

CENTRO UNIVERSITARIO ROSARIO DE INVESTIGACIONES HIDROAMBIENTALES

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA-EIC

ICDH-D 19-2_Rev00

UNIDAD 2

FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA, DINÁMICA Y ESTÁTICA DE FLUIDOS VISCOSOS TERMOCONDUCTORES

Pedro A. Basile

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2019



Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

UNIDAD 2

FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA, DINÁMICA Y ESTÁTICA DE FLUIDOS VISCOSOS TERMOCONDUCTORES

1.	INTRODUCCIÓN.....	3
2.	FUNDAMENTOS CINEMÁTICOS.....	3
2.1	Descripción del movimiento (Lagrangiano y Euleriano).....	3
2.2	Lineas, superficies y volúmenes materiales.....	5
2.3	Trayectoria, líneas de corriente, tubo de flujo.....	5
2.4	Derivada material, total o sustancial.....	6
2.5	Aceleración.....	7
2.6	Análisis del movimiento en el entorno de un punto P.....	8
2.7	Volumen de control.....	11
2.8	Teorema de transporte de Reynolds.....	11
2.9	Conservación de la masa.....	13
3.	DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS TERMOCONDUCTORES.....	16
3.1	Conservación de la cantidad de movimiento. Expresión integral.....	16
3.2	Fuerzas de superficie y de masa.....	17
3.2.1	Tensión en un punto. Tensor de tensiones.....	17
3.2.2	Fuerzas de cuerpo o de masa.....	20
3.3	Conservación de la cantidad de movimiento. Expresión diferencial.....	21
3.4	Ecuaciones constitutivas para fluidos Newtonianos.....	23
3.5	Significado de la presión dinámica. Presión termodinámica versus presión media....	24
3.6	Ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos termoconductores.....	25
3.7	Conservación de la energía. Primera ley de la Termodinámica.....	26
3.8	Síntesis de las ecuaciones para el flujo de fluidos viscosos termoconductores.....	30
3.9	Ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos incompresibles.....	31
3.10	Ecuaciones de Euler para el flujo de fluidos no viscosos.....	32
4.	ECUACIONES DE LA HIDROSTÁTICA Y DE CONDUCCIÓN DEL CALOR.....	32
4.1	Determinación de la distribución vertical de presión.....	34
5.	BIBLIOGRAFÍA.....	36
6.	APENDICE.....	37

UNIDAD 2

FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA, DINÁMICA Y ESTÁTICA DE FLUIDOS VISCOSOS TERMOCONDUCTORES

1. INTRODUCCIÓN

Se presenta la derivación de un conjunto de ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos, obtenidas a partir de la aplicación de las leyes físicas básicas de conservación de masa, momentum y energía. A tal efecto, se presentan en primer lugar algunas nociones cinemáticas introductorias, donde se describe el movimiento de un fluido utilizando los dos abordajes clásicos: Lagrangiano y Euleriano. Se definen los conceptos tales como derivada total y aceleración del campo fluido. Se analizan los movimientos característicos de una partícula de fluido alrededor de un punto. Se deriva un teorema cinemático muy importante, denominado teorema de transporte de Reynolds, el cual es utilizado para expresar las ecuaciones diferenciales en términos de derivadas Eulerianas. La aplicación de la ley de conservación de la masa conduce a la denominada ecuación de continuidad. La dinámica de fluidos relaciona el movimiento con las fuerzas que lo originan. La ley de conservación de la cantidad de movimiento (momentum), basada en la segunda ley de Newton, conduce en definitiva a través de las relaciones constitutivas para fluidos Newtonianos, o ley de viscosidad de Stokes, a las ecuaciones de Navier-Stokes. Mientras que, la ley de conservación de la energía total (cinética + interna), basada en la primera ley de la Termodinámica, conduce a la ecuación de la energía térmica. El conjunto de tales ecuaciones expresan, en el modo más general, la dinámica del flujo de fluidos viscosos termoconductores. Como casos particulares de estas ecuaciones se derivan las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos incompresibles, las ecuaciones de Euler para el flujo de fluidos no viscosos (inviscidos), las ecuaciones generales de la hidrostática y la ecuación del calor. Finalmente se analiza la distribución hidrostática de presión, introduciendo los conceptos de altura piezométrica, presión absoluta y presión relativa.

2. FUNDAMENTOS CINEMÁTICOS

2.1 Descripción del movimiento (Lagrangiano y Euleriano)

La noción de movimiento de un continuo es asociada al "cambio de posición" de sus puntos materiales. Para describir matemáticamente el movimiento de un fluido se utilizan dos abordajes: el Lagrangiano y el Euleriano. A tal fin es necesario introducir un sistema de coordenadas cartesianas (ver Figura 1 y Apéndice).

En el abordaje Lagrangiano se trata de determinar, para cada partícula de fluido, su posición cartesiana (x, y, z) en función del tiempo t , es decir, su trayectoria. Si se identifica una partícula P en el tiempo t_0 mediante su vector posición $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0, z_0)$, en otro instante t , la misma se encontrará en la posición identificada mediante el vector $\mathbf{x}=\mathbf{x}(x,y,z)$, (ver Figura 1). Es decir, la posición será conocida si \mathbf{x} se determina en función de \mathbf{x}_0 y el tiempo transcurrido a partir de t_0 :

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t - t_0) \equiv \begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t - t_0) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t - t_0) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t - t_0) \end{cases}$$

Suponiendo que en un intervalo de tiempo δt la partícula P pasa de la posición $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ a $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \equiv (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, (ver Figura 1), las componentes del vector velocidad instantánea \mathbf{u} en P serán:

$$u = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t}, \quad v = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta t}, \quad w = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta z}{\delta t}$$

Desde el punto de vista Euleriano las variables independientes son las coordenadas cartesianas x, y, z y el tiempo t . En este caso se analiza que sucede con un elemento fluido en un punto fijo del espacio. Consiste en la observación puntual o local y conduce a la determinación de la distribución vectorial de la velocidad instantánea en cada punto del campo de flujo, es decir, a la determinación del campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} u = u(x, y, z, t) & \text{o } u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v = v(x, y, z, t) & \text{o } u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ w = w(x, y, z, t) & \text{o } u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

En el caso que no aparezca la variable t (es decir, la velocidad aún variando en cada punto del espacio presenta la misma distribución en cualquier instante) el flujo se denomina permanente. En el caso más general, de dependencia temporal, el flujo se denomina impermanente.

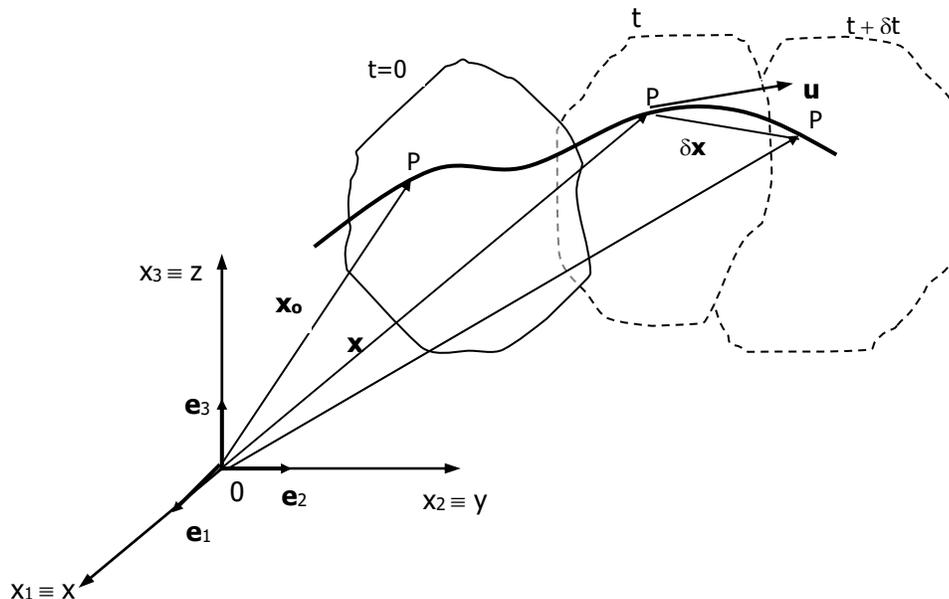


Figura 1. Esquematización del movimiento de una partícula de fluido.

Las dos descripciones del movimiento se relacionan mediante:

$$dx_j = u_j(x_1, x_2, x_3, t) dt$$

La mayoría de los problemas en Mecánica de Fluidos se resuelven utilizando la descripción Euleriana, es decir, la velocidad, la temperatura, la densidad, etc., se expresan como variables dependientes de las coordenadas espaciales y del tiempo. En algunas ocasiones también resulta práctico utilizar una descripción Lagrangiana, por ejemplo, para derivar las leyes básicas.

2.2 Líneas, superficies y volúmenes materiales

Se denominan líneas y superficies materiales a aquellas definidas por puntos que se mueven con la misma velocidad del fluido. Un volumen material es un volumen encerrado por una superficie material. Es evidente que un volumen material posee una masa constante de fluido, ya que la superficie que lo limita se mueve con la misma velocidad del fluido y, por lo tanto, éste no la puede atravesar. Consecuentemente, durante el movimiento, un volumen material puede cambiar de forma, tamaño y condición térmica, pero no puede cambiar la masa contenida en el mismo, la cual debe permanecer constante. La definición de punto material o partícula de fluido se corresponde con un volumen material infinitesimal.

2.3 Trayectoria, líneas de corriente, tubo de flujo

Se define línea de corriente a aquella en la cual el vector velocidad es tangente en cada uno de sus puntos. En el caso de flujo impermanente, las líneas de corriente presentan una configuración distinta en cada instante y, por lo tanto, no coinciden con la trayectoria. En cambio, en el flujo permanente, la línea de corriente coincide con la trayectoria ya que la partícula en movimiento tiene el vector velocidad tangente a una única línea de corriente que es a su vez la trayectoria que la misma recorre. Todas las infinitas líneas de corriente que se apoyan en una línea cerrada dentro del campo de flujo forman un tubo de corriente.

