) en la ec. (8). Sin embargo, dicha contribución es generalmente despreciable, excepto cuando se trata de caudales sumamente elevados. Asimismo, el efecto de la fuerza del viento actuante sobre el área superficial  $B\Delta x$  puede ser representado considerando la tensión de corte efectiva producida por el viento e incorporando dicha contribución en el término (iii) en la ec. (9).

En la ec. (16) la pendiente del fondo es solo función del espacio ya que  $z_b=f(x)$ , es decir se considera que el fondo permanece fijo en el tiempo. En el caso de procesos de erosión/sedimentación el fondo será *móvil*, es decir la cota del fondo (y por ende la pendiente) serán también función del tiempo. Por lo tanto a las incógnitas  $Q(x,t)$  y  $h(x,t)$  se le agrega una nueva incógnita  $z_b(x,t)$  con  $S_b = - \partial z_b / \partial x$ .

Evidentemente es necesario incorporar una tercera ecuación para resolver el problema de flujo impermanente gradualmente variado considerando además los procesos de erosión/sedimentación (fondo móvil). La misma está representada por otra ecuación diferencial a derivadas parciales conocida como ecuación de continuidad de sedimentos, la cual establece la conservación del volumen sólido (en forma análoga a la conservación del volumen líquido). En este caso el problema aumenta considerablemente su complejidad. Los modelos que describen tales situaciones se denominan modelos morfodinámicos, ya que vinculan la hidrodinámica con los cambios morfológicos asociados a los procesos de erosión/sedimentación.

En el caso de flujo impermanente rápidamente variado, como por ejemplo un resalto hidráulico móvil o una onda de frente abrupto provocada por la rotura de una presa, etc., las ecuaciones diferenciales de Saint Venant no son válidas en las inmediaciones de la discontinuidad. En efecto, la curvatura pronunciada de la superficie libre genera aceleraciones verticales que no pueden ser despreciadas y la distribución de la presión no es la hidrostática, violándose de esta manera una de las hipótesis fundamentales. Además, dichas discontinuidades se desarrollan en longitudes reducidas, menores generalmente que el paso de integración espacial  $\Delta x$  que se utiliza para resolver numéricamente las ecuaciones. Por lo tanto, tales singularidades se tratan generalmente con leyes hidráulicas específicas (método del shock capturing, etc.), que se incorporan como condiciones de borde internas. Aguas arriba y aguas abajo de las discontinuidades las ecuaciones de Saint Venant continúan siendo válidas. Otras condiciones de



### 4.3.1 Modelo de onda dinámica

Cuando todos los términos tienen igual orden de magnitud estamos en presencia del modelo de onda dinámica, el cual representa el caso más general.

Se demuestra que las celeridades de propagación de las perturbaciones en el modelo de onda dinámica son:  $c = U \pm (gh)^{1/2}$ . Es decir, existen dos celeridades reales que determinan como se transmite la información en el plano  $x,t$ :

- En flujo subcrítico (número de Froude  $F < 1$ )  $U < (gh)^{1/2}$ , por lo tanto, una celeridad positiva  $c^+$  transmite información aguas abajo y la otra celeridad negativa  $c^-$  transmite información aguas arriba.
- En flujo supercrítico (número de Froude  $F > 1$ )  $U > (gh)^{1/2}$ , por lo tanto, las dos celeridades son positivas y la información se transmite solamente hacia aguas abajo.

Para la resolución de las ecuaciones del modelo de onda dinámica se requieren condiciones iniciales y al contorno. Las condiciones iniciales (para  $t=0$ ) se representan como  $Q(x,0)=\text{constante}$  y  $h(x,0)=\text{perfil flujo permanente}$ .

Con respecto a las condiciones al contorno, en caso de flujo subcrítico se especifica generalmente el hidrograma de entrada  $Q(x_1,t)$  en el contorno aguas arriba ( $x=x_1$ ) y la curva  $h(x_2,t)=f(Q)$  en el contorno aguas abajo ( $x=x_2$ ). En caso de flujo supercrítico se especifica generalmente:  $Q(x_1,t)$  y  $h(x_1,t)=f(Q)$ , es decir ambas condiciones en el contorno aguas arriba.

Si se desprecia el término de aceleración local se obtiene un modelo ligeramente diferente denominado de onda quasi-dinámica, adecuado para simular ondas que crecen lentamente en el tiempo y se propagan en cauces donde la variación espacial de energía cinética es comparable a la pendiente de la superficie libre y a la pendiente de fricción.

### 4.3.2 Modelo de onda difusiva

El modelo de onda difusiva se obtiene cuando se desprecian los términos de aceleración local y convectiva en la ecuación dinámica. La inclusión del término de gradiente de presión en este modelo es importante ya que permite simular todavía los efectos de remansos creados por estructuras, afluentes u otras singularidades, su ulterior eliminación, como se verá más adelante, no permitirá simular tales efectos.

Combinando la ecuación de continuidad (4) con la ecuación dinámica simplificada, es decir sin los términos de inercia, se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = D_h \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (17)$$

La (17) es una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden con una variable dependiente  $Q(x,t)$ . Representa un proceso típico de convección-difusión unidimensional, donde

el caudal  $Q$  es propagado con celeridad  $c$  y difundido con un coeficiente de difusión hidráulica  $D_h$ . Donde  $c$  y  $D_h$  son iguales a:

$$c = \left. \frac{\partial Q}{\partial A} \right|_{x_0} \quad (18a)$$

$$D_h = \frac{Q}{2BS_f} \quad (18b)$$

Si los términos de inercia son en efecto despreciables la ec. (17) representa un buen modelo para propagar crecidas. Para resolver dicha ecuación se necesitan dos condiciones al contorno, una aguas arriba y otra aguas abajo. Por lo tanto, es capaz de simular efectos de remansos. Las condiciones al contorno son generalmente  $Q(x_1,t)$  y  $Q(x_2,t)$  y la condición inicial  $Q(x,0)$ . Con la ecuación (5) es posible determinar  $h(x,t)$ .

Según Ponce, Li y Simons (1978) el modelo de onda difusiva puede ser utilizado cuando se satisface la siguiente desigualdad:

$$T S_b (g/h_0)^{1/2} \geq 30 \quad (19)$$

donde  $T$  es el período de la onda de crecida y  $h_0$  es la profundidad media del flujo, la cual puede calcularse mediante una ecuación de flujo uniforme utilizando un caudal de referencia  $Q_0 \cong (2/3) Q_p$ , donde  $Q_p$  es el caudal pico (Miller, 1984). Si la expresión (19) es menor que 30 debe utilizarse el modelo de onda dinámica o cuasi-dinámica para obtener resultados satisfactorios en cuanto a celeridad y atenuación de la onda.

### 4.3.3 Modelo de onda cinemática

La simplificación más drástica se realiza cuando se desprecian los términos de aceleración local y convectiva y el término de gradiente de presión. De esta manera se obtiene el modelo de onda cinemática. En este caso la acción de la gravedad se balancea con las resistencias friccionales, es decir, la ecuación dinámica se reduce a una ecuación de flujo localmente uniforme ( $S_b=S_f$ ), quedando descartada la posibilidad de simular efectos de remansos.

En definitiva, el modelo de onda cinemática se basa en la ecuación de continuidad y en una ecuación de flujo uniforme (el flujo se asume localmente uniforme), como por ejemplo la de Chezy:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (20a)$$

$$Q = C A R^{1/2} S_b^{1/2} \quad (20b)$$

La derivada temporal del área  $A$  puede escribirse como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Q} \bigg|_{x_0} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (21)$$

Introduciendo la expresión (21) en la ecuación (20a) y reordenando se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

La (22) es una ecuación diferencial a derivadas parciales de primer orden con una variable dependiente  $Q(x,t)$ . La misma representa un proceso de convección donde el caudal  $Q$  es propagado aguas abajo con una celeridad  $c$ . Donde  $c$  está representada por la ecuación (18a) y es función de la velocidad  $U(x,t)$ . Efectuando la derivada del caudal  $Q$ , dado por la ec. (20b), respecto al área  $A$ , asumiendo canal rectangular ancho, se obtiene:  $c = (3/2) U$ .

Las condiciones iniciales son del tipo  $Q(x,0)$  y se necesita una sola condición de borde  $Q(x_1,t)$  especificada en el contorno aguas arriba. Por lo tanto, no se pueden simular efectos de remansos. Las profundidades  $h(x,t)$  se obtienen a partir de la relación  $h-Q$  una vez calculados los caudales  $Q(x,t)$ .

Al no incorporar los términos de inercia y el gradiente de presión, el modelo de onda cinemática simula ondas que se propagan sin experimentar prácticamente atenuaciones ni difusiones (convección pura). Debido a que las celeridades en proximidad del pico (el cual no se atenúa) son mayores que las celeridades en el frente de la onda (el cual no se difunde) la onda se empina cada vez más a medida que se propaga aguas abajo. Este fenómeno evoluciona en el tiempo y el espacio pudiendo alcanzar lo que se denomina shock cinemático, es decir, la onda se ha empinado de manera tal que el pico supera al frente, lo cual invalida obviamente la solución.

Sin embargo, los esquemas en diferencias finitas utilizados para resolver las ecuaciones (los cuales se describirán sucesivamente) siempre incorporan, en mayor o menor medida, una cierta difusión numérica y por lo tanto el shock cinemático no se presenta.

Según Ponce, Li y Simons (1978) el modelo de onda cinemática puede ser utilizado cuando se satisface la siguiente desigualdad:

$$T S_b (U_0 / h_0) \geq 171 \quad (23)$$

donde  $U_0$  es la velocidad media del flujo asociada a  $Q_0$  y  $h_0$ , definidos precedentemente.

Henderson (1963) observó que las crecidas en ríos con pendientes de fondo  $S_b > 0.002$ , los términos inerciales (aceleración local y convectiva) y el gradiente de presión, son mucho menores que los términos de acción de la gravedad y resistencia por fricción. Es decir, la mayoría de las ondas de crecidas son gobernadas sustancialmente por fricción y gravedad.

#### 4.4 Ondas inerciales

A los efectos de determinar la ecuación de ondas donde preponderan los efectos inerciales expresamos primero la ecuación de continuidad (5) y la ecuación dinámica (16) en función de la velocidad media en la sección  $U$  y la profundidad  $h$ , considerando un canal prismático rectangular. A tal fin las derivadas temporales y espaciales del caudal  $Q=UA=BhU$  se expresan como:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} = UB \frac{\partial h}{\partial x} + Bh \frac{\partial U}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = U \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial t} = -U \frac{\partial Q}{\partial x} + Bh \frac{\partial U}{\partial t} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} = 2U \frac{\partial Q}{\partial x} - U^2 B \frac{\partial h}{\partial x} \quad (26)$$

Reemplazando (24) en (5) se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

Reemplazando (24) en (25) y (26) y sustituyendo estas dos últimas en (16), después de operar algebraicamente, se obtiene la ecuación dinámica en función de  $U$  y  $h$ :

$$U \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_f - S_b) = 0 \quad (28)$$

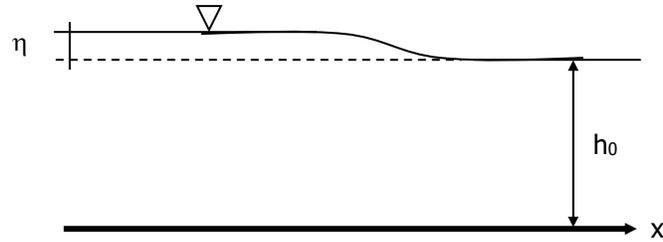
Cuando los efectos inerciales son preponderantes podemos despreciar los efectos de resistencia friccional:  $S_f=0$ . Se asume además que el fondo es horizontal:  $S_b=0$  y que el número de Froude  $F$  es mucho menor que 1, lo cual permite despreciar el término de aceleración convectiva. En efecto, si  $F \ll 1$  el segundo y tercer término de (28) se pueden escribir como:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2} + gh \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{F^2}{2} + 1 \right) gh \right] \approx g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (29)$$

Por lo tanto, la ecuación de momentum se reduce a:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

Ulteriormente se considera (ver Figura) que la altura de la onda  $\eta$  es pequeña comparada con la profundidad inicial  $h_0$ :  $\eta = h - h_0 \ll h_0$ , es decir,  $U \frac{\partial h}{\partial x} \approx 0$ . Por lo tanto, la ec. de continuidad y la ecuación de momentum quedan expresadas como:



Continuidad: 
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

Momentum: 
$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

Derivando (31) respecto a t y (32) respecto a x y luego combinando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (33)$$

(33) es la ecuación de la onda cuya celeridad (velocidad relativa de propagación de la perturbación) es:

$$c = \pm \sqrt{gh_0} \quad (34)$$

La solución en este caso (para velocidad inicial nula) representa ondas que se propagan con celeridad c dada por (34). En el caso de velocidad inicial  $U_0$  no nula la celeridad es:

$$c = U_0 \pm \sqrt{gh_0} \quad (35)$$

Ejemplo de tales ondas son las generadas por ejemplo por la descarga rápida de esclusas, las erogaciones impermanentes de una central hidroeléctrica, etc.

## 5. MÉTODO NUMÉRICO DE DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones diferenciales descritas precedentemente son una representación teórica del flujo impermanente 1D, en las cuales se basan los modelos matemáticos para describir, por ejemplo, la propagación de ondas de crecidas en ríos. Dichas ecuaciones expresan ciertas leyes básicas que gobiernan la evolución del proceso propagatorio en el dominio (x,t) continuo.

La solución analítica exacta de las ecuaciones puede obtenerse solo en algunas situaciones ideales, es decir, considerando en forma extremadamente simplificada las condiciones iniciales y al contorno, los coeficientes, la geometría de las secciones, etc. Por el contrario, en situaciones reales las condiciones iniciales y al contorno son bastante complejas, los coeficientes no son constantes, etc. En esta última situación es posible encontrar soluciones aproximadas, es decir,



## 5.2 Esquemas en diferencias finitas

Utilizando expansiones en series de Taylor es posible aproximar las derivadas de funciones de argumentos continuos en un número finito de puntos y definir además el orden de dicha aproximación. Por ejemplo, la función caudal  $Q$  puede ser expandida en series de Taylor considerando los puntos  $j$  y  $j+1$  al tiempo  $n$  como:

$$Q_{j+1}^n = Q_j^n + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (36)$$

donde  $Q_j^n$  significa el valor del caudal  $Q$  en el punto  $j$  al tiempo  $n$ . Reagrupando y dividiendo la (36) por  $\Delta x$  se obtiene:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n = \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x}{2!} - \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{3!} - O(\Delta x^3) \quad (37)$$

si truncamos la expansión para obtener la aproximación o "regla de traducción" del continuo al discreto:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \approx \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (38)$$

todos los términos restantes en (37) asumen la forma de un error y se los denomina colectivamente error de truncamiento. La (38) constituye un esquema del MDF progresivo en el espacio con una exactitud de aproximación de primer orden  $O(\Delta x)$ , es decir la más baja posible. El orden significa en este caso la potencia de  $\Delta x$  que multiplica la primera derivada eliminada de la expansión. Si se consideran más términos de la expansión el error de truncamiento obviamente disminuye y de consecuencia aumenta la exactitud de aproximación del esquema.

Operando en manera análoga, pero considerando los puntos  $j$  y  $j-1$  al tiempo  $n$ :

$$Q_j^n = Q_{j-1}^n + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (39)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n = \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x}{2!} + \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{3!} + O(\Delta x^3) \quad (40)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \approx \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (41)$$

La (41) constituye un esquema del MDF regresivo en el espacio con una exactitud de aproximación de primer orden  $O(\Delta x)$ .

Sumando miembro a miembro (37) y (40), dividiendo por 2 y eliminando términos se obtiene un esquema del MDF centrado en el espacio con exactitud de segundo orden  $O(\Delta x^2)$ :

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \approx \frac{Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad O(\Delta x^2) \quad (42)$$

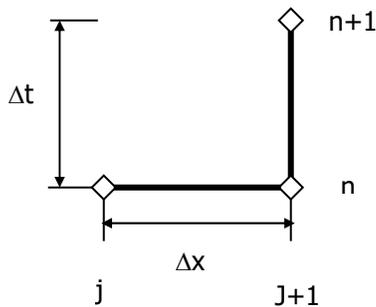
En comparación con los esquemas anteriores, el esquema centrado presenta un mayor orden de exactitud sin incorporar términos adicionales. En este caso, a medida que  $\Delta x$  tiende a cero el error de truncamiento tenderá más rápidamente a cero que en los casos precedentes. Sin embargo, al considerar los puntos  $j-1$  y  $j+1$  el esquema centrado presenta un mayor error de discretización.

El mismo procedimiento realizado anteriormente con las derivadas espaciales puede efectuarse con las derivadas temporales. Para las mismas se utiliza generalmente un esquema progresivo en el tiempo:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_j^n \approx \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t}, \quad O(\Delta t) \quad (43)$$

### 5.2.1 Esquemas explícitos

Un esquema en diferencias finitas es explícito cuando el valor de la función en el tiempo  $n+1$  se calcula con información proveniente exclusivamente del tiempo  $n$ . Por ejemplo, la ecuación de onda cinemática (22) puede ser resuelta utilizando un esquema explícito, mediante la siguiente discretización:



$$\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} + \tilde{c} \frac{(Q_{j+1}^n - Q_j^n)}{\Delta x} = 0 \quad (44a)$$

$$\text{con: } \tilde{c} = \frac{c_{j+1}^n + c_j^n}{2} \quad (44b)$$

explicitando el caudal  $Q_{j+1}^{n+1}$  de la (44a) se obtiene:

$$Q_{j+1}^{n+1} = Q_{j+1}^n - \frac{\tilde{c}\Delta t}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (45)$$

De esta forma, con las condiciones iniciales ( $n=0, j=1,2,\dots,N$ ) y las condiciones al contorno ( $j=0; n=0,1,2,\dots,M$ ), el cálculo avanza en el tiempo y se desarrolla desde el contorno aguas arriba hacia aguas abajo, utilizando siempre información del nivel de tiempo inferior.

Los modelos numéricos basados en esquemas explícitos deben satisfacer ciertas condiciones a los efectos de asegurar su estabilidad. La estabilidad se refiere a la capacidad que tiene el modelo (en definitiva, el esquema) para evitar que los errores crezcan ilimitadamente en forma incontrolada. La condición a satisfacer es que en cada punto computacional el número de Courant  $\sigma$  sea menor o igual que 1:

$$\sigma_j = \frac{c_j \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (46)$$

Experimentos numéricos (ver aplicación más abajo) con  $c =$  constante muestran que para  $\sigma < 1$  el modelo numérico dado por la (45) es estable pero difusivo, para  $\sigma = 1$  es estable y no difusivo y para  $\sigma > 1$  inestable. Es decir, los modelos numéricos basados en esquemas explícitos deben trabajar en el límite de estabilidad. La condición (46) establece un criterio para la selección de las dimensiones de la malla  $\Delta x, \Delta t$ . Generalmente  $\Delta x$  es fijo, por lo tanto, implica una limitación en la selección de  $\Delta t$ .

### **Aplicación del modelo de onda cinemática en un caso esquemático**

Considerando un canal prismático de sección rectangular con ancho  $B = 30$  m, pendiente de fondo  $S_b = 0.0005$  y coeficiente de rugosidad de Manning  $n=0.025$  s/m<sup>1/3</sup>, aplicar el modelo de onda cinemática expresado mediante el esquema numérico explícito (45) para propagar el siguiente hidrograma triangular:

$$Q(t) = \begin{cases} Q_b + \frac{(Q_p - Q_b)}{t_p} t & , \quad 0 \leq t \leq t_p \\ Q_b + \frac{(Q_p - Q_b)}{(t_f - t_p)} (t_f - t) & , \quad t_p < t < t_f \\ Q_b & , \quad t \geq t_f \end{cases}$$

con:  $Q_b = 20$  m<sup>3</sup>/s,  $Q_p = 150$  m<sup>3</sup>/s,  $t_p = 18000$  s y  $t_f = 43200$  s, tramo de longitud  $L = 24$  Km.

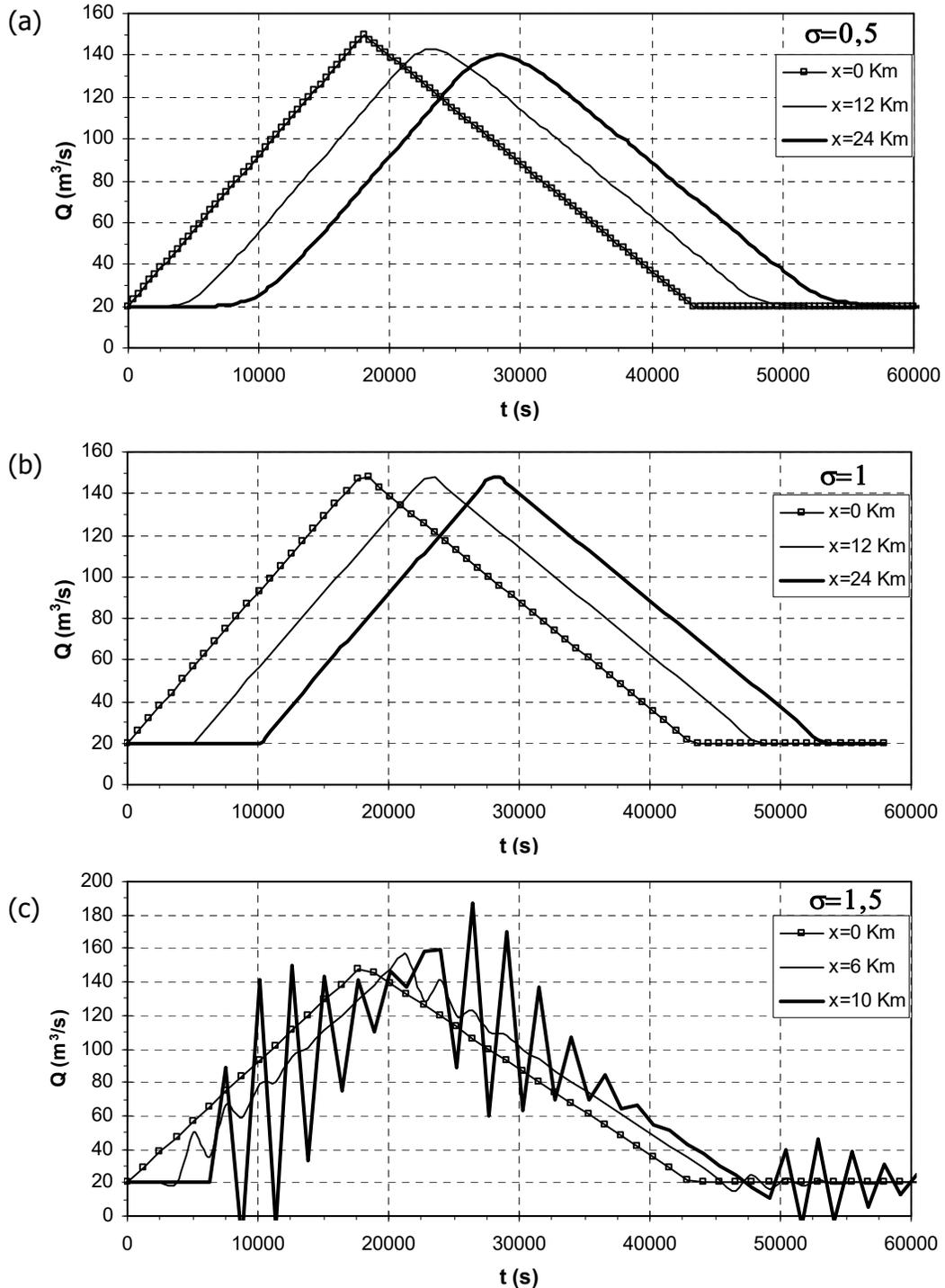
Suponer celeridad  $c$  constante, igual a  $c=(5/3)U_0$ . Adoptar  $\Delta x=2000$  m y analizar que sucede en los siguientes casos: i) Número de Courant:  $\sigma = 0.5$ , ii)  $\sigma=1$ , iii)  $\sigma=1.5$ .

#### **Solución:**

El caudal de referencia es  $Q_0 = (2/3)Q_p = (2/3) 150 = 100$  m<sup>3</sup>/s. Con dicho valor de caudal y los datos especificados se aplica la ecuación de resistencia al flujo de Manning y se obtiene  $h_0=2.333$  m, luego  $c=(5/3)(Q_0/B h_0)=2.381$  m/s. Mediante la condición de Courant (46) se determina el paso de integración temporal para cada uno de los casos: i)  $\Delta t=420$  s, ii)  $\Delta t=840$  s, iii)  $\Delta t=1260$  s. Para cada caso se discretiza el espacio en  $x(m)=j\Delta x$  con  $j=0,1,2,\dots,12$  y el tiempo  $t(s)=n\Delta t$  con  $n=0,1,2,\dots,M$ . Se determina la condición al contorno aguas arriba, es decir el hidrograma de entrada  $Q(0,n\Delta t)$  y la condición inicial  $Q(j\Delta x,0)=Q_b$ . Aplicando el esquema numérico explícito (45) se determinan los hidrogramas en las diferentes secciones.

En la Figura 8(a), (b) y (c); se observan los hidrogramas en algunas secciones para los casos i), ii) y iii) respectivamente. En el caso i) se observa que el modelo numérico es estable, pero presenta una cierta

difusión. Dicha difusión es puramente numérica ya que el modelo teórico de onda cinemática no contempla tal proceso. En el caso ii) el modelo numérico adoptado es estable y no evidencia ningún tipo de difusión, respetando las características del modelo teórico. En el caso iii) el modelo numérico es inestable, es decir genera errores que se amplifican en forma incontrolada. De las simulaciones efectuadas se puede concluir que los modelos numéricos basados en esquemas explícitos deben operar en el límite de estabilidad ( $\sigma \cong 1$ ).

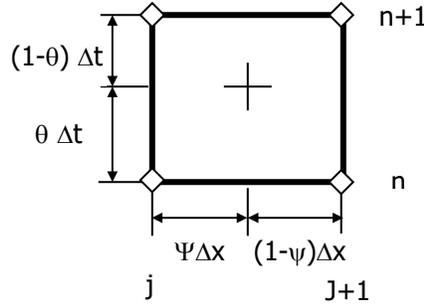


**Figura 8.** (a): Caso i)  $\sigma = 0,5$  (b): Caso ii)  $\sigma = 1$  (c): Caso iii)  $\sigma = 1,5$

### 5.2.2 Esquemas implícitos

Un esquema en diferencias finitas es implícito cuando en el tiempo  $n+1$  existen más funciones incógnitas que ecuaciones algebraicas disponibles. Una manera usual de generar esquemas implícitos es partiendo las derivadas mediante coeficientes de peso.

La ecuación de onda cinemática (22), discretizada utilizando un esquema implícito sería:



$$\left[ (1-\psi) \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} \right] + \tilde{c} \left[ (1-\theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} \right] = 0 \quad (47a)$$

con:

$$\tilde{c} = \theta \frac{c_{j+1}^{n+1} + c_j^{n+1}}{2} + (1-\theta) \frac{c_{j+1}^n + c_j^n}{2} \quad (47b)$$

Los coeficientes de peso asumen valores en el rango  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Para  $\psi=\theta=0$  se obtiene un esquema explícito similar al dado por (44a). Para  $\psi=\theta=1/2$  se obtiene un esquema implícito y perfectamente centrado en  $(j+1/2, n+1/2)$ . Generalmente se adopta  $\psi=1/2$  y se demuestra que para  $\theta > 1/2$  el esquema es estable para cualquier valor del número de Courant. Esto representa una ventaja respecto a los esquemas explícitos ya que no existe limitación en la selección de  $\Delta t$ .

Las ecuaciones discretizadas utilizando esquemas implícitos deben ser resueltas empleando algoritmos matriciales, ya que la solución está "implícita" dentro de un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas.

Los esquemas en diferencias finitas (explícitos e implícitos) deben ser, además de estables, consistentes y convergentes. La consistencia se refiere a una comparación entre ecuaciones. Un esquema será consistente si, partiendo de la ecuación discretizada y realizando expansiones en series de Taylor, se obtiene la ecuación diferencial original para  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  que tienden a cero.

La convergencia se refiere a una comparación de soluciones. En este caso puede ser útil una solución analítica conocida para realizar la comparación. Efectuando simulaciones numéricas con

$\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  manteniendo la relación  $\Delta x/\Delta t = \text{constante}$ , las mismas deberían converger a la solución exacta. Esto puede realizarse en algunos casos simples para los cuales se tiene la solución analítica y es una manera de probar el esquema ya que no existe solución analítica en caso de crecidas reales.

### 5.2.3 Esquemas de predicción-corrección

En algunos casos se utilizan métodos iterativos para resolver esquemas implícitos. En el caso particular de la ecuación (47a) tenemos como incógnitas  $Q_{j+1}^{n+1}$  y  $c_{j+1}^{n+1}$ , para resolverla se puede utilizar un método iterativo de predicción-corrección. El modelo KWAVER (Basile, 1996) utiliza tal abordaje, efectuando la primera predicción con un esquema explícito y corrigiendo sucesivamente con un esquema implícito, hasta que la solución converge en cada punto computacional.