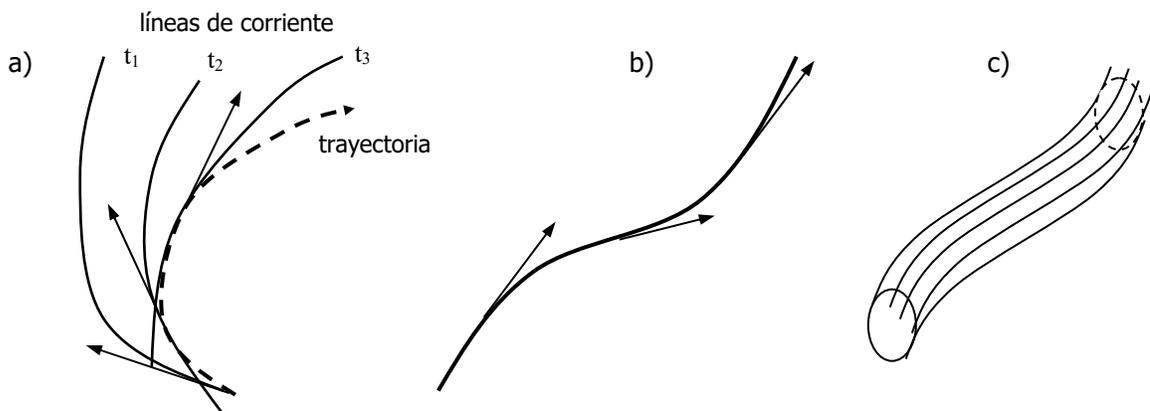


Figura 2. a) Flujo impermanente b) Flujo permanente c) Tubo de flujo.

2.4 Derivada material, total o sustancial

Consideremos que α sea una variable tal como densidad, temperatura del fluido, etc.. Desde el punto de vista Euleriano α debe ser considerada una función de las variables independientes x , y , z y t . Sin embargo, si se sigue una partícula específica del fluido, por un período de tiempo δt mientras fluye, su posición cambiará una cantidad δx , δy y δz mientras el valor de α cambiará una cantidad $\delta\alpha$. Es decir, si la partícula se observa desde el punto de vista Lagrangiano, las variables independientes son las coordenadas iniciales x_0 , y_0 , z_0 y t . De este modo, x , y , z no son más variables independientes como en el abordaje Euleriano sino variables dependientes, funciones del tiempo t y definidas por la trayectoria de la partícula.

El cambio total $\delta\alpha$ durante el tiempo δt puede ser determinado a partir del cálculo diferencial como:

$$\delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \delta z \quad (1)$$

Dividiendo por δt miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t} \quad (2)$$

El miembro izquierdo representa el cambio total en α observado en el marco de referencia Lagrangiano durante el tiempo δt , en el límite representa la derivada temporal de α (derivada Lagrangiana) la cual será simbolizada como $D\alpha/Dt$. Se note además que en el límite para $\delta t \rightarrow 0$ la relación $\delta x/\delta t \rightarrow u$ (componente del vector velocidad \mathbf{u} en la dirección x), $\delta y/\delta t \rightarrow v$ (componente del vector velocidad \mathbf{u} en la dirección y) y $\delta z/\delta t \rightarrow w$ (componente del vector velocidad \mathbf{u} en la dirección z). Por lo tanto, pasando al límite para $\delta t \rightarrow 0$ se obtiene:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial\alpha}{\partial x} + v \frac{\partial\alpha}{\partial y} + w \frac{\partial\alpha}{\partial z} \quad (3)$$

La ecuación anterior se expresa en notación vectorial como:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\alpha \quad (4)$$

O también, usando la convención de sumatoria de Einstein (donde los índices repetidos indican sumatoria), en notación tensorial o indicial tenemos:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_j \frac{\partial\alpha}{\partial x_j} \quad (5a)$$

El término $D\alpha/Dt$ se denomina derivada material, total o sustancial y representa el cambio total de la variable α evaluado respecto a un observador que sigue la trayectoria de la partícula de fluido "montado" sobre ella. Mientras que, el miembro derecho representa el cambio total de α expresado en derivadas Eulerianas, donde el primer término representa la derivada local y el segundo término las derivadas convectivas. Por lo tanto, hemos expresado la tasa de cambio $D\alpha/Dt$ en un marco de referencia Lagrangiano en función de las derivadas Eulerianas, es decir, en un marco de referencia donde se observa la misma partícula desde una posición fija en el espacio.

2.5 Aceleración

La aceleración de una partícula de fluido en un marco de referencia Lagrangiano se determina mediante la derivada material del vector velocidad \mathbf{u} . Por lo tanto, si en (4) se sustituye α por el vector velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, la aceleración se expresa como:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (5b)$$

Desarrollando (5):

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \equiv \begin{cases} a_1 = \frac{Du_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ a_2 = \frac{Du_2}{Dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ a_3 = \frac{Du_3}{Dt} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{cases} \quad (6)$$

La cual puede escribirse en forma compacta en notación indicial como:

$$a_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i = j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

Es decir, la aceleración total (Lagrangiana) se expresa en derivadas Eulerianas mediante la aceleración local y las aceleraciones convectivas en cada dirección x_j .

Nota: Obsérvese que, en tal notación tensorial o indicial, cuando aparecen dos índices iguales en un determinado término se está indicando una sumatoria respecto al índice repetido (convención de sumatoria de Einstein, ver Apéndice).

2.6 Análisis del movimiento en el entorno de un punto P

Analizando el campo de velocidad alrededor de un punto P es posible observar los distintos tipos de movimientos que puede sufrir una partícula de fluido en un instante de tiempo determinado. Expandiendo la velocidad en series de Taylor truncadas al primer orden (se desprecian infinitésimos superiores al primero) se obtiene:

$$u_i = u_i^{(P)} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (8)$$

En (8) se observa que el tensor gradiente de velocidad puede descomponerse en un tensor simétrico **S** con componentes S_{ij} y un tensor antisimétrico **R** con componentes R_{ij} (ver Apéndice):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{R_{ij}} \quad (9)$$

S es un tensor de segundo orden simétrico ($S_{ij}=S_{ji}$), denominado tensor de velocidad de deformación:

$$S_{ij} \equiv \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

S puede a su vez expresarse como **S = L + D**. Es decir, **S** puede ser descompuesto en un tensor isótropo **L** denominado tensor de velocidad de deformación normal o lineal (contracción o dilatación):

$$L_{ij} \equiv \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

y en el tensor residuo **D** denominado tensor de velocidad de deformación de corte (distorsión angular):

$$D_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & 0 & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, el tensor antisimétrico **R** de componentes $R_{ij} = -R_{ji}$ y traza nula se denomina tensor de velocidad de rotación rígida.

$$R_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & 0 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Re-escribiendo (8) se obtiene:

$$u_i = u_i^{(P)} + S_{ij} dx_j + R_{ij} dx_j \quad (10)$$

Por lo tanto, durante el movimiento, una partícula de fluido puede sufrir: (i) una traslación rígida, (ii) una deformación lineal (contracción/dilatación), (iii) una deformación de corte (distorsión angular) y (iv) una rotación rígida. En efecto, si desarrollamos (10), reordenamos y multiplicamos por dt, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) dx_3 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \right] dt \\
 & u_2 dt + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 dt + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) dx_3 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) dx_3 \right] dt \\
 & \underbrace{u_3 dt + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 dt}_{(i)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \right]}_{(ii)} dt
 \end{aligned}$$

Analizando el tensor \mathbf{R} se observa que el mismo posee tres componentes escalares, que determinan el movimiento de rotación de cuerpo rígido, expresado mediante el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (11)$$

cuyas componentes ω_1 , ω_2 y ω_3 son:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

Es decir (ver Apéndice):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{u} \quad (12)$$

Los flujos irrotacionales son aquellos en los cuales $\text{rot } \mathbf{u} = 0$.

A partir de la siguiente identidad vectorial (ver Apéndice):

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (1/2) \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \wedge (\text{rot } \mathbf{u})$$

la aceleración dada por (5b) puede escribirse también como:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) - \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u} \quad (13)$$

2.7 Volumen de control

Vimos anteriormente que el movimiento de las partículas de fluido puede ser descrito observando a las mismas desde una posición fija en el espacio (abordaje Euleriano) o siguiendo cualquier partícula (abordaje Lagrangiano). Los mismos abordajes de descripción del movimiento pueden aplicarse a un conjunto de partículas o elementos fluidos que conforman una masa finita de fluido. En este caso, desde el punto de vista Lagrangiano, dicho agregado de partículas representará un sistema fluido o volumen material, tal como definido precedentemente en el punto 2.2. Mientras que, si se observa el conjunto de partículas que ocupan instantáneamente una porción finita del espacio desde el punto de vista Euleriano, se estaría utilizando un volumen de control fijo en el espacio, que intercambia masa, momentum y energía a través de la superficie de control.

Para derivar las ecuaciones es útil seleccionar un volumen arbitrario, donde cada ley de conservación es aplicada considerando la integral sobre el volumen. Por ejemplo, la masa dentro del volumen es $\int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$, donde ρ es la densidad del fluido y la integración se realiza sobre el volumen total \mathcal{V} . Aplicando cada ley de conservación se obtiene una ecuación integro-diferencial del tipo:

$$\int_{\mathcal{V}} L\alpha d\mathcal{V}, \quad L: \text{operador diferencial.}$$

Como el volumen \mathcal{V} es elegido de forma arbitraria, el único modo que dicha ecuación sea satisfecha es especificando $L\alpha=0$, lo cual brinda la ecuación diferencial de la ley de conservación.

En este caso, para derivar las ecuaciones fundamentales se seleccionará un volumen arbitrario en un marco de referencia Lagrangiano, es decir, se utilizará un volumen material. Esto dará origen a derivadas materiales de integrales de volumen. Por lo tanto, será necesario transformar tales expresiones en ecuaciones equivalentes que involucren integrales de volumen de derivadas Eulerianas. Un teorema cinemático muy importante, que permite efectuar tal transformación, es el conocido teorema de transporte de Reynolds.

2.8 Teorema de transporte de Reynolds

Consideremos un elemento fluido y sigámoslo un intervalo de tiempo δt mientras fluye. Sea α una propiedad tal como masa, momentum en alguna dirección o energía. En el marco de referencia Lagrangiano α será solo función de t , es decir, $\alpha = \alpha(t)$ y la derivada temporal de la integral de α sobre el volumen se define mediante:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\mathcal{V}(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} \right] \right\} \quad (14)$$

donde $\mathcal{V}(t)$ es el volumen material, conteniente el elemento fluido, el cual puede cambiar su tamaño y forma mientras fluye. Restando y sumando la integral sobre $\mathcal{V}(t)$ de $\alpha(t+\delta t)$ dentro de la expresión entre corchetes del segundo miembro se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\mathcal{V}(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t+\delta t) d\mathcal{V} \right] + \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t+\delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} \right] \right\} \quad (15)$$

Las primeras dos integrales del segundo miembro indican que se mantiene el integrando fijo mientras se permite la variación del volumen \mathcal{V} . Las otras dos indican que se mantiene \mathcal{V} fijo mientras el integrando α varía (típico de un marco de referencia Euleriano). Efectivamente, las últimas dos integrales se corresponden con la integral de una derivada Euleriana respecto al tiempo (integral de una derivada local). Por lo tanto, la (15) se expresa como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\mathcal{V}(t+\delta t) - \mathcal{V}(t)} \alpha(t+\delta t) d\mathcal{V} \right] \right\} + \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (16)$$

El límite restante puede ser evaluado a partir de consideraciones geométricas. La Figura 3a) muestra el volumen $\mathcal{V}(t)$, que contiene el elemento fluido considerado, en los tiempos t y $t+\delta t$. Durante dicho intervalo de tiempo el volumen se movió aguas abajo cambiando su tamaño y forma. La superficie que encierra a $\mathcal{V}(t)$ es indicada con $\mathcal{S}(t)$, en cualquier punto de dicha superficie la velocidad es indicada con \mathbf{u} y el vector normal dirigido hacia afuera con \mathbf{n} .