- **Predicción:** (el superíndice P indica predicción)

En la fase de predicción se aplica (44a) y se obtiene un caudal de predicción en el tiempo  $n+1$  con el cual se predice la profundidad  $h$  y la celeridad  $c$  en cada punto computacional del dominio modelado:

$$Q_{j+1}^{n+1,P} \rightarrow h_{j+1}^{n+1,P} = f(Q_{j+1}^{n+1,P}) \rightarrow c_{j+1}^{n+1,P} = f(Q_{j+1}^{n+1,P}, h_{j+1}^{n+1,P}) \quad (48)$$

- **Corrección:** (el superíndice C indica corrección)

En la fase de corrección, con las siguientes expresiones:

$$\tilde{c} = \theta \frac{c_{j+1}^{n+1,P} + c_j^{n+1,P}}{2} + (1 - \theta) \frac{c_{j+1}^n + c_j^n}{2} \quad (49)$$

$$\left[ (1 - \psi) \frac{Q_j^{n+1,C} - Q_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{Q_{j+1}^{n+1,C} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} \right] + \tilde{c} \left[ (1 - \theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1,C} - Q_j^{n+1,C}}{\Delta x} \right] = 0 \quad (50)$$

se determina el caudal corregido en el tiempo  $n+1$ , con el cual se corrige la profundidad  $h$  y la celeridad  $c$ :

$$Q_{j+1}^{n+1,C} \rightarrow h_{j+1}^{n+1,C} = f(Q_{j+1}^{n+1,C}) \rightarrow c_{j+1}^{n+1,C} = f(Q_{j+1}^{n+1,C}, h_{j+1}^{n+1,C}) \quad (51)$$

Posteriormente, para una especificada tolerancia  $\varepsilon$ , se controla:

$$\left| c_{j+1}^{n+1,P} - c_{j+1}^{n+1,C} \right| \begin{cases} \leq \varepsilon \rightarrow \begin{bmatrix} c_{j+1}^{n+1} = c_{j+1}^{n+1,C} \\ Q_{j+1}^{n+1} = Q_{j+1}^{n+1,C} \end{bmatrix} \rightarrow \text{next } j \\ > \varepsilon \rightarrow \begin{bmatrix} c_{j+1}^{n+1,P} = c_{j+1}^{n+1,C} \end{bmatrix} \rightarrow \text{recalcular desde (49)} \end{cases} \quad (52)$$

El esquema de predicción-corrección descrito es eficiente, robusto y aún para número de Courant un orden de magnitud mayor que 1 el esquema es estable.

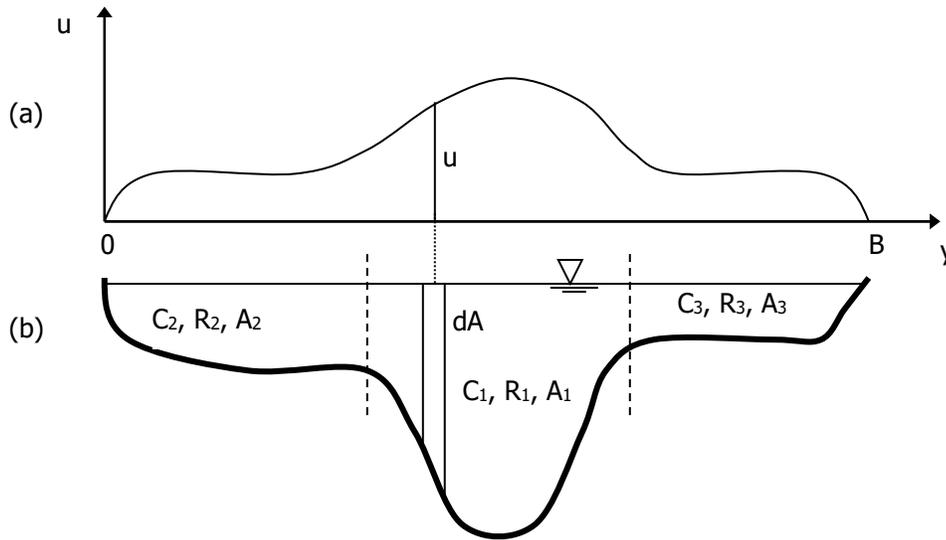
### 5.3 Resolución del modelo de onda dinámica mediante un esquema implícito

La ecuación de continuidad y la ecuación dinámica en el modelo HYDROII (Basile, 1990) se expresan de la siguiente manera:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left( \frac{\partial h}{\partial x} - S_b \right) + gA \frac{Q|Q|}{K^2} = 0 \quad (54)$$

El coeficiente  $\beta$  que aparece en el término de aceleración convectiva es introducido para corregir la hipótesis de perfil de velocidad uniforme en el ancho de la sección transversal, esto es necesario en el caso de secciones compuestas. Efectivamente, en esos casos (ver Figura 9b) el perfil de velocidades (medias en vertical) a lo largo del ancho no es uniforme si no que varía significativamente, adoptando una forma similar a la esquematizada en la Figura 9a.



**Figura 9.** a) Distribución de velocidad. b) Sección transversal compuesta.

Debido a que el flujo de cantidad de movimiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, es evidente que al variar significativamente la velocidad en la dirección transversal la transferencia de momentum a través de la sección:

$$\int_0^B u^2 dA \quad , \quad \rho = \text{constante} \quad (55)$$

no va a ser igual a la que se obtiene considerando un valor de velocidad  $U$  promedio para toda el área  $A$ . Por lo tanto,  $\beta$  es definido mediante:

$$\beta = \frac{\int_0^B u^2 dA}{U^2 A} \quad (56)$$

Para determinar  $\beta$  debemos subdividir la sección en un número determinado de subsecciones. En el modelo HYDROII se pueden considerar tres subsecciones tal como se muestra en la Figura 8b. Cada subsección es caracterizada por su correspondiente radio hidráulico  $R_i$ , su área  $A_i$  y por su rugosidad evaluada mediante el coeficiente de Chezy  $C_i$ . El caudal total  $Q$  puede expresarse mediante:

$$Q = UA = \sum_{i=1}^3 K_i S_f^{1/2} \quad (57)$$

donde  $K_i$  es el factor de conducción de la  $i$ -ésima subsección expresado como:

$$K_i = C_i R_i^{1/2} A_i \quad (58)$$

Introduciendo (58) en (57), despejando  $U$  y elevando al cuadrado se obtiene:

$$U^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^3 C_i R_i^{1/2} A_i S_f^{1/2} \right)^2}{A^2} \quad (59)$$

Expresando (55) en forma discreta (usando la misma ecuación de resistencia dada por (57) para caracterizar la velocidad de cada subsección) se obtiene:

$$\int_0^B u^2 dA = \sum_{i=1}^3 C_i^2 R_i S_f A_i \quad (60)$$

Reemplazando (59) y (60) en (56) y asumiendo  $S_f(y)=S_f=\text{constante}$ , se obtiene:

$$\beta = \frac{A \sum_{i=1}^3 C_i^2 R_i A_i}{\left( \sum_{i=1}^3 C_i R_i^{1/2} A_i \right)^2} \quad (61)$$

### 5.3.1 Discretización de términos y coeficientes

Para discretizar los términos y coeficientes de las ecuaciones gobernantes se utiliza el esquema de Priesmann, conocido también como esquema de cuatro puntos, como expuesto en el punto 6.2.2.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx (1 - \theta) \left[ \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} \right] + \theta \left[ \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx (1 - \theta) \left[ \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x} \right] + \theta \left[ \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx (1 - \psi) \left[ \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} \right] + \psi \left[ \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx (1 - \psi) \left[ \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} \right] + \psi \left[ \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n}{\Delta t} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left( \beta_{j+1}^{n+1/2} \frac{Q_{j+1}^n Q_{j+1}^{n+1}}{A_{j+1}^{n+1/2}} - \beta_j^{n+1/2} \frac{Q_j^n Q_j^{n+1}}{A_j^{n+1/2}} \right)$$

$$\frac{A Q |Q|}{K^2} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{A_j^{n+1/2} Q_j^{n+1} |Q_j^n|}{(K_j^{n+1/2})^2} + \frac{A_{j+1}^{n+1/2} Q_{j+1}^{n+1} |Q_{j+1}^n|}{(K_{j+1}^{n+1/2})^2} \right]$$

$$\beta_j^{n+1/2} = \frac{A_j^{n+1/2} \sum_{i=1}^3 (C_i^2 R_i A_i)_j^{n+1/2}}{\left[ \sum_{i=1}^3 (C_i R_i^{1/2} A_i)_j^{n+1/2} \right]^2}$$

$$K_j^{n+1/2} = \sum_{i=1}^3 (C_i R_i^{1/2} A_i)_j^{n+1/2}$$

$$\tilde{B} = (1 - \psi) \left[ \frac{B_j^n + B_j^{n+1}}{2} \right] + \psi \left[ \frac{B_{j+1}^n + B_{j+1}^{n+1}}{2} \right]$$

$$\tilde{A} = (1 - \psi) \underbrace{\left[ \frac{A_j^n + A_j^{n+1}}{2} \right]}_{A_j^{n+1/2}} + \psi \underbrace{\left[ \frac{A_{j+1}^n + A_{j+1}^{n+1}}{2} \right]}_{A_{j+1}^{n+1/2}}$$

### 5.3.2 Continuidad y momentum en forma discreta

Substituyendo en las ecuaciones (53) y (54) los respectivos términos y coeficientes discretizados en el punto anterior se obtiene:

- Continuidad:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}) + \\ & + \tilde{B} \left[ \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (h_j^{n+1} - h_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

- Momentum

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1} - Q_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n) + \\ & + \frac{\beta_{j+1}^{n+1/2}}{\Delta x A_{j+1}^{n+1/2}} (Q_{j+1}^n Q_{j+1}^{n+1}) - \frac{\beta_j^{n+1/2}}{\Delta x A_j^{n+1/2}} (Q_j^n Q_j^{n+1}) + \\ & + g \tilde{A} \left\{ \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (h_{j+1}^n - h_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) \right] - S_b \right\} + \\ & + \frac{g}{2} \left[ \frac{A_j^{n+1/2} Q_j^{n+1} |Q_j^n|}{(K_j^{n+1/2})^2} + \frac{A_{j+1}^{n+1/2} Q_{j+1}^{n+1} |Q_{j+1}^n|}{(K_{j+1}^{n+1/2})^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

### 5.3.3 Sistema de ecuaciones algebraicas

Reagrupando términos de las ecuaciones (62) y (63) se determinan dos ecuaciones algebraicas lineales en función de las incógnitas  $h_j^{n+1}$ ,  $Q_j^{n+1}$ ,  $h_{j+1}^{n+1}$  y  $Q_{j+1}^{n+1}$ :

$$A1_j Q_j^{n+1} + B1_j h_j^{n+1} + C1_j Q_{j+1}^{n+1} + D1_j h_{j+1}^{n+1} = E1_j \quad (64)$$

$$A2_j Q_j^{n+1} + B2_j h_j^{n+1} + C2_j Q_{j+1}^{n+1} + D2_j h_{j+1}^{n+1} = E2_j \quad (65)$$

de (64) y (62) se tiene que los distintos coeficientes son:

$$A1_j = -\frac{\theta}{\Delta x} \quad B1_j = \frac{\tilde{B}}{\Delta t}(1-\psi) \quad C1_j = \frac{\theta}{\Delta x} \quad D1_j = \frac{\tilde{B}}{\Delta t}\psi$$

$$E1_j = \frac{(1-\theta)}{\Delta x} [Q_j^n - Q_{j+1}^n] + \frac{\tilde{B}}{\Delta t} [(1-\psi)h_j^n + \psi h_{j+1}^n]$$

mientras que, de (65) y (63) se obtiene:

$$A2_j = \frac{(1-\psi)}{\Delta t} - \frac{\beta_j^{n+1/2} Q_j^n}{\Delta x A_j^{n+1/2}} + \frac{g A_j^{n+1/2} |Q_j^n|}{2 (K_j^{n+1/2})^2}$$

$$B2_j = -\frac{g \tilde{A} \theta}{\Delta x}$$

$$C2_j = \frac{\psi}{\Delta t} + \frac{\beta_{j+1}^{n+1/2} Q_{j+1}^n}{\Delta x A_{j+1}^{n+1/2}} + \frac{g A_{j+1}^{n+1/2} |Q_{j+1}^n|}{2 (K_{j+1}^{n+1/2})^2}$$

$$D2_j = \frac{g \tilde{A} \theta}{\Delta x}$$

$$E2_j = \frac{(1-\psi) Q_j^n}{\Delta t} + \frac{\psi Q_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{g \tilde{A}(1-\theta)}{\Delta x} (h_j^n - h_{j+1}^n) + g \tilde{A} S_b$$

### 5.3.4 Solución del sistema de ecuaciones mediante el método del barrido doble

En el sistema lineal de ecuaciones (64) y (65) para N puntos computacionales se determina un sistema de (2N-2) ecuaciones para 2N incógnitas. Con la adición de dos condiciones de borde tal sistema puede ser resuelto mediante el algoritmo del barrido doble, el cual establece las siguientes relaciones de recurrencia para el barrido de solución:

$$Q_j = F_j h_j + G_j \quad (66)$$

$$h_j = H_j Q_{j+1} + I_j h_{j+1} + J_j \quad (67)$$

Nota: en las expresiones anteriores (y de ahora en adelante) se omite el nivel de tiempo de las incógnitas  $h_j$ ,  $Q_j$ ,  $h_{j+1}$ ,  $Q_{j+1}$ , el cual es obviamente  $(n+1)$ .

Sustituyendo (66) en (64) y comparando con (67) se obtienen los siguientes coeficientes auxiliares:

$$H_j = \frac{-C1_j}{A1_j F_j + B1_j}$$

$$I_j = \frac{-D1_j}{A1_j F_j + B1_j}$$

$$J_j = \frac{E1_j - A1_j G_j}{A1_j F_j + B1_j}$$

sustituyendo (67) en (66):

$$Q_j = F_j (H_j Q_{j+1} + I_j h_{j+1} + J_j) + G_j \quad (68)$$

sustituyendo (67) y (68) en (65) y comparando con (66) se obtiene:

$$F_{j+1} = \frac{-(A2_j F_j I_j + B2_j I_j + D2_j)}{(A2_j F_j H_j + B2_j H_j + C2_j)} \quad (69)$$

$$G_{j+1} = \frac{(E2_j - A2_j F_j I_j - A2_j G_j - B2_j J_j)}{(A2_j F_j H_j + B2_j H_j + C2_j)} \quad (70)$$

Las ecuaciones (69) y (70) definen un sistema de relaciones de recurrencia donde cada par  $F_{j+1}$ ,  $G_{j+1}$  depende de los valores previos  $F_j$ ,  $G_j$  y otra información conocida. Tales relaciones son utilizadas para realizar el barrido de eliminación.

### 5.3.5 Condiciones al contorno

Las condiciones al contorno requeridas por el modelo en el caso de flujo subcrítico pueden ser caudales en función del tiempo en el contorno aguas arriba y la relación profundidad-caudal en el contorno aguas abajo. Asimismo, en el contorno aguas abajo se pueden especificar profundidades o caudales en función del tiempo.

- Para el contorno aguas arriba vale:  $Q_j = F_j h_j + G_j \quad (71)$

- Para el contorno aguas abajo vale:  $Q_{jj} = F_{jj} h_{jj} + G_{jj} \quad (72)$

Caso I:  $Q_0$  es especificado,  $Q(x=0,t) = Q(t)$

$$Q_0 = F_0 h_0 + G_0 \rightarrow F_0 = 0 \quad y \quad G_0 = Q$$

Con  $F_0$  y  $G_0$  podemos calcular  $H_0, I_0, J_0$  y calcular desde  $F_1, G_1$  a  $F_{jj}, G_{jj}$ .

Caso II:  $h=f(Q)$  es especificada,  $h(x=L) = f(Q)$

Por ejemplo, en el caso simple cuando  $h=K1 Q$  ( $K1$  coeficiente constante)

$$\left. \begin{array}{l} Q_{jj} = F_{jj} h_{jj} + G_{jj} \\ h_{jj} = K1 Q_{jj} \end{array} \right\} \rightarrow Q_{jj} = F_{jj} K1 Q_{jj} + G_{jj} \rightarrow Q_{jj} = \frac{G_{jj}}{1 - F_{jj} K1}$$

de esta manera podemos calcular  $Q_{jj}$  y luego  $h_{jj}$ .

Caso III:  $Q_L$  es especificado,  $Q(x=L,t) = Q(t)$

$$h_{jj} = (Q_L - G_{jj}) / F_{jj}$$

$$Q_{jj} = Q_L$$

Caso IV:  $h_L$  es especificado,  $h(x=L,t) = h(t)$

$$Q_{jj} = F_{jj} h_L + G_{jj}$$

$$h_{jj} = h_L$$

### 5.3.6 Descripción del proceso de resolución

a) Para los puntos computacionales desde  $j=0$  a  $j=jj-1$  con las condiciones iniciales se calculan los coeficientes:

$$A1_j, B1_j, C1_j, D1_j, E1_j$$

$$A2_j, B2_j, C2_j, D2_j, E2_j$$

b) Con la condición de borde aguas arriba se determina:  $F_0 = 0, G_0 = Q$

c) Con  $F_0$  y  $G_0$  se calculan:  $H_0, I_0, J_0$

d) Con los valores anteriores, utilizando los coeficientes auxiliares, y barriendo desde el contorno aguas arriba hasta el contorno aguas abajo, mediante las relaciones de recurrencia (69) y (70) se calculan los valores:

$F_j, G_j$  desde  $F_1, G_1$  hasta  $F_{jj}, G_{jj}$

Este es el barrido de eliminación.

- e) Con la condición al contorno aguas abajo se determina  $Q_{jj}$  y  $h_{jj}$ .
- f) Con  $Q_{jj}$  y  $h_{jj}$  se inicia un barrido de retorno (hacia el contorno aguas arriba) calculándose mediante las relaciones de recurrencia (67) y (66) los valores de  $h$  y  $Q$  desde  $j=jj-1$  hasta  $j=1$ . Este es el barrido de solución.
- g) Con los valores de las incógnitas calculados en el tiempo  $(n+1)$  se puede iterar y recalcular con los valores medios temporales  $(n+1/2)$  que aparecen en algunos términos y coeficientes (para los cuales se supuso que en el comienzo adoptaran los valores del nivel de tiempo inferior). Generalmente una iteración es suficiente.
- h) Se continúa el cálculo avanzando en el tiempo hasta completar el tiempo total de la simulación.

## 6. FLUJO PERMANENTE GRADUALMENTE VARIADO UNIDIMENSIONAL (FPGV 1D)

### 6.1 Ecuaciones gobernantes

El flujo a superficie libre permanente gradualmente variado exhibe a lo largo del curso variaciones continuas de moderada magnitud de la profundidad, y por lo tanto, de la velocidad media en la sección.

Para flujo permanente  $\partial h/\partial t=0$ , por lo tanto, de la ecuación de continuidad (5) se desprende que el gradiente espacial del caudal es nulo,  $\partial Q/\partial x=0$ , es decir,  $Q=$  constante para todo valor de  $x$  (y necesariamente constante en  $t$ ), considerando un canal prismático rectangular:  $q=Q/B$ :

$$q = U h = \text{const.} \quad (73)$$

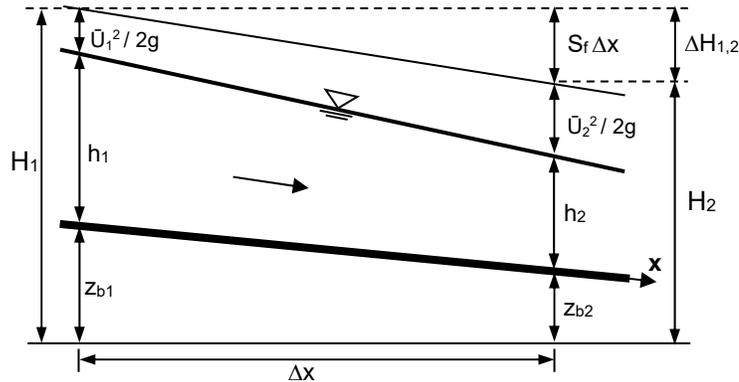
Análogamente, dado que para flujo permanente  $\partial U/\partial t=0$ , de la ecuación dinámica (28) se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{U^2}{2g} + h + z_b \right) = \frac{dH}{dx} = -S_f \quad (74)$$

La ecuación (74) representa un balance de energía mecánica, sus términos pueden ser definidos como energía por unidad de peso del fluido.

El término  $z_b$  es la energía potencial de un peso unitario de fluido respecto a un cierto plano de referencia. El término  $h$  es la energía que brindan las fuerzas de presión hidrostática. El término:  $U^2/2g$  (altura de velocidad o altura cinética), es la energía cinética:  $(1/2)mU^2$ , poseída por la masa fluida  $m$  por unidad de peso del fluido:  $P=\rho gV=mg$ .

Con las consideraciones realizadas, el trinomio entre paréntesis de la (74) representa la suma de las tres formas de energía mecánica (potencial, de presión y cinética) por unidad de peso del fluido, la cual puede indicarse con  $H$  (ver Figura 10).



**Figura 10.** Representación del perfil de flujo permanente gradualmente variado.

Se observa que, debido a las pérdidas de energía, el gradiente espacial de  $H$  es siempre menor que cero ( $dH/dx < 0$ ). El mismo se expresa en función de las características del flujo y de la rugosidad del canal mediante  $S_f$ . Las diferentes fórmulas de resistencia al flujo (Chezy, Manning, etc.) han sido obtenidas para el caso de flujo uniforme. Por lo tanto, se asume que las pérdidas de energía en el flujo permanente gradualmente variado son iguales a las que se presentarían en flujo uniforme para las mismas condiciones de profundidad, caudal y rugosidad.

## 6.2 Relaciones numéricas en una sección

Considerando resistencia friccional despreciable, por lo cual  $S_f=0$ , en (74) el trinomio entre paréntesis es constante en  $x$ . Introduciendo la energía específica  $E$ , referida al fondo del canal ( $z_b=0$ ), se tiene:

$$E = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2gh^2} \quad (75)$$

La (75) evidencia la dependencia funcional  $f(E,h,q)=0$ . Si mantenemos constante una de las tres variables se puede indagar la forma de esta dependencia.

### 6.2.1 Energía específica, $E=\text{constante}$ , $f(h,q)=0$

Considerando  $E$  constante y despejando  $q$  de (75) se obtiene:

$$q = h \sqrt{2g(E - h)} \quad (76)$$

En (76) se observa que  $q=0$  para  $h=0$  y para  $h=E$  (para altura de velocidad igual a cero no existe caudal). Por otra parte,  $q$  es positiva en el rango  $0 < h < E$ , por lo tanto, se puede indagar para qué profundidad el caudal es máximo. Esto se realiza planteando  $dq/dh=0$ , con lo cual se obtiene:

$$E = \frac{3}{2} h_c \quad (77)$$

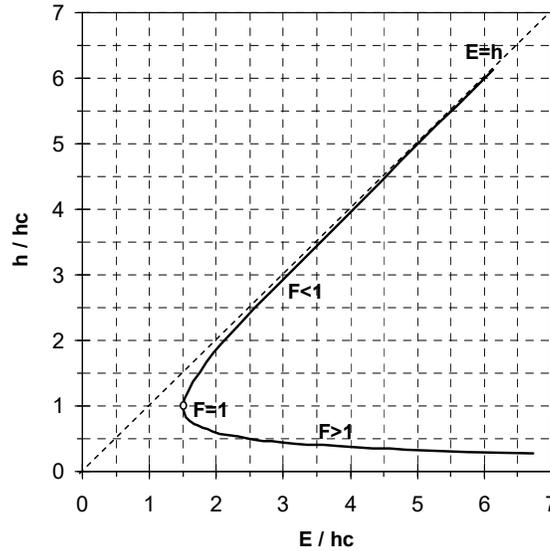
Es decir, la profundidad crítica  $h_c$  es aquella que produce el caudal máximo para  $E$  que se mantiene constante. Reemplazando (77) en (76):



Reemplazando (81) en (75) se determina:

$$E_{\text{mín}} = \frac{3}{2} h_c \quad \text{con: } h_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (82)$$

En la Figura 12 se representa la curva adimensional de energía específica, para  $q$  constante, identificando el mínimo ( $F=1$ ) y las ramas de  $F<1$  y  $F>1$ .



**Figura 2.15 12.** Curva adimensional de energía específica,  $q=\text{constante}$ ,  $f(E,h)=0$ .

Por lo visto, el flujo crítico ( $F=1$ ) representa la condición de máximo caudal para una determinada energía específica y la condición de mínima energía específica para un determinado caudal.

En definitiva, cuando la altura de velocidad es igual a la mitad del tirante, se verifica que el caudal es máximo si  $E=\text{constante}$ , o que la energía específica es mínima si  $q=\text{constante}$ . Ambas situaciones definen un estado del flujo denominado estado crítico. El caso de  $q=\text{constante}$  y  $f(E,h)=0$  es más utilizado en la modelación del flujo permanente gradualmente variado para determinar condiciones de flujo crítico en ciertas secciones.

### 6.2.3 Cantidad de movimiento, relación $f(M,Q,h)=0$

Para flujo permanente ( $\partial Q/\partial t=0$ ), fondo horizontal ( $S_b=0$ ) y resistencias friccionales despreciables ( $S_f=0$ ), la ecuación dinámica de balance de cantidad de movimiento (momentum) del flujo impermanente unidimensional se reduce a:

$$\frac{d}{dx} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{dh}{dx} = 0 \quad (83)$$

Considerando en (83)  $\beta=1$  (para flujo turbulento en un canal prismático no compuesto  $\beta \approx 1$ ), multiplicando por la densidad del agua  $\rho$  y considerando  $A=Bh$ , se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(\rho QU) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\rho gh^2 B}{2}\right) = 0 \quad (84)$$

Donde el primer término representa la variación espacial del flujo de cantidad de movimiento ( $\rho U$ =cantidad de movimiento por unidad de volumen,  $\rho UA=\rho Q$ = caudal másico y  $\rho QU$ =flujo de cantidad de movimiento). Mientras que, el segundo término es la resultante de las fuerzas de presión hidrostática, actuantes en cada extremo del volumen de control. Re-ordenando (84) se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\rho g\left(\frac{Q^2}{gA} + \frac{h^2 B}{2}\right)\right] = 0 \quad (85)$$

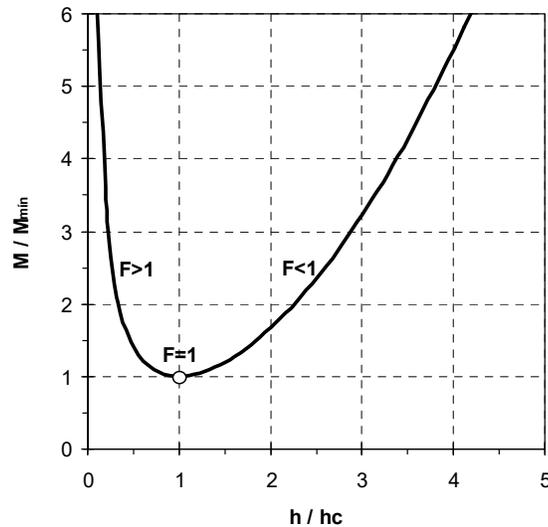
El balance de cantidad de movimiento (momentum) expresado en (83) indica que el mismo no varía en x. Por lo tanto, la función:

$$M = \rho g\left(\frac{Q^2}{gA} + \frac{h^2 B}{2}\right) \quad (86)$$

puede ser analizada en una sección específica, considerando  $Q$ =constante,  $f(M,h)=0$ . El mínimo de la función se encuentra planteando  $dM/dh=0$ , con lo cual se obtiene la condición de flujo crítico dada por (80b). Por lo tanto, reemplazando (80b) en (86) se obtiene el valor mínimo de  $M$  como:

$$M_{\min} = \frac{3}{2} \rho g h_c^2 B \quad (87)$$

En la Figura 13 se presenta la curva adimensional de momenta. En la modelación de un flujo mixto, supercrítico-subcrítico, la ecuación (87) permite individualizar el tramo del canal donde se produce la transición de flujo supercrítico a subcrítico.



**Figura 2.16 13.** Curva adimensional de momenta.

### 6.3 Concepto de pendiente de fondo crítica

La velocidad media en un canal rectangular ancho puede expresarse mediante las ecuaciones de resistencia al flujo de Chezy o Manning. Por lo tanto, igualando dichas ecuaciones con la expresión de la velocidad crítica dada por (79a) y despejando la pendiente, se obtiene:

$$S_{bc} = \frac{g}{C^2} = \frac{gn^2}{h^{1/3}} \quad (88)$$

Donde  $S_{bc}$  es la pendiente de fondo crítica, es decir, para un caudal asignado, es aquella pendiente que debe tener el fondo de un canal para que el flujo uniforme se desarrolle en condiciones críticas ( $F=1$ ).