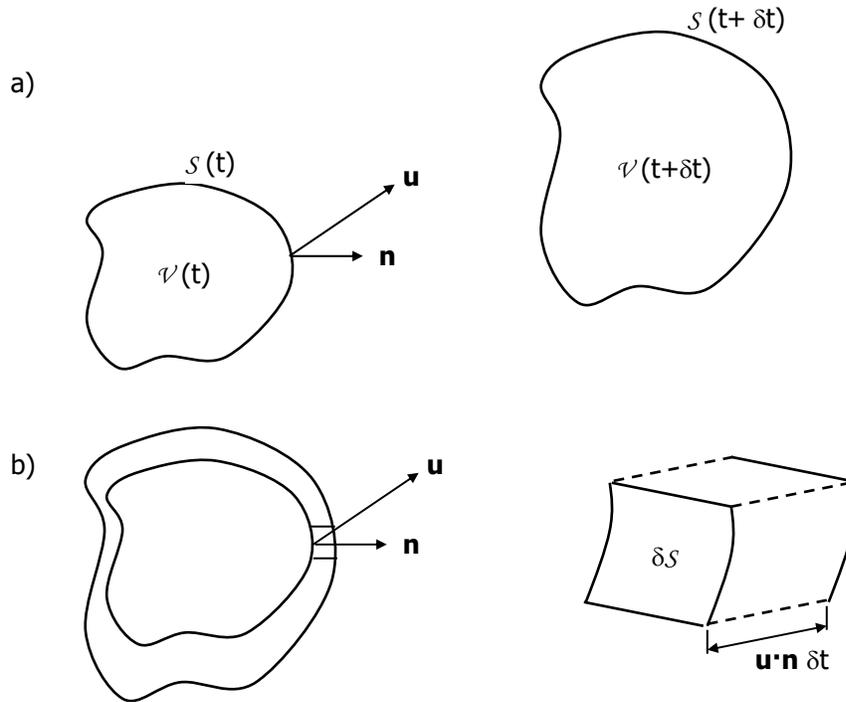


Figura 3. a) Volumen de forma arbitraria en el tiempo t y $t+\delta t$. b) Superposición de los volúmenes en t y $t+\delta t$ mostrando un elemento $\delta \mathcal{V}$ del cambio de volumen.

La Figura 3b) muestra el volumen $\mathcal{V}(t+\delta t)$ superpuesto con $\mathcal{V}(t)$ y se detalla el cambio de volumen de un elemento. La distancia perpendicular desde cualquier punto de la superficie interna hasta la superficie externa es: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t$, de manera tal que a un elemento de área δS le corresponderá un cambio de volumen: $\delta \mathcal{V} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t \delta S$. Por lo tanto, la integral de volumen en (16) puede ser transformada en una integral de superficie, en la cual $d\mathcal{V}$ es reemplazado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t dS$, obteniéndose:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S(t)} \alpha(t + \delta t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \right] + \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (17)$$

Efectuando el límite se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (18)$$

Utilizando el teorema de Gauss (ver Apéndice) para convertir la integral de superficie en una integral de volumen:

$$\int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) d\mathcal{V} \quad (19)$$

sustituyendo (19) en (18) y combinando las dos integrales de volumen se obtiene el teorema de transporte de Reynolds expresado vectorialmente como:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \alpha d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V}} \quad (20)$$

o en notación tensorial:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \alpha d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha u_j) \right] d\mathcal{V}} \quad (21)$$

Es decir, la derivada material (derivada Lagrangiana) de una integral de volumen ha sido convertida en una integral de volumen en donde el integrando contiene solo derivadas locales y convectivas (derivadas Eulerianas).

2.9 Conservación de la masa

La ley de conservación de la masa puede enunciarse como:

Un volumen material en movimiento puede cambiar de forma y tamaño, pero la masa contenida en el mismo no cambia, es decir, permanece constante.

Consideremos un volumen material \mathcal{V} arbitrario cuya masa es \mathcal{M} , si $\rho(\mathbf{x},t)$ es la densidad o masa específica (masa por unidad de volumen), entonces la masa \mathcal{M} se expresa como:

$$\mathcal{M} = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} \quad (22)$$

La equivalencia matemática de la ley enunciada más arriba se obtiene haciendo que la derivada material (Lagrangiana) D/Dt de la masa de fluido \mathcal{M} contenida en el volumen \mathcal{V} dada por (22) sea igual a cero:

$$\frac{D\mathcal{M}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = 0 \quad (23)$$

Utilizando la ecuación (21) del teorema del transporte, la (23) se escribe desde el punto de vista Euleriano como:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (24)$$

Dado que el volumen elegido es arbitrario, la ecuación integro-diferencial (24) se satisface si el integrando es cero. Por lo tanto, la ecuación diferencial que expresa la conservación de la masa es:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0} \quad (25)$$

La (25) es una de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos. Es llamada comúnmente ecuación de continuidad y es debida a Euler (1755).

En muchos casos prácticos de flujo de fluidos la variación de la densidad puede ser despreciada, como por ejemplo en los líquidos y particularmente en el agua. En ese caso el fluido se dice que es incompresible, lo cual significa que, observando el volumen material en movimiento desde el punto de vista Lagrangiano, no solo su masa permanecerá constante, sino que también el volumen y por lo tanto la densidad. Es decir, matemáticamente:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (26)$$

Para aplicar tal simplificación re-escribimos (25) expandiendo la segunda derivada, obteniendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (27)$$

El primer y segundo término de (27) representan las derivadas Eulerianas de la derivada material de ρ (ver ecuación (5a)), por lo tanto, (27) se escribe como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (28)$$

Sustituyendo en (28) la condición de incompresibilidad dada por (26) y considerando $\rho > 0$, la ecuación de continuidad para el flujo de un fluido incompresible es expresada como:

$$\boxed{\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0} \quad (29)$$

La (29) se expresa en forma vectorial como: $\text{div } \mathbf{u} = 0$ o $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Consecuencia de la ecuación de continuidad

Considerando el teorema del transporte:
$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \alpha \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha u_j) \right] d\mathcal{V}$$

y la ecuación de continuidad:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

se obtiene una relación integral válida cuando la magnitud α se expresa mediante el producto de la densidad ρ y una variable β .

Poniendo: $\alpha = \rho(\mathbf{x},t) \beta(\mathbf{x},t)$ y reemplazando en la expresión del teorema del transporte:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \beta \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial(\rho\beta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho\beta u_j) \right] d\mathcal{V}$$

Expandiendo las derivadas del segundo miembro y reordenando se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \beta \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left\{ \beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right] + \rho \left[\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial(\beta u_j)}{\partial x_j} \right] \right\} d\mathcal{V}$$

En el segundo miembro, el primer término entre corchetes es la ecuación de continuidad y por lo tanto es igual a cero, mientras que el segundo término entre corchetes es la derivada material $D\beta/Dt$. Consecuentemente, se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \beta \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{D\beta}{Dt} \, d\mathcal{V} \quad (30)$$

3. DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS TERMOCONDUCTORES

Hasta aquí se ha considerado el movimiento sin hacer referencia a las fuerzas actuantes que lo originan. A continuación, se presentan las ecuaciones fundamentales que gobiernan la dinámica de los fluidos viscosos termoconductores.

3.1 Conservación de la cantidad de movimiento (momentum). Expresión integral.

La ley de conservación de la cantidad de movimiento es, en efecto, la aplicación de la segunda ley de Newton. Consideremos un elemento fluido en movimiento que en el tiempo t ocupa el volumen $\mathcal{V}(t)$ cuya superficie de frontera es $\mathcal{S}(t)$. Suponemos que sobre el elemento actúan fuerzas de naturaleza mecánica, que supondremos además conocidas en función de la posición \mathbf{x} y del tiempo t , distinguiendo:

- Fuerzas de masa, definidas por unidad de masa y aplicadas a los elementos materiales de $\mathcal{V}(t)$. En general se trata de fuerzas gravitatorias (peso) o en algunos casos fuerzas electromagnéticas (no consideradas aquí).
- Fuerzas de superficie, definidas por unidad de área y aplicadas a los elementos superficiales de la frontera $\mathcal{S}(t)$. En general se trata de esfuerzos debido a la presión y a las tensiones de corte de origen viscoso.

La ley de conservación de la cantidad de movimiento se expresa como:

La derivada material de la cantidad de movimiento asociada al volumen material \mathcal{V} es igual a la resultante de las fuerzas aplicadas sobre sus elementos materiales.

La masa por unidad de volumen es ρ y su correspondiente cantidad de movimiento es $\rho \mathbf{u}$, de manera que, la cantidad de movimiento contenida en el volumen \mathcal{V} es: $\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V}$. Si \mathbf{f} es el vector que representa la resultante de las fuerzas de masa por unidad de masa, luego, la correspondiente fuerza neta externa actuante sobre el volumen material \mathcal{V} es: $\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V}$. Además, si \mathbf{t} es el vector que representa la resultante de las fuerzas de superficie por unidad de área, la correspondiente fuerza neta externa actuante sobre la superficie material \mathcal{S} es: $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} d\mathcal{S}$. Por lo tanto, la ley de conservación de la cantidad de movimiento se expresa matemáticamente como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} \quad (31)$$

3.2 Fuerzas de superficie y de masa

Analicemos a continuación como se deriva el campo de fuerzas de superficie y de masa que actúan sobre el volumen material.

3.2.1 Tensión en un punto. Tensor de tensiones

En general, en un punto determinado del campo fluido hay nueve componentes de tensiones, una normal y dos tangenciales sobre cada plano coordenado. Estas nueve componentes se visualizan más fácilmente usando un cubo elemental cuyas caras son ortogonales a un sistema de ejes cartesianos tal como se esquematiza en la Figura 4. A medida que los lados del cubo tienden a cero las tensiones actuarán en un punto. Las nueve componentes definen un tensor de segundo orden τ de componentes τ_{ij} simétrico ($\tau_{ij}=\tau_{ji}$) denominado tensor de tensiones (o de esfuerzos), donde i indica el plano perpendicular a x_i donde actúa τ y j indica la dirección x_j . Por ejemplo, τ_{12} actúa en el plano perpendicular a x_1 y en la dirección x_2 . Los índices iguales están indicando tensiones normales (presiones) mientras los índices distintos indican tensiones tangenciales (tensiones de corte).

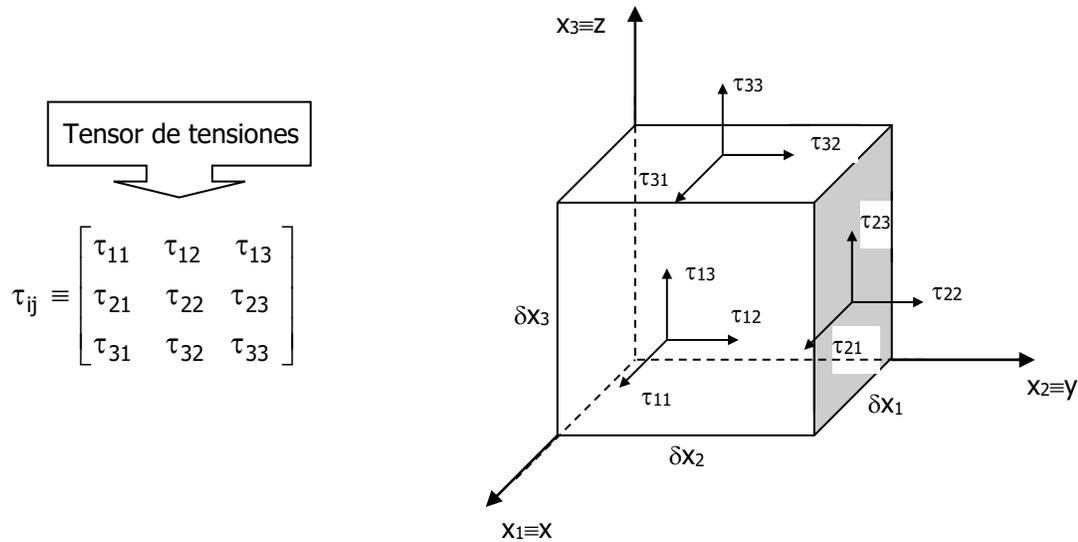


Figura 4. Cubo elemental mostrando estado de tensiones.

Observemos como se deriva tal estado de tensiones. Consideremos \mathcal{V}' una porción de \mathcal{V} para la cual S' es la superficie que lo limita. Si transformamos el primer miembro de (31) mediante la expresión (30) y luego aplicamos la ecuación (31) transformada al movimiento de \mathcal{V}' se obtiene:

$$\int_{\mathcal{V}'} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathcal{V}' = \int_{S'} \mathbf{t} dS' + \int_{\mathcal{V}'} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V}' \quad (32)$$

La ecuación (32) expresa un balance de fuerzas que debe ser satisfecho en cada instante para una elección arbitraria de \mathcal{V}' , entendido este último como un volumen material fijo instantáneamente.

Examinemos una consecuencia fundamental que se desprende de la (32) cuando se considera el límite para $\mathcal{V}' \rightarrow 0$. Sea I^3 el volumen instantáneamente ocupado por \mathcal{V}' , observando que las funciones integrandos de (32) son funciones limitadas y aplicando el teorema de la media, se obtiene que para $I \rightarrow 0$ las integrales de volumen resultan infinitésimos de orden superior respecto a las integrales de superficie. Consecuentemente:

$$\lim_{I \rightarrow 0} \frac{1}{I^2} \int_{S'} \mathbf{t} \, dS' = 0 \quad (33)$$

Es decir:

La ley de conservación de la cantidad de movimiento se reduce, a nivel local, a una condición de equilibrio de las tensiones distribuidas sobre una superficie cerrada infinitesimal que circunda un punto determinado del campo de flujo.

Explicitemos la (33) utilizando a tal fin un tetraedro con vértice en \mathbf{x} y tres caras paralelas a los planos coordenados como se esquematiza en la Figura 5. Sea además \mathbf{n} el versor normal a la cuarta cara oblicua de área $A_{(n)}$. Indicamos además con $\mathbf{t}_{(n)}$ el vector tensión actuante sobre un elemento material de normal \mathbf{n} , se decir $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \mathbf{n})$. Sea además $\mathbf{t}_{(-\mathbf{e}_j)}$ el vector actuante sobre un elemento material de normal $-\mathbf{e}_j$. Donde \mathbf{e}_j es el versor del eje coordenado x_j ($j=1,2,3$).

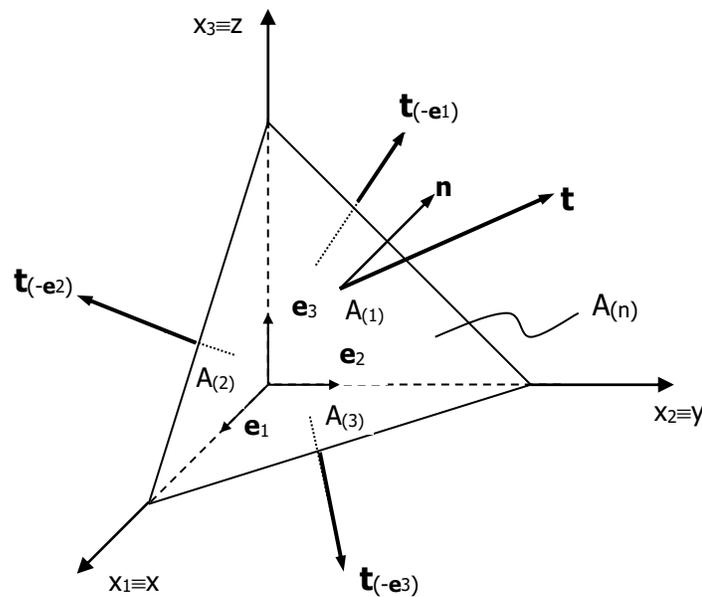


Figura 5. Tetraedro de fluido.

Recordando (ver Apéndice) que los cosenos directores de un versor (en este caso \mathbf{n}) son iguales a sus componentes, la proyección del área $A_{(n)}$ sobre los tres ejes coordenados es igual a:

$$\begin{aligned} A_{(1)} &= A_{(n)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = A_{(n)} \left\{ |\mathbf{n}| |\mathbf{e}_1| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \right\} = A_{(n)} n_1 \\ A_{(2)} &= A_{(n)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = A_{(n)} \left[|\mathbf{n}| |\mathbf{e}_2| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \right] = A_{(n)} n_2 \\ A_{(3)} &= A_{(n)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = A_{(n)} \left[|\mathbf{n}| |\mathbf{e}_3| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \right] = A_{(n)} n_3 \end{aligned} \quad (34)$$

donde $A_{(1)}$ es el área de la cara del tetraedro perpendicular al eje x_1 y así análogamente para $A_{(2)}$ y $A_{(3)}$. En general, $A_{(j)}$ área perpendicular a x_j .

Por lo tanto, desarrollando (33) se obtiene:

$$A_{(n)} \mathbf{t}_{(n)} + A_{(1)} \mathbf{t}_{(-\mathbf{e}_1)} + A_{(2)} \mathbf{t}_{(-\mathbf{e}_2)} + A_{(3)} \mathbf{t}_{(-\mathbf{e}_3)} = 0 \quad (35)$$

Reemplazando las áreas $A_{(j)}$ por las proyecciones de $A_{(n)}$ dadas por (34) y considerando el principio de acción y reacción según el cual $\mathbf{t}_{(-\mathbf{e}_j)} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{e}_j)}$ se obtiene:

$$\mathbf{t}_{(n)} = n_1 \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_1)} + n_2 \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_2)} + n_3 \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_3)} \quad (36)$$

La cual puede escribirse en forma compacta como: $\mathbf{t}_{(n)} = n_j \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_j)}$

Los vectores $\mathbf{t}_{(\mathbf{e}_j)}$ constituyen las componentes vectoriales de un tensor de segundo orden al cual llamamos tensor de tensiones τ de componentes τ_{ij} , simétrico ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$). Para poner en evidencia las componentes escalares de τ , se pueden escribir las componentes vectoriales $\mathbf{t}_{(\mathbf{e}_j)}$ en función de las respectivas componentes escalares:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_1)} &= \tau_{11} \mathbf{e}_1 + \tau_{12} \mathbf{e}_2 + \tau_{13} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_2)} &= \tau_{21} \mathbf{e}_1 + \tau_{22} \mathbf{e}_2 + \tau_{23} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_{(\mathbf{e}_3)} &= \tau_{31} \mathbf{e}_1 + \tau_{32} \mathbf{e}_2 + \tau_{33} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (37)$$

Indicando ahora con $\mathbf{t}(x_1)$, $\mathbf{t}(x_2)$, $\mathbf{t}(x_3)$ las componentes de $\mathbf{t}_{(n)}$ actuantes en la dirección de cada uno de los ejes coordenados, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x_1) &= n_1 \tau_{11} + n_2 \tau_{21} + n_3 \tau_{31} \\ \mathbf{t}(x_2) &= n_1 \tau_{12} + n_2 \tau_{22} + n_3 \tau_{32} \\ \mathbf{t}(x_3) &= n_1 \tau_{13} + n_2 \tau_{23} + n_3 \tau_{33} \end{aligned} \quad (38)$$

Es decir, de acuerdo a la definición de producto mixto dada en el Apéndice, las expresiones (38) se pueden escribir en forma compacta vectorial como:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (39)$$

o, como $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico: $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$. La (39) se expresa en forma compacta tensorial o indicial como:

$$t_j = \tau_{ij} n_i \quad (40)$$

El desarrollo que conduce a la (40) es debido sustancialmente a Cauchy (1827).

3.2.2 Fuerzas de cuerpo o de masa

Consideremos las fuerzas de cuerpo, analizando expresiones del vector \mathbf{f} en el caso de que la principal fuerza de cuerpo es debida a la acción de la gravedad. Supongamos un plano horizontal en la dirección x_2 e inclinado un ángulo φ en la dirección x_1 , tal como se esquematiza en la Figura 6, donde \mathbf{k} indica el vector unitario (versor) en la dirección vertical positiva hacia arriba.