### 6.4 Perfiles longitudinales del flujo permanente gradualmente variado

Consideremos la ecuación (74) de flujo permanente:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{dh}{dx} + \frac{dz_b}{dx} = -S_f \quad (89)$$

Dado que la altura de velocidad (altura cinética) es función de la profundidad  $h$ , la ecuación (89) es posible expresarla como:

$$\left[ 1 + \frac{d}{dh} \left( \frac{U^2}{2g} \right) \right] \frac{dh}{dx} + \frac{dz_b}{dx} = -S_f \quad (90a)$$

Reemplazando en (90a), con ayuda de la ecuación de continuidad:  $U=q/h$ , realizando la derivada respecto a  $h$  de la altura de velocidad, considerando  $dz_b/dx=-S_b$  y despejando  $dh/dx$ , se obtiene:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_b}{(1-F^2)} \left( 1 - \frac{S_f}{S_b} \right) \quad (90b)$$

La relación  $S_f/S_b$  se puede determinar a partir de una ecuación de resistencia para flujo permanente gradualmente variado que exprese  $S_f$  y otra para flujo uniforme que exprese  $S_b$ , de esta manera se obtiene:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_b}{(1-F^2)} \left[ 1 - \left( \frac{h_u}{h} \right)^a \right] \quad (90c)$$

donde,  $h_u$  es la profundidad de flujo uniforme y  $h$  es la profundidad genérica del flujo permanente gradualmente variado, con  $a=3$  (Chezy) o  $a=10/3$  (Manning), para un canal rectangular ancho.

La ecuación (90c) permite indagar los posibles perfiles del flujo permanente gradualmente variado. En principio,  $dh/dx$  depende de  $S_b$  y de  $h$ , por lo tanto, de acuerdo a los valores de la pendiente de fondo podemos dividir los perfiles en cinco clases. Además, teniendo en cuenta el valor que asume la profundidad genérica  $h$ , respecto a las profundidades de flujo uniforme  $h_u$  y crítico  $h_c$ , se pueden distinguir en total 13 tipos diferentes de perfiles del flujo permanente gradualmente variado (ver Tabla 2).

**Tabla 2.** Resumen de tipos de perfiles de flujo permanente gradualmente variado.

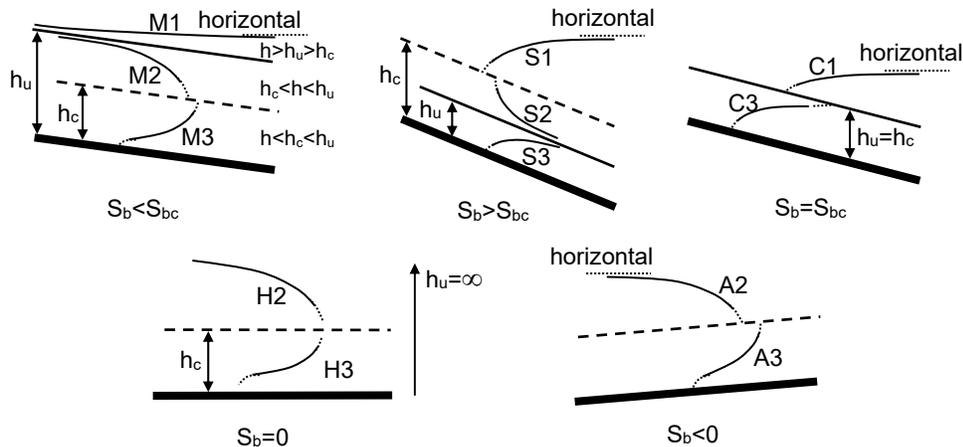
Pendiente del fondo	h respecto a $h_u$ y $h_c$	Perfil Tipo	Signo $[1-(h_u/h)^3]$	Signo $(1-F^2)$	Signo $dh/dx$	Clasificación de flujo
Moderada ( $S_b < S_{bc}$ )	$h > h_u > h_c$	M1	+	+	+	Subcrítico desacelerado
	$h_u > h > h_c$	M2	-	+	-	Subcrítico acelerado
	$h < h_c < h_u$	M3	-	-	+	Supercrítico desacelerado
Fuerte ( $S_b > S_{bc}$ )	$h > h_u > h_c$	S1	+	+	+	Subcrítico desacelerado
	$h_c > h > h_u$	S2	+	-	-	Supercrítico acelerado
	$h < h_u < h_c$	S3	-	-	+	Supercrítico desacelerado
Crítica ( $S_b = S_{bc}$ )	$h > h_u = h_c$	C1	+	+	+	Subcrítico desacelerado
	$h = h_u = h_c$	C2	?	?	?	$dh/dx = 0/0$
	$h < h_u = h_c$	C3	-	-	+	Supercrítico desacelerado
Horizontal ( $S_b = 0$ )	$h > h_c$	H2	-	+	-	Subcrítico acelerado
	$h < h_c$	H3	-	-	+	Supercrítico desacelerado
Adversa ( $S_b < 0$ )	$h > h_c$	A2	-	+	-	Subcrítico acelerado
	$h < h_c$	A3	-	-	+	Supercrítico desacelerado

Para pendiente de fondo moderada, fuerte y crítica, existen tres casos, en todos ellos  $S_b > 0$ . El flujo uniforme no existe en el caso de pendiente de fondo horizontal ( $S_b = 0$ ) y adversa ( $S_b < 0$ ).

Los perfiles tipo M1 y S1 se denominan curvas de remanso. El perfil M1 es uno de los más conocidos y se observa en muchos ríos como consecuencia de controles aguas abajo (presas, puentes, estrechamientos, etc.). Si el flujo uniforme es subcrítico y no tiene suficiente energía para superar un control aguas abajo, debe ganar energía para alcanzar la energía requerida, aumentando la profundidad y consecuentemente disminuyendo la velocidad (M1, flujo subcrítico desacelerado).

En el caso que el flujo uniforme aguas arriba del control sea supercrítico, la única forma de ganar energía es generando un resalto para pasar a flujo subcrítico y, en esa condición, alcanzar la energía requerida aumentando la profundidad (perfil tipo S1, flujo subcrítico desacelerado).

Los perfiles M2 y S2 (también H2 y A2) se denominan curvas de llamada, ya que un control aguas abajo produce una progresiva disminución de la profundidad y un aumento de la velocidad hacia el mismo (flujo subcrítico/supercrítico acelerado). En la Figura 14 se presentan los distintos perfiles resumidos en la Tabla 2.



**Figura 14.** Perfiles de flujo permanente gradualmente variado.

Analicemos, en particular, los perfiles tipo M y tipo S, para pendiente de fondo moderada y fuerte, respectivamente.

#### 6.4.1 Perfiles tipo M para pendiente de fondo moderada

Para pendiente de fondo moderada ( $S_b < S_{bc}$ ) y, de acuerdo al valor que asume la profundidad de flujo genérica  $h$  respecto a las profundidades  $h_u$  y  $h_c$ , podemos distinguir tres casos.

i) *Tipo M1* ( $h > h_u > h_c$ )

En este caso  $h > h_c$ , el flujo es subcrítico ( $F < 1$ ), la relación  $h_u/h < 1$ , por lo tanto, de (90c) resulta  $dh/dx > 0$  presentando un perfil cóncavo hacia arriba. Por continuidad,  $dU/dx < 0$ , es decir, el flujo es desacelerado.

Para  $h \rightarrow h_u$ ,  $dh/dx \rightarrow 0$  ( $h = \text{const.} = h_u$ ) el perfil tiende asintóticamente al de flujo uniforme. Para  $h \rightarrow \infty$ ,  $h_u/h \rightarrow 0$ ,  $F \rightarrow 0$ ,  $dh/dx \rightarrow -dz_b/dx$ , es decir, el perfil tiende a la horizontal.

ii) *Tipo M2* ( $h_u > h > h_c$ )

En este caso  $h > h_c$ , el flujo es subcrítico ( $F < 1$ ), la relación  $h_u/h > 1$ , por lo tanto, de (90c) resulta  $dh/dx < 0$  presentando un perfil cóncavo hacia abajo. Por continuidad,  $dU/dx > 0$ , es decir, el flujo es acelerado.

Para  $h \rightarrow h_u$ ,  $dh/dx \rightarrow 0$  ( $h = \text{const.} = h_u$ ) el perfil tiende asintóticamente al de flujo uniforme. Para  $h \rightarrow h_c$ ,  $F \rightarrow 1$ ,  $dh/dx \rightarrow \infty$ , es decir, el perfil tiende a atravesar el crítico con un ángulo finito.

iii) *Tipo M3* ( $h < h_c < h_u$ )

En este caso  $h < h_c$ , el flujo es supercrítico ( $F > 1$ ), la relación  $h_u/h > 1$ , por lo tanto, de (90c) resulta  $dh/dx > 0$ , por continuidad,  $d\bar{U}/dx < 0$ , es decir, el flujo es desacelerado.

Para  $h \rightarrow h_c$ ,  $F \rightarrow 1$ ,  $dh/dx \rightarrow \infty$ , es decir, el perfil tiende a atravesar el perfil crítico con un ángulo finito. Para  $h \rightarrow -\infty$ ,  $dh/dx \rightarrow -dz_b/dx$  el perfil tiende a atravesar el fondo con un ángulo finito.

#### 6.4.2 Perfiles tipo S para pendiente de fondo fuerte

Para pendiente de fondo fuerte ( $S_b > S_{bc}$ ) y, de acuerdo al valor que asume la profundidad de flujo genérica  $h$  respecto a las profundidades  $h_u$  y  $h_c$ , podemos distinguir tres casos.

i) *Tipo S1* ( $h > h_u > h_c$ )

En este caso  $h > h_c$ , el flujo es subcrítico ( $F < 1$ ), la relación  $h_u/h < 1$ , por lo tanto, de (90c) resulta  $dh/dx > 0$  presentando un perfil cóncavo hacia abajo. Por continuidad,  $dU/dx < 0$ , es decir, el flujo es desacelerado.

Para  $h \rightarrow \infty$ ,  $h_u/h \rightarrow 0$ ,  $F \rightarrow 0$ ,  $dh/dx \rightarrow -dz_b/dx$ , es decir, el perfil tiende a la horizontal. Para  $h \rightarrow h_c$ ,  $dh/dx \rightarrow \infty$  el perfil tiende a atravesar el crítico con un ángulo finito.

ii) *Tipo S2* ( $h_c > h > h_u$ )

En este caso  $h < h_c$ , el flujo es supercrítico ( $F < 1$ ), la relación  $h_u/h < 1$ , por lo tanto, de (90c) resulta  $dh/dx < 0$  presentando un perfil cóncavo hacia arriba. Por continuidad,  $dU/dx > 0$ , es decir, el flujo es acelerado.

Para  $h \rightarrow h_c$ ,  $F \rightarrow 1$ ,  $dh/dx \rightarrow \infty$ , es decir, el perfil tiende a atravesar el crítico con un ángulo finito. Para  $h \rightarrow h_u$ ,  $dh/dx \rightarrow 0$  ( $h = \text{const.} = h_u$ ) el perfil tiende asintóticamente al de flujo uniforme.

iii) *Tipo S3* ( $h < h_u < h_c$ )

En este caso  $h < h_c$ , el flujo es supercrítico ( $F > 1$ ), la relación  $h_u/h > 1$ , por lo tanto, de (90c) resulta  $dh/dx > 0$  presentando un perfil cóncavo hacia abajo. Por continuidad,  $dU/dx < 0$ , es decir, el flujo es desacelerado.

Para  $h \rightarrow h_u$ ,  $dh/dx \rightarrow 0$  ( $h = \text{const.} = h_u$ ) el perfil tiende asintóticamente al de flujo uniforme. Para  $h \rightarrow -\infty$ ,  $F \rightarrow 1$ ,  $dh/dx \rightarrow -dz_b/dx$ , el perfil tiende a atravesar el fondo con un ángulo finito.

## 6.5 Resolución del FPGV 1D

El flujo permanente gradualmente variado 1D queda representado por las siguientes ecuaciones:

$$Q = U A = \text{const.} \quad (91)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{2gA^2} + h + z_b \right) = \frac{dH}{dx} = -S_f \quad (92a)$$

donde  $Q$ : caudal ( $\text{m}^3/\text{s}$ );  $A$ : área mojada ( $\text{m}^2$ );  $U$ : velocidad media en la sección ( $\text{m}/\text{s}$ );  $h$ : profundidad ( $\text{m}$ );  $z_b$ : nivel del fondo ( $\text{m}$ );  $H$ : energía ( $\text{m}$ ) y  $S_f$ : pendiente de fricción, la cual puede expresarse en función de Chezy o Manning mediante:

$$S_f = \begin{cases} \frac{Q^2}{C^2 A^2 R} & \text{(Chezy)} \\ \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} & \text{(Manning)} \end{cases} \quad (92b)$$

donde  $C$ : coeficiente de Chezy ( $\text{m}^{1/2}/\text{s}$ );  $n$ : coeficiente de rugosidad de Manning ( $\text{s}/\text{m}^{1/3}$ ) y  $R = A/P$ : radio hidráulico ( $\text{m}$ ), siendo  $P$  el perímetro mojado ( $\text{m}$ ).

El caudal (constante) es conocido, así también como, el paso de integración espacial especificado, la topobatimetría del canal y su rugosidad.

### 6.5.1 Flujo subcrítico

En el caso de flujo subcrítico, la (92a) se resuelve, en forma discreta, a partir de una condición conocida en el contorno aguas abajo y desarrollando el cálculo en las sucesivas secciones aguas arriba.

- 1.- Condición al contorno conocida contorno aguas abajo ( $h_j$  o  $z_{wj}$ ):  $H_j$
- 2.- Se calcula un valor de predicción de la energía en la sección inmediatamente aguas arriba  $H_{j-1}^P$ , asumiendo preliminarmente  $h_{j-1}^P = h_j$ :

$$h_{j-1}^P = h_j \Rightarrow (A, R, U, S_f)_{j-1}^P \Rightarrow H_{j-1}^P$$

- 3.- Se calcula un valor de corrección de la energía en la sección inmediatamente aguas arriba  $H_{j-1}^C$ :

$$H_{j-1}^C = H_j + \frac{1}{2}(S_{fj} + S_{fj-1}^P)\Delta x_{j,j-1}$$

- 4.- Se calcula la diferencia entre el valor de energía corregido y predicho en j-1:

$$\Delta H_{j-1} = H_{j-1}^C - H_{j-1}^P$$

- 5.- Se realiza la siguiente comparación (especificando una tolerancia, por ej., tol.= 1 mm):

$$\text{Si } |\Delta H_{j-1}| \begin{cases} > \text{tol.} \Rightarrow \begin{cases} h_{j-1}^C = h_{j-1}^P + (H_{j-1}^C - H_{j-1}^P) \\ h_{j-1}^P = h_{j-1}^C \rightarrow \text{recalc. desde 2} \end{cases} \\ \leq \text{tol.} \Rightarrow \begin{cases} h_{j-1} = h_{j-1}^C \\ (A, R, U, S_f)_{j-1} \Rightarrow H_{j-1} \rightarrow \text{próximo } j \end{cases} \end{cases}$$

El método es robusto y converge rápidamente después de pocas iteraciones. El  $\Delta x$  puede ser del orden de 2-50 veces la profundidad de flujo, aunque es oportuno que se consideren valores menores cuando el flujo se aproxima a condiciones críticas.

### 6.5.2 Flujo supercrítico

Si el flujo es supercrítico, la (92a) se resuelve partiendo de una condición conocida en el contorno aguas arriba y desarrollando el cálculo en las secciones sucesivas aguas abajo.

- 1.- Condición al contorno conocida aguas arriba ( $h_j$  o  $z_{wj}$ ):  $H_j$
- 2.- Se calcula un valor de predicción de la energía en la sección inmediatamente aguas abajo  $H_{j+1}^P$ : asumiendo preliminarmente  $h_{j+1}^P = h_j$ :

$$h_{j+1}^P = h_j \Rightarrow (A, R, U, S_f)_{j+1}^P \Rightarrow H_{j+1}^P$$

- 3.- Se calcula un valor de corrección de la energía en la sección inmediatamente aguas abajo  $H_{j+1}^C$ :

$$H_{j+1}^C = H_j - \frac{1}{2}(S_{fj} + S_{fj+1}^P)\Delta x_{j,j+1}$$

4.- Se calcula la diferencia entre el valor de energía corregido y predicho en  $j+1$ :

$$\Delta H_{j+1} = H_{j+1}^C - H_{j+1}^P$$

5.- Se realiza la siguiente comparación (especificando una tolerancia, por ej.,  $\text{tol.} = 1 \text{ mm}$ ):

$$\text{Si } |\Delta H_{j+1}| \begin{cases} > \text{tol.} \Rightarrow \begin{cases} h_{j+1}^C = h_{j+1}^P - [(H_{j+1}^C - H_{j+1}^P) / F_j^2] \\ h_{j+1}^P = h_{j+1}^C \rightarrow \text{recalc. desde 2} \end{cases} \\ \leq \text{tol.} \Rightarrow \begin{cases} h_{j+1} = h_{j+1}^C \\ (A, R, U, S_f)_{j+1} \Rightarrow H_{j+1} \rightarrow \text{próximo } j \end{cases} \end{cases}$$

donde  $F_j$  es el número de Froude en la sección  $j$ , el cual, elevado al cuadrado y dividiendo la diferencia de energía (corregida – predicha) en  $j+1$ , permite optimizar la convergencia del método de predicción-corrección. Dada la rápida variabilidad de la profundidad en flujo supercrítico, el  $\Delta x$  puede ser del orden de 0.5-5 veces la profundidad de flujo.

## 7. MODELOS PROPAGATORIOS 0D

Los modelos propagatorios cero-dimensionales (0D) o de tipo “hidrológicos” se basan en:

- Ecuación de continuidad integrada a lo largo del tramo de propagación.
- Función de almacenamiento.

Estos modelos tienen la ventaja de requerir menor cantidad de datos que los modelos hidrodinámicos unidimensionales. Sin embargo, los mismos no pueden ser utilizados para simular efectos de remansos creados por puentes u otras estructuras, etc. Generalmente resultan útiles para simular en forma simplificada la propagación en embalses y se aplican con ciertas limitaciones a tramos de ríos o canales.

La ecuación de continuidad unidimensional para un flujo impermanente (4), integrada entre los puntos extremos  $x_1$  y  $x_2$  de un tramo, puede ser expresada como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0 \quad (93)$$

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} dV(x, t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (94)$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q_2(t) - Q_1(t) \quad (95)$$

Reemplazando (94) y (95) en (93) y reordenando se obtiene:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \quad (96)$$

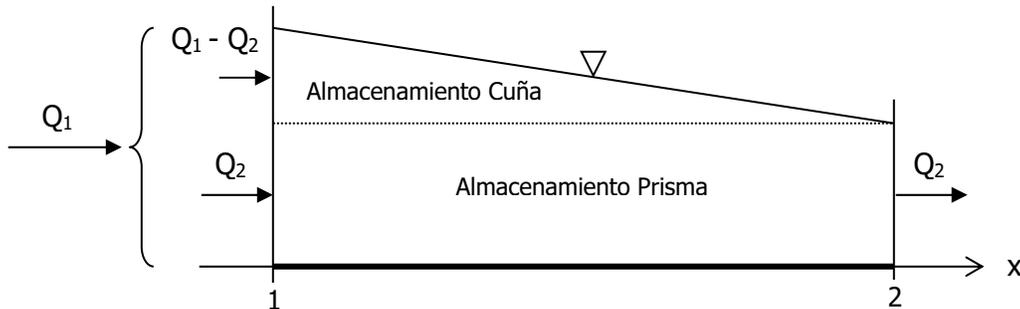
donde  $V(t)$  es el almacenamiento (volumen) en el tramo,  $Q_1(t)$  es el caudal de entrada en la sección aguas arriba  $x_1$  y  $Q_2(t)$  es el caudal de salida en la sección aguas abajo  $x_2$ . La ecuación (96) es una ecuación de continuidad cero-dimensional (la variable independiente  $x$  ha sido eliminada en el proceso de integración).

Para realizar la propagación la ecuación (96) no es suficiente. En efecto, conocido el caudal de entrada  $Q_1(t)$  tenemos dos incógnitas: el caudal  $Q_2(t)$  y el almacenamiento  $V(t)$ . Por lo tanto, es necesario contar con una ecuación adicional. La misma se denomina función de almacenamiento y puede ser expresada en forma general como:

$$V(t) = f[Q_1(t), Q_2(t)] \quad (97)$$

### 7.1 Modelo de Muskingum

En el caso del modelo Muskingum (Mc Carthy, 1938), la relación (97) es derivada considerando que el área es directamente proporcional al caudal y por lo tanto se plantea un almacenamiento de prisma y un almacenamiento de cuña como se esquematiza en la siguiente Figura.



**Figura 15.** Esquematización del almacenamiento de cuña y de prisma, modelo de Muskingum.

El almacenamiento de prisma es  $KQ_2$  mientras que, el almacenamiento de cuña es  $KX(Q_1 - Q_2)$ . Por lo tanto, la función de almacenamiento se plantea como:

$$V(t) = K Q_2(t) + K X [Q_1(t) - Q_2(t)] = K [X Q_1(t) + (1 - X)Q_2(t)] \quad (98)$$

Donde  $K$  y  $X$  son parámetros constantes del modelo (no confundir  $K$  con el factor de conducción definido en el punto 5.3).  $K$  es un coeficiente de almacenamiento, que desde el punto de vista físico representa el tiempo medio de traslado de la onda en el tramo. Por otra parte, el parámetro  $X$  pondera los efectos relativos de los caudales  $Q_1$  y  $Q_2$  en el volumen almacenado. En particular, para  $X=0$  la (98) representa la función de almacenamiento para un embalse con superficie del agua horizontal. Ambos parámetros son positivos.

En definitiva, el modelo de Muskingum se basa en las ecuaciones (96) y (98). Derivando la (98) respecto al tiempo e introduciendo el resultado en la (96) se obtiene:

$$K(1 - X) \frac{dQ_2(t)}{dt} + Q_2(t) = Q_1(t) - KX \frac{dQ_1(t)}{dt} \quad (99)$$

La discretización de la ecuación (99) puede realizarse utilizando las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_2(t)}{dt} &= \frac{Q_2^{n+1} - Q_2^n}{\Delta t} \quad , \quad \frac{dQ_1(t)}{dt} = \frac{Q_1^{n+1} - Q_1^n}{\Delta t} \\ Q_2(t) &= (Q_2^{n+1} + Q_2^n)/2 \quad , \quad Q_1(t) = (Q_1^{n+1} + Q_1^n)/2 \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

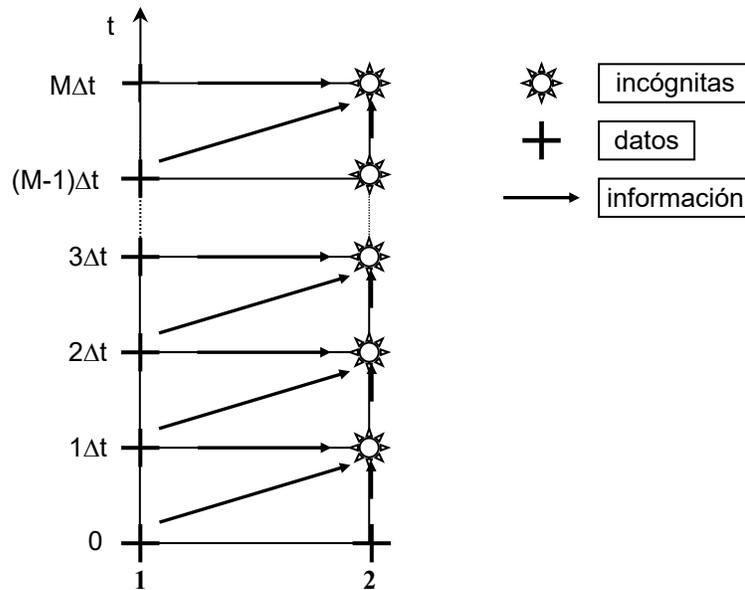
reemplazando las expresiones (100) en (99) y operando algebraicamente se obtiene:

$$Q_2^{n+1} = C_1 Q_1^{n+1} + C_2 Q_1^n + C_3 Q_2^n \quad (101)$$

con:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= (-KX + 0,5 \Delta t)/C_4 \\ C_2 &= (KX + 0,5 \Delta t)/C_4 \\ C_3 &= (K - KX - 0,5 \Delta t)/C_4 \\ C_4 &= (K - KX + 0,5 \Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

En (102) se verifica que  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ . Determinadas las constantes  $C_1, C_2, C_3$ , y  $C_4$  (para lo cual es necesario conocer el valor de  $K$  y  $X$  y el valor de  $\Delta t$ ), la ecuación (101) permite calcular explícitamente los caudales incógnitas  $Q_2[n\Delta t]$  con  $n=1,2,3,\dots,M$ ; en función del hidrograma dato en la sección  $x_1$  y la condición inicial  $Q_2$  ( $n=0$ ). El esquema de cálculo avanza en el tiempo como se observa en la Figura 16.



**Figura 16.** Esquema de cálculo en el modelo de Muskingum.

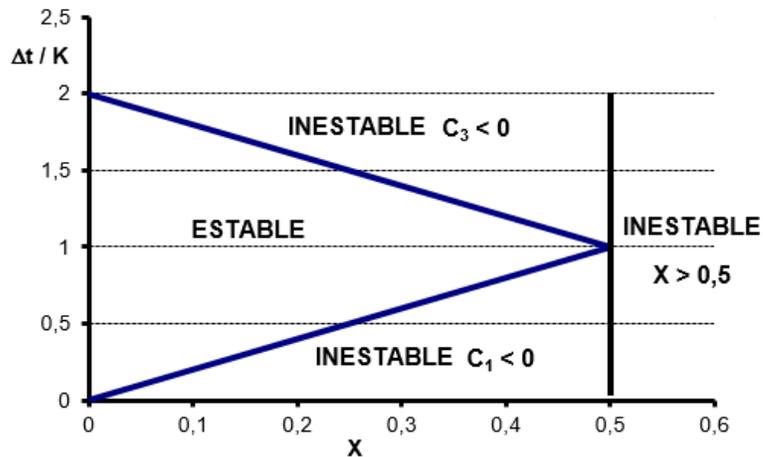
Para garantizar la estabilidad numérica del esquema de diferencias finitas, el parámetro  $X$  debe satisfacer la siguiente condición:

$$0 \leq X \leq 0.5 \quad (103)$$

y todos los coeficientes  $C_i$  de (102) deben ser positivos. Observando (102) y considerando (103),  $C_4$  y  $C_2$  son positivos, pero  $C_1$  y  $C_3$  podrían ser negativos. Es decir, en pos de la estabilidad, se debe asegurar que dichos coeficientes sean positivos. Por lo tanto, de las correspondientes expresiones de  $C_1$  y  $C_3$  en (102), se obtiene la siguiente condición:

$$2X < \frac{\Delta t}{K} < 2(1-X) \quad (104)$$

Las regiones de estabilidad e inestabilidad se representan en la Figura 17.



**Figura 17.** Regiones de estabilidad e inestabilidad en el modelo de Muskingum.

Dependiendo de los valores que adopta  $X$ , en el rango dado por la (103), el modelo numérico dado por la ecuación (101) introduce, en mayor o menor medida, una cierta difusión y consiguiente atenuación de onda.

### 7.1.1 Determinación de parámetros. Método gráfico

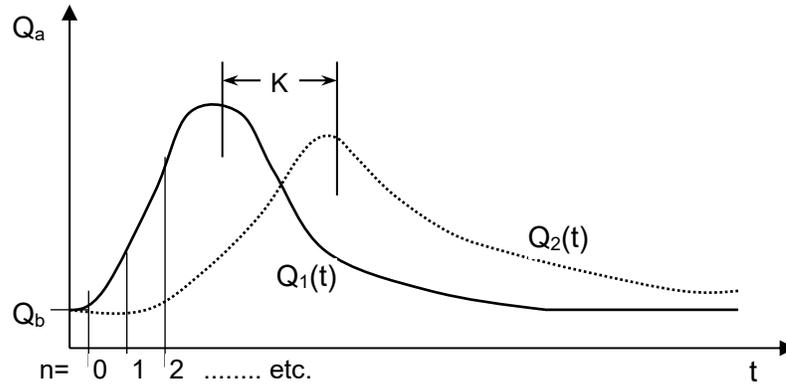
Si existen datos de hidrogramas de entrada y salida para el tramo de río en estudio, los valores de  $K$  y  $X$  pueden determinarse gráficamente. El parámetro  $K$  se estima como el tiempo entre los centros de gravedad de los hidrogramas (ver Figura 18). Además, graficando la relación:  $V=f[X Q_1+(1-X)Q_2]$  se observa una curva en forma de lazo para los distintos valores de  $X$  que se adopten. Cuando la curva en lazo se aproxime lo mejor posible a una recta, el valor de  $X$  será el seleccionado y de la pendiente de la misma se obtiene  $K$  (ver Figura 19).

Para graficar cada curva para un valor particular de  $X$  se deben calcular los valores acumulados en el tiempo:

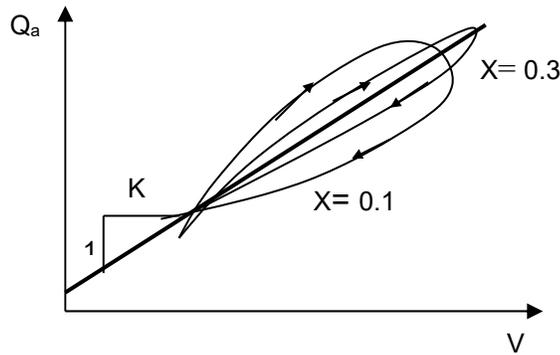
$$Q_a^{n+1} = Q_a^n + X(Q_1^{n+1} - Q_1^n) + (1-X)(Q_2^{n+1} - Q_2^n) \quad (105)$$

$$V^{n+1} = V^n + 0.5[(Q_1^{n+1} + Q_1^n) - (Q_2^{n+1} + Q_2^n)] \Delta t \quad (106)$$

donde  $Q_a$  para  $n=0$  es igual al caudal base  $Q_b$ .