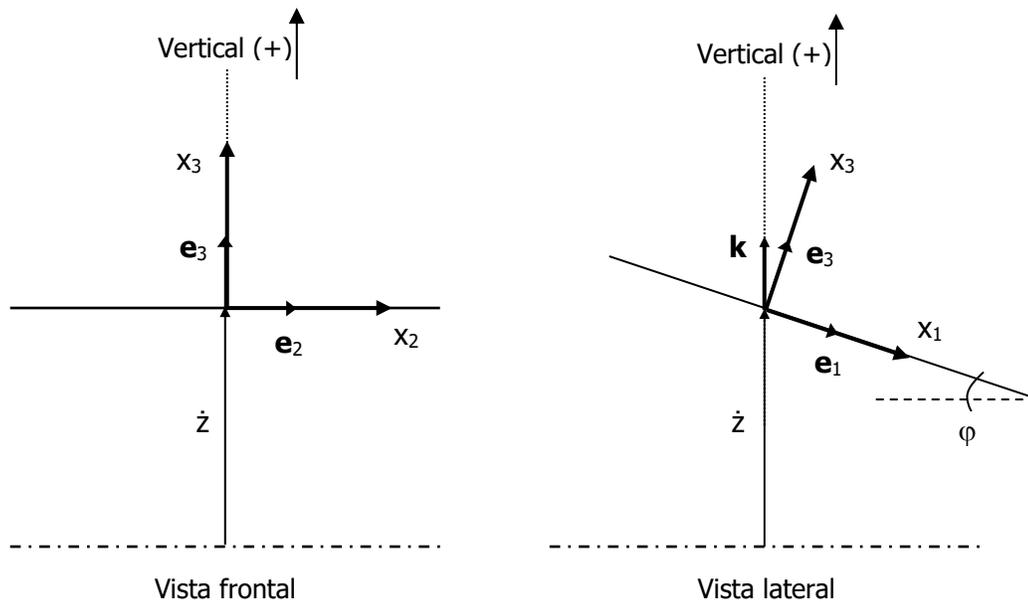


Figura 6. Esquemización campo de fuerza gravitacional.

El vector \mathbf{f} tiene componentes f_1 , f_2 y f_3 en la dirección de cada eje coordenado. Dichas componentes quedan definidas mediante:

$$f_i = -g \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i \quad (41)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -g \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1 = -g |\mathbf{k}| |\mathbf{e}_1| \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1) = -g \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1) \\ f_2 &= -g \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2 = -g |\mathbf{k}| |\mathbf{e}_2| \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_2) = -g \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_2) \\ f_3 &= -g \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 = -g |\mathbf{k}| |\mathbf{e}_3| \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3) = -g \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

De la Figura se observa que:

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1) &= \cos(90^\circ + \varphi) = -\operatorname{sen} \varphi \\ \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_2) &= \cos(90^\circ) = 0 \\ \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3) &= \cos \varphi \end{aligned}$$

Consecuentemente, las componentes de \mathbf{f} son:

$$\begin{aligned} f_1 &= g \operatorname{sen} \varphi \\ f_2 &= 0 \\ f_3 &= -g \cos \varphi \end{aligned}$$

Por otra parte, si φ es pequeño (pendiente del plano inclinado S del 10% o menos) se puede considerar:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{tg} \varphi = S = -\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_1} \\ \cos \varphi &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este último caso, tenemos:

$$f_i = (gS, 0, -g) \quad (42)$$

Si el plano es horizontal:

$$f_i = (0, 0, -g) \quad (43)$$

3.3 Conservación de la cantidad de movimiento. Expresión diferencial

Reemplazando en (31) la expresión de la resultante de las fuerzas de superficie dada por (39) se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V} = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} \quad (44)$$

La misma ecuación en notación tensorial o indicial se expresa como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u_i d\mathcal{V} = \int_S \tau_{ij} n_j dS + \int_{\mathcal{V}} \rho f_i d\mathcal{V} \quad (45)$$

Utilizando el teorema del transporte, el miembro izquierdo se puede convertir en una integral de volumen donde el integrando contiene solo derivadas Eulerianas. En este caso la propiedad α del flujo es la cantidad de movimiento por unidad de volumen ρu_i en la dirección x_i :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u_i d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] d\mathcal{V}$$

Además, mediante el teorema de Gauss, la integral de superficie en el miembro derecho de (45) se puede convertir en una integral de volumen:

$$\int_S \tau_{ij} n_i d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\mathcal{V}$$

(en la última igualdad, dada la simetría de τ , se puede derivar respecto a x_j en vez de respecto a x_i sin alterar la ecuación)

Por lo tanto, sustituyendo en (45) se obtiene:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \rho f_i d\mathcal{V} \quad (46)$$

Todas las integrales de volumen en (46) se pueden juntar en una única expresión integro-diferencial del tipo $\int_{\mathcal{V}} \{ \} d\mathcal{V} = 0$. Dada la arbitrariedad del volumen elegido, el integrando es la ecuación diferencial, expresada en un marco de referencia Euleriano, que representa las leyes básicas de la dinámica del flujo de fluidos viscosos termoconductores:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (47)$$

Expandiendo convenientemente las derivadas del miembro izquierdo se obtiene:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (48)$$

El segundo y tercer término del miembro izquierdo se pueden eliminar ya que representan la ecuación de continuidad (25) multiplicada por u_i . Por lo tanto, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (momentum) es:

$$\boxed{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i} \quad (49)$$

Como mencionado anteriormente, la (49) se fundamenta a partir de la segunda ley de Newton. Efectivamente, se note que el miembro izquierdo representa la fuerza de inercia (masa por aceleración) por unidad de volumen: $\mathcal{M} \mathbf{a} / \mathcal{V} = \rho \mathbf{Du}/Dt$ y el miembro derecho el correspondiente campo de fuerzas externas aplicado.

La (49) es la segunda ecuación fundamental de la Mecánica de Fluidos. Ahora es necesario especificar las ecuaciones constitutivas que permitan expresar el tensor de tensiones τ_{ij} en función del tensor de velocidad de deformación S_{ij} .

3.4 Ecuaciones constitutivas para fluidos Newtonianos

Un fluido viscoso solicitado por una velocidad de deformación responde con un estado general de tensiones. Por analogía con la teoría de elasticidad de Hooke la suposición más simple consiste en asumir que las tensiones viscosas son una función lineal de la velocidad de deformación. Tales consideraciones fueron realizadas por primera vez por Stokes (1845), aunque Newton (1687) también había supuesto dicha relación entre tensión y gradiente de velocidad en el caso de un flujo paralelo. Los postulados de Stokes se sintetizan de la siguiente manera:

1. El tensor de tensiones τ_{ij} es una función lineal del tensor de velocidad de deformación S_{ij} y depende solamente de ese tensor, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{S})$.
2. El fluido es isótropo, es decir, sus propiedades son independientes de la dirección. Por lo tanto, τ_{ij} y S_{ij} son independientes de la orientación del sistema de ejes coordenados.
3. Cuando las velocidades de deformación son nulas la ley constitutiva debe reducirse a la condición de presión hidrostática. Es decir, $\mathbf{S} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I}$, ($\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$).

La ley constitutiva resultante, también conocida como ley de viscosidad de Stokes, se expresa como:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \quad (50)$$

donde:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (51)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_{jj} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (52)$$

δ_{ij} es el delta de Kronecker, μ es la viscosidad dinámica (también denominado primer coeficiente de viscosidad o viscosidad asociada a tensiones tangenciales) y λ es el coeficiente de viscosidad de volumen o segundo coeficiente de viscosidad.

En el caso del flujo de un fluido viscoso incompresible ($\text{div } \mathbf{u}=0$) la ley constitutiva se expresa mediante:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (53)$$

3.5 Significado de la presión dinámica. Presión termodinámica versus presión media

Notemos que la presión p en (50) es la presión de naturaleza termodinámica. Por otra parte, la presión media en un fluido en movimiento se define mediante un tercio del primer invariante del tensor de tensiones o un tercio de la traza del tensor de tensiones, es decir:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \tau_{ii} \quad (54)$$

Desarrollando la parte con índices iguales de (50) y sumando cada ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{3} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = -p + \left(\frac{2}{3} \mu + \lambda \right) \text{div } \mathbf{u} \quad (55)$$

Por lo tanto, introduciendo (54) en (55), se obtiene:

$$\bar{p} = p - \left(\frac{2}{3} \mu + \lambda \right) \text{div } \mathbf{u} \quad (56)$$

Se observa que la presión media en un fluido viscoso en movimiento no es igual a la presión termodinámica. Esto ha sido motivo de una larga controversia, documentada excelentemente por Truesdell (1954). Stokes (1845) observó dicha particularidad, que surgía de la ley constitutiva (50), proponiendo: $(2/3) \mu + \lambda = 0$.

Tal proposición resuelve el problema. Sin embargo, existe evidencia experimental que indica que para gases poliatómicos y para líquidos λ es positivo (en vez de $-2\mu/3$) y mucho mayor que μ . Los experimentos también han sido objeto de controversias (Truesdell, 1954). Es necesario señalar que la influencia de λ es apreciable solo en el caso de efectos de compresibilidad importantes.

Por otra parte, en un fluido incompresible:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \bar{p} = p$$

3.6 Ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos termoconductores

Las ecuaciones dinámicas que gobiernan el caso más general del flujo de un fluido viscoso termoconductor se obtienen sustituyendo las ecuaciones constitutivas de fluidos Newtonianos (50) en las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento (49). Se obtienen así las ecuaciones de Navier (1823) y Stokes (1845):

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [-p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij}] + \rho f_i \quad (57)$$

Sustituyendo (51) y (52) en (57) y reordenando:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i \quad (58)$$

Se trata de tres ecuaciones escalares, una para cada valor que adopta el índice libre i , es decir, una para cada dirección del sistema de ejes coordenados.

Si se considera que el fluido es incompresible y que la viscosidad dinámica es constante, el segundo término del miembro derecho se anula (es la ecuación de continuidad (29)) y el término de tensiones viscosas entre corchetes se puede expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Es decir, el término de tensiones viscosas es proporcional al Laplaciano del vector velocidad, siendo la constante de proporcionalidad la viscosidad dinámica. Consecuentemente, las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de un fluido viscoso incompresible con viscosidad constante, expresadas en notación tensorial o indicial son:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (59)$$

o en notación vectorial:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (60)$$

Esta última forma de la ecuación es debida a Navier (1823).

3.7 Conservación de la energía. Primera ley de la Termodinámica

La ley de conservación de la energía se fundamenta en la aplicación de la primera ley de la termodinámica a un volumen material. En este caso se considera que la energía instantánea del fluido esta compuesta por la energía intrínseca o interna por unidad de masa: e y por la energía cinética por unidad de masa: $(1/2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. De esta manera, la ley de conservación de la energía puede expresarse como:

La derivada material de la energía total (interna+cinética) asociada al volumen material \mathcal{V} es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas más el calor adicionado por conducción.

El enunciado de la ley de conservación de la energía se expresa matemáticamente mediante:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathcal{V} = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (61)$$

donde \mathbf{q} es el vector de flujo térmico que sale del volumen material y \mathbf{n} el vector unitario normal exterior, por lo tanto, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ indica la cantidad de calor que se transfiere al exterior de \mathcal{V} por unidad de tiempo a través de la superficie S .

En el miembro derecho, la primera integral de superficie se escribe en notación indicial con la ayuda de (40) y posteriormente se convierte en una integral de volumen mediante el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS = \int_S u_j \tau_{ij} n_i dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial (u_j \tau_{ij})}{\partial x_i} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial (u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} d\mathcal{V}$$

(la última igualdad es posible gracias a la simetría del tensor de tensiones). Por otra parte, la segunda integral de volumen se escribe en notación indicial como:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} u_i \rho f_i d\mathcal{V}$$

y la tercera integral de superficie se escribe en notación indicial y posteriormente se convierte en una integral de volumen mediante el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S q_j n_j dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} d\mathcal{V}$$

Por lo tanto, la ecuación integro-diferencial que se obtiene después de aplicar el teorema de transporte de Reynolds es:

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) u_j \right] \right\} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial (u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} u_i \rho f_i d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} d\mathcal{V}$$

Dado que \mathcal{V} es arbitrario, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) u_j \right] = \frac{\partial (u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} + u_i \rho f_i - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (62)$$

Expandimos el primer término del miembro izquierdo de (62):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \cancel{e \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) + \cancel{\frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Expandimos el segundo término del miembro izquierdo de (62):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) u_j \right] &= \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} + e \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) + \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = \\ &= \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} - \cancel{e \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) - \cancel{\frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t}} \end{aligned}$$

en esta última se ha utilizado la ecuación de continuidad (25) para transformar el segundo y cuarto término. Cuando estas dos expresiones se suman los términos tachados se cancelan.

Expandimos el primer término del miembro derecho de (62):

$$\frac{\partial (u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Reemplazamos en (62):

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} + \cancel{\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \cancel{\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \cancel{u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cancel{u_i \rho f_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (63)$$

Los términos tachados en (63) se cancelan ya que en ellos se reconoce a la ecuación de momentum (49) multiplicada por u_i . La ecuación de momentum multiplicada por la velocidad da la energía cinética de naturaleza puramente mecánica. Obsérvese que los términos tachados se pueden escribir como:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{E}_c}{Dt} = u_i \rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) = u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + u_i \rho f_i} \quad (64)$$

Se note que el producto entre u_i y la derivada del tensor de tensiones esta indicando el producto escalar entre dos vectores. El mismo representa la energía utilizada para deformar los elementos fluidos.

Por lo tanto, volviendo a (63), la ecuación correspondiente a la energía de naturaleza termodinámica es:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{E}_{in}}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}} \quad (65)$$

En este caso, además de la ley constitutiva dada por (50), se requiere una segunda ley constitutiva que permita vincular el flujo térmico q_j con la temperatura. La segunda ley constitutiva está dada por la ley de Fourier de conducción del calor, la cual establece que el flujo térmico es proporcional al gradiente del campo escalar de temperatura T .

$$q_j = -K \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (66)$$

donde K es la conductividad térmica. El signo menos indica que el flujo térmico se difunde desde zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura.

Analicemos el término de (65) que representa el trabajo realizado por las fuerzas de superficie para deformar los elementos fluidos:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \left[-p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2 \mu S_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left[-p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &= \left[-p \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

donde τ_{ij} se reemplazó por la ley constitutiva para fluidos Newtonianos (50).

El primer término representa la transferencia de energía reversible debida a las fuerzas de compresión, mientras que, los dos términos restantes se denominan conjuntamente función de disipación:

$$\Phi = \left[\lambda \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$$

que representa la tasa con la cual la energía mecánica (trabajo realizado por las fuerzas de superficie para deformar los elementos fluidos) es convertida en energía térmica y disipada en forma de calor. Se trata de una transferencia de energía de tipo irreversible.

El segundo término se puede expresar como:

$$\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 2\mu S_{ij} (S_{ij} + R_{ij})$$

donde se ha reemplazado el gradiente de velocidad por el tensor de velocidad de deformación S_{ij} más el tensor de velocidad de rotación rígida R_{ij} (como se hizo en el punto 2.6). Consecuentemente, la función de disipación se puede escribir como:

$$\Phi = \left\{ \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu (\mathbf{S} : \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbf{R}) \right\}$$

se note que el doble producto escalar entre el tensor simétrico \mathbf{S} y el tensor antisimétrico \mathbf{R} es nulo, $\mathbf{S} : \mathbf{R} = 0$ (ver Apéndice). Por lo tanto:

$$\Phi = \left\{ \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu (\mathbf{S} : \mathbf{S}) \right\} = \left[\lambda \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (67)$$

Mediante la función de disipación Φ el término de trabajo de las fuerzas de superficie se expresa, en notación vectorial y tensorial, como:

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \Phi = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi \quad (68)$$

Sustituyendo (68) y la ley constitutiva térmica (66) en (65) se obtiene la ecuación de conservación de la energía (de naturaleza termodinámica) para un fluido Newtoniano:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi \quad (69)$$

donde Φ es definido por (67). Esta es la tercera ecuación fundamental de la Mecánica de Fluidos.

La misma ecuación (69) en notación vectorial es (incorporando (67)):

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) e = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \nabla(KT) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu (\mathbf{S} : \mathbf{S}) \quad (70)$$

3.8 Síntesis de las ecuaciones para el flujo de fluidos viscosos termoconductores

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del flujo de fluidos viscosos termoconductores son: la ecuación de continuidad (25), las ecuaciones de Navier-Stokes (58), la ecuación de la energía (69) y las ecuaciones de estado. Resumiendo, repetimos las ecuaciones escritas en notación tensorial o indicial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

$$p = p(\rho, T)$$

$$e = e(\rho, T)$$

Las últimas expresiones son relaciones generales de las ecuaciones de estado. La forma más frecuente de la ecuación de estado térmico para un gas perfecto es:

$$p = \rho R T$$

donde R es una constante para el gas en cuestión y T la temperatura.

Por otra parte, la más frecuente forma de la ecuación de estado calórico es:

$$e = c_v T$$

donde c_v es el calor específico a volumen constante.

El sistema de ecuaciones para el flujo de fluidos viscosos termoconductores está formado por siete ecuaciones, las cuales deben ser satisfechas por siete incógnitas. La ecuación de continuidad, la ecuación de la energía y las dos ecuaciones de estado proporcionan una ecuación escalar cada una, mientras que, las ecuaciones de Navier-Stokes proporcionan tres ecuaciones escalares, una para cada dirección del sistema de ejes coordenados. Las siete incógnitas son la presión, la densidad, la energía interna, la temperatura y las tres componentes del vector velocidad, es decir, p , ρ , e , T y u_i ($i=1,2,3$). Los parámetros λ , μ y K son conocidos a partir de datos experimentales y pueden ser constantes o funciones de la temperatura y la presión.

3.9 Ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos incompresibles

Si los efectos de compresibilidad pueden ser despreciados, se pueden adoptar las ecuaciones gobernantes para el caso del flujo de fluidos viscosos incompresibles. Es decir, en este caso la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes adoptan una forma más simple, tal como se presentan en (29) y (59) respectivamente. Sin embargo, en este caso la simplificación más importante se relaciona con la posibilidad de desacoplar el problema mecánico del problema termodinámico. Es decir, la ecuación de la energía puede desacoplarse de las otras dos (continuidad y momentum). La temperatura, la densidad y la viscosidad dinámica pueden suponerse constantes. Consecuentemente, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes proporcionan cuatro ecuaciones escalares y tienen como incógnitas a la presión p y a las tres componentes del vector velocidad \mathbf{u} . Dichas ecuaciones se expresan en notación tensorial como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i$$

y en notación vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

3.10 Ecuaciones de Euler para el flujo de fluidos no viscosos

Si en las ecuaciones de Navier-Stokes se desprecian los términos correspondientes a las fuerzas de origen viscoso se obtienen las ecuaciones dinámicas para un fluido no viscoso, tal como derivadas por Euler (1755).

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler quedan expresadas en notación tensorial como:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (71)$$

y en notación vectorial:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (72)$$

Si el fluido es considerado compresible o incompresible, a la ecuación (71) se le debe agregar la ecuación de continuidad correspondiente.

4. ECUACIONES DE LA HIDROSTÁTICA Y DE CONDUCCIÓN DEL CALOR

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del flujo de fluidos viscosos termoconductores también contienen las ecuaciones de la hidrostática y de conducción del calor como casos particulares.

Para un fluido termoconductor en reposo las componentes del vector velocidad serán nulas, por lo tanto, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes resultan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (73)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (74)$$

Se observa que en un fluido termoconductor en reposo la densidad es localmente constante. Por otra parte, introduciendo la entalpía: $\hat{h} = e + p/\rho$ y considerando que p y ρ son constantes (independientes de t) la ecuación de la energía resulta:

$$\rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (75)$$

donde se ha considerado K constante, además, siendo la entalpía \hat{h} solo función de la temperatura, podemos escribir que:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

donde c_p es el calor específico a presión constante (que es el proceso adecuado en este caso). Por lo tanto, la ecuación de la energía se transforma en la ecuación de conducción del calor o ecuación de Fourier (Fourier, 1822):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (76)$$

Si las fuerzas de cuerpo se deben a la acción del campo gravitacional terrestre, tal como especificado por la ecuación (43), el vector \mathbf{f} queda determinado por:

$$\mathbf{f}_i \equiv (f_1, f_2, f_3) = (0, 0, -g)$$

Por lo tanto, desarrollando (74) se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g} \quad (77)$$

Se observa que los planos horizontales son superficies isobáricas (igual presión o presión uniforme), mientras que, la presión puede variar solo con la cota z . Por otra parte, de la ecuación de estado $p=p(\rho, T)$, o $\rho=\rho(p, T)$, se induce además que los planos horizontales constituyen superficies isotérmicas (temperatura uniforme) e isosteras (densidad uniforme). Superficies horizontales son las superficies de separación entre fluidos diferentes, por ejemplo, la superficie libre del agua en un reservorio divide el líquido y el aire, es decir, dos fluidos de densidades diferentes.

Por lo tanto, para un fluido termoconductor en reposo las ecuaciones se reducen a la ecuación general de la hidrostática (válida para fluidos compresibles e incompresibles) y a la ecuación del calor:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\rho = \rho(p, T)$$

4.1 Determinación de la distribución vertical de presión

A los efectos de calcular la presión es necesario considerar la variación de la densidad en función de la variación de p y T con la cota z . Tal consideración es necesaria si se quiere determinar en forma precisa la presión en grandes masas fluidas, sujetas al campo gravitacional terrestre, como la hidrósfera y la atmósfera. Sin embargo, para pequeñas masas de agua en equilibrio bajo la acción del campo gravitacional terrestre es posible considerar que la densidad es uniforme.

Integrando la ecuación:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

desde la cota z donde existe una presión incógnita p hasta otra cota z_0 para la cual la presión es p_0 conocida, en un medio fluido de peso específico uniforme γ , se obtiene:

$$\int_p^{p_0} dp = -\gamma \int_z^{z_0} dz$$

$$p_0 - p = -\gamma (z_0 - z) \quad (78)$$

El resultado establece que la magnitud:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \text{const.}$$

mantiene el mismo valor en todos los puntos de una masa fluida de peso específico uniforme que se encuentre en reposo bajo la influencia del campo gravitatorio. La utilidad práctica de esta magnitud justifica la introducción de una terminología detallada. Se dice, por lo tanto, que la relación:

$$\frac{p}{\gamma}$$

entre presión y peso específico constituye una magnitud representativa de la presión p expresada en altura de columna de fluido de peso específico γ , denominada altura piezométrica, y su suma con la cota z se denomina cota piezométrica (o nivel piezométrico).

Considerando un líquido con superficie libre (ver Figura 7) donde en z_0 reina la presión atmosférica p_a , de (78) se obtiene:

$$p = p_a + \gamma(z_0 - z) = p_a + \gamma h$$

Generalmente se debe distinguir entre la presión absoluta p y la presión relativa $p-p_a$, es decir, la presión referida a la atmosférica. En la Figura 7 se indican las distribuciones de las dos presiones en la vertical. Se observa que, considerando la presión relativa, el plano horizontal de presiones nulas (altura piezométrica) coincide con la superficie libre del líquido.

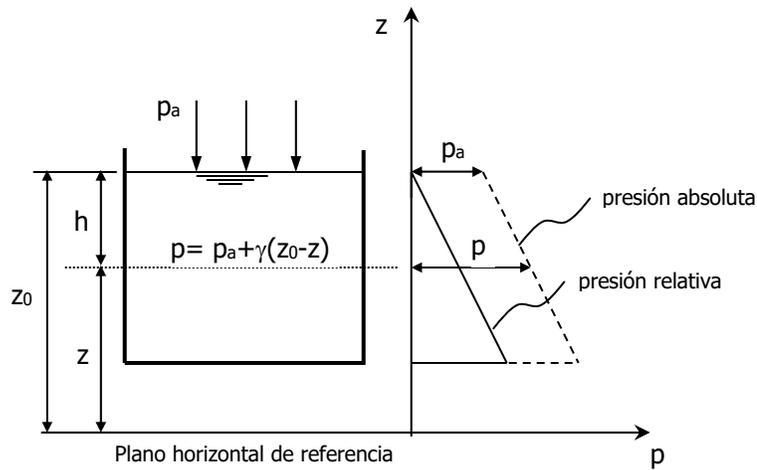


Figura 7. Distribución de la presión (absoluta y relativa).

En el caso de dos líquidos no miscibles de pesos específicos γ_1 y γ_2 con $\gamma_1 < \gamma_2$ se obtiene (ver Figura 8):

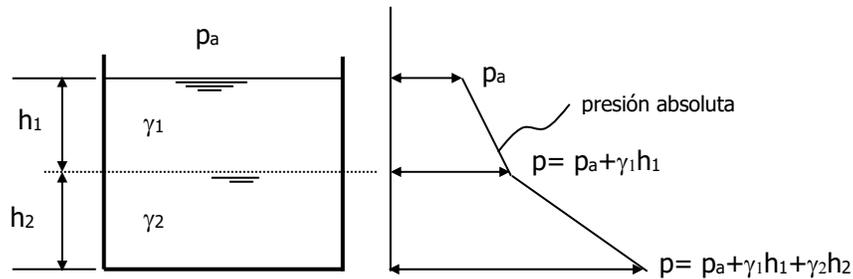


Figura 8. Distribución de la presión absoluta (distintos pesos específicos).

Finalmente, es necesario señalar que la distribución hidrostática de presión es válida aún para un fluido en movimiento siempre que la componente u_3 del vector velocidad \mathbf{u} pueda ser despreciada (curvatura vertical moderada de las líneas de corriente).

5. BIBLIOGRAFÍA

- Abbot, M.B. y Basco, D.R. (1989). COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS. John Wiley & Sons, New York.
- Currie, I.G. (1974). FUNDAMENTAL MECHANICS OF FLUIDS. McGraw Hill, Inc., New York.
- Marchi y Rubatta (1981). MECCANICA DEI FLUIDI. UTET-Torino, Italia.
- Mott, R.L. (2006). MECÁNICA DE FLUIDOS APLICADA. Prentice-Hall; 2006; IV Ed.
- Seminara, G. (1993). Introduzione ai Fondamenti della Meccanica dei Fluidi. Collana didattica, Dottorato in Idrodinamica, Università di Genova, Italia.
- Shames, I.H. (2003). MECHANICS OF FLUIDS. McGraw Hill, 4th Ed., 2003.
- White, F.M. (2004). MECÁNICA DE FLUIDOS. McGraw-Hill, V Ed., 2004.
- Yunus Cengel (2006). MECÁNICA DE FLUIDOS. McGraw-Hill, 2006.

6. APENDICE

FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA, DINÁMICA Y ESTÁTICA DE FLUIDOS VISCOSOS TERMOCONDUCTORES

1. SISTEMA DE REFERENCIA

2. CAMPOS ESCALARES, VECTORIALES Y TENSORIALES

2.1 Campos escalares

2.2 Campos vectoriales

2.3 Campos tensoriales de segundo orden

3. OPERACIONES ALGEBRAICAS CON CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

3.1 Módulo de un vector

3.2 Proyección de un vector sobre otro

3.3 Producto escalar

3.4 Producto vectorial

3.5 Producto mixto

3.6 Doble producto escalar entre tensores

4. OPERACIONES DIFERENCIALES CON CAMPOS ESCALARES, VECTORIALES Y TENSORIALES

4.1 Operador diferencial vectorial nabra

4.2 Gradiente

4.3 Divergencia

4.4 Divergencia del gradiente (Laplaciano)

4.5 Rotor

4.6 Divergencia de un tensor de segundo orden

5. IDENTIDADES VECTORIALES

6. TRANSFORMACIÓN DE INTEGRALES

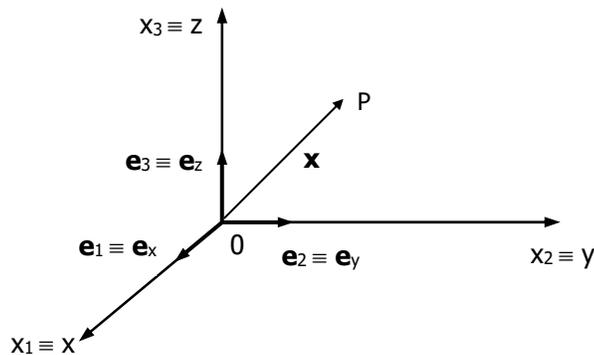
6.1 Teorema de Gauss (o de la divergencia)

6.2 Teorema del gradiente

6.3 Teorema de Stokes

1. SISTEMA DE REFERENCIA

Se considera un sistema de coordenadas espaciales cartesianas ortogonales x, y, z ; cuyos versores (vectores de longitud unitaria) asociados a cada eje coordenado son $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Alternativamente, cuando se utiliza la notación tensorial por índices o indicial, los ejes coordenados se representan respectivamente con x_1, x_2, x_3 y los correspondientes versores con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Un punto P del espacio será indicado mediante sus coordenadas x, y, z , o recurriendo al vector posición \mathbf{x} de componentes x, y, z o x_1, x_2, x_3 : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z) = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$. El tiempo se indica con t .



2. CAMPOS ESCALARES, VECTORIALES Y TENSORIALES

2.1 Campos escalares

Un escalar se indica sin negrita, por ejemplo: b . Los campos escalares $b(\mathbf{x}, t)$ (densidad, temperatura, etc.) se especifican mediante:

$$b = b(x, y, z, t) \equiv b(x_1, x_2, x_3, t) = b(\mathbf{x}, t)$$

Un campo escalar es un tensor de orden cero.

2.2 Campos vectoriales

Un vector se indica mediante letras minúsculas en negrita, por ejemplo: \mathbf{b} . Los campos vectoriales $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, cuyas componentes en la dirección de cada eje coordenado son campos escalares $b_j(\mathbf{x}, t)$, se indican mediante:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} b_x(\mathbf{x}, t) \equiv b_1(\mathbf{x}, t) \\ b_y(\mathbf{x}, t) \equiv b_2(\mathbf{x}, t) \\ b_z(\mathbf{x}, t) \equiv b_3(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

de manera que el vector \mathbf{b} en el sistema de coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$$

Un campo vectorial es un tensor de primer orden, el cual puede ser indicado con la siguiente escritura matricial:

$$\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad b_j \equiv \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

En notación tensorial o indicial, un índice j solo (puede ser i, k , etc.) es un índice libre que toma los valores 1, 2 y 3.

2.3 Campos tensoriales de segundo orden

Un tensor de segundo orden se indica mediante letras mayúsculas en negrita, por ejemplo: \mathbf{B} . Los campos tensoriales de segundo orden $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ tienen por componentes, en la dirección de cada eje coordenado, a campos vectoriales $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{e}_j)$. Cada uno de estos campos vectoriales tienen por componentes a tres campos escalares, por lo tanto, los campos tensoriales de segundo orden tienen 9 componentes escalares B_{ij} , las cuales se indican mediante la siguiente escritura matricial:

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B_{ij} \equiv \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

La B_{ij} es la componente escalar en la dirección del eje j de la componente del vector asociado al eje i . En el cuadro se observan *términos diagonales* caracterizados por índices iguales y *términos rectangulares* caracterizados por índices distintos. El tensor representado en el cuadro es simétrico si $B_{ij} = B_{ji}$, mientras es antisimétrico si $B_{ij} = -B_{ji}$.

La suma de los términos diagonales ($B_{ij}, i=j$) se denomina traza y cuando la traza es nula (como ocurre en los tensores antisimétricos) se denomina desviador. Además, si $C_{ij} = \delta_{ij} B_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker, el tensor \mathbf{C} es isótropo. El delta de Kronecker se expresa como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases}$$

Un tensor isótropo es el tensor unidad \mathbf{I} , con cuadro:

$$\mathbf{I}_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyas componentes son $I_{ij} = \delta_{ij}$.

Si el tensor \mathbf{B} es simétrico existen tres invariantes que son independientes de la dirección de los ejes coordenados del sistema de referencia, tales invariantes se expresan como:

$$I_1 = B_{11} + B_{22} + B_{33}$$

$$I_2 = B_{11}B_{22} + B_{22}B_{33} + B_{33}B_{11} - B_{12}^2 - B_{23}^2 - B_{31}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$$

Otra propiedad importante de los tensores simétricos es que existe solo una orientación de los ejes coordenados para la cual todos los términos rectangulares (B_{ij} , $i \neq j$) son nulos. Estos se denominan ejes principales para los cuales el tensor \mathbf{B} es isótropo con componentes ($\delta_{ij} B_{ij}$):

$$\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}$$

En este caso, los tres invariantes del tensor resultan:

$$I_1 = B_{11} + B_{22} + B_{33}$$

$$I_2 = B_{11}B_{22} + B_{22}B_{33} + B_{33}B_{11}$$

$$I_3 = B_{11}B_{22}B_{33}$$

3. OPERACIONES ALGEBRAICAS CON CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

Además de la suma, que se realiza sobre las componentes homónimas y de la multiplicación por un escalar, que se efectúa sobre todas las componentes; se pueden realizar las operaciones algebraicas que se describen a continuación.

3.1 Módulo de un vector

El módulo de un vector se define mediante:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

3.2 Proyección de un vector sobre otro

La proyección \mathbf{b}' de un vector \mathbf{b} sobre otro vector \mathbf{c} se define como:

$$\mathbf{b}' = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

donde (\mathbf{b}, \mathbf{c}) es el ángulo entre los dos vectores.

Se denominan primer, segundo y tercer coseno director $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ de un vector \mathbf{b} al ángulo que \mathbf{b} forma con el primero, segundo y tercer versor de la base respectivamente.

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1) = \theta_1$$

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_2) = \theta_2$$

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_3) = \theta_3$$

Los cosenos directores de un vector \mathbf{b} son las componentes del versor que tiene igual dirección y sentido que \mathbf{b} . En efecto, proyectando el vector \mathbf{b} sobre la base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se obtiene:

$$b_1 = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1) \rightarrow \frac{b_1}{|\mathbf{b}|} = \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1) = \theta_1$$

$$b_2 = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_2) \rightarrow \frac{b_2}{|\mathbf{b}|} = \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_2) = \theta_2$$

$$b_3 = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_3) \rightarrow \frac{b_3}{|\mathbf{b}|} = \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_3) = \theta_3$$

Es decir:

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\frac{b_1}{|\mathbf{b}|}, \frac{b_2}{|\mathbf{b}|}, \frac{b_3}{|\mathbf{b}|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{b}|} (b_1, b_2, b_3) = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{b}_0$$

Esto es equivalente a decir que las componentes de un versor son iguales a sus cosenos directores.

3.3 Producto escalar

El producto escalar o producto interno entre dos vectores \mathbf{b} y \mathbf{c} es definido como:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

donde (\mathbf{b}, \mathbf{c}) es el ángulo entre los dos vectores. Se trata del producto entre el módulo de uno de ellos y la proyección del otro sobre él. Si \mathbf{b} ni \mathbf{c} son nulos, pero $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, entonces \mathbf{b} y \mathbf{c} son perpendiculares.

Para los versores de una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vale:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

Lo cual se puede escribir en forma compacta como: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Si en la expresión del producto escalar consideramos $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1$, recordando que $|\mathbf{e}_1| = 1$, se obtiene:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{b}| |\mathbf{e}_1| \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1) = b_1$$

Es decir, la componente b_1 del vector \mathbf{b} es igual al producto escalar entre el vector \mathbf{b} y el versor \mathbf{e}_1 . Análogamente para los otros ejes coordenados x_2 y x_3 .

El producto escalar se define además mediante la suma del producto componente a componente de los dos vectores (producto interno). El producto escalar entre dos vectores da como resultado una magnitud escalar:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \equiv b_j c_j = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$$

Como vimos anteriormente, si $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \rightarrow b_1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1$ y análogamente para las otras componentes b_2 y b_3 . En notación indicial tenemos:

$$b_j = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j$$

El producto escalar es conmutativo ($b_j = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{b}$) y es distributivo respecto a la suma. Además, si α es un escalar, otra propiedad importante es: $(\alpha \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Observación respecto a la notación tensorial

- En notación tensorial o indicial, cuando en un término aparece dos veces el mismo índice, esto implica la operación sumatoria respecto a tal índice, con el mismo variando entre 1 y 3.
- Si en un término aparecen dos índices j y un índice libre i (por ejemplo: $b_j c_j / a_i$), vale lo expresado anteriormente y el índice libre i se mantiene fijo durante la operación de sumatoria.
- Nunca pueden aparecer tres índices iguales en un término.

3.4 Producto vectorial

El producto vectorial entre dos vectores \mathbf{b} y \mathbf{c} es definido como:

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

donde (\mathbf{b}, \mathbf{c}) es el ángulo entre los dos vectores. El producto vectorial da como resultado un vector perpendicular al plano que contiene a \mathbf{b} y \mathbf{c} . Si \mathbf{b} ni \mathbf{c} son cero pero $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$, entonces \mathbf{b} y \mathbf{c} son paralelos o colineales. En una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de orientación derecha se obtiene que:

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

Este producto no es conmutativo, por ejemplo: $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$, etc.

Una forma conveniente de evaluar el producto vectorial entre dos vectores es realizando el producto cruzado mediante el determinante:

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2 c_3 - b_3 c_2) \mathbf{e}_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \mathbf{e}_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \mathbf{e}_3$$

3.5 Producto mixto

El producto mixto entre un vector \mathbf{c} y un tensor de segundo orden \mathbf{B} da como resultado un vector y se define como:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_j c_i B_{ij}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_j c_i B_{ji}$$

el primero ($\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}$) se entiende como el producto término a término de filas por columnas de las siguientes dos matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} &\equiv [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \\ &= [c_1 B_{11} + c_2 B_{21} + c_3 B_{31} \quad c_1 B_{12} + c_2 B_{22} + c_3 B_{32} \quad c_1 B_{13} + c_2 B_{23} + c_3 B_{33}] \end{aligned}$$

mientras el segundo ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$) es el producto análogo, pero filas por filas.

Si \mathbf{B} es un tensor simétrico entonces el producto mixto es conmutativo: $\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$

3.6 Doble producto escalar entre tensores

El doble producto escalar entre dos tensores de segundo orden \mathbf{B} y \mathbf{C} es definido como:

$$\mathbf{B} : \mathbf{C} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_{ij} C_{ij} = B_{11}C_{11} + B_{12}C_{12} + B_{13}C_{13} + \\ B_{21}C_{21} + B_{22}C_{22} + B_{23}C_{23} + \\ B_{31}C_{31} + B_{32}C_{32} + B_{33}C_{33}$$

Si \mathbf{D} es un tensor simétrico y \mathbf{E} es el correspondiente tensor antisimétrico entonces $\mathbf{D} : \mathbf{E} = 0$.

4. OPERACIONES DIFERENCIALES CON CAMPOS ESCALARES, VECTORIALES Y TENSORIALES

4.1 Operador diferencial vectorial nabla

El operador diferencial vectorial nabla:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

aplicado a los campos escalares, vectoriales y tensoriales define las operaciones diferenciales de gradiente, divergencia y rotor.

4.2 Gradiente

Operador diferencial vectorial nabla aplicado a un escalar:

$$\text{grad } b \equiv \mathbf{e}_j \frac{\partial b}{\partial x_j} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial b}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial b}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial b}{\partial x_3} = \nabla b$$

4.3 Divergencia

Producto escalar entre el operador diferencial vectorial nabla y un vector:

$$\text{div } \mathbf{b} \equiv \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{b}$$

4.4 Divergencia del gradiente (Laplaciano)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{b} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial x_3^2} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{b} = \nabla^2 \mathbf{b}$$

4.5 Rotor

Producto vectorial entre el operador nabla y un vector:

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 = \nabla \wedge \mathbf{b}$$

4.6 Divergencia de un tensor de segundo orden

La divergencia de un tensor de segundo orden es un tensor de primer orden (vector):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \mathbf{e}_j \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{32}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial B_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{33}}{\partial x_3} \right) = \nabla \cdot \mathbf{B}$$

a esta le corresponde la siguiente notación matricial:

$$[(\operatorname{div} \mathbf{B})_1 \quad (\operatorname{div} \mathbf{B})_2 \quad (\operatorname{div} \mathbf{B})_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Si \mathbf{B} es un tensor simétrico, entonces también vale:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \mathbf{e}_i \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} = \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{13}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial B_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial B_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{33}}{\partial x_3} \right) = \nabla \cdot \mathbf{B}$$

5. IDENTIDADES VECTORIALES

Algunas identidades vectoriales útiles, en las cuales α es un escalar y \mathbf{b} , \mathbf{c} vectores.

$$\text{rot grad } \alpha = 0$$

$$\nabla \wedge \nabla \alpha = 0$$

$$\text{div rot } \mathbf{b} = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b}) = 0$$

$$\text{div } (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \text{ div } \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \text{grad } \alpha$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \alpha$$

$$\text{rot } (\alpha \mathbf{b}) = \text{grad } \alpha \wedge \mathbf{b} + \alpha \text{ rot } \mathbf{b}$$

$$\nabla \wedge (\alpha \mathbf{b}) = \nabla \alpha \wedge \mathbf{b} + \alpha \nabla \wedge \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (1/2) \nabla (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (1/2) \text{grad } (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} \wedge (\text{rot } \mathbf{b})$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \text{grad div } \mathbf{b} - \text{rot rot } \mathbf{b}$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

6. TRANSFORMACIONES DE INTEGRALES

En las siguientes transformaciones de integrales \mathcal{V} es un volumen arbitrario y S es la superficie que encierra a \mathcal{V} . El vector unitario (versor) normal exterior a la superficie S se indica con \mathbf{n} .

6.1 Teorema de Gauss (o de la divergencia)

$$\int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{b} d\mathcal{V} \quad \text{o} \quad \int_S b_i n_i dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} d\mathcal{V}$$

6.2 Teorema del gradiente

$$\int_S \mathbf{b} \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \nabla \mathbf{b} d\mathcal{V} \quad \text{o} \quad \int_S b_i n_i dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial b}{\partial x_i} d\mathcal{V}$$

6.3 Teorema de Stokes

Este teorema relaciona una integral de línea con su equivalente integral de superficie.

$$\oint \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\nabla \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} dA$$