**Figura 18.** Hidrogramas existentes observados en  $x_1$  y  $x_2$ .



**Figura 19.** Relación  $Q_a - V$

### 7.1.2 Método de Muskingum-Cunge (MC)

Una alternativa es utilizar los valores de  $K$  y  $X$  proporcionados por Cunge (1969). El autor discretizó la ecuación diferencial (22) del modelo de onda cinemática, asumiendo  $c$ =constante, de la siguiente manera:

$$\left[ X \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + (1 - X) \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} \right] + c \left[ \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n + Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (107)$$

explicitando de la (107) el caudal incógnita  $Q_{j+1}^{n+1}$  obtuvo una ecuación igual a la ec. (101) del modelo Muskingum, generalizada para un tramo de longitud  $L$  dividido en secciones equidistantes  $j, j+1$  ( $j=0,1,2,\dots$ ,etc.):

$$Q_{j+1}^{n+1} = C_1 Q_j^{n+1} + C_2 Q_j^n + C_3 Q_{j+1}^n \quad (108)$$

donde el parámetro  $K$ , que interviene en los distintos coeficientes definidos por las expresiones (102), es igual a:

$$K = \Delta x/c \quad (109)$$

Como la ecuación (101) es idéntica a la (108), la difusión que produce el modelo Muskingum puede ser asociada al esquema en diferencias finitas que utilizó Cunge para resolver la ecuación diferencial del modelo de onda cinemática. Esto le permitió obtener una expresión para  $X$  basada en características físicas definidas del tramo y de la onda de crecida.

La difusión numérica que genera un esquema de  $O(\Delta X)$  en el MDF se asocia al error de truncamiento y en particular a las derivadas de segundo orden que han sido truncadas. A los efectos de determinar la difusión numérica que introduce el esquema dado por la (107), Cunge expandió en series de Taylor los diferentes términos de la misma, truncando las expansiones a partir de las derivadas de tercer orden, es decir, reteniendo solamente las derivadas de primer y segundo orden. De esta manera obtuvo:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = c \Delta x \left( \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} - X \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (110)$$

donde el término que multiplica a la derivada segunda en la ecuación (100) representa el coeficiente de difusión numérica  $D_n$  del esquema dado por la (107).

Para obtener el valor de  $X$  Cunge igualó el coeficiente de difusión numérica  $D_n$  con el coeficiente de difusión hidráulica  $D_h$  del modelo de onda difusiva (ecuación (17), punto 4.3.2):

$$D_n = c \Delta x \left( \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} - X \right) = D_h \quad (111)$$

donde  $c$  y  $D_h$  están representadas por las ecuaciones (18a) y (18b) respectivamente.

Considerando  $\Delta x = c \Delta t$ , de la (111) se puede despejar el coeficiente  $X$ :

$$X = \frac{1}{2} - \frac{D_h}{c \Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{P_e} \quad (112)$$

donde se ha introducido el número de Peclet:  $P_e = c \Delta x / D_h$  que representa la relación entre los efectos convectivos y difusivos. El parámetro  $X$  es siempre positivo y varía en el rango establecido por la condición (103), por lo tanto,  $P_e \geq 2$ . Se observa que si  $D_h \ll c \Delta x$ ,  $P_e \gg 2$ ,  $X \rightarrow 0.5$ , preponderan netamente los efectos convectivos sobre los difusivos y el modelo Muskingum-Cunge representará ondas cinemáticas (con atenuación insignificante). Por el contrario, para  $P_e \rightarrow 2$ ,  $X \rightarrow 0$ , es decir, el modelo MC representará ondas que se difunden y atenúan.

El modelo Muskingum-Cunge queda definido por la ecuación (108) con los coeficientes (102) y las condiciones (103) y (104). Los valores de  $K$  y  $X$  están dados por las ecuaciones (109) y (112) respectivamente.

Para calcular los parámetros  $K$  y  $X$  es necesario estimar la celeridad  $c$  de la onda y el coeficiente de difusión hidráulica  $D_h$ . Este último puede estimarse como:

$$D_h = \frac{Q_0}{2 B_0 S_b} \quad (113)$$

donde  $Q_0$  es un caudal de referencia, próximo al caudal pico  $Q_p$  del hidrograma de entrada, ya definido en el punto 5.3.2 como:  $Q_0 = (2/3) Q_p$ .  $B_0$  es el ancho de la sección asociado a  $Q_0$  y  $S_b$  es la pendiente del fondo.

El caudal  $Q$  genérico puede expresarse mediante la ecuación de Manning como:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_b^{1/2} \quad (114)$$

La celeridad  $c$  se define como (ver ecuación (18a)):

$$c = \left. \frac{\partial Q}{\partial A} \right|_{x_0} = \frac{1}{B} \left. \frac{\partial Q}{\partial h} \right|_{x_0} = \frac{5}{3} U = \frac{5}{3} \frac{Q}{A} \quad (115)$$

Por lo tanto, la celeridad de la onda asociada al caudal  $Q_0$ , ( $c=c_0$ ) puede ser estimada como:

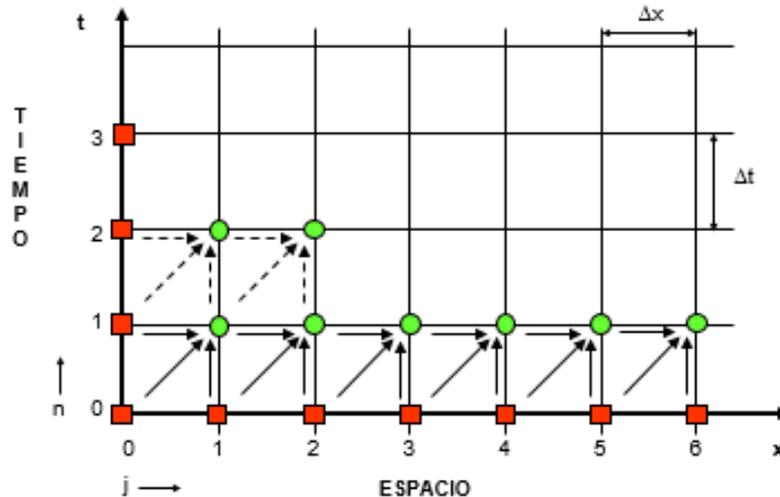
$$c = \frac{5}{3} U_0 = \frac{5}{3} \frac{Q_0}{A_0} \quad (116)$$

donde el subíndice 0 se aplica a variables asociadas con  $Q_0$ , como por ejemplo velocidad  $U_0$ , área  $A_0$ , profundidad  $h_0$ , etc.

Para aplicar el método de MC se debe seguir el siguiente procedimiento:

- 1) Con el caudal pico del hidrograma de entrada calcular  $Q_0 = (2/3) Q_p$ .
- 2) De la curva  $h$ - $Q$  aguas arriba estimar  $h_0$  (o determinarla con la ec. de Manning).

- 3) Con las características geométricas de la sección estimar  $B_0, A_0$ .
- 4) Estimar la pendiente con  $S_b$  (pendiente de fondo).
- 5) Calcular celeridad con la ec. (116).
- 6) Calcular coeficiente de difusión hidráulica con la ec. (113).
- 7) Adoptar  $\Delta x$  (tramo de longitud  $L$  discretizado como:  $L=N \Delta x$ ).
- 8) Calcular el parámetro  $K$  con la ec. (109).
- 9) Calcular el parámetro  $X$  con la ec. (112). Verificar la condición dada por la ec. (103). Si no se cumple recomenzar de 7).
- 10) Seleccionar  $\Delta t$  utilizando la desigualdad dada por la ec. (104).
- 11) Calcular los coeficientes  $C_1, C_2$  y  $C_3$  dados por (102). Verificar que la sumatoria de dichos coeficientes sea igual a la unidad (si bien las ecs. la cumplen, se pueden realizar redondeos que no verifican tal condición).
- 12) Utilizando la ec. (108) calcular los hidrogramas en:  $x_j=j\Delta x, t_n=n\Delta t$ , conociendo la condición de borde aguas arriba (hidrograma de entrada en  $j=0$  para  $n=0,1,2,\dots,M$ ) y la condición inicial (caudal base para  $n=0, j=1,2,\dots,N$ ). En la Figura 20 se esquematiza el proceso de cálculo.

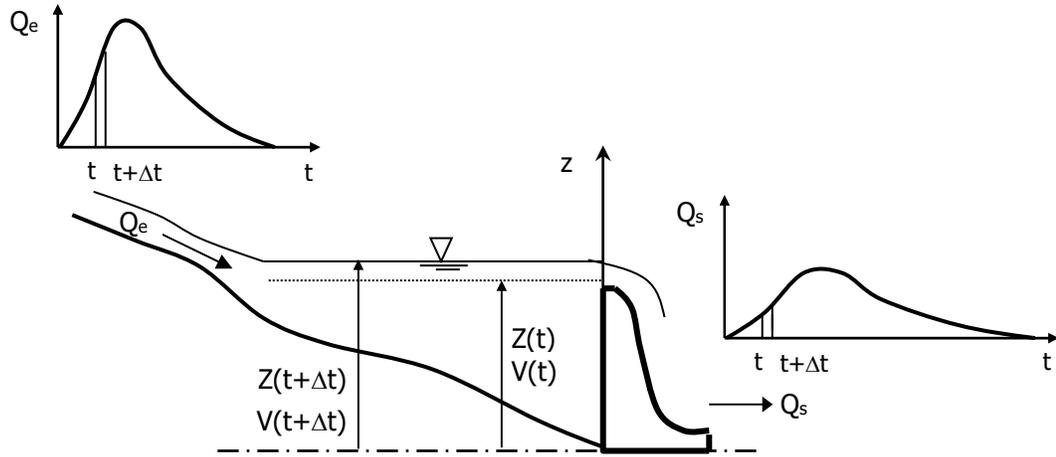


**Figura 20.** Esquemización del proceso de cálculo en el método de M-C.

## 8. MODELO INTEGRADO PARA PROPAGACIÓN EN EMBALSES

### 8.1 Ecuación de continuidad integrada para el embalse

Consideremos un embalse con superficie del agua horizontal como se representa esquemáticamente en la Figura 21.



**Figura 21.** Representación esquemática de un embalse.

La ecuación de continuidad agregada (cero-dimensional) para el embalse puede ser escrita en palabras como:

<b>Variación temporal de volumen en el embalse</b>	=	<b>Entrada de volumen al embalse</b>	-	<b>Salida de volumen del embalse</b>
--	---	--------------------------------------	---	--------------------------------------

Es decir, matemáticamente:

$$V(t + \Delta t) - V(t) = \left[ \frac{Q_e(t) + Q_e(t + \Delta t)}{2} \right] \Delta t - \left[ \frac{Q_s(t) + Q_s(t + \Delta t)}{2} \right] \Delta t$$

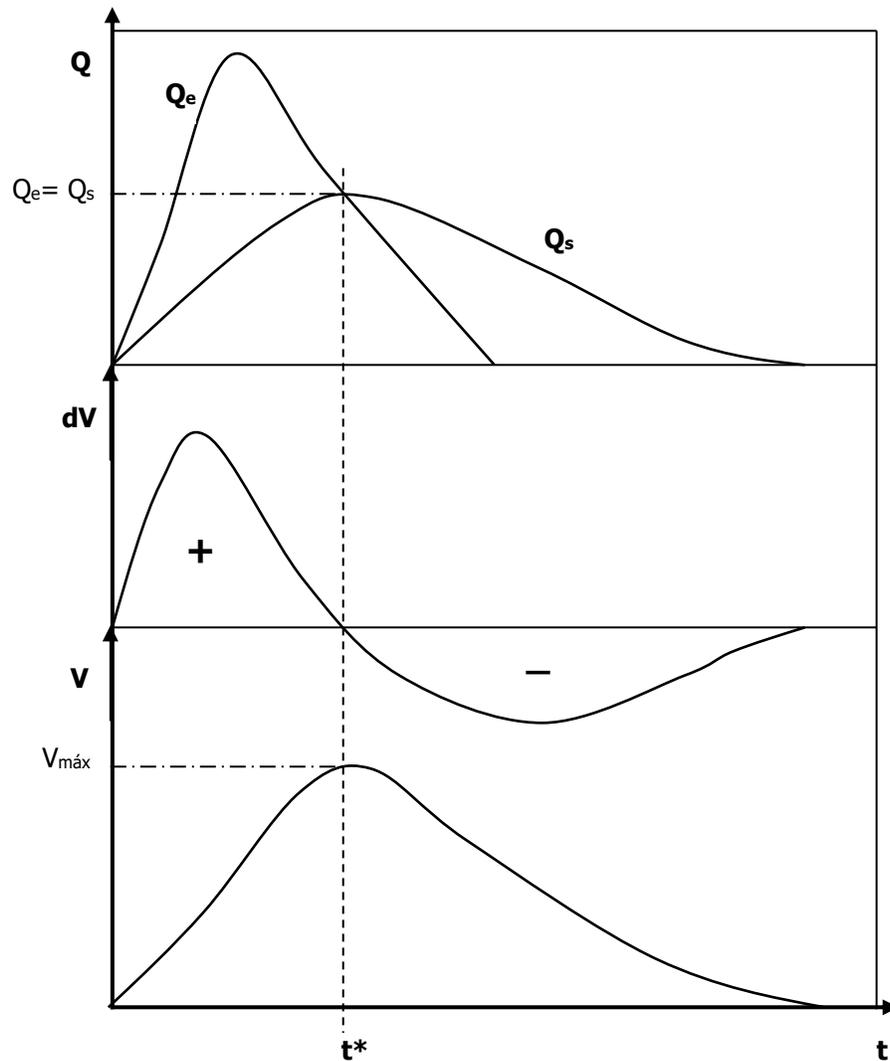
Reordenando y pasando al límite para  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s \quad (117)$$

donde  $V$  es el volumen del embalse,  $Q_e$  es el caudal de entrada al embalse y  $Q_s$  es el caudal de salida a través de las estructuras de evacuación; todas estas variables son obviamente función del tiempo  $t$ . La ecuación (117) es idéntica a la (96) la cual fue obtenida integrando la ecuación de continuidad unidimensional (4) en un tramo elemental de traslado  $x_1, x_2$ .

## 8.2 Análisis esquemático de la evolución de la variación de volumen

En la Figura 22 se representa esquemáticamente el hidrograma de entrada  $Q_e(t)$  conjuntamente con el hidrograma de salida  $Q_s(t)$  y la evolución temporal de la variación de volumen  $dV$  y del volumen  $V$ .



**Figura 22.** Evolución temporal de  $Q$ ,  $dV$  y  $V$

Se observa que:

Para  $t < t^* \rightarrow Q_e > Q_s \rightarrow dV/dt > 0$

Para  $t > t^* \rightarrow Q_e < Q_s \rightarrow dV/dt < 0$

Para  $t = t^* \rightarrow Q_e = Q_s \rightarrow dV/dt = 0 \rightarrow V_{\text{máx}} \rightarrow Z_{\text{máx}} \rightarrow Q_s \text{ máx}$

A los efectos de resolver la propagación en el embalse, es decir, determinar el hidrograma de salida conociendo el hidrograma de entrada, es necesario contar además con la curva nivel-volumen y la curva nivel-caudal de salida.

El volumen del embalse  $V$  puede expresarse en función del nivel de la superficie libre  $Z$ ,  $V=V(Z)$ . Dicha función se construye a partir de la morfología del embalse y puede ser representada matemáticamente mediante un polinomio de grado  $J$ :

$$V(Z) = \sum_{k=0}^J a_k Z^k \quad (118)$$

Eventualmente, dependiendo de las características morfológicas del embalse, puede ser necesaria la segmentación de dicha función. En ese caso se deberá adoptar un polinomio para cada segmento, cada uno con un determinado valor de  $J$ .

El caudal de salida  $Q_s$  también puede expresarse en función del nivel  $Z$ ,  $Q_s=Q_s(Z)$ . Tal función dependerá de la tipología y características geométricas de la estructura de descarga como así también de las condiciones de flujo aguas abajo del cierre. Por ejemplo, considerando un vertedero en condiciones de descarga libre:

$$Q_s(Z) = C_q B_v \sqrt{2g} (Z - z_v)^{3/2} \quad (119)$$

donde  $C_q$  es el coeficiente de descarga,  $B_v$  es el ancho del vertedero y  $z_v$  es el nivel en correspondencia de la cresta del vertedero. Eventualmente, para una dada función  $Q_s(Z)$  también es posible ajustarle uno o más polinomios análogos al (118).

### 8.3 Resolución del tránsito en embalse mediante predicción-corrección

Como  $V$  es una función de  $Z$  se puede escribir que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dZ} \frac{dZ}{dt} \quad (120)$$

Por lo tanto, reemplazando (120) en (117) se obtiene la ecuación de continuidad expresada en función del nivel del agua en el embalse  $Z$  como:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{Q_e - Q_s(Z)}{S(Z)} \quad (121)$$

donde:

$$S(Z) = \frac{dV}{dZ} = \sum_{k=1}^J k a_k Z^{k-1} \quad (122)$$

Discretizando la ecuación (121) se obtiene:

$$Z^{n+1} = Z^n + \frac{\{[Q_e]^{n+1/2} - [Q_s(Z)]^{n+1/2}\} \Delta t}{[S(Z)]^{n+1/2}} \quad (123)$$

donde:

$$[Q_e]^{n+1/2} = \frac{[Q_e]^{n+1} + [Q_e]^n}{2} \quad (124)$$

$$[Q_s(Z)]^{n+1/2} = \frac{[Q_s(Z)]^{n+1} + [Q_s(Z)]^n}{2} \quad (125)$$

$$[S(Z)]^{n+1/2} = \frac{[S(Z)]^{n+1} + [S(Z)]^n}{2} \quad (126)$$

con  $n$  índice temporal,  $n=0, 1, 2, \dots, M$ .

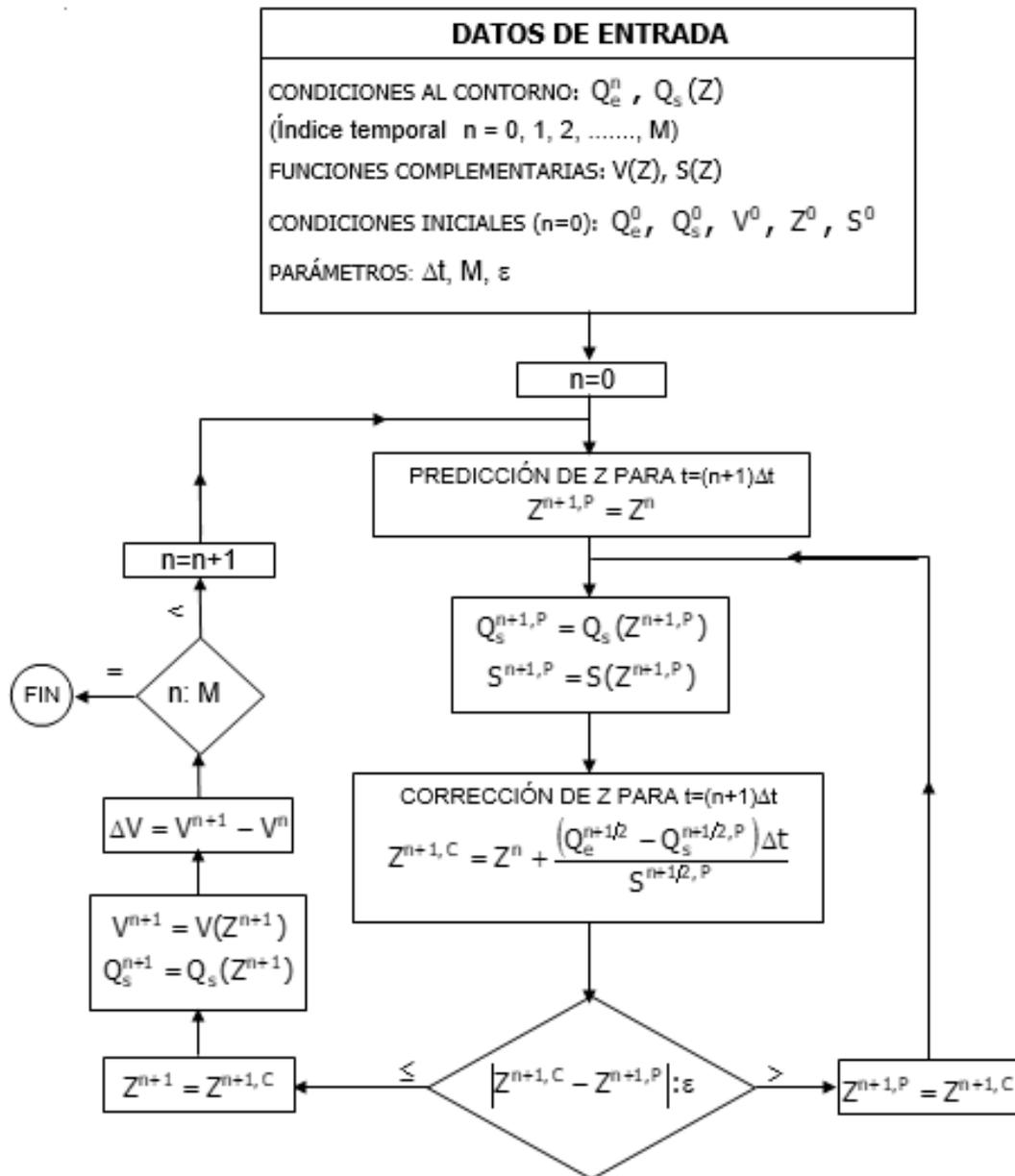
La (123) es una ecuación algebraica implícita en la variable  $Z$  en el tiempo  $(n+1)\Delta t$  y se resuelve por iteraciones fijando una tolerancia  $\varepsilon$ . La solución converge rápidamente si se adopta como valor inicial del proceso iterativo, en cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la información de  $Z$  obtenida en el tiempo precedente  $n\Delta t$ .

Una vez calculado  $Z$  se puede calcular el caudal de salida (propagado a través del embalse) definido por la función  $Q_s(Z)$  y volumen del embalse utilizando la función  $V(Z)$ .

En la Figura 23 se observa un diagrama de flujo del procedimiento de cálculo mediante el método de predicción-corrección.

El paso de integración temporal  $\Delta t$  debe ser seleccionado de manera tal que brinde una adecuada discretización del hidrograma de entrada. Para evitar la acumulación de errores durante el proceso de cálculo se recomienda adoptar una tolerancia suficientemente pequeña (del orden del milímetro o décima de milímetro).

A los efectos de no truncar el proceso propagatorio, es decir, para obtener una laminación completa, es necesario que el tiempo final de cálculo  $M\Delta t$  sea bastante mayor que el tiempo de base del hidrograma de entrada.



**Figura 23.** Diagrama de flujo para resolver la propagación en el embalse mediante el método de predicción-corrección.

### 8.4 Resolución del tránsito en embalse mediante un método explícito

Discretizando la ecuación (97) se obtiene:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} = \frac{Q_e^{n+1} + Q_e^n}{2} - \frac{Q_s^{n+1} + Q_s^n}{2} \quad (127)$$

Si  $V=V(Z)$  y  $Q_s=Q_s(Z)$  se definen analíticamente y existen sus derivadas primeras respecto a  $Z$ , es posible expandir en series de Taylor las funciones  $V$  y  $Q_s$ , truncando las expansiones a partir de las derivadas de segundo orden, es decir, reteniendo solamente las derivadas de primer orden. De esta manera se obtiene:

$$V^{n+1} = V^n + \left( \frac{dV}{dZ} \right)^n \Delta Z \quad (128)$$

$$Q_s^{n+1} = Q_s^n + \left( \frac{dQ_s}{dZ} \right)^n \Delta Z \quad (129)$$

Reemplazando (128) y (129) en (127) y operando algebraicamente se obtiene:

$$\Delta Z \left[ \left( \frac{dV}{dZ} \right)^n + \left( \frac{dQ_s}{dZ} \right)^n \frac{\Delta t}{2} \right] = (Q_e^{n+1} + Q_e^n) \frac{\Delta t}{2} - Q_s^n \Delta t \quad (130)$$

Por lo tanto, despejando  $\Delta Z$  de (130):

$$\Delta Z = \frac{(Q_e^{n+1} + Q_e^n) \frac{\Delta t}{2} - Q_s^n \Delta t}{\left[ \left( \frac{dV}{dZ} \right)^n + \left( \frac{dQ_s}{dZ} \right)^n \frac{\Delta t}{2} \right]} \quad (131)$$

Vemos que el incremento  $\Delta Z$  en un paso de tiempo  $\Delta t$  puede ser calculado en función del valor que asumen las distintas variables en el nivel de tiempo inferior ( $Q_e$  es conocido para todo  $n$ ). Una vez calculado  $\Delta Z$  se determina:

$$Z^{n+1} = Z^n + \Delta Z \quad (132)$$

Como el caudal de salida y el volumen son funciones de  $Z$  se determinan, además:

$$Q_s^{n+1} = Q_s(Z^{n+1}) \quad (133)$$

$$V^{n+1} = V(Z^{n+1}) \quad (134)$$

## 9. BIBLIOGRAFÍA

Abbot, M.B. y Basco, D.R. (1989). COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS. Longman Scientific and Technical. Longman Group UK Limited.

Basile, P.A.; G. Riccardi; E. Zimmermann y H. Stenta (2010). SIMULATION OF EROSION-DEPOSITION PROCESSES AT BASIN SCALE BY A PHYSICALLY-BASED MATHEMATICAL MODEL. International Journal of Sediment Research, Beijing, 2010, Vol. 25, N° 2, pp. 91-109.

Basile, P.A.; Riccardi, G.; Peruzzo, F. y Garcia, M. (2019). MODELACIÓN HIDRO-MORFODINÁMICA PARA PROYECTOS DE OBRAS PORTUARIAS EN RÍOS ALUVIALES: APLICACIONES EN EL RÍO PARANÁ. XIII Jornada de Ciencia y Tecnología 2019. Universidad Nacional de Rosario.

Basile, P.A. (1990). HYDRO II MODEL DEVELOPMENT AND APPLICATION TO THE ENZA RIVER (ITALY). Technical Report DTA-90, ISMES, Italia.

Basile, P. A. (1997). UN MODELO MATEMÁTICO MORFOLÓGICO UNIDIMENSIONAL PARA RÍOS ALUVIALES. Revista de Estudios Sobre Cuestión Hidroambiental. Eds. CURIHAM-UNR, PHI, UNESCO. Vol. 3, N. 4, pp. 1-13.

Basile, P. A. y Riccardi, G.A. (1998). DESARROLLO Y APLICACIÓN DE UN MODELO MORFOLÓGICO CUASI-2D PARA SIMULAR NUMÉRICAMENTE LOS PROCESOS DINÁMICOS DE EROSIÓN Y SEDIMENTACIÓN EN RÍOS ALUVIALES. XVII Congreso Nacional del Agua y II Simposio de Recursos Hídricos del Cono Sur. Tomo III, pp. 472-482.

Basile, P.A. (1999). MODELACIÓN DE PROCESOS DE EROSIÓN-SEDIMENTACIÓN EN RÍOS CON LECHOS DE SEDIMENTOS HETEROGÉNEOS. Revista de Estudios Sobre Cuestión Hidroambiental. Eds. CURIHAM-UNR, PHI, UNESCO. Vol. 5, N. 2, pp. 89-105.

Bellos, C.; Basile, P.A. y Peviani, M. (1995). NUMERICAL MODELS FOR FLOOD WAVE PROPAGATION IN MOUNTAIN RIVERS. Proc. III Workshop on Climate Change and Flooding Risk, EC Environment Research Program. December 15-19, Delft, Holanda.

Cunge, J.A.; Holly, F.M. y Verwey, A. (1980). PRACTICAL ASPECTS OF COMPUTATIONAL RIVER HYDRAULICS. Pitman Advanced Publishing Program.

Cunge, J.A. (1969). ON THE SUBJECT OF A FLOOD PROPAGATION COMPUTATION METHOD (MUSKINGUM METHOD). Journal of Hydraulic Research, Vol. 7, N.2, pp. 205-230.

De Vries, M. (1993). RIVER ENGINEERING. Lectures Notes f10. Department of Hydraulic Engineering. Faculty of Civil Engineering. Delft University of Technology, Holanda.

Labadie, G. (1992). FLOOD WAVES AND FLOODING MODELS. Proc. of the NATO-ASI on "Coping with Floods", November 3-5, Erice, Italy.

Garcia M.; Basile, P.A.; Riccardi, G. y Rodriguez, J. (2013). MODELLING HYDRODYNAMIC AND SEDIMENTATION PROCESSES IN LARGE LOWLAND RIVERS: AN APPLICATION TO THE PARANÁ RIVER. 35th World Congress Inter. Association for Hydro-Environment Engineering and Research (IAHR). Chengdu, China.

Mahmood, K. y Yevjevich, V. (1975). UNSTEADY FLOW IN OPEN CHANNELS. Vol. 1, Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, USA.

Miller, J.E. (1984). BASIC CONCEPTS OF KINEMATIC-WAVE MODELS. United States Geological Survey (USGS). Professional Paper 1302.

Perkins, S.P. y Koussis, A.D. (1996). STREAM-AQUIFER INTERACTION MODEL WITH DIFFUSIVE WAVE ROUTING. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 112, N.4, pp. 210-218.

Ponce, V.M. y Li, R.M. (1978). OVERVIEW OF FLOOD ROUTING METHODS. Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA.