Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Tesis de Maestría

Dificultades en estudiantes de Ingeniería cuando se enfrentan a situaciones problemáticas de la geometría lineal del espacio, en distintos registros de representación

D'Agostini Viviana Paula

Directora: Dra. Patricia Sánchez
Codirector: Mg. Raúl Katz

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al título de

Magister en Didáctica de las Ciencias con mención en Matemática

Marzo de 2017

Certifico que el trabajo incluido en esta tesis es el resultado de tareas de investigación originales y que no ha sido presentado para optar a un título de postgrado en ninguna otra Universidad o Institución.

D'Agostini Viviana Paula

Agradecimientos

Muy especialmente, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi directora Patricia, por su empeño, dedicación y rigurosidad, pero sobre todo por el respeto y el afecto con el que me acompañó en este camino.

A mi codirector Raúl, quien además de aconsejarme y guiarme, brindó generosamente sus conocimientos y su tiempo.

A mis compañeras docentes que colaboraron desinteresadamente, posibilitándome el trabajo de campo, y a los estudiantes que participaron con tan buena predisposición.

A mi familia y amigos, por la contención y el apoyo incondicional.

Les doy gracias, sin el sostén de todos esta tesis no hubiera sido posible.

Resumen

En el marco de una metodología básicamente cualitativa, en esta tesis se indaga acerca de las dificultades de estudiantes de Ingeniería en la resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.

Para el análisis e interpretación de las producciones de los estudiantes se han considerado los aportes teóricos de los registros de representación semiótica de Duval, y del aprendizaje significativo de Ausubel.

Se caracterizaron las diferentes estrategias de resolución y las dificultades detectadas, a través de las representaciones de carácter algebraico, geométrico y discursivo. Se destaca que los conocimientos previos, específicamente en la geometría plana, permitieron explicar muchas de las dificultades observadas. En relación a los registros coloquial, algebraico, numérico y gráfico las mayores dificultades se reconocen en las actividades de tratamiento y conversión. Se manifiesta en general un trabajo operativo, poco reflexivo, destacándose la ausencia de significado de las variables involucradas.

Finalmente, las dificultades detectadas se encuentran relacionadas con: la ausencia de significado en los registros algebraicos, la visualización gráfica, y los conocimientos previos con la influencia de estrategias de resolución que resultaron útiles en otro contexto.

Abstract

Within the framework of a basically qualitative methodology, this thesis researches difficulties that engineering students have when they solve geometric problems with a set of infinite number of lines in space as solution.

The analysis and interpretations are based in the theory of registers of semiotic representations of Duval and of the theory of meaningful learning of Ausubel.

The different strategies of resolution and the difficulties detected were characterized, through algebraic, geometric and discursive representations. It is emphasized that previous knowledge, specifically in 2d-geometry, allowed explaining many of the difficulties observed. The greatest difficulties in colloquial, algebraic, numerical and graphical registers are recognized in treatment and conversion activities. In general, students develop an operational work, which is not very reflective. It is worth to highlight the absence of meaning of the variables involved.

Finally, the detected difficulties are related to: the absence of meaning in algebraic registers, graphic visualization, and the previous knowledge with the use of resolution strategies that resulted useful in another context.

ÍNDICE

LISTA DE CUADROS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ESQUEMAS

LISTA DE DIAGRAMAS

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se hace referencia a las motivaciones que han dado lugar a la elección del tema de la presente tesis y su importancia en el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática y en particular para la enseñanza de Matemática en la formación básica del ingeniero. Se establecen aspectos que fundamentan la investigación desarrollada y se hace una reseña de otros trabajos vinculados al tema que trata la misma.

En este marco se presenta específicamente el problema de investigación propiamente dicho y los objetivos que se pretenden alcanzar.

Finalmente, se plantea un panorama general de la manera en que se ha organizado el resto del trabajo, comentando brevemente el contenido de los demás capítulos.

1.1 Motivación

Mi trabajo como profesora en asignaturas del área de Matemática básica universitaria en la formación de ingenieros, me ha permitido observar las dificultades de los estudiantes al abordar la resolución de actividades que involucran ciertos aspectos vinculados a la geometría lineal del espacio.

Aunque se considera que son muchas y diversas las razones de esta problemática, conocer e interpretar los principales errores y dificultades de los estudiantes cuando resuelven situaciones problemáticas específicamente en el tema La Recta en el Espacio, será un aporte en Didáctica de la Matemática, que nos permitirá desarrollar modalidades de enseñanza diseñadas desde los resultados obtenidos. Esto puede favorecer el avance regular de los estudiantes, considerando la relevancia de la asignatura en la que se desarrolla el tema de estudio, en las carreras de Ingeniería.

En el marco institucional, como señala Scavone (2010): “A partir del fenómeno de masificación ocurrido en las universidades nacionales en los últimos 30 años, estas instituciones deben atender a las nuevas demandas y a la heterogeneidad de sus alumnos” (p.1). Este aumento de la matrícula universitaria tiene su contracara con una alta tasa de deserción especialmente en los primeros años de las carreras universitarias, como así también un alto grado de repitencia. Puntualmente en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), de la Universidad Nacional de Rosario, (UNR), en su proceso de autoevaluación institucional desde el año 1999 se diagnosticó, además de estos fenómenos, la excesiva duración real de las carreras, la lentificación en el avance regular de los estudiantes y el bajo número de egresados, lo cual plantea un desafío tanto para la institución como para los docentes (Scavone, 2010). En este contexto, para hacerle frente a una problemática presente en todas las facultades del país que dictan la carrera de ingeniería, el Gobierno Nacional implementó entre los años 2012 a 2016 distintas medidas con la intención de incrementar el número de egresados de las carreras de Ingeniería.

De acuerdo a Carlino (2011, p. 5), “uno de los problemas que enfrentan los ingresantes a la universidad es que se encuentran con una cultura académica universitaria diferente a la cultura predominante en la escuela media”, con modos de estudiar, leer, escribir y pensar desiguales. Si bien cualquier intento de integración a una cultura nueva produce desajustes, esto provoca en los ingresantes el sentimiento de no entender la lógica de la nueva institución y puede resultar tan intolerable que lleva a algunos estudiantes a abandonar. Estas dificultades están vinculadas con el sistema institucional de expectativas respecto del capital cultural -conocimientos, habilidades y hábitos académicos- que se presupone que poseen y, por lo tanto, no son materia de enseñanza y constituyen una *enseñanza omitida* (Ezcurra, 2012).

Introducirse en la vida universitaria implica cambios que requieren adaptación y transformación. En un trabajo de investigación del que soy coautora (Demti, Pérez y D’Agostini, 2014), realizado con alumnos en asignaturas de Matemática de primer año de carreras de Ingeniería, se ha puesto de manifiesto que la mayoría de los estudiantes coinciden tanto en sus demandas como en sus propuestas tendientes a facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los resultados muestran que estos cambios potenciales solicitados por los estudiantes se encuentran ligados a creencias que pueden clasificarse según tres dimensiones: personal, didáctica e institucional.

El antiguo paradigma de formación de profesionales basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos que el alumno oportunamente sabrá abstraer, articular y aplicar eficazmente, ha ido perdiendo espacio. La visión actual de la sociedad propone ver al egresado universitario como un ser poseedor de un conjunto de competencias y capaz de ejercer su profesión en la compleja realidad que lo rodea. En particular en la Argentina el documento emanado del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI, 2014) pone especial énfasis en el “saber hacer” de un ingeniero:

> (…) El saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc. que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo (p. 8).

Hoy se habla de las competencias de acceso de un estudiante de nivel medio que desea continuar estudios superiores. Como se señala en el documento: “Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales” (CONFEDI, 2014, p. 15).

El CONFEDI (2014) ha establecido que:

> (…) la formación de los estudiantes en el nivel medio, debe desarrollar competencias generales como: creatividad, interés por aprender, pensamiento crítico (capacidad de pensar con juicio propio), habilidad comunicacional, capacidad para resolver situaciones problemáticas, tomar decisiones, adaptarse a los cambios y trabajar en equipo, poseer pensamiento lógico y formal (p. 35).

Afirma que tales competencias deben ser desarrolladas en la escuela secundaria y durante la instancia universitaria continuar con su desarrollo y consolidación. Se señala además que “(…) facilitar el desarrollo de competencias de manera explícita durante el proceso de formación supone revisar las estrategias de enseñanza y de aprendizaje, de manera de garantizar que los estudiantes puedan realizar actividades que les permitan avanzar en su desarrollo” (CONFEDI, 2014, p.17).

En este documento acerca de la ciencia que nos atañe se explicita además que:

> (…) es necesario que los egresados de ingeniería posean saberes específicos en Biología, Química, Física y Matemática (Competencias específicas). Dichas asignaturas deberán apuntar a privilegiar el razonamiento lógico, la argumentación, la experimentación, el uso y organización de la información y la apropiación del lenguaje común de la ciencia y la tecnología (CONFEDI, 2014, p. 37).

Acorde con estos lineamientos en los planes de estudio de las carreras de Ingeniería de la FCEIA se explicita que las asignaturas que corresponden a las Ciencias Básicas integran actividades curriculares de Matemática, Física, Química, Informática, Sistemas de Representación y Economía. Se señala que este bloque proporciona una sólida formación conceptual en esas disciplinas, como sustento de las disciplinas específicas, contemplando la evolución permanente de sus contenidos en función de los avances científicos y tecnológicos. Finalmente se destaca que los estudios en Matemática, en particular, contribuyen a la formación lógico-deductiva, proporcionando una herramienta heurística y un lenguaje que permite modelar fenómenos, dispositivos y procesos.

En cuanto a la resolución de problemas, el documento (CONFEDI, 2014) menciona el papel central de la Psicología Cognitiva en las investigaciones acerca del comportamiento de las personas cuando resuelven problemas:

> (…) distintas investigaciones realizadas desde la Psicología Cognitiva señalan que, independientemente de las características específicas del campo del conocimiento en el que se plantea el problema a resolver, se dan siempre los mismos procesos: representación del problema (supone la comprensión del problema); transferencia del conocimiento (activación y aplicación de conocimientos previos en la elaboración de un plan para resolver el problema); evaluación de la solución hallada y comunicación de los resultados (p. 43).

Esta forma de analizar el proceso de resolución de problemas tiene su origen en los trabajos de Pólya (1957), matemático pionero en esta temática con su *Método de los Cuatro Pasos*. En base a este método he realizado una investigación (D'Agostini, Demti y Pérez, 2011), que puso en evidencia las dificultades de los estudiantes ingresantes cuando resuelven un problema, en la *Lectura e Interpretación* del enunciado, en el proceso de *Búsqueda de un Plan*, al momento de tomar decisiones, en la *Ejecución de un Plan*, en el momento de activar conocimientos previos y aplicar posibles estrategias de resolución, y en la *Validación del Plan*, al dar respuestas no viables.

Efectivamente los resultados alcanzados por los estudiantes en la resolución de problemas pueden utilizarse para inferir juicios acerca de los conocimientos conceptuales de los sujetos, así como de los aspectos procedimentales articulados mediante las técnicas y estrategias utilizadas para dar respuesta a la situación. Conocer la forma en que los estudiantes piensan un problema, cuáles son sus razonamientos y cómo se originan los errores, proveen información sobre la interpretación, organización y utilización de los conceptos aplicados. Desde el punto de vista didáctico este conocimiento permite diseñar estrategias de enseñanza focalizadas en la superación de errores y dificultades con el fin de actuar en la formación de competencias básicas.

Finalmente, se destaca un párrafo importante para esta tesis, del documento del CONFEDI (2014), que se focaliza en el aprendizaje de contenidos en el espacio:

> (…) entre las destrezas cognitivas generales, que debe poseer un ingresante universitario a Ingeniería se especifica: Capacidad para pensar en tres dimensiones (pensamiento espacial). a. Percibe adecuadamente las formas y dimensiones de los objetos. b. Representa gráficamente cuerpos, relaciones y desplazamientos en el espacio. c. Ubica en el espacio cuerpos y relaciones representados en el plano: ubicación relativa, relaciones, desplazamientos en el espacio. d. Imagina procesos de transformación a partir de determinadas percepciones primarias (p. 49).

El tema en el cual se centra esta tesis se enmarca en la Geometría Analítica, cuyos fundadores se consideran Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Podemos considerar que la Geometría Analítica se ocupa esencialmente de dos problemas:

1. dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar una ecuación algebraica que cumplen dichos puntos;

2. dada una expresión algebraica, describir el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión.

Las tendencias formalistas de una parte del siglo XX han relegado los aspectos visuales de la geometría tridimensional, promoviendo una tendencia a la enseñanza de los métodos analíticos a expensas de los geométricos, sin analizar las relaciones entre situaciones geométricas y sus representaciones algebraicas.

He realizado el trabajo de campo en Álgebra y Geometría Analítica (AGA), asignatura que se dicta en el primer cuatrimestre, de primer año de las carreras de Ingeniería, en la FCEIA.

Los temas de AGA, en particular el de esta tesis, son relevantes para asignaturas posteriores, como, por ejemplo, Cálculo II y Álgebra Lineal. Cabe recordar que el Cálculo y la Geometría Analítica estuvieron íntimamente relacionados en su desarrollo histórico. Cada nuevo descubrimiento en una de las disciplinas dio lugar a un progreso en la otra. El problema de trazar rectas tangentes a curvas se resuelve con el "descubrimiento" de la derivada. Así mismo el estudio de las superficies se facilita con la introducción de las derivadas parciales. Junto con estos avances se observa un desarrollo de la Física y de la Mecánica, de ahí la importancia que tiene el estudio de la Geometría Analítica para los estudiantes de Ingeniería. También el Álgebra Lineal tiene un vínculo estrecho con la Geometría Analítica. Efectivamente, los sistemas de ecuaciones lineales desarrollados en Álgebra lineal pueden interpretarse en los espacios R^2 y R^3 mediante las representaciones de rectas y planos estudiados en AGA. Además, por otro lado, el estudio, tanto geométrico como analítico, de los vectores en el plano y en el espacio que se realiza en AGA se aplica posteriormente en Álgebra Lineal en el análisis de los espacios vectoriales.

En la actualidad se percibe una tendencia hacia una revitalización del papel de la visualización en geometría. En particular la asignatura AGA en la cual me desempeño como docente, se ha organizado teniendo en cuenta este aspecto. La asignatura está constituida por las siguientes unidades:

- Unidad I. Vectores. (En el Plano y en el Espacio)
- Unidad II. Geometría Lineal del Plano y del Espacio. (La recta en el Plano. El Plano. La Recta en el Espacio)
- Unidad III. Cónicas.
- Unidad IV. Números Complejos.
- Unidad V. Polinomios.

La modalidad de enseñanza de AGA incluye tres instancias complementarias: clases teóricas a cargo de un profesor, con la guía de un material de cátedra; clases de práctica en el que los alumnos trabajan sobre una guía de ejercicios y problemas a resolver con el apoyo de otros dos docentes, y clases de consulta.

Desde el punto de vista cognitivo, en la Geometría Analítica se estrechan la representación gráfica con la abstracción algebraica y los lenguajes gráfico y simbólico, lo que implica un importante avance en el nivel de abstracción de los estudiantes que dificulta el aprendizaje.

Esta tesis se centra en el estudio de los errores y las dificultades en la resolución de situaciones problemáticas referidas a “La Recta en el Espacio”, contenido correspondiente a la Unidad II, que se desarrolla a continuación de los temas “La Recta en el Plano” y “El Plano”. En este sentido, la asignatura plantea una transición de contenidos en el plano a otros que se desarrollan en el espacio, que resulta particularmente compleja para los estudiantes.

En particular, a raíz de las dificultades que ha presentado la aprobación de la asignatura AGA y de la relevancia que posee la misma dentro de las carreras de Ingeniería, se han creado varias comisiones de recursado. Cabe destacar, que de este importante número de estudiantes que recursan la asignatura, existen subgrupos que la cursan más de una vez. A partir de esta realidad he realizado un trabajo de investigación con otros colegas (D’Agostini, Demti y Katz, 2014) en el cual se han estudiado las demandas y las necesidades de los estudiantes recursantes de AGA en favor de su avance regular.

Es importante señalar que el tema Vectores, correspondiente a la Unidad I, resulta dificultoso para nuestros estudiantes, quienes, por lo general, se inician en este contenido desde una perspectiva analítica, en AGA. Los Vectores suelen ser introducidos en la escuela media, en forma geométrica, a través de la Física para la caracterización de velocidades y fuerzas. En este contexto son tratados como vectores fijos y no como vectores libres, como es el caso de la Geometría Analítica.

De la Unidad II cabe mencionar que, en general, los estudiantes ingresantes asocian una recta en el plano (no paralela al eje de las ordenadas) con la gráfica de una función lineal, contenido que se desarrolla en la escuela media. En cambio, los temas Plano y Recta en el Espacio son tratados excepcionalmente en el nivel medio. Las mayores dificultades suelen presentarse en el estudio de La Recta en el Espacio, donde confluyen contenidos específicos de Vectores y El Plano.

El estudio de la geometría lineal del espacio (La recta en el plano, El Plano y La Recta en el Espacio) requiere de representaciones gráficas de sus objetos de estudio, de modo que su desarrollo implica un proceso de formación integrada entre pensamiento analítico y visual. Un problema generalizado de los estudiantes en la habilidad de razonamiento espacial es la falencia para la representación bidimensional. Los estudiantes presentan dificultades para transformar una percepción tridimensional en una representación bidimensional, así como también para extraer información explícita contenida en una figura en el espacio. Es más, en algunos casos son capaces de realizar una representación gráfica de una situación problemática, pero no pueden utilizarla como herramienta para la resolución de la misma. También aparecen conflictos para traducir las representaciones algebraicas en hechos geométricos. El álgebra es un medio ligado a la aritmética y la geometría, que sirve a ambas para comunicar relaciones y propiedades de sus objetos, proporcionando un marco regulado por ciertas reglas de transformación, que facilitan la abstracción de los elementos, brindando herramientas para la resolución de problemas. El aprendizaje del álgebra requiere la comprensión sintáctica y semántica de estas reglas y de su lógica interna para asegurar el uso significativo de las mismas. Las representaciones a través de símbolos utilizados en ella son fundamentales para cualquier desarrollo abstracto o generalización que se necesite comunicar en Matemática. En mi práctica docente he observado que esta formalización suele ser conflictiva para los alumnos, y se manifiesta de diversas formas según los contenidos tratados. En particular he observado, en contenidos de La Recta en el Espacio, dificultades de los estudiantes en situaciones problemáticas que presentan infinitas soluciones.

Por la naturaleza abstracta de la Matemática, toda actividad en esta ciencia se realiza necesariamente en un contexto de representación. Los medios utilizados en esta ciencia para la comunicación de sus objetos de estudio son signos aritméticos y algebraicos, gráficos, figuras geométricas, etc., denominados por algunos autores como diferentes representaciones semióticas (Duval, 1999). Así la generalización toma la forma de un proceso semiótico basado en la percepción que los alumnos tienen de los objetos matemáticos y la resolución de una situación problemática los lleva a la búsqueda de representaciones externas como las citadas. Las dificultades de los estudiantes cuanto se enfrentan a situaciones problemáticas pueden analizarse a través de los registros de representación que utilizan.

Mi experiencia y el contexto descriptos han motivado que esta tesis se centre en el estudio de los errores y las dificultades que se manifiestan a través de los registros de representación utilizados por estudiantes de Ingeniería, cuando se enfrentan a la resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.

1.2 Preguntas y objetivos de la investigación

Las preguntas centrales que han orientado esta tesis son:

¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes de carreras de Ingeniería al abordar situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio?, ¿cómo pueden interpretarse estas dificultades?

Se asume que es posible identificar y caracterizar las dificultades de los estudiantes a través de sus representaciones externas tanto discursivas como gráficas en la resolución de actividades que involucren el tema de tesis. En el proceso de resolución, tales representaciones externas pueden manifestarse a través del discurso de quien resuelve, mediante elementos sugeridos en el empleo de expresiones lingüísticas, dibujos y símbolos. La identificación de algunos rasgos en los mecanismos de representación externa puede dar lugar a la interpretación, por parte del investigador, de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes.

Para procurar dar respuesta a tales interrogantes se plantearon los siguientes objetivos:

- Objetivo General: analizar las dificultades a través de las representaciones externas organizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.
- Objetivos específicos:

- detectar las estrategias aplicadas por los estudiantes en el proceso de resolución de dichas situaciones,
- caracterizar las dificultades detectadas a través de las representaciones de carácter algebraico, geométrico y discursivo presentes en el proceso de resolución.

El estudio de las actuaciones de estudiantes universitarios en la resolución de situaciones problemáticas en Matemática tiene variados antecedentes. Para tener un panorama de los trabajos en relación a la temática de esta tesis, en el apartado siguiente se presentan los que se han considerado de relevancia para esta investigación.

1.3 Antecedentes

Teniendo en cuenta que en esta tesis se analizarán las dificultades en el proceso de resolución, cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio, se resumen algunas publicaciones que resultan de interés, organizadas en torno a errores y sus factores explicativos que pueden incidir en el aprendizaje.

Es importante destacar que estas publicaciones no son específicas del tema que interesa en este trabajo, ya que no se han encontrado investigaciones que aborden la misma problemática. Si bien existen trabajos sobre registros de representación, los mismos se centran en temas ligados a Análisis Matemático o Cálculo. También pueden hallarse publicaciones sobre errores, dificultades y obstáculos, pero en otros temas de Álgebra y Geometría. Las investigaciones dedicadas a conceptos de geometría espacial de nivel universitario, que pueden encontrarse, centran su mirada en “Subespacios”, “Superficies” y “Sólidos”, contenidos que, en las carreras de Ingeniería, se desarrollan en asignaturas posteriores a AGA. Pero parece haber un vacío en cuestiones relativas a “La Recta en el Espacio”, en el cual confluyen los temas de “Vectores”, y “El Plano”, contenidos encadenados que constituyen elementos de la geometría lineal del espacio abordada en AGA y que en su conjunto permiten posteriormente la ampliación del estudio al resto de la geometría del espacio. Este contexto ha influido en nuestro interés por ampliar el campo de los errores, dificultades y obstáculos a otro contexto: los registros de representación en álgebra y geometría universitaria.

1.3.1 Relativo a concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la geometría analítica

Las profesoras Del Puerto y Seminara (2009) trabajaron desde el año 2004 en la detección y análisis de los errores más frecuentes cometidos por alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería, en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica (AGA), en la Universidad Tecnológica Nacional, de la Facultad Regional de Buenos Aires. Sus investigaciones se enmarcaron en el proyecto: "Mejoramiento de la enseñanza de la Matemática para la Formación del Ingeniero, de la Secretaría de Ciencia y Tecnología. Observaron que ciertos errores se repetían en distintos grupos de estudiantes, aún cuando en el trabajo de aula se explicitaran las particularidades de los conceptos que estaban en juego y se focalizara sobre las posibilidades de errores comunes en dichos tópicos. Este rasgo de persistencia y la naturaleza de algunas de las equivocaciones, orientaron su trabajo a tratar de conocer el origen y las causas de la resistencia al cambio. Si bien las autoras en el estudio de las concepciones erróneas abarcaron diversos temas, en sus protocolos de investigación se encontraron algunos ítems relativos al tema Recta en el Espacio, en los que nos hemos focalizado.

Las autoras elaboraron y aplicaron un cuestionario a partir del cual analizaron los errores cometidos por un grupo de estudiantes y detectaron la persistencia de ciertas ideas previas provenientes de la geometría plana. Los resultados reflejaron que es importante el número de alumnos que extrapola al espacio el concepto de pendiente de una recta y las condiciones de ortogonalidad de rectas, que resultan suficientes en el plano, pero no así en el espacio. Además, hay estudiantes que confunden una ecuación de un plano con la de una recta en el espacio. También señalan, específicamente, las dificultades de los alumnos para reconocer que no hay en el espacio una única dirección perpendicular a una dada.

El concepto de pendiente de una recta en el plano actúa como "barrera" para la adquisición de nuevos conceptos más generales y algunos alumnos "superan" el conflicto elaborando un modelo intermedio en el que conviven varias ideas inacabadas y mal ensambladas. Frente a una situación problemática en la que los estudiantes deben hallar una recta perpendicular a otra en el espacio plantean que los vectores dirección de cada recta deben ser perpendiculares, pero no logran continuar. También fue notable la cantidad de alumnos que no respondían a algunos de los interrogantes, a pesar de que el tratamiento del tema se había dado por concluido.

Los contenidos de La Recta en el Espacio ya se habían desarrollado, ejercitado y evaluado con estos alumnos y sin embargo subsistieron sus ideas previas y los denominados modelos sintéticos revelaron que los estudiantes, en su mayoría, no se apropiaron de los conceptos. Estas autoras consideran que tales modelos sintéticos son esquemas mentales inacabados que ponen de manifiesto que los nuevos conocimientos no han sido completamente asimilados a la estructura cognitiva del alumno. Sus reflexiones aluden a que la reestructuración necesaria de los conocimientos no ha llegado a producirse, o se ha producido parcialmente, dando lugar, en el esfuerzo por asimilar la nueva información a la existente, a la creación de los modelos sintéticos que se manifiestan en los errores.

Señalan que los docentes deben prestar atención sobre este hecho, que requiere de una readecuación de las acciones didácticas con el fin de evitar los mecanismos simplemente aditivos o los modelos sintéticos inadecuados que resultan fuente de error. Señalan la persistencia de ciertos errores en la asignatura AGA, que pueden atribuirse al hecho de que las ideas previas de geometría plana interfieren en la adquisición de los nuevos conocimientos referidos a rectas en el espacio.

1.3.2 Relativo a concepciones en los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta

Jarero Kumul (2006) en su tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa en México se propuso identificar concepciones en los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta, con la intención de ofrecer elementos que orienten el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de dicho concepto. Los contenidos implicados forman parte de la asignatura de Geometría Analítica de Licenciatura del área de Matemáticas en la

Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. El interés de su estudio surge al reconocer las dificultades de los estudiantes al trabajar en un sistema tridimensional y en la aplicación de vectores.

La autora primero analizó las producciones de un grupo de estudiantes (del primer semestre de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas) al responder una prueba escrita que involucraba los temas Vectores, La Recta en el Plano, El Plano y La Recta en el Espacio. También estudió las producciones verbales surgidas en entrevistas sobre las resoluciones escritas. Se reporta una caracterización de los errores observados en las producciones de los estudiantes asociados al uso de una fórmula, señalando que algunos alumnos emplean la ecuación vectorial del plano en lugar de la ecuación vectorial de la recta.

Se mencionan además ciertas dificultades asociadas a la ausencia de significado, como en los casos en los que los estudiantes no pueden justificar sus procedimientos o bien les resulta indistinto cómo emplear o interpretar la notación Matemática. Se señala que los estudiantes reproducen procedimientos vistos en clase de forma incompleta, sin poder justificar el por qué de cada expresión planteada y en las entrevistas se identifican conceptos difusos como el producto escalar y vector normal. Menciona además las serias dificultades de los estudiantes para reconocer que un vector dirección de una recta no necesariamente tiene que pertenecer a ella. Se observó en las producciones de los estudiantes, que existen fuertes tendencias a reproducir lo que el profesor hace en el salón, lo cual parece reforzar la idea de que, para ellos, estudiar Matemática es aprender algoritmos. Prevalece una falta de análisis y reflexión sobre sus propias actuaciones, de modo que al enfrentarse a situaciones problemáticas que involucran distintos conceptos, están más propensos a cometer errores y en la mayoría de los casos se limitan a reproducir procedimientos y técnicas, lo cual evidentemente no significa que se haya dado aprendizaje.

Además, se encontraron algunas dificultades en la comprensión de conceptos que son considerados básicos como: la identificación y nomenclatura de los vectores, la pérdida de significado del producto escalar, la relación del producto escalar con vectores perpendiculares y la interpretación del vector normal de un plano como un vector perpendicular a éste. Además, se hicieron evidentes algunos conflictos sobre las interpretaciones dadas a los elementos y variables que conforman la ecuación vectorial de la recta, se observa en algunos casos una falta de significado.

En resumen, esta investigación interpreta las dificultades asociadas con el estudio de la ecuación vectorial de la recta, a través de las producciones de los estudiantes como “una algebrización del estudio de la recta y una ausencia de significado”. A partir de lo observado, la autora plantea la necesidad de realizar un estudio y recabar información para un diseño experimental, optando por la ingeniería didáctica abordada a través de tres dimensiones. La dimensión epistemológica, que se integra por un acercamiento histórico al concepto de vector; la dimensión didáctica, que tiene en cuenta los libros reportados por el profesor en la preparación de sus clases y la dimensión cognitiva, que pretende identificar las nociones de los estudiantes sobre la ecuación vectorial de la recta. Para abordar esta última la investigadora diseñó un cuestionario con el objetivo de explorar los significados y las concepciones que los estudiantes tienen respecto a la idea de recta y las interpretaciones asociadas al concepto de vector, para caracterizarlos e identificar aquellas concepciones que no favorecen la construcción de la ecuación vectorial de la recta. Además, realizó entrevistas, para identificar aquellos modelos mentales que pudieran estar presentes en los estudiantes.

Los resultados muestran que la ecuación vectorial estudiada, parece limitar la idea de vector dirección, ya que éste necesariamente tiene que ser parte de la recta; se consideran a los puntos y vectores de modo indistinto, lo cual implica que esto parece no tener mucha relevancia para el estudiante y asume el vector de posición de cada punto de modo natural. Parecen no dar importancia al escalar, a pesar de ser el generador de la infinidad de puntos que conforman la recta y aunque son estudiantes de nivel de licenciatura, aún se identifican concepciones de la recta como algo limitado, con un principio o un segmento. En las entrevistas se refuerza la idea de reproducir el trabajo del profesor que sólo lleva a un aprendizaje memorístico.

Esta investigadora concluye que, cuando los alumnos estudian la ecuación vectorial de la recta, se enfrentan a diferentes dificultades. Entre ellas, cómo trabajar en un nuevo sistema de referencia, pasando de dos a tres dimensiones; y la relación entre una recta y un vector como elemento determinante en la orientación de la misma.

Señala además que el término recta es ampliamente conocido por los estudiantes y lo asocian a su vida diaria, sin embargo, se dan algunas interpretaciones que los llevan a pensar en la recta como algo finito. Por otro lado, en relación al término vector parecen quedarse en el lenguaje escolar, ya que poco pueden reportar que no se apegue a las definiciones vistas en el aula. Considera que los estudiantes han generado modelos mentales donde se pueden observar algunas de las características propuestas por Fischbein (1989, c.p. Kumul, 2006), al considerar el vector dirección como parte de la recta o bien asumir que no pueden sumar un vector y un punto (coercitiva) y cuando consideran al escalar que afecta al vector dirección como un número positivo (perseverancia). Las conclusiones que surgen de las entrevistas realizadas a los estudiantes refuerzan la existencia de los elementos ya mencionados que parecen obstaculizar la comprensión de la ecuación vectorial de la recta. De tal modo que a partir de ellos la autora sugiere tomarlos en cuenta en el diseño de situaciones didácticas para el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

1.3.3 Relativo a errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática en ingresantes a la Universidad

Son de particular interés para esta tesis los trabajos de Abrate, Pochulu y Vargas (2006), docentes e investigadores, en el marco del proyecto: *“La articulación entre la Escuela Media y la Universidad: Un camino posible para construir la "inclusión" de los estudiantes y mejorar las prácticas educativas”*, perteneciente a la Convocatoria del Programa: “Apoyo a La Articulación Universidad Escuela Media II”, del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. Sus investigaciones se compilaron en el libro: “Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo”.

Las preguntas que dirigieron y orientaron el trabajo fueron:

> ¿Qué errores detectan frecuentemente los Profesores de Matemática en el aprendizaje de sus alumnos durante la formación de Nivel Medio? ¿Cuáles son los errores, que han sido señalados por los Profesores de Matemática,

> que aún persisten en el aprendizaje logrado por los alumnos cuando ingresan a la Universidad? ¿Cuáles son las causas y motivos posibles que pudieran hacer prevalecer en los alumnos ciertos errores en el aprendizaje logrado en Matemática? (p. 17).

Con la intención de ofrecer un panorama general sobre la problemática abordada, los autores realizan una revisión bibliográfica partiendo de los fundamentos filosóficos del error. Posteriormente, analizan los antecedentes que presenta el estudio de errores desde principios del siglo XX, las dificultades que habitualmente se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y que son potencialmente productoras de errores, las características principales asignadas a los errores que cometen los alumnos, y finalmente, exponen algunas categorías de errores construidas por investigadores del tema.

Además, presentan un estudio de naturaleza diagnóstico-descriptiva en el cual analizaron y categorizaron los errores cometidos por 273 alumnos egresados del Nivel Medio, al resolver ejercicios correspondientes a contenidos matemáticos abordados en el Ciclo Básico Unificado y Ciclo de Especialización de la escuela secundaria argentina. El instrumento aplicado fue una evaluación que constó de 8 ejercicios elaborados a partir de entrevistas con 13 Profesores de Matemática, quienes señalaron los errores más frecuentes de sus alumnos. También se realizaron entrevistas a una muestra de alumnos seleccionados, entre los que cometieron los errores más frecuentes, para complementar algunos resultados. El proceso final de construcción de la categorización de errores devino de las convergencias realizadas entre las categorías que surgieron del análisis de las respuestas vertidas por los alumnos y las que se proponían en las investigaciones consultadas sobre el tema. Uno de los resultados relevante es que la mayor dificultad se presentó en la decodificación de información gráfica.

Un contenido que suscitó dificultades fue la resolución de problemas en el que intervienen áreas de figuras planas y unidades de medida. Estas dificultades no pudieron ser salvadas ni siquiera en las instancias de entrevistas a los alumnos, puesto que defendían sus respuestas argumentando que los cálculos eran correctos, confundiendo área con volumen.

El mayor número de ejercicios sin respuestas se presentó en la resolución de una ecuación de segundo grado.

También fue notable la falta de respuestas a las situaciones que implicaron el trabajo con ecuaciones lineales, y en las traducciones a una ecuación lineal de expresiones dadas en lenguaje coloquial. Los autores asocian este obstáculo a la complejidad de los objetos matemáticos involucrados, en tanto los alumnos no comprenden el significado que tienen las expresiones que combinan el uso de números y letras. El lenguaje matemático no les resulta fácilmente homologable al lenguaje natural que utilizan, por lo que les genera conflictos en la comunicación de significados.

Considerando los errores globales cometidos en la evaluación, observan que prevalecieron aquellos que derivan de inferencias incorrectas y los que emergen ante las dificultades que presentan los alumnos para obtener información espacial. Señalan que junto a la definición de las figuras ha quedado establecida la insólita condición totalmente ajena a ellas: la obligación de ser presentadas en una forma particular en el plano de la hoja, lo que es determinante, a su vez, para su clasificación y reconocimiento.

Durante las entrevistas a los alumnos, percibieron un fuerte apego a las reglas y leyes de la aritmética, con pérdida de significación de las operaciones, las cuales resuelven en la mayoría de los casos por medio de algoritmos mecánicos con escasa base conceptual, y con la percepción de que algo artificioso está detrás de ellos.

Concluyen que la resolución de ecuaciones es un tema que ofrece serias dificultades, y en muchos casos, con falencias de conocimientos elementales sobre el mismo. Un error frecuente hallado, deviene de asociaciones incorrectas realizadas por los alumnos, que se originan por la creación de nuevas “reglas” de transposición de términos a partir de las que conocían, sin llegar a realizar un análisis retrospectivo de la solución a la que habían arribado, lo que muestra, asimismo, una falencia en la comprensión de los conceptos mismos de ecuación, variable y solución.

La dificultad para efectuar una lectura a través de representaciones gráficas -traducción que obliga a cambiar de código, pasando de uno gráfico a otro verbal- fue notable en la evaluación administrada, donde el 90% de los estudiantes erraron en algunos o en todos los apartados de la situación problemática planteada.

Infieren que gran parte de las equivocaciones cometidas tienen su origen en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática caracterizados por:
- uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos,
- utilización de reglas poco trascendentes como requisitos indispensables en la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones,
- desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas,
- abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes,
- escasa importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas,
- abuso de prototipos visuales que inhiben la formación de imágenes conceptuales,
- tratamientos de problemas demasiado centrados en lo numérico.

Por otra parte, destacan que los Profesores de Matemática entrevistados argumentaron que la mayoría de los errores que encuentran en el aprendizaje de esta ciencia se deben a que los alumnos no están acostumbrados a leer e interpretar consignas, a releer el enunciado, reflexionar sobre lo realizado, buscar datos relevantes, plantear distintas estrategias, hacerse preguntas, entre otras acciones.

1.3.4 Relativo a registros de representación, errores, dificultades y obstáculos en otras temáticas

Como se ha mencionado no se han encontrado publicaciones específicas centradas en el tema de tesis. En este apartado se mencionan algunos trabajos consultados, ligados de alguna forma a esta tesis, pero focalizados en otros contenidos.

Existen numerosos trabajos sobre errores, dificultades y obstáculos en diversos contenidos matemáticos y en diferentes niveles de educación. Podemos citar a Franchi y Hernández De Rincón (2004) quienes trabajaron sobre tipología de errores en el área de la geometría plana para estudiantes de Ingeniería. Por su parte, García Quiroga, Vázquez Cedeño e Hinojosa Rivera (2004) investigaron acerca de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función de estudiantes de Ingeniería. Abrate, Font y Pochulu (2008) se centraron en el análisis de obstáculos y dificultades que ocasionan modelos y métodos de resolución de ecuaciones presentes en textos escolares de Matemática para ingresantes a la universidad. Carrillo Siles (2009) se focalizó en el estudio de dificultades en el aprendizaje matemático en la escuela secundaria, construyendo una tipología. Socas (1997) ha investigado las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la Matemática en la educación secundaria, mientras que Guillén Soler (2000) realizó un estudio acerca de las ideas erróneas en el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos en estudiantes de primaria.

En cuanto a investigaciones sobre representaciones podemos mencionar a D'Amore (2004) quien presenta un análisis de los principales conceptos de la teoría de Duval referida a registros de representaciones semióticas. En esta temática Camargo (2013) investigó el papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en Ingeniería; Radillo Enríquez, Nesterova, Ulloa Azpeitia y Pantoja Rangel (2005) trabajaron sobre obstáculos en el aprendizaje de la Matemática que se relacionan con la traducción del lenguaje relativos al concepto de límite; Prieto y Vicente (2006) se centraron en el análisis de los registros semióticos en actividades matemáticas para ingresantes a Ingeniería. En esta línea Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal (2007) caracterizaron los tratamientos y conversiones en el aprendizaje de la función afín de estudiantes universitarios; mientras que Ramírez Sandoval, Romero y Oktaç (2013) se focalizaron en estudiar la coordinación de registros semióticos por parte de estudiantes de Licenciatura en Matemática en transformaciones lineales en el plano; Olmos, Bravo Tapia y Monteverde (2001) estudiaron el papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en los procesos de aprendizaje de estudiantes de Ingeniería; D'Amore (2006) investigó acerca de las representaciones semióticas en Educación Matemática con alumnos de la escuela primaria y secundaria. En educación secundaria Segura de Herrero (2004) analizó los registros de representación semiótica en sistemas de ecuaciones lineales; Ascheri, Rechimont

(2007) estudiaron los registros de representación semiótica utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución numérica de ecuaciones polinómicas; Ochoviet Filgueiras (2009) se centró en el análisis de las representaciones relativas al concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas; Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen, y Gorrochategui (2012) investigaron el rol que juegan los distintos registros semióticos de representación en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y Ospina García (2012) se focalizó en la indagación acerca de las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. Puede destacarse dentro de la educación primaria el trabajo de Macías Sánchez (2014) acerca de la importancia que se concede a los registros de representación semiótica en la enseñanza a través del estudio de los currículos oficiales para el área de Matemática.

Es importante señalar que entre los trabajos que se han comentado, los sustentados en la teoría de Duval y centrados en los registros de representación a nivel universitario, se limitan fundamentalmente al estudio de funciones, límite y derivada, es decir en contenidos básicos de Cálculo.

A continuación, se presenta un estudio -que he realizado con la directora de esta tesis y otra investigadora-, que se considera relevante en la temática de interés, ya que se indagan los registros de representación en la resolución de una actividad matemática que involucra nociones elementales de la geometría lineal del plano y del espacio.

1.3.5 Relativo a registros de representación en geometría lineal

El trabajo de D'Agostini, Demti y Sánchez (2012), constituye un estudio de diseño descriptivo-interpretativo con el objetivo de indagar los distintos registros de representación en la resolución de una actividad matemática en relación a dificultades en el tema vectores.
Se analizaron las resoluciones escritas de 58 estudiantes de la asignatura AGA de primer año de las carreras de Ingeniería, de la FCEIA. El estudio implicado se analizó bajo los lineamientos de la teoría de representación de Duval. La misma

es ampliada en el capítulo siguiente, ya que constituye parte central del marco teórico de esta tesis.

La actividad comprendida involucra nociones elementales de la geometría lineal del plano y del espacio (vector libre en el plano y en el espacio, recta en el plano, plano y recta en el espacio). La misma se centra en la búsqueda de vectores perpendiculares a un vector dato expresado en componentes, analizando las posibles soluciones en el plano y en el espacio, implicando la utilización de registros lingüístico, numérico, algebraico y gráfico.

En la fundamentación teórica de esta investigación se destaca que, para Duval (1998) la resolución de ejercicios y problemas en Matemática depende de la comprensión del enunciado y de la transformación de la información pertinente que se presenta en ellos: se trata de pasar de una descripción discursiva de los objetos que surgen del campo de la pregunta planteada, a una escritura simbólica de sus relaciones. Dado que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos como lo son los objetos comúnmente señalados como reales o físicos, es necesario trabajar con representantes. Una escritura, una notación, un símbolo, una figura, representan un objeto matemático. Pero no debe confundirse un objeto matemático con su representación; tal confusión desencadena, a mediano o a largo plazo, una comprensión sesgada que puede dificultar la aplicación de los conocimientos fuera de su contexto de aprendizaje, permaneciendo como representaciones inertes. Así mismo se hace hincapié en que la adquisición conceptual de un objeto matemático pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas (Chevallard, 1991; Duval, 1993, 1995; Godino y Batanero, 1994, c. p. D'Amore, 2004). Las representaciones semióticas son producciones externas caracterizadas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento; una figura geométrica, un enunciando en lenguaje natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas.

Duval (1998) distingue tres actividades cognitivas asociadas a la producción y aprehensión de representaciones semióticas: la formación de una representación, identificable como una representación de un registro dado; el tratamiento de una representación, que es la transformación de la representación en el mismo registro donde ha sido formada, o sea, es una trasformación interna; y la conversión de una representación, que es la transformación de ésta en una representación de otro registro, o sea, es una representación externa al registro de partida, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

A partir de un análisis cualitativo de la información rescatada de los protocolos de los estudiantes, se detectaron distintas líneas de razonamiento a través del uso de diferentes representaciones semióticas y registros. Se describen a continuación los resultados más relevantes según las dos dimensiones de análisis consideradas: plano y espacio.

En el plano: para construir vectores -en componentes- perpendiculares al vector dato ($\bar{u} = (1,2)$), gran parte de los estudiantes explicitaron el uso de la propiedad de producto escalar: “dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es cero”. Otros, en cambio, mencionaron utilizar “el truco” (así llamado por ellos) de intercambiar las componentes y cambiar el signo de una de ellas. Este método los limitó al cálculo de sólo dos vectores perpendiculares al dato y además evidenció la ausencia de significado de la propiedad involucrada detrás "del truco”. Otros estudiantes avanzaron en su razonamiento y presentaron un vector genérico ($\bar{r} = (x, y)$, registro algebraico) estableciendo la perpendicularidad entre los vectores a través del cumplimiento de la propiedad de producto escalar. Inclusive algunos, a partir de esta idea, avanzaron aún más y plantearon la ecuación asociada que surge de la aplicación de la operación de producto escalar ($(1,2)\times(x, y) = 0 \Rightarrow x + 2y = 0$, tratamiento en el registro algebraico). De estos alumnos, unos pocos despejaron en la ecuación una de las variables en función de la otra (tratamiento en el mismo registro). Se detectó, además, otra línea de razonamiento correspondiente a estudiantes que, habiendo obtenido un vector -en componentes- perpendicular al vector dato mediante la propiedad de producto escalar, explicaron la perpendicularidad de otro vector (u otros) con la propiedad de paralelismo: “todo vector paralelo al hallado es también perpendicular al vector dato”. En cuanto a los registros gráficos, muchos estudiantes graficaron correctamente al menos un vector perpendicular, mientras que un número menor, representando un sistema de coordenadas cartesianas y graficando de forma correcta al vector dato, realizaron la representación de otros vectores (paralelos entre sí) sin tener en cuenta el sistema de referencia, lo que revela una confusión en el concepto de vector libre según el cual todos los vectores de igual módulo, dirección y sentido son iguales. Pocos estudiantes muestran la relación entre la recta -que contiene[1] al origen de coordenadas y es perpendicular al vector dato- y todos los vectores perpendiculares a él, realizando así la conversión de un registro algebraico en uno gráfico. Por otra parte, la mayoría de los protocolos coincidieron en que existen infinitos vectores perpendiculares al vector dato pero, a pesar de ello, no todos supieron justificarlo correctamente.

En el espacio: se detectó que, para exhibir vectores -por componentes- perpendiculares al vector dato ($\bar{v}=(1,2,3)$), muchos estudiantes repitieron la misma idea empleada en el plano, hicieron uso de la propiedad de producto escalar o bien, en menor número, extendieron el "truco" al espacio, fijando el valor cero para una de las componentes. También aquí se repite la línea de razonamiento correspondiente a la presentación de un vector genérico ($\bar{r}=(x,y,z)$) cuyo producto escalar con el vector dato sea cero, y consecuentemente el planteo de la ecuación asociada ($x+2y+3z=0$, tratamiento en el registro algebraico). Pero en este caso, dada la dificultad de la existencia de tres variables, los estudiantes no realizaron ninguna actividad de tratamiento, es decir no expresaron una ecuación equivalente, despejando una variable en función de las otras. Nuevamente, apareció una segunda línea de resolución utilizando la propiedad de paralelismo. Con respecto al registro gráfico, se observa que gran parte de los estudiantes no es capaz de graficar correctamente la situación problemática en el espacio. Sólo algunos alumnos pudieron graficar en un sistema de coordenadas tridimensional al menos un vector perpendicular al vector dato, y muy pocos llegaron a visualizar el plano que contiene al origen y que además es perpendicular al vector dato, mostrando así la conversión de un registro algebraico en uno gráfico. Al igual que en el plano, aquí también se reiteran las representaciones confusas relativas al concepto de vector libre. En la generalización de los posibles vectores existentes perpendiculares al vector dato,

[1] Utilizando un lenguaje al que un estudiante de ingeniería está habituado, nos tomamos la licencia de hablar de "contención" o de "pertenencia" obviando las consideraciones al respecto de la teoría de conjuntos.

gran cantidad de los estudiantes no supo responder o lo hizo en forma incorrecta. Se observa que varios estudiantes extendieron la propiedad de paralelismo del plano al espacio, sin considerar las infinitas direcciones que ahora se presentan.

A partir del estudio cualitativo realizado se definieron variables y modalidades para realizar un análisis cuantitativo de la información. El mismo permitió advertir que los porcentajes de respuestas correctas disminuyen en la mayoría de las modalidades del espacio. Mientras que en el plano casi el 30 % de los estudiantes fueron capaces de expresar más de dos vectores por componentes perpendiculares al vector dato, en el espacio sólo el 12 % lo hizo. Se destaca que la mayor dificultad se detectó en la obtención de un tercer vector perpendicular, pues expresar sólo dos se logra fácilmente con “el truco” de intercambiar las componentes y cambiar un signo. El 40 % de los estudiantes en ambas dimensiones, no fue capaz de dar una justificación adecuada; el resto argumenta basándose en su mayoría en la utilización de la propiedad de producto escalar y la ecuación asociada al mismo. En cuanto a las representaciones gráficas, en el plano más del 50 % de los estudiantes graficó al menos un vector perpendicular al dato, de los cuales únicamente el 12 % completó su gráfica representando la recta que los relaciona. En el espacio, solamente el 24 % representó gráficamente al menos un vector perpendicular al vector dato y apenas el 5 % esboza el plano que vincula a todos los vectores perpendiculares al vector dato. El porcentaje de estudiantes que no realizó una gráfica o lo hizo incorrectamente aumenta notoriamente del plano (28 %) al espacio (66 %). La falta de apropiación del concepto de vector libre quedó reflejada en las representaciones gráficas. En el plano se observa que el 63 % de los estudiantes exhibió una ecuación que representa la relación con todos los vectores perpendiculares; sin embargo, solamente el 12 % pudo establecer esta relación entre la ecuación y su representación geométrica. En el espacio, más del 30 % presentó una justificación correcta en relación a todos los vectores existentes con la condición requerida, pero tan sólo el 5 % efectuó un registro gráfico de tal situación.

Finalmente, considerando las dos dimensiones de análisis, la realización de un Análisis Multidimensional de Datos utilizando el programa estadístico SPAD expuso una partición de la muestra en tres grupos o clases caracterizadas por diferentes niveles de resolución. Se ha observado que sólo el 10 % pudo resolver la actividad correctamente y en forma completa, aplicando tratamientos dentro del registro algebraico y además la conversión al registro gráfico (Clase 2), mientras que la tercera parte de los alumnos tuvo un rendimiento bajo, ya que no pudieron responder a las consignas solicitadas (Clase 1, 36 % de la muestra). Finalmente, más de la mitad de los estudiantes (Clase 3, 54 %) muestran dificultades en la generalización, ya que trabajan sólo con casos particulares.

Se concluye que los protocolos analizados dan cuenta de distintas líneas de resolución, empleando diferentes operaciones y propiedades, y diversos registros de representación (lingüísticos, simbólicos, algebraicos, gráficos). Se observó que todos los estudiantes presentaron algún registro ligado a la formación, en un número menor realizaron actividades de tratamiento, y un mínimo evidenció la conversión de registros. Esto muestra que el pasaje de un registro de representación a otro (conversión) o las diversas representaciones de un objeto en un mismo sistema de representación (tratamiento) no resultó trivial para los estudiantes. Los mismos no reconocen al mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él en sistemas semióticos diferentes.

Se observó en algunos alumnos, tanto en el plano como en el espacio, una falta de aprehensión conceptual de la noción de vector libre. En el espacio, se manifestó un significativo aumento de dificultades para responder en todos los ítems planteados, tanto en los registros algebraicos como en los gráficos. Se evidenció un reiterado uso de la operación producto escalar y de la propiedad ligada a ella que involucra la perpendicularidad de vectores, utilizando esta última en el espacio sin percibir las diferencias que requiere el cambio de dimensión. Entre los estudiantes que plantearon una ecuación en la búsqueda de solución, sólo un mínimo logró realizar la conversión de este registro algebraico a uno gráfico. Los pocos que sí lo hicieron, mediante la abstracción y generalización, mostraron un proceso de integración entre pensamiento analítico y visual.

Los estudiantes que realizaron una interpretación gráfica correcta de la situación problemática planteada en el plano y/o en el espacio, fueron quienes pudieron justificar una línea de razonamiento que incluía diversos registros de representación, exhibiendo todas las etapas de formación, tratamiento y conversión. Esto condice con que la coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos. Es decir, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático y sus transformaciones en distintos registros favorecen su comprensión y son, en consecuencia, absolutamente necesarios en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.4 Organización del trabajo

Esta tesis consta de seis capítulos. En el primero, se ha presentado el problema de investigación, las motivaciones que lo han generado y el contexto en el cual se encuentra inmerso.

En el segundo capítulo se encuadra teóricamente la investigación, describiendo fundamentos teóricos en relación a errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje, desde las consideraciones teóricas de los registros de representación de Duval, y del aprendizaje significativo de Ausubel.

En el tercer capítulo se describen y analizan dos trabajos exploratorios que se presentan previamente a la metodología aplicada en el trabajo de campo, ya que a partir de los resultados de tales estudios se diseñaron los instrumentos a aplicar.

En el cuarto capítulo se consigna el diseño metodológico que sustentó la investigación central. Se detallan los criterios de diseño de los instrumentos y las técnicas de recolección, procesamiento y análisis de datos.

Los resultados obtenidos en relación a las preguntas que guiaron la investigación central se comunican, analizan y discuten en el capítulo cinco.

Por último, en el capítulo seis se presentan las conclusiones, se valoran las implicancias de los resultados y se plantean interrogantes que pueden dar lugar a nuevas investigaciones.

Al final de cada capítulo se presenta un diagrama global que muestra los aspectos más relevantes del mismo.

FCEIA

Ingeniería. Formación Básica
Asignatura: Álgebra y Geometría Analítica

Unidad: Geometría Lineal del espacio

Tema: Recta en el espacio

Tema específico:
SITUACIONES PROBLEMÁTICAS CUYO CONJUNTO SOLUCIÓN ESTÁ FORMADO POR INFINITAS RECTAS EN EL ESPACIO

OBJETIVOS

Objetivo General: analizar las dificultades a través de las representaciones externas organizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.

Específicos

Detectar las estrategias de resolución

Caracterizar las dificultades a través de las representaciones de carácter algebraico, geométrico y discursivo

Diagrama 1. 1. Diagrama global I

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

> La matemática, en cuanto expresión de la inteligencia humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos fundamentales son la lógica y la intuición, el análisis y la síntesis, la generalización y la individuación. Aunque diversas tradiciones pueden hacer hincapié en diferentes aspectos, sólo la interacción de esas fuerzas antagónicas y la lucha por su síntesis, constituye la vida, la utilidad y el valor supremo de la ciencia matemática.
> Implica una amenaza muy seria a la misma existencia de la ciencia, la afirmación según la cual, la matemática no es nada más que un sistema de conclusiones que se extraen de definiciones y postulados consistentes (…) La matemática no es un juego de definiciones, reglas y silogismos, sin motivo ni fin (Courant y Robbins, 1979, p. 3).

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que sustentan el análisis de la problemática de estudio. La estructura conceptual sobre la que se posiciona tal análisis se encuentra ligada a los *errores y dificultades* en el aprendizaje, desde las consideraciones teóricas de los *registros de representación semiótica de Duval*, y del *aprendizaje significativo de Ausubel*.

2.2 Constructivismo y aprendizaje significativo

> El cerebro no es un consumidor pasivo de información. Por el contrario, construye activamente sus propias interpretaciones acerca de la información y realiza inferencias al respecto. El cerebro ignora mucha de la información aferente y espera, de forma selectiva, otra información (…) es mucho más que “una página en blanco” que aprende pasivamente y registra la información que llega (Osborne y Wittrock, 1983, c.p. Lara Guerrero, 1997, p. 33).

Una visión tradicional de currículo asigna al alumno la función pasiva de receptor de información. Sin embargo, desde una perspectiva constructivista, el alumno construye su propio conocimiento y lo que se construye, los significados que se aprehenden, dependen de lo que él y la situación aportan.

Driver y Bell (1986, c.p. Driver y Oldham, 1988) presentan un punto de vista constructivista de la enseñanza y del aprendizaje que resalta el hecho de que al requerirse cierto nivel de esfuerzo para construir significados es, en último término, la persona que aprende la responsable de su propio aprendizaje. Este enfoque requiere que el profesor sea sensible a las ideas que aportan los alumnos, que las valore y que tenga en cuenta las interpretaciones, a veces inesperadas, que construyen frecuentemente a partir de las actividades y observaciones; y considerar al error más como un punto de partida que como el resultado de una deficiencia. Es necesario para ello proporcionar a los estudiantes tiempo suficiente para que puedan compartir, reflexionar, evaluar, reestructurar sus propias ideas, desarrollar destrezas prácticas y procesos de pensamiento. Ello exige además un clima de enseñanza en el que haya aceptación y apoyo mutuo entre los puntos de vista de los alumnos y el profesor. En contra de la concepción dominante del papel del profesor, éste no debe ser un difusor de contenidos sino alguien que facilita el cambio conceptual al animar a los alumnos a implicarse activamente en la construcción personal del significado. La teoría del cambio conceptual (Schnotz, 2006, c.p. Del Puerto y Seminara, 2010) intenta explicar cómo los llamados preconceptos, concepciones erróneas o concepciones alternativas que tienen los alumnos, producto de su conocimiento ingenuo o de aprendizajes previos, pueden interferir en el aprendizaje de los nuevos conceptos cuando la nueva información no puede ser simplemente adicionada a la que ya poseen y entra en conflicto con la preexistente.

La reflexión es una característica importante en el enfoque constructivista. El flujo continuo de ideas desde los alumnos al profesor es necesario para que éste pueda seleccionar actividades apropiadas que faciliten el cambio conceptual. Los alumnos podrán usar así sus ideas recién desarrolladas en diversas situaciones, tanto nuevas como familiares. De esta forma, los nuevos conocimientos se consolidan y refuerzan, al aplicarse a otros contextos. Debe invitarse a los alumnos a reflexionar sobre cómo han cambiado sus ideas, realizando comparaciones entre su pensamiento actual y el que tenían al inicio de una actividad. En el intercambio por medio de la discusión pueden afinarse los significados construidos por los alumnos mediante la confrontación de las concepciones alternativas, explicitando las contradicciones. De este modo el intercambio de puntos de vista puede llevar a desacuerdos espontáneos entre los alumnos y al conflicto entre perspectivas concretas. Otro resultado de este tipo de intercambio de ideas entre los alumnos es la oportunidad de desarrollar la apreciación de que pueden existir diversas formas de explicar o describir un mismo suceso.

Gil y Carrascosa (1985, c.p. Gil Pérez, 1986) han intentado fundamentar la necesidad de estrategias de enseñanza basadas no sólo en el cambio conceptual, sino también en el metodológico. El aprendizaje requiere no sólo la modificación de las ideas equivocadas, sino también la ampliación y profundización progresiva en sus esquemas de conocimiento.

Los alumnos tienen una visión que ha de modificarse o, incluso, con la que es preciso romper. Dichos cambios conceptuales exigen confrontación, discusión detenida de las distintas alternativas.

En esta línea se señala que es preciso reconocer en la enseñanza tradicional la sensación de que los alumnos no aprenden lo suficiente, olvidan pronto y que, además, algunos aprendizajes son de escasa utilidad. Podemos discutir si es conveniente realizar tal o cual actividad o si su planteamiento es el más adecuado. Sin embargo, no podemos ignorar que las ideas de los alumnos interfieren en las planificaciones de los profesores. La enseñanza constructivista propone cómo considerar en situaciones de aula esas ideas. Su puesta en práctica proporcionará información útil para superar algunos de los problemas señalados anteriormente. Los resultados que iremos obteniendo nos animarán a seguir en la línea de adecuar este enfoque a la realidad de nuestras aulas, en cierta medida a la planificación temporal y por supuesto a nuestro estilo docente.

Quienes están de acuerdo con las orientaciones constructivistas conciben la construcción de conocimientos como algo más flexible y abierto, menos dirigido por actividades minuciosamente programadas con antelación. La idea básica que subyace en la elaboración de programas es favorecer, a través de las actividades, a que los alumnos puedan construir y afianzar conocimientos. Ello exige que el conjunto de actividades posea una lógica interna que evite aprendizajes desconexos. No puede pensarse en actividades sueltas ni en una completa improvisación, sino un programa que pueda orientar y prever el trabajo de los alumnos.

Un problema importante de la tarea docente lo constituye el método habitual de evaluación del aprendizaje que por lo general se encuentra basado en ejercicios numéricos resolubles mediante la aplicación mecánica de un reducido número de fórmulas. La evaluación debe ser un medio para comprender no sólo los resultados logrados por los alumnos, sino también la validación y el análisis de estrategias metodológicas; entonces el problema de los resultados del aprendizaje hay que enfocarlo de una forma global. En una dimensión individual la evaluación trata de comparar los progresos de los alumnos. Al considerar el proceso seguido por cada uno, este puede ser distinto en cada caso en cuanto a la profundidad del conocimiento alcanzado. Gimeno Sacristán (1981) considera que la evaluación debe tener dos funciones: una es la de ayudar al docente a comprender si las estrategias didácticas que utiliza son adecuadas y otra le permite darse cuenta de qué manera realizó o no el alumno el proceso de aprendizaje.

Dentro del enfoque constructivista Ausubel sostiene que el aprendizaje alude a cuerpos organizados de material significativo. Introduce el denominado aprendizaje significativo, que comprende la adquisición de nuevos significados, y se opone al aprendizaje mecánico, repetitivo y memorístico. “La esencia del aprendizaje significativo reside en que las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial con lo que el alumno ya sabe. El material que aprende es potencialmente significativo para él” (Ausubel, 1976, c.p. Pérez Gómez y Gimeno Sacristán, 1992, p. 10).

El aprendizaje repetitivo por su parte, se manifiesta cuando el estudiante no logra relacionar sustancialmente la información dada con su estructura cognitiva, o lo hace de una forma mecánica o poco duradera. Así los conceptos no poseen significado lógico, la nueva información no adquiere significado y el aprendizaje es memorístico y mecánico. Por ejemplo, cuando un estudiante parece recitar la aplicación de una “fórmula” sin poder explicar el significado de la misma, el por qué de su aplicación, sin poder explicitar sus componentes, se refleja un aprendizaje repetitivo.

El aprendizaje significativo puede darse por descubrimiento, en el cual el contenido principal de la información a aprender no se da en su forma final, sino que debe ser descubierta por el estudiante. Pero también es posible un aprendizaje significativo por recepción, cuando el contenido que ha de ser aprendido se le presenta al estudiante como información, es decir, se exhibe de forma explicativa, sin ser por ello un aprendizaje pasivo. Este aprendizaje suele confundirse con el aprendizaje repetitivo, porque suele asociarse equivocadamente a la enseñanza expositiva tradicional. Por el contrario, requiere actividad cognitiva para relacionar los nuevos conocimientos con los ya existentes.

Pero es necesario destacar que tanto el aprendizaje por recepción como el aprendizaje por descubrimiento pueden ser significativos siempre y cuando exista por parte del estudiante una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material con su estructura conceptual y si la tarea es en sí potencialmente significativa, de modo tal que el nuevo material pueda relacionarse de manera sustancial y no arbitraria en la estructura cognitiva del aprendiz.

En la enseñanza secundaria y en la universidad prevalece el aprendizaje por recepción. En general, todos los adultos aprenden básicamente por recepción y por la interacción cognitiva con los conocimientos ya existentes. Además, sería inviable aprender significativamente por descubrimiento toda la información del mundo actual.

El conocimiento específico y relevante para un nuevo aprendizaje, existente en la estructura cognitiva del alumno, es llamado por Ausubel *subsunsor* o *sunsumidor*, idea o ancla. El mismo puede ser un símbolo, una imagen, un concepto, una propiedad, una proposición, un modelo, entre otros, y puede tener mayor o menor estabilidad cognitiva (Moreira, 2012).

Cuando los subsunsores sirven de idea o ancla para el nuevo conocimiento, presentado o descubierto por el aprendiz, éstos adquieren un nuevo significado, corroborando significados existentes. De este modo los nuevos conocimientos adquieren significado para el estudiante y los conocimientos previos adquieren nuevos significados y mayor estabilidad cognitiva, este proceso es llamado asimilación.

Lo aprendido de forma significativa es menos sensible a las interferencias a corto plazo y mucho más resistente al olvido, por cuanto no se encuentra aislado, sino asimilado a una organización jerárquica de los conocimientos referentes a la misma temática. La realización de este aprendizaje puede favorecerse desde fuera, siempre que se organicen los contenidos de una forma lógica y jerárquica y se presente en secuencias ordenadas en función de su potencialidad de inclusión.

En particular para el desarrollo del tema “Recta en el Espacio” deben activarse diversos y variados subsunsores adquiridos en los temas anteriores, “Vectores”, “Recta en el Plano” y “El Plano”. Así, por ejemplo, después de desarrollar el tema Vectores, cuando el alumno resuelve problemas de “Recta en el Plano”, corrobora los conocimientos previos en relación al concepto de vector, dándole mayor claridad y estabilidad cognitiva. En la medida en que el alumno accione de manera adecuada el subsunsor en su aplicación al tema “El Plano”, le proporcionará mayor riqueza, elaboración, funcionalidad al concepto, ya que ha ampliado el campo de aplicación. Por otro lado, este subsunsor (concepto de vector) que ya adquirió significado, servirá como ancla para el tema “Recta en el Espacio”, aumentando su significatividad y así progresivamente el subsunsor se va estableciendo como más estable, se va diferenciando, se vuelve más rico en significados, facilitando cada vez más nuevos aprendizajes. Si por el contrario esta cadena se corta en algún instante, el subsunsor pierde estabilidad cognitiva.

Por otro lado, si un subsunsor no es utilizado frecuentemente, puede ocurrir un cierto olvido, es posible que sus significados ya no sean tan claros, o discernibles unos de otros, pero tratándose de un aprendizaje significativo es posible reincorporarlo, rescatarlo y reactivarlo relativamente rápido. No se trata de un olvido total, es una pérdida de diferenciación de significados, no una pérdida de significados. Si el olvido es total, probablemente el aprendizaje haya sido memorístico y mecánico, no significativo.

Los subsunsores pueden estar algunos muy firmes, otros más débiles, algunos en crecimiento, muy usados, poco utilizados, interactuando, organizándose, reorganizándose, con muchas ramificaciones o incluso encogiéndose.

En la teoría de Ausubel (1976, c.p. Moreira, 2012), la estructura cognitiva es considerada como un conjunto jerárquico de subsunsores dinámicamente interrelacionados. Las jerarquías no son fijas ya que las subordinaciones pueden ir cambiando. La estructura cognitiva está caracterizada por dos procesos la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora.

Cuando la nueva información es incluida dentro de un concepto o proposición, éstos se modifican. Puesto que este proceso de inclusión, de nuevos significados, ocurre una o más veces a medida que transcurre el tiempo, se produce la diferenciación progresiva del concepto o proposición incluida.

El proceso de reconciliación integradora, consiste en eliminar diferencias aparentes, integrar significados, resolver inconsistencias, reordenar.

Moreira (2012) opina que si solamente se diferenciaran los significados acabaríamos por percibir todo diferente. Y si solo integráramos los significados terminaríamos percibiendo todo igual. Los dos procesos son necesarios y simultáneos.

Por ejemplo, el estudiante primero le dará significado al concepto de vector, luego estudiará vectores paralelos y vectores perpendiculares, en esa interacción el subsunsor quedará más rico en significado, el estudiante irá diferenciando vectores en relación a los nuevos significados de vectores paralelos o vectores perpendiculares. Pero no se trata solamente de diferenciar progresivamente la idea de vector, sino también de hacer, por ejemplo, reconciliaciones de las variadas posiciones que pueden asumir los vectores. Más adelante refinará, diferenciará progresivamente y hará reconciliaciones integradoras del concepto de vector utilizado en Matemática del implementado en Física, por ejemplo, (vector libre-vector fijo).

El estudiante aprende a partir de lo que ya sabe, de la estructura cognitiva, de los conocimientos previos (conceptos, ideas, proposiciones, esquemas, etc.) organizados jerárquicamente, lo que significa que algunos subsunsores son más generales, más inclusivos, pero a medida que se producen los procesos de diferenciación progresiva y reconciliación integradora, las jerarquías cambian y la estructura cognitiva se modifica.

Dos son las dimensiones que Ausubel distingue en la significatividad potencial del material de aprendizaje. Significatividad lógica: coherencia en la estructura interna del material de aprendizaje, secuencia lógica en los procesos y consecuencias en las relaciones entre sus elementos componentes. Y significatividad psicológica: que sus contenidos sean comprensibles desde la estructura cognitiva que posee el sujeto que aprende, desde sus ideas previas con las cuales pueda relacionar el material. (1976, c.p. Pérez Gómez y Gimeno Sacristán, 1992).

Es decir, que el material sea potencialmente significativo es la primera condición para que se produzca el aprendizaje significativo y el segundo requisito es la disposición positiva del individuo respecto del aprendizaje, una disposición tanto coyuntural o momentánea como permanente o estructural. Esta segunda condición se refiere al componente motivacional, emocional, actitudinal, que está presente en todo aprendizaje. Para un alumno en particular, la posibilidad de transformar el significado lógico y psicológico, en el transcurso del aprendizaje significativo, se lleva a cabo por la "relacionabilidad intencionada y sustancial de las proposiciones lógicamente significativas con la estructura cognoscitiva de ese alumno en particular" (Ausubel, 1976, c.p. Gutiérrez, 1987, p. 64).

Bajo una visión constructivista, la adquisición de significados es un proceso en el que se necesita la participación activa del individuo, la búsqueda real y no la mera organización de lo recibido.

Lograr el pasaje de un aprendizaje mecánico a uno significativo no es natural ni rápido, es progresivo ya que la construcción de subsunsores adecuados es un proceso no inmediato.

Hay quienes alegan que la teoría de Ausubel es obsoleta porque fue formulada hace muchos años. Pero cabe preguntarse si por ello debemos descartarla, cuando aún no se ha puesto en práctica el principio fundamental de que el conocimiento previo influye en la adquisición de conocimientos. Moreira (2012) afirma que pueden no compartirse algunos conceptos ausubelianos, pero su premisa principal es subyacente a variadas teorías constructivistas: para Piaget en su *esquema de asimilación* el sujeto aprende o construye nuevos esquemas desde los esquemas ya construidos, Kelly (1983, c.p. Moreira, 2012) habla de *constructo personal;* el sujeto aprende o construye nuevos constructos desde los que ya había construido, Johnson-Laird (1983, c.p. Moreira, 2012) habla del *modelo mental* del que se deriva que el sujeto construye nuevos modelos mentales desde los modelos anteriores, desde primitivos conceptuales y desde la percepción, para Vergnaud (1990, c.p. Moreira, 2012) *los esquemas* tienen invariantes operatorios que se constituyen en conocimiento implícito, tienen estos gran influencia en la construcción de nuevos esquemas y conceptos. Es decir, el conocimiento previo puede ser interpretado en términos de esquemas de asimilación, constructos personales, modelos mentales, invariantes operatorios. Sin embargo, las teorías mencionadas anteriormente están más ligadas al desarrollo cognitivo, mientras que la de Ausubel está ligada a la adquisición de conocimiento en situación de enseñanza y aprendizaje.

Es importante destacar que, si bien un conocimiento previo puede favorecer el aprendizaje, a veces puede funcionar en un sentido totalmente opuesto, como un obstáculo. Por ejemplo, en propiedades como: “dos rectas perpendiculares en el plano siempre se intersecan en un punto”, los alumnos suelen extrapolarla al espacio y constituir la idea errónea de que “dos rectas perpendiculares en el espacio siempre se intersecan en un punto”, lo cual no es cierto, porque las dos rectas además de ser perpendiculares podrían ser alabeadas y no tener ningún punto en común. En este contexto puede introducirse la idea de preconcepto concebido como un conocimiento previo que funciona como obstáculo.

La existencia de los preconceptos está íntimamente ligada a una metodología de la superficialidad según Gil y Carrascosa (1985, c.p. Gil Pérez, 1986) que lleva a dar respuestas “seguras” y rápidas, que son consecuencias de generalizaciones acríticas de observaciones cualitativas. Si los alumnos son puestos reiteradamente en situación de aplicar la nueva metodología, es decir, en situación de plantear problemas precisos, de emitir hipótesis a la luz de conocimientos previos, de analizar cuidadosamente los resultados viendo cómo afectan al esquema conceptual de partida, podrán llegar a superar la metodología de la superficialidad haciendo posibles los profundos cambios conceptuales que la adquisición de conocimientos exige. Este cambio metodológico afecta a hábitos muy enraizados y necesita la ruptura con formas connaturales de pensamiento.

2.3 Errores, dificultades y obstáculos

Socas (1997) sostiene que el aprendizaje en Matemática genera dificultades de diversa índole, que pueden abordarse desde diferentes perspectivas según dónde se ponga el énfasis: en el estudiante, en el docente, en la institución, en el currículo, etc. Así, pueden analizarse dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, asociadas a los procesos de pensamiento, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes, y también asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la Matemática, "estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (p.125).

Este investigador, si bien reconoce que los errores pueden tener procedencias diferentes, sostiene que tales errores poseen en común la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado. Los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso de construcción del conocimiento. El saber matemático previo produce modelos implícitos para resolver problemas, que muchas veces son adecuados pero otras veces no, transformándose en dificultades para el saber matemático nuevo. Estas dificultades en general no se pueden evitar, ya que forman parte del proceso de construcción del conocimiento matemático, pero si los docentes las conocemos, podemos reflexionar sobre ellas y facilitar su explicitación por parte de los estudiantes, además de trabajar en colaboración para ayudarlos a la superación de las mismas. Ya que si quedan implícitas es muy difícil la incorporación de un nuevo saber.

Bachelard (1983, c.p. Socas, 1997, p. 135), en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico señala:

> (…) Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en término de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni tampoco de culpar la debilidad de los sentidos y a la mente humana, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.

Socas señala que el traslado del concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de la Matemática es objeto de debate, ya que plantea dificultades que han sido descriptas por otros investigadores (Brousseau, 1983; Sierpinska, 1985; Artigue, 1989; Herscovics 1989; Tall, 1989, c.p. Socas, 1997). “La propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso” (Brousseau, 1983, c.p. Socas, 1997, p.139).

Los profesores de Matemática detectan, en el ejercicio de su profesión, que ciertos errores aparecen repetidamente en el transcurso del tiempo.

> Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones (Rico, 1995, p. 75).

Un proceso de enseñanza-aprendizaje de enfoque constructivista (Valdés Castro y Gil Pérez, 1996), supone un docente que es capaz no sólo de reconocer los errores cometidos por los estudiantes, sino de sondear sus causas, asumiéndolos como parte de la construcción del conocimiento. El análisis de los errores y sus causas nos conducen a la reflexión, ya que una enseñanza que se limita a presentar los conocimientos como algo terminado, sin explicitar el proceso que conduce a su elaboración, impide que los alumnos puedan hacer suyas las nuevas ideas.

Es necesario que cualquier teoría de enseñanza modifique la tendencia a condenar los errores, culpabilizando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de los errores y su consideración en el proceso de aprendizaje a fin de evitar que se transformen en obstáculos (Rico, 1995).

Los obstáculos pueden asociarse a conocimientos que han sido, en general, satisfactorios durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fijan en la mente de los alumnos, como ideas útiles. Pero, posteriormente, cuando el alumno se enfrenta a problemas nuevos, este conocimiento resulta inadecuado y de difícil adaptación a los nuevos contextos

(Socas, 1997). Es decir, un “obstáculo” es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problema pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o ser rechazado transformándose en una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y ayudarlos en el proceso de cambio (Godino, 1991).

D’Amore (2005) destaca que cuando una idea se aplica exitosamente se tiende a conservar y defender esa idea ya adquirida y comprobada, pero este hecho termina convirtiéndose en una barrera para sucesivos aprendizajes.

Brousseau (1983) señala:

> El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que se quiere hacerles jugar a veces. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, tal como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido (p. 171).

En los casos en los que se requiere la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y además, el estudiante se resiste a rechazarla y trata a pesar de la constatación de su fracaso de mantenerla, de adaptarla, hablaremos de obstáculo. “Y esta “concepción obstáculo” se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes” (Brousseau, 1983, p. 173).

Brousseau (1983) da las siguientes características de los obstáculos:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas.

- El alumno se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento nuevo. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Brousseau (1983) distingue tres tipos de obstáculos:

- Obstáculos ontogénicos o psicogenéticos: son debidos a las características del desarrollo del sujeto. Cada persona que aprende desarrolla capacidades y conocimientos adaptados a su edad mental (que puede ser diversa de la edad cronológica), por tanto, adaptados a medios y objetivos de dicha edad. Estas capacidades y conocimientos pueden ser insuficientes para la adquisición de ciertos conceptos respecto del proyecto didáctico desarrollado por el docente y pueden constituir por tanto obstáculos de naturaleza ontogenética.
- Obstáculos didácticos: resultan de las elecciones didácticas para establecer la situación de enseñanza. Todo docente elige un proyecto, un currículo, un método, según sus convicciones tanto científicas como didácticas. Él cree en su elección y la propone a la clase porque la considera eficaz; pero aquello que en verdad es eficaz para algún estudiante, no está dicho que lo sea para otros. Para aquellos otros, la elección de aquel proyecto se convierte en un obstáculo didáctico.
- Obstáculos epistemológicos: están intrínsecamente relacionados al propio concepto. Evidenciado por medio de un análisis histórico, tal tipo de obstáculo debe ser considerado como parte del significado del concepto. Por tanto, encontrarlo y superarlo, parece ser una condición necesaria para la construcción de una concepción relevante.

Existen casos en los que los obstáculos didácticos se mezclan con los obstáculos epistemológicos (Godino, 1991).

Brousseau (1983, c.p. Socas, 1997) señala que:

> (…) Para superar un obstáculo se requiere un esfuerzo de la misma naturaleza que cuando se establece un conocimiento, es decir interacciones repetidas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento. Esta observación es fundamental para distinguir un verdadero problema; es una situación que permite esa dialéctica y que la explica (p.137).

Es importante poner de manifiesto los conocimientos adquiridos por el estudiante y los errores que responden a una lógica personal. Se debe aceptar el obstáculo y considerar su aparición como trascendente, ya que su superación permitirá la adquisición de un nuevo conocimiento.

Muchas veces los obstáculos en el aprendizaje de conceptos y propiedades en Matemática se encuentran ligados a la visualización, noción sobre la que hay diferentes concepciones en la investigación en Educación Matemática. Zimmerman & Cunningham (1991, c.p. Dolores, 2007, p. 481) caracterizan el término Visualización Matemática como “los procesos de formación de imágenes (tanto mentalmente como con la ayuda de lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y el uso efectivo de tales imágenes para el descubrimiento matemático y la comprensión”. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir la comprensión.

Si hablamos de geometría en el espacio, (Gutiérrez, 1991), generalmente se hace mención a la “visualización” o “visualización espacial”, aunque otros investigadores que se han interesado por este campo le han dado diversos nombres: “percepción espacial”, “imaginación espacial”, “visión espacial”, entre otros. El elemento básico en las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que hacen las personas de objetos físicos, conceptos, propiedades, relaciones, etc.

Por otro lado, Calvillo y Cantoral (2007) definen la visualización como “la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual” (p. 424).

Socas (1989, c.p. Rodríguez, 2012, p. 89) señala que:

> (…) La experiencia y la historia han mostrado la importancia de la visualización como una “herramienta” fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas (…) Conviene observar que en ningún momento las generalizaciones teórico-algebraicas aparecen automáticamente de la visualización, sino que ésta complementa el entendimiento de tales generalizaciones.

Como se ha mencionado, la comunicación de los objetos matemáticos se realiza mayormente a través de símbolos y de un lenguaje sometido a ciertas reglas. Esta naturaleza abstracta de la Matemática, en la cual toda actividad se realiza necesariamente en un contexto de representación, es fuente de dificultades. Las mismas se manifiestan a través de errores en el uso de diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático.

2.4 Acerca de las representaciones

El análisis de esta temática se centra en la teoría desarrollada por Duval (1999) a la que ya hemos hecho referencia en el capítulo I. Retomaremos ahora algunos conceptos con la finalidad de presentar un panorama más amplio de los aportes de este autor. Es importante destacar que, si bien este investigador concentró sus estudios en la enseñanza secundaria y primaria, en esta tesis se aplicará este marco teórico para analizar la actuación en la resolución de problemas de estudiantes universitarios. Esto permitirá comparar los resultados obtenidos en esta tesis con las conclusiones formuladas por Duval, en un nuevo contexto.

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos como lo son los objetos comúnmente llamados reales o físicos, es necesario trabajar con representantes. Una escritura, una notación, un símbolo, una figura, constituyen representaciones de un objeto matemático.

Duval (1999) señala que las actividades cognitivas en el aprendizaje en Matemática requieren el uso de sistemas de expresión y de representación diferentes a los del lenguaje natural o el de las imágenes: variados sistemas de escritura numéricos (sistema decimal, binario, fraccionario, etc.), notaciones simbólicas ($+, \infty, \alpha, \forall, \neq,$ etc.), figuras geométricas (recta, triángulo, cono), gráficos cartesianos, diagramas (de Ven, de flujo, de barras, etc.), esquemas, escritura algebraica (ecuación, fórmula) y lógica, que constituyen lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar conceptos, operaciones, propiedades y relaciones.

Resulta de suma importancia conocer el proceso de construcción de las representaciones utilizadas en las etapas de resolución de ejercicios y problemas, por el significado atribuido a la información que las mismas codifican, así como también la dinámica de su transformación durante los procesos de búsqueda, contrastación y validación de los resultados.

Ante una situación problemática por resolver los estudiantes utilizan diferentes representaciones internas y externas que cambian en forma sucesiva y que se relacionan con el éxito o fracaso en la búsqueda de una solución. Tales representaciones, se encuentran ligadas a la lectura del enunciado, involucran texto, dibujos, esquemas, ecuaciones, etc. El estudio de las mismas, brinda información acerca de las evoluciones en las líneas de razonamiento, así como también de los errores, dificultades y obstáculos con los que los alumnos se enfrentan en los procesos de resolución.

Un estudiante de Ingeniería no sólo debe manipular fórmulas, reglas y procedimientos, sino que necesita desarrollar habilidades que le permitan generalizar, abstraer y relacionar los objetos de estudio mediante sus diferentes representaciones externas. Duval (1998), un referente de esta temática, señala que los procesos de resolución en Matemática involucran la comprensión del enunciado de la situación problemática y la transformación relevante que se presenta en él. Lo cual implica pasar de una descripción discursiva de los objetos que surgen del campo de la pregunta planteada, a una escritura simbólica de sus relaciones.

Duval (2004, c.p. Camargo, 2013, p.1842), define “registro de representación semiótica como aquel registro que constituye el margen de libertad con que cuenta un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o simplemente para comunicarlas a un interlocutor”.

Este autor plantea que son las representaciones semióticas las que nos dan acceso a los objetos. De este modo, un estudiante, para lograr una conceptualización, debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean expresiones en lenguaje natural, gráficos, símbolos, tablas, etc.

Por ejemplo, si el objeto en estudio es una función, sus representaciones semióticas podrían ser una gráfica o una tabla con determinados datos; si el objeto de estudio son números, sus representaciones semióticas podrían ser una escritura decimal o una fraccionaria.

Pero no debe confundirse un objeto matemático con su representación, esta confusión conlleva a una aprehensión del concepto a partir del registro en el cual se ha formado su representación, que no permite la transferencia del objeto a otra representación del mismo.

Otros autores (Chevallard, 1991; Godino y Batanero, 1994, c.p. D'Amore, 2009) coinciden con Duval (1998) en que la adquisición conceptual de un objeto matemático pasa necesariamente a través de la adquisición de varias representaciones semióticas. Estas producciones externas constituidas por el empleo de signos pertenecen a un sistema de representación -registros-, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento. La posibilidad de realizar transformaciones depende del sistema de representación utilizado.

La comparación de diferentes modos de representación semiótica de un mismo objeto, requiere de un análisis de los aspectos que se consideran relevantes en cada registro. Esto es porque la naturaleza del registro semiótico utilizado para representar al objeto matemático impone una selección de los elementos significativos o informativos del contenido que representa, en función de las posibilidades y de las restricciones semióticas de tal registro. Un enunciado en lenguaje coloquial, una expresión en lenguaje algebraico y una representación gráfica son representaciones que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Así, por ejemplo, la forma de interpretar un gráfico dependerá de los conceptos particulares implicados en lo que se está representando.

"Cada representación de un objeto matemático, desde el punto de vista cognitivo, es parcial con respecto a lo que representa" (Duval, 1998, p.185). Por ello, la coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se lo reconozca en cada una ellas. Un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y que promuevan la articulación coherente entre representaciones. Como señala Hitt (2001), el conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable cuando "es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones" (p.171).

En relación a esta temática Font (2000, c.p. Radillo Enríquez et al., 2005) señala que las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y en consecuencia para los procesos de enseñanza y aprendizaje. Infiere que las diferentes representaciones ponen en función diferentes procesos cognitivos. Así, por ejemplo, el registro verbal se relaciona con la capacidad lingüística de los alumnos, el registro gráfico permite conceptualizar mediante la visualización de los objetos y el registro simbólico se encuentra ligado al pensamiento abstracto, analítico y lógico.

Duval (1998) distingue tres actividades cognitivas asociadas a la producción y aprehensión de representaciones semióticas:

1) La *formación* de una representación, identificable como una representación de un registro dado. Por ejemplo, enunciación de una frase, dibujo de una figura geométrica, escritura de una fórmula, etc. Esta actividad implica una selección de rasgos y de datos en el contenido a representar, que depende de unidades y reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. En este sentido, la formación de una representación podría compararse con la realización de una tarea de descripción.

2) El *tratamiento* de una representación, es la transformación de una representación en otra en el mismo registro donde ha sido formada, o sea, es una trasformación estrictamente interna, utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio al sistema. La función que cumple dentro del sistema semiótico es la ganancia de información. Así, por ejemplo, una recta puede ser representada a través de ecuaciones paramétricas y luego de una transformación se expresada a través de otra representación (ec. canónica, explícita, segmentaria, etc.) dentro del mismo registro algebraico. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro; su naturaleza y su número varían considerablemente de un registro a otro.

3) La *conversión* es la transformación de una representación en otra representación en otro registro, o sea, es una representación externa al registro de partida, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro y, por lo tanto, es posible que al realizar una conversión entre diferentes registros se pierda el contenido dado y la representación obtenida cubra sólo parcialmente el de la representación de partida. Así, una ilustración puede ser una representación que, mediante una conversión, pasó de ser una representación lingüística a una representación gráfica y una descripción puede ser una representación que mediante una conversión cambió de una representación no verbal (esquema, figura, gráfica) a

una representación lingüística. La conversión implica conservar la referencia al mismo objeto, pero sin conservar necesariamente la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto.

Es necesario destacar que la conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente de la del tratamiento.

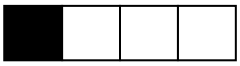
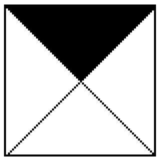
La comprensión del enunciado de cualquier situación problemática requiere necesariamente una tarea de conversión. La misma involucra la habilidad de discriminar en el enunciado los objetos relevantes involucrados, traducir los datos, convertir la información que se presenta en una forma que permita iniciar un camino de resolución.

Duval (1999) afirma que en la enseñanza generalmente se favorece el trabajo relacionado con la formación y los tratamientos dejando de lado los procesos que implican la conversión.

Para este autor también es importante distinguir dos conceptos fundamentales: "semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica y noesis, los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto" (Duval, 2004, c. p. Camargo, 2013, p. 1842). No hay noesis sin semiosis, es decir, no se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario *tratamiento* y conversión de diferentes registros de representación semiótica.

Veamos en los siguientes cuadros algunos ejemplos en relación a conceptos mencionados anteriormente.

Diferentes representaciones de un número	
Registro semiótico	**Representación semiótica**
lenguaje común, coloquial o literal	un cuarto
	la mitad de la mitad
lenguaje aritmético o numérico	$\frac{1}{4}$ (escritura fraccionaria)
	0,25 (escritura decimal)
	25×10^{-2} (escritura exponencial)
	$\{x / 4x-1=0\}$ (escritura conjuntista)

lenguaje algebraico	8x-2=0 (ecuación)
lenguaje gráfico	
	

Tratamiento: cambio de una representación semiótica a otra representación semiótica en el mismo registro.

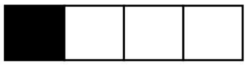
registro aritmético ***registro aritmético*** ***registro aritmético***

$\frac{1}{4}$ $\xrightarrow[\text{Tratamiento}]{}$ 0,25 $\xrightarrow[\text{Tratamiento}]{}$ 25×10^{-2}

Un estudiante puede presentar dificultades para expresar $\frac{1}{4}$ como 0,25. O quizás puede no tener dificultades en realizar este tipo de tratamiento y presentar además un buen desempeño en la suma de números en el sistema decimal, pero no así en la suma en el sistema fraccionario, ya que recordemos que cada sistema tiene reglas propias.

Conversión: cambio de una representación semiótica en un registro a otra representación semiótica en otro registro.

registro aritmético a registro algebraico a registro gráfico

25×10^{-2} $\xrightarrow[\text{Conversión}]{}$ $\{x / 4x - 1 = 0\}$ $\xrightarrow[\text{Conversión}]{}$ 

Para poder analizar la conversión de la representación de un objeto, cuando se cambia de sistema de representación, es esencial no confundir los tres polos constitutivos de toda representación: *el objeto* representado (por ejemplo una recta), *el contenido* de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto (dos puntos; 1 punto y un vector dirección), *la forma* de la representación, es decir, su modalidad o su registro (una ecuación, registro algebraico; una gráfica, registro gráfico) (Duval, 1998).

Este investigador destaca que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático y su transformación en distintos registros favorecen su comprensión y son, en consecuencia, absolutamente necesarios en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, el pasaje de un registro de representación a otro (conversión) o las diversas representaciones de un objeto en un mismo sistema de representación (tratamiento) no resultan triviales para los estudiantes. Si el concepto está adquirido, el pasaje de una representación a otra se produce en forma espontánea y cualquier representación del mismo, en cualquier registro, causa idéntico significado. Cuando esto no sucede no hay *congruencia* entre las representaciones de un mismo objeto y esta falta de congruencia puede ser producto del gran predominio que se le otorga en la enseñanza tradicional al registro algebraico.

Duval (1999) habla de un “encerramiento” entre representaciones y acentúa que al mismo se le presta poca atención. Tal encerramiento resulta del fenómeno de no congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que proviene de sistemas semióticos diferentes.

Este autor sostiene que el análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en el aprendizaje relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos que están estrechamente ligados. El primero, la diversificación de los registros de representación. El segundo es la diferenciación entre representante y representado o, al menos, entre forma y objeto en una representación semiótica. Esta diferenciación generalmente está asociada a la comprensión de lo que una representación codifica y por tanto, a la posibilidad de asociar otras representaciones y de integrarlas en los procedimientos de tratamiento. Tal diferenciación jamás se adquiere instantáneamente, cualquiera sea el registro de representación y cualquiera sea el estadio de desarrollo. El tercer fenómeno es el de la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles: el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes no es suficiente para que puedan ser movilizados y utilizados conjuntamente.

Como ya hemos dicho, en Matemática las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad misma. En efecto, la posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Y esta función de transformación solo la pueden cumplir las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. Las representaciones mentales son definidas por Duval (1999) como el conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado.

Desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas. A esto hay que añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumentan las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales se enriquecen (Benveniste, 1974; Brensson, 1987).

Dada la necesidad de las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas fundamentales y la implicación recíproca de las representaciones mentales y de las representaciones semióticas, podemos decir que no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. En este sentido, el análisis de los problemas en el aprendizaje de la Matemática y de los obstáculos a los cuales se enfrentan regularmente los alumnos, conduce a que se reconozca esta ley fundamental del funcionamiento cognitivo del pensamiento. Efectivamente el dominio de una pluralidad de sistemas semióticos implica la coordinación de los mismos por parte del estudiante.

La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes en absoluto es espontánea. Un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus traducciones mutuas, es necesario para favorecer tal coordinación. Ahora bien, cuando se propone tal tipo de trabajo, se constata una completa modificación en las iniciativas y en las démarches[2] de los alumnos para efectuar las transformaciones matemáticas, para controlarlas y para que la ejecución sea rápida; además se observa que aumenta el interés en la tarea. No solo se logran aciertos sino también una modificación en la calidad de las producciones. Este salto cualitativo en el desarrollo de las competencias y de los desempeños aparece ligado a la coordinación de sistemas semióticos en los alumnos Duval (1999).

La comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento, las interpretaciones -hermenéutica y heurística- de los enunciados, están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica. La conversión de las representaciones depende de esta coordinación. La conversión es una actividad cognitiva primordial, menos visible que el tratamiento, pero sin embargo es esencial. Esto tiene asidero en que toda démarche intelectual, ya sea que se trate de un encerramiento, de una explicación, de una descripción, de un cálculo, de la resolución de un problema, requiere la mayoría de las veces que las representaciones semióticas sean convertidas para poder ser tratadas.

El problema esencial de la semiosis es el de la diversidad de los sistemas de representación y el de los fenómenos de no-congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. La amplitud de las dificultades que la operación de conversión suscita, plantea no solo la pregunta general sobre el papel de la semiosis en el funcionamiento del pensamiento, sino también el de las condiciones para una diferenciación entre representante y representado, en las representaciones semióticas.

Como ya hemos referido, cuando nos encontramos con un objeto matemático, comienzan a activarse en nuestro cerebro aquellas representaciones inconscientes e inherentes al ser humano, de modo que empezamos a crear una aproximación del mismo, es decir, una construcción interna, propia e individual, diferente para cada persona. Esta representación interna constituye el primer

2 Démarches: Duval usa este término para designar todo lo que alguien hace para llegar a un resultado, incluido todas las tentativas y las falsas pistas abandonadas. Remite no solo a lo que un individuo hace sino también a lo que trata de hacer.

paso para la construcción del concepto con la simbología correspondiente, dando lugar, finalmente, a una representación externa que hará más tangible y manejable la idea inicial. En la resolución de situaciones problemáticas en Matemática se ponen en juego los procesos de construcción de representaciones, la codificación del significado atribuido a la información que las mismas implican, es decir, las transformaciones involucradas durante los procesos de lectura, búsqueda, ejecución y validación de los resultados. Sobre estos aspectos, desde la Psicología Cognitiva, se han planteado enfoques explicativos de la conducta humana en relación al análisis de los procesos y estructuras mentales: la construcción y naturaleza de las representaciones internas, el modo de almacenaje y las estrategias que utiliza el sujeto en los procesos de conocimiento. En este contexto, la resolución de problemas se caracteriza como un proceso de desarrollo de un modelo mental o situacional (Johnson-Laird, 1983; Perkins, 1991) en el cual la mayor o menor adecuación del mismo depende de la comprensión de la situación planteada. Perkins (1991) atribuye muchos de los fracasos en la resolución de problemas a las limitaciones del modelo situacional construido por el estudiante y propone evaluar tales modelos teniendo en cuenta posibles sesgos cognitivos, entre los que caben mencionar: sesgos de confirmación, de fijación o creencia, y facilitador.

El sesgo de confirmación implica la tendencia a la verificación, es decir, a considerar sólo la evidencia consistente con las hipótesis de partida de quien resuelve.

El sesgo de fijación se refiere a la predisposición a interpretar la evidencia disponible de acuerdo a la credibilidad de la conclusión a la que conduce.

El sesgo facilitador involucra la elección de la opción más simple que permite desarrollar la resolución.

La presencia de estos sesgos evidencia la tendencia natural a minimizar la demanda cognitiva, razón por la cual se dice que son funcionales en términos de economía cognitiva. Desde esta perspectiva muchos de los fracasos en la resolución de problemas pueden explicarse por la construcción de un modelo situacional que "tiene sentido" para quien resuelve. Y cuando el modelo tiene sentido, no es necesario continuar, es más, el no continuar reduce la posibilidad de generar una disonancia cognitiva. Esta "epistemología del tener sentido" es robusta porque es rápida, fácil y adecuada a la capacidad limitada de la memoria humana. Aquí se reconoce un “cierre prematuro” de la resolución desde un modelo que les satisface a los alumnos y que no revisan recursivamente. Consideran que han finalizado la resolución al obtener una solución simple que les satisface, pero que es incoherente.

2.4.1 Consideraciones para la lectura de esta tesis[3]

Como ya hemos mencionado, los objetos matemáticos tienen la peculiaridad de poder expresarse en distintas formas de representación semiótica. En el caso particular de esta tesis, en la que se trabaja con vectores, puntos, rectas y planos, los mismos se pueden representar en forma: gráfica, simbólica, algebraica, numérica y/o en lenguaje natural. Por lo tanto, podemos considerar en esta temática el registro gráfico, el registro simbólico, el registro algebraico, el registro numérico y el registro en lenguaje natural o coloquial.
El *registro simbólico* es frecuente que aparezca en Matemática combinado con otro tipo de registros. Por ejemplo, en una gráfica o en una descripción en lenguaje natural, pueden presentarse símbolos para la designación de objetos.
El *registro gráfico* permite exhibir un dibujo, y al ser un registro no discursivo, en general es necesario hacer uso de otro registro para expresar ciertas características del objeto presentado.
El *registro coloquial* o *literal* es utilizado para introducir definiciones, para proporcionar información de situaciones y explicar diferencias entre los objetos, aclarar dudas, etc. En este tipo de registro es común observar tratamientos como argumentaciones, descripciones y comentarios. Por ejemplo, cuando a los estudiantes se les pide que expliquen los procedimientos que han utilizado en su resolución o bien cuando realizan alguna interpretación de una imagen proporcionada.
El *registro algebraico* es utilizado para representar objetos cuando se necesita, una expresión abstracta de los mismos, una generalización, definir operaciones o

[3] Se señala que cuando se utilicen expresiones del tipo “una cantidad infinita” o “un número infinito”, se recurre a un lenguaje no formal, sin rigurosidad matemática, priorizando y utilizando un vocabulario al que el alumno está habituado de la escuela media y propio de ingresantes a carreras de Ingeniería.

relaciones entre los mismos. Este tipo de registro por su carácter abstracto se encuentra ligado necesariamente al simbólico.

El *registro numérico*, por su parte, permite apreciar características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así como vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas. También es utilizado cuando se presentan situaciones concretas en las que se tiene que resolver un problema particular y se deben realizar cálculos a partir de la información que se proporciona para la búsqueda de respuesta.

Es importante mencionar que en general, en Matemática, se combinan el registro literal, el registro algebraico y el numérico sin dar prioridad a ninguno de ellos.

En el siguiente cuadro se pueden observar algunos ejemplos en relación a los tipos de registros relevantes para esta tesis.

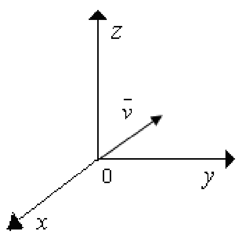
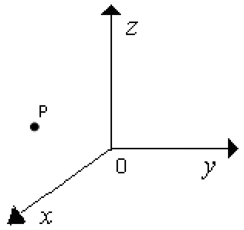
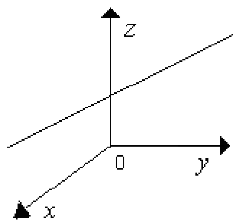
Objeto	**Registro semiótico**	**Representación semiótica**
Vector	Coloquial o literal	Segmento orientado, caracterizado por una dirección (dada por una recta sostén o por una paralela), un sentido (uno de los dos sentidos posibles sobre la recta) y un módulo (la longitud del segmento).
	simbólico	$\bar{v}$
	algebraico	$\bar{v} = (a, b, c)$
	numérico	$\bar{v} = (1,3,2)$
	gráfico	
Punto	simbólico	P
	algebraico	$P(x, y, z)$
	numérico	$P(1,-2,1)$

	gráfico	
Recta	coloquial-numérico	Recta paralela al vector $\bar{u} = (-5,1,1)$ que pasa por el punto $P\,(1,-2,1)$
	algebraico	$r)\begin{cases} x = x_0 + u_1\,t \\ y = y_0 + u_2\,t & t \in R \\ z = z_0 + u_3\,t \end{cases}$
	algebraico	$r)\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -2 + t & t \in R \\ z = 1 + t \end{cases}$
	gráfico	

Se han adoptado dos estadios para el desarrollo de la presente investigación. El primero de tipo diagnóstico -que se presenta en el capítulo siguiente-, constituido por dos estudios exploratorios, con la finalidad de indagar conocimientos previos, formas de razonamiento, y dificultades que pudieran colaborar con el diseño del segundo estadio. Este último constituye la fase principal de esta tesis y está conformado por dos situaciones problemáticas diseñadas en función de los objetivos inicialmente planteados.

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS CUYO CONJUNTO SOLUCIÓN ESTÁ FORMADO POR INFINITAS RECTAS EN EL ESPACIO

Objetivo General: analizar las dificultades a través de las representaciones externas organizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.

Objetivos específicos:

- Detectar las estrategias de resolución
- Caracterizar las dificultades detectadas a través de las representaciones de carácter algebraico, geométrico y discursivo

ERRORES, DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Diagrama 2. 1. Diagrama global II

CAPÍTULO III

3. INDAGACIÓN EXPLORATORIA

3.1 Introducción

Comienza aquí la parte empírica de esta tesis. En función de los antecedentes descriptos en el capítulo I, se realizaron dos estudios exploratorios en relación a la temática de estudio con un subgrupo de la muestra de alumnos con la que se efectuó posteriormente el trabajo de campo de la investigación central.

La metodología adoptada en las investigaciones presentadas a continuación es fundamentalmente cualitativa, con un enfoque interpretativo. Los estudios se realizaron con estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería de AGA, básicamente en situación de aula. La técnica utilizada para la recolección de datos fue la observación participante y los instrumentos aplicados fueron: diarios de campo, registros escritos y grabaciones.

En el Estudio Exploratorio I se presenta el análisis del registro de observación de una clase donde se desarrollaron contenidos de la unidad I: Vectores en el plano y en el espacio. Se analiza el discurso de los estudiantes en el aula, tratando de develar las dificultades que afloran en relación a la problemática planteada en esta tesis.

Si bien a lo largo de mi experiencia docente en el área de Matemática básica universitaria en la formación de ingenieros he detectado dificultades de los estudiantes en esta temática, en este estudio se obtuvo un registro que permitió desarrollar una primera caracterización de las mismas.

El Estudio Exploratorio II, aplicado a una muestra de alumnos de la misma comisión del estudio I, tiene el propósito de profundizar el análisis a través del estudio de la actuación individual y grupal en la resolución de una actividad del material de cátedra, que fue ampliada en función del objetivo de tesis y de las dificultades observadas en el estudio exploratorio I. A partir de un trabajo de campo y resoluciones escritas, se obtuvo información acerca de los procesos de resolución desarrollados, que permitió analizar dificultades y obstáculos durante este proceso.

3.2 Estudio exploratorio I

3.2.1 Introducción

Como se ha mencionado, la Unidad “Vectores” es un contenido fundamental en AGA para el posterior desarrollo de la Unidad II correspondiente a la “Geometría Lineal del plano y del espacio”, motivo por el cual el objetivo de este estudio es explorar posibles dificultades en este tema pues se asume que las mismas reaparecen cuando los estudiantes abordan contenidos de “Recta en el Espacio”. Para ello se registraron las actuaciones de la docente y de los estudiantes en el desarrollo de una clase teórica donde se trabajó una situación problemática vectorial que admite infinitas soluciones, fuertemente asociada a la temática de esta tesis.

3.2.2 Metodología

La técnica utilizada para la recolección de datos fue la observación participante, como:

> (…) forma condensada, capaz de lograr la objetividad por medio de una observación próxima y sensible, y de captar a la vez los significados que dan los sujetos de estudio a su comportamiento (...) La observación y la observación participante proporcionan descripciones, es decir, discurso propio del investigador (Velasco y Díaz de Rada, 2006, p. 34).

En este sentido se trató de modificar lo menos posible la situación objeto de estudio, para la observación de los sucesos tal y como acontecen, con la menor interferencia posible. Como señala Woods (1987), "Los principales requisitos de la observación son, naturalmente, un ojo avizor, un oído fino y una buena memoria" (p. 56). El gran aporte de esta técnica es que permite acceder a un tipo de información que si no sería imposible recoger, brindando al investigador la oportunidad de recoger los datos en persona.

Presencié la clase en calidad de observador participante en una comisión de AGA, ubicándome en un costado del salón y realicé un registro escrito de lo acontecido en la clase. Mi presencia no les resultó extraña a los estudiantes ya que soy una de las docentes a cargo de la clase práctica. Las edades de los estudiantes estaban comprendidas entre 18 y 20 años.

3.2.3 Relato, resultados y análisis

La docente ya había desarrollado algunos contenidos de Vectores en el plano y en el espacio (definición geométrica de vector, vector por componentes, definición de producto escalar, propiedades, vectores paralelos) en clases anteriores. La profesora comienza diciendo: "*ya probamos en clase la validez de la propiedad* $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0},\ \bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \times \bar{v} = 0$*. Dado* $\bar{u} = (2,3)$ *¿pueden darme un vector* $\bar{v} \perp \bar{u}$ *?"*

Ante esta pregunta algunos de los estudiantes encuentran rápidamente las componentes de un vector perpendicular a $\bar{u} = (2,3)$ mediante la aplicación de la propiedad y un simple cálculo mental. Por ejemplo, un alumno responde: "$\bar{v} = (-3,2)$", es decir, este alumno no tuvo dificultad en verificar mentalmente que: $(2,3) \times (-3,2) = -6 + 6 = 0,$ luego $\bar{u} \times \bar{v} = 0$, obteniendo las componentes de un vector perpendicular a $\bar{u}$.

La docente, sin profundizar en la posibilidad de las infinitas soluciones que existen -en el plano-, abandona el ejemplo y formula la misma pregunta, pero ahora para un vector en el espacio. Plantea: "*dado* $\bar{u} = (1,2,3)$ *¿pueden darme un vector* $\bar{v} \perp \bar{u}$ *?".* Los alumnos piensan, murmuran, pero ninguno responde.

Ella cambia la pregunta y dice *"¿cuántos vectores perpendiculares a* $\bar{u}$ *existen?"*

Un grupo de alumnos responde: "*existen 2 vectores"*.

Por las expresiones y las representaciones gestuales -realizadas con los dedos de sus manos representando vectores- puede inferirse que están pensando en el vector $\bar{u}$ y dos vectores perpendiculares a él "paralelos a un mismo plano" y "del mismo módulo", como lo describe la figura 3.1:

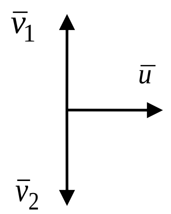
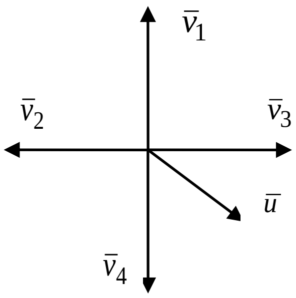


Figura 3. 1

Es decir, consideran dos vectores con una misma dirección, sentidos opuestos, de igual módulo; los tres vectores se encuentran paralelos a un mismo plano, evidenciando una dificultad en detectar todos los casos posibles, infinitos vectores.

Un grupo de estudiantes más numeroso que el anterior, responde: *“existen 4 vectores perpendiculares a* $\bar{u}$*”*.

Por la descripción que realizan, en forma oral y gestual con sus manos, parecen imaginar al vector $\bar{u}$ y cuatro vectores que simulan “dos ejes perpendiculares” y tienen “el mismo módulo” como se observa en la figura 3.2:



$$(\bar{u},\bar{v}_1)=90^{\circ}$$
$$(\bar{u},\bar{v}_2)=90^{\circ}$$
$$(\bar{u},\bar{v}_3)=90^{\circ}$$
$$(\bar{u},\bar{v}_4)=90^{\circ}$$

Figura 3. 2

Estos estudiantes ubican cuatro vectores paralelos a un mismo plano, considerando dos direcciones y el vector $\bar{u}$ perpendicular a dicho plano, por lo cual se interpreta que estos estudiantes están ubicándose en el espacio, pero aun así muestran una limitación en cuanto a todos los casos posibles, infinitos vectores.

Ningún alumno responde que existen infinitos vectores, sin pensar siquiera la posibilidad de considerar otros vectores con las direcciones ya descriptas, pero con diferentes módulos. Nadie hace referencia específicamente a direcciones o sentidos, sino que hablan de *“2 vectores”* y *“4 vectores”*.

Quienes responden que existen dos vectores perpendiculares sugieren una visión completamente ligada al plano. Y quienes dicen cuatro vectores, podrían tener una visión “semiligada” al plano, pues si bien el vector $\bar{u}$ no se encuentra paralelo al mismo plano que el resto de los vectores, parece haber un vínculo con el plano cartesiano.

Ante las respuestas sobre la existencia de un número finito de vectores perpendiculares a $\bar{u}$, la profesora intenta hacer una representación gestual, interpretando con un fibrón y sus dedos la última situación planteada en el espacio. Y los hace dudar preguntándoles: *"¿seguro son cuatro vectores?"* Algunos alumnos dicen: "*hay más"*, y unos pocos expresan: "*hay infinitos"*. La profesora muestra que hay infinitos vectores haciendo girar su dedo alrededor del vector $\bar{u}$ representado por el fibrón. A partir de esto, algunos estudiantes dicen: "*hay infinitos vectores perpendiculares a $\bar{u}$, todos los que están sobre una circunferencia".*

La representación realizada por la docente, si bien induce a los estudiantes a inferir que existen infinitas direcciones perpendiculares a la inicialmente dada y en consecuencia infinitos vectores perpendiculares, no contempla la posibilidad de la variación del módulo. Su representación implicó una asociación con la imagen de una circunferencia donde el radio es considerado como el módulo constante de los vectores cuyas direcciones varían, como se muestra en la figura 3.3. En síntesis, si bien los alumnos logran visualizar que existen infinitas direcciones a considerar, ninguno expresa verbalmente la identificación de infinitos módulos a tener en cuenta.

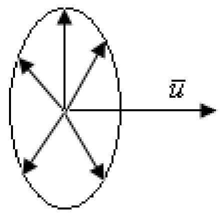


Figura 3. 3

Hasta este momento los estudiantes responden de forma sesgada sobre la existencia de infinitos vectores perpendiculares a $\bar{u}$, con dificultades en el reconocimiento de la variación de los módulos y de las direcciones, de los vectores que cumplen con las condiciones requeridas.

La docente, centrándose ahora en la propiedad planteada al inicio de la clase ($\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0},\ \bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \times \bar{v} = 0$) dice: "*ya vimos que hay infinitos vectores perpendiculares a $\bar{u} = (1,2,3)$ encontremos las componentes de algunos, ¿cómo* *podríamos hacerlo?, ¿podemos usar de alguna forma la propiedad que usamos en el plano?"*

Los alumnos piensan, un estudiante propone el vector: *"*$\overline{v} = (2,-1,0)$*",* otro estudiante dice: *"*$\overline{v} = (0,3,-2)$*"*. Algunos alumnos dan otros ejemplos, pero siempre con "una de las tres componentes cero". Con esta particular elección, al igual que el método usado en el plano, se puede observar que no hay dificultad en verificar mentalmente que: $\overline{u} \times \overline{v} = 0$ y que por lo tanto se han obtenido las componentes de vectores perpendiculares a $\overline{u}$. Los vectores sugeridos por los estudiantes son escritos por la docente en el pizarrón.

Otros estudiantes parecen operar mentalmente con los números de las componentes, ya que no realizan cálculos en sus hojas y expresan oralmente otros vectores que no tienen ninguna componente cero y cuyo producto escalar con $\overline{u}$ es cero, haciendo uso de la propiedad mencionada.

Algunos alumnos con la ayuda de la profesora concluyen que: *"cualquier vector paralelo a los propuestos también resulta perpendicular a* $\overline{u}$*",* aplicando la propiedad: si $\overline{u} \perp \overline{v}$ y $\overline{w}$ es paralelo a $\overline{v}$, entonces $\overline{w}$ es perpendicular a $\overline{u}$. Y citan algunos ejemplos multiplicando por un escalar a las componentes de los vectores ya descriptos, aplicando ahora la propiedad: $\overline{w} \neq \overline{0},\ \overline{v} \neq \overline{0}$, si $\exists\, \alpha \in R - \{0\} / \alpha \overline{v} = \overline{w}$ entonces $\overline{w}$ es paralelo a $\overline{v}$. Esta propiedad involucra implícitamente relevancia al módulo y al sentido de los vectores resultantes, dependiendo del valor de α. La variación de $\alpha \in R - \{0\}$ implica infinitos vectores $\overline{w}$, pero paralelos a $\overline{v}$, es decir no se consideran nuevas direcciones.

La profesora abandona aquí el problema planteado para continuar con el desarrollo de otros contenidos.

3.2.4 Conclusiones

En el plano existe una dirección perpendicular al vector $\overline{u}$, y los vectores perpendiculares a $\overline{u}$ tienen dos sentidos posibles, pero infinitos módulos a considerar. Precisamente, la primera pregunta planteada por la docente se refiere a vectores en el plano y dado que estos vectores tienen dos componentes, la búsqueda de un vector $\bar{v}=(a,b)$ perpendicular a $\bar{u}=(2,3)$ con la utilización de la propiedad planteada, resulta sencilla en cálculos. Si se plantea esta situación en función de la ecuación resultante $(2a+3b=0)$ al realizar el producto escalar entre dichos vectores, se obtienen infinitas soluciones que dependen de un parámetro -hay una incógnita que varía arbitrariamente-.

Si bien la misma situación problemática plateada posteriormente en el espacio, implica también la existencia de infinitos vectores de la forma $\bar{v}=(a,b,c)$, las posibilidades a considerar en la variación de las características de los vectores no son las mismas que en el plano.

En el espacio existen infinitas direcciones perpendiculares al vector $\bar{u}$, y por cada dirección dos sentidos posibles para los vectores perpendiculares a $\bar{u}$, y también infinitos módulos a considerar. Al plantear la ecuación resultante $(a+2b+3c=0)$ de la operación del producto escalar entre los vectores -$\bar{v}$ genérico y $\bar{u}$ dato-, se obtienen infinitas soluciones, pero que se expresan en función de dos parámetros -hay dos incógnitas que varían arbitrariamente-.

Ante la segunda pregunta, en el espacio, se detectan dificultades inmediatas ya que los estudiantes demoraron en responder, lo que no había ocurrido con la pregunta anterior.

Recordemos (figuras 3.1 y 3.2) que quienes respondieron que existen dos vectores con las condiciones requeridas, lo hicieron erróneamente, al igual que quienes expresaron que existen cuatro, ya que existen infinitos vectores perpendiculares a $\bar{u}$. Es decir, consideraron una y dos direcciones, y siempre módulos iguales para los vectores.

Estos estudiantes no lograron identificar aquellos vectores que tienen la misma dirección que los vectores que propusieron, pero diferente módulo e implícitamente variación de sentidos. Sólo con la mediación de la docente algunos estudiantes mencionan la posibilidad de infinitos vectores a considerar, al vincular vectores paralelos a los ya dados, como se ejemplifica en la figura 3.4.

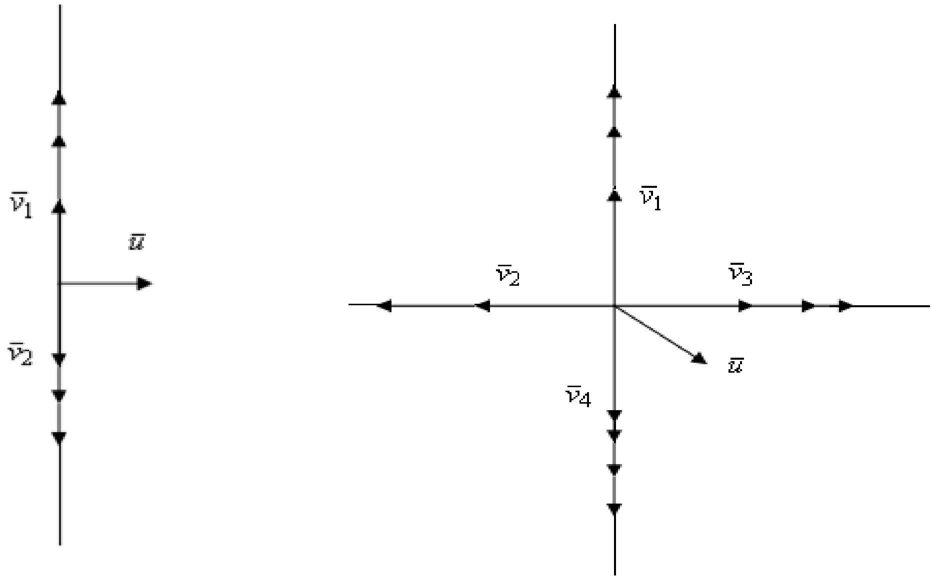


Figura 3. 4

Y cuando con ayuda de la docente los alumnos lograron ver otras direcciones a considerar, la asociación a la imagen de una circunferencia (figura 3.3) quizás les impidió identificar la variación de los infinitos módulos posibles, pues ningún alumno hace mención de la "variación del radio". (Aunque los vectores son libres y no se encuentran contenidos en un círculo o delimitados por una circunferencia).

Si bien en algunos casos los alumnos exhibieron varios vectores por componentes, no paralelos y perpendiculares a $\bar{u}$, que implícitamente implican diferentes direcciones, no se han obtenido registros que evidencien que fueran conscientes de las relaciones de los mismos con las infinitas direcciones posibles.

El concepto de vector implica considerar dirección, sentido y módulo, no todas estas características fueron consideradas por los estudiantes "simultáneamente" en algunas situaciones planteadas. Todas las representaciones descriptas parecen sesgadas, ya que no se obtuvieron registros coloquiales (descripciones, argumentaciones), ni figurales (dibujo, representación gestual) en los que los estudiantes consideraran todas las características de variación en los vectores (dirección, sentido y módulo) como se representa en la figura 3.5.

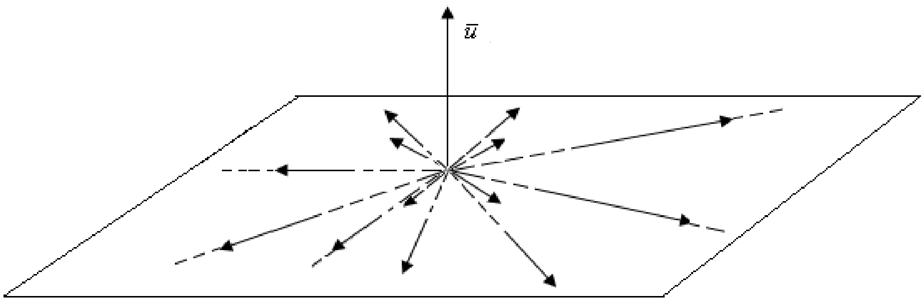


Figura 3. 5

Reflexionando sobre los registros numéricos involucrados, al presentar los estudiantes las componentes de vectores perpendiculares mediante el uso de la propiedad que involucra a la operación de producto escalar, se destaca la falta de vínculo en este proceso con la existencia de infinitos vectores. Los estudiantes obtienen componentes de vectores perpendiculares como en un juego de ensayo y error, "probando" que los números verifiquen la propiedad: $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \times \bar{v} = 0$. He observado en diversas clases cómo, frente a un vector expresado por componentes, los estudiantes dicen sin dudar que pueden obtener las componentes de un vector perpendicular a él, "invirtiendo las componentes y cambiándole el signo a una de ellas", pero no pueden argumentar por qué este razonamiento es válido. Es decir, incorporan "una regla" práctica de aplicación para un caso concreto, pero con una pérdida de significación de la propiedad que la sustenta. Pero este tipo de situaciones no son inherentes sólo al ámbito universitario. Abrate et al. (2006) hacen referencia a la pérdida de significación que tienen, para muchos estudiantes en la escuela media, distintas operaciones en Matemática, las cuales resuelven en la mayoría de los casos aplicando algoritmos mecánicos con escasa base conceptual, y con la percepción de que algo artificioso está detrás de ellos.

Como señala Ausubel (1976, c.p. Moreira, 2012), el aprendizaje mecánico o memorístico, se produce cuando la nueva información es almacenada sin relacionarse con conocimientos previos, sin interactuar con contenidos preexistentes, realizando asociaciones arbitrarias.

Ningún estudiante presenta un razonamiento algebraico que plantee, dado el vector $\bar{u} = (1,2,3)$, la búsqueda de un vector $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tal que $\bar{u} \times \bar{v} = 0$, lo que es equivalente a plantear la ecuación $1v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$, de modo que si se fijan arbitrariamente valores para v_1 y v_2, queda unívocamente determinado v_3, obteniéndose de este modo, a través de un recurso algebraico, una solución particular de las infinitas que existen al variar, por ejemplo, v_1 y v_2 en el conjunto de los números reales. A través de la resolución de la ecuación puede verificarse la existencia de infinitas ternas (v_1, v_2, v_3) que la satisfacen y por lo tanto son infinitos los vectores perpendiculares a un vector dado.

En líneas generales, si bien se observa en las respuestas de los estudiantes la aplicación de varias propiedades y conceptos ($\overline{u} \neq \overline{0}, \overline{v} \neq \overline{0}, \overline{u} \perp \overline{v} \Leftrightarrow \overline{u} \times \overline{v} = 0$; $\overline{w} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, si $\exists\, \alpha \in R - \{0\} / \alpha \overline{v} = \overline{w}$ entonces $\overline{w}$ es paralelo a $\overline{v}$; si $\overline{u} \perp \overline{v}$ y $\overline{v}$ es paralelo a $\overline{w}$, entonces $\overline{w}$ también es perpendicular a $\overline{u}$; asociación a los ejes perpendiculares, a una circunferencia, etc.), se detecta una desconexión entre ellos, sin relacionar los aspectos algebraicos con los geométricos.

Quizás hubiera sido conveniente trabajar con los estudiantes con mayor profundidad sobre la primera pregunta planteada referida a vectores en el plano, antes de considerar la misma pregunta en el espacio, ya que el cambio de dimensión no resultó trivial para los alumnos. El sujeto aprende cuando realiza un esfuerzo deliberado y consigue relacionar lo que se le presenta con conceptos ya adquiridos. Cuando los subsunsores constituyen un ancla para el nuevo conocimiento, presentado o descubierto por el estudiante, éstos adquieren un nuevo significado, corroborando significados existentes. Así los nuevos conocimientos adquieren significado para el alumno y los conocimientos previos adquieren nuevos significados y mayor estabilidad cognitiva (Moreira, 2012).

Este análisis nos ha permitido observar que al trabajar en el espacio una actividad que involucre vectores perpendiculares, es importante tener en cuenta el tipo de construcción conceptual que como docentes realicemos, algebraica y/o geométrica, poniendo énfasis en sus relaciones y utilizando representaciones gráficas, con objetos, con software, etc., para facilitar su visualización.

Como se ha mencionado anteriormente, el objetivo de este estudio es fundamentalmente exploratorio. Por ello, el análisis de los resultados que aquí se presenta, si bien es principalmente descriptivo, permitirá tomar decisiones sobre las variables a incluir en los estudios subsiguientes.

A partir de las dificultades detectadas, se realizó el Estudio Exploratorio II para estudiar con mayor profundidad la actuación de los estudiantes en otra situación ligada a la problemática de tesis.

3.3 Estudio exploratorio II

3.3.1 Introducción

El tema "El Plano" implica el desarrollo previo de la Unidad I "Vectores" y además constituye un contenido importante dentro de la geometría lineal del espacio para el posterior tratamiento de "Recta en el Espacio". Por tal motivo el objetivo de este trabajo es profundizar el análisis de las dificultades en una actividad que admite infinitas soluciones, en este nuevo contexto.

3.3.2 Metodología

Al igual que en el diseño metodológico del estudio exploratorio I se recurrió a la observación participante en el contexto del aula, la cual permite obtener un primer acercamiento al comportamiento y las creencias de los estudiantes en relación con los temas abordados (Álvarez Álvarez, 2008).
Con la finalidad de obtener datos empíricos y construir descripciones relativas a la temática de esta tesis -luego del desarrollo de los temas Vectores, Recta en el Plano, El plano (salvo haz de planos)- se organizó una actividad en la misma comisión descrita en el Estudio Exploratorio I.
Participaron de este estudio un grupo de estudiantes presentes en una clase que estuvo a cargo de la autora de esta tesis. Se trabajó en el aula una situación problemática del material de cátedra que fue ampliada en función del objetivo planteado.
Las intervenciones de los estudiantes y la docente se grabaron en audio y video con la colaboración de otra investigadora. El material así obtenido fue analizado posteriormente mediante técnicas de análisis del discurso, extrayendo la información más significativa. Además de estos registros, durante el trabajo de

campo se recogieron las resoluciones escritas de 21 estudiantes, contando así con diferentes herramientas que se complementan, brindando mayor información acerca de los procesos de resolución desarrollados, a fin de analizar errores y dificultades.

3.3.3 Relato, resultados y análisis

Se les pide a los estudiantes que resuelvan el siguiente ejercicio propuesto en la unidad temática "El Plano" que se utiliza en la asignatura.
Los puntos A(2,1,5), B(8,-2,0) y C(14,-5,-5) determinan un único plano. Responda V o F. Justifique.
Se les asigna a los estudiantes unos minutos para pensar la respuesta, luego se realiza una puesta en común, en la que sin mayores dificultades los estudiantes proponen calcular las componentes de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Algunos observan la proporcionalidad en las componentes ($2\overline{AB} = \overline{AC}$) de los vectores $\overline{AB} = (6,-3,-5)$ y $\overline{AC} = (12,-6,-10)$ y a través de la aplicación de la propiedad $\overline{w}\ es\ paralelo\ a\ \overline{v} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in R-\{0\} /\ \alpha\,\overline{v} = \overline{w}$, (propiedad trabajada en la actividad del estudio exploratorio I) concluyen que $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son paralelos. Otros, al obtener el vector nulo cuando realizan el producto vectorial $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ llegan a la misma conclusión. En ambas formas de resolución concluyen que los tres puntos están alineados, algunos amplían su respuesta diciendo que los tres puntos están en una misma recta y concluyen que la proposición es falsa.
A partir de esta situación se propone una ampliación del ejercicio a través de la pregunta: *"¿cuántos planos contienen a esos tres puntos?"*
La mayoría de los estudiantes responde*: "infinitos".*
Luego pregunto: *"¿cómo podríamos encontrar una ecuación que represente a uno de esos planos?"*
Se produce un silencio, los alumnos piensan…
Escribo en el pizarrón la consigna: *"Hallar una ecuación de un plano que contenga a los puntos A, B y C. Verifique su respuesta".*
Frente a la aparente dificultad que muestra el impasse, propongo a los alumnos una puesta en común:

El alumno 1 comienza a relatar una propuesta de resolución. Sus compañeros parecen no entender y lo interrumpen.

El alumno 2 propone: "*hallar un vector perpendicular al vector*", muchos dicen estar de acuerdo en iniciar esta búsqueda.

Pregunto: *"¿perpendicular a qué vector?"*

La alumna 3 responde: *"perpendicular a* $\overline{AB}$ *".*

Pregunto: *"¿y cómo lo hacemos?"*

Los alumnos piensan…

El alumno 1 intenta volver a contar su propuesta. Sus compañeros vuelven a interrumpirlo.

La alumna 3 propone buscar $\overline{n} = (a,b,c)$ tal que $\overline{n} \times \overline{AB} = 0$, idea que escribo en el pizarrón.

Los estudiantes reflexionan que necesitan buscar un vector $\overline{n} = (a,b,c)$ que deberá ser perpendicular al vector $\overline{AB}$ considerando los puntos A y B pertenecientes al plano, ya que la construcción de una ecuación general de un plano es de la forma $ax + by + cz + d = 0$ donde $\overline{n} = (a,b,c)$ representa un vector normal al plano. Y la propiedad (que no mencionan, pero parecen querer utilizar) que establece que dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero: $\overline{n} \neq \overline{0},\ \overline{n} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{n} \times \overline{AB} = 0$ (propiedad trabajada en la actividad del estudio exploratorio I) les permite plantear la búsqueda de $\overline{n} = (a,b,c)$ tal que $\overline{n} \times \overline{AB} = 0$.

Les propuse que lo resolvieran en una hoja para entregar.

Algunos estudiantes trabajaban individualmente en sus hojas, otros discutían en grupos.

Fui recorriendo los bancos en calidad de observadora, con una intervención no invasiva y prudente, fomentando la reflexión en quienes trabajaban solos y la discusión para los grupos, en función de lo que ellos mismos me planteaban o preguntaban.

Los estudiantes que siguieron con la idea de la alumna 3, que permanecía escrita en el pizarrón, no lograban avanzar más allá de plantear una expresión de la forma: $(a,b,c) \times (6,-3,-5) = 0$ o en el mejor de los casos $6a - 3b - 5c = 0$. Es decir, después del registro $\bar{n} \times \overline{AB} = 0$ lograban expresar los vectores por sus componentes y en algunos casos aplicaban la operación de producto escalar por componentes, pero no podían resolver la ecuación en tres variables *a, b* y c.

La estrategia de resolución propuesta por la alumna 3 se diagrama a continuación, identificando los tipos de registros utilizados, señalando las actividades de tratamiento y conversión implicadas.

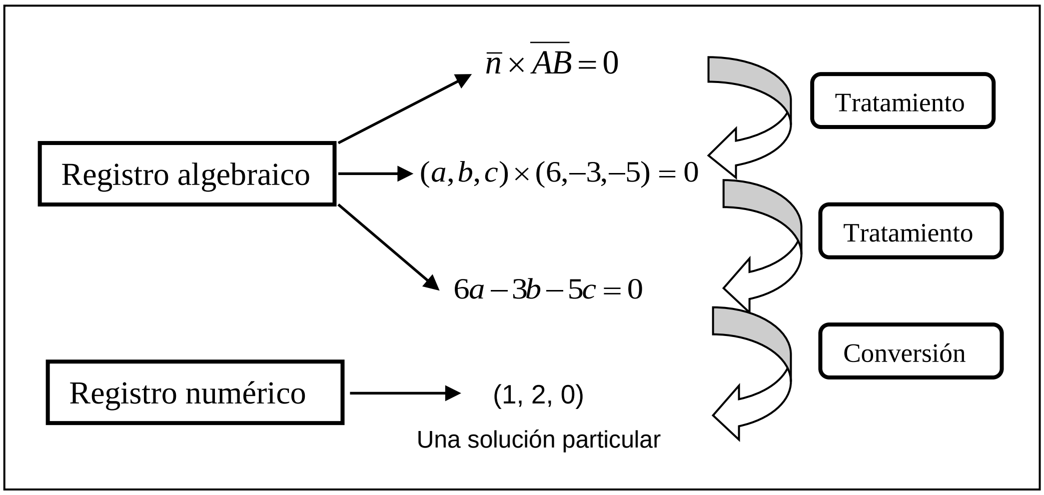


Diagrama 3. 1. Representación del proceso de resolución de algunos estudiantes

Es decir, algunos estudiantes fueron capaces de realizar actividades de tratamiento, pero no de conversión. La dificultad se manifiesta en la búsqueda de una solución particular a través de la resolución de la ecuación planteada, que requiere la conversión de una representación en un registro algebraico a otra en un registro numérico.

Unos pocos alumnos me preguntaron si podían asignarles valores a *a* y *b* y luego obtener un valor de *c*.

El alumno 1, que en vano intentó explicar su estrategia a toda la clase, me llamó para que me dirija a su banco y me cuenta su estrategia. Propone hallar un cuarto punto y construir dos vectores con los otros puntos dados y luego utilizarlos para hallar un vector perpendicular al plano que desea encontrar, realizando la operación de producto vectorial con ellos.

Le respondí que debía tener cierta precaución al elegir ese cuarto punto. No le aclaré que su estrategia es válida si ese nuevo punto no se encuentra alineado con los otros puntos. Le pedí que lo resolviera en su hoja para tener un registro escrito de su estrategia.

Como el tiempo resultó escaso, les pedí que lo trajeran resuelto por escrito para entregar en la próxima clase.
Cabe destacar que la alumna 3 y el alumno 1 habían mantenido un muy buen desempeño académico hasta el momento.

Entregaron su resolución 21 alumnos de la clase. A través del análisis de las resoluciones escritas se reconocieron tres estrategias válidas de resolución.

Estrategia 1 (E1): planteada por estudiantes que buscan un vector $\bar{n}=(a,b,c)$ perpendicular a $\overline{AB}$ / $\bar{n}\times\overline{AB}=0$, $(a,b,c)\times(6,-3,-5)=0$ o $6a-3b-5c=0$. Por ejemplo toman $\bar{n}=(1,2,0)$, expresan $x+2y+0z+d=0$, como el punto A(2,1,5) debe pertenecer al plano, plantean $2+2.1+0.5+d=0$ y obtienen $d=-4$. Luego exhiben una ecuación de uno de los planos que contiene a los puntos A, B y C por ejemplo: $x+2y-4=0$. Esta estrategia fue propuesta por la alumna 3 y aplicada por un total de 16 alumnos; 7 de forma correcta y completa, otros 7 estudiantes de forma correcta, pero sin verificar el resultado.
Otras 2 alumnas que presentan exactamente la misma idea en hojas individuales, presentan una resolución errónea. Plantean la búsqueda de $\bar{n}=(a,b,c)$ / $\bar{n}\perp\overline{AB}\Leftrightarrow\bar{n}\times\overline{AB}=0$, $(a,b,c)\times(6,-3,-5)=0 \Rightarrow 6a-3b-5c=0$, pero luego expresan una nueva ecuación $6a-3b-5c+d=0$ y reemplazan *a, b* y *c* por las coordenadas del punto A y obtienen la ecuación $6a-3b-5c+16=0$ que emiten erróneamente como respuesta. Es decir, estas estudiantes abandonan la primera ecuación planteada, perdiendo significación en la búsqueda de un vector $\bar{n}=(a,b,c)$, para trabajar con otra ecuación fundada a partir de la construcción de la ecuación general del plano $ax+by+cz+d=0$. En sus procesos de resolución muestran un accionar mecanicista, evidenciando la ausencia de significado de las variables involucradas.

Estrategia 2 (E2): fue desarrollada por el alumno 1, que trabaja con el punto D(0,0,0), considera los vectores $\overline{AB}=(6,-3,-5)$ y $\overline{AD}=(-2,-1,-5)$, calcula $\overline{AB}\wedge\overline{AD}=\bar{n}=(10,40,-12)$ y escribe $10x+40y-12z+d=0$. De los infinitos planos posibles elige el que contiene al punto D(0,0,0), por lo que resulta $d=0$. Luego

exhibe la ecuación $10\,x + 40\,y - 12\,z = 0$ como representación de uno de los planos que contiene a los puntos A, B y C.
Este estudiante en su resolución escribe *“D(0,0,0) (punto cualquiera del espacio)”*. A pesar de haber recibido una alerta mía sobre la elección del punto D, no advierte que ese cuarto punto a considerar no debe estar alineado a los demás.

Estrategia 3 (E3): es elaborada por sólo un alumno, que resuelve la actividad aplicando la ecuación del haz de planos, tema que no se había desarrollado en clase y seguramente lo conoce de haberlo desarrollado en su escuela. Se trata de un alumno que siempre mostró muy buen desempeño académico en clase. Esta estrategia no se describe por no ser relevante al tema de tesis.

Un alumno entrega la resolución de otro ejercicio, no el pedido. Otra alumna halla una ecuación paramétrica (tema desarrollado después de esta clase) que representa la recta que contiene los tres puntos A, B y C. Otro alumno sólo muestra que los tres puntos están alineados y no continúa su resolución.

3.3.4 Conclusiones

La mayoría de los estudiantes aplica la estrategia planteada en forma conjunta. El número de alumnos que verificaron su respuesta fue el mismo que quienes no lo hicieron. Es decir, si tenemos en cuenta las dificultades de los estudiantes en las diferentes etapas de resolución de un problema: *Lectura e Interpretación* del enunciado, *Búsqueda de un Plan*, *Ejecución de un Plan* y *Validación del Plan* (D’Agostini et al., 2011), se destaca que, en nuestro caso, las primeras tres etapas se ajustaron al trabajo conjunto y no resultaron triviales para los estudiantes. La mitad de ellos tuvo dificultades al momento de la validación de su forma de resolución al no corroborar si su respuesta era válida.
Se observa que en la E1 los estudiantes buscan presentar una ecuación general que representa a un plano, para ello necesitan las componentes de un vector perpendicular a él y un punto perteneciente al mismo. La búsqueda del punto no presenta dificultad, ya que el mismo podía ser cualquiera de los puntos A, B o C dados. Para hallar las componentes de un vector $\bar{n} = (a,b,c)$ perpendicular al plano, los estudiantes utilizan la propiedad $\bar{n} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \bar{n} \times \overline{AB} = 0$. Nadie realiza el

mismo planteo válido utilizando otro vector diferente al $\overline{AB}$, por ejemplo, el vector $\overline{AC}$ o el vector $\overline{BC}$, es decir los estudiantes se ajustan a lo escrito en el pizarrón, a reproducir las pautas del profesor. Luego surge la dificultad en la resolución de la ecuación $6a-3b-5c=0$, la presencia de tres variables se constituyó en un obstáculo en la construcción del vector $\bar{n}$.

Esta forma de resolución, aplicada por la mayoría de los estudiantes, es parte de la construcción de la ecuación general que representa a un plano, motivo por el cual puede resultar familiar para los estudiantes. En cambio, la E2, requiere por parte del estudiante una construcción diferente, que demanda la visualización gráfica de la situación problemática al considerar "el agregado" de un objeto matemático, un cuarto punto D. Esta condición suele ser conflictiva para los estudiantes; por lo general ante situaciones de este tipo, el estudiante suele preguntar *¿eso se puede?, ¿puedo considerar un punto que no esté en el enunciado?, ¿puedo agregarlo yo?* Inquietud similar ocurre en la resolución de la ecuación $6a-3b-5c=0$, aquí preguntan *¿puedo darle un valor cualquiera a una de las variables?*

La interrupción por parte del resto de la clase al alumno 1, cuando intenta en dos oportunidades explicar su estrategia de resolución E2, puede estar ligada a la dificultad implícita de la misma. Se detecta en estos estudiantes la presencia de un sesgo de fijación, en una forma de resolución que les resulta familiar (E1) en detrimento de una estrategia que involucra un razonamiento diferente pero válido.

Como se ha mencionado, la E1 fue la realizada por la mayoría de los estudiantes. Si bien fue planteada en forma conjunta en clase, los estudiantes no parecían presentar dificultad en la idea principal de ese planteo.

En cuanto a la E3 es razonable que no haya sido considerada por los estudiantes, ya que el tema haz de planos no se había desarrollado aún.

En resumen, podemos destacar que los estudiantes no presentaron dificultad en concluir rápidamente que los tres puntos A, B y C se encuentran alineados.

Tampoco les cuesta admitir que hay "infinitos" planos que los contienen, como se representa en la figura 3.6.

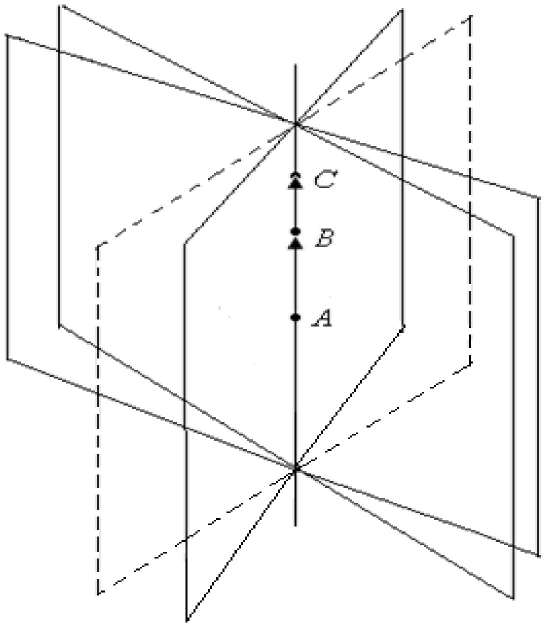


Figura 3. 6

Pero al momento de explicitar la ecuación que representa a uno de los infinitos planos se observan diversas dificultades relacionadas entre sí. No logran detectar que existen "infinitos" vectores perpendiculares al vector $\overline{AB}$, cada uno perpendicular a un plano de los infinitos existentes (que sí reconocen) y sus componentes resultan de los "infinitos" valores reales *a, b* y *c* para $\bar{n}=(a,b,c)$ que verifican la ecuación $6a-3b-5c=0$. Es decir, los alumnos no logran establecer las relaciones entre las variables involucradas que conforman las componentes de los vectores y el aspecto geométrico de los mismos.

En esta situación problemática es importante establecer vínculos entre la construcción algebraica y geométrica estudiando el significado de cada representación de los objetos involucrados, así como también de sus relaciones. La figura 3.7 permite visualizar geométricamente que hay infinitos vectores perpendiculares a $\overline{AB}$, en conexión con los infinitos valores *a, b* y *c* resultantes del trabajo algebraico que resulta de la ecuación en tres variables. La resolución de la misma permite expresar los vectores por componentes $\bar{n}=(a,b,c)$ en relación con los infinitos planos que contienen a los puntos A, B y C, como muestra la figura 3.8.

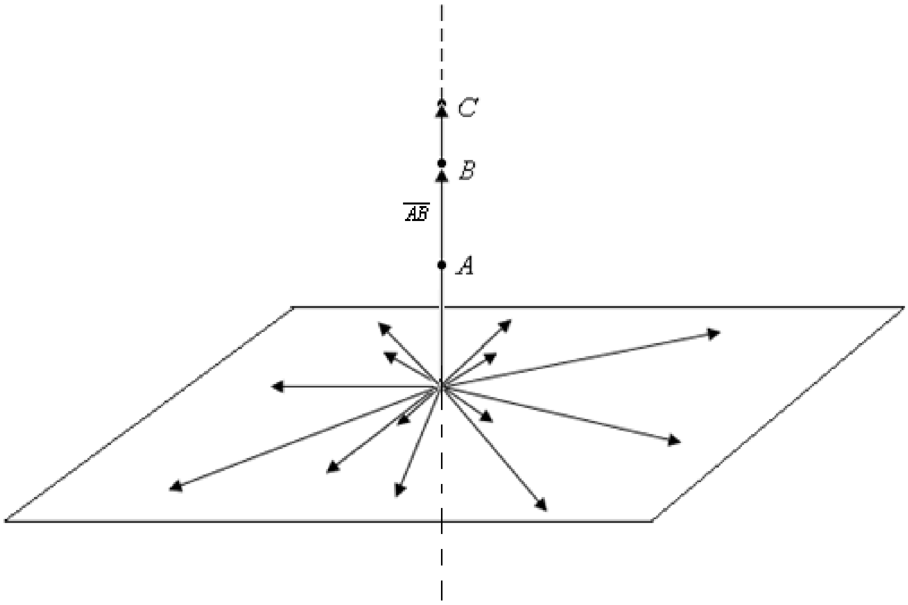


Figura 3. 7

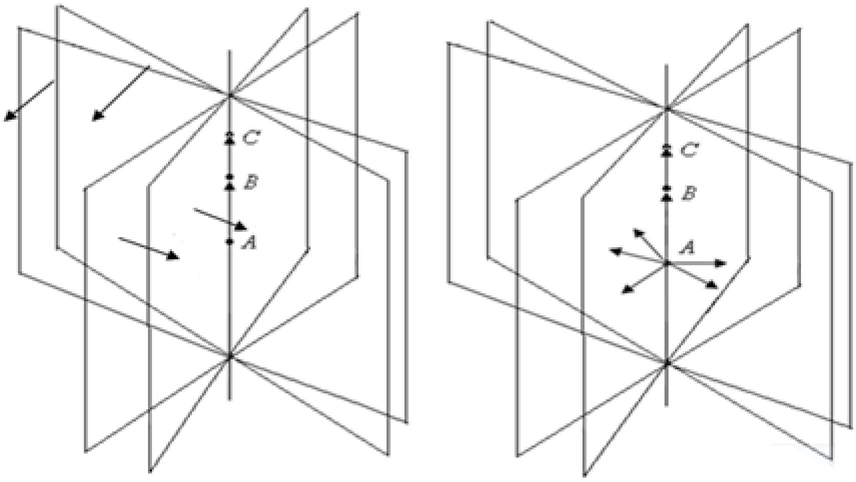


Figura 3. 8

En relación a las ideas anteriormente planteadas, Duval (2004, c.p Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal, 2007) expresa que la conversión consiste en hallar una representación (algebraica, gráfica, aritmética) que permita seleccionar y organizar la información pertinente de un enunciado, para poder plantear las transformaciones matemáticas que den respuesta al interrogante. La dificultad radica en el nivel de congruencia que pueda presentarse entre los registros. En toda actividad de conversión y de articulación de registros de representación, se hace necesario discriminar las unidades significantes (los valores que pueden tomar las diferentes variables) en cada registro. De esta forma la representación debe someterse a diferentes variaciones bajo la condición de que siga teniendo sentido.

3.4 Conclusiones generales de la indagación exploratoria

Nuestra problemática de estudio se encuentra ligada a las dificultades de los estudiantes en la búsqueda de vectores perpendiculares a un vector dado en el espacio. Nos hemos acercado a ella en diferentes contextos.

Recordemos que, en el estudio presentado como antecedente, (D'Agostini et al., 2012), involucrando tanto registros geométricos como algebraicos y cuyos resultados se analizaron desde la teoría de Registros de Duval, se evidencian dificultades en la temática. Efectivamente, a través de la actuación de los estudiantes tanto en el plano como en el espacio, se detectaron dificultades en el pasaje de un registro de representación a otro, además de fallas en el reconocimiento de un mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él en sistemas semióticos diferentes. Se manifiesta además una falta de aprehensión conceptual de la noción de vector libre. Tales dificultades se hacen más evidentes cuando se trabaja en el espacio.

En el Estudio Exploratorio I por su parte, a partir de la observación y registro de datos en una clase teórica en la que se desarrolló el tema Vectores, se reconocen dificultades ligadas a la temática. Pero en este caso se recogió información en la dinámica del aula, a través de registros coloquiales, gestuales, numéricos, que dan cuenta, por parte de los estudiantes en algunos casos, de una visualización gráfica ligada al plano, un trabajo mecanicista y una falta de aprehensión del concepto de vector.

En el Estudio Exploratorio II, a partir de una experiencia de clase se trabajó sobre una actividad del material de cátedra que fue ampliada en función del objetivo de esta tesis en la que se vuelven a detectar problemas en la identificación de la existencia de infinitos vectores perpendiculares a otro. La información se recabó en la dinámica del aula, mediante un trabajo grupal e individual, con discurso oral y escrito. Las dificultades pueden observarse de los diversos registros utilizados por los estudiantes, en las actividades de tratamiento y conversión en sus representaciones semióticas.

Además, se observan en algunos casos, tendencias a reproducir lo que el profesor hace en el salón, un aprendizaje mecánico, con ausencia de significado en las variables involucradas y la presencia de sesgos de fijación.

El Álgebra es una rama de la Matemática que estudia la combinación de elementos de estructuras abstractas acorde a ciertas reglas; y la Geometría es otra rama de la misma ciencia que estudia las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio (puntos, rectas, planos, etc.). Como ya hemos mencionado, el objetivo esencial de la Geometría Analítica, es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos y la interpretación geométrica de los desarrollos algebraicos.

Hemos encontrado que los alumnos presentan dificultades en el espacio, en la búsqueda de un vector perpendicular a otro en relación a las infinitas soluciones, desde aspectos geométricos y algebraicos.

En este contexto, se han establecido dos dimensiones de análisis que delinearán esta investigación: la dimensión geométrica y la dimensión algebraica.

A partir de estos resultados se diseñaron los instrumentos a aplicar en la investigación central. Los mismos se presentan en el próximo capítulo dedicado a la descripción y justificación de los criterios metodológicos.

Objetivo General: analizar las dificultades a través de las representaciones externas organizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.

Objetivos específicos:

Detectar las estrategias de resolución

Caracterizar las dificultades detectadas a través de las representaciones de carácter algebraico, geométrico y discursivo

Estudio relativo a Registros de Representación en geometría lineal del espacio

Estudio Exploratorio I (Vectores en el Plano y en el Espacio)

Estudio Exploratorio II (Vectores y Plano)

Dificultades que tienen implicancia en situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio

Diagrama 3. 2. Diagrama global III

CAPÍTULO IV

4. CRITERIOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN CENTRAL

4.1 Introducción

En este capítulo se describe la metodología aplicada en la investigación diseñada con el objeto de analizar las dificultades de los estudiantes en el proceso de resolución de situaciones problemáticas de AGA, en la búsqueda de representaciones de una recta en el espacio que cumpla con dos condiciones: ser perpendicular a un vector dado y contener a un punto determinado.

El presente estudio se realiza asumiendo que las personas actúan en función de sus creencias, conocimientos previos y valoraciones, con formas de pensamiento y estrategias construidas dentro de una dinámica de experiencias. Las acciones de los sujetos siempre tienen un sentido, un significado posible de develar en el transcurso de la investigación.

Se recurrió a una pluralidad de metodologías apelando tanto al enfoque cualitativo de carácter interpretativo basado en el reconocimiento de categorías y modalidades relevantes, (Quivy y Van Campenhondt, 1998; Vallés, 1997) como a la incorporación y tratamiento de datos cuantitativos. Para un análisis cuantitativo integral se definieron a priori -asociadas a las consignas del enunciado de cada situación problemática- un conjunto de categorías y modalidades sin renunciar a la posibilidad de que pudiesen surgir otras en el curso de la investigación.

En primer lugar, se sustenta teóricamente la metodología aplicada y posteriormente se caracterizan los participantes de la investigación y las condiciones de trabajo para recabar los datos. A continuación, en dos etapas, -dimensión geométrica y dimensión algebraica- se presentan los instrumentos elaborados en función tanto de los objetivos planteados, como de los antecedentes descriptos en el Capítulo I y los resultados de los trabajos exploratorios presentados en el Capítulo III. El primer instrumento corresponde a una situación de carácter geométrico con tres ejercicios diseñados de modo tal que el último corresponde a la situación de mayor generalización. La segunda actividad atañe a una situación similar a la aplicada en el primer instrumento, pero de carácter algebraico. Además, en cada etapa se describen los aspectos relacionados con el diseño de los instrumentos, las técnicas de recolección, procesamiento y análisis de datos. Los resultados de las fases implicadas se desarrollan en el capítulo siguiente.

4.2 Consideraciones generales en relación a la metodología cualitativa

La investigación cualitativa puede considerarse como un proceso activo, sistemático y riguroso de indagación dirigida, en el cual se toman decisiones sobre lo investigable mientras se está en el campo de estudio (Pérez Serrano, 1994a, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010). El objetivo está orientado al estudio de hechos y fenómenos educativos en su propio contexto. Su enfoque de percepción de la realidad es subjetivo, dado que su interés se encuentra orientado al significado de los sucesos. Se caracteriza por una concepción abierta de la realidad, sin rechazar en principio ningún acontecimiento emergente. A través de un análisis en profundidad de múltiples casos particulares desde un procedimiento inductivo se pretenden obtener explicaciones más generales.

Un enfoque interpretativo supone que el comportamiento de los seres humanos está principalmente constituido por sus acciones, las que dan un sentido para quienes las realizan. Por ello, deben ser interpretadas en relación a los motivos, a las intenciones o propósitos del actor, en el momento de llevarlos a cabo. Identificar correctamente esos motivos e intenciones es entender el significado subjetivo que la acción tiene. La afirmación de que las acciones humanas tienen significado implica mucho más que una referencia a las intenciones conscientes de los individuos. Requiere también que se entienda el contexto social dentro del cual adquieren sentido tales intenciones. (Pérez Serrano, 2003, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010).

En la investigación cualitativa generalmente las muestras de los participantes están situadas en sus escenarios naturales. Existe un contacto directo entre el investigador y el objeto de la investigación, lo cual obliga a manejar las situaciones a fin de evitar interferencias y/o implicaciones innecesarias que podrían distorsionar la realidad en estudio. La triangulación de métodos es necesaria, tanto en la recogida como en el análisis de datos, para evitar parcializaciones de la realidad, con la finalidad de aumentar la validez del estudio.

El lenguaje por excelencia es de tipo conceptual y metafórico, permitiendo enriquecer de matices la explicación de los sucesos estudiados. Por su carácter analítico y descriptivo, pueden generarse hipótesis de trabajo sobre las cuales puedan desarrollarse investigaciones en el futuro.

Este tipo de investigación provee una gran flexibilidad de estrategias durante su realización, dando posibilidad a desarrollar modelos emergentes, revisando las decisiones sobre las estrategias de recolección de datos para modificaciones y/o reorientaciones. El investigador en este modelo llega a menudo a estar inmerso en la situación de estudio, asumiendo en ocasiones papeles interactivos, registrando observaciones y realizando entrevistas con los participantes. En particular, en esta tesis, se recurrió a la entrevista semiestructurada ya que es una técnica que da libertad al entrevistador para profundizar en alguna idea que pueda ser relevante, realizando nuevas preguntas. Se establece de este modo, un diálogo que, si bien es dirigido, permite que los entrevistados desarrollen un discurso continuo con una cierta línea argumental.

La metodología está caracterizada por el trabajo de campo en el cual debe jugar un papel muy destacado la observación, la descripción y la interpretación de los significados. Como afirma Sanmartín Arce (2000), el investigador es un reconstructor de la realidad, cuyo trabajo "exige paciencia y dedicación, atención esmerada y ferviente, fina observación y reflexión crítica de lo observado" (p. 139).

El análisis de los datos es un aspecto sumamente delicado y complicado, cuando se recoge gran cantidad de material, de diversas fuentes y en diferentes soportes. Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1996, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010) plantean que el análisis de datos es visto por algunos como una de las tareas de mayor dificultad en el proceso de investigación cualitativa. El carácter polisémico de los datos, su naturaleza verbal o escrita, su irrepetibilidad o el gran volumen que suele recogerse en el curso de la investigación, hacen que el análisis entrañe dificultad y complejidad. A la par que el investigador recoge los datos, realiza una tarea de reflexión que es fundamental para la organización y selección de los mismos. "Cuando se observa, se entrevista, se toman notas de campo y se confecciona el diario de investigación, la labor no se limita a "registrar". También hay en ello reflexión, la que a su vez informa la serie de datos siguiente" (Woods, 1987, p. 135). El investigador juega así un papel "centralizador" en todo el estudio. Su mente archiva y desecha, recoge y analiza, reflexiona sobre lo vivido, lo sentido, lo pensado, los datos recogidos. Sanchiz Ochoa y Cantón Delgado han afirmado:

> (…) sabemos que los datos no se "recogen" tanto como se "construyen", sabemos que después se interpretan. En verdad interpretamos desde el mismo momento en que iniciamos la recogida de datos, y ciertamente ello da comienzo con el acceso al campo, o acaso antes (1995, c. p. Álvarez Álvarez, 2008, p. 8).

Dados los impresionantes volúmenes de información con los que a veces se trabaja es preciso "apartar", como plantea Stake (2005), aquello que es relevante para el estudio de aquello que no lo es tanto.

El análisis de datos cualitativos no está constituido por un período independiente y diferenciado temporalmente en la investigación, puesto que se encuentra en completa interacción con otras fases de la investigación. (Tójar, 2006, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010). Una de las mayores peculiaridades de la investigación cualitativa es que la recogida y el análisis de datos se retroalimentan. Para Pérez Serrano, (1994b, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010) este proceso es sistemático y ordenado, sin ser rígido obedece a un plan, es de carácter interactivo pues exige volver sobre los datos, analizarlos y replantear el proceso, considerándose esta etapa de carácter cíclico. El objetivo en este estadio es la búsqueda de tendencias, tipologías, regularidades o patrones y la obtención de datos de carácter ideográficos. Estos datos recogidos necesitan ser convertidos en categorías para poder realizar comparaciones y contrastes, debiendo considerarse la reducción de los mismos a lo largo de todo el proceso. En consecuencia, lo que el investigador busca es descifrar mensajes en los datos, sustentándose en una propuesta desde la reducción hacia la obtención de nuevos datos y conclusiones. (García Llamas, 2003, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010). Reducir los datos con los que se va a trabajar finalmente no es una tarea sencilla, pues implica dejar a un lado gran cantidad de material. Los intereses del estudio tienen que guiar ese proceso. Hammersley y Atkinson (2005, c.p. Álvarez Álvarez, 2008) plantean que las necesidades del investigador, a la hora de decidir qué códigos son relevantes para los temas del trabajo en cuestión y para el análisis preliminar que acompaña a la recogida de información, son prioritarias.

La operación de la organización de los datos puede realizarse de modo manual o mediante el empleo de programas informáticos, pero, en cualquier caso, debe tratarse de ser consecuente con los intereses de la investigación. Y más aún con el uso de programas informáticos, ya que los mismos hacen un excelente trabajo de recuento de frecuencias, pero no reflexionan sobre los significados que encierran las muestras que se someten al programa. En el esfuerzo por dar sentido a los datos recogidos se definen y redefinen categorías explicativas en las que se agrupan los significados más relevantes recogidos. Esta categorización no es una tarea sencilla, ni definitiva, pues se encuentra sometida a permanente revisión y transformación, en cuanto aparece un nuevo dato que hace repensarla. Las categorías, con el objeto de llegar a formular conclusiones en el estudio deben reagruparse formando redes que proporcionen información sobre las relaciones existentes entre las diferentes unidades de significado. Los investigadores desarrollan sus propios modos de analizar datos cualitativos, pero las deducciones emergentes estarán fundamentadas en los datos y se desarrollarán desde ellos, implicando etapas que desde la perspectiva de Taylor y Bogdan (1987, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010) son:

-*Descubrimiento en progreso* que implica identificar temas y desarrollar conceptos y proposiciones teóricas, siendo necesario leer repetidamente los datos obtenidos del trabajo de campo, transcripciones, etc.; seguir las intuiciones e interpretaciones, registrando todas las ideas importantes que se tengan sobre los datos, buscando temas emergentes; elaborar tipologías que permitan identificar temas, pasando desde la descripción a la interpretación, y desde allí a la teoría mediante conceptos y proposiciones; y leer el material bibliográfico que proporcione posibilidades de explicación, teniendo el cuidado de no forzar los datos.

-*Reducción de los datos*: comprende el proceso de codificación de los mismos y el refinamiento de la comprensión del tema de estudio. Es necesario desarrollar categorías de codificación, que implican redactar una lista con todos los conceptos, interpretaciones, tipologías y proposiciones que se identifican durante el análisis inicial, repasándola en más de una ocasión. La cantidad de estas categorías dependerán de la cantidad de datos recogidos y de la complejidad del esquema de análisis. Es pertinente codificar todos los datos (notas de campo, transcripciones, etc.) lo que permite la refinación del esquema de codificación, siendo la regla general que los códigos se ajusten a los datos y no de forma inversa. Es preciso separar datos pertenecientes a las diversas categorías de codificación, tanto de forma manual como asistidos con programas informáticos. Se logra así ver los datos que han sobrado, evaluando si algunos de ellos pueden ajustarse a nuevas categorías de análisis, sin forzar nunca su ingreso en el esquema analítico. Y finalmente llegar a la refinación del análisis, dado que la codificación y separación de datos permite comparar diferentes fragmentos relacionados con temas, conceptos, proposiciones, entre otros.

-*Relativización de los descubrimientos:* involucra la comprensión de los datos en el contexto de su recolección. Es necesario considerar si los datos fueron solicitados o no, la influencia del observador sobre el escenario y las de quienes estaban cuando se obtuvieron los datos. Observar si se tratan de datos directos o indirectos, ya que, si los segundos se utilizan para realizar inferencias, menos seguridad se tendrá con respecto a la validez de las interpretaciones y conclusiones. Deben considerarse las fuentes en que se basan las interpretaciones, si son de un informante o un grupo. Finalmente es necesario controlar los propios supuestos, aunque sean difíciles de evitar, siendo la autorreflexión crítica elemento clave para comprender el análisis.

Por su parte, Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, (1999, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010) destacan la importancia de la reducción de datos, que consiste concretamente en las tareas de categorización y codificación, descartando o seleccionando datos para el análisis del material escogido, separando en unidades utilizando criterios de tipo espacial, temporal, temático, gramatical, conversacional y social. Estos criterios se pueden usar de manera individual o combinada, aunque el que otorgará ideas en forma regular será el uso del criterio temático. La identificación y clasificación de elementos es la actividad que deviene de la categorización y codificación de los datos. Para realizar la codificación se examinan las unidades, o datos con el fin de identificar distintos ejes temáticos que ayuden a clasificar el contenido de dichas unidades de análisis. La codificación, es la operación por la que se asigna a cada unidad, un código propio de la categoría que consideramos está incluido. Es un proceso físico, manipulativo, mediante el cual dejamos constancia de la categorización (Trinidad, Carrero y Soriano, 2006, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010). Los códigos los obtiene el investigador fragmentando en primer lugar los datos brutos, y después agrupándolos conceptualmente en categorías que darán lugar a conceptos y éstos a teoría que explica qué está sucediendo en los datos. El código ofrece al investigador una visión abstracta y condensada que incluye fenómenos aparentemente dispares. En este proceso, el investigador se permite trascender la naturaleza empírica de los datos, al mismo tiempo que conceptualmente explicará los procesos que aparecen en ellos. Desde la perspectiva de Glaser y Strauss (1967, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010) el proceso de codificación es abierto. El investigador comienza a codificar los datos en función de las diferentes categorías que van emergiendo, se codifican los distintos incidentes en tantas categorías conceptuales sean posibles; las nuevas categorías y nuevos incidentes que emergen se ajustan, si es posible, a las categorías existentes. La fragmentación de los datos comienza a mostrar las categorías que explican teóricamente, fenómenos, procesos, modelos, por lo que la cobertura teórica completa incluye en su marco de estudio todos los datos relevantes. La codificación abierta es la verificación, corrección y saturación del fenómeno de forma implícita. El investigador en profundización de sus datos, descubre que todos ellos se pueden englobar en el análisis, como indicador de alguna teoría. En el proceso de codificación, y tras las continuas comparaciones, se producirá una saturación total, de forma que todos los datos se ajustan a las categorías emergentes. La categorización permite clasificar conceptualmente los incidentes que son aplicables a una misma temática. Una categoría contiene un significado, o múltiples tipos de significados que permiten referirse a situaciones o contextos, actividades o acontecimientos, relaciones entre personas, comportamientos, opiniones, sentimientos, perspectivas sobre un problema, métodos y estrategias, procesos, etc.

Como se ha mencionado la metodología cualitativa que es la que se ha adoptado en los trabajos exploratorios y en la investigación central de esta tesis, se caracteriza por la flexibilidad de propuestas de análisis en forma que avanza el proceso de investigación. Ante lo cual se debe tomar conciencia de la sistematización de los procesos y el rigor metodológico a fin de otorgar garantías de que los datos son fiables y válidos para los intereses de la investigación (García Llamas, 2003, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010). En este sentido, se consideran relevantes los procedimientos para determinar la validez cualitativa de Pérez Serrano, (1994b, c.p. Hernández Castilla y Opazo Carvajal, 2010):

- *Triangulación:* reunión de una amplia variedad de datos y métodos referidos al problema de estudio, recogidos desde puntos de vista diferentes, realizando comparaciones sobre un mismo fenómeno.
- *Saturación:* reunión de un número de evidencias que garantizan la credibilidad de la investigación, revisando el proceso o bien replicando el estudio para comprobar si los resultados se mantienen.
- *Validez Respondente*: los resultados de la investigación se contrastan con aportes de colegas, observadores y personas implicadas.

Cuando finalmente se llega a la obtención de conclusiones, una de las tareas que exige de parte de los investigadores experiencia y sensibilidad, se debe contextualizar y contrastar con otros estudios los hallazgos alcanzados y plasmarlos en un informe. Elaborar el informe correspondiente al estudio realizado suele ser una labor complicada. Las horas de lecturas, observaciones, conversaciones, entrevistas, análisis de documentos, etc. no son acciones sencillas de sintetizar. Stake (2005) afirma:

> La página no se escribe sola, sino cuando se descubre y se somete a análisis, el ambiente adecuado, el momento adecuado, mediante la lectura repetida de las notas, con la reflexión profunda, para que después se revele el sentido y se nos escriba la hoja (p. 69).

4.3 Participantes y condiciones de trabajo

La muestra, de las dos situaciones problemáticas correspondientes a cada dimensión de análisis, estuvo constituida por el mismo grupo de 85 estudiantes, con edades comprendidas entre 18 y 19 años, que cursaban en dos comisiones de la materia AGA, correspondiente al primer semestre de primer año de carreras de Ingeniería, de la FCEIA. El grupo es heterogéneo, constituido por estudiantes egresados de escuelas con diferentes orientaciones que participaron voluntariamente de las actividades implicadas. Se destaca que todos los participantes cursaban la asignatura por primera vez, es decir en la muestra no se encuentran estudiantes recursantes.

Se les informó a los alumnos que las actividades formaban parte de la realización de la presente tesis, explicándoles lo que ello implica, que no se trataba de ningún tipo de evaluación y que podían escribir y graficar todo lo que consideraran conveniente. Es más, se les indicó que todo tipo de relato, referencias o aclaraciones en sus formas de resolución eran relevantes, como así mismo hacer especificaciones sobre las dificultades encontradas, planteamiento de ideas inconclusas, etc. Esta información en las démarches (Duval, 1998) de los alumnos brinda herramientas para el estudio en la temática de interés.

Las dos situaciones problemáticas, realizadas en días diferentes, fueron presentadas a los estudiantes en hojas impresas. El tiempo de realización de las mismas fue determinado por los propios estudiantes, que en promedio tardaron 35 minutos en resolver cada actividad.

Las intervenciones de la investigadora se limitaron a responder preguntas referidas al foco de atención del estudiante en ese momento, de manera de no alterar su modo de procesamiento.

Se recogieron los protocolos de la resolución individual de los alumnos, quienes podían usar los materiales y apuntes de clase.

Se grabaron además entrevistas semiestructuradas a algunos estudiantes, que permitieron profundizar el análisis a través de sus argumentaciones, constituyendo un refuerzo para ciertas conclusiones obtenidas desde el registro oral.

4.4 Etapa I. Dimensión geométrica

4.4.1 Instrumento I. Situación problemática de carácter geométrico (SPI)

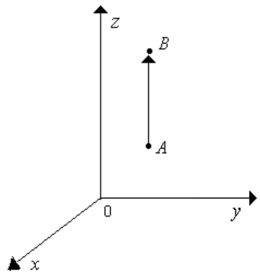
Esta actividad se diseñó a fin de indagar dificultades en la resolución de una situación problemática de carácter geométrico, en relación a la búsqueda de rectas perpendiculares a un vector dado y que contienen un punto determinado. La misma presenta tres ejercicios similares con algunas variaciones, requiriendo representaciones gráficas y algunas justificaciones. Se involucran nociones de vector libre, recta, perpendicularidad y sistema ortogonal de representación.

Se muestra a continuación el Instrumento I, que fue presentado a los estudiantes en una hoja oficio, de modo que los tres ejercicios -estructuralmente similares- pudieran visualizarse conjuntamente en una página.

1) *Dada la siguiente representación gráfica:*

a) *dibuja una recta que contenga al punto A y sea perpendicular al vector* $\overline{AB}$*, considera que* $\overline{AB}$ *tiene la dirección del eje z;*

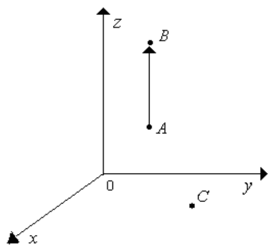
b) *¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. En caso negativo explica por qué no existen otras.*



2) *Dada la siguiente representación gráfica:*

a) *dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector* $\overline{AB}$*, considera que* $\overline{AB}$ *tiene la dirección del eje z y que el punto C se encuentra en el plano coordenado oxy;*

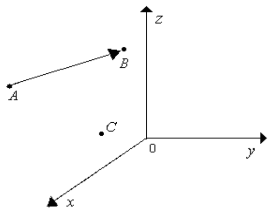
b) *¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. En caso negativo explica por qué no existen otras.*



3) *Dada la siguiente representación gráfica:*

a) *dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector* $\overline{AB}$*;*

b) *¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. En caso negativo explica por qué no existen otras.*



Cuadro 4. 1. Instrumento I

A través de triangulación de los investigadores de esta tesis, se diseñaron los tres ejercicios que corresponden a una misma problemática, pero con distintas posiciones de un vector y un punto en el espacio. En el ejercicio 1 se dan como datos un vector de igual dirección que el eje z y un punto coincidente con el origen de dicho vector. En el ejercicio 2 se presenta nuevamente un vector de igual dirección que el eje z y un punto perteneciente al plano coordenado XY. Mientras que en el ejercicio 3, los datos están constituidos por un vector y un punto en el espacio, sin referencias. Es decir, en los dos primeros ejercicios el vector y el punto dado están referenciados, no así en el tercer ejercicio, que presenta un contexto más general.

Cabe aclarar que, aunque las representaciones gráficas de los vectores tienen como extremos los puntos llamados A y B, no se trata de vectores fijos, sino vectores libres. Este concepto se había trabajado con los estudiantes en profundidad ya que este tema constituye una unidad previa en AGA. Se utilizó la misma notación y forma de trabajo empleada en clase.

En síntesis:

En el ejercicio 1 están dados el vector $\overline{AB}$, de igual dirección que el eje z, y el punto A, origen del vector $\overline{AB}$.

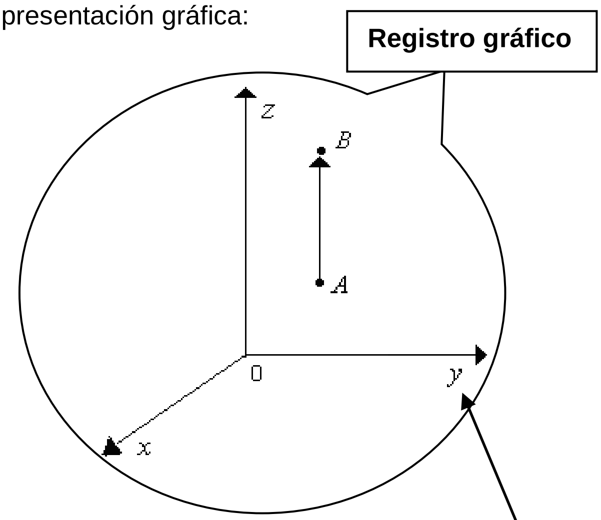
En el ejercicio 2 están dados el vector $\overline{AB}$, de igual dirección que el eje z, y el punto C perteneciente al plano coordenado XY.

En el ejercicio 3 están dados el vector $\overline{AB}$ y el punto C, sin referencias en cuanto a sus posiciones.

Se destaca que, en los tres ejercicios, existen infinitas rectas perpendiculares al vector denominado $\overline{AB}$ y que contienen al punto dado de dato. En el ítem (a) los estudiantes deben dibujar una de estas rectas. En cuanto al ítem (b) en los tres ejercicios se enuncia: *"¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?"* En este punto el estudiante puede responder correctamente: *Sí*, *existen infinitas rectas,* sin realizar otra especificación, o exponer respuestas más completas, teniendo en cuenta que antes de realizar la actividad se les sugirió que especificaran o ampliaran todo lo que creyeran conveniente. Este ítem continúa: *"En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones*." El "otras" supone que el estudiante debe dibujar al menos dos rectas más a la realizada en el ítem (a). Además, se pide: *"En caso negativo explica por qué no* *existen otras"*, para que el alumno reflexione particularmente sobre su argumento si su respuesta fue errónea. Se trata de generar un desequilibrio cognitivo que lleve al estudiante a replantearse su respuesta y a una posible modificación de la misma. Para los casos en que mantienen su respuesta errónea, la argumentación desarrollada permite obtener material de análisis a fin de detectar las dificultades en este punto.

Como se ha observado, los datos de la SPI se presentan en registros gráfico, coloquial y simbólico, las respectivas representaciones semióticas son el dibujo, el enunciado y los nombres de los objetos involucrados (vector, punto, ejes). A modo de ejemplo se presenta el diagrama 4.1, donde se destacan tales registros, sólo para el ejercicio 1, ya que los otros dos ejercicios tienen un formato de presentación análogo.

1) Dada la siguiente representación gráfica:



a) dibuja una recta que contenga al punto A y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z;

Registro simbólico

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a?
En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.
En caso negativo explica por qué no existen otras.

Registro coloquial

Diagrama 4. 1. Registros de representación involucrados en el enunciado del Ejercicio 1 de la SPI

Así mismo, el enunciado induce a los estudiantes a responder utilizando los registros gráfico, coloquial y simbólico. Efectivamente, las representaciones de las rectas perpendiculares al vector y que contienen al punto implican un registro gráfico a través de la representación semiótica de un dibujo. Las respuestas a las preguntas y explicaciones solicitadas involucran el registro coloquial con la respuesta escrita como representación semiótica. El registro simbólico puede presentarse combinado con los otros registros mencionados. A continuación, se presenta el diagrama 4.2 indicando el tipo de registros involucrados en las respuestas a partir de las consignas del ejercicio 1, el resto de los ejercicios pueden interpretarse en forma análoga.

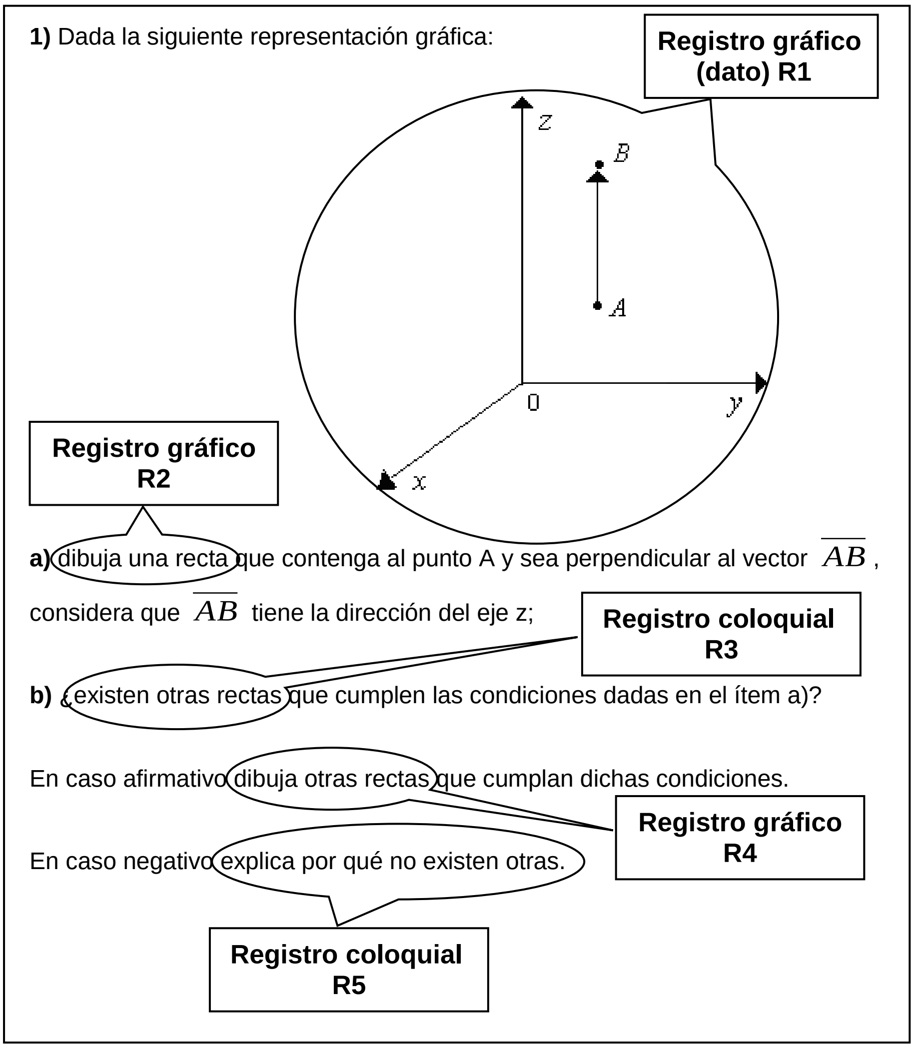


Diagrama 4. 2. Registros de representación de las respuestas implícitos en el enunciado del Ejercicio 1 de la SPI

En función de los registros requeridos es posible diagramar las etapas de resolución de la situación problemática de la siguiente forma:

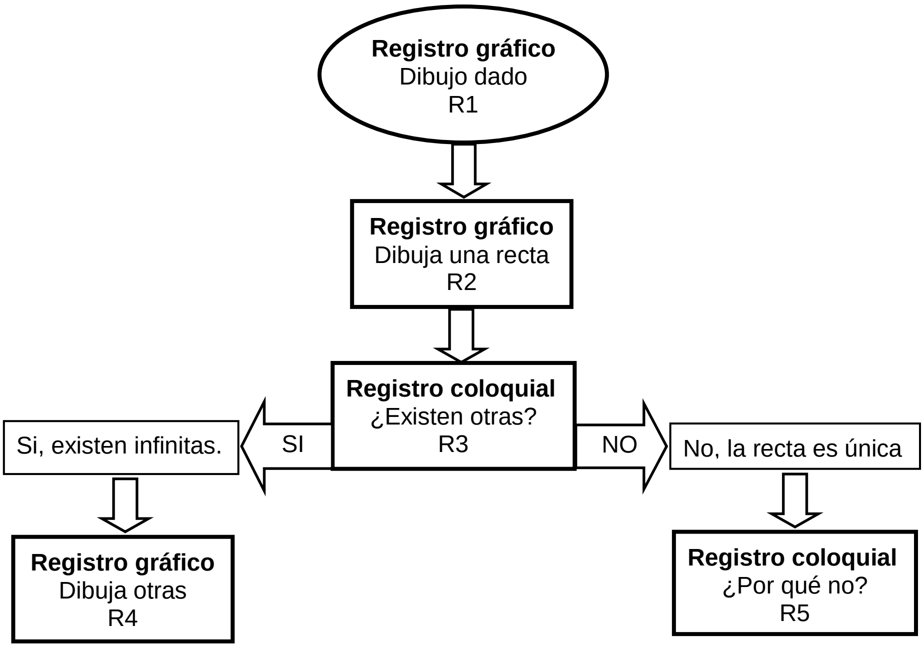


Diagrama 4. 3. Etapas de resolución en función de los registros de representación en la SPI

4.4.2 Posibles formas de resolución de la SPI

A continuación, se detallan las particularidades en la resolución de cada uno de los tres ejercicios propuestos.

- En el ejercicio 1 se presenta un vector $\overline{AB}$ de igual dirección que el eje z, con la finalidad de darle al alumno una referencia geométrica de la posición del vector. Si bien en el ítem (a) se les pide a los estudiantes que dibujen "una" recta, como ya hemos mencionado existen "infinitas" rectas que cumplen las condiciones requeridas. Una forma de responder a esta consigna es graficar r_1 como se muestra en la figura 4.1:

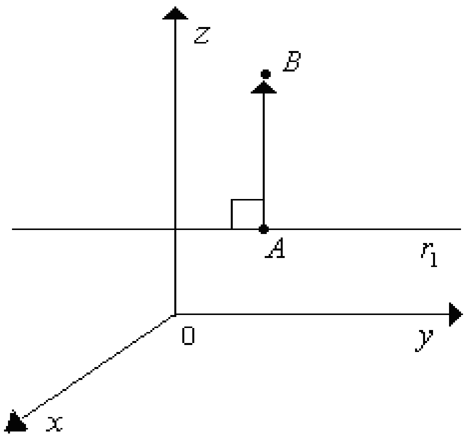


Figura 4. 1

En el caso particular del ítem (b) de este ejercicio la respuesta correcta y completa es que hay infinitas rectas perpendiculares al vector $\overline{AB}$ y que además contienen al punto A. Además, más específicamente, podría aclararse que las infinitas rectas que cumplen las condiciones pedidas se encuentran contenidas en el plano que contiene al punto A, es paralelo al plano coordenado OXY y es perpendicular a $\overline{AB}$. Las siguientes gráficas corresponden a tal situación:

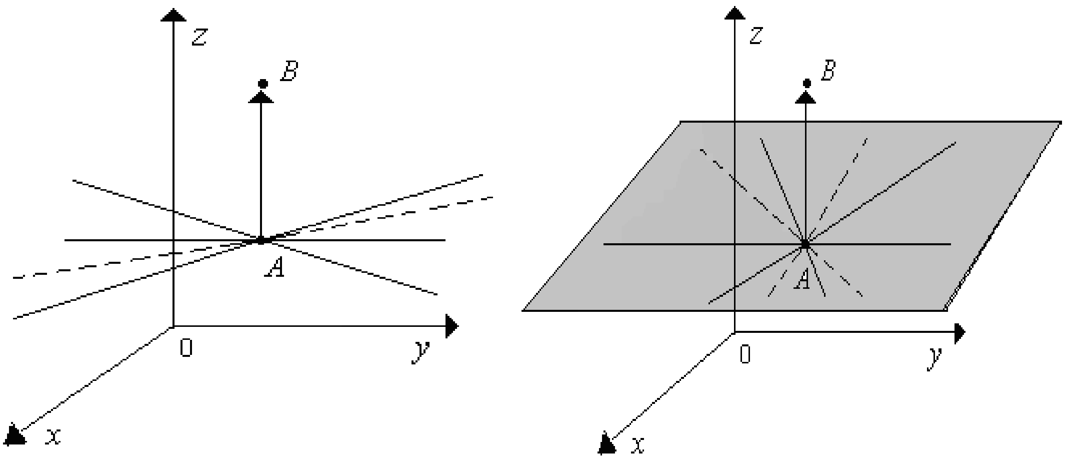


Figura 4. 2

- El ejercicio 2, mantiene el mismo vector $\overline{AB}$ tratado anteriormente, pero la/s recta/s ya no debe contener un punto extremo del vector, sino que debe contener el punto exterior C. Esta diferencia se ha planteado intencionalmente, pues si bien se sostiene la misma concepción del ejercicio 1, esta variante podría presentar otras dificultades en la resolución.

Para el ítem (a) también debe graficarse una de las infinitas rectas existentes. Una forma de representar a una de ella es la siguiente:

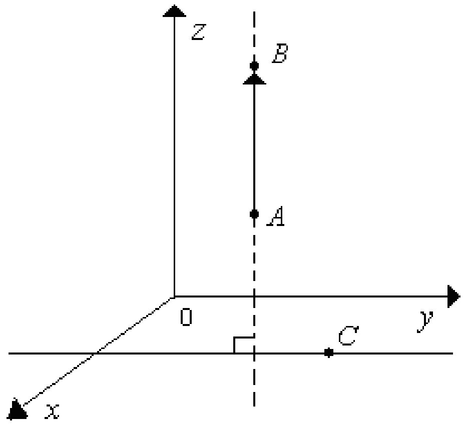


Figura 4. 3

En el ítem (b) al igual que en el ejercicio 1 es correcto afirmar que existen infinitas rectas que contienen al punto C y son perpendiculares al vector $\overline{AB}$. O ir más allá y explicitar que las mismas se encuentran contenidas en el plano de ecuación $z = 0 \quad \forall x, \forall y$. Las siguientes gráficas corresponden a tal situación:

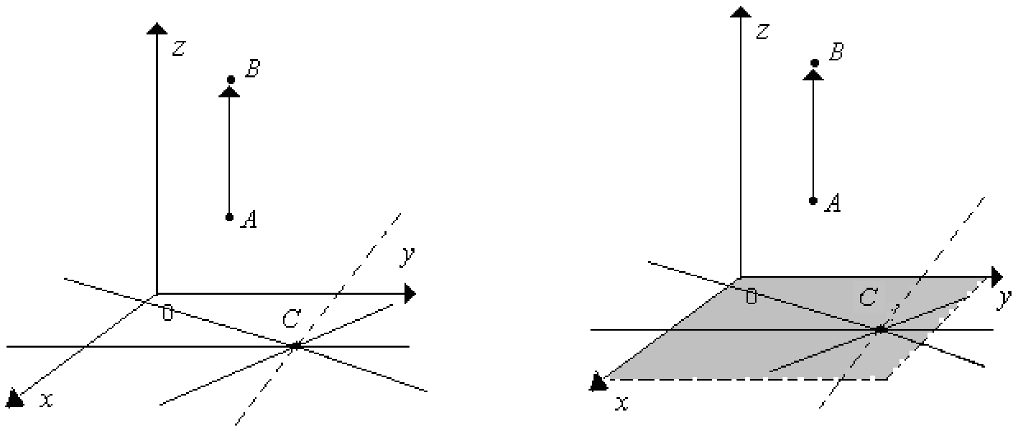


Figura 4. 4

- En el ejercicio 3, con el propósito de plantear un contexto más general, ya no se especifican referencias para el vector $\overline{AB}$, ni para el punto C.

Para el ítem (a) una respuesta posible es la que se grafica a continuación:

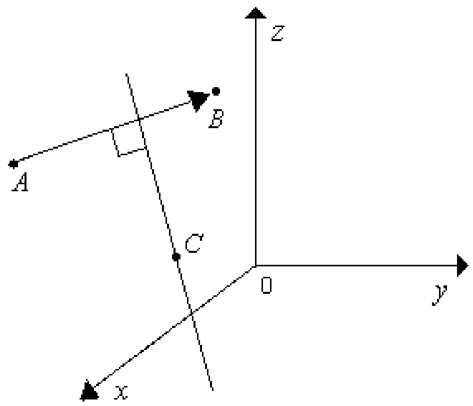


Figura 4. 5

En el ítem (b) de este caso puede responderse correctamente que existen infinitas rectas que contienen al punto C y son perpendiculares al vector $\overline{AB}$, especificando que en este caso las infinitas rectas se encuentran contenidas en el plano perpendicular al vector $\overline{AB}$ y que contiene al punto C. La siguiente gráfica representa la situación:

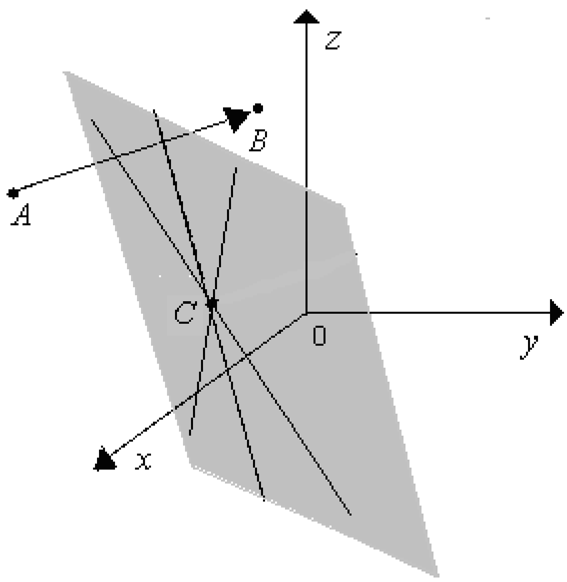


Figura 4. 6

4.4.3 Procesamiento de los datos de la SPI

El análisis de las resoluciones de la SPI se desarrolló en cuatro fases o etapas. En la fase inicial, se detectaron diferentes tipos de respuestas en cuanto a lo expresado literal y gráficamente acerca de las posibles rectas, con la presencia de diferentes interrelaciones entre las mismas. En la segunda fase se realizó un análisis centrado exclusivamente en las representaciones gráficas, mientras que en la fase tres el estudio se focalizó en las respuestas literales. Y en la última fase se reorganiza la información a fin de aplicar un análisis multidimensional de datos que permitió obtener una clasificación de los estudiantes en grupos diferenciados de acuerdo a las características de resolución.

Fase 1. Tipos de respuesta y sus relaciones

Dada la estructura de la SPI, se asume como variable independiente la posición relativa entre un vector y un punto en el espacio como referencia para considerar rectas perpendiculares al vector y que contienen al punto.
El estudio de las resoluciones permitió la identificación de diferentes respuestas literales y gráficas, a través de los registros gráficos y coloquiales utilizados por los estudiantes. A partir de esta información, las variables dependientes asumidas en esta fase corresponden a las relaciones entre lo que el estudiante responde literalmente y su dibujo, en relación a las rectas existentes con las condiciones dadas en el enunciado, en cada uno de los ejercicios. Las denominaremos Caso 1, Caso 2 y Caso 3, correspondientes a los Ejercicio1, Ejercicio 2 y Ejercicio 3 respectivamente.
A partir de las combinaciones encontradas para cada alumno, se definieron las modalidades para cada variable, que se presentan en la siguiente tabla.

<table>
<tr><th>DIMENSIÓN</th><th>VARIABLES</th><th>MODALIDADES</th></tr>
<tr><td rowspan="13">Geométrica
SPI</td><td rowspan="7">Caso 1</td><td>Dice 1 recta y dibuja 1</td></tr>
<tr><td>Dice 2 rectas y dibuja 2</td></tr>
<tr><td>Dice infinitas rectas y dibuja 2</td></tr>
<tr><td>Dice infinitas rectas y dibuja más de 2</td></tr>
<tr><td>No expresa nº de rectas y dibuja 1</td></tr>
<tr><td>No expresa nº de rectas y dibuja 2</td></tr>
<tr><td>No expresa nº de rectas y dibuja más de 2</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Caso 2</td><td>Dice 1 recta y dibuja 1</td></tr>
<tr><td>Dice 2 rectas y dibuja 2</td></tr>
<tr><td>Dice infinitas rectas y dibuja 1</td></tr>
<tr><td>Dice infinitas rectas y dibuja 2</td></tr>
<tr><td>Dice infinitas rectas y dibuja más de 2</td></tr>
<tr><td>No expresa nº de rectas y dibuja 1</td></tr>
</table>

		No expresa nº de rectas y dibuja 2
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2
	Caso 3	***Dice 1 recta y dibuja 1***
		Dice infinitas rectas y dibuja 1
		Dice infinitas rectas y dibuja 2
		Dice infinitas rectas y dibuja más de 2
		No expresa nº de rectas y dibuja 1
		No expresa nº de rectas y dibuja 2
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2

Tabla 4. 1. Variables y modalidades de la SPI

A partir de esta información global, por triangulación de investigadores y en función de los objetivos planteados, estos datos se reorganizaron, como se muestra en la tabla 4.2, incluyendo una caracterización de las modalidades presentes en los tres Casos, según las relaciones entre los registros coloquiales y gráficos.

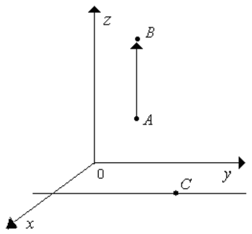
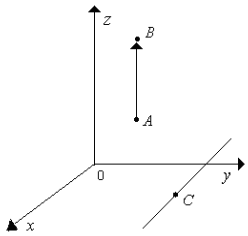
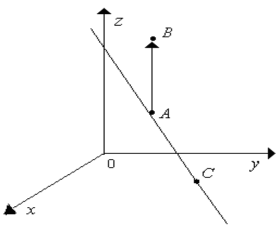
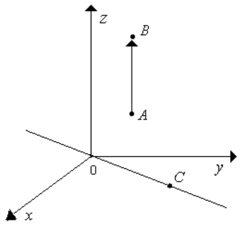
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA I	
Modalidades	**Caracterización**
I - Dice 1 recta y dibuja 1	*Rta literal incorrecta. Coherente lo que dice con lo que dibuja.*
II - Dice 2 rectas y dibuja 2	
III - Dice infinitas rectas y dibuja 1	*Rta literal correcta. Algunas dificultades para graficar.*
IV - Dice infinitas rectas y dibuja 2	
V - Dice infinitas rectas y dibuja + de 2	*Rta literal y gráfica correcta.*
VI - No expresa n° de rectas y dibuja 1	*Rta literal ausente. Rta gráfica errónea.*
VII - No expresa n° de rectas y dibuja 2	
VIII - No expresa n° de rectas y dibuja + de 2	*Rta literal ausente. Rta gráfica correcta.*

Tabla 4. 2. Caracterización de las respuestas en los tres Casos de la SPI

Como puede observarse se reagruparon las modalidades I y II que implican una respuesta incorrecta, pero presentan una coherencia entre los registros coloquial y gráfico. Por otro lado, se asocian las modalidades III y IV correspondientes a respuestas literales correctas, pero con registros gráficos de una o dos rectas. Finalmente se agrupan las modalidades VI y VII que expresan gráficas de una o dos rectas con ausencia de respuestas literales. Este análisis resultará relevante en la reducción de modalidades para la realización en la última fase de un análisis multidimensional de datos.

Fase 2. Análisis de las representaciones gráficas

Esta fase se centra en el análisis de las representaciones gráficas de los estudiantes independientemente de sus respuestas literales sobre la cantidad de rectas existentes con las condiciones requeridas. Particularmente, en la búsqueda de dificultades, se analizan los protocolos de quienes representan gráficamente una o dos rectas, ya que se consensuó considerar como respuesta correcta que el alumno dibuje más de dos rectas.
A través de las similitudes y características comunes encontradas en los distintos protocolos se crearon cuadros para cada uno de los ejercicios que permitieron caracterizar las referencias utilizadas por los estudiantes a la hora de graficar. Por ejemplo, en el ejercicio 2, algunas referencias de quienes dibujan una recta se muestran en el siguiente cuadro.

			
Referencia: ***el eje y.***	***Referencia:*** ***el eje x.***	***Referencia:*** ***los puntos A y C.***	***Referencia:*** ***el origen y el punto C.***

Cuadro 4. 2. Caracterización de los gráficos de los estudiantes que dibujan una recta en el Ejercicio 2

Fase 3. Análisis de las respuestas literales

La técnica utilizada para el procesamiento de las respuestas literales fue el análisis de contenido, que permite la descripción sistemática en el estudio del contenido de las comunicaciones a fin de interpretarlas (López Noguero, 2002). En este procedimiento interesa el estudio de ideas o frases más que palabras o estilos con que estas se expresan.

El análisis del contendido permite hacer inferencias a partir de lo escrito o de materiales no lingüísticos como dibujos o esquemas. El mismo se efectúa por medio de la codificación a través de la cual las características relevantes de una expresión escrita se transforman en unidades de análisis.

En primer lugar, se estudian las respuestas literales correctas. En estos casos, a través de un análisis de la argumentación se indaga acerca de qué factores o conceptos explicitados permiten a los estudiantes una correcta visualización de la situación problemática. Tales conceptos se consideran relevantes ya que se contraponen a la ausencia de respuestas o a las dificultades en las mismas del resto de los alumnos.

En segundo término, a fin de detectar el origen de las dificultades en el proceso de resolución, se analizan las justificaciones erróneas de los estudiantes en búsqueda de patrones similares en sus argumentaciones, analizando las mismas a partir de los referenciales teóricos presentados en esta tesis.

Fase 4. Análisis global cuantitativo

Se realizó un análisis global de las actuaciones con el objetivo de determinar grupos de alumnos que siguen patrones semejantes de resolución. Dado que este estudio involucra un número importante de individuos y la manipulación de variables que asumen diferentes modalidades, se recurrió al Análisis Multidimensional de Datos (AMD) a fin de estudiar la estructura de la información a partir de la correspondiente matriz de datos donde cada fila presenta los datos asociados con cada individuo y las columnas las diferentes modalidades de las variables. El AMD conserva la perspectiva del análisis de los datos como un proceso consistente en manipulaciones, trasformaciones, operaciones, en el cual se aíslan unidades fundamentales o dominios, se explora la estructura interna de tales dominios para conformar categorías operativamente manejables y se buscan las relaciones entre tales categorías y de éstas con el todo (Gil Flores, 1994). Este análisis permite condensar la información contenida en la matriz de datos original operando una reducción de la dimensionalidad del problema a un conjunto de factores representativos para la interpretación de la distribución de los datos.

Para realizar el AMD para el total de la muestra se aplicó un método de clasificación mixta en coordenadas factoriales mediante la aplicación del software SPAD (C.I.S.I.A-CERESTA, 1998). En este procedimiento las clases se organizan por semejanzas entre las modalidades de las variables que caracterizan a los individuos, de manera que las clases de individuos obtenidas resultan homogéneas y diferenciadas. Es decir, se busca interpretar la estructura de todos los individuos, comparando la variación de las modalidades dentro del grupo (que debiera ser mínima) con la variación entre los grupos (que debiera ser máxima). Se obtiene así una partición de la muestra, con la caracterización de cada una de las clases en función de las modalidades de las variables con mayor valor test.

Para optimizar el uso del mencionado programa se reorganizó la información presentada en la tabla 4.2, definiendo nuevas modalidades. Para ello, teniendo en cuenta el análisis de resultados realizado en las fases anteriores, se procedió a la triangulación, entre la tesista y sus directores, de la información (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista, 2006) a fin de reagrupar las modalidades resultantes. Así por ejemplo se agrupa en una modalidad a los alumnos que han expresado que *existen infinitas rectas*, independientemente de si han dibujado 1, 2 o más rectas. Las nuevas modalidades se presentan en el siguiente diagrama:

MODALIDADES

Dice 1 recta y dibuja 1 o dice 2 y dibuja 2

Dice infinitas rectas y dibuja al menos 1

No expresa nº de rectas y dibuja 1 o 2

No expresa nº de rectas y dibuja más de 2

Diagrama 4. 4. Modalidades de las variables de la SPI

Este procedimiento de reajuste, permitió presentar un análisis global estadístico de la información y caracterizar a los alumnos mediante clases homogéneas y diferenciadas organizadas por semejanzas.

Finalmente se retoma el diagrama 4.3 correspondiente a las Etapas de resolución -en función de los registros de representación- identificando en el mismo las dificultades halladas en las fases previas. Esto permitió obtener conclusiones preliminares que luego se ampliaron en el Capítulo VI.

4.5 Etapa II. Dimensión algebraica

4.5.1 Instrumento II. Situación problemática de carácter algebraico (SPII)

Esta segunda actividad sigue la misma línea problemática que la SPI, pero conteniendo datos específicos, con la posibilidad de realizar cálculos concretos para la determinación de respuestas desde otro tipo de registros. Se formula involucrando registros coloquial, simbólico y numérico, se indican las coordenadas de un punto y las componentes de un vector que en las situaciones anteriores eran entes geométricos. En consecuencia, también en este caso el conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio.

Se muestra a continuación el Instrumento II como fue presentado a los estudiantes.

a) *Dado el vector* $\bar{v} = (1,3,2)$ *y el punto* $P\,(1,-2,1)$ *halla ecuaciones de una recta que sea perpendicular a* $\bar{v}$ *y que contenga a* P *.*

b) *¿Existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?*

En caso afirmativo especifica cuántas y escribe ecuaciones de otra recta que cumpla dichas condiciones. Si es posible expresa todas las soluciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras.

Cuadro 4. 3. Instrumento II

Los datos de la SPII se presentan en registros coloquial, simbólico y numérico, como se muestra en el siguiente diagrama.

Registro numérico

1) a) *Dado el vector* $\bar{v} = (1,3,2)$ *y el punto* $P(1,-2,1)$ *halla ecuaciones de una recta que sea perpendicular a* $\bar{v}$ *y que contenga a* P *.*

Registro simbólico

b) *¿Existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?*

En caso afirmativo especifica cuántas y escribe ecuaciones de otra recta que cumpla dichas condiciones. Si es posible expresa todas las soluciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras.

Registro coloquial

Diagrama 4. 5. Registros de representación involucrados en el enunciado de la SPII

Este enunciado permite la resolución analítica del problema, involucrando registros coloquiales, simbólicos e incorporando registros numéricos y algebraicos como se muestra a continuación.

Registro numérico (dato) R1

Registro algebraico R2

1) a) *Dado el vector* $\bar{v} = (1,3,2)$ *y el punto* $P(1,-2,1)$ *halla ecuaciones de una recta que sea perpendicular a* $\bar{v}$ *y que contenga a* P *.*

b) *¿Existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?*

Registro coloquial R3

Registro algebraico R4

En caso afirmativo especifica cuántas y escribe ecuaciones de otra recta que cumpla dichas condiciones. Si es posible expresa todas las soluciones.

Registro coloquial y/o algebraico R5

En caso negativo explica por qué no existen otras.

Registro coloquial R6

Diagrama 4. 6. Registros de representación de las respuestas implícitos en el enunciado de la SPII

En función de los registros requeridos es posible diagramar las etapas de resolución de la situación problemática de la siguiente forma:

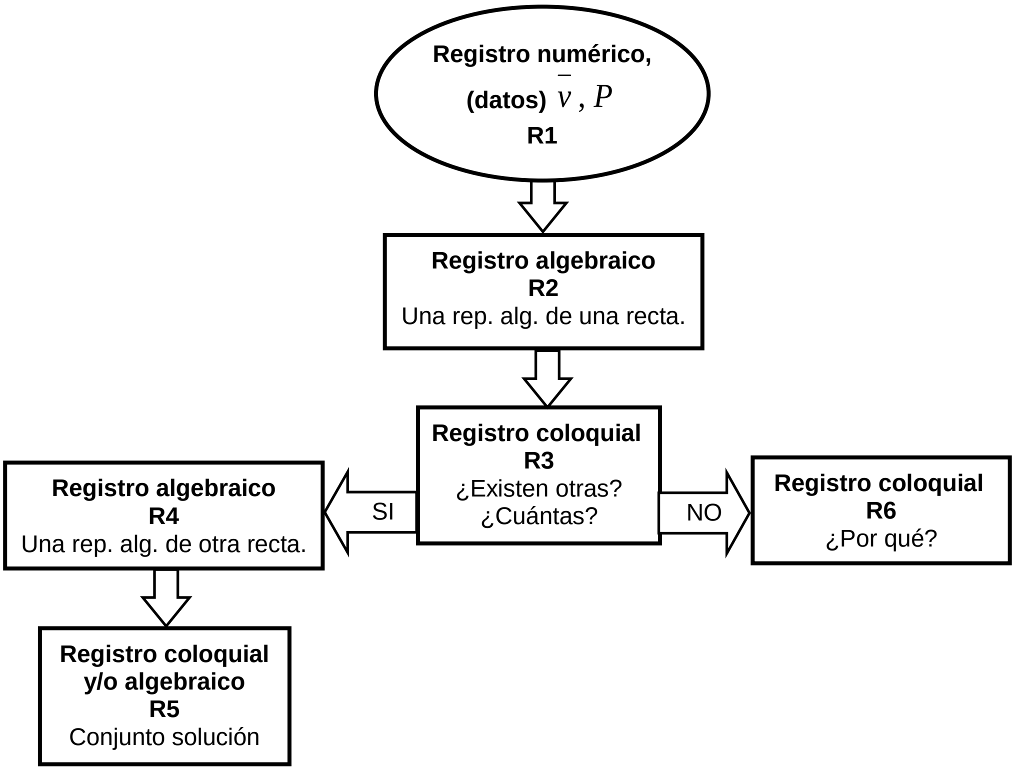


Diagrama 4. 7. Etapas de resolución en función de los registros de representación en la SPII

Las respuestas a las consignas de la SPII permiten determinar la cantidad de rectas que el alumno explicita literalmente que existen con las condiciones del problema planteado, el número de rectas a representar mediante ecuaciones y la forma de representación de las rectas, a partir de lo cual será posible identificar las estrategias utilizadas. Y por último es de interés la representación utilizada para expresar las infinitas soluciones.

4.5.2 Posibles formas de resolución de la SPII

- Solución utilizando ecuaciones paramétricas

Una forma de responder al primer ítem es buscar un vector $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)/\ \ \overline{u}\perp\overline{v}$, planteando $\overline{u}\neq\overline{0},\ \ \overline{v}\neq\overline{0},\ \ \overline{u}\perp\overline{v}\Leftrightarrow\overline{u}\times\overline{v}=0$, $(u_1,u_2,u_3)\times(1,3,2)=0$, $u_1+3u_2+2u_3=0$, obteniendo una ecuación lineal en tres variables. Asignando valores particulares a dos de las variables puede calcularse el valor de la tercera. Se determinan así las componentes de un vector perpendicular al dado, haciendo posible expresar ecuaciones paramétricas de una recta que tiene a $\bar{u}$ como vector dirección y que contiene al punto P:

$$r)\begin{cases} x = 1 + u_1\, t \\ y = -2 + u_2\, t, \quad t \in R \\ z = 1 + u_3\, t \end{cases}$$, donde $\bar{u}$ es el vector obtenido.

En la ecuación $u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0$ es posible asignarles cualquier número real a dos de las variables, por ejemplo, a u_3 y u_2, lo que permite obtener un valor para la tercera variable u_1. Al existir infinitos números reales, existen infinitos vectores perpendiculares a $\bar{v}$ que pueden expresarse por componentes.
Es decir, existen infinitas ecuaciones posibles que representan las infinitas rectas perpendiculares a $\bar{v}$ y que contienen a P.

Para el ítem (b), utilizando la ecuación $u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0$ pueden obtenerse otros valores para u_1, u_2 y u_3, y así las componentes de otro vector $\bar{w} = (u_1, u_2, u_3)$ perpendicular a $\bar{v}$. Se debe tener en cuenta que $\bar{w}$ no resulte paralelo al vector $\bar{u}$ utilizado en la ecuación dada anteriormente, pues tomando vectores paralelos entre sí se encontrarían distintas ecuaciones de una misma recta, es decir diferentes representaciones algebraicas de una misma recta.
Una posible forma de expresar ecuaciones paramétricas, de otra recta, es la que tiene a $\bar{w}$ como vector dirección y contiene al punto P.

Luego el enunciado dice *"Si es posible expresa todas las soluciones";* de todos los ítems éste puede considerarse el pedido más exigente. Se lo ha solicitado con el interés de que el estudiante reflexione y exprese sus ideas coloquialmente, o con ejemplos, o relatando alguna posible representación de las soluciones, sin la exigencia de demasiada formalidad, a fin de evaluar qué son capaces de expresar y cómo, valorando las descripciones, características, representaciones, etc.
Una respuesta posible es describir el método o proceso de cómo hallar ecuaciones que representen a cualquier otra recta, justificando que cambiaría en la forma de resolución planteada en el ítem (a), o haciendo hincapié en cuál es la

condición que varía en el proceso algebraico utilizado, para obtener otras soluciones. En estas condiciones, cualquier recta tendrá la forma: $r)\begin{cases} x = 1 + u_1\,t \\ y = -2 + u_2\,t \\ z = 1 + u_3\,t \end{cases}$, $t \in R$, y $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ / $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \times \bar{v} = 0,\quad (u_1, u_2, u_3) \times (1,3,2) = 0$

$u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0$. Como ya se ha indicado las variaciones se encuentran en la búsqueda del vector $\bar{u}$ relacionada a la resolución de la ecuación, con el debido cuidado de no obtener vectores paralelos.

Otra respuesta, menos formal, es indicar que las infinitas rectas que pasan por el punto P, están contenidas en el plano perpendicular a $\bar{v}$ como vector normal y que contiene al punto P, una ecuación del mismo tendrá la forma: $\pi)\ ax + by + cz + d = 0$ donde $a, b, c, d \in R$. Como $\bar{v}$ es un vector normal al plano una ecuación posible puede expresarse: $\pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$, y como $P \in \pi$: $1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$, resultando $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$.

Y por último el ítem enuncia: *"En caso negativo explica por qué no existen otras".* Al igual que en el instrumento I, el mismo se ha planteado con la intención de que el estudiante que ha respondido que no existen otras rectas o que existen una cantidad finita de ellas, reflexione sobre su respuesta. Y si el estudiante continúa con su respuesta errónea, a través del análisis del discurso, indagar sobre las dificultades que incidieron en sus ideas a partir de sus supuestos.

- Solución utilizando forma general

Otra forma de responder a la consigna, es primero hallar una ecuación del plano perpendicular al vector $\bar{v}$ y que además contiene al punto P. Este plano descripto en la forma de resolución anterior, contiene a las infinitas rectas posibles que cumplen las condiciones pedidas; una ecuación que lo representa es: $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$. En segundo lugar, es posible buscar una ecuación de otro plano, cuya condición es que contenga al punto P(1,-2,1), por ejemplo: $\sigma)\ x = 1$. A partir de esto es posible presentar la forma general de representar a una recta: $r)\begin{cases} x+3y+2z+3=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Los planos que contienen al punto P(1,-2,1) son infinitos, por lo tanto sus respectivas intersecciones con el plano π determinan las infinitas rectas.

Para responder al ítem (b) pueden exhibirse ecuaciones que representen a otra recta, por ejemplo:

$s)\begin{cases} x+3y+2z+3=0 \\ y=-2 \end{cases}$ o $t)\begin{cases} x+3y+2z+3=0 \\ z=1 \end{cases}$.

Sobre las infinitas soluciones, puede decirse que una recta cualquiera tendrá la forma:

$r)\begin{cases} x+3y+2z+3=0 \\ \sigma \end{cases}$, donde σ es una ecuación que representa a un plano que contiene al punto P.

Una posible representación gráfica de la SPII:

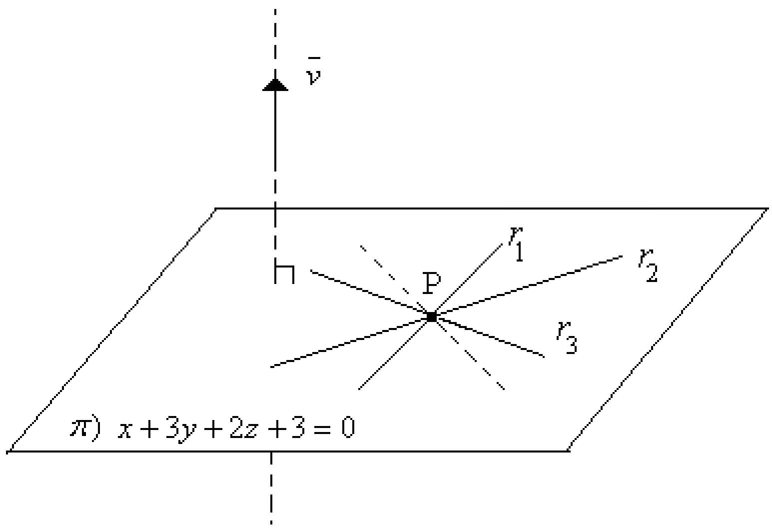


Figura 4. 7

4.5.3 Procesamiento de los datos de la SPII

El análisis de las resoluciones de la SPII se desarrolló en tres fases o etapas. En la fase inicial, se presentan los diferentes tipos de respuestas literales y las distintas estrategias válidas de resolución. En la segunda fase se realizó un análisis centrado en las dificultades de los estudiantes, en primer lugar, en las formas válidas de resolución y, en segundo término, en las estrategias del resto de los alumnos. En la última fase se reorganiza la información realizando un análisis multidimensional de datos que admitió una clasificación de los estudiantes en grupos diferenciados.

Fase 1. Tipos de respuestas y análisis de las estrategias válidas de resolución

El estudio de las resoluciones permitió la identificación de diferentes tipos de respuestas en cuanto a lo expresado literal y algebraicamente.
Se identificaron seis estrategias válidas de resolución, en la búsqueda de una representación de una recta con las condiciones requeridas por la situación. A partir de las cuales se confeccionó un esquema de los registros observados y un diagrama que sintetiza las relaciones entre lo que los estudiantes expresan literalmente y el trabajo algebraico que aplican en cada estrategia. De un *esquema comparativo* de las estrategias detectadas se reconocieron aspectos comunes y características distintivas, visualizando la evolución de los registros mediante las representaciones semióticas utilizadas en cada una. A través de un *diagrama general* se caracterizaron las respuestas -literales y algebraicas- de los estudiantes en cada una de las estrategias observadas.
Las variables se constituyeron en función de las consignas del enunciado y las respuestas emitidas por los estudiantes.
La primera variable: "número de rectas", identifica la cantidad de rectas que el alumno explicita literalmente, que existen con las condiciones del problema. La variable: "número de representaciones algebraicas" corresponde al número de rectas que el estudiante representa mediante la explicitación de ecuaciones. Es decir, denominamos representación algebraica a las formas de expresar a una recta, ya sea a través de ecuaciones paramétricas o en su forma general. Por ejemplo, decir que el número de representaciones algebraicas que ha utilizado un estudiante es dos, significa que ha expresado dos rectas diferentes a través de ecuaciones. Y la última variable: "forma de la representación algebraica" identifica a las líneas de razonamiento o estrategias utilizadas para enunciar tales representaciones.

Este análisis general de las estrategias permitió, por acuerdo mediante triangulación con los directores de la tesis, definir las modalidades de las tres variables explicitadas anteriormente, que se sintetizan en la tabla 4.3.

VARIABLES	MODALIDADES
N º de rectas	***Una única recta***
	Infinitas rectas
	No responde
N º de representaciones algebraicas	***Una representación algebraica incompleta***
	Una representación algebraica
	Al menos dos representaciones algebraicas
	Ninguna representación algebraica o incorrecto
Forma de la representación algebraica	***Usa producto escalar, forma paramétrica***
	Usa producto vectorial, forma paramétrica
	Usa vector paralelo al plano, forma paramétrica
	Forma general (Intersección de dos planos)
	No da representación algebraica o incorrecta

Tabla 4. 3. Variables y Modalidades de la SPII

Estas variables y modalidades se retoman en la fase 3 para la aplicación de un análisis multidimensional de datos.

Fase 2. Análisis de las dificultades

En los esquemas de las representaciones semióticas involucradas en cada una de las seis estrategias válidas, organizados en la fase 1, se identifican las dificultades detectadas y se realiza a continuación una descripción y análisis de las mismas. Luego se estudian las dificultades que se evidencian en las respuestas literales a través de las diferentes argumentaciones encontradas. La presencia de similitudes en tales argumentaciones permitió su caracterización a través de una tipología.

Finalmente, se estudian los procesos de resolución del resto de los estudiantes, es decir de quienes aplicaron estrategias erróneas. Se presenta una descripción de los errores y el análisis de las dificultades de índole algebraica, así como también de las dificultades en las respuestas literales.

Fase 3. Análisis global cuantitativo

Considerando el análisis realizado en las fases previas, se reajustan las variables y modalidades definidas en la fase 1.
Al igual que en el análisis de la SPI la información se procesó mediante técnicas de análisis multidimensional de datos a través del programa estadístico SPAD, lo que permitió hallar una caracterización tipológica de la actuación de los estudiantes en esta actividad.

Finalmente se retoma el diagrama 4.7 correspondiente a las Etapas de resolución, identificando en el mismo las dificultades -generales- halladas en las fases previas. Además, se caracterizaron las dificultades de índole algebraica independientemente de la estrategia de resolución aplicada. Esto permitió obtener conclusiones preliminares que luego se ampliaron en el Capítulo VI.

Muestra:

85 estudiantes de AGA, de 1ºaño de carreras de Ingeniería en la FCEIA.

SPI. Instrumento I
Situación problemática de carácter geométrico

Posibles formas de resolución SPI

Procesamiento de la SPI

Fase 1. Tipos de Respuesta y sus relaciones

- Tipos de respuestas
- Variables y modalidades
- Caracterización

Fase 2. Análisis de las representaciones gráficas

- Caracterización de las representaciones gráficas en cada ejercicio

Fase 3. Análisis de las respuestas literales

- Análisis de argumentaciones correctas
- Análisis de argumentaciones incorrectas

Fase 4. Análisis global de la información

- Análisis estadístico de la muestra total
- Caracterización en clases

Dificultades en las etapas de resolución en función de los registros.

SPII. Instrumento II
Situación problemática de carácter algebraico

Posibles formas de resolución SPII

Procesamiento de la SPII

Fase 1. Tipos de respuestas y análisis de las estrategias de resolución

- Tipos de respuestas
- Variables y modalidades
- Estrategias de resolución
- Relación respuesta literal-trabajo algebraico

Fase 2. Análisis de las dificultades en las diferentes estrategias de resolución

- Dificultades asociadas a los registros
- Dificultades en las respuestas literales
- Otras dificultades de índole algebraico

Fase 3. Análisis global de la información

- Caracterización en clases

Dificultades generales - en las etapas de resolución- y dificultades algebraicas.

Diagrama 4. 8. Diagrama global IV

CAPÍTULO V

5. TRABAJO DE CAMPO

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados emergentes del procesamiento de los datos recogidos durante la investigación, y el análisis de los mismos, de acuerdo a la metodología detallada en el capítulo precedente. Los mismos se han organizado atendiendo a las dos dimensiones de análisis: geométrica y algebraica.

En relación a la dimensión geométrica, como se ha mencionado en el capítulo anterior, el estudio se desarrolló en cuatro fases o etapas. En la primera fase se describen los diferentes tipos de respuestas expresadas por los estudiantes a través de registros de representación gráficos y literales. El estudio de las relaciones encontradas entre las mismas permitió definir modalidades para cada variable denominadas: Caso 1, Caso 2 y Caso 3, y realizar una caracterización de las respuestas de los alumnos. Luego la información se organizó presentando un análisis estadístico porcentual. En la segunda fase se analizaron las representaciones gráficas de los estudiantes que presentaron alguna dificultad, completando el estudio con el análisis de las argumentaciones consideradas relevantes. En la fase tres se presentan un análisis centrado en las respuestas literales tanto correctas como erróneas encontradas en los protocolos de los estudiantes. Las argumentaciones incorrectas permitieron indagar el origen de las dificultades encontradas. Y las explicaciones correctas colaboraron con el estudio de los registros en contraposición de la ausencia de respuestas o a las dificultades en las mismas del resto de los estudiantes. Por último, la cuarta fase muestra un análisis global de las actuaciones de los estudiantes con el objetivo de determinar grupos que siguen patrones semejantes en sus procesos de resolución. Para ello se aplicó un método de clasificación mixta en coordenadas factoriales mediante el software SPAD.

Finalmente, en esta dimensión se presenta una clasificación de las dificultades halladas en las diferentes fases de análisis de la SPI, que permitieron obtener conclusiones preliminares ampliadas luego en el Capítulo VI.

En la dimensión algebraica, como se ha mencionado, la situación problemática sigue la misma línea matemática que la SPI. La misma incorpora registros numéricos que permiten la realización de cálculos concretos e involucra además registros algebraicos. El análisis de esta dimensión se desarrolló en tres fases o etapas. En la fase inicial, se observaron diferentes tipos de respuestas en cuanto a lo expresado literal y algebraicamente acerca de las rectas involucradas en la actividad, lo que permitió la definición de las modalidades para cada variable. La detección de distintas estrategias de resolución admitió la caracterización de cada una de ellas en función de los registros involucrados, y de las relaciones entre lo que los estudiantes expresan literalmente y el trabajo algebraico que aplican. Las representaciones semióticas identificadas en cada estrategia colaboraron con el estudio de la evolución de los registros involucrados y el reconocimiento de aspectos comunes y características distintivas en los procesos de resolución. En la segunda fase se realiza un análisis de las dificultades encontradas, en primer término, en las diferentes estrategias válidas de resolución, en función de los registros semióticos y en segundo lugar en las formas erróneas de resolución. Además, se estudian las dificultades subyacentes en las respuestas literales.

Los resultados obtenidos permitieron definir modalidades en relación a las variables de estudio, para en la última fase aplicar un análisis multidimensional de datos que admitió una clasificación de los estudiantes en cuatro grupos diferenciados.

Las conclusiones preliminares de la dimensión algebraica, producto del desarrollo de estas tres fases de análisis de la SPII, presentan una clasificación de las dificultades como: generales (DG) -asociadas a las etapas de resolución-, y algebraicas (DA) -asociadas a la estrategia aplicada-.

5.2 Análisis y resultados de la Situación Problemática I

Recordemos que el Instrumento I corresponde a una situación problemática de carácter geométrico (SPI), presentada en la sección 4.4.1.

A partir de una primera lectura de los protocolos se observó que sólo 5 estudiantes de un total de 85 resuelven la SPI de forma correcta y completa.

5.2.1 Fase 1. Tipos de respuesta y sus relaciones

De un primer análisis de los protocolos de la SPI, en los tres ejercicios se han detectado diferentes tipos de respuestas literales y gráficas, a través de los registros coloquiales, simbólicos y gráficos utilizados por los estudiantes.

Las respuestas literales de los estudiantes al expresar la cantidad de rectas que existen con las condiciones de la situación problemática han sido: "*existe 1 recta*", "*existen 2 rectas*", "*existen infinitas rectas*", o bien no han respondido. Y en sus representaciones gráficas presentan el dibujo de 1 única recta, de 2 rectas o de 3 a 6 rectas. En el siguiente diagrama se sintetizan tales respuestas indicando las correctas con recuadro sombreado de línea cortada.

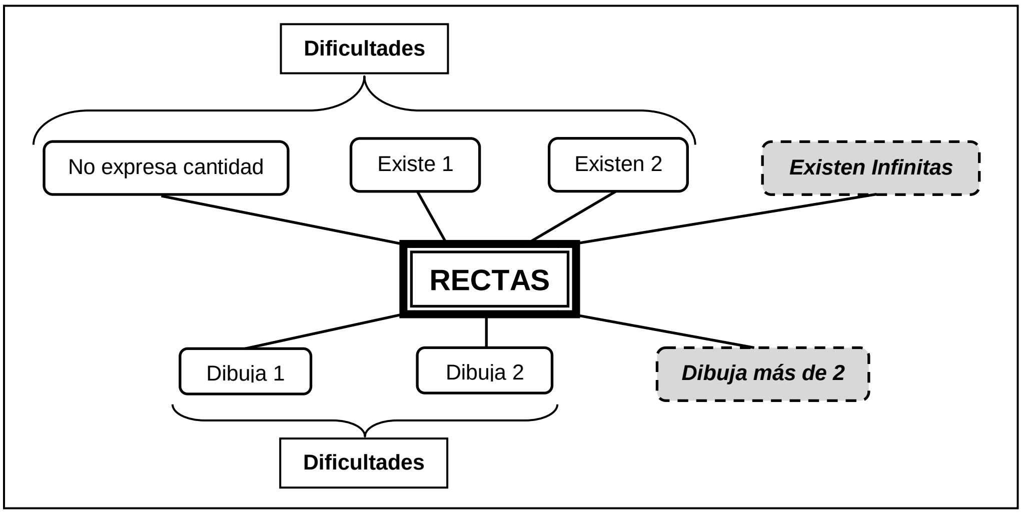


Diagrama 5. 1. Tipos de respuestas en la SPI

Como ya hemos explicado se considera correcto que el estudiante responda que existen infinitas rectas y sea capaz de dibujar más de dos rectas con las condiciones de la SPI en los tres Casos, que constituyen las variables de este estudio.

Teniendo en cuenta las respuestas literales y gráficas de cada estudiante en los tres Casos se detectaron diferentes combinaciones de las mismas, a partir de las cuales se definieron las modalidades excluyentes[4] de respuestas para cada variable.

[4] Se definieron modalidades mutuamente excluyentes con el objetivo de aplicar en la etapa final el programa estadístico SPAD que así lo requiere.

En la tabla 5.1 se muestran dichas modalidades y se indica el número de estudiantes y el porcentaje correspondiente.

DIMENSIÓN	VARIABLES	MODALIDADES	Nº EST	% EST
Geométrica SPI	*Caso 1*	***Dice 1 recta y dibuja 1***	2	2
		Dice 2 rectas y dibuja 2	7	8
		Dice infinitas rectas y dibuja 2	22	26
		Dice infinitas rectas y dibuja más de 2	22	26
		No expresa nº de rectas y dibuja 1	3	4
		No expresa nº de rectas y dibuja 2	18	21
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2	11	13
	Total		***85***	***100***
	Caso 2	***Dice 1 recta y dibuja 1***	6	7
		Dice 2 rectas y dibuja 2	5	6
		Dice infinitas rectas y dibuja 1	5	6
		Dice infinitas rectas y dibuja 2	8	9
		Dice infinitas rectas y dibuja más de 2	28	33
		No expresa nº de rectas y dibuja 1	5	6
		No expresa nº de rectas y dibuja 2	15	18
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2	13	15
	Total		***85***	***100***
	Caso 3	***Dice 1 recta y dibuja 1***	43	50
		Dice infinitas rectas y dibuja 1	5	6
		Dice infinitas rectas y dibuja 2	5	6
		Dice infinitas rectas y dibuja más de 2	7	8
		No expresa nº de rectas y dibuja 1	16	19
		No expresa nº de rectas y dibuja 2	5	6
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2	4	5
	Total		***85***	***100***

Tabla 5. 1. Análisis estadístico a partir del tipo de respuestas de la SPI

Es pertinente comentar que, del análisis del total de la muestra de 85 estudiantes, se encuentran 22 alumnos que corresponden a la modalidad “dice infinitas y dibuja más de 2” en el Caso 1, de los cuales 15 pertenecen a la modalidad “dice infinitas y dibuja más de 2” en el Caso 2 y de estos últimos 5 alumnos corresponden a la modalidad “dice infinitas y dibuja más de 2” en el Caso 3. Es decir, en total sólo 5 estudiantes de un total de 85 estudiantes resuelven toda la SPI de forma correcta y completa.

La información se reorganizó, como se muestra en la tabla 5.2, donde en la quinta columna se caracteriza cada una de las modalidades presentes en los tres Casos, según relaciones entre los registros coloquiales y gráficos.

<table>
<tr><th colspan="5">SITUACIÓN PROBLEMÁTICA I</th></tr>
<tr><th>Modalidades</th><th>Caso 1</th><th>Caso 2</th><th>Caso 3</th><th>Caracterización</th></tr>
<tr><td>I - Dice 1 recta y dibuja 1</td><td>2 %</td><td>7 %</td><td>50 %</td><td rowspan="2">Rta literal incorrecta. Coherente lo que dice con lo que dibuja.</td></tr>
<tr><td>II - Dice 2 rectas y dibuja 2</td><td>8 %</td><td>6 %</td><td>Ausente</td></tr>
<tr><td>III - Dice infinitas rectas y dibuja 1</td><td>Ausente</td><td>6 %</td><td>6 %</td><td rowspan="2">Rta literal correcta. Algunas dificultades para graficar.</td></tr>
<tr><td>IV - Dice infinitas rectas y dibuja 2</td><td>26 %</td><td>9 %</td><td>6 %</td></tr>
<tr><td>V - Dice infinitas rectas y dibuja + de 2</td><td>26 %</td><td>33 %</td><td>8 %</td><td>Rta literal y gráfica correcta.</td></tr>
<tr><td>VI - No expresa n° de rectas y dibuja 1</td><td>4 %</td><td>6 %</td><td>19 %</td><td rowspan="2">Rta literal ausente. Rta gráfica errónea.</td></tr>
<tr><td>VII - No expresa n° de rectas y dibuja 2</td><td>21 %</td><td>18 %</td><td>6 %</td></tr>
<tr><td>VIII - No expresa n° de rectas y dibuja + de 2</td><td>13 %</td><td>15 %</td><td>5 %</td><td>Rta literal ausente. Rta gráfica correcta.</td></tr>
</table>

Tabla 5. 2. Caracterización de las respuestas en la SPI y sus porcentajes

Como muestra esta tabla, se detectan dificultades para responder de forma completa y con coherencia entre los registros coloquial y gráfico, es decir entre las expresiones literales y las representaciones gráficas de los estudiantes.

Como se observa, la modalidad "*Dice 2 rectas y dibuja 2*" (modalidad II), no se manifiesta en ninguno de los protocolos en el Caso 3 (columna 4 - renglón 3).

Podemos observar que hay estudiantes que, si bien erróneamente creen que existe una cantidad finita de rectas, ya que expresan que sólo hay una o dos rectas con las condiciones del problema (modalidades I y II), son coherentes al dar su respuesta literal y realizar una representación gráfica que se corresponde con tal respuesta. Se destaca que en el Caso 3 (caso general) el 50 % de los estudiantes responde explícitamente que existe una única recta con las características requeridas. Si consideramos además a los estudiantes que no responden a la consigna, pero dibujan una recta (modalidad VI), el porcentaje de la creencia que la recta existente es única se eleva al 69 %.

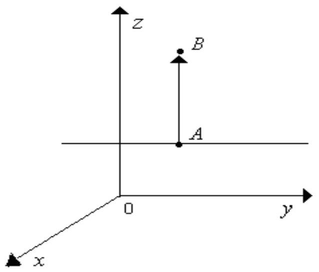
Ya hemos mencionado que el ítem (b) presupone que el estudiante debe dibujar al menos dos rectas más a la realizada en el ítem (a) para considerar una respuesta como correcta y completa. Entre los estudiantes que responden correctamente que existen infinitas rectas, algunos dibujan sólo una recta, otros dos y algunos más de dos (modalidades III, IV y V). La modalidad V, correspondiente a la respuesta correcta y completa, en el Caso 3 correspondiente a la situación general, sólo es asumida por el 8 %. Los estudiantes representados por las modalidades III y IV dan muestra de dificultades para graficar la situación.

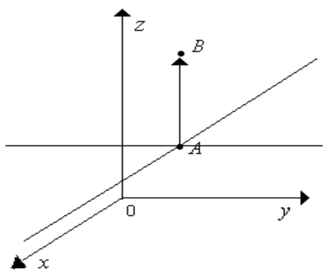
De los estudiantes que no expresan una respuesta literal, un grupo dibuja una o dos rectas, correspondiente a una respuesta incorrecta o incompleta. Otro grupo logra dibujar más de dos rectas, lo que representaría gráficamente una idea correcta de la situación, no obstante, esta modalidad corresponde a un porcentaje muy bajo de alumnos.

5.2.2 Fase 2. Análisis de las representaciones gráficas

Dado que es de interés indagar acerca de las dificultades de los estudiantes en su proceso de resolución, a continuación, se analizan los registros gráficos de quienes dibujaron “una o dos rectas". Como ya se ha señalado los restantes -que dibujaron más de dos rectas- corresponden a respuestas consideradas correctas.

En las representaciones gráficas de diferentes estudiantes, de los tres ejercicios de la SPI se han observado ciertas características comunes, que por ahora analizaremos independientemente de sus respuestas literales sobre la cantidad de rectas existentes. Estas similitudes se describen en los cuadros que se presentan a continuación, junto a un análisis que tiene en cuenta los porcentajes registrados en la tabla 5.1.

<table>
<tr><th colspan="3">EJERCICIO 1</th></tr>
<tr><th>5 estudiantes dibujan solo una recta</th><th colspan="2">47 estudiantes dibujan dos rectas</th></tr>
<tr><td>5 estudiantes dibujan 1 recta paralela al eje Y, y a la cual A pertenece.</td><td>41 estudiantes dibujan 1 recta paralela al eje X y una recta paralela el eje Y, que pasan por A.</td><td>6 estudiantes otro dibujo.</td></tr>
<tr><td>

Referencia: perpendicularidad en el plano.</td><td>

Referencia: los ejes x e y.</td><td>Dos rectas que pasan por A sin utilizar ninguna de las referencias descriptas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">46 estudiantes (54%) utilizan alguna referencia.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">52 estudiantes (61%) dibujan 1 o 2 rectas.</td></tr>
</table>

Cuadro 5. 1. Caracterización de los gráficos de los estudiantes que dibujan 1 o 2 rectas en el Ejercicio 1

El cuadro muestra que en el ejercicio 1, el 61 % de los estudiantes representa una o dos rectas. Se destaca que el 54 % de los alumnos refleja la necesidad de utilizar una referencia al graficar, lo que podría ser un condicionamiento a la hora de dar las respuestas literales. El 39 % restante dibuja más de dos rectas y utiliza alguna dirección diferente a la de los ejes coordenados.

Como un caso representativo se presenta la transcripción de un fragmento de una entrevista grabada a un estudiante. Se indica con T la intervención de la tesista y con A la del alumno.

T: *(…) Te acordás cuál fue la primera recta que dibujaste?*

A: *Sí, esa la o sea la que era más…horizontal la que se veía más horizontal.*

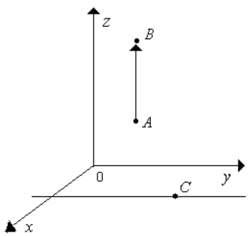
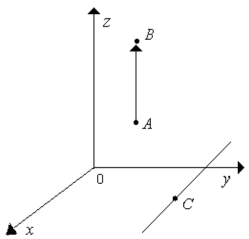
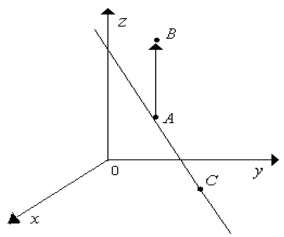
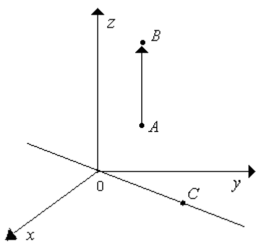
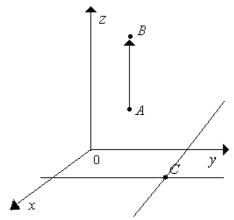
T: *¿Tuviste como guía alguna referencia?*

A: *Sí el eje Y lo tomé como guía entonces dibujé una paralela.*

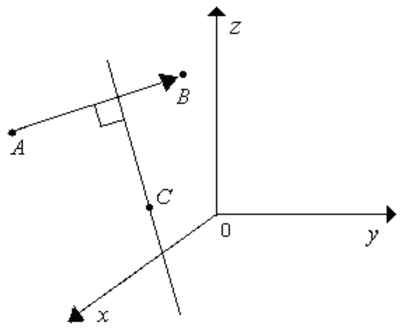
T: *¿Fue la primera que se te ocurrió dibujar?*

A: *Sí porque o sea vi, pensé que había un montón, infinitas, pero que esa era la que se veía más claro porque después las otras se veían como que no estaban perpendiculares al vector* $\overline{AB}$ *(…)*

En relación al ejercicio 2, como se muestra en el cuadro 5.2, se destaca que el 52 % de los alumnos grafica una o dos rectas, mientras que el resto (48%), dibuja más de dos rectas. Se distingue que 44 % de los estudiantes (37 alumnos) hace uso de alguna referencia al momento de realizar sus representaciones gráficas.

EJERCICIO 2						
16 estudiantes dibujan una recta					**28 estudiantes dibujan dos rectas**	
7 estudiantes dibujan 1 recta paralela al eje Y, que pasa por C.	2 estudiantes dibujan 1 recta paralela al eje X, que pasa por C.	3 estudiantes dibujan la recta que pasa por A y C.	2 estudiantes dibujan la recta que pasa por 0 y C.	2 estudiantes otro dibujo.	23 estudiantes dibujan una recta paralela al eje X, y una paralela al eje Y, que pasan por C.	5 estudiantes otro dibujo.
 ***Referencia: el eje y.***	 ***Referencia: el eje x.***	 ***Referencia: los puntos A y C.***	 ***Referencia: el origen de coordenadas y el punto C.***	***Una recta que pasa por C, sin utilizar ninguna de las referencias descriptas.***	 ***Referencia: los ejes x e y.***	***Dos rectas que pasan por C, sin utilizar ninguna de las referencias descriptas.***
14 estudiantes utilizan alguna referencia.					23 estudiantes utilizan alguna referencia.	
44 estudiantes (52 %) dibujan 1 o 2 rectas.						

Cuadro 5. 2. Caracterización de los gráficos de los estudiantes que dibujan 1 o 2 rectas en el Ejercicio 2

EJERCICIO 3		
64 estudiantes dibujan una recta		**10 estudiantes dibujan dos rectas**
56 estudiantes dibujan la recta que visualmente “parece” perpendicular.	8 estudiantes otro dibujo.	10 estudiantes otro dibujo.
 ***Referencia: perpendicularidad en el plano.***	***Una recta que pasa por C sin utilizar ninguna de las referencias descriptas.***	***Dos rectas que pasan por C sin utilizar ninguna de las referencias descriptas.***
56 estudiantes (66 %) utilizan alguna referencia.		
74 estudiantes (87%) dibujan 1 o 2 rectas.		

Cuadro 5. 3. Caracterización de los gráficos de los estudiantes que dibujan 1 o 2 rectas en el Ejercicio 3

En el ejercicio 3, el 87 % de los estudiantes dibuja 1 o 2 rectas, el restante 13 % (11 alumnos) dibujan más de dos rectas. Se destaca que el 66 % de los estudiantes dibuja la recta que se representaría sin lugar a dudas como perpendicular, si la situación fuera en el plano.

Por lo tanto, respecto a la caracterización de la actuación de los estudiantes que representaron una o dos rectas en cada uno de los ejercicios de la situación problemática podemos sintetizar:

- En el ejercicio 1, los estudiantes dan muestra, en un alto porcentaje, de la necesidad de utilizar alguna referencia a la hora de dibujar. Efectivamente, la dirección de la/s recta/s coincide en su mayoría con la de los ejes coordenados.
- En el ejercicio 2, los alumnos también dan cuenta de la necesidad de una referencia, pero en este caso aparecen dos respuestas nuevas en las cuales la

recta representada pasa por los puntos C y A (erróneamente), o por el origen de coordenadas y A. Es decir, el cambio en la ubicación del punto produjo en estos alumnos la búsqueda de nuevas referencias.

- En el ejercicio 3, aumentó considerablemente el número de estudiantes que dibujó una única recta. La situación presenta representaciones ligadas a la visión de perpendicularidad en el plano.

En resumen, un estudiante grafica una o dos rectas utilizando al menos uno de los siguientes criterios:

- recta paralela al eje x,
- recta paralela al eje y,
- recta que contiene dos puntos presentes en el enunciado,
- recta obtenida a partir de la idea de la perpendicularidad en el plano.

De este modo el alumno utiliza como referencia los ejes coordenados, puntos explicitados en el enunciado o la perpendicularidad de rectas en el plano.

Recordemos que en los tres ejercicios existen infinitas rectas con las condiciones requeridas. Las diferencias en las respuestas dadas en los tres ejercicios, ponen de manifiesto que los estudiantes tienen dificultades para reconocer la analogía entre los mismos.

En este punto es interesante enriquecer este análisis de los registros gráficos con las respuestas literales que los acompañan, profundizando así el análisis desarrollado en la fase 1. Efectivamente, se observa que entre quienes representaron dos rectas, una paralela al eje x y otra paralela al eje y, se distinguen dos grupos, uno que asegura que existen sólo esas dos rectas y otro grupo que sostiene que existen infinitas. Para los primeros estudiantes parecería que las rectas que dibujan son las más “fáciles de visualizar”, mientras que para los otros podría ocurrir que son las más “fáciles de dibujar”; pero es importante señalar que en cualquier caso recurren a algo conocido como referencia, en este caso a los ejes coordenados.

Se destaca que algunos estudiantes manifiestan explícitamente en su hoja de trabajo dificultades para dibujar las rectas. A continuación, se transcriben algunas frases representativas de tales situaciones.

En el ejercicio 1:

- Un estudiante que dibuja una recta paralela al eje *x*, otra paralela al eje *y* y otra más, dice: "*Sí, existen infinitas rectas que son perpendiculares a* $\overline{AB}$ *y pasan por A, no sé cómo graficar las rectas pero sé que en el espacio hay infinitas rectas que pasan por A y son perpendiculares a* $\overline{AB}$".

En el ejercicio 3:

- Un alumno que dibuja dos rectas, manifiesta: "*En este caso también existen infinitas rectas, que son aquellas contenidas en un cierto plano* π *que tiene a* $\overline{AB}$ *como vector normal, y que contiene a C también punto de paso de la recta. No me sale muy bien expresarlo en el dibujo cuando no uso coordenadas*".
- Otro alumno que dibuja una recta, comenta: "*Existen otras rectas pero son difíciles de graficar al no conocer el ángulo de* $\overline{AB}$ *con* $\bar{i}$".
- Un estudiante que dibuja más de dos rectas, expresa: "*Existen infinitas rectas perpendiculares al vector* $\overline{AB}$ *que pasan por C a diferencia que en este gráfico se dificulta verlo, debido a la posición del vector y el punto*".

Como se ha mencionado, de la muestra total de 85 estudiantes sólo 5 respondieron la SPI de forma correcta y completa. Se señala además que 11 alumnos expresan que existen infinitas rectas "en los tres ejercicios de la SPI", pero dibujan sólo una o dos rectas en al menos uno de los ejercicios, presentando en su mayoría dificultades en el ejercicio 3. Es decir, estos estudiantes exhiben respuestas literales correctas, pero presentan limitaciones en el registro gráfico.

5.2.3 Fase 3. Análisis de las respuestas literales

En primer lugar, se presenta el análisis de las respuestas literales de los estudiantes que, respondiendo correctamente a las consignas, presentaron además caracterizaciones de sus representaciones. Las mismas pueden considerarse relevantes, ya que se contraponen a la ausencia de respuestas o a las dificultades detectadas en las explicaciones del resto de los estudiantes. En segundo término, se analizaron las argumentaciones incorrectas acontecidas frente a la consigna: *"En caso negativo explica por qué no existen otras"*, que como hemos mencionado fue enunciada intencionalmente con el propósito de obtener herramientas de análisis para detectar las dificultades en este punto.

- Análisis de argumentaciones correctas

En relación a las respuestas literales es importante destacar que, un subgrupo de los estudiantes que respondieron correctamente que existen infinitas rectas con las condiciones del problema, caracteriza la situación expresando que las rectas se encuentran contenidas en un plano, dando referencias del mismo y mencionando la relevancia de estar trabajando con vectores libres, como se describe a continuación.

En el Ejercicio 1, 16 estudiantes especificaron que las infinitas rectas se encuentran perpendiculares al eje z, y contenidas en un plano paralelo al plano OXY que contiene al punto A, siendo $\overline{AB}$ un vector normal al mismo.

En el Ejercicio 2, 21 estudiantes respondieron que las infinitas rectas pasan por el punto C y se encuentran contenidas en el plano OXY. Es interesante destacar que en este grupo, cuatro estudiantes hacen referencia al concepto de vector libre:

- Sí, existen infinitas rectas. Se puede lograr debido a que puedo ubicar al vector $\overline{AB}$ en cualquier origen, por ser libre. Todas las rectas están contenidas sobre el plano XY.

- Hay infinitas rectas, porque son vectores libres y podés moverlo donde quieras, ej el plano XY y trazar infinitas perpendiculares pasando por C.

- Sí, hay infinitas porque se puede mover el vector ya que es libre.

- Sí, infinitas, todas las rectas del plano XY que contienen a C, porque los vectores son libres y los puedo mover a cualquier origen.

En el ejercicio 3, 8 estudiantes respondieron que las infinitas rectas que contienen al punto C se encuentran contenidas en un plano perpendicular al vector $\overline{AB}$. En este caso se señala que tres estudiantes hacen mención del concepto de vector libre.

- *Sí, existen infinitas rectas. Al poder ubicar el vector en cualquier punto elijo ubicarlo sobre C y por lo tanto tengo infinitas rectas que contienen a C y son perpendiculares a $\overline{AB}$.*

- *Si, infinitas. Porque el vector es libre y si lo muevo puedo generar otras rectas*.

- *Si, como el vector es un vector libre puedo moverlo y hacer coincidir A con C, esto genera un caso análogo al 1a).*

- Análisis de argumentaciones incorrectas

En cuanto a las justificaciones de quienes respondieron erróneamente que existe una única recta, se ha encontrado la repetición de argumentos, que ponen de manifiesto un sesgo de confirmación. Algunas frases representativas se transcriben a continuación:

En el Ejercicio 1:

- *"No existen otras rectas, porque las demás que contienen al punto A no son perpendiculares al vector $\overline{AB}$ ".*

En el Ejercicio 2:

- *"No existen otras rectas que cumplan ambas condiciones".*
- *"No existen otras rectas ya que sólo hay una recta que pasa por C y es perpendicular a $\overline{AB}$ ".*

En el Ejercicio 3 (caso genérico), recordemos que 16 estudiantes no expresan el número de rectas existente, pero dibujan una única recta, sin hacer ninguna otra consideración. De los 43 estudiantes que expresan literalmente que la recta es única, 9 no realizan ninguna aclaración y 34 intentan justificar su respuesta. De este último grupo, nueve estudiantes alegan que la recta es única porque "*el vector $\overline{AB}$ y el punto C están en el mismo plano*". Otros dos alumnos expresan que *"rectas perpendiculares al vector $\overline{AB}$ hay infinitas, pero que además contengan al punto C sólo hay una"*. Tres estudiantes hacen alguna mención sobre la dificultad en la falta de referencia, mientras que otros dos presentan justificaciones confusas. Finalmente, los 18 estudiantes restantes justifican que la recta es única reproduciendo las condiciones del enunciado. En estos casos, la única diferencia es que algunos de ellos ponen como primera condición que "la" recta debe pasar por el punto C y como segunda condición que debe ser perpendicular al vector $\overline{AB}$, (*"porque sólo hay una recta que contenga al punto C y que además sea perpendicular al vector $\overline{AB}$*); mientras que otros invierten tales condiciones (*"porque sólo hay una recta que es perpendicular al vector $\overline{AB}$ y que además contenga al punto C").*

Es posible que la dificultad sea transitar del plano al espacio, ya que, si la situación se considera en el plano, hay infinitas rectas perpendiculares a un vector dado, pero sólo una pasa por el punto C, como se representa en la figura 5.1.

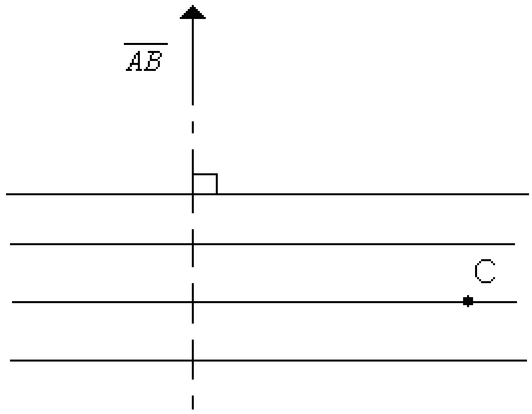


Figura 5. 1

5.2.4 Fase 4. Análisis global cuantitativo

Se retoman aquí las variables Caso 1, Caso 2 y Caso 3 definidas en la fase 1, reagrupando las modalidades, con la finalidad de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos al aplicar el programa estadístico de Análisis de Variables Múltiples SPAD. Esta reducción de modalidades se hizo a partir de los resultados formalizados en la Tabla 5.2 y del análisis posterior de las producciones de los estudiantes, por acuerdo mediante triangulación de investigadores. Las mismas se detallan en el Diagrama 5.2.

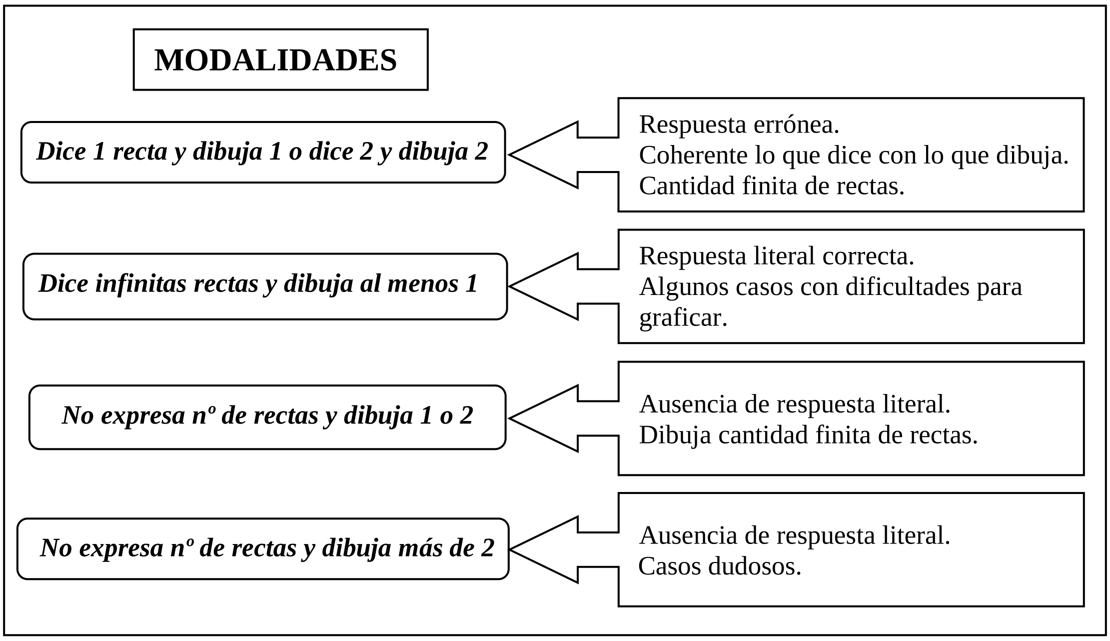


Diagrama 5. 2. Modalidades de las variables de la SPI

Dado que en la fase 2 se han estudiado las dificultades específicamente en los registros gráficos utilizados por los estudiantes, en esta etapa de análisis se agrupan en una modalidad a los alumnos que han expresado que existen *infinitas rectas*, independientemente de sus representaciones gráficas -dibujo de una, dos o más rectas-. Es decir, se ha establecido la modalidad "*Dice infinitas rectas y dibuja al menos 1",* reagrupando las modalidades *"dice infinitas y dibuja 1", "dice infinitas y dibuja 2"* y *"dice infinitas y dibuja más de 2"*. Esto optimiza la utilización del programa SPAD, al introducir un número menor de modalidades.

En la tabla 5.3 se muestran las nuevas modalidades y se indica el número de estudiantes y el porcentaje correspondiente.

DIMENSIÓN	VARIABLES	MODALIDADES	Nº EST.	% EST.
Geométrica SPI	***Caso 1***	***Dice 1 recta y dibuja 1 o dice 2 y dibuja 2***	9	10
		Dice infinitas rectas y dibuja al menos 1	44	52
		No expresa nº de rectas y dibuja 1 o 2	21	25
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2	11	13
	Total		***85***	***100***

	Caso 2	***Dice 1 recta y dibuja 1 o dice 2 y dibuja 2***	11	13
		Dice infinitas rectas y dibuja al menos 1	41	48
		No expresa nº de rectas y dibuja 1 o 2	20	24
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2	13	15
	Total		***85***	***100***
	Caso 3	***Dice 1 recta y dibuja 1***	43	50
		Dice infinitas rectas y dibuja al menos 1	17	20
		No expresa nº de rectas y dibuja 1 o 2	21	25
		No expresa nº de rectas y dibuja más de 2	4	5
	Total		***85***	***100***

Tabla 5. 3. Análisis estadístico de la SPI a partir de la reagrupación de modalidades

La información se organizó en una matriz de datos donde las filas representan a los individuos y las columnas a las modalidades de las variables. De este modo, cada individuo quedó caracterizado por las modalidades asumidas para cada una de las variables, siendo estas modalidades mutuamente excluyentes.

Análisis multidimensional de datos

Con el objetivo de determinar grupos de alumnos que siguen patrones semejantes de resolución, se realizó un análisis multidimensional de datos. Para ello se aplicó un método de clasificación mixta en coordenadas factoriales mediante la aplicación del software SPAD. Este programa permite además graficar la proyección del conjunto de individuos analizados en el plano correspondiente a los dos primeros ejes factoriales (ejes de máxima inercia), agrupados espacialmente en las clases. La gráfica obtenida de este modo se presenta en el Diagrama 5.3, en cuyo recuadro inferior se indica el número de individuos pertenecientes a cada clase, correspondiendo el 28%, 44%, 15% y 13% a las clases 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Los integrantes de cada grupo se identifican con el número correspondiente a la clase. El símbolo (♦) representa el valor medio de la clase y los trazos que parten del mismo indican a los sujetos (o parangones) que más se aproximan a dicho valor medio y que pueden ser considerados como mejores representantes de la clase.

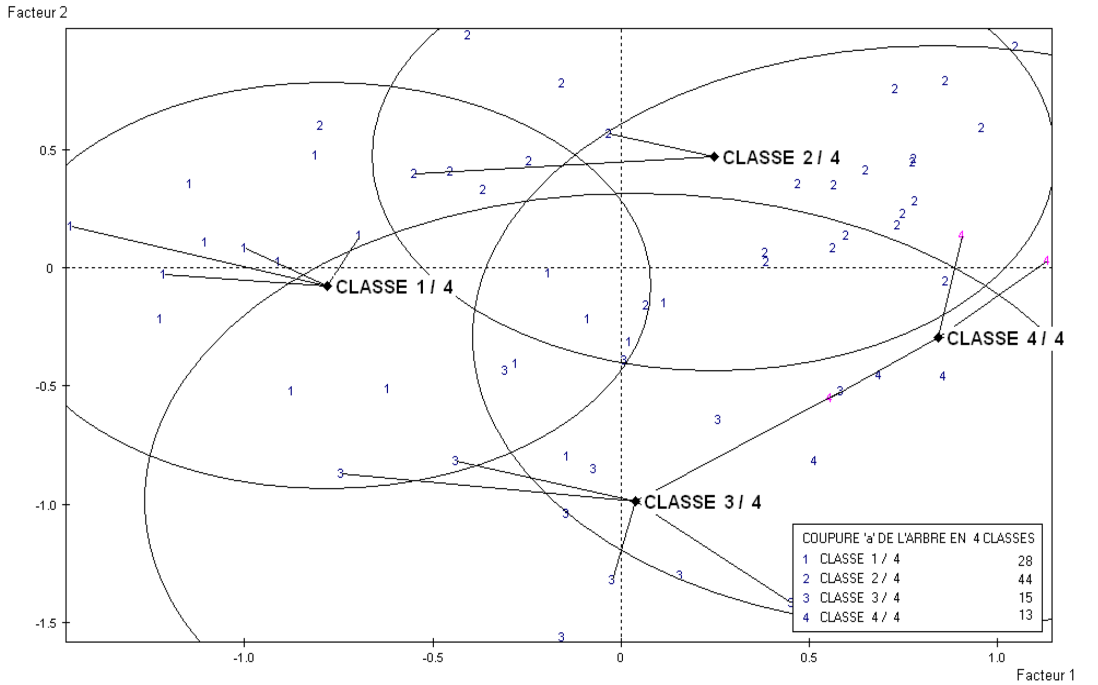


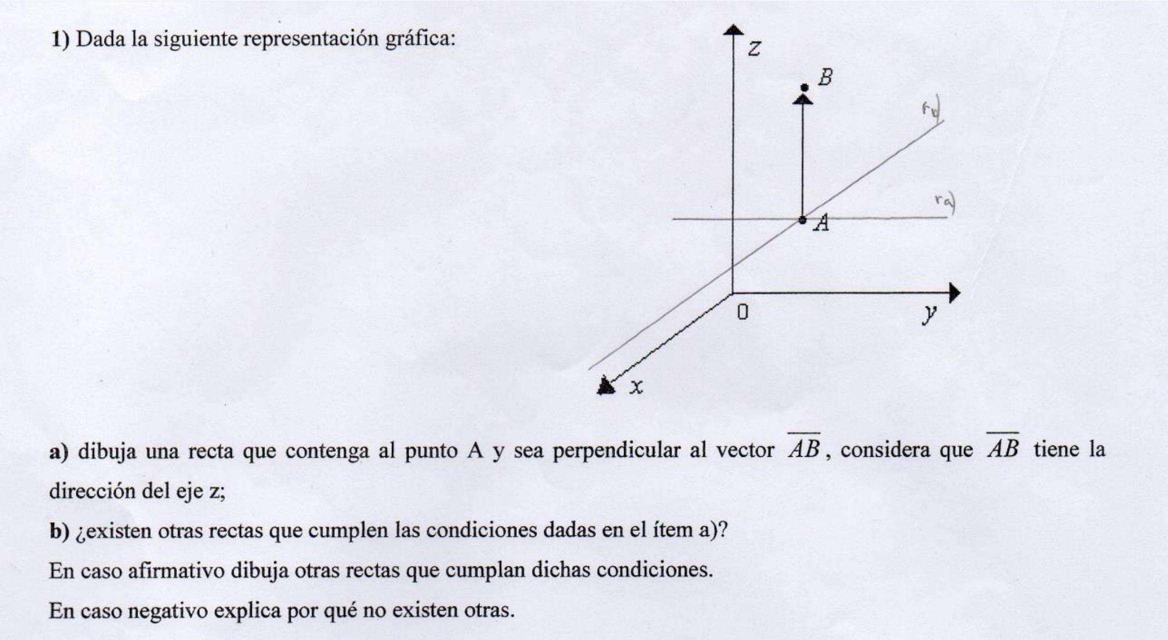
Diagrama 5. 3. Clasificación de individuos por afinidades en la resolución de la SPI

Es importante señalar que los números que aparecen en cada clase pueden corresponder a un sujeto o a varios individuos cuyas proyecciones en el plano factorial se superpongan.

Dado que el programa SPAD permite identificar a los individuos pertenecientes a cada una de las clases, se realizó complementariamente un análisis más exhaustivo de las particularidades en las respuestas de sus integrantes. A continuación, se presenta la caracterización de las clases obtenidas, incluyendo la resolución correspondiente a un parangón, identificado por el mencionado programa, de cada uno de los grupos.

Clase 1: (28 % de la muestra) A través de la información del programa SPAD se describe que este grupo está conformado por 24 estudiantes que presentan como características principales la ausencia de respuesta sobre el número de rectas que existen con las condiciones de la SPI y que representan gráficamente una o dos rectas en los Casos 1, 2 y 3.

De un estudio particular de esta clase, habiendo identificado a través del SPAD a los estudiantes implicados, se destaca que 10 alumnos pertenecen a la modalidad “dice 1 recta y dibuja 1” en el Caso 3. En la siguiente figura se presenta la resolución de uno de estos 10 alumnos de esta clase.



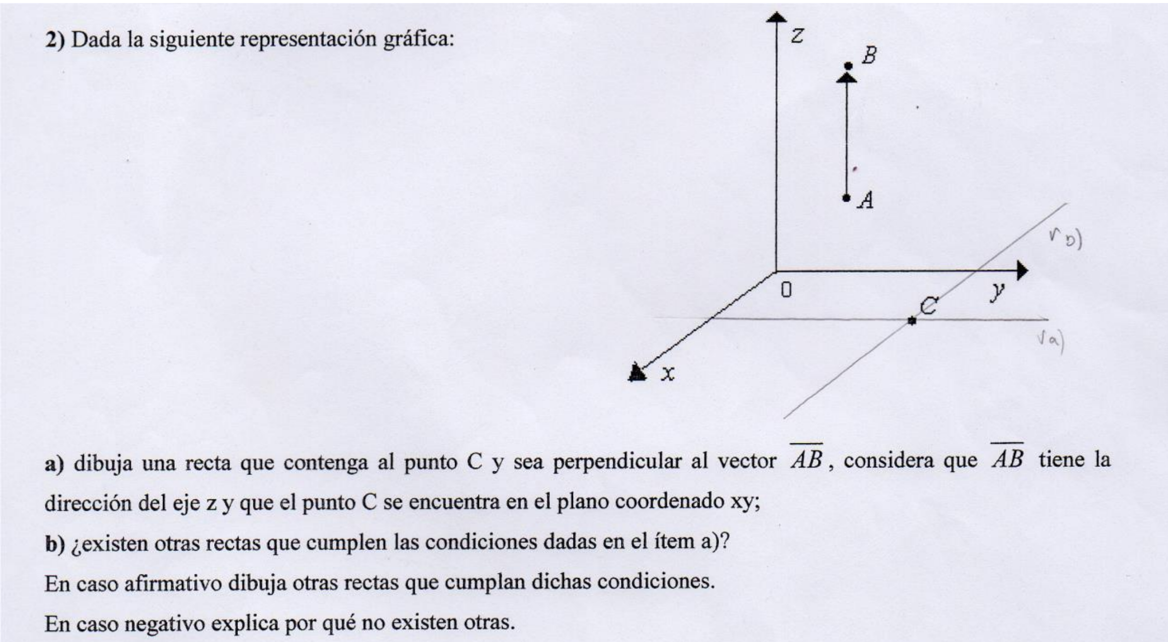
1) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto A y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras.



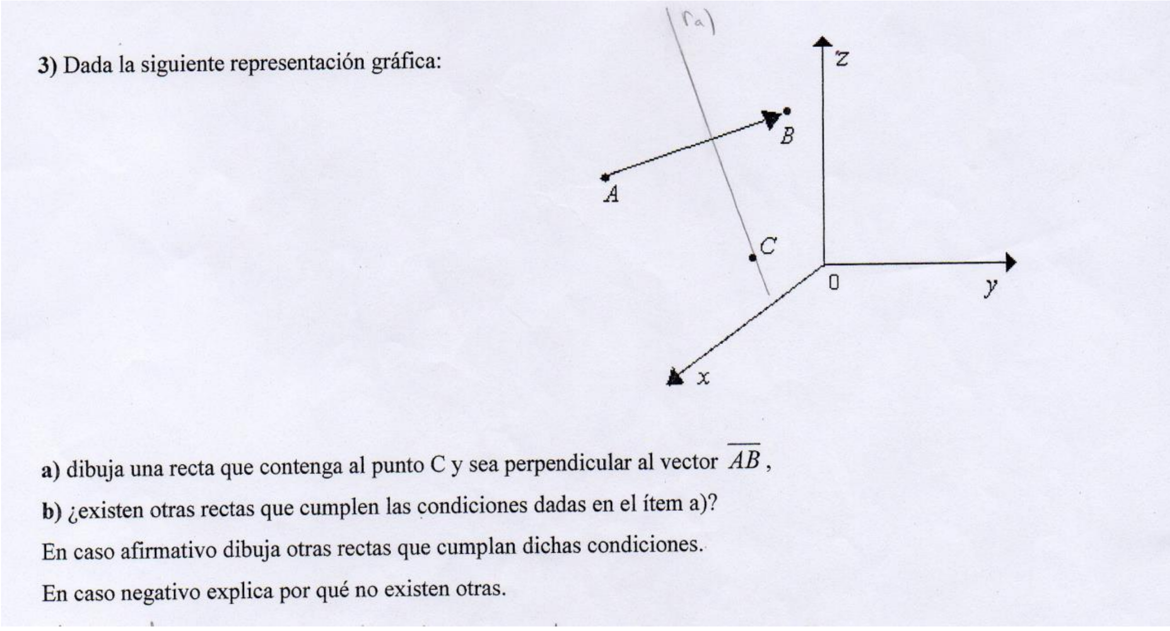
2) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z y que el punto C se encuentra en el plano coordenado xy;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras.



3) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$,

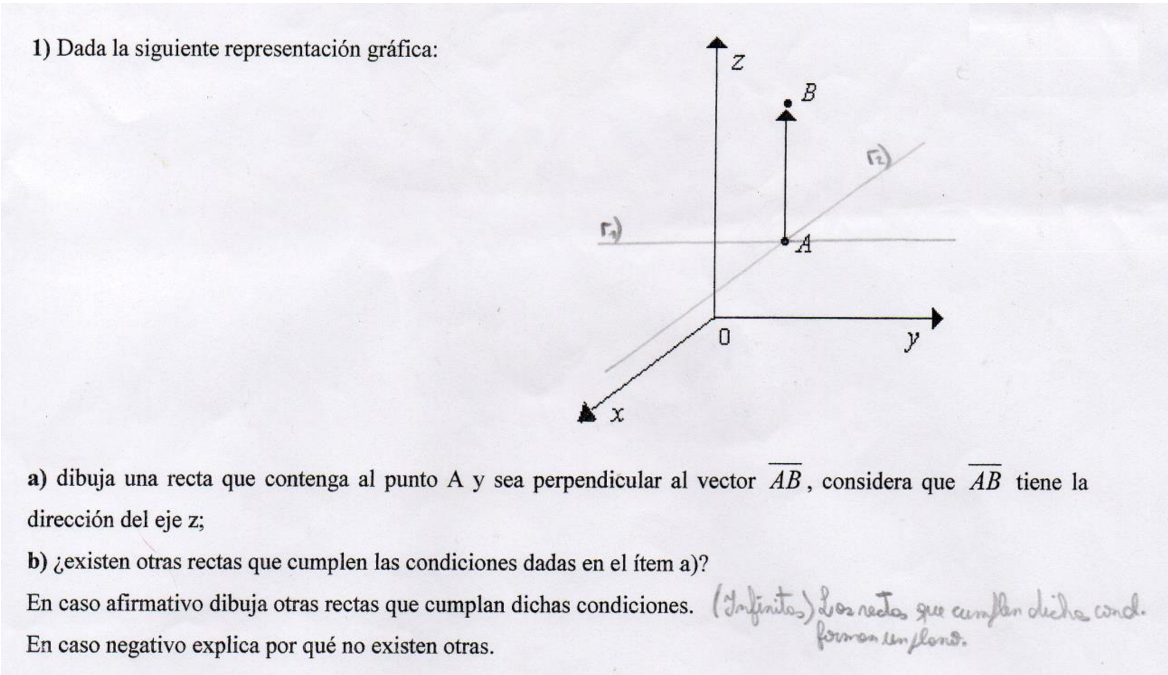
b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras.

Clase 2: (44 % de los estudiantes) Corresponde a 37 estudiantes cuyas semejanzas en los tres Casos se encuentran ligadas a que expresan que existen infinitas rectas con las condiciones requeridas y dibujan “al menos” una recta.

Del estudio particular de este grupo se observa que 17 alumnos pertenecen a la modalidad “dice 1 recta y dibuja 1” en el Caso 3. A continuación se reproduce la resolución de uno de estos estudiantes.



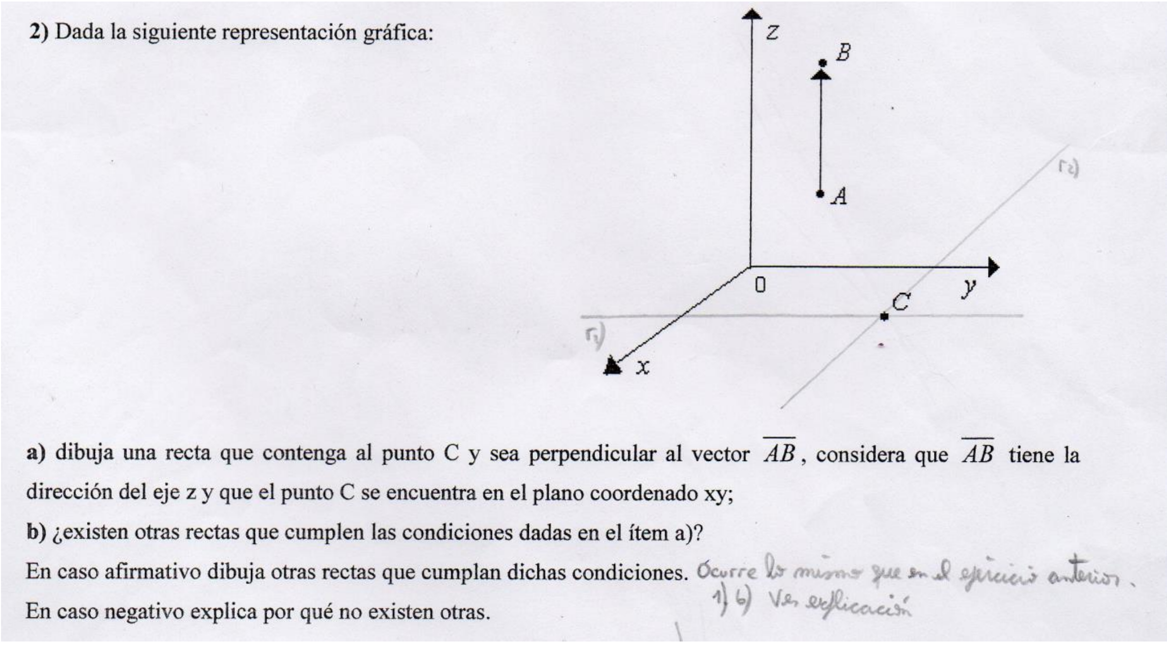
1) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto A y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. (Infinitas) Las rectas que cumplen dicha cond. forman un plano.

En caso negativo explica por qué no existen otras.



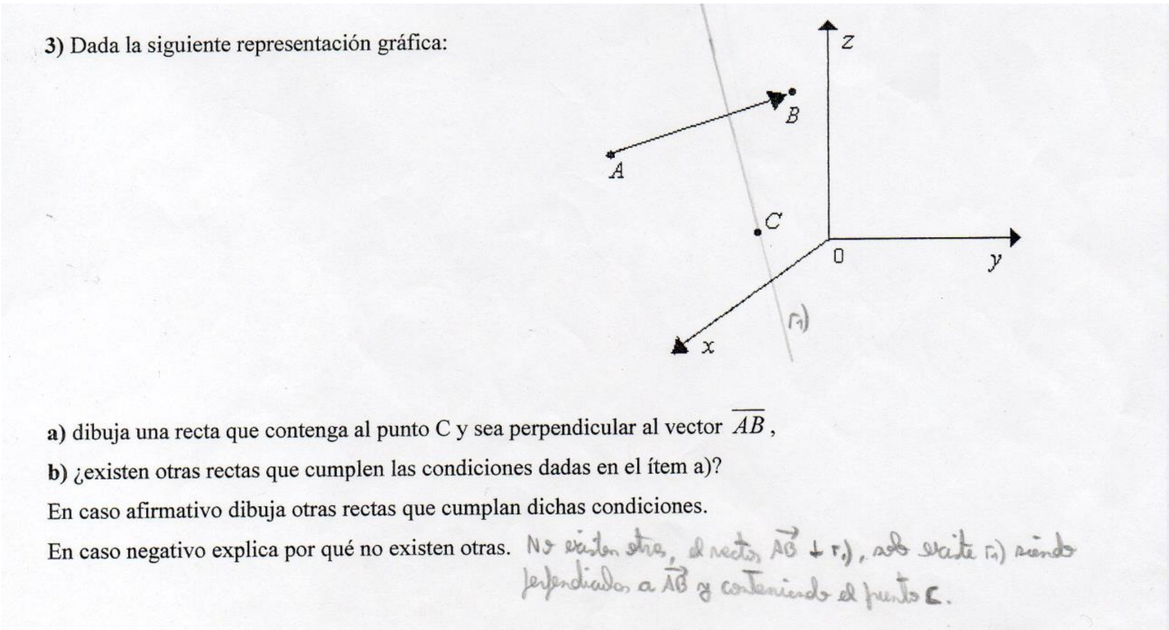
2) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z y que el punto C se encuentra en el plano coordenado xy;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior. 1) b) Ver explicación

En caso negativo explica por qué no existen otras.



3) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$,

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)?

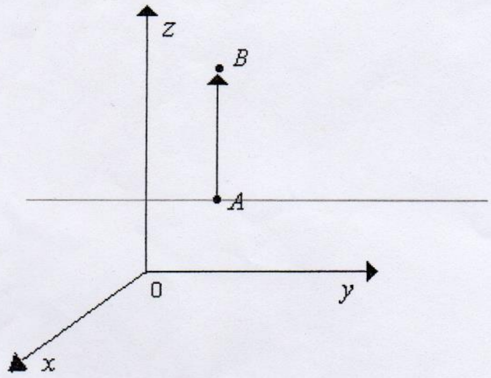
En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras. No existen otras, el vector $\vec{AB} \perp r_1)$, solo existe $r_1)$ siendo perpendicular a $\vec{AB}$ y conteniendo el punto C.

Clase 3: (15 % de la muestra) Caracterizada por 13 estudiantes determinados por las modalidades de las variables de mayor valor test que en los Casos 1 y 2 refieren que existen 1 o 2 rectas con las referencias del enunciado y dibujan 1 o 2 rectas, y en el Caso 3 aseguran que existe sólo una recta y la dibujan.

Se subraya que 12 de estos estudiantes corresponden a la modalidad “dice 1 recta y dibuja 1” en el Caso 3. En la figura siguiente se presenta la resolución de un alumno de este subgrupo.

1) Dada la siguiente representación gráfica:

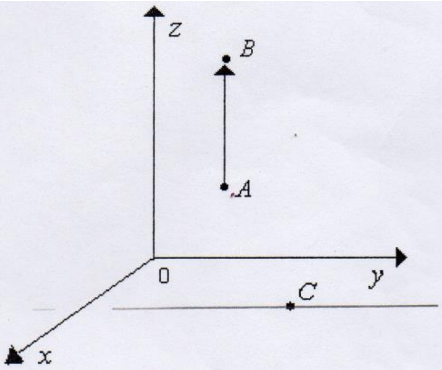


a) dibuja una recta que contenga al punto A y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. En caso negativo explica por qué no existen otras.

no existen otras rectas, porque las demás que contienen al punto A, no son $\perp$ al vector $\overline{AB}$.

2) Dada la siguiente representación gráfica:

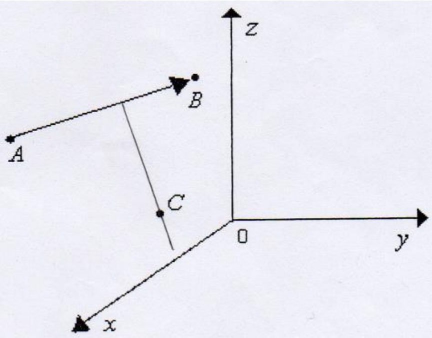


a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z y que el punto C se encuentra en el plano coordenado xy;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. En caso negativo explica por qué no existen otras.

al igual que en el ej. 1, no existen otras rectas que cumplan ambas condiciones.

3) Dada la siguiente representación gráfica:



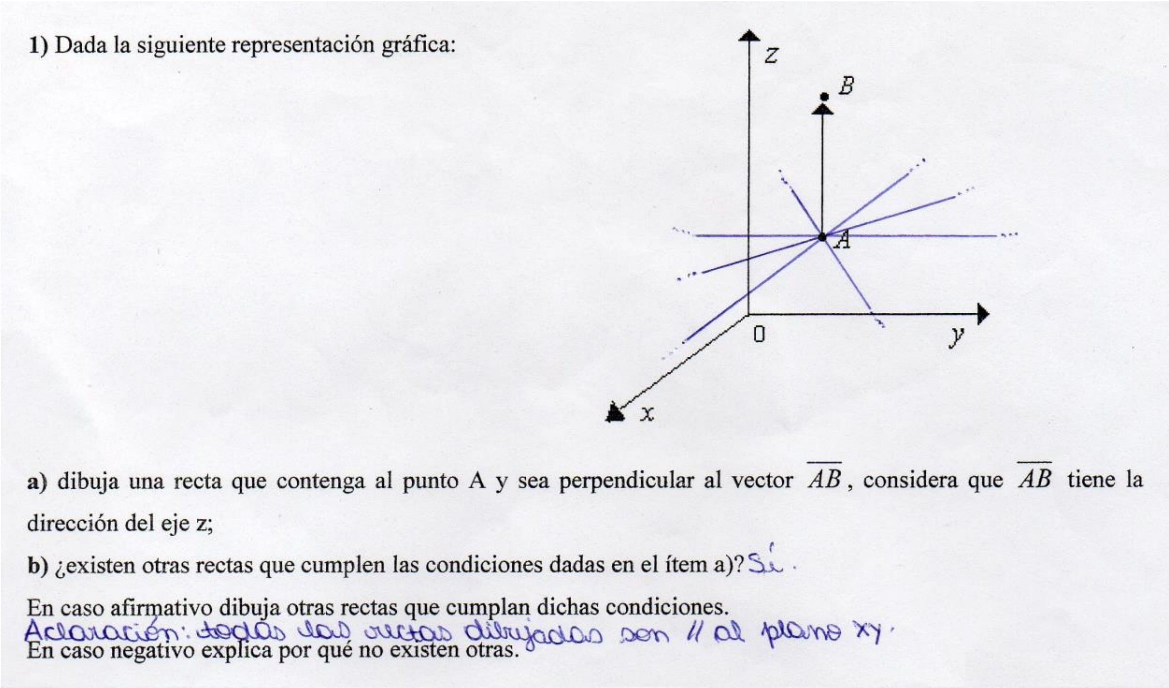
a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$,

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones. En caso negativo explica por qué no existen otras.

no creo que existan más rectas que cumplan esas condiciones porque las demás que contienen al punto C, no son $\perp$ al vector $\overline{AB}$.

Clase 4: (13% de la muestra) Corresponde a 11 estudiantes que realizan representaciones gráficas de forma correcta en los tres Casos, ya que dibujan más de dos rectas, pero sin embargo no responden sobre el número de rectas que cumplen las características especificadas.

En el estudio exhaustivo de este grupo se registra que 4 alumnos se encuentran incluidos en la modalidad "dice 1 recta y dibuja 1" en el Caso 3. A continuación, se muestra la resolución de uno de estos 4 alumnos.



1) Dada la siguiente representación gráfica:

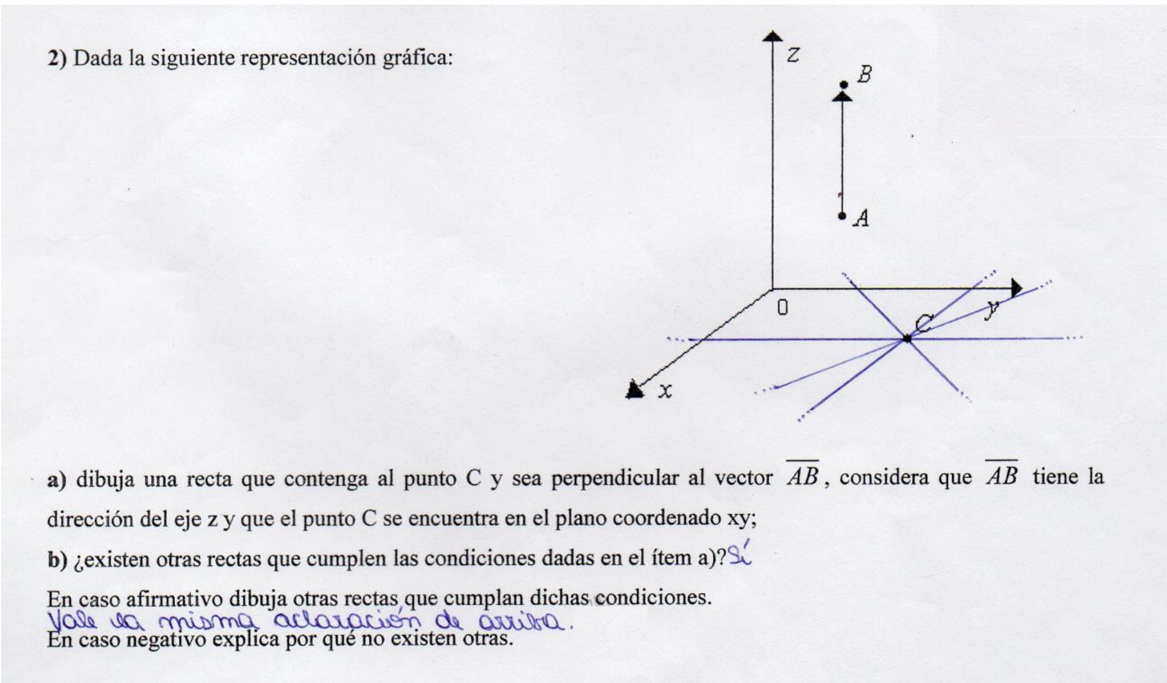
a) dibuja una recta que contenga al punto A y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? Sí.

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

Aclaración: todas las rectas dibujadas son // al plano xy.

En caso negativo explica por qué no existen otras.



2) Dada la siguiente representación gráfica:

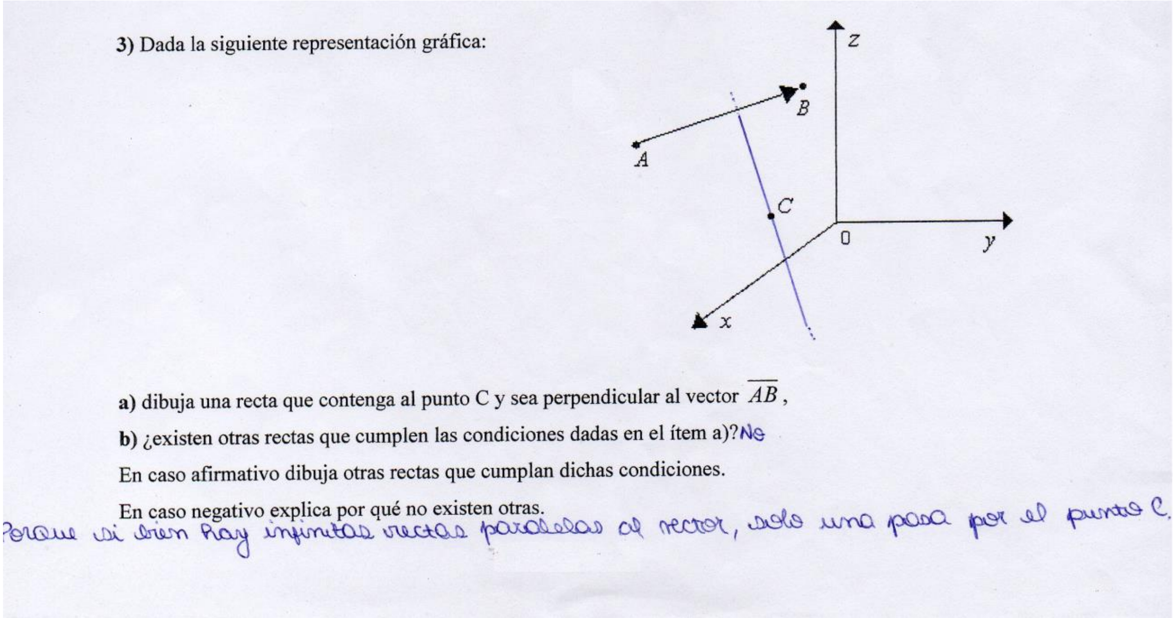
a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$, considera que $\overline{AB}$ tiene la dirección del eje z y que el punto C se encuentra en el plano coordenado xy;

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? Sí

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

Vale la misma aclaración de arriba.

En caso negativo explica por qué no existen otras.



3) Dada la siguiente representación gráfica:

a) dibuja una recta que contenga al punto C y sea perpendicular al vector $\overline{AB}$,

b) ¿existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? No

En caso afirmativo dibuja otras rectas que cumplan dichas condiciones.

En caso negativo explica por qué no existen otras.

Porque si bien hay infinitas rectas paralelas al vector, solo una pasa por el punto C.

Este último estudiante en su entrevista aclara que cuando dice rectas "paralelas" lo hace por distracción, quiso expresar rectas "perpendiculares".

Como se ha mostrado, del análisis específico de las repuestas de los integrantes de cada clase, se detectan dificultades comunes en relación al Caso 3, ya que en los cuatro grupos resultantes se observa un subgrupo de estudiantes que expresa literalmente que existe una única recta y la dibuja. Estas clases disjuntas, contienen cada una, un grupo diferente de estudiantes que tienen una característica común: la presencia de la misma respuesta errónea en el Caso 3. Como se ha mencionado, el programa estadístico SPAD divide la muestra de los 85 estudiantes en clases disjuntas, lo más diferenciadas posibles, cada una conformada con alumnos con características similares en sus respuestas. Como existe un alto porcentaje de estudiantes que en el Caso 3 responde acorde a la modalidad "dice 1 recta y dibuja 1", la conformación de clases se ve fuertemente condicionada por este hecho. Esta situación se representa en el diagrama siguiente.

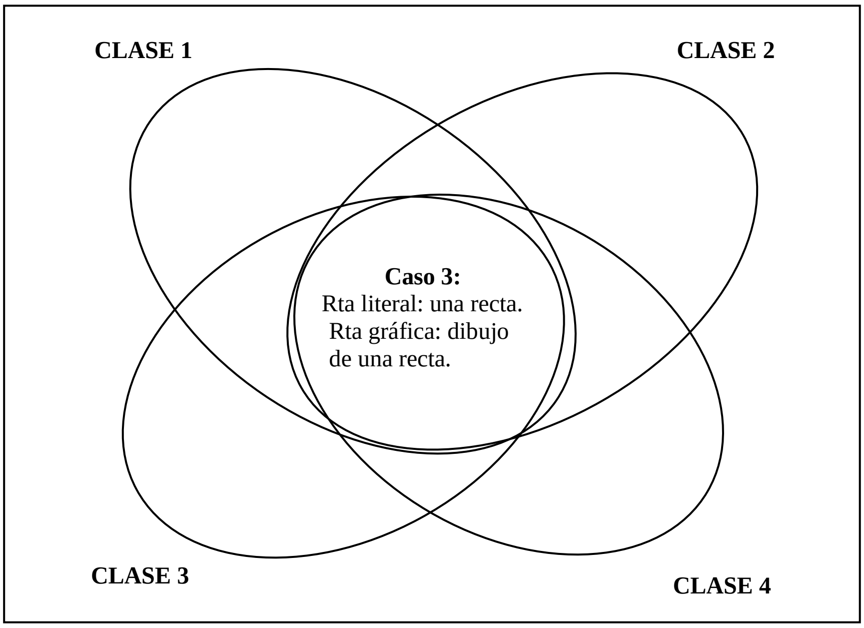


Diagrama 5. 4. Característica común en estudiantes pertenecientes a las diferentes clases

Finalmente, se destaca que si bien la clase 2 representa a los estudiantes que tuvieron mejor desempeño en la resolución de la SPI, 17 de ellos responden en el Caso 3 (caso genérico): “dice 1 recta y dibuja 1”, 3 alumnos “no responden y dibujan 1” y sólo 7 estudiantes “dicen infinitas rectas y dibujan más de 2”, el resto (10 alumnos) dice infinitas rectas pero dibuja 1 o 2 rectas.

5.3 Conclusiones de la SPI

En principio se evidencian problemas para responder todos los interrogantes de forma ordenada y completa. Como se ha mencionado, los estudiantes estaban cursando el primer cuatrimestre de primer año de carreras de Ingeniería, es decir transitaban un período de adaptación a una cultura universitaria diferente a la cultura de la escuela media, como describe Carlino (2011).

Por otro lado, recordemos que se considera correcto que el estudiante responda que existen infinitas rectas y sea capaz de dibujar más de dos rectas en los tres Casos de la SPI, y que sólo 5 estudiantes de un total de 85 resolvieron la actividad de forma correcta y completa.

Se observa una dificultad relevante para relacionar los ejercicios 1, 2 y 3. Los cambios en las respuestas de un ejercicio a otro, en un mismo alumno, muestran esta desconexión, no se hallan indicios de búsqueda de similitudes y diferencias. Es decir, la variante intencional de los tres ejercicios, ir de lo particular a lo general, en situaciones estructuralmente análogas, no fue percibida por muchos estudiantes. Los tres ejercicios de la SPI plantean la misma situación de fondo, la variación de las representaciones semióticas en los mismos no afecta el hecho de que el conjunto solución está conformado por infinitas rectas, sólo caracterizan a las mismas. Pero se observa que la representación de la situación y los conocimientos previos de los alumnos, específicamente en el plano, fueron de gran influencia a la hora de la resolución. Estas particularidades se contraponen al aprendizaje significativo, ya que el mismo se caracteriza por la interacción entre conocimientos previos y conocimientos nuevos, y esa interacción no es arbitraria. En ese proceso, los nuevos conocimientos adquieren significado para el alumno y los conocimientos previos adquieren nuevos significados o mayor estabilidad cognitiva (Moreira, 2012).

Se han observado dificultades en las diferentes etapas de resolución identificadas por D'Agostini et al. (2011). Por ejemplo, en la *Lectura e interpretación,* ya que la comprensión del enunciado de la situación problemática requería necesariamente de una tarea de conversión, ligada a la habilidad de discriminar los datos y a la designación de los objetos involucrados. Algunos estudiantes no pudieron realizar esta actividad de conversión y transformar así la información presentada en una forma que les permitiera responder a las consignas. Por otro lado, las argumentaciones en las diferentes respuestas literales han puesto de manifiesto la falta de reflexión de los alumnos, evidenciando dificultades en la etapa de *Validación del plan*.

Desde la teoría de Duval (1998) en esta situación *el objeto* a representar por los estudiantes fue una o más rectas, *el contenido* de la representación: un punto y un vector y *la forma* de la representación, una gráfica. Este marco teórico señala que el modo de interpretar un gráfico depende de los conceptos particulares implicados en lo que se está representando. En este contexto quienes han respondido que existe una única recta, en su mayoría han mostrado a través de su representación gráfica una visión ligada a la perpendicularidad en el plano, como se grafica en la figura 5.2.

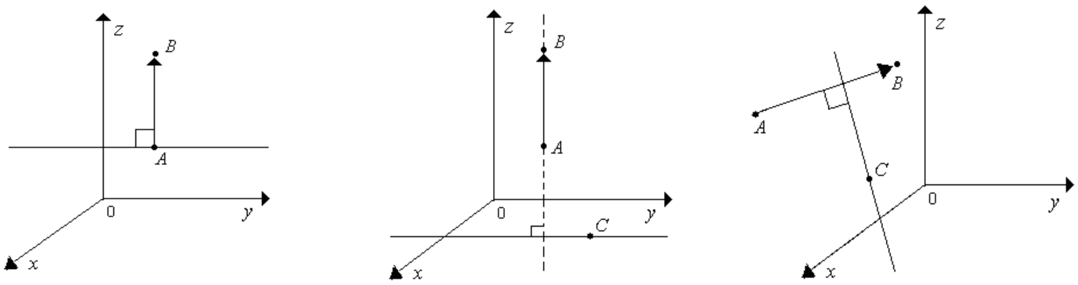


Figura 5. 2

Efectivamente, como puede observarse, las rectas dibujadas son "visualmente fáciles de ver" como perpendiculares al vector $\overline{AB}$.

En otros casos se observa "la necesidad de referencia", evidenciándose a través de los dibujos una visión ligada a las direcciones de los ejes cartesianos, como se representa a continuación.

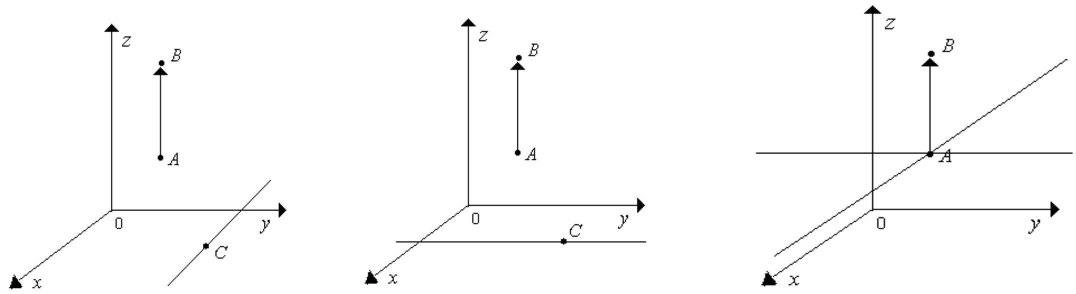


Figura 5. 3

El ejercicio 3 que representa una situación genérica, ha tenido el mayor porcentaje de respuestas erróneas, mostrando justificaciones literales y gráficas en relación a la perpendicularidad en el plano. La densidad de este error se pone en evidencia además en la caracterización de las clases obtenidas por el programa SPAD. El mismo busca agrupar individuos diferenciados y la modalidad *"dice 1 y dibuja 1 recta"* para el Caso 3 al emerger en la mayoría de las resoluciones, aflora como un obstáculo característico en todas las clases.

Sintetizando, las formas dadas de las representaciones en los ejercicios 1 y 2 parecen generar menores dificultades a diferencia de lo que ocurre en el ejercicio 3. Puede interpretarse que cuando la situación es más compleja el estudiante reduce "su visualización" al plano dando cuenta de la presencia de un sesgo facilitador.

En este sentido, se realizó una entrevista a una estudiante que respondió correctamente en los ejercicios 1 y 2, pero en el 3 su respuesta fue que existe una única recta. Una vez que la estudiante releyó su resolución, reflexionamos conjuntamente para que lograra visualizar su error. Recurrí a realizar una representación de la situación utilizando objetos escolares, con la cual responde correctamente, verbalizando: "l*o que pasa que es difícil porque vos lo ves en el papel y no te das cuenta del espacio muy bien. Con algo así como vos hiciste con la birome es mucho más fácil darte cuenta, si te dan así en papel no te das cuenta".*

Aquí se pone de manifiesto que, si bien un conocimiento previo, en este caso la geometría plana, puede favorecer el aprendizaje, a veces puede funcionar en un sentido totalmente opuesto, como un obstáculo.

Como se ha mostrado (Diagrama 4.2) la SPI involucra representaciones en registros gráfico, coloquial y simbólico. Las representaciones semióticas utilizadas por los estudiantes fueron el dibujo, las respuestas literales, argumentaciones, justificaciones y los nombres de los objetos (vector, punto, ejes, etc.). El registro simbólico por su parte, aparece vinculado a los registros gráfico y coloquial. Por otra parte, recordemos las modalidades a considerar para el estudio de las resoluciones de la SPI en la tabla 5.4.

	MODALIDADES
M1	***Dice 1 recta y dibuja 1***
M2	***Dice 2 rectas y dibuja 2***
M3	***Dice infinitas rectas y dibuja 1***
M4	***Dice infinitas rectas y dibuja 2***
M5	***Dice infinitas rectas y dibuja más de 2***
M6	***No expresa nº de rectas y dibuja 1***
M7	***No expresa nº de rectas y dibuja 2***
M8	***No expresa nº de rectas y dibuja más de 2***

Tabla 5. 4. Síntesis de las modalidades de la SPI

En cuanto a las resoluciones de los alumnos que corresponden a la modalidad M8, si bien en un principio se consideraron como casos dudosos, ya que no responden literalmente a la consigna del ejercicio, se ha determinado mediante la revisión de los protocolos y las entrevistas correspondientes, considerar que corresponde a alumnos que comprenden la situación problemática. Se tomó esta decisión a partir de un análisis consensuado entre la tesista y sus directores. Por lo tanto, esta modalidad M8 y la modalidad M5 que corresponde a una respuesta correcta y completa, no serán tenidas en cuenta en el análisis de dificultades que se presenta a continuación.

En función de las respuestas de los estudiantes se amplía el diagrama 4.3 correspondiente a las etapas de resolución, identificando en él la aparición de las dificultades en cada una de las etapas. Esto permite el análisis de los registros de forma genérica independientemente de las variables de la SPI.

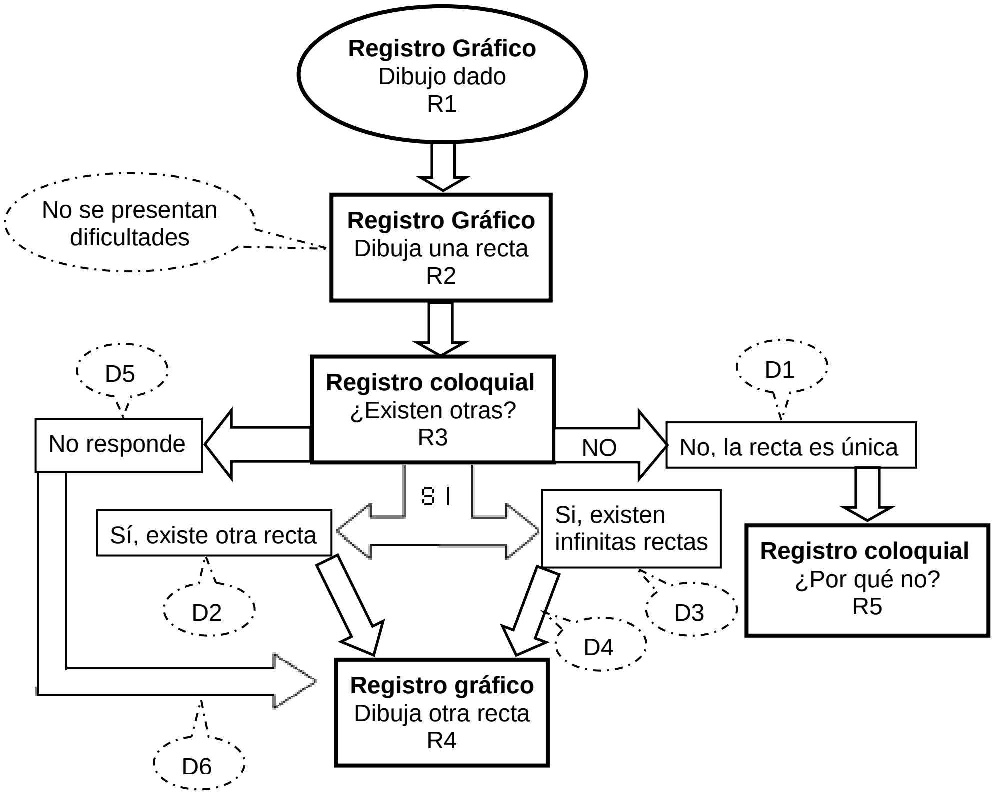


Diagrama 5. 5. Dificultades en las etapas de resolución de la SPI

Las dificultades que se analizaron en las diferentes fases de estudio, y se indican en el diagrama 5.5, se enumeraron en forma creciente siguiendo el orden de las consignas de la situación problemática. Las mismas se describen a continuación:

D1: el estudiante dibuja una recta y dice que esa es la única recta existente con las condiciones requeridas.

D2: el estudiante dibuja una recta y luego dice que existe otra recta y la dibuja.

D3: el estudiante dibuja una recta, responde que existen infinitas rectas, pero no dibuja otra recta.

D4: el estudiante dibuja una recta, responde que existen infinitas rectas y dibuja una recta más.

D5: el estudiante dibuja una recta y no responde si existen otras rectas.
D6: el estudiante dibuja una recta y no responde si existen otras rectas, pero dibuja otra recta.

Las dificultades D1 y D2 dan cuenta de casos en los que la representación gráfica, como ya se ha descripto ligada a la perpendicularidad en el plano o a las direcciones de los ejes cartesianos, “limita” la visualización de otras rectas, y posiblemente condicione la respuesta literal. En estos casos la imagen funciona generando un sesgo facilitador que dificulta el proceso de resolución.

En las dificultades llamadas D5 y D6, correspondientes a la ausencia de respuesta literal, también parece cobrar mayor fuerza la presencia de una representación gráfica.

Es importante destacar que la pregunta intencionalmente planteada en el registro coloquial R5, de carácter reflexivo, no produjo un desequilibrio en tal sentido en las respuestas de estos alumnos. Por el contrario, las respuestas analizadas a través de las argumentaciones literales dan cuenta de un sesgo de confirmación.

Las dificultades nombradas como D3 y D4 se consideran de otra índole, ya que las respuestas literales son correctas y los conflictos se manifiestan a la hora de dibujar. También aquí se pone de manifiesto la necesidad de los alumnos de buscar referencias para dibujar más de una recta.

El registro gráfico parece condicionar al registro coloquial, ya que la representación semiótica del dibujo presentada produjo una visión sesgada de la situación que influyó en la respuesta literal. Por ejemplo, en el Caso 3, ante la representación gráfica dada, a algunos estudiantes se les presenta la dificultad de visualizar una “situación en el espacio” en el dibujo plano de una hoja. Se produce un recorte de la realidad, limitándose a una visión ligada a la perpendicularidad en el plano, respondiendo así que existe una única recta.

En otros casos, el registro coloquial no condice con el registro gráfico, pues la respuesta literal correcta no es transformada en una respuesta gráfica completa. Por ejemplo, en los casos en los que los estudiantes expresan literalmente de forma correcta que existen infinitas rectas con las condiciones del problema, pero sólo grafican una o dos rectas.

Es decir, por un lado, el registro gráfico condiciona al registro coloquial, ya que la representación semiótica del dibujo influye en la respuesta literal. Y por otra parte, el registro coloquial no condice con el registro gráfico, pues la respuesta literal correcta no se corresponde con una respuesta gráfica completa. A continuación se diagrama la relación entre ambos registros que involucra la actividad cognitiva de conversión, fuente de las dificultades señaladas.

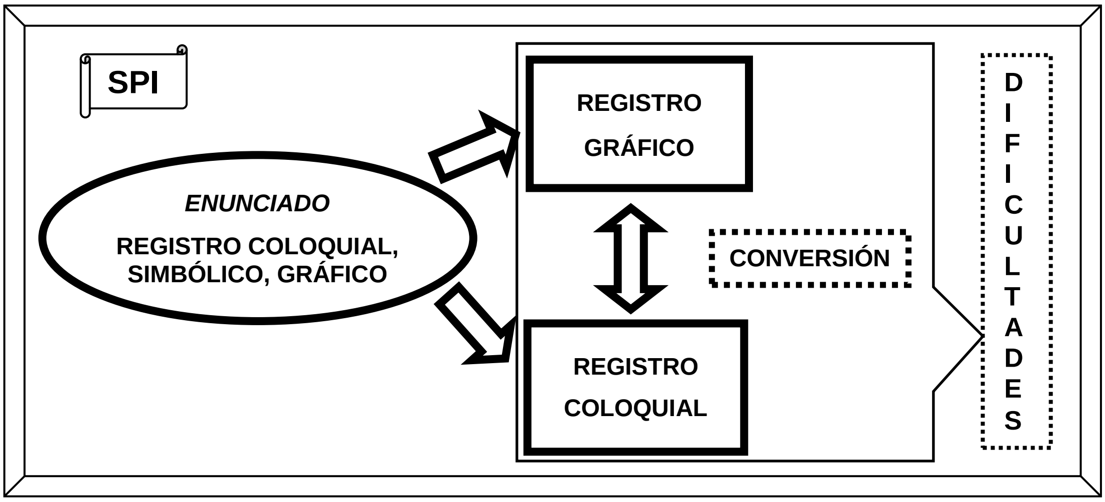


Diagrama 5. 6. Dificultades en la actividad cognitiva de conversión en la SPI

Se pone en evidencia que la conversión, es decir, el pasaje de un registro de representación a otro en la SPI no resultó trivial para los estudiantes. Como se ha señalado, si un concepto está adquirido, el pasaje de una representación a otra se produce espontáneamente y toda representación del mismo, en cualquier registro, causa idéntico significado. Cuando esto no sucede no existe congruencia entre las representaciones de un mismo objeto y tal falta de congruencia puede ser producto del gran predominio que se le otorga en la enseñanza tradicional al registro algebraico (Duval, 1999).

La Situación Problemática II que se presenta a continuación nos permitirá realizar un análisis de la misma problemática, pero desde registros algebraicos.

5.4 Análisis y resultados de la Situación Problemática II

El Instrumento II correspondiente a una situación problemática de carácter algebraico (SPII) fue presentado y fundamentado en la sección 4.5.1. Debido a que el caso 3 de la SPI se constituyó en un obstáculo para los estudiantes, en el diseño de la SPII se indican las componentes de un vector que no comparte la dirección de los ejes coordenados, no es paralelo a los planos coordenados, y además las coordenadas de un punto que no pertenece a ningún plano coordenado, con la intención de presentar referencias “no triviales”.

Es importante señalar que, a partir de una primera lectura de los protocolos se observó que sólo 3 estudiantes de un total de 85 resuelven la SPII de forma correcta y completa.

5.4.1 Fase 1. Tipos de respuestas y análisis de las estrategias válidas de resolución

A través de una primera lectura de los protocolos con la finalidad de detectar los lineamientos generales utilizados por los estudiantes en sus resoluciones, se detectaron diferentes tipos de respuesta, en cuanto a lo expresado literal y algebraicamente, que se sintetizan en el diagrama 5.7, en el que se destaca en negrita la respuesta correcta.

Recordemos que la expresión representación algebraica[5] en el contexto de esta tesis corresponde a las formas de expresar a una recta, ya sea a través de ecuaciones paramétricas o en su forma general.

[5] Abreviaremos: rep. alg.

El estudiante

- No expresa ninguna rep. alg. de una recta o lo hace incorrectamente.
- Exhibe una rep. alg. de forma incompleta.
- **Exhibe una rep. alg. de una recta.**

- No responde literalmente.
- Expresa literalmente que existe una única recta.
- **Expresa literalmente que existen infinitas.**

- No exhibe una rep. alg. de otra recta.
- Exhibe una rep. alg. de otra recta de forma incompleta.
- **Exhibe una rep. alg. de otra recta.**

- No expresa el conjunto solución.
- Expresa el conjunto solución de forma incompleta.
- **Expresa el conjunto solución.**

Diagrama 5. 7. Tipos de respuestas en la SPII

Un grupo de estudiantes no explicita ecuaciones que representen a una recta perpendicular al vector $\bar{v} = (1,3,2)$ y que contenga al punto $P(1,-2,1)$ y otros intentan expresar una representación algebraica, pero presentan su proceso de resolución de forma incompleta. Algunos alumnos hallaron ecuaciones que representan una recta, mientras que otros exhiben ecuaciones que representan dos rectas diferentes con las condiciones del problema. Algunos estudiantes han contestado literalmente que, con las condiciones pedidas, la recta existente es única, otros han expresado que hay infinitas rectas y algunos no han respondido.

Los alumnos que expresaron las infinitas soluciones resuelven la actividad aplicando alguna de las posibles formas de resolución de la SPII descriptas en el Capítulo IV.

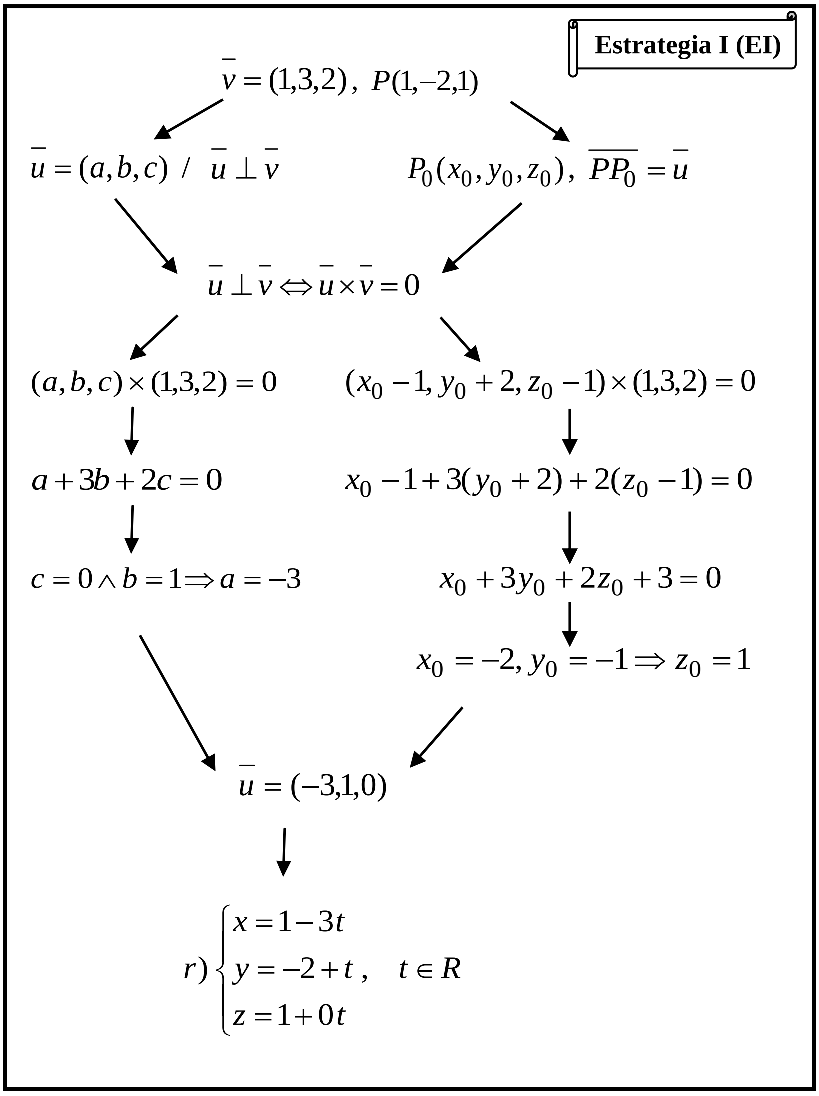
Una de las variables a considerar es “Número de rectas”. Las respuestas encontradas en los protocolos sobre la cantidad de rectas existentes con las condiciones del problema, expresadas en el diagrama, permiten definir las modalidades como: “Una única recta”, “Infinitas rectas” o “No responde”. La segunda variable definida es “Número de representaciones algebraicas”, cuyas modalidades son: “Una representación algebraica incompleta”, “Una representación algebraica”, “Al menos dos representaciones algebraicas” y “Ninguna representación algebraica o incorrecta”. Y la tercera variable: “Forma de la representación algebraica” identifica las estrategias utilizadas para tales representaciones.

El análisis cualitativo de las resoluciones permitió identificar seis estrategias realizadas por 49 estudiantes, que muestran el uso de diferentes registros en sus líneas de razonamiento en la búsqueda de una representación algebraica de una recta. A partir de las mismas se confeccionó un esquema de los registros observados y un diagrama que sintetiza las relaciones entre lo que los estudiantes expresan literalmente y el trabajo algebraico que aplican en cada estrategia, con un breve análisis que posteriormente será ampliado.
Los restantes 36 protocolos, que no se ajustan a ninguna de las seis formas de resolución válidas, se analizan posteriormente.

Las estrategias identificadas se sintetizan a continuación, agrupando por un lado las correspondientes a resoluciones utilizando ecuaciones paramétricas y por otro las que aplican la forma general de expresar una recta.

- Solución utilizando ecuaciones paramétricas

Estrategia I (EI)
Fue realizada por un total de 19 estudiantes, de los cuales doce aplican la resolución utilizando ecuaciones paramétricas explicada en el Capítulo IV, que llamaremos EI.1 y corresponde a la rama izquierda del esquema 5.1. Dos alumnos desarrollan esta estrategia con algunas variantes (EI.2), que puede observarse en la rama derecha del citado esquema, mientras que cinco estudiantes la aplican en forma incompleta (EI.3). Estas tres variantes de la estrategia EI se describen a continuación del esquema.



Esquema 5. 1. Representaciones semióticas en la Estrategia I

- **EI.1**: Corresponde a doce estudiantes que buscan un vector no nulo $\bar{u}=(a,b,c)$ / $\bar{u}\perp\bar{v}$. Plantean $\bar{u}\perp\bar{v}\Leftrightarrow\bar{u}\times\bar{v}=0,\ (a,b,c)\times(1,3,2)=0$ y obtienen una ecuación lineal en tres variables: $a+3b+2c=0$. Asignan valores particulares a dos de las variables para calcular luego el valor de la tercera. Determinan así las componentes de un vector perpendicular al dado. A modo de ejemplo, toman $c=0,\ b=1$ y determinan $a=-3$, resultando el vector $\bar{u}=(-3,1,0)$.

- **EI.2**: Dos estudiantes buscan un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y consideran el vector $\overline{PP_0}=\bar{u}$, que debe ser perpendicular a $\bar{v}$. Plantean $\bar{u}\perp\bar{v}\Leftrightarrow\bar{u}\times\bar{v}=0,$

$(x_0 - 1, y_0 + 2, z_0 - 1) \times (1,3,2) = 0$, $x_0 - 1 + 3(y_0 + 2) + 2(z_0 - 1) = 0$, $x_0 + 3y_0 + 2z_0 + 3 = 0$. A modo de ejemplo, si toman $x_0 = -2, y_0 = -1 \Rightarrow z_0 = 1$, resulta $\overline{u} = (-3,1,0)$.

Independientemente de la forma en que obtienen el vector $\overline{u}$ los estudiantes expresan ecuaciones paramétricas de una recta, considerando al mismo como vector dirección y a P como un punto de la misma. Una posible representación de una de las rectas es: $r)\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t, \quad t \in R \\ z = 1 + 0t \end{cases}$.

Es importante señalar que tomando diferentes valores en el conjunto de los números reales para *b* y *c* (en EI.1) o para x_0 y y_0 (en EI.2) se pueden obtener otros vectores -en componentes- perpendiculares al vector dado $\overline{v}$, destacándose que hay infinitos vectores a considerar, con diferentes direcciones, e infinitas rectas posibles, como lo muestra la figura 5.4.

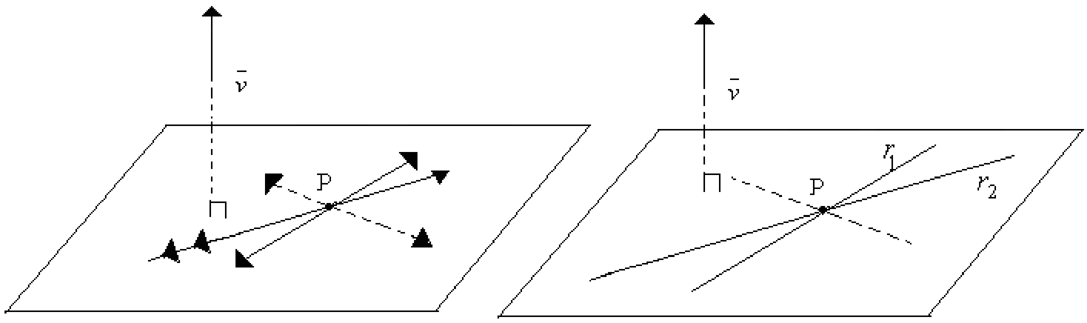


Figura 5. 4

- **EI.3**: Del subgrupo de cinco estudiantes que presenta mayores dificultades, ya que intentan aplicar esta forma de resolución, pero no la completan, se diferencian tres variantes; EI.3.1 y EI.3.2 que corresponden al lineamiento de la izquierda del esquema 5.1 y EI.3.3 que se presenta en la rama derecha.
  - **EI.3.1**: Corresponde a un estudiante que exhibe ecuaciones paramétricas con punto de paso P(1,-2,1) y como vector dirección, un vector genérico $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $r)\begin{cases} x = 1 + u_1 t \\ y = -2 + u_2 t \quad t \in R \\ z = 1 + u_3 t \end{cases}$, plantea $\overline{u} \times \overline{v} = (1,3,2) \times (u_1, u_2, u_3) = 0$ pero

no determina las componentes de ningún vector particular ($\bar{u}$) y expresa literalmente que la recta es única.

- **EI.3.2**: La desarrollan dos estudiantes que, presentan la misma estrategia EI.3.1, y además plantean la ecuación $u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0$ pero no la resuelven. Uno de ellos no responde sobre la cantidad de rectas existente, mientras que el otro presenta además la ecuación que representa al plano: $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$ (descripta en el Capítulo IV), aclarando que la recta es única y pertenece a este plano.

- **EI.3.3**: Dos alumnos plantean la búsqueda de $\bar{u} = (x_0 - 1, y_0 + 2, z_0 - 1)$ presentando ecuaciones paramétricas, con punto de paso P(1,-2,1) y un vector genérico $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $r)\begin{cases} x = 1 + u_1\, t \\ y = -2 + u_2 t, \\ z = 1 + u_3\, t \end{cases}$ $t \in R$, Expresan además la ecuación del plano $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$. Uno de ellos aclara que la recta de la cual intenta encontrar ecuaciones que la representen está contenida en este plano, especificando que hay infinitas rectas. Este estudiante no expresa ninguna condición para la búsqueda de $\bar{u}$. En cambio, el otro alumno además expresa la condición $\bar{u} \times \bar{v} = 0$, sin mencionar si la recta es única o no.

A partir del análisis de las respuestas al ítem (b) de los 19 estudiantes que han aplicado la estrategia EI de resolución, se ha organizado la información a través de un diagrama que muestra las relaciones entre lo que expresan literalmente y el trabajo algebraico aplicado en su estrategia.

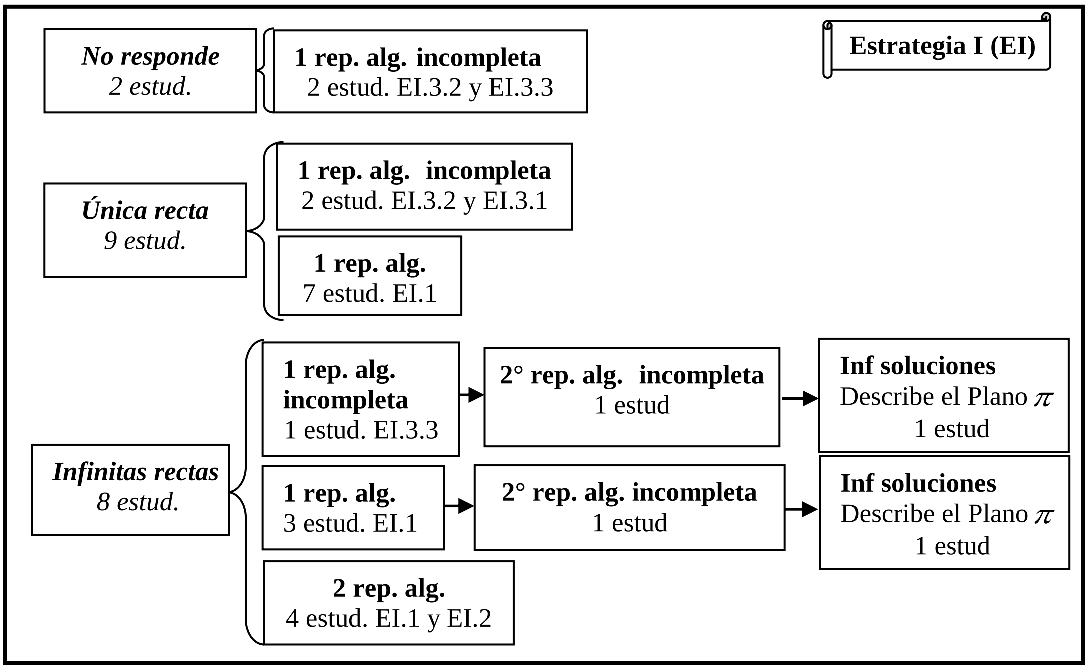


Diagrama 5. 8. Caracterización de las respuestas de los estudiantes en la Estrategia I

En los diagramas -que caracterizan las respuestas de los estudiantes- correspondientes a cada estrategia de resolución, la primera columna corresponde a las diferentes respuestas literales de la variable "Número de rectas". Los rectángulos que le siguen se refieren a las modalidades de la variable "Número de representaciones algebraicas" y los recuadros finales de cada lineamiento hacen referencia a las respuestas sobre el conjunto solución.

En particular, en el diagrama 5.8 se observa que:

- Dos estudiantes no responden sobre la cantidad de rectas existentes y expresan una representación algebraica incompleta de una recta, utilizando EI.3.2 y EI.3.3.
- Nueve estudiantes aseguran que la recta es única, de los cuales dos aplican las estrategias EI.3.2 y EI.3.1, exhibiendo una representación algebraica de una recta, pero de forma incompleta. Los restantes siete alumnos expresan una representación algebraica de una recta a través de la estrategia EI.1.
- Ocho estudiantes afirman que existen infinitas rectas, de los cuales uno expresa una representación algebraica incompleta e intenta una segunda representación algebraica aplicando la estrategia EI.3.3 y expresa las infinitas soluciones caracterizando la situación haciendo referencia al plano π (forma descripta en el Capítulo IV). Tres alumnos exhiben una representación algebraica de una recta

aplicando la estrategia EI.1 y uno de estos tres expresa una segunda representación algebraica de forma incompleta. Este estudiante representa a una recta como intersección de dos planos, en la cual la primera ecuación representa al plano $\pi)\ x+3y+2z+3=0$ y el segundo plano tiene por ecuación $3x-y+3z+d=0$, sin especificar el valor de *d* y tampoco indicar que este plano debe contener al punto P. Además, este alumno expresa las infinitas soluciones haciendo uso de la descripción del plano π. Finalmente, cuatro estudiantes exhiben dos representaciones algebraicas de dos rectas diferentes, aplicando dos de ellos la estrategia EI.1 y los otros dos la EI.2.

Frente a la pregunta: *"¿Existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso negativo explica por qué no existen otras",* en las justificaciones dadas por los 9 estudiantes que aplicaron la estrategia EI y expresaron que la recta es única se detectaron cuatro tipos de respuestas (que llamaremos T1, T2, T3, T4). Las mismas se caracterizan a continuación ilustradas con la transcripción de una respuesta representativa de cada tipo, que llamaremos EI.T1, EI.T2, EI.T3, EI.T4.

T1: corresponde a estudiantes que "repiten" las condiciones del enunciado para justificar.

EI.T1. (5 estud.)*: "No, existe una única recta que pasa por el punto P y es perpendicular a* $\bar{v}$*".*

T2: Se presenta en estudiantes que visualizan la existencia de infinitas rectas perpendiculares al vector $\bar{v}$ pero "sólo una" de ellas contiene al punto P.

EI.T2. (2 estud.): *"No existe otra recta que cumpla con la condición de a), ya que puede haber infinitas rectas perpendiculares a* $\bar{v}$*, pero sólo una pasará por P".*

T3: Corresponde a un alumno que considera la existencia de infinitas rectas que contienen al punto P, pero "sólo una" de ellas es perpendicular al vector $\bar{v}$.

EI. T3. (1 estud.): *"Existe solo una recta perpendicular a* $\bar{v}$ *y que contenga a P. Porque hay infinitas rectas que pasan por P, pero solo una es perpendicular a* $\bar{v}$*".*

T4: reconocida en un estudiante que considera que el vector $\bar{v}$ debe tener extremo en el punto P.

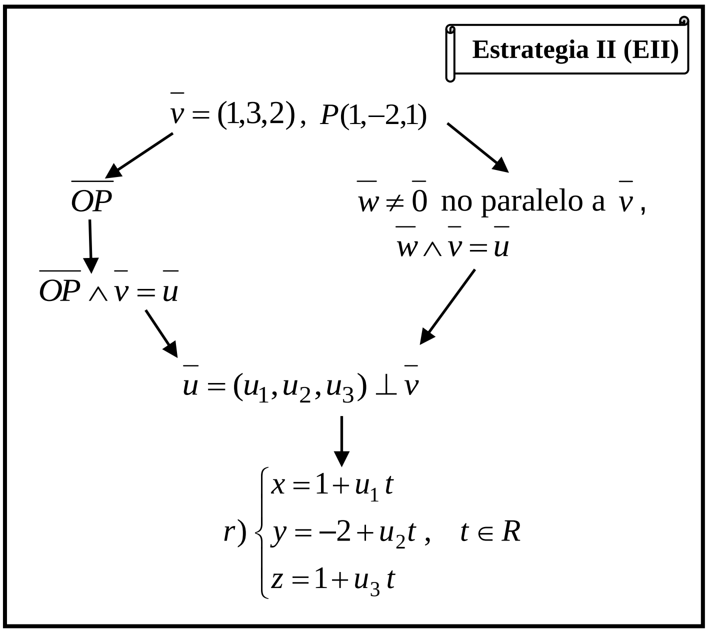
EI. T4. (1 estud.): *"No, en este caso solo existe una recta que cumple con las condiciones planteadas. Porque si bien podrían existir vectores paralelos, solo hay uno que contenga al punto P".*

Estos 9 estudiantes presentan un sesgo de confirmación que se manifiesta en las argumentaciones, al justificar que la recta que cumple las condiciones del problema es única.

Finalmente, en este análisis puede observarse que los estudiantes que aplicaron la Estrategia EI evidencian dificultades en relación a: reconocer la cantidad de rectas existentes; hallar ecuaciones que representen a una recta, ligadas a la búsqueda de un vector dirección; hallar ecuaciones que representen a una segunda recta; describir las infinitas soluciones, e identificar qué representa el plano π en el contexto del problema, estas últimas vinculadas a la ausencia de significado de las variables involucradas.

Estrategia II (EI)

Fue realizada por 8 estudiantes, quienes utilizaron ecuaciones paramétricas. A continuación, se esquematiza esta estrategia diferenciando dos procedimientos: el que hemos denominado EII.1 correspondiente a la rama izquierda del esquema y EII.2 que puede observarse en la rama derecha del mismo.



Esquema 5. 2. Representaciones semióticas en la Estrategia II

- **EII.1**: Corresponde a seis estudiantes que utilizando el punto P dado consideran el vector $\overline{OP}$ y calculan $\overline{OP} \wedge \bar{v} = \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$.
- **EII.2**: La aplican dos estudiantes que consideran un vector $\bar{w} \neq \bar{0}$, no paralelo a $\bar{v}$, y calculan $\bar{w} \wedge \bar{v} = \bar{u}$.

Con el vector $\bar{u}$ resultante, que es perpendicular a $\bar{v}$, y el punto P expresan ecuaciones paramétricas de una recta con las condiciones pedidas:

$$r) \begin{cases} x = 1 + u_1 t \\ y = -2 + u_2 t \\ z = 1 + u_3 t \end{cases}, \ t \in R.$$

Es importante destacar que hay infinitos vectores $\bar{w}$ (no paralelos a un mismo plano), que permiten considerar infinitos vectores $\bar{u}$, con direcciones diferentes, y por lo tanto infinitas rectas posibles.

A partir del análisis de las respuestas al ítem (b), de los 8 estudiantes que han aplicado la EII, se ha rescatado la siguiente información:

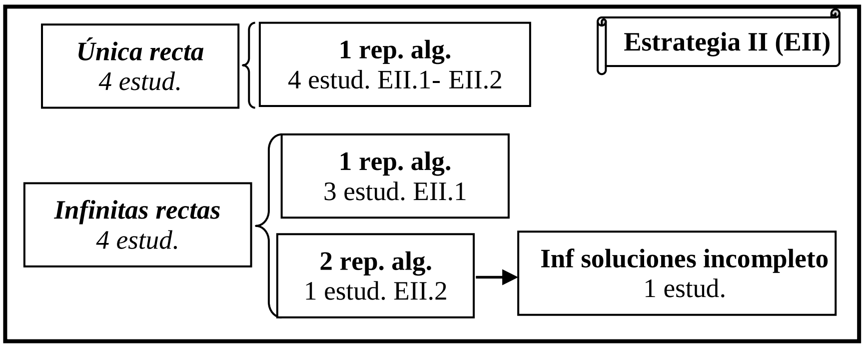


Diagrama 5. 9. Caracterización de las respuestas de los estudiantes en la Estrategia II

En el diagrama 5.9 puede observarse que:

- Cuatro estudiantes afirman que la recta es única y expresan una representación algebraica de una recta. Tres de ellos aplican la estrategia EII.1 y uno la EII.2.

- Cuatro alumnos afirman que existen infinitas rectas, de los cuales tres expresan una representación algebraica de una recta a través de EII.1 y el otro alumno que aplica EII.2, exhibe dos representaciones algebraicas de dos rectas e intenta expresar las infinitas soluciones explicando en su proceso de resolución la posible variación del vector $\bar{u}$, pero sin hacer ninguna referencia a las consideraciones en la elección del mismo. Aún así, ha hallado correctamente dos representaciones algebraicas de dos rectas diferentes.

Frente a la pregunta: *"¿Existen otras rectas que cumplen las condiciones dadas en el ítem a)? En caso negativo explica por qué no existen otras"*, las justificaciones dadas por los estudiantes corresponden a los tipos de respuestas T1 y T2 caracterizadas en la estrategia EI. En este caso se ilustran con transcripciones que denominaremos EII.T1 y EII.T2.

EII.T1. (3 estud.): *"No, no existen otras rectas que cumplan con las condiciones dadas, ya que existe solo una recta que sea perpendicular a* $\bar{v}$ *y que además pase por el punto P".*

EII.T2. (1 estud.): *"No existen otras rectas pues existen infinitas rectas perpendiculares a un vector, pero sólo una que pase por un punto determinado".*

Se destaca que los estudiantes que utilizan esta estrategia de resolución, a diferencia de quienes realizaron la EI, todos exhiben ecuaciones que representan una recta con las condiciones del problema. Pero se evidencian dificultades al responder sobre la cantidad de rectas existentes, hallar ecuaciones que representen a una segunda recta y describir las infinitas soluciones. Cuatro estudiantes presentan un sesgo de confirmación, respondiendo literalmente que la recta que cumple las condiciones del problema es única.

Estrategia III (EIII)

Esta estrategia, que se describe en el esquema 5.3, fue realizada por 10 estudiantes que trabajan con ecuaciones paramétricas para representar a una recta.

Estrategia III (EIII)

$$\bar{v} = (1,3,2)\ ,\ P(1,-2,1)$$

$$\downarrow$$

$$\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad a,b,c,d \in R$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v} \perp \pi,\ \pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$$

$$\downarrow$$

$$P \in \pi :\ 1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

$$\downarrow$$

$$\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$y = z = 0 \Rightarrow x = -3.\ \mathrm{R(-3,0,0)} \in \pi$$

$$\downarrow$$

$$\overline{PR} = (-4,2,-1) \perp \bar{v}$$

$$\downarrow$$

$$r) \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 2t, \quad t \in R \\ z = 1 - 1t \end{cases}$$

Esquema 5. 3. Representaciones semióticas en la Estrategia III

Los estudiantes exhiben una ecuación que representa al plano perpendicular al vector $\bar{v}$ y que además contiene al punto P. Para ello, en primer lugar, expresan una ecuación genérica de un plano $\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad a,b,c,d \in R$. Considerando a $\bar{v}$ como un vector normal al plano proponen la ecuación $\pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$, como $P \in \pi$, plantean $1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0$ y obtienen $d = 3$, resultando $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$.

Luego buscan un punto perteneciente a π, por ejemplo si $y = z = 0$ obtienen el punto R(-3,0,0) y consideran el vector $\overline{PR}$, que es perpendicular al vector $\bar{v}$, ya que éste es perpendicular al plano π y los puntos P y R pertenecientes al mismo. Por último, con $\overline{PR} = (-4,2,-1)$ como vector dirección y el punto P exhiben ecuaciones paramétricas de una recta:

$$r) \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \ ,\ t \in R.$$

Es importante destacar que hay infinitos puntos a considerar pertenecientes al plano π (que contiene a las infinitas rectas), por lo tanto, hay infinitos vectores con diferentes direcciones y por lo tanto infinitas rectas posibles.

A partir del análisis de las respuestas al ítem (b) de los 10 estudiantes que han aplicado la EIII, se ha obtenido la siguiente información:

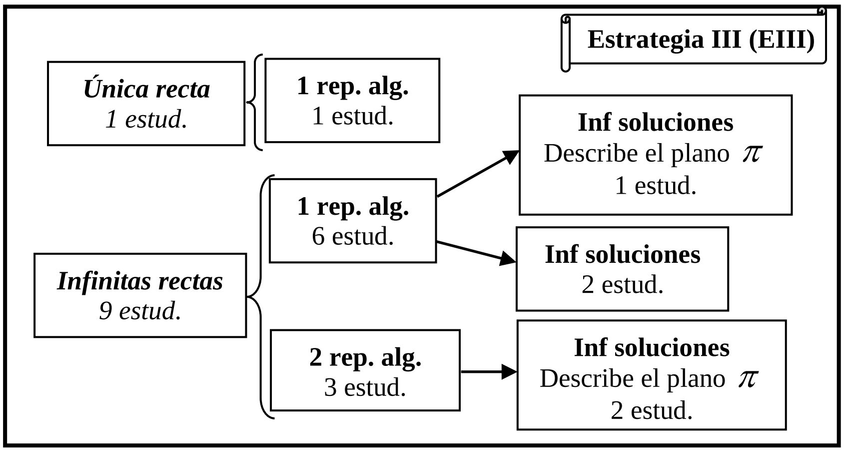


Diagrama 5. 10. Caracterización de las respuestas de los estudiantes en la Estrategia III

- Un estudiante expresa una representación algebraica de una recta afirmando que la misma es única.
- Nueve alumnos afirman que existen infinitas rectas, de los cuales seis expresan una representación algebraica de una recta. Uno de ellos expresa las infinitas soluciones describiendo el significado del plano π en el contexto, otros dos estudiantes expresan las infinitas soluciones presentando ecuaciones paramétricas con P punto de paso y un vector dirección genérico. Mientras que los tres estudiantes restantes exhiben dos representaciones algebraicas de dos rectas y de ellos, dos expresan las infinitas soluciones describiendo el significado del plano π.

El estudiante que afirma que la recta es única, constituye un representante de la tipología T2 presentada en EI y EII.

EIII. T2. *"Que pase por P hay una sola recta, son infinitas las rectas perpendiculares a* $\bar{v}$*".*

Todos los estudiantes que aplican la estrategia EIII muestran ecuaciones que representan a una de las rectas buscadas. Se observan dificultades para hallar ecuaciones que representen a una segunda recta y describir las infinitas soluciones. Un sólo alumno presenta un sesgo de confirmación al argumentar que la recta es única.

- Solución utilizando forma general

Estrategia IV (EIV)

Fue aplicada por 6 estudiantes, de los cuales tres aplican la forma de resolución completa (EIV.1) presentada en el Capítulo IV como "solución utilizando forma general", y los otros tres la aplican en forma incompleta (EIV.2).

Estrategia IV (EIV)

$$\bar{v} = (1,3,2)\,,\ P(1,-2,1)$$
$$\downarrow$$
$$\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad a,b,c,d \in R$$
$$\downarrow$$
$$\bar{v} \perp \pi,\ \ \pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$$
$$\downarrow$$
$$P \in \pi :\ 1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$
$$\downarrow$$
$$\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$$
$$\downarrow$$
$$\sigma)\ x = 1$$
$$\downarrow$$
$$r)\begin{cases} x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Esquema 5. 4. Representaciones semióticas en la Estrategia IV

- **EIV.1**: Tres estudiantes hallan la ecuación $x + 3y + 2z + 3 = 0$ que representa al plano llamado π, como se desarrolló en la estrategia de resolución EIII. Posteriormente buscan una ecuación que represente a otro plano, cuya condición es que contenga al punto P. Dos estudiantes expresan una ecuación genérica de la forma $ax + by + cz + d = 0$ siendo (a,b,c) las componentes de un vector normal, (no paralelo al vector $\bar{v}$, de lo contrario se hallaría otra ecuación que representaría al mismo plano π. Luego hallan el valor de *d* utilizando la condición que el punto P debe estar contenido en el mismo, para finalmente expresar una ecuación que llamaremos $\sigma)$.

El tercer estudiante, sin realizar ningún cálculo, exhibe la ecuación $\sigma)\ x=1$ que obviamente corresponde a la ecuación de un plano al cual el punto P(1,-2,1) pertenece.

Finalmente, los alumnos exhiben:

$$r)\begin{cases} x+3y+2z+3=0 \\ \sigma \end{cases}.$$

Se destaca que hay infinitos planos que contienen al punto P(1,-2,1), por lo tanto realizando la intersección de cada uno de ellos con el plano π se determinan infinitas rectas.

- **EIV.2**: Los tres estudiantes que intentan expresar una representación algebraica de una recta como intersección de dos planos, exhiben la ecuación del plano $\pi)\ x+3y+2z+3=0$ y expresan a una posible representación de una recta como $r)\begin{cases} x+3y+2z+3=0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$ sin hacer ninguna referencia a la segunda ecuación presentada.

A partir del análisis de las respuestas del ítem (b), de los 6 estudiantes que han aplicado la EIV, se destaca:

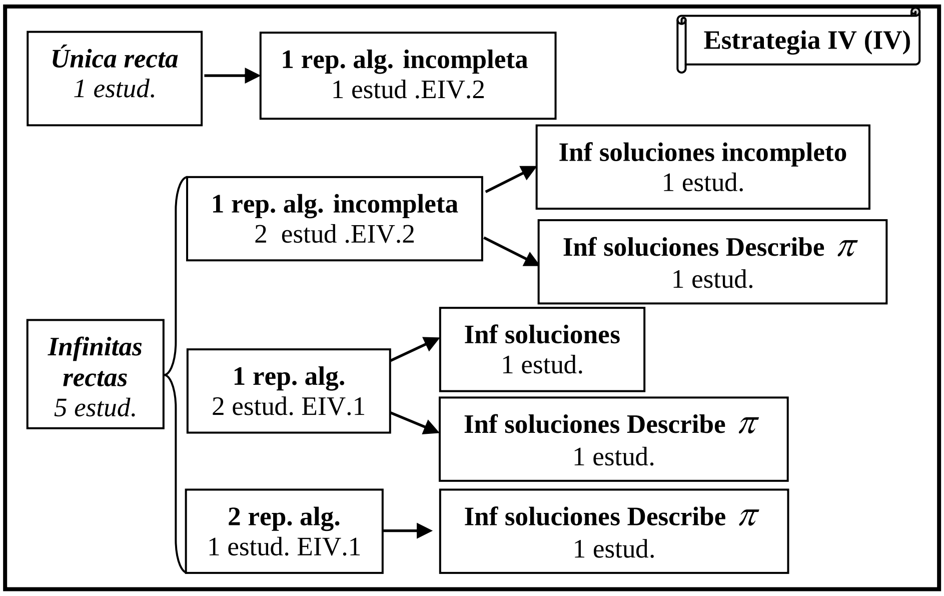


Diagrama 5. 11. Caracterización de las respuestas de los estudiantes en la Estrategia IV

- Un estudiante presenta una representación algebraica de una recta de forma incompleta aplicando la EIV.2 y expresa literalmente que la recta es única.

- Cinco alumnos afirman que existen infinitas rectas, de los cuales, dos aplican la EIV.2 expresando una representación algebraica incompleta: uno de ellos expresa las infinitas soluciones de manera incompleta, ya que reconoce la existencia de infinitas rectas, donde cada una puede representarse mediante la intersección de dos planos, pero no logra exhibir una ecuación que represente al segundo plano, mientras que el otro estudiante expresa el conjunto solución describiendo el significado del plano π en la situación problemática.

Dos estudiantes exhiben ecuaciones que representan a una recta aplicando EIV.1, uno de ellos además expresa las infinitas soluciones (utilizando las ecuaciones de π, x=1 y haz de planos) y el otro alumno expresa las infinitas soluciones describiendo el significado del plano π.

Un estudiante expresa dos representaciones algebraicas de dos rectas distintas utilizando EIV.1 y expresa las infinitas soluciones a través de la descripción del plano π.

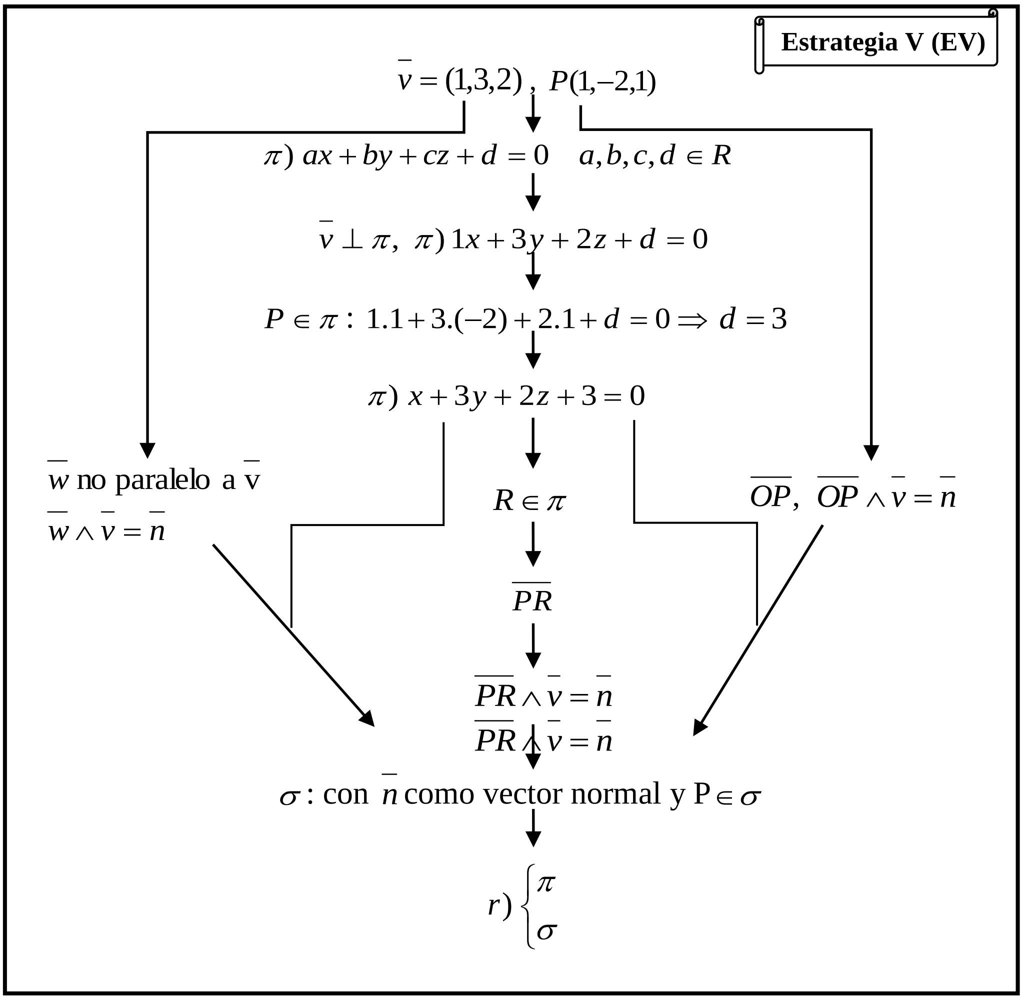
El estudiante que expresa literalmente que la recta es única, presenta una respuesta que corresponde a la tipología T2.

EIV. T2. *"Existe solo una recta que pasa por P y es perpendicular a* $\bar{v}$*, es muy tentador pensar que existen infinitas, pero al tener como dato que pasa por un punto, existe solo una".*

Se encuentran las dificultades ya observadas para responder sobre la cantidad de rectas existentes, hallar ecuaciones que representen una recta, hallar ecuaciones que representen a una segunda recta y describir las infinitas soluciones.

Estrategia V (EV)

Fue presentada por 5 estudiantes que aplican las estrategias llamadas EV.1, correspondiente a la rama derecha del esquema 5.5, EV.2 presente en la rama izquierda y EV.3, mostrada en la rama central del mismo esquema.



Esquema 5. 5. Representaciones semióticas en la Estrategias V

- **EV.1**: Tres estudiantes exhiben la ecuación $\pi)\ x+3y+2z+3=0$ hallada en la estrategia EIII. Luego dado el punto P consideran el vector $\overline{OP}$ y realizan $\overline{OP}\wedge\bar{v}=\bar{n}$.
- **EV.2**: Otro estudiante, considera el vector $\bar{w}\neq\bar{0}$, no paralelo a $\bar{v}$ y calcula $\bar{w}\wedge\bar{v}=\bar{n}$.
- **EV.3:** El quinto estudiante considera un punto R perteneciente al plano π, construye el vector $\overline{PR}$ y calcula $\overline{PR}\wedge\bar{v}=\bar{n}$.

  Todos los estudiantes exhiben una ecuación que representa el plano $\sigma)$, considerando $\bar{n}$ como vector normal y P un punto del mismo. Luego expresan una recta en forma general: $r)\begin{cases}\pi\\ \sigma\end{cases}$.

Como $\bar{n}\perp\bar{v}$, $\bar{n}$ es normal a $\sigma)$ y como además $\bar{v}$ es normal a π resulta $\sigma\perp\pi$. Existen infinitos planos perpendiculares a π y que además contienen al punto P. Es decir, de todos los posibles planos que pueden considerarse para expresar la forma general de una recta, estos estudiantes eligen la representación de un plano σ ”perpendicular” a π, como lo muestra la figura 5.5. Estas estrategias requieren cálculos innecesarios, ya que la única condición para el segundo plano es que el mismo contenga al punto P(1,-2,1), por lo tanto directamente pueden exhibirse, por ejemplo, las ecuaciones: $\sigma)\ x=1$ o $\sigma)\ y=-2$ o $\sigma)\ z=1$. Puede inferirse que estos alumnos utilizan un procedimiento que les resultó efectivo en la resolución de otras situaciones problemáticas. De este modo resuelven por analogía, dando cuenta de un sesgo de fijación.

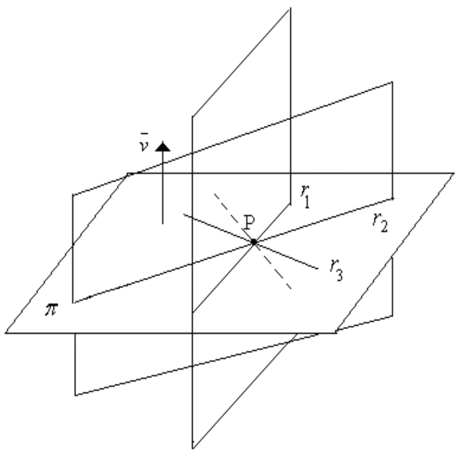


Figura 5. 5

En el ítem (b) de los 5 estudiantes que han realizado la EV de resolución se destaca:

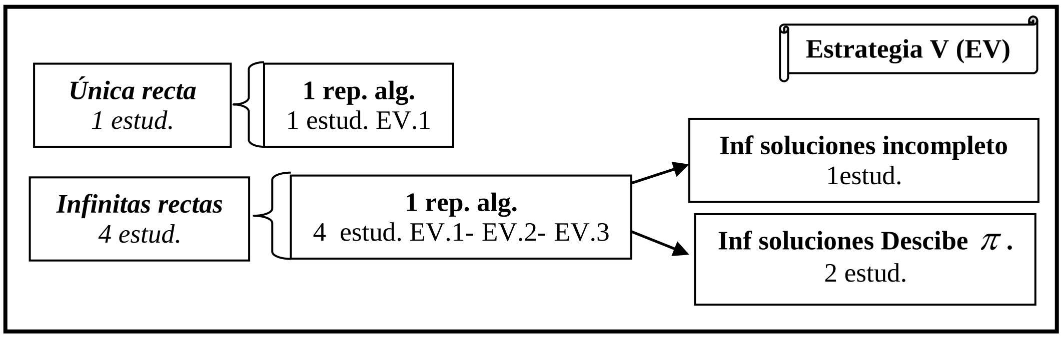


Diagrama 5. 12. Caracterización de las respuestas de los estudiantes en la Estrategia V

- Un estudiante exhibe una representación de una recta aplicando la EV.1 y expresa literalmente que la recta es única sin ninguna justificación.
- Cuatro estudiantes afirman que existen infinitas rectas y exhiben una representación algebraica de una recta, dos de ellos aplican la estrategia EV.1, un alumno utiliza EV.2 y otro estudiante realiza la forma de resolución EV.3. Los estudiantes que aplican EV.1 y EV.2 expresan las infinitas soluciones describiendo el significado del plano π. El otro alumno que aplica EV1 expresa las infinitas soluciones de forma incompleta ya que intenta utilizar haz de planos, pero no termina su proceso de resolución.

En los estudiantes que aplicaron la EV se observan dificultades para responder sobre la cantidad de rectas existentes, hallar ecuaciones que representen a una segunda recta y describir las infinitas soluciones.

Estrategia VI (EVI)

Esta estrategia, que se esquematiza a continuación, fue realizada por un estudiante que utiliza la forma general para representar una recta.

Estrategia VI (EVI)

$$\bar{v} = (1,3,2)\,,\ P(1,-2,1)$$

$$\downarrow$$

$$\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad a,b,c,d \in R$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v} \perp \pi,\ \pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$$

$$\downarrow$$

$$P \in \pi:\ 1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

$$\downarrow$$

$$\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\bar{u} \,/\, \bar{u} \times \bar{v} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sigma: \text{con } \bar{u} \text{ como vector normal y P} \in \sigma$$

$$\downarrow$$

$$r)\begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases}$$

Esquema 5. 6. Representaciones semióticas en la Estrategia VI

El estudiante exhibe la ecuación $x + 3y + 2z + 3 = 0$ que representa al plano π (EIII). Luego obtiene una ecuación para el plano σ al cual pertenece P y que es normal a $\bar{u}$, siendo además σ perpendicular a π. Luego expresa $r)$ como intersección de dos planos: $r)\begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases}$.

En esta estrategia al igual que en EIV, el estudiante realiza cálculos innecesarios al momento de considerar una ecuación que represente al segundo plano.

En el ítem (b), el estudiante expresa literalmente que existen infinitas rectas, sólo exhibe ecuaciones para representar a una recta. Esta respuesta se sintetiza en el diagrama 5.13.

Estrategia VI (EVI)

Infinitas rectas
1 estud.

1 rep. alg.
1 estud.

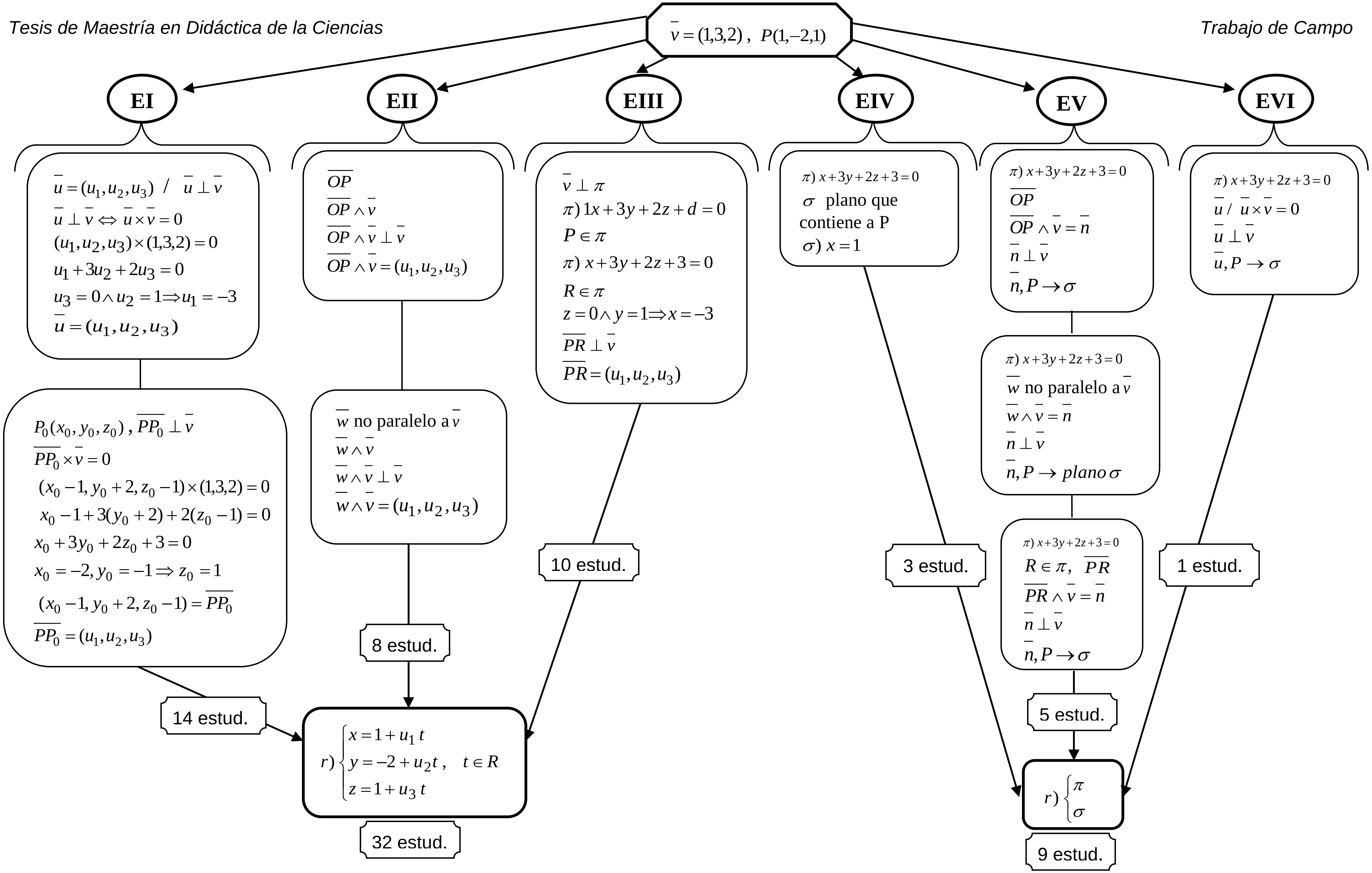
Diagrama 5. 13. Caracterización de las respuestas del estudiante en la Estrategia VI

Este estudiante presenta dificultades para hallar una representación algebraica de una segunda recta y describir las infinitas soluciones.

Comentario: En cada estrategia, se han presentado las explicaciones pertinentes para la obtención de una representación de una recta. Para la búsqueda de una representación de “otra recta”, según la forma de resolución, deben tomarse ciertos recaudos para no obtener ecuaciones equivalentes. Es decir, al aplicar una de las seis estrategias descriptas, debe tenerse la precaución de no presentar distintas representaciones, pero de “una misma recta”. Cabe destacar que estas consideraciones han estado presentes en el análisis de los protocolos, aunque no las mencionemos cada vez que citemos las estrategias. Además, fueron muy pocos los estudiantes que exhibieron ecuaciones de dos rectas y/o expresaron el conjunto solución.

Se presenta a continuación un esquema comparativo de las seis estrategias detectadas que permite reconocer aspectos comunes y características distintivas, visualizando la evolución de los registros mediante las representaciones semióticas utilizadas en cada una. En este esquema sólo se tienen en cuenta a los estudiantes que realizaron alguna estrategia de forma completa para representar una recta.

SP II



Esquema 5. 7. Representaciones semióticas en el total de las estrategias

Como se ha mencionado sólo 49 estudiantes han utilizado alguna de las seis estrategias descriptas en la búsqueda de alguna representación para una recta que cumpla con las condiciones planteadas. Entre ellos se han encontrado 41 que logran exhibir ecuaciones que representan a una recta. Para ello han utilizado dos formas de representación:

- forma paramétrica: $r)\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t, & t \in R \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$, donde (x_0, y_0, z_0) representa un punto perteneciente a la recta y (u_1, u_2, u_3) constituyen las componentes de un vector dirección;

- forma general: con r expresada como intersección de dos planos $r)\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h \in R$, $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano y $ex + fy + gz + d = 0$ representa otro no paralelo.

De este grupo, los 32 estudiantes que aplican las estrategias de resolución EI, EII y EIII, explicitan ecuaciones paramétricas de una recta con las condiciones requeridas, mientras que los 9 restantes que utilizan las estrategias EIV, EV y EVI, representan una recta a través de la forma general.

De los 8 estudiantes que han presentado una representación algebraica de forma incompleta, señalamos que cinco han intentado hallar ecuaciones paramétricas de una recta con la EI y el resto en forma general con la EIV.

El esquema 5.7 permite visualizar que los alumnos han utilizado las operaciones de producto escalar y producto vectorial de vectores y además las propiedades $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \times \bar{v} = 0$ y $\bar{r} \neq \bar{0}$, r *no paralelo a* $\bar{v}$, $\bar{r} \wedge \bar{v} = \bar{w} \Rightarrow \bar{w} \perp \bar{v}$, que involucran ambas operaciones.

Es importante acentuar que las estrategias EI y EII no involucran la consideración de ningún plano, a diferencia de las demás. Por su parte, la EIII requiere más cálculos que las anteriores, mientras que, de las estrategias que implican la forma general, la EIV es la que implica menos cálculos.

Cabe señalar que, las estrategias EIII, EIV, EV y EVI involucran una ecuación que representa al plano llamado π, perpendicular al vector $\bar{v}$ y que contiene al punto P. El mismo contiene a las infinitas rectas posibles, condición relevante, ya que el mismo caracteriza al conjunto solución, pero que no es reconocida por muchos de los estudiantes.

Las EV y EVI conllevan la búsqueda de una ecuación de un plano perpendicular a π, involucrando la realización de cálculos innecesarios. Como hemos mencionado, este hecho se asocia a un sesgo de fijación puesto de manifiesto cuando los alumnos aplican un esquema de resolución por analogía. En estos casos se manifiesta un conocimiento mecánico del álgebra, sin comprensión completa de su magnitud simbólica, sin la carga conceptual implicada.

A continuación, en el siguiente esquema, se sintetizan las formas de resolución, teniendo en cuenta los aspectos relevantes de cada una. En este sentido las estrategias EIV, EV y EVI se agrupan, ya que reflejan el mismo lineamiento matemático.

EI:

$\bar{v}$ *dato, sea*
$\bar{u} \neq \bar{0} / \bar{u} \times \bar{v} = 0$
$\bar{u} \perp \bar{v}$

EII:

dado $\bar{w}$ no paralelo a $\bar{v}$
$\bar{w} \wedge \bar{v} = \bar{u}$,
$\bar{u} \perp \bar{v}$

EIII:

π *plano que* $\supset \infty$ *rectas*
sea $R \in \pi$, $\overline{PR} = \bar{u}$
$\bar{u} \perp \bar{v}$

$\bar{u}, P$
Vector dirección y punto de paso

$r)$ Forma paramétrica

EIV, EV y EVI:

dado π,
$\sigma / P \in \sigma$
$\sigma \neq \pi$

$r)\ \pi \cap \sigma$
Forma general

Esquema 5. 8. Síntesis de la caracterización de las estrategias

El siguiente diagrama general permite visualizar la caracterización de las respuestas literales y algebraicas de los 49 estudiantes en cada una de las estrategias descriptas. Los recuadros sombreados indican las respuestas de los tres estudiantes que han resuelto la situación problemática de forma correcta y completa.

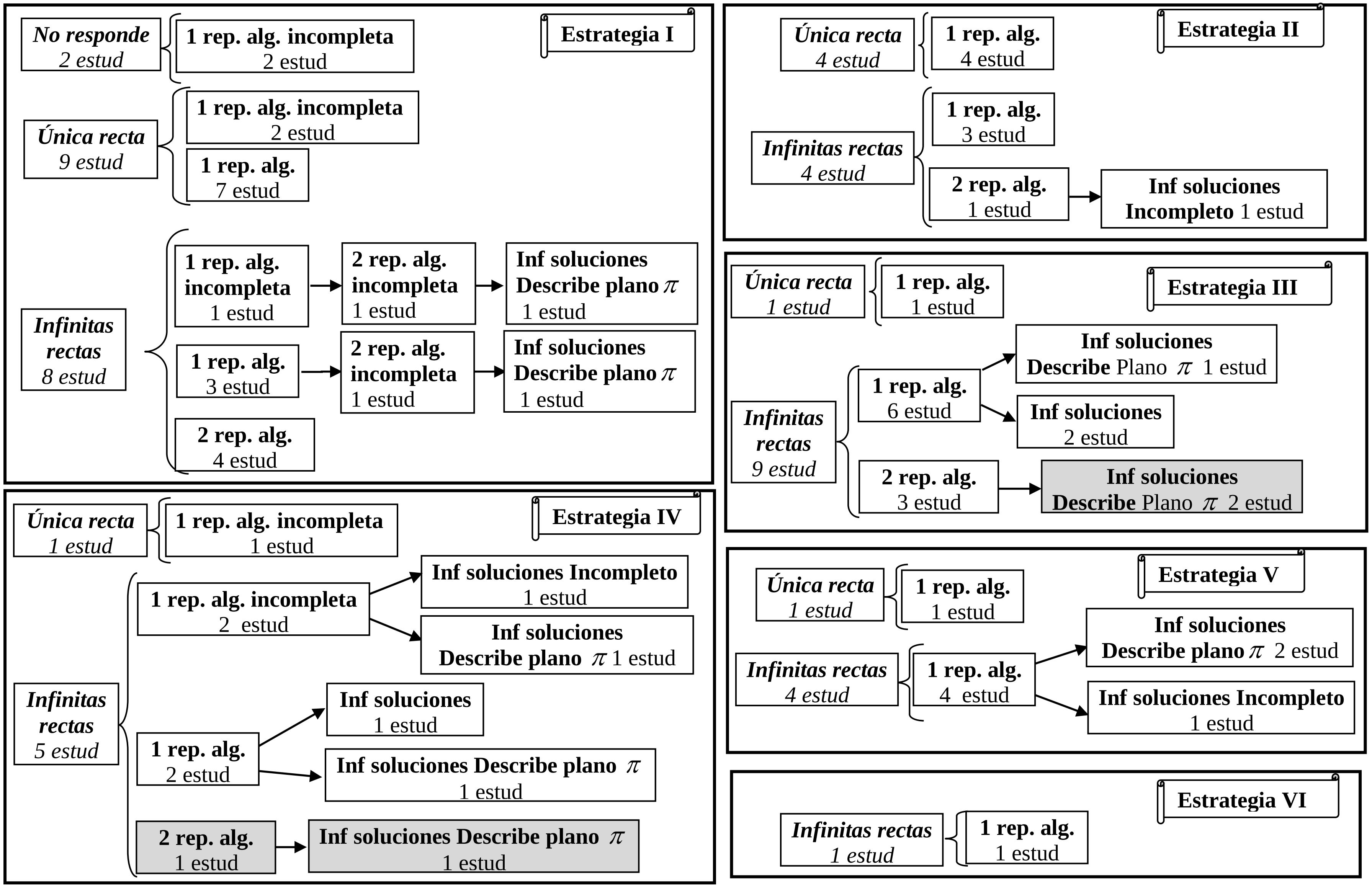


Diagrama 5. 14. Caracterización conjunta de las respuestas de los estudiantes en cada una de las estrategias

En cuanto a *la forma de expresar las infinitas soluciones*, el diagrama anterior muestra que 31 estudiantes respondieron que existen infinitas rectas. De ellos, 16 alumnos han expresado o han intentado describir el conjunto solución: 10 lo expresan a través de la descripción que refiere al significado del plano π, 3 estudiantes realizan una descripción del proceso sobre cómo pueden obtenerse ecuaciones que representen una recta de las infinitas posibles y 3 realizan alguna descripción de forma incompleta, como ya se ha explicitado; y el resto no expresa el conjunto solución.

El diagrama anterior permite además sintetizar las relaciones entre las respuestas literales y algebraicas, independientemente de la estrategia aplicada. Tal síntesis se presenta en el diagrama 5.15, destacándose las respuestas correctas a través de los recuadros sombreados.

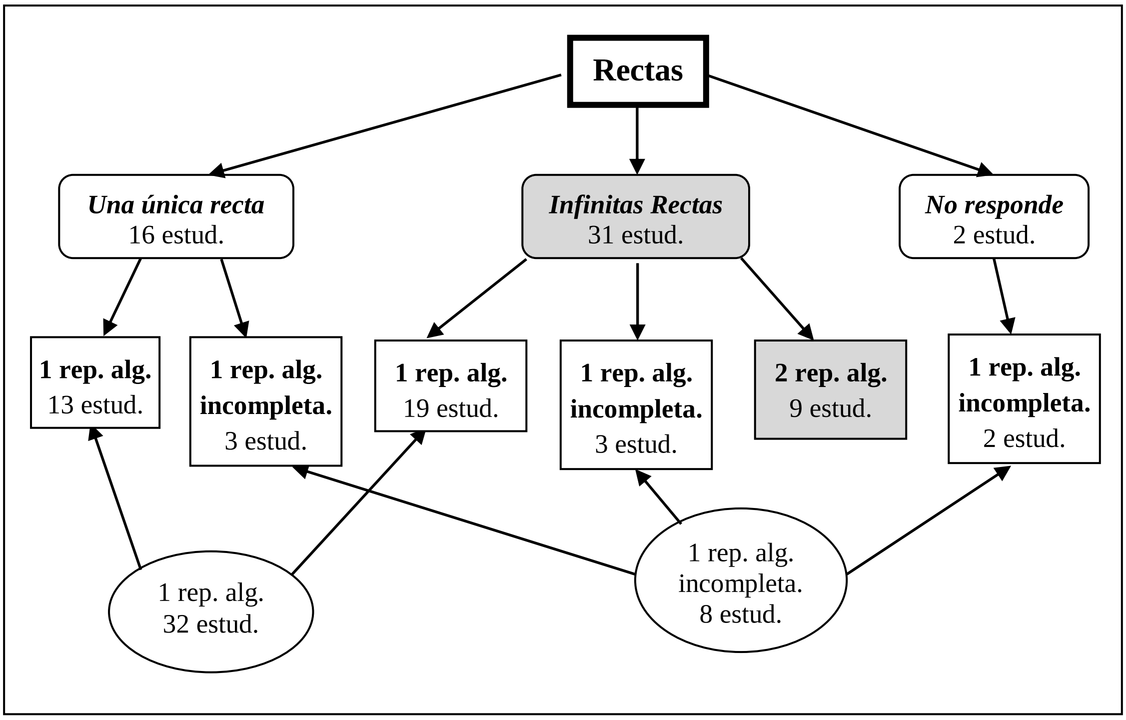


Diagrama 5. 15. Caracterización de las respuestas literales y algebraicas independientemente de las estrategias de resolución

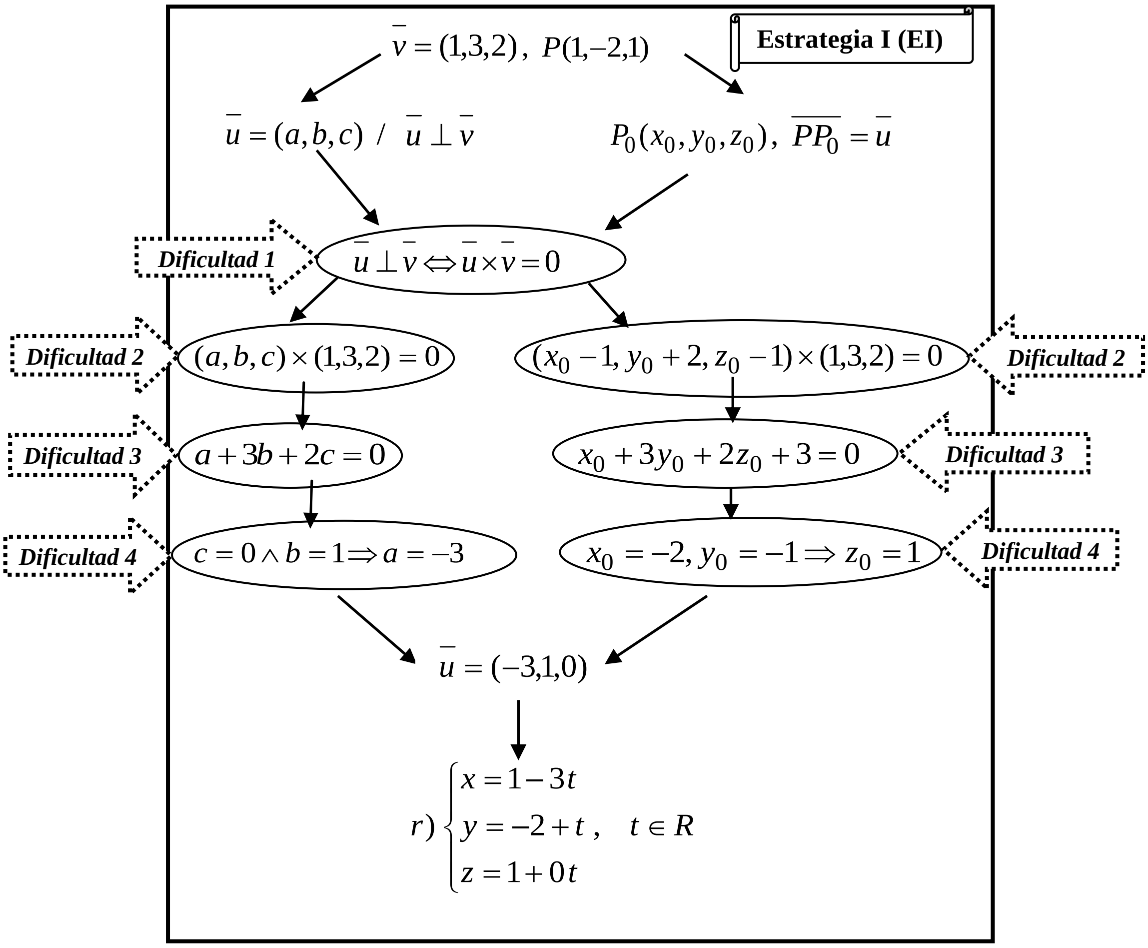
5.4.2 Fase 2. Análisis de las dificultades

-Acerca de las dificultades en los registros presentes en las estrategias válidas de resolución

Hemos observado que en cada una de las estrategias identificadas se revelaron diferentes dificultades. Algunas de ellas corresponden al abandono del proceso de resolución en etapas intermedias (efecto de cierre prematuro), mientras que otras se encuentran ligadas a la ausencia de interpretación del significado de las representaciones utilizadas en la búsqueda de soluciones.

A continuación, se retoman los seis esquemas de las representaciones semióticas presentados para cada una de las estrategias, remarcando ahora las dificultades halladas. Las mismas se caracterizan y enuncian en forma numérica, estableciéndose una tipología general, independiente de la estrategia. Así, por ejemplo, la dificultad llamada "Dificultad 6" puede encontrarse en varias estrategias.

Dificultades en la Estrategia I



Esquema 5. 9. Dificultades en las representaciones semióticas en la Estrategia I

En la evolución de esta forma de resolución se observaron las siguientes dificultades algebraicas, indicadas en el esquema anterior:

-*Dificultad 1*: corresponde a estudiantes que plantean la propiedad destacada (de producto escalar), pero no evolucionan en otra representación, es decir no realizan la actividad de tratamiento que implica expresar los vectores correspondientes en componentes y así continuar el proceso de búsqueda de $\bar{u}$.

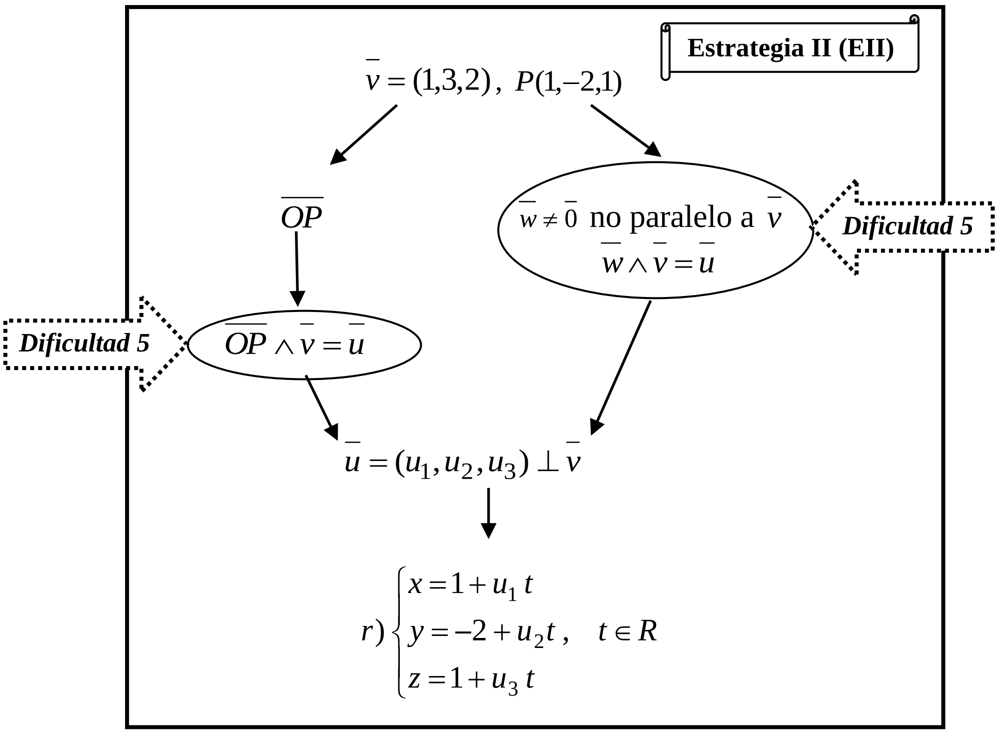
- *Dificultad 2*: presente en estudiantes que logran un tratamiento de una representación a otra (en registros algebraicos) al expresar cada vector en componentes, pero no evolucionan en otra representación en la búsqueda de $\bar{u}$.

- *Dificultad 3*: identificada en alumnos que aplican la operación de producto escalar, y mediante un tratamiento presentan una ecuación (registro algebraico), pero no la resuelven. Encontrar una solución particular, implica transitar de un registro algebraico a un registro numérico, es decir involucra una conversión, actividad que no se observa en este caso.

- *Dificultad 4*: corresponde a estudiantes que encuentran una solución particular de la ecuación (vector por componentes), la utilizan para explicitar ecuaciones que representan a una recta, pero no expresan ecuaciones de otra recta como se solicita en la consigna. En este caso, los alumnos no detectan que para diferentes valores de a, b y c (o de $x_0, y_{0,} z_0$) pueden considerarse infinitos vectores perpendiculares al vector $\bar{v} = (1,2,3)$, todos ellos con diferentes direcciones. Lo que implica la existencia de infinitas representaciones algebraicas correspondientes a las infinitas rectas posibles.

Los alumnos que respondieron que la recta es única no visualizan las cantidades variables presentes en su estrategia de resolución y la inconsistencia de su respuesta literal, dando cuenta de un sesgo de confirmación.

Dificultades en la Estrategia II



Esquema 5. 10. Dificultades en las representaciones semióticas en la Estrategia II

Dificultad 5: corresponde a estudiantes que presentan al vector $\overline{OP}$ ($\overline{w}$) como el único vector posible para realizar la operación de producto vectorial y obtener un vector dirección de una recta.

La existencia de infinitos vectores $\overline{w}$ a considerar para la aplicación de la operación de producto vectorial, implica la existencia de infinitos vectores $\overline{u}$. Los mismos, considerados como vectores dirección, permiten exhibir representaciones algebraicas de las distintas rectas posibles. Esta relación no es visualizada por algunos estudiantes en la búsqueda de ecuaciones de una segunda recta. En otros casos los alumnos dan muestra de un sesgo de confirmación, ya que no logran visualizar los diferentes vectores posibles y su relación con su respuesta literal, "la recta es única".

Es decir, los estudiantes no presentan dificultades al trabajar con un registro numérico ($\overline{OP}$), pero sí en los procesos de generalización ligados al registro algebraico. Tal generalización, transitar de un registro numérico a un registro algebraico implica una actividad de conversión que no se observa en el proceso de resolución de estos alumnos.

Dificultades en la Estrategia III

Estrategia III (EIII)

$$\overline{v} = (1,3,2)\ ,\ P(1,-2,1)$$

$$\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad a,b,c,d \in R$$

$$\overline{v} \perp \pi,\ \pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$$

$$P \in \pi:\ 1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

Dificultad 6 $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$

Dificultad 7 $y = z = 0 \Rightarrow x = -3.\ \mathrm{R(-3,0,0)} \in \pi$

$$\overline{PR} = (-4,2,-1) \perp \overline{v}$$

$$r)\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 2t\ , \quad t \in R \\ z = 1 - 1t \end{cases}$$

Esquema 5. 11. Dificultades en las representaciones semióticas en la Estrategia III

- *Dificultad 6*: presente en un estudiante que, si bien expresa una ecuación del plano π, no reconoce que el mismo contiene a las infinitas rectas, y responde que la recta es única. Esta dificultad reaparece en otros estudiantes que utilizaron alguna de las estrategias posteriores.
- *Dificultad 7*: corresponde a alumnos que presentan al punto R como el único posible para construir el vector $\overline{PR}$, sin reflexionar sobre la existencia de los infinitos puntos (R) pertenecientes al plano π, que determinan infinitas direcciones ($\overline{PR} \perp \bar{v}$) y de este modo las rectas posibles. Para el estudiante que respondió literalmente que la recta es única se presenta un sesgo de confirmación. Para quienes exhibieron una representación algebraica de una recta se evidencia la dificultad para plantear ecuaciones de representación de otra recta.

Es decir, no se observan dificultades en trabajar con un registro numérico ($\overline{PR}$), pero sí en el proceso de generalización, en la abstracción que implica el registro algebraico.

Dificultades en la Estrategia IV

Estrategia IV (EIV)

$$\bar{v} = (1,3,2),\ P(1,-2,1)$$

$$\downarrow$$

$$\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad a,b,c,d \in R$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v} \perp \pi,\ \pi)\ 1x + 3y + 2z + d = 0$$

$$\downarrow$$

$$P \in \pi :\ 1.1 + 3.(-2) + 2.1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

$$\downarrow$$

Dificultad 6 ⇒ $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$

$$\downarrow$$

Dificultad 8 ⇒ $\sigma)\ x = 1$

$$\downarrow$$

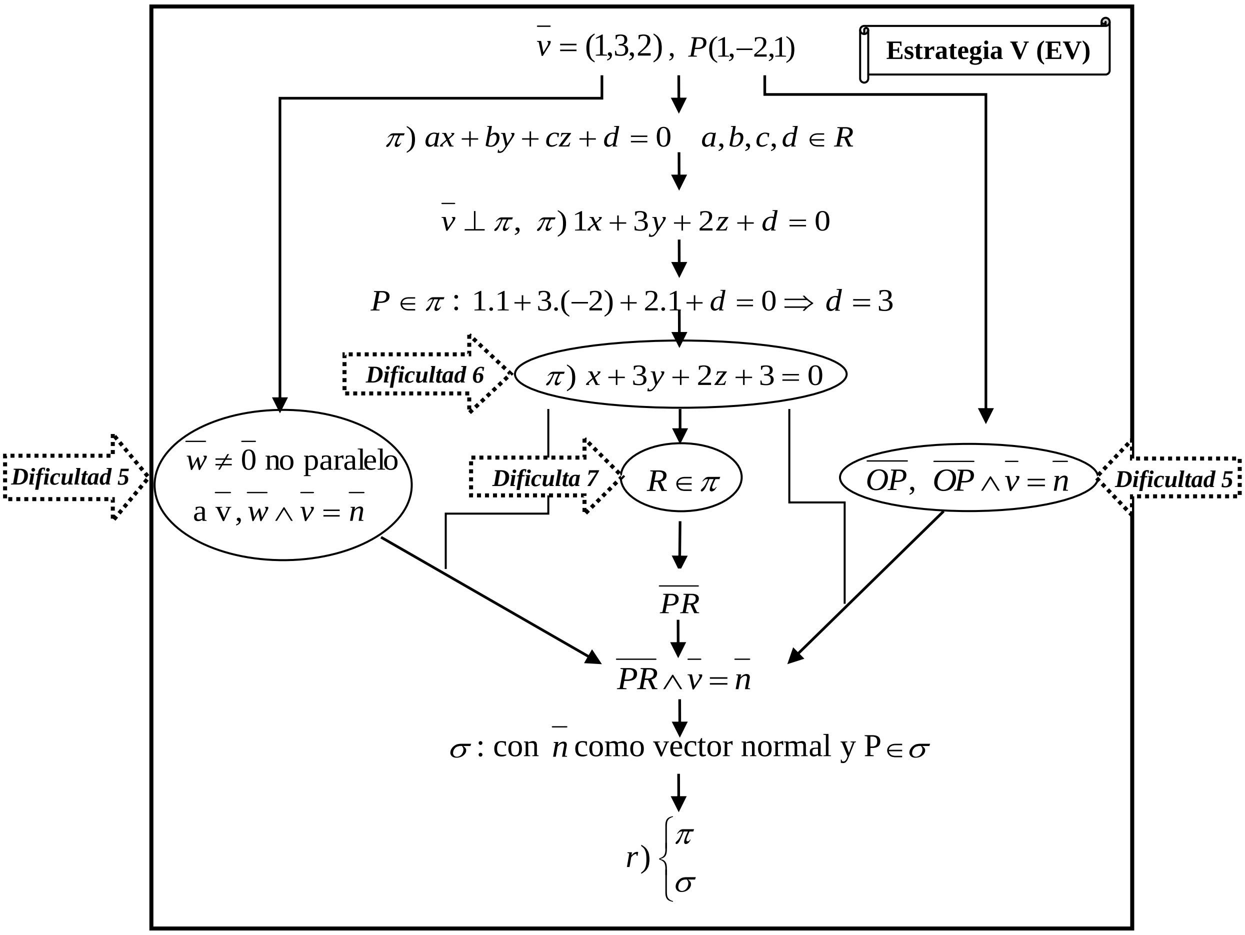
$$r) \begin{cases} x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Esquema 5. 12. Dificultades en las representaciones semióticas en la Estrategia IV

Reaparece la Dificultad 6, en estudiantes que si bien exhiben la ecuación del plano π no reconocen que el mismo contiene a las infinitas rectas soluciones.

- *Dificultad 8:* corresponde a estudiantes que exhiben representaciones algebraicas de una recta en forma general, donde la primera ecuación representa al plano π. Pero no advierten que la segunda ecuación corresponde a la representación de un plano cuya única condición es que el mismo contenga al punto P. Esta dificultad se presenta en los estudiantes que realizaron cálculos innecesarios, en el estudiante que expresa literalmente que la recta es única, en quienes no exhibieron ecuaciones de representación de una segunda recta y en los alumnos que no pudieron expresar las infinitas soluciones. Es decir, se observan sesgos de confirmación, dificultades en la visualización de los infinitos planos posibles a considerar y en los procesos de generalización.

Dificultades en la Estrategia V



Esquema 5. 13. Dificultades en las representaciones semióticas en la Estrategia V

En esta estrategia se detectan dificultades reconocidas anteriormente que a continuación se caracterizan para este caso en particular.

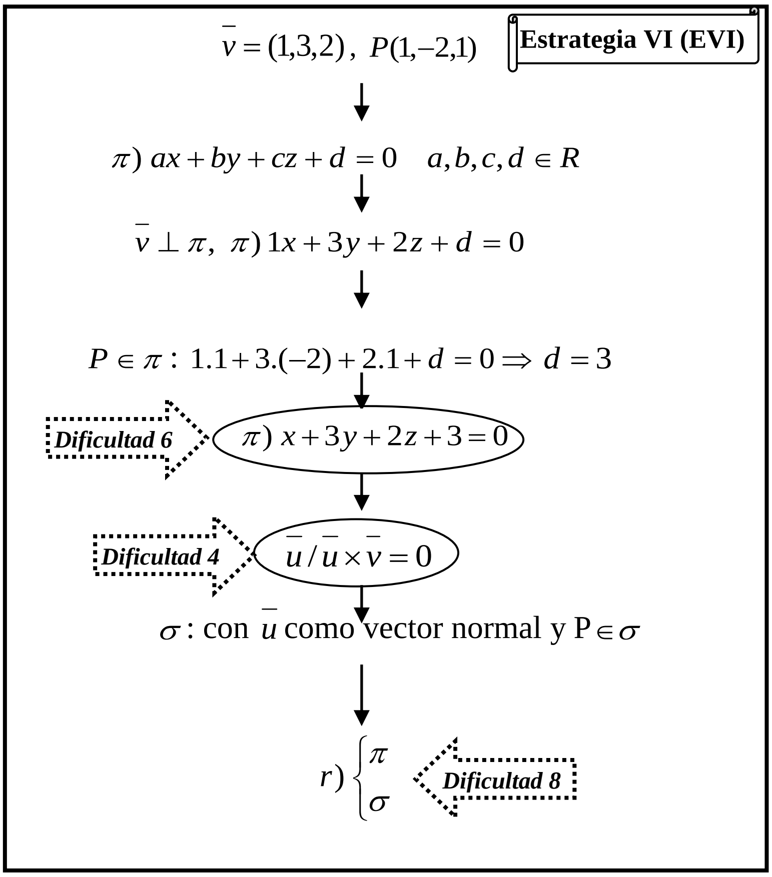
Dificultad 5: corresponde a estudiantes que presentan al vector $\overline{OP}$ ($\overline{w}$) como el único vector posible para realizar la operación de producto vectorial y obtener el vector $\overline{n}$. La existencia de infinitos vectores a considerar para la aplicación de la operación de producto vectorial, implica la existencia de infinitos vectores $\overline{n}$. Los mismos, permiten expresar una ecuación que represente a un segundo plano y exhibir representaciones de las distintas rectas posibles. Esta relación no es visualizada por algunos estudiantes en la búsqueda de ecuaciones representativas de una segunda recta.

Un alumno da muestra de un sesgo de confirmación, ya que no logra visualizar la posible variación de vectores y su relación con su respuesta literal: “la recta es única”.

La *Dificultad 6*: corresponde a los alumnos que no reconocen que el plano π contiene a las infinitas rectas.

Dificultad 7: identifica a estudiantes que no reflexionan que existen infinitos puntos (R) pertenecientes a π, por lo cual existen infinitos vectores ($\overline{PR}$) de modo tal que al realizar el producto vectorial permiten considerar los posibles vectores $\overline{n}$. Es factible así construir ecuaciones que representan diferentes planos, cuyas intersecciones con el plano π admiten la representación de las rectas con las condiciones requeridas.

Dificultades en la Estrategia VI



Esquema 5. 14. Dificultades en las representaciones semióticas en la Estrategia VI

Reaparecen en este caso las llamadas *Dificultad 6, Dificultad 4* y *Dificultad 8*. El estudiante que aplicó esta estrategia no reconoce qué representa el plano π y tampoco que existen infinitos vectores $\bar{u}$ cuyo producto escalar con $\bar{v}$ resulta ser cero y por lo tanto se pueden construir ecuaciones que representan diferentes planos, cuyas intersecciones con el plano π permiten obtener una representación de las posibles rectas.

- Acerca de la dificultad asociada al significado del plano π en estudiantes que aplicaron una estrategia válida de resolución

Las estrategias EIII, EIV, EV y EVI presentan en su desarrollo el tratamiento de la ecuación del plano $\pi)\ x+3y+2z+3=0$. De los veintidós estudiantes que han aplicado alguna de las estrategias mencionadas, ocho reconocen que el mismo contiene a las infinitas rectas perpendiculares al vector $\bar{v}$, que además contienen al punto P. Mientras que el resto, catorce alumnos, no reconocen dicha característica.

Por otro lado, siete estudiantes que aplican la estrategia EI o EII -que no requieren de una representación de un plano-, presentan sin embargo, la ecuación $\pi)\ x+3y+2z+3=0$. Dos de ellos reconocen el significado de esta representación, mientras que los otros cinco alumnos no realizan ninguna mención sobre la ecuación. Es decir, los datos del enunciado (un vector $\bar{v}$ y un punto P), "condicionan" a estos estudiantes a presentar dicha ecuación, realizando cálculos superfluos y un procedimiento mecánico, ausente de reflexión. Se detecta así un sesgo cognitivo de fijación que los induce a aplicar una estrategia para hallar una ecuación de un plano, sin una finalidad específica, determinando un cálculo "inerte" dentro de su proceso de resolución.

En el siguiente diagrama (que se ampliará posteriormente incorporando al resto de los estudiantes) se sintetiza esta información. En el mismo, los recuadros de línea punteada destacan la presencia de la dificultad 6 mencionada anteriormente.

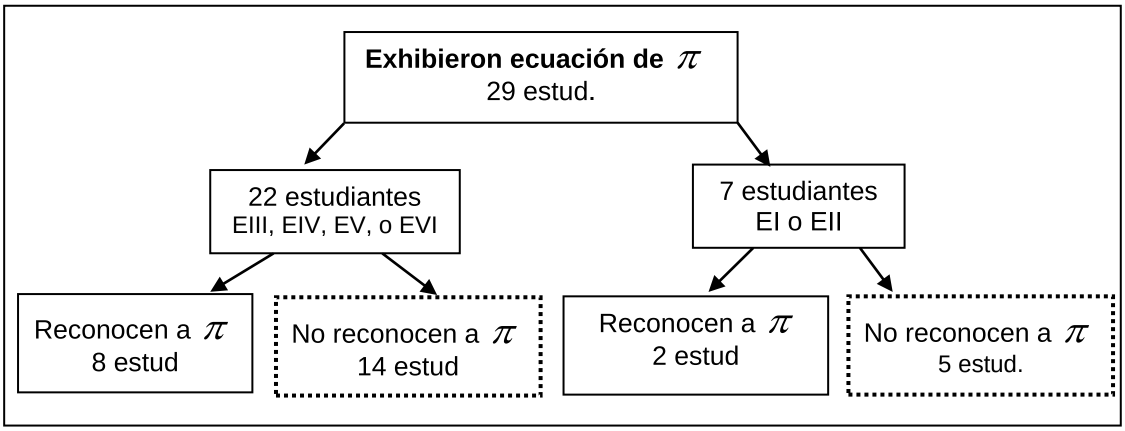


Diagrama 5. 16. Dificultad asociada al reconocimiento del plano en estudiantes que aplicaron una estrategia válida de resolución

-Acerca de las dificultades en las respuestas literales de los estudiantes que aplicaron una estrategia válida de resolución

- Se observa (Diagrama 5.15) que 16 estudiantes expresan literalmente que existe una única recta y aplican alguna estrategia de resolución correcta en la búsqueda de ecuaciones que la representen. Sin embargo, no logran en el transcurso de su resolución detectar la incoherencia de su respuesta literal, presentando un sesgo de confirmación. Esto se evidencia en la ausencia de significado de las variables en cada estrategia particular de resolución como se describió anteriormente (Dificultades 4, 5, 7 y 8).

- Quince estudiantes justificaron su respuesta ante la pregunta: "*¿Por qué no existen otras rectas?"*

Hemos mencionado que se han encontrado características similares en las respuestas independientemente de la forma de resolución utilizada. Ahora retomaremos los cuatro tipos de respuestas incorrectas que hemos denominado T1, T2, T3 y T4, caracterizándolos independientemente de la estrategia aplicada. A continuación, se presenta un análisis de las argumentaciones encontradas transcribiendo una respuesta representativa para cada tipo.

T1: corresponde a estudiantes que "repiten" las condiciones del enunciado para justificar su respuesta, (8 estudiantes: 5 aplican EI y 3 la EII).

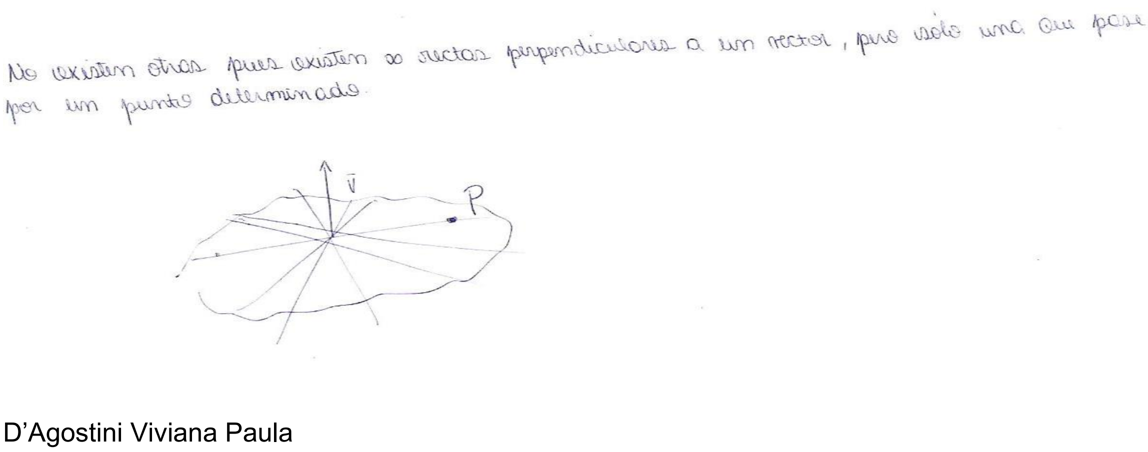
"No, existe una única recta que pasa por el punto P y es perpendicular a $\bar{v}$*".*

Puede dilucidarse que estos estudiantes, aferrándose a sus creencias, revelan una incapacidad para argumentar sus respuestas.

T2: Se presenta en estudiantes que visualizan la existencia de infinitas rectas perpendiculares al vector $\bar{v}$ pero para ellos sólo una de ellas podrá contener además al punto P, (5 estudiantes: 2 aplican EI, 1 la EII, 1 la EIII y 1 la EIV).

"No existe otra recta que cumpla con la condición de a), ya que puede haber infinitas rectas perpendiculares a $\bar{v}$*, pero sólo una pasará por P".*

A modo de ejemplo se escanea un dibujo realizado por uno de los cinco estudiantes mencionados.



Puede interpretarse que, como en este último caso, algunos estudiantes implícitamente consideren las rectas "pegadas" al origen del vector $\bar{v}$, dando muestra de dificultades en la comprensión del concepto de vector libre, y una visión "semiligada" a la geometría plana como se representa a continuación.

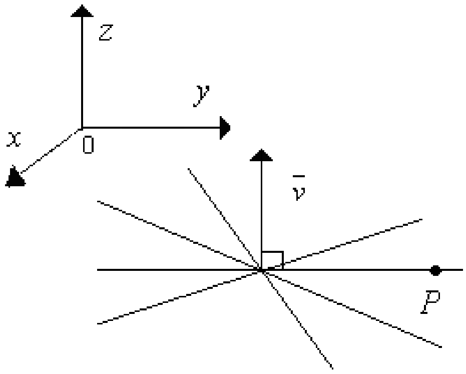


Figura 5. 6

En otros casos es posible que estas respuestas estén asociadas a una visión completamente ligada al plano, como lo refleja el siguiente gráfico:

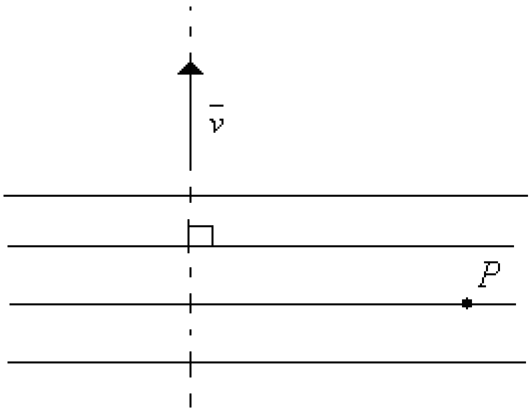


Figura 5. 7

T3: Corresponde a un estudiante que considera la existencia de infinitas rectas que contienen al punto P, pero sólo una de ellas podrá ser perpendicular al vector $\bar{v}$. (Este estudiante aplica la EII).

"*Existe solo una recta perpendicular a $\bar{v}$ y que contenga a P. Porque hay infinitas rectas que pasan por P, pero sólo una que es perpendicular a $\bar{v}$".*

Puede considerarse que esta respuesta presenta una visión "semiligada" a la perpendicularidad en el plano, como se representa a continuación.

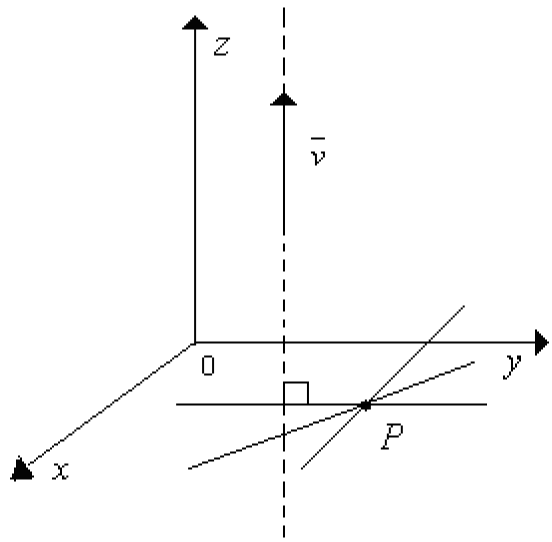


Figura 5. 8

T4: Reconocida en un estudiante que considera que el vector $\bar{v}$ debe tener extremo en el punto P.

"No, en este caso solo existe una recta que cumple con las condiciones planteadas. Porque si bien podrían existir vectores paralelos, solo hay uno que contenga al punto P". (Este estudiante aplica la EI).

A continuación, se presenta una interpretación de esta respuesta a través de la figura 5.9.

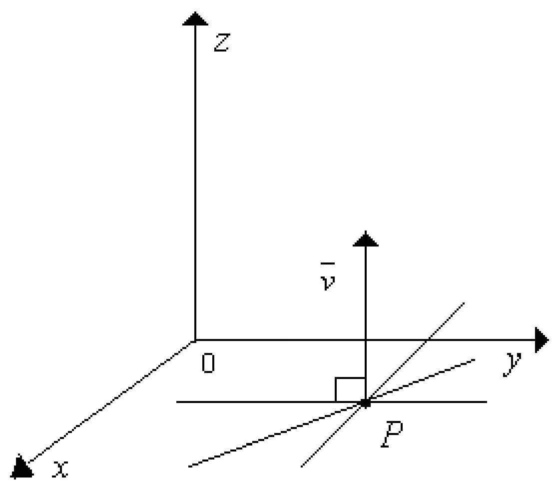


Figura 5. 9

Como se ha mencionado, hasta aquí se han analizado estrategias y dificultades correspondientes a las respuestas de los 49 estudiantes que han expresado al menos una representación algebraica completa o incompleta de una recta perpendicular a $\bar{v}$ y que contiene a P. A partir de ahora, considerando los 36 alumnos restantes de la muestra, se amplía las descripción de errores y dificultades detectadas.

- Acerca de la dificultad asociada al significado del plano π en la totalidad de la muestra

Se destaca que, de la muestra de 85 estudiantes, la ecuación del plano $\pi)\ x+3y+2z+3=0$ fue exhibida por un total de 48. Para algunos, su estrategia de resolución requiere o facilita la utilización de esta representación de π. Otros alumnos, que también presentan la ecuación, no la utilizan en su proceso de resolución, estableciendo un cálculo inactivo producto de un sesgo de fijación.
Como se ha mencionado, existen estudiantes que reconocen que el plano π contiene a las infinitas rectas perpendiculares al vector $\bar{v}$, que además contienen al punto P, pero en otros alumnos no se encuentran evidencias de su reconocimiento.
En el diagrama 5.16 hemos destacado la información pertinente a los estudiantes que aplicaron alguna de las estrategias de resolución descriptas y presentan en su resolución el tratamiento de la ecuación del plano $\pi)\ x+3y+2z+3=0$ sin reconocer en algunos casos su significado. Ampliando este estudio al resto de los estudiantes de la muestra se recabó la información que se presenta en el siguiente diagrama:

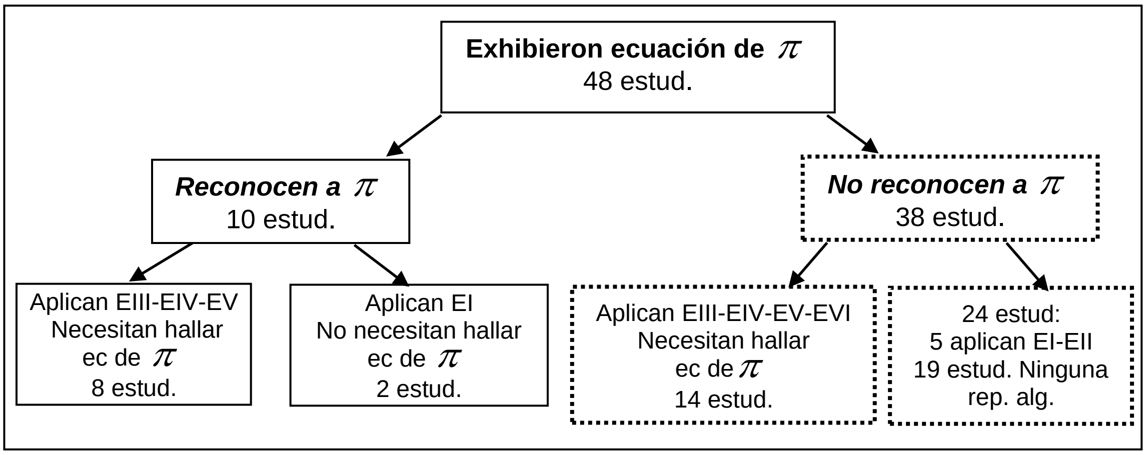


Diagrama 5. 17. Dificultad asociada al reconocimiento del plano en el total de la muestra

Como puede observarse en el diagrama 5.17:

- Diez estudiantes reconocen que la ecuación $x+3y+2z+3=0$ representa un plano que contiene a las infinitas rectas perpendiculares al vector $\bar{v}$ y que además contienen al punto P. De ellos, ocho estudiantes han utilizado alguna de las estrategias EIII, EIV, o EV, y hallar una ecuación que representa a π forma parte de su estrategia de resolución. No es el caso de los otros dos estudiantes que aplican la estrategia EI, ya que esta forma de resolución no requiere de una representación de un plano.
- Los treinta y ocho estudiantes restantes no indican qué representa la ecuación de π. De ellos, catorce alumnos han utilizado alguna de las estrategias EIII, EIV, EV o EVI. De los veinticuatro estudiantes restantes, cinco han expresado ecuaciones que representan a una recta utilizando la EI o la EII, que no requería de una representación de π y el resto de los alumnos no aplica una estrategia de resolución correcta y por lo tanto no logra exhibir ninguna representación de una recta.

- Acerca de las dificultades asociadas a la identificación de la representación de un plano como la representación de una recta

Corresponde a 17 estudiantes que expresan una ecuación que representa a un plano como si fuera la representación de una recta. De ellos, doce expresan la ecuación del plano $\pi)\ x+3y+2z+3=0$ como si representara una ecuación de una posible recta solución.

Los restantes cinco estudiantes exhiben una ecuación que representa a otro plano, como se describe a continuación:

- Según los datos $\bar{v}=(1,3,2)$ y P(1,-2,1), un estudiante considera el vector que llama $\overline{VP}=(0,-5,-1)$, aplica luego la operación de producto vectorial $\overline{VP}\wedge\bar{v}=(-7,-1,5)$. Y considerando el vector hallado como normal al plano, que además contiene a P, presenta la ecuación: $-7x-y+5z=0$.
- Otro estudiante aplica la operación de producto vectorial $\bar{v}\wedge\overline{OP}=(7,1,-5)$, con el vector obtenido y el punto P, construye la ecuación: $-7x-y+5z=0$.

- Los otros dos alumnos construyen una ecuación que representa un plano, tomando P como vector normal y a $\bar{v}$ como punto de paso. Es decir, estos dos estudiantes evidencian confusiones entre significado y representación de punto y vector.
- Un estudiante involucrando la operación de producto escalar, exhibe erróneamente los siguientes cálculos: $\overline{OP} \times \bar{v} = (1,-2,1) \times (1,3,2) = (1,-6,2)$. Con el vector obtenido como normal a un plano, que además contiene a P, presenta la ecuación: $x - 6y + 2z - 15 = 0$.

Las concepciones erróneas puestas de manifiesto al expresar una ecuación que representa a un plano como si representara a una recta, quizás tenga su origen en la forma de construcción de una ecuación general de una recta "en el plano". Efectivamente, si los datos considerados son las componentes de un vector $\bar{n} = (a,b)$ normal a una recta y un punto $P(x_0, y_0)$ de ella, puede construirse una ecuación que la representa, que tendrá la forma: $r)\ ax + by + c = 0$.

Los pasos utilizados por estos estudiantes evidencian el seguimiento de esta construcción, manifestando un sesgo de fijación. Es decir, la presencia en el enunciado de los datos -un vector $\bar{v}$ y un punto P-, los moviliza a aplicar una estrategia de construcción de una ecuación que representa a una recta en el plano, en otro contexto -el espacio- donde no tiene validez.

- Acerca de otras dificultades detectadas

En la muestra compuesta por 85 estudiantes, hemos analizado las resoluciones de 49 alumnos que han realizado de forma completa o incompleta alguna de las seis estrategias válidas descriptas, y posteriormente de 17 estudiantes que exhiben una ecuación que representa a un plano como si representara a una de las rectas con las condiciones de la situación problemática planteada. A continuación, se presenta una descripción y análisis de los protocolos de los 19 alumnos restantes.

- Cinco alumnos represetan una recta a través de ecuaciones paramátricas. De ellos, dos exhiben erróneamente como vector dirección a $\bar{v}$. Un estudiante utiliza las componentes del vector $\bar{v}$ como coordenadas de un punto de paso y las coordenadas del punto de paso P como componentes de un vector dirección. Dos alumnos exhiben como vector dirección vectores no peprpendiculares a $\bar{v}$.

- Dos estudiantes exhiben sólo la ecuación que representa al plano π y expresan literalmente que la única recta existente con las condiciones requeridas se encuentra contenida en dicho plano.
- Tres estudiantes expresan una representación de una recta en forma general, donde uno de los planos es expresado a través de la ecuación $\pi) x+3y+2z+3=0$ y el segundo plano no cumple con los requerimientos de la situación. Uno de ellos presenta como segunda ecuación una equivalente a la de π, otro alumno exhibe una ecuación del plano coordenado OXY y el tercero expresa una ecuación de un plano, que no contiene al punto P.
- Seis estudiantes sólo repiten los datos expresados en registros numéricos del enunciado.
- Tres alumnos aplican cálculos confusos en la búsqueda de un vector, sin especificar con qué objetivo, y abandonan su proceso de resolución.

Los protocolos de estos estudiantes ponen de manifiesto el uso de reglas algebraicas de un modo arbitrario y sin fundamentación significativa, con escasa base conceptual.

- Acerca de las dificultades en las respuestas literales en la totalidad de la muestra

En cuanto a las respuestas literales de los 36 estudiantes que no aplican ninguna estrategia de resolución correcta se ha observado, en algunos de ellos, la aparición de argumentaciones que pueden caracterizarse según la tipología ya descripta en el resto de los estudiantes. A continuación, estos alumnos se incorporan a la tipología creada.

- T1: corresponde a 13 estudiantes que “repiten” las condiciones del enunciado para justificar su respuesta.

“No, existe una única recta que pasa por el punto P y es perpendicular a $\bar{v}$*”.*

A los 8 estudiantes que aplicaron EI o EII correspondientes a T1 se suman 5 alumnos.

- T2: Se presenta en 9 estudiantes que visualizan la existencia de infinitas rectas perpendiculares al vector $\bar{v}$ pero para ellos sólo una de ellas podrá contener además al punto P.

"No existe otra recta que cumpla con la condición de a), ya que puede haber infinitas rectas perpendiculares a $\bar{v}$, pero sólo una pasará por P".

A los 5 estudiantes que aplicaron EI, EII, EIII y o EIV se incorporan 4 alumnos.

-T3: Corresponde a un estudiante que considera la existencia de infinitas rectas que contienen al punto P, pero sólo una de ellas podrá ser perpendicular al vector $\bar{v}$.

"*Existe solo una recta perpendicular a $\bar{v}$ y que contenga a P. Porque hay infinitas rectas que pasan por P, pero solo una que es perpendicular a $\bar{v}$".*

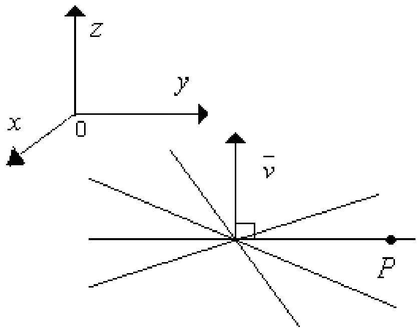
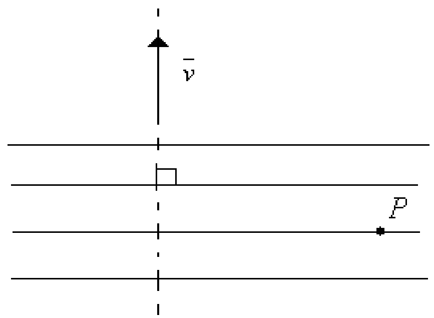
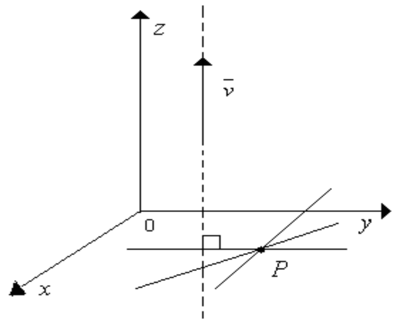
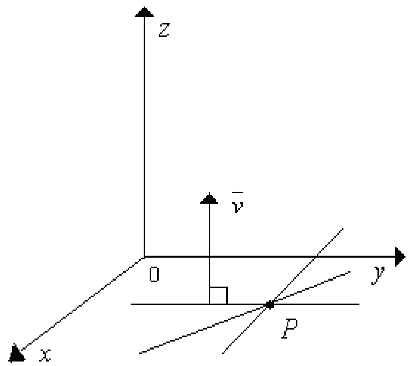
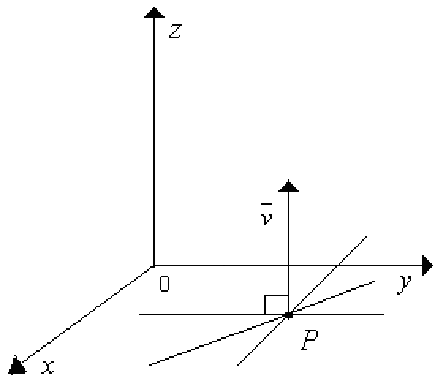
No hay ningún estudiante, de los 36, que corresponda a esta tipología; sólo el estudiante que aplica la estrategia correcta EII se encuentra presente en la misma.

-T4: Reconocida en dos estudiantes que consideran que el vector $\bar{v}$ debe tener extremo en el punto P.

"No, en este caso solo existe una recta que cumple con las condiciones planteadas. Porque si bien podrían existir vectores paralelos, solo hay uno que contenga al punto P". Este estudiante aplica la estrategia EI.

Se presenta otro alumno que expresa: *"No, en el único caso que existan otras rectas es que el punto P pertenezca a $\bar{v}$".*

Finalmente, es posible caracterizar las respuestas literales analizadas como se observa en el cuadro 5.4, poniéndose en evidencia las dificultades ligadas a la perpendicularidad en el plano.

T1: "No, existe una única recta que pasa por el punto P y es *perpendicular a $\bar{v}$".*	**T2:** *"No existe otra recta que cumpla con la condición de a), ya que puede haber infinitas rectas perpendiculares a $\bar{v}$, pero solo una pasará por P".*	**T3: "***Existe solo una recta perpendicular a $\bar{v}$ y que contenga a P. Porque hay infinitas rectas que pasan por P, pero solo una que es perpendicular a $\bar{v}$".*	**T4:** *"No, en este caso solo existe una recta que cumple con las condiciones planteadas. Porque si bien podrían existir vectores paralelos, solo hay uno que contenga al punto P".*
Los estudiantes, aferrándose a sus creencias, revelan una incapacidad para argumentar sus respuestas.	Visión "semiligada" a la perpendicularidad en el plano.  Visión ligada al plano. 	Visión "semiligada" a la perpendicularidad en el plano.  	Visión "semiligada" a la perpendicularidad en el plano. 

Cuadro 5. 4. Dificultades presentes en las respuestas literales

- Acerca de las dificultades asociadas al concepto de vector libre

En el análisis de las argumentaciones correctas de los estudiantes se ha mostrado que algunas se encuentran asociadas a la comprensión del concepto de vector libre. En otros casos, el discurso de los alumnos evidenció las dificultades en el tema. Efectivamente, durante el relato de los estudiantes entrevistados se rescatan algunas frases representativas de este hecho que se transcriben a continuación. Las expresiones destacadas entre comillas dan cuenta de las dificultades ligadas al concepto de vector libre.

Tesista (T): *(…) ¿cuántos vectores perpendiculares hay a* $\bar{v}$ *?*

Alumno (A1): *Infinitos,*

T: *bien y vos necesitás uno,*

A1: *sí pero lo que yo sé es que tengo el punto P, entonces tengo que encontrar el “vector dirección que contenga a P” (…)*

A2: *(…) Escribí “el plano que contenía al vector” este que saqué (…)*

T: (*…) este es un segundo plano,*

A3*: (…) “es el que contiene a* $\bar{v}$ *” (…) entonces la condición que deberían cumplir es que el vectorial de los vectores normales sea “un vector que pase por P” (…)*

T: *(…) ¿Ahora esas infinitas rectas están?*

A4: *contienen a C, además “cortan al vector”*

T: *¿Las infinitas rectas cortan al vector?*

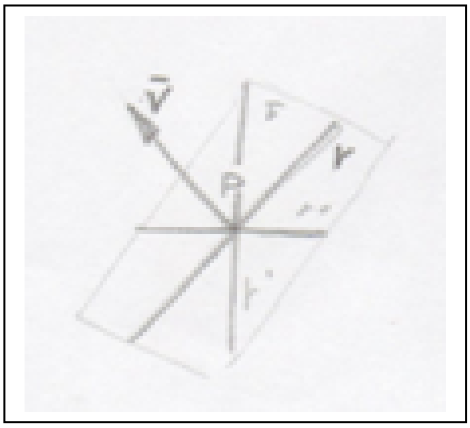
A4: *eso parece (…)*

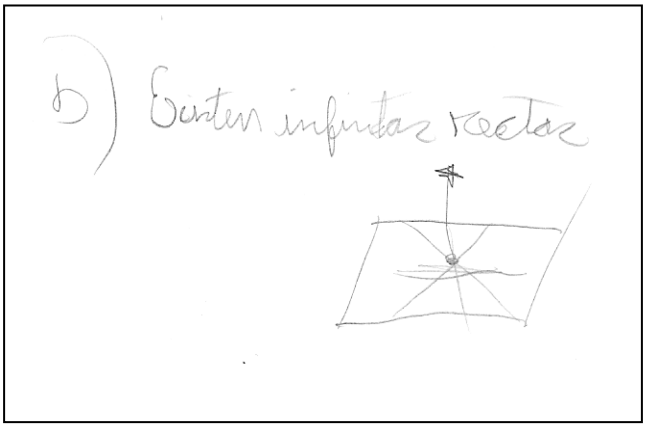
A5: …si incluso me costó más álgebra al principio que análisis me costó el primer parcial de álgebra me costó mucho más que el primer parcial de análisis, vectores fue mortal para mí, yo nunca había dado vectores y el choque de vectores en la primera semana de clase era difícil.

A6: …me cuesta del plano al espacio. Yo en el secundario no di nada en el espacio.

T: ¿Y el tema vectores habías visto en el colegio?
Creo que en Física en tercer año, pero igual cuando empezamos no me acordaba de nada.

Por otro lado, ya hemos mencionado que en algunos estudiantes se observa "la necesidad" de representar al vector $\bar{v}$ "pegado" a las rectas, característica que quizás en algunos haya condicionado su respuesta errónea. Sin embargo, en otros estudiantes en los cuales también se observó esta misma característica al momento de dibujar, exhibieron una respuesta literal correcta, como lo muestran los protocolos de resolución de dos estudiantes que se muestran a continuación.





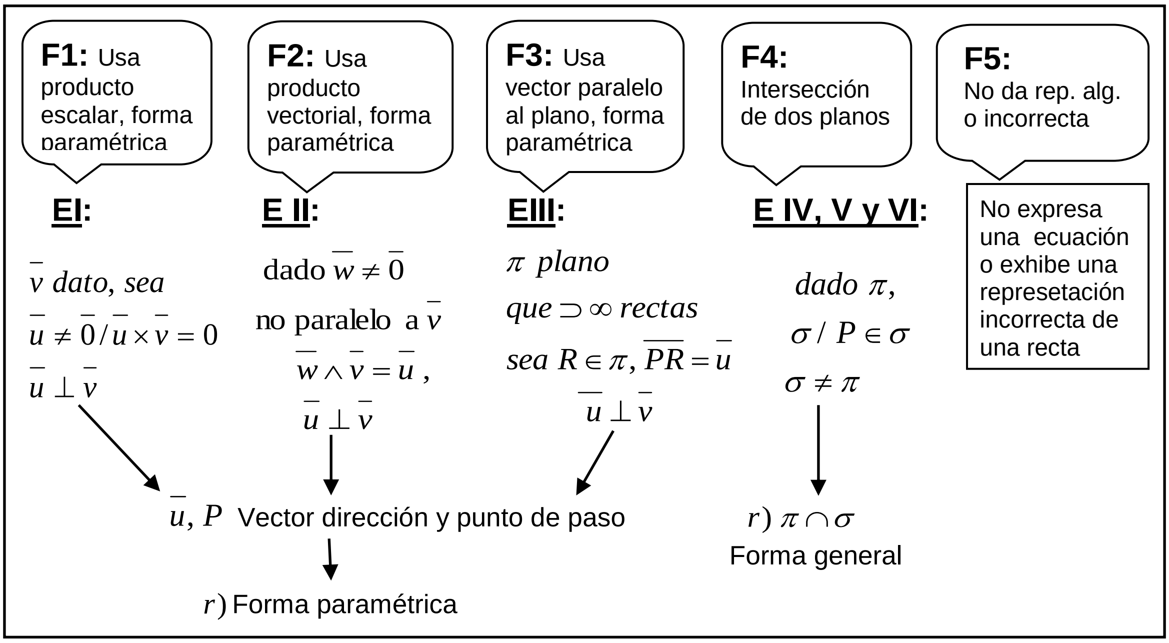
5.4.3 Fase 3. Análisis global cuantitativo

Como se ha descripto en la fase 1, una de las variables a considerar en la SPII es "Número de rectas". Las respuestas encontradas en los protocolos sobre la cantidad de rectas existentes con las condiciones del problema, permitieron definir las modalidades: "Una única recta", "Infinitas rectas" o "No responde".

La segunda variable definida es "Número de representaciones algebraicas", que corresponde al número de rectas que el estudiante representa mediante la explicitación de ecuaciones. La misma, presenta diferentes modalidades: "Una representación algebraica incompleta", que corresponde a estudiantes que intentan expresar mediante ecuaciones una recta pero realizan su estrategia de forma incompleta; "Una representación algebraica", que identifica a quienes expresan ecuaciones para representar una recta; "Al menos dos representaciones algebraicas", presente en alumnos que logran mostrar ecuaciones para representar dos rectas distintas, o que expresan ecuaciones que representan a una recta y además argumentan cómo construirían ecuaciones para representar a una de las infinitas rectas existentes; y "Ninguna representación algebraica o incorrecta", correspondiente a los casos en que no expresan ecuaciones que representen a una recta o aplican una estrategia incorrecta.

Finalmente, la tercera variable "Forma de la representación algebraica" se refiere a las diferentes líneas de razonamiento o estrategias utilizadas para enunciar tales representaciones.

El esquema 5.8 de la fase 1, permitió la definición de las modalidades que denominaremos: F1 si el estudiante ha utilizado la estrategia EI, F2 si ha aplicado la EII, F3 si ha usado EIII y F4 si ha utilizado EIV, EV o EVI; F5 si no ha expresado ninguna representación algebraica o ha realizado una estrategia incorrecta. Las mismas se presentan en el esquema siguiente.



Esquema 5. 15. Caracterización de las estrategias

Por lo tanto, las modalidades mutuamente excluyentes de cada variable han quedado conformadas como se muestra en la tabla 5.5.

DIMENSIÓN	VARIABLES	MODALIDADES
Algebraica ***SPII***	***N º de rectas***	***No responde***
		Una única recta
		Infinitas rectas
	N º de representaciones algebraicas	***Una rep. alg. incompleta***
		Una rep. alg.
		Al menos dos rep. alg.
		Ninguna rep. alg. o incorrecta
	Forma de la representación algebraica	***Usa producto escalar, forma paramétrica*** **F1**
		Usa producto vectorial, forma paramétrica **F2**
		Usa vector paralelo al plano, forma paramétrica **F3**
		Intersección de dos planos **F4**
		No da rep. alg. o incorrecta **F5**

Tabla 5. 5. Variables y Modalidades de la SPII

Dado que este estudio involucra un gran número de individuos se recurrió al Análisis Multidimensional de Datos (AMD) a fin de realizar un estudio global de la información a partir de la correspondiente matriz de datos donde cada fila presenta los datos asociados con cada individuo y las columnas las diferentes modalidades de las variables. La información organizada en esta matriz sirvió para la aplicación de un método de clasificación mixta en coordenadas factoriales mediante la aplicación del software SPAD (C.I.S.I.A-CERESTA, 1998). Este análisis que admitió la organización de los individuos en clases homogéneas y diferenciadas se presenta en el apartado siguiente.

Por otro lado, esta organización de los datos permitió realizar un análisis más exhaustivo de las particularidades en las respuestas. Efectivamente, de la matriz de datos pudo observarse que un total de 30 estudiantes respondieron literalmente que existe una única recta con las condiciones del problema, 39 alumnos expresaron que existen infinitas rectas, mientras que 16 no han respondido a la consigna.

Análisis multidimensional de datos

A través de la aplicación del método de clasificación automática del programa SPAD se obtuvo una partición de la muestra en cuatro grupos o clases como lo muestra el diagrama 5.18. Se detalla, a continuación, una caracterización de cada clase con las modalidades de las variables que más pesan en su conformación.

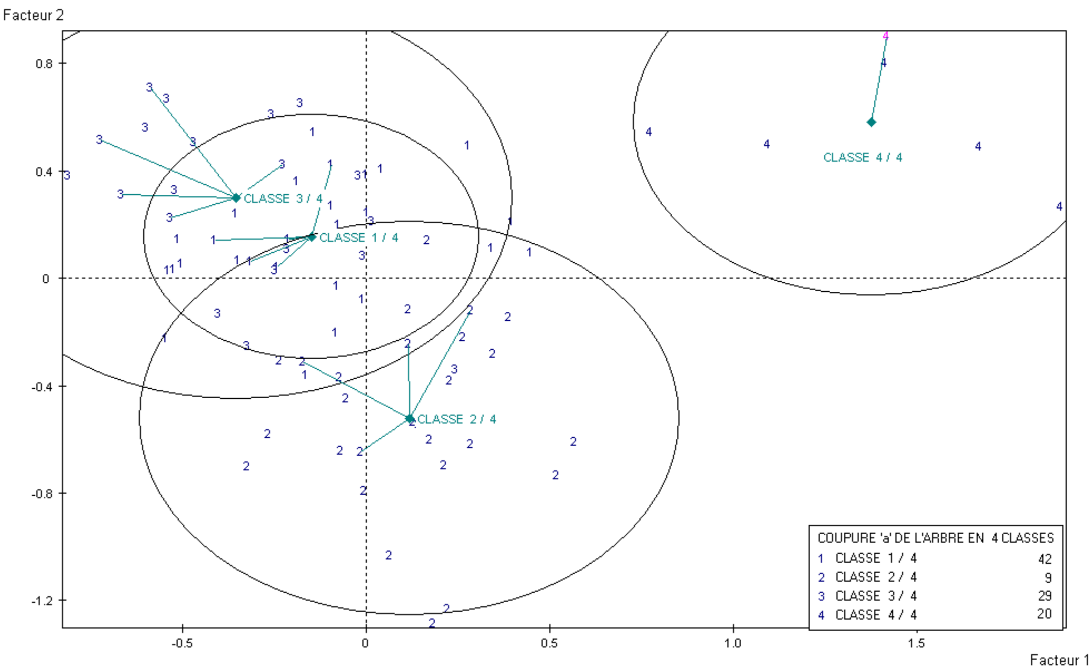


Diagrama 5. 18. Clasificación de individuos por afinidades en la resolución de la SPII

Clase 1: (formada por el 42 % de la muestra) Corresponde a 36 estudiantes que no lograron exhibir ninguna representación algebraica de una recta de forma correcta con las condiciones requeridas. Algunos alumnos no realizan especificaciones sobre las posibles soluciones de la situación problemática, otros expresan literalmente que existe una única recta.

Clase 2: (9 % de los estudiantes) Corresponde a 8 estudiantes que intentaron expresar una representación algebraica de una recta aplicando la forma de resolución EI mayoritariamente, pero realizan su estrategia de forma incompleta.

Clase 3: (29 % de la muestra) Presente en 24 estudiantes que exhibieron ecuaciones que representan a una recta presentándola en su mayoría en forma paramétrica. Esta clase es considerada con un nivel intermedio en cuanto a su desempeño en la resolución.

Clase 4: (20% de los estudiantes) Conformada por 17 estudiantes que respondieron literalmente que existen infinitas rectas con las condiciones requeridas. En su mayoría, lograron exhibir al menos dos representaciones algebraicas de dos rectas distintas utilizando la forma paramétrica, o han presentado una representación de una recta y además han caracterizado el conjunto solución. Se considera a este grupo como el que ha tenido el mejor desempeño en la resolución de la SPII.

5.5 Conclusiones de la SPII

Como ya hemos referido el enunciado de la SPII incluye registros coloquial, numérico y simbólico. Los estudiantes han presentado en sus protocolos registros coloquial, simbólico, numérico, algebraico y gráfico para expresar sus respuestas.
El estudio descripto en las tres fases permitió clasificar las dificultades encontradas en dos grupos que denominaremos dificultades generales (DG) y dificultades algebraicas (DA).

- Dificultades generales

A partir del análisis realizado se reconocen seis dificultades clasificadas como generales. A continuación, se completa el diagrama 4.7, identificando en él la aparición de las dificultades en cada etapa de resolución en función de los registros de representación de la SPII.

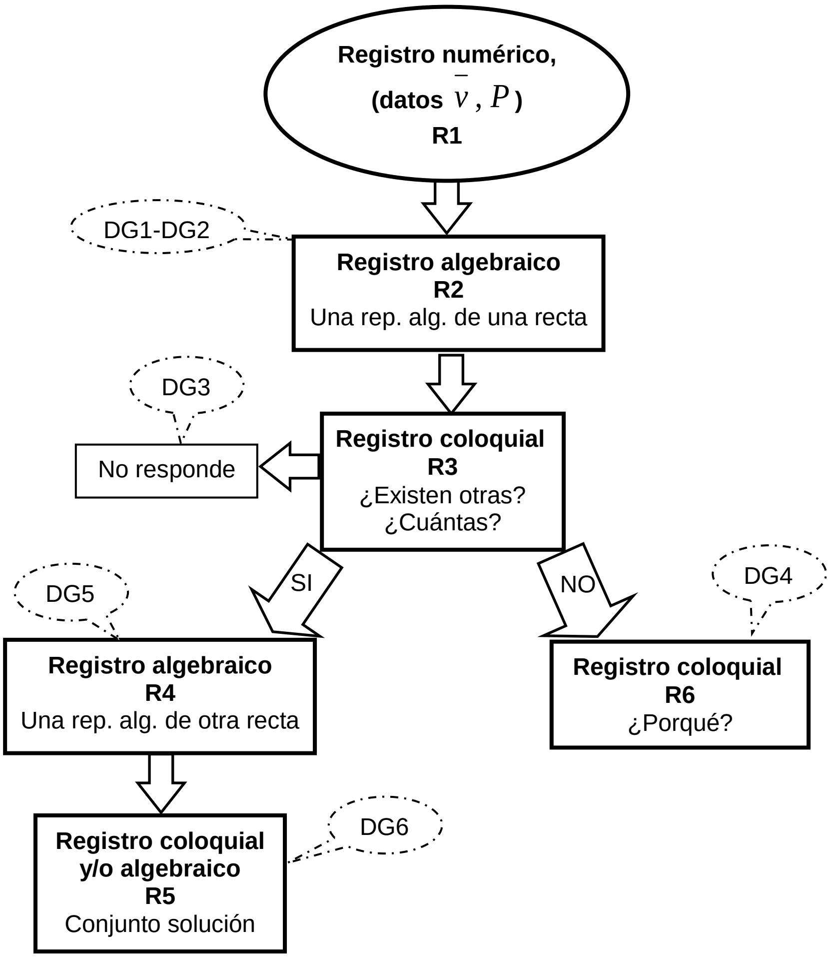


Diagrama 5. 19. Dificultades en las etapas de resolución de la SPII

Las dificultades generales (DG), se enumeran en forma creciente siguiendo el orden de las consignas de la situación problemática. A continuación, se definen y se ubican luego en un nuevo esquema, en función de los diferentes tipos de respuesta que constituyen las variables y modalidades definidas.

- DG1: corresponde a estudiantes que no expresan ecuaciones que representen a una recta.
- DG2: identifica a alumnos que expresan una representación algebraica en forma incompleta de una recta.
- DG3: presente en estudiantes que no responden acerca de la cantidad de rectas existentes con las condiciones requeridas.
- DG4: concierne a alumnos que responden erróneamente que la recta existente es única; aquí se incluyen los casos de quienes expresan ecuaciones que

representan a una recta, pero no reflexionan en “su” proceso de resolución sobre los registros que inciden en la existencia de infinitas rectas.

- DG5: atañe a estudiantes que responden correctamente que existen infinitas rectas, pero no logran exhibir ecuaciones de representación para una segunda recta, sin reflexionar en “su” forma de resolución sobre los registros involucrados en relación a la existencia de infinitas rectas.

- DG6: incumbe a alumnos que no logran expresar una descripción o caracterización de las infinitas rectas existentes, aun en los casos en que habiendo podido exhibir una o dos representaciones algebraicas de dos rectas, no reflexionan en “sus” etapas de resolución.

En el siguiente diagrama se ubican las dificultades generales en función de los diferentes tipos de respuesta que constituyen las variables y modalidades definidas.

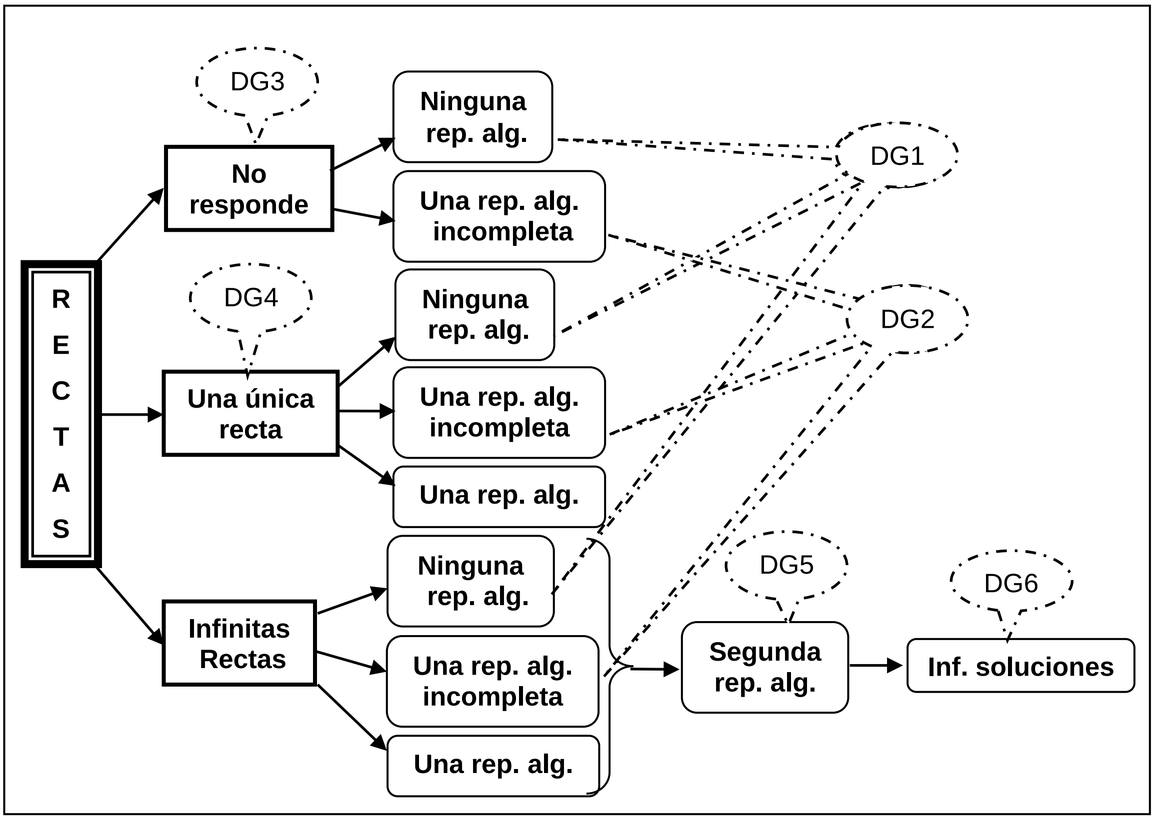


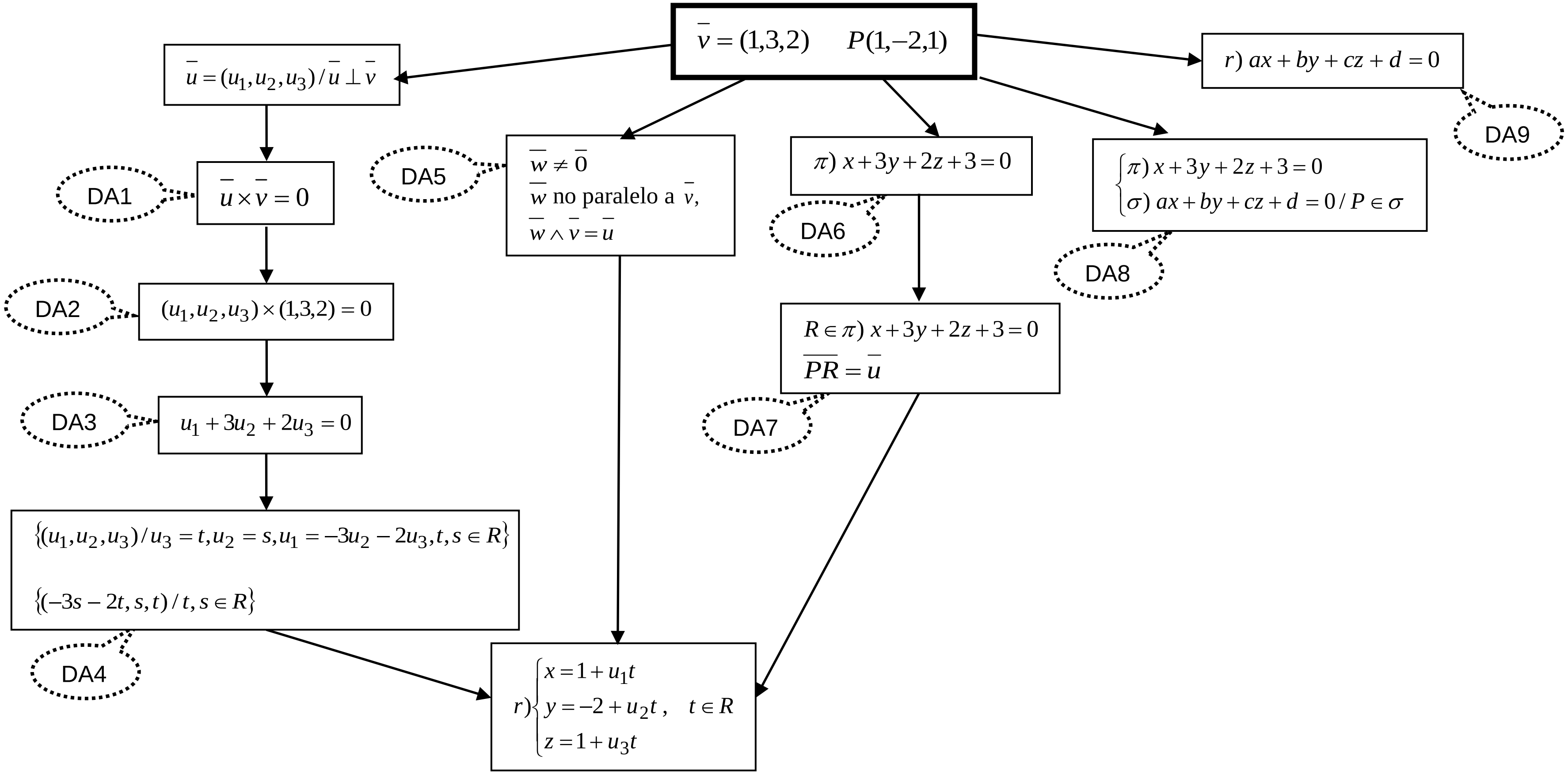
Diagrama 5. 20. Dificultades generales en las respuestas de los estudiantes

En función de las dificultades de carácter algebraico que se han descripto y analizado, a continuación, se caracterizan las más importantes, presentándolas en un listado común.

La clasificación planteada es independiente de la tipología de dificultades generales presentada anteriormente.

- Dificultades algebraicas

A partir del análisis realizado se reconocen nueve dificultades relevantes que nombraremos como algebraicas, que se presentan en el esquema 5.16 y se describen a continuación.



Esquema 5. 16. Dificultades algebraicas en las respuestas de los estudiantes

- DA1: corresponde a estudiantes que no reconocen la existencia de infinitos vectores $\bar{u}$, a expresar por componentes, que cumplan la propiedad $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \times \bar{v} = 0$ con $\bar{v} = (1,3,2)$.

- DA2: involucra a alumnos que expresan los vectores en función de sus componentes, plantean $(u_1, u_2, u_3) \times (1,3,2) = 0$ abandonando la resolución.

- DA3: atañe a alumnos que plantean una ecuación del tipo $u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0$ con tres incógnitas y no la resuelven.

- DA4: presente en estudiantes que exhiben una solución particular de la ecuación $u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0$, y suponen que es la única solución. No detectan que hay dos incógnitas que pueden variar libremente y así obtener infinitos vectores por componentes perpendiculares al vector $\bar{v} = (1,2,3)$.

- DA5: incumbe a alumnos que exhiben por componentes un vector $\bar{u}$ que resulta de aplicar la operación de producto vectorial $\bar{w} \wedge \bar{v} = \bar{u}$. Pero no observan que existen infinitos vectores $\bar{w}$, que al aplicar el producto vectorial permiten considerar la existencia de infinitos vectores $\bar{u}$ perpendiculares a $\bar{v}$.

- DA6: corresponde a estudiantes que exhiben la ecuación $\pi)\ x + 3y + 2z + 3 = 0$ que representa un plano, sin reconocer que el mismo contiene a las infinitas rectas.

- DA7: presente en alumnos que exhiben el vector $\overline{PR} \perp \bar{v}$ donde R es un punto perteneciente al plano π, sin reflexionar que hay infinitos puntos pertenecientes al mismo, que permiten considerar infinitos vectores $\overline{PR}$ con distintas direcciones.

- DA8: implica a estudiantes que exhiben una representación de una recta como intersección de dos planos. No reconocen la existencia de infinitos planos cuya intersección con el plano π permitirían obtener representaciones de las posibles rectas; la única condición para el segundo plano es que contenga al punto P.

- DA9: presente en alumnos que exhiben una ecuación que representa a un plano como si la misma describiera a una recta.

Las dificultades algebraicas confluyen en un obstáculo: la visualización de las infinitas soluciones.

Así, por ejemplo, para ilustrar la DA4 se transcribe a continuación un diálogo, parte de una entrevista entre la tesista (T) y un estudiante (A) de la muestra.

T: *"(…) bien y vos decís que ese vector va a ser paralelo a la recta r y perpendicular a $\bar{v}$, entonces utilizaste que el producto escalar tiene que ser cero, ¿te acordás cómo encontraste el vector (-3,-1,3)?",*

A: *"(…) me acuerdo que lo hice mentalmente, pero en el momento como que no…no sabía cómo hacerlo entonces fui probando para que el escalar me diera cero, entonces de esa manera encontré el vector, por suerte, pero después pasa que en una prueba quiero hacer lo mismo y no me da, en ese momento lo razoné muy rápido y por suerte me dio".*

Este alumno encuentra las componentes de un vector con las condiciones requeridas, pero "por prueba de ensayo y error", lo cual él reflexiona; aún así no puede volver sobre sus pasos algebraicos y encontrar el conjunto solución.

Los estudiantes han aplicado distintas operaciones y propiedades, que les permitieron elaborar diferentes estrategias de resolución, sin embargo, se observa una dificultad común: la ausencia de significado de las variables involucradas en sus procesos de resolución. En particular, en AGA, el uso de valores variables en el conjunto de los números reales, se aplica en: la búsqueda de un punto perteneciente a un plano; en los parámetros de ecuaciones paramétricas de una recta en el plano, de una recta en el espacio; en los dos parámetros de ecuaciones paramétricas de un plano; en la resolución de sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas, entre otros. Sin embargo, en la SPII se manifiesta en general un trabajo operativo, poco reflexivo, propio de un conocimiento mecanicista, con expresiones "vacías", y en consecuencia con dificultades para establecer las relaciones necesarias para ejecutar actividades de tratamiento y conversión implicadas en la búsqueda de solución. En particular, se han observado dificultades ligadas a las transformaciones en el registro algebraico, del registro numérico al algebraico y viceversa, del registro coloquial al algebraico y viceversa. Estas consideraciones se presentan en el siguiente diagrama.

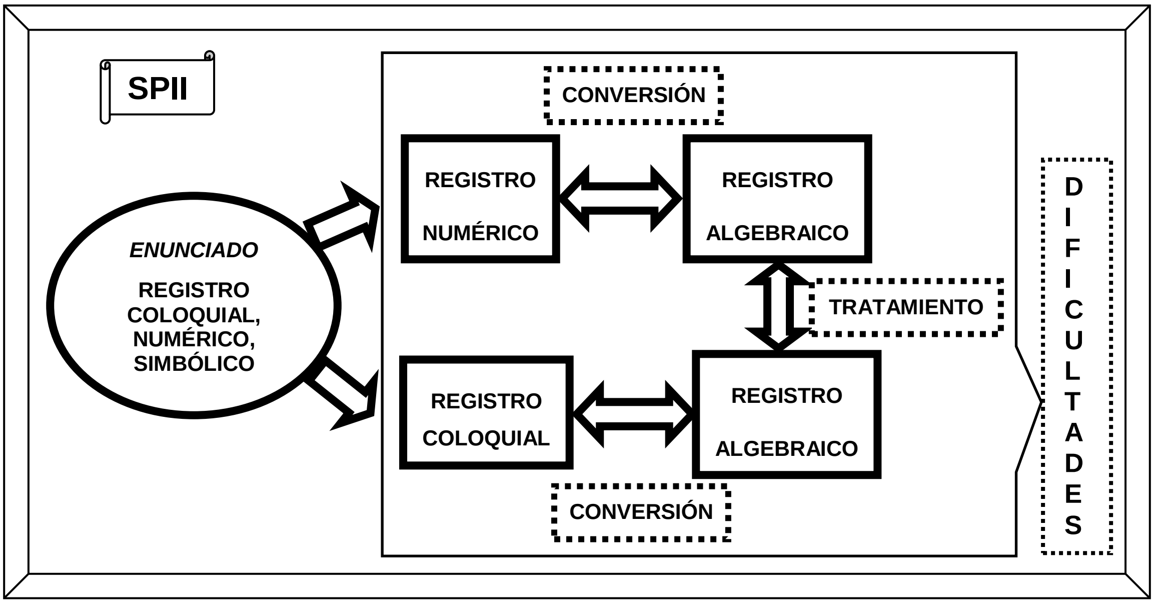


Diagrama 5. 21. Dificultades en las actividades cognitivas en la SPII

Duval (1999, c.p. Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal, 2007, p.29) afirma que "la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos". Entre los aspectos que dificultan dicha transformación menciona: la falta de coordinación entre los registros, el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación, o la limitación que produce a la comprensión de un contenido la representación en que se aprendió.

Además, Duval manifiesta que "la comprensión de algo, sea un texto o una imagen, moviliza ya sea actividades de conversión y de formación, o bien las tres actividades cognitivas" (1999, c.p. Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal, p.29). Sin embargo, la enseñanza generalmente propicia el trabajo relacionado solamente con los tratamientos dejando de lado los procesos que involucran la conversión, y en los casos en que se favorece está última el registro de partida más usado es el algebraico, lo que conduce a los estudiantes a dar sus respuestas en términos de éste; al respecto Vinner (1989, c.p. Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal, 2007, p.30) afirma que "la preferencia por lo algebraico se debe a la creencia que la prueba algebraica es más aceptada dentro de la matemática que la prueba visual".

Ya hemos mencionado que la situación problemática II involucra registros simbólico, coloquial, numérico y algebraico. Además, a diferencia de la SPI, no presenta una representación gráfica en el enunciado, y si bien tampoco requería la realización de una representación gráfica, éste era un recurso que podían utilizar los estudiantes. Es más, una imagen gráfica correcta de la situación, podría haber puesto en contradicción, por ejemplo, a los estudiantes que respondieron que existe una única recta con las condiciones requeridas. Y la visualización gráfica de las infinitas soluciones, conducirlos a la búsqueda de variables en los procesos algebraicos implicados en cada forma de resolución. Es más, en clase se trabaja la visualización gráfica de las situaciones problemáticas con la utilización de objetos cotidianos en el aula, como se reporta por ejemplo en la observación descripta en el trabajo exploratorio I.

A continuación, se transcribe un diálogo representativo de esta situación, parte de una entrevista entre la tesista (T) y un estudiante (A) de la muestra.

T: (…) ¿el hecho que el primer problema tuviera dibujos te facilitó, te dificultó o te resultó indistinto?

A: (…) el gráfico siempre da un recurso y en este caso (SPII) tuve que recurrir a hacerme un gráfico para ayudarme.

T: ¿Y te ayudó ese dibujo que hiciste?

A: Sí.

T: Porque a veces hacer dibujos en geometría del espacio en la hoja es

A: complicado (la alumna completa la frase).

T: ¿Pero a vos te resulta más fácil dibujarlo?

A: Sí. Sí, yo me acuerdo que en la primera clase que nos dijeron que a algunos nos iba a costar más a otros menos el tema de ubicarse en el espacio. Pero me sirvió eso para darme cuenta en clase, el tema de ubicar los planos, todas esas cosas de tomar objetos que tenía a mano, con el cuaderno y la birome, estaba en mi casa haciéndolo sólo y me miraban como si estuviera loco, pero sirve.

Estas últimas expresiones del estudiante reflejan las ideas expresadas por Moreira (2012), quien expresa que el aprendizaje significativo es progresivo, la construcción de un subsunsor es un proceso de internalización, de diferenciación y de reconciliación de significados que no es inmediato. Y dependerá, de la existencia de subsunsores adecuados, de la predisposición del estudiante para aprender, de materiales potencialmente significativos y de la mediación del docente. Además, debemos ser conscientes que el pasaje del aprendizaje mecánico hacia el aprendizaje significativo no es natural, ni automático, al contrario, es progresivo, con rupturas y continuidades.

El análisis de los datos recabados en cada situación problemática -SPI y SPII- presentado, permitió revisar los protocolos de ciertos estudiantes para complementar la información obtenida y posteriormente resumir los resultados más relevantes en una mirada conjunta de ambas actividades.

- Acerca de la Situación Problemática I:

Fue resuelta de forma correcta y completa por cinco estudiantes.

Once alumnos la resolvieron con respuesta literal correcta, pero presentan dificultades a la hora de graficar, ya que responden que existen infinitas rectas, “en los tres ejercicios”, y dibujan una o dos en al menos uno de los casos.

Dos estudiantes responden gráficamente en forma correcta, pero con dificultades para expresarse literalmente, pues no expresan el número de rectas existentes “en los tres ejercicios” pero dibujan más de dos rectas.

Diecisiete estudiantes expresan literalmente que existen infinitas rectas en el caso genérico independientemente de su dibujo.

- Acerca de la Situación Problemática II:

Fue resuelta de forma correcta y completa por tres estudiantes.

Tres alumnos exhiben una ecuación que representa una recta y no explicitan una representación de una segunda recta, pero sí expresan las infinitas soluciones.

Seis estudiantes exhiben dos representaciones de dos rectas diferentes, sin embargo, no expresan el conjunto solución.

Treinta nueve estudiantes, independientemente del trabajo algebraico realizado, expresan literalmente que existen infinitas rectas.

- Acerca de ambas situaciones problemáticas:

Ambas actividades fueron resueltas de forma correcta y completa por sólo un estudiante.

Nueve alumnos responden literalmente en ambas situaciones que existen infinitas rectas.

Cinco estudiantes en el caso genérico de la SPI responden literalmente que existen infinitas rectas, pero en la SPII expresan que existe una única recta.

Veintidos alumnos responden literalmente que que existe una única recta en el caso genérico de la SPI, pero expresan que existen infinitas rectas en la SPII.
Se destaca que ningún estudiante en la SPII responde que existen dos rectas, con las condiciones requeridas, como si sucedió en la SPI.
Además, cabe mencionar, que la caracterización presentada (5.4.2) a través de una tipología en la SPII propició la revisión de las respuestas literales de los estudiantes en la SPI, encontrándose que los sesgos descriptos (párrafo 5.2.3) corresponden a la misma tipología.

Finalmente, estos últimos resultados presentados permiten reflexionar sobre la desconexión que tienen para los estudiantes las situaciones problemáticas planteadas. Esto se pone de manifiesto en las diferencias de respuestas entre una actividad y otra, que recordemos implementan una misma idea problemática. Esta ausencia de relación entre ambas situaciones condice con las dificultades en la actividad de conversión de registros.

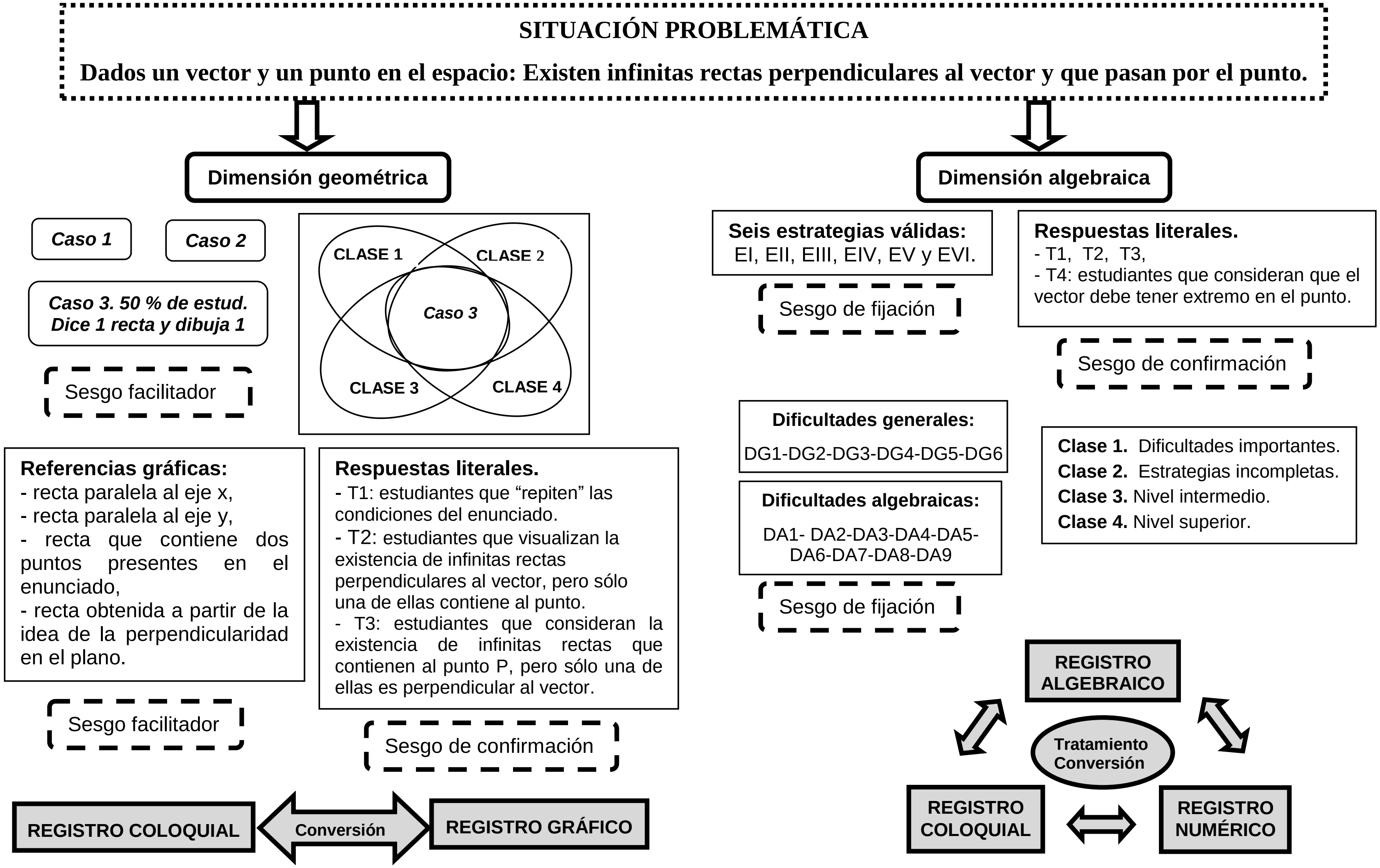


Diagrama 5. 22. Diagrama global V

CAPÍTULO VI

6. CONCLUSIONES

6.1 Introducción

Los estudiantes actúan en función de sus creencias, conocimientos previos y valoraciones, con formas de pensamiento y estrategias construidas en una dinámica de experiencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Bajo estos supuestos, adoptando una metodología básicamente cualitativa, con un enfoque interpretativo, se ha desarrollado esta tesis en función de los objetivos planteados.

En el capítulo I se ha discutido acerca del papel central de la geometría lineal del espacio en la formación de los estudiantes de Ingeniería, y he expresado mi interés por estudiar las dificultades de estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería, en el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio. En este contexto, las consideraciones teóricas relacionadas con los registros de representación de Duval y el aprendizaje significativo de Ausubel, brindan un marco que permite interpretar los errores y dificultades de los estudiantes cuando resuelven situaciones problemáticas en este tópico, que se fundamentaron en el capítulo II.

Se plantearon en esta tesis dos preguntas centrales: ¿cuáles son las dificultades de los estudiantes de carreras de Ingeniería al abordar situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio?, ¿cómo pueden interpretarse estas dificultades? Estos interrogantes, que se retoman aquí con miras a sintetizar las respuestas encontradas, parten de asumir que es posible analizar las representaciones externas de quien resuelve.

6.2 Trabajo empírico

Los estudios desarrollados se realizaron con estudiantes que cursaban la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer cuatrimestre de primer año de las carreras de Ingeniería, que se dicta en la Facultad de

Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, de la Universidad Nacional de Rosario.

Los estudios exploratorios presentados en el capítulo III, así como un trabajo de investigación de coautoría de la tesista (D'Agostini et al., 2012) incluido en el capítulo I, proveyeron indicadores para diseñar las dos situaciones problemáticas de la investigación central -SPI y SPII- detalladas en el capítulo IV. El último estudio mencionado que involucró aspectos geométricos y algebraicos de una actividad ligada a la temática de interés, permitió reconocer algunas dificultades que fueron analizadas desde la teoría de registros de Duval. A través de la actuación de los alumnos en sus procesos de resolución, tanto en el plano como en el espacio, se detectaron dificultades en el pasaje de un registro de representación a otro y fallas en el reconocimiento de un mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él en sistemas semióticos diferentes. Se puso de manifiesto además, una falta de aprehensión del concepto de vector libre. En el espacio se hicieron más visibles las dificultades ligadas a las tareas de tratamiento y conversión de representaciones.

Para explorar las dificultades halladas -en el espacio- en la muestra de alumnos correspondiente a la investigación central se realizó el Estudio Exploratorio I. El objetivo del mismo fue examinar, a partir de la observación y registro de datos en una clase teórica correspondiente al tema vectores, las dificultades en una situación problemática vectorial que admite infinitas soluciones. En el proceso de búsqueda de vectores perpendiculares a un vector dado, en el plano, se detectaron dificultades en relación a la variación infinita del módulo de un vector, y en el espacio, también se observaron dichas dificultades, pero además surgieron dificultades en el reconocimiento de infinitas direcciones. Esto se manifestó a través de registros coloquiales, gestuales, y numéricos, y en algunos casos se observa una visualización ligada a la geometría plana, un trabajo mecanicista con pérdida de significación de los registros involucrados y una falta de aprehensión del concepto de vector.

A fin de indagar las dificultades desde un aspecto algebraico se diseñó el Estudio Exploratorio II. A partir de una nueva actividad -en el espacio- del material de cátedra que fue ampliada en función del objetivo de esta tesis, se analizaron el discurso oral y escrito en el proceso de resolución de un grupo de estudiantes correspondientes a la muestra del estudio exploratorio I. El registro de la actuación de los alumnos permitió observar la reaparición de los errores ligados a la identificación de la existencia de infinitos vectores perpendiculares a otro. Las dificultades se evidencian, a través de registros algebraicos, al momento de resolver una ecuación lineal en tres variables. Además, se percibe la desconexión en los registros utilizados por los estudiantes en el proceso de resolución, tanto en su discurso oral, como en el escrito. No todos los alumnos pudieron realizar eficazmente las tareas de tratamiento y conversión de sus representaciones semióticas en la búsqueda de posibles soluciones.

A partir de los errores observados, de índole geométrica unos y de naturaleza algebraica otros, se elaboraron dos situaciones problemáticas como fase principal para el desarrollo de esta tesis que fueron trabajadas con 85 estudiantes. La Situación Problemática I fue diseñada desde un aspecto geométrico, constituyendo la llamada dimensión geométrica de análisis de la investigación central. Por otro lado, la Situación Problemática II, reflejando una idea matemática similar, pero con un carácter algebraico, fue confeccionada conformando la segunda dimensión de análisis, que fue llamada dimensión algebraica.

Como resultado del trabajo empírico se destaca que la Situación Problemática I fue resuelta de forma correcta y completa por cinco estudiantes. En la fase 1 de análisis, se detectaron diferentes tipos de respuestas literales y gráficas, a través de los registros coloquiales, simbólicos y gráficos presentes en los protocolos de los estudiantes. Las representaciones semióticas utilizadas por los alumnos fueron el dibujo, las respuestas literales, argumentaciones y justificaciones. Las respuestas literales y gráficas de cada estudiante permitieron definir modalidades excluyentes de respuestas para cada variable considerada -Caso 1, Caso 2, Caso 3-. Esta organización de los datos admitió un tratamiento estadístico porcentual, organizando la información a través de los primeros resultados cuantitativos; destacándose el ejercicio 3 (caso genérico), donde la mitad de los estudiantes respondió explícitamente y de forma errónea, que existe una única recta con las características requeridas. Posteriormente, la información se reorganizó en función del análisis de los errores hallados, caracterizando las modalidades presentes en cada variable. Se observaron dificultades para relacionar los tres ejercicios de la SPI; la diferencia en las respuestas de un ejercicio a otro, en un mismo alumno, evidenció esta desconexión. La variante intencional de los tres casos, transitar de dos casos particulares a un caso genérico no fue detectada por muchos estudiantes. No se hallan indicios de búsqueda de similitudes y diferencias en la mayoría de los alumnos, por el contrario, se observa una visión específicamente sesgada por “cada caso”. Estos resultados condicen con las conclusiones de las investigaciones de Abrate et al. (2006) quienes señalan que los profesores de Matemática argumentan que la mayoría de los errores que encuentran en el aprendizaje de esta ciencia se deben a que los alumnos no están acostumbrados a leer consignas, volver a realizar la lectura del enunciado, reflexionar sobre lo realizado, buscar datos relevantes, hacerse preguntas o cuestionarse su estrategia de resolución. Esta valoración guarda relación con la apreciación realizada por Rico (1995) cuando argumenta que los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.

Por otro lado, el encuentro de similitudes en las gráficas realizadas por los estudiantes admitió la constitución de una segunda fase de análisis de la SPI. En la misma se describieron y analizaron los registros gráficos presentados en los protocolos de resolución, caracterizándolos para cada uno de los ejercicios. Se destaca que, algunos estudiantes a través de sus dibujos dan muestra de la necesidad de establecer referencias, con una visión ligada a las direcciones de los ejes cartesianos. Y en su mayoría se presenta una visión ligada a la perpendicularidad en el plano, dando muestra de la presencia de un sesgo facilitador. También podemos subrayar las dificultades para dibujar más de una recta en el caso genérico. Además, en este caso, la forma particular de la presentación gráfica dada en el protocolo aplicado condicionó a muchos estudiantes a visualizar una única recta, lo que determinó la respuesta literal: “la recta es única”. En este sentido, de acuerdo a las teorías de Van Hiele y Vinner (Abrate et al., 2006), un estudiante comienza a construir la imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades implicados, sino utilizando destrezas básicamente visuales. Por lo tanto, los ejemplos presentados al abordar un tema juegan un rol fundamental, mucho más que las enunciaciones verbales que acompañan. Así, por ejemplo, si todos los cuadrados que se les presenten a los alumnos tienen un lado horizontal sobre el que se apoyan -generalmente denominada posición estándar-, muchos incluirán este atributo en su imagen conceptual, incorporándolo como un requisito que debe cumplirse para que esa figura sea un cuadrado. En nuestro estudio, a diferencia de los casos 1 y 2, la representación gráfica en el ejercicio 3 indujo a los estudiantes a dibujar “la recta” que claramente se visualiza como perpendicular. Incluso, podríamos llamar a esta recta: “recta estándar”, que quizás se encuentra determinada por los ejemplos tratados en clase en relación a la perpendicularidad, no sólo en el plano, sino también a los ejemplos tratados en el espacio. Es decir, el reconocimiento del resto de las rectas perpendiculares se vio condicionado, “opacado” por la forma particular de presentación de los datos “en el plano de la hoja”. Las formas dadas de las representaciones en los ejercicios 1 y 2 generaron menores dificultades a diferencia del ejercicio 3. Es decir, cuando la situación es más compleja el estudiante reduce “su visualización” al plano dando cuenta de la presencia de un sesgo facilitador.

Recordemos que en nuestro estudio los tres ejercicios plantean la misma línea problemática, la variación de las representaciones semióticas involucradas no afecta al hecho de que el conjunto solución está conformado por infinitas rectas. Los datos implicados en los tres ejercicios -un vector y un punto en un sistema coordenado tridimensional- si bien presentan diferencias en su ubicación, los mismos sólo caracterizan el conjunto solución, que aunque es diferente, siempre atañe a infinitas rectas.

Las respuestas de los estudiantes en relación a la existencia de una cantidad finita de rectas con las condiciones requeridas y la variación de las mismas de un ejercicio a otro ponen de manifiesto las dificultades en los procesos de comprensión. Particularmente, la presencia de sesgos manifiestos a través de las argumentaciones de los estudiantes propició la confección de la fase 3 de este estudio, en la que se examinaron las respuestas literales.

Como ya hemos destacado, Ausubel (1963, c.p. Moreira, 2012) considera que la estructura de conocimientos de los estudiantes está formada por conceptos y sus múltiples y complejas relaciones jerárquicas que los conectan. El aprendizaje significativo se produce a través de relaciones sustanciales y no arbitrarias en oposición al aprendizaje sin sentido, puramente memorístico y aislado. Desde esta perspectiva, con el fin de discernir las características favorecedoras del aprendizaje significativo y del memorístico, en esta tesis se han analizado los registros literales en función de estas dos consideraciones. Para ello, se caracterizaron en primer lugar las respuestas correctas de algunos alumnos, consideradas relevantes al contraponerse a la ausencia de respuestas o a las dificultades en las mismas del resto de los estudiantes. Y en segundo término se analizaron las justificaciones de quienes exhibieron respuestas literales erróneas, estudiando las similitudes en los argumentos. Es importante señalar que en las argumentaciones correctas se destaca la relevancia dada por los alumnos al concepto de vector libre. Mientras que el resto de las justificaciones han puesto de manifiesto la falta de reflexión de los estudiantes, dando cuenta de sesgos de confirmación. Los profesores Abrate et al. (2006) aducen en una de sus investigaciones que muchas veces los alumnos leen un enunciado y quieren tener la respuesta en forma instantánea. Esta actitud del estudiante puede explicarse en el hecho que el docente muchas veces resuelve un ejercicio y la solución se presenta “en limpio”, sin que haya la menor indicación del proceso por medio del cual se llegó a la misma (Gómez, 1995, c.p. Abrate, 2006). En consecuencia, el alumno cree que él también debe encontrar la solución “en limpio”, y al no ser consciente del tiempo que implica la búsqueda de una estrategia adecuada de resolución, busca atajos. Estos atajos lo desvían del camino apropiado y lo inducen a cometer errores como los detectados en los protocolos de esta tesis. Efectivamente, muchos estudiantes dieron muestra de una resolución “reducida” a cada caso, limitada a responder cada ejercicio, con ausencia de una “mirada global” y reflexiva de la situación problemática completa.

Finalmente, considerando que el trabajo de campo se realizó con un gran número de estudiantes se constituyó la fase 4 de análisis con la finalidad de caracterizar la muestra total. En esta etapa, teniendo en cuenta los resultados obtenidos y el análisis de la información en las fases anteriores, se reagruparon las modalidades de las tres variables, mostrando en primer término un estudio estadístico porcentual. Posteriormente, a través de la aplicación del programa estadístico de Análisis de Variables Múltiples SPAD se obtuvo una caracterización de los estudiantes mediante una subdivisión en clases correspondientes a cuatro niveles de resolución. El estudio particular de la conformación de las clases obtenidas permitió la confirmación de la presencia, en el caso general, de un obstáculo en términos de Brousseau (1983) y de un sesgo facilitador (Perkins, 1991) desde la psicología cognitiva. Debido a la densidad de respuestas erróneas, la modalidad “dice 1 y dibuja 1 recta” para el caso genérico, emerge en la mayoría de las resoluciones, aflorando así como un obstáculo característico en todos los grupos. Recordemos que el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se han constituido en obstáculos (Brousseau, 1983).

Finalmente, las dificultades analizadas en las diferentes fases se identificaron en cada etapa de resolución, permitiendo un análisis de los registros de forma genérica, independientemente de los casos involucrados.

Podemos resumir, en relación a la Situación Problemática I, que la representación gráfica de la situación y los conocimientos previos de los alumnos -particularmente en el plano-, fueron de gran influencia a la hora de la resolución. En relación a los errores debidos a la recuperación de un esquema previo, Abrate et al. (2006) fundamentan que son causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de resolución de una situación, aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. En estas circunstancias, el estudiante no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido. En esta tesis el esquema previo recuperado por la mayoría de los alumnos tiene relación con la geometría plana.

Para Ausubel (1976, c.p. Gutierrez, 1987) un aprendizaje significativo constituye una nueva información o contenido que se conecta de modo sustancial con alguna idea relevante, un subsunsor preexistente en la estructura cognitiva del sujeto. Los nuevos significados, no son ideas o contenidos desconexos, sino que son el producto de un intercambio, de una fusión. Los nuevos contenidos se generan en la interacción de la nueva idea o concepto potencialmente significativo, con las ideas pertinentes en la estructura cognitiva del alumno. De este modo el bagaje cognitivo del estudiante se enriquece y modifica sucesivamente con cada nueva incorporación. En el caso de la asignatura AGA, algunos contenidos de la geometría plana deberían constituirse en subsunsores adecuados para generar posteriormente una interacción significativa de ciertos contenidos de la geometría lineal del espacio. Por ejemplo, en relación a la búsqueda de un vector perpendicular a otro, tanto en el plano como en el espacio, hemos presentado el estudio exploratorio I y el estudio (D'Agostini et al., 2012). Los mismos ponen en evidencia la importancia de que el docente priorice y dedique el tiempo necesario para el estudio de las variables implicadas en la situación problemática mencionada, primero en el plano, para posteriormente analizarla en el espacio, estableciendo un puente entre las dos dimensiones.

Se destaca que el Caso 3, que representa una situación genérica, ha tenido el mayor porcentaje de respuestas erróneas, mostrando principalmente justificaciones tanto literales como gráficas, en relación a la perpendicularidad en el plano. Es decir, los alumnos reproducen respuestas adaptadas en un cierto contexto -en nuestro caso la geometría plana-, en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas o incorrectas, el dominio resulta falso. Es más resistente cuanto más haya mostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez, por lo tanto, es indispensable que el docente lo identifique y explicite su ineficacia en el nuevo saber (Duval, 1999).

El registro gráfico parece condicionar al registro coloquial, ya que para algunos estudiantes la representación semiótica del dibujo presentada produjo una visión sesgada de la situación que influyó en su respuesta literal. Por otro lado, en la mayoría de los casos el registro coloquial no condice con el registro gráfico, pues la respuesta literal correcta no es transformada en una respuesta gráfica completa. La conversión, es decir, el pasaje de un registro de representación a otro en la situación problemática no resultó trivial para los estudiantes. Al respecto, recordemos que para Duval las representaciones en Matemática cumplen la función de comunicar o evocar objetos, pero su verdadero rol lo constituyen las transformaciones de unas representaciones en otras, ya que éstas permiten obtener nuevas informaciones, propiedades y extraer nuevos conocimientos de los objetos (2006, c.p. Macías Sánchez, 2014).

En relación a las dificultades ligadas a los registros gráficos, Abrate et al. (2006) alegan que las mismas radican, en gran parte, al tratamiento que ha recibido el tema durante la formación matemática de los estudiantes, donde generalmente los profesores hacen hincapié en la realización de gráficos a partir de expresiones algebraicas o fórmulas, y pocas veces se aplica el camino inverso, de una representación gráfica extraer información relevante. El estudio de la geometría demanda de una notación particular y de definiciones específicas, mucho más de lo que requiere la aritmética y el álgebra. Si el alumno no accede a una comprensión del significado de los términos y símbolos que usa el profesor, habrá una inevitable distorsión de los mensajes que éste emite. Ya sea porque el alumno emplea un código distinto al empleado por el docente, o porque el alumno no posee herramientas en las que apoyarse para decodificar ese mensaje. El uso correcto del lenguaje geométrico está estrechamente ligado al proceso de conceptualización y ambos se retroalimentan (Abrate et al., 2006).

Debido a que el Caso 3 de la SPI se constituyó en un obstáculo para los estudiantes se diseñó la Situación Problemática II, de naturaleza algebraica, correspondiente al caso general. En la misma se presentan datos numéricos -las componentes de un vector y las coordenadas de un punto- que permitieron la realización de cálculos y un trabajo algebraico, enriqueciendo el estudio de los errores en el proceso de resolución, desde los registros numéricos y algebraicos no implicados en la SPI.

En la fase 1 de análisis de la SPII, se reconoce que tres estudiantes de un total de 85 la resuelven de forma correcta y completa. En cuanto a lo expresado literal y algebraicamente por los alumnos se detectaron diferentes tipos de respuesta involucrando registros coloquial, simbólico, numérico, algebraico y gráfico. Estos primeros datos recabados suministraron consideraciones generales para la definición de las variables y modalidades del estudio. En un análisis cualitativo de las resoluciones realizadas por los estudiantes se identificaron seis estrategias válidas para la búsqueda de una representación de una recta con las condiciones requeridas. El estudio de las mismas permitió la caracterización de cada estrategia a través de una esquematización de las diferentes representaciones semióticas involucradas. Además, fue posible sintetizar en diagramas las relaciones entre lo que los estudiantes expresan literalmente y el trabajo algebraico que emplean, mostrando una caracterización de las respuestas. En esta fase, que involucra a los estudiantes que intentaron o realizaron de forma completa una de las estrategias válidas de resolución -en la búsqueda de una representación de “una recta” con las condiciones requeridas-, se observan dificultades al responder sobre la cantidad de rectas existentes, en la búsqueda de una representación de una segunda recta, o a la hora de expresar las infinitas soluciones.

La descripción de los registros algebraicos implicados en cada una de las estrategias abordadas permitió observar las dificultades ligadas al abandono de resolución en etapas intermedias, la ausencia de significado de las representaciones utilizadas en la búsqueda de soluciones y sesgos de fijación. Los registros coloquiales, por su parte, dieron cuenta de similitudes en las argumentaciones entre algunos grupos de estudiantes, evidenciando la presencia de un sesgo de confirmación.

La abundante información obtenida propició, en la fase 2, la realización de un análisis más profundo de los datos organizados, que originó el reconocimiento y caracterización de las dificultades de los estudiantes ligadas a las actividades de tratamiento y conversión de registros en cada una de las estrategias de resolución.

Se observan representaciones de objetos matemáticos que no son reconocidos en función de la relevancia de su significado. Así por ejemplo, algunos estudiantes exhiben una ecuación que representa al plano que contiene a las posibles rectas solución sin mostrar evidencias de su reconocimiento, presentando un sesgo de fijación. También, se observa en algunos estudiantes, frente a la búsqueda de una representación de una recta en el espacio, una confusión entre la representación de “una recta en el plano”, la representación de “un plano” y la representación de una recta en el espacio”. La similitud en la contrucción de una ecuación que representa a una recta en el plano y de una ecuación que representa a un plano desencadena en algunos alumnos la reproducción memorística de un proceso algebraico, evidenciándose también aquí la presencia de un sesgo de fijación. En relación al tratamiento de variables y ecuaciones en la escuela media, Booth (1984, c.p. Abrate et al., 2006) expresa que los estudiantes suelen interpretar las letras como objetos en sí mismos y no como la representación de números. Y quienes acceden a interpretar la letra como número, se inclinan por hacerlo como un número “específico” desconocido. Este autor también menciona que muchos de los estudiantes en la escuela media sustentan ideas como: “diferentes letras representan diferentes números”, “una misma letra representa siempre el mismo valor”, “las letras que en el alfabeto están después representan números mayores”. En su trabajo, Booth conjetura que una parte de las dificultades se pueden deber a estrategias de enseñanza de temas abordados en la formación matemática del alumno muy apegado a lo algebraico y escasamente relacionado a la resolución de problemas. Entre los errores encontrados en ejercicios que implican ecuaciones, este investigador señala los que se derivan del lenguaje matemático, que surgieron de la traducción de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje natural a otro más formal mediante expresiones de carácter algebraico. Muchas veces los docentes realizan una introducción formalista y abstracta de un contenido, planteando posteriormente uno o varios ejercicios a modo de ejemplo que admiten ser resueltos mediante ecuaciones e ingenuamente creen que una vez cubiertos estos pasos, el alumno está en condiciones de transferir sus ideas en forma abstracta a la resolución de problemas. Es necesario comprender que la traducción del lenguaje cotidiano al algebraico no es una simple traducción de un lenguaje a otro, sino que requiere, para su realización, de una actividad mediadora. La misma incluye la identificación de los datos y de las incógnitas, así como las relaciones entre ellos, la comprensión del problema, la movilización de diversos conceptos y procedimientos matemáticos. En relación a los errores de los estudiantes que devienen de los métodos de enseñanza, Mason (1996, c.p Abrate et al., 2006) expresa que las dificultades que se oponen al aprendizaje del lenguaje simbólico y abstracto del álgebra hacen difícil, para el docente, equilibrar el tiempo entre el desarrollo de un algoritmo de resolución y las reflexiones sobre él, detrás del método. Ante los reiterados fracasos de los estudiantes, el docente se ve tentado a privilegiar la búsqueda del éxito desarrollando sólo rutinas operatorias, descuidando otros aspectos en relación a favorecer la capacidad de generalizar, modelar situaciones y estimular una comprensión más profunda de las operaciones y propiedades aplicadas. Por otro lado, (Abrate et al., 2006), si se privilegia el trabajo algebraico de un modo abstracto desde el inicio del tema, se corre el riesgo que los alumnos “no sepan por qué hacen lo que hacen ni para qué les sirve” (p. 122). De este modo la manipulación de signos para ellos no tiene sentido y progresivamente van generando una actitud negativa hacia la Matemática que contribuye a la aparición de errores en sus resoluciones.

En cuanto a las respuestas literales incorrectas, las características similares encontradas, independientemente de la forma de resolución utilizada, permitieron la conformación de una tipología representando cuatro características. La característica encontrada mayoritariamente fue “la repetición de los datos del enunciado” como argumentación. El segundo tipo corresponde a estudiantes que alegan que “existen infinitas rectas perpendiculares al vector dato, pero destacan que sólo una de ellas pasará por el punto P”. Contrariamente, el tercer tipo señala que “existen infinitas rectas que pasan por el punto P, pero sólo una será perpendicular al vector dato”. Y el último tipo hace referencia a la “pertenencia del punto P al vector dato”. Es decir, como se ha mostrado en el cuadro 5.4 se destacan características ligadas a la perpendicularidad en el plano. Además, la ausencia de reflexión en ciertos estudiantes sobre su trabajo algebraico y el hecho de “reafirmar” que existe una única recta con las condiciones requeridas, hace evidente la presencia de un sesgo de confirmación. Es frecuente encontrar alumnos que prefieren realizar procedimientos conocidos, “recetas”, algoritmos, aplicar reglas básicas que permitan resolver lo inmediato. Puede inferirse que así pueden llegar a sentirse más seguros y considerar que de esta forma dominan el conocimiento matemático. Pero no son conscientes que sus producciones se vuelven vulnerables a la aparición de errores, en tanto han logrado mayor dependencia de su memoria, en detrimento de un pensamiento crítico. Estos estudiantes, acostumbrados al trabajo mecanicista, rara vez se preguntan si sus estrategias son válidas, por lo que no buscan por sí mismos algún mecanismo que les permita verificar si lo que hicieron es correcto (Abrate et al., 2006). Puede reconocerse aquí un aprendizaje mecánico o memorístico producido cuando la nueva información es almacenada sin relacionarse con conocimientos previos, sin interactuar con contenidos preexistentes, realizando asociaciones arbitrarias. Por

el contario, el sujeto aprende cuando realiza un esfuerzo deliberado y consigue relacionar los nuevos conceptos con otros ya adquiridos, incorporándolos a su estructura cognitiva (Ausubel, 1990, c.p. Lara Guerrero, 1997).
Finalmente, considerando el gran número de estudiantes con el que se realizó el trabajo de campo se constituyó la fase 3 de análisis, con la finalidad de caracterizar la muestra total. La aplicación del programa estadístico de Análisis de Variables Múltiples SPAD, mostró una subdivisión de los alumnos en cuatro clases diferenciadas. Las mismas se corresponden con el nivel de mejor desempeño, otra de un nivel intermedio y las otras dos atañen a un nivel bajo de resolución.
Las dificultades analizadas en las diferentes fases se clasificaron en dos grupos: generales y algebraicas. Las primeras se identificaron en cada etapa de resolución en función de los registros de representación, destacándose la relevancia en las transformaciones del registro coloquial al algebraico y viceversa, que implica la actividad de conversión. El segundo grupo, constituido por las dificultades de carácter algebraico, ligadas principalmente a la visualización de las infinitas soluciones, destacándose la ausencia de significado de las variables involucradas en las formas de resolución de los estudiantes y su estrecho vínculo con las actividades de tratamiento y conversión.

En líneas generales podemos decir que la SPII pone en evidencia el trabajo mecanicista y memorístico de la mayoría de los estudiantes, con dificultades en la abstracción y generalización. Al igual que en la SPI en los registros coloquiales de los alumnos se revela la importancia de la aprehensión conceptual de vector libre y dificultades asociadas a conocimientos previos en relación a la geometría plana. Así como también, se pone de manifiesto la falta de conexión en la transformación de una representación semiótica a otra, la ausencia de significado de los objetos involucrados y las dificultades en las actividades de tratamiento y conversión. Además, la presencia de sesgos condice con una fuerte visualización ligada al plano. Cada registro de representación resalta características y propiedades determinadas del objeto matemático. El reconocimiento de las mismas en cada conversión hace a la configuración del concepto en toda su extensión y profundidad (Duval, 1999). En esta tesis, las dimensiones de análisis geométrica y algebraica han dado muestra de la desvinculación que tienen los registros para los estudiantes.

En numerosas investigaciones se han detectado las dificultades de los alumnos de la escuela media en la lectura e interpretación de gráficos en representaciones cartesianas. Frecuentemente los alumnos no relacionan el concepto de pendiente con el de dirección y confunden pendiente con altura. Es más, después de estudiar particularmente las funciones afines, los estudiantes no logran articular el registro de las representaciones gráficas y el de las ecuaciones, les resulta difícil deducir la ecuación de una recta a partir de su representación gráfica (Duval, 1992, c.p. Ochoviet Filgueiras, 2009; Duval, 1988, c.p. García García, 2005). La razón de estas dificultades, según este autor, se debería al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica. Para que exista una utilización correcta de las representaciones gráficas deben discriminarse explícitamente las variables visuales pertinentes y las unidades significativas de la escritura algebraica. Dado que en la escuela media los alumnos presentan estas dificultades, mayor debe ser nuestro interés en prestarle atención a las mismas. Cuando los estudiantes ingresan a la FCEIA no tienen los subsunsores necesarios para la adquisición de los conocimientos matemáticos universitarios, incluso lo que les sirvió para aprobar el examen de ingreso al poco tiempo ya fue olvidado, lo que produce en algunos casos, el recursado de materias y el abandono de la carrera.

Podemos resumir las dificultades analizadas en esta tesis en correspondencia con una clasificación -como lo muestra el diagrama 6.1-:

- *dificultades ligadas a la ausencia de significado en los registros algebraicos*, por ejemplo, en la SPII la dificultad en el reconocimiento del significado del plano que contiene a las infinitas rectas solución;

- *dificultades ligadas a la visualización gráfica*, por ejemplo, la dificultad descripta en el ejercicio 3 de la SPI, en relación a cómo la representación gráfica condicionó a la respuesta literal y;

- *dificultades ligadas a los conocimientos previos en relación a la influencia de un método o estrategia de resolución en otro contexto*, por ejemplo, la dificultad descripta en los estudiantes que expresaron la ecuación de un plano como representación de una recta en el espacio, influenciados por la similitud en la construcción de una ecuación de una recta en el plano.

Se señala, además, que una dificultad puede pertenecer a más de una línea de clasificación. Efectivamente, el tercer ejemplo citado también puede corresponderse con una dificultad ligada a la ausencia de significado en los registros algebraicos.

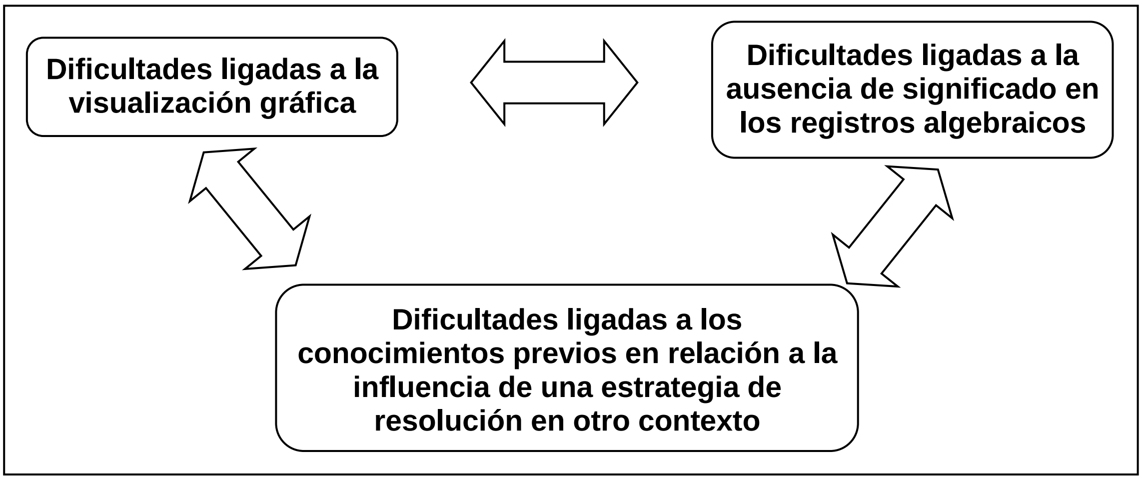


Diagrama 6. 1. Clasificación general de dificultades

Es pertinente señalar que si bien la SPII presenta un carácter algebraico, esto no implica que el estudiante no pudiera realizar una representación gráfica de la situación. Y en sentido inverso, en la SPII, actividad de carácter algebraico, el alumno no estaba impedido de aplicar un recurso algebraico (plantearse un ejemplo en registro numérico) como estrategia complementaria a su proceso de comprensión en la búsqueda de solución. Estas consideraciones tienen relación con el ejercicio de la coordinación entre los diferentes sistemas de representación que resulta de vital importancia para la aprehensión conceptual de los objetos representados. Efectivamente, una característica propia de las estructuras y los conceptos matemáticos es la necesidad de emplear diversas representaciones para asimilarlos en toda su complejidad, lo que implica, desde una perspectiva cognitiva, utilizar y coordinar más de un sistema de representación, como han puesto de manifiesto distintos investigadores (D'Amore, 2003, 2004, 2006; Duval, 1993, 1995, 1996; Godino, 2002, 2003; Janvier, 1987a; Kaput, 1987a, 1987b, 1998; Radford, 1998, 2004, 2006a, c.p. Macías Sánchez, 2014).

6.3 Principales aportes

Como hemos señalado, las cuestiones centrales de esta tesis se han respondido, ya que efectivamente se interpretaron las dificultades de los estudiantes en la resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio. Se destaca que la información recabada en el análisis de los protocolos de resolución resultó sumamente rica para la búsqueda de respuestas, así como también las entrevistas como técnica complementaria. La riqueza de la información permitió la interpretación de las dificultades en el marco de los registros de representación y del aprendizaje significativo.

En el capítulo I, se reportaron los antecedentes ligados a la temática de esta tesis. Allí se describe un estudio sobre concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la Geometría Analítica realizado por Del Puerto y Seminara (2009). Si bien las autoras no se focalizaron específicamente en la temática de esta tesis, ya que abarcaron diversos temas, dentro de sus protocolos de investigación se encontraron algunos ítems relativos a contenidos de Recta en el espacio, en los que hemos focalizado. En coincidencia con algunos resultados de esta tesis destacamos que las investigadoras detectaron la persistencia de ciertas ideas previas provenientes de la geometría plana, ya que los resultados reflejaron que es importante el número de alumnos que extrapola al espacio conceptos y propiedades, que resultan suficientes en el plano, pero no así en el espacio. Y también señalan, las dificultades de los alumnos para reconocer que no hay en el espacio una única dirección perpendicular a una dada, las dificultades algebraicas en la búsqueda de un vector perpendicular a otro, y la confusión de algunos alumnos de la ecuación que representa un plano con la ecuación que representa a una recta en el espacio.

Con respecto a otra de las investigaciones presentadas, relativa a concepciones en los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta, Jarero Kumul (2006) analiza dificultades de los estudiantes al trabajar con vectores en el espacio. La autora reporta una caracterización de los errores observados en las producciones de los estudiantes asociados al uso de una fórmula, señalando que los alumnos emplean una ecuación vectorial del plano en lugar de una ecuación vectorial de la recta. Es decir, los alumnos confunden las representaciones de dos objetos matemáticos diferentes: un plano y una recta en el espacio. Este hecho también se evidenció en nuestra tesis, pero desde otro tipo de registros semióticos, ya que en nuestro caso se presentaron otro tipo de ecuaciones, mientras que Jarero Kumul focaliza todo su estudio en la ecuación vectorial.

Los resultados de nuestra investigación coinciden con las conclusiones de Jarero Kumul (2006), quien menciona además ciertas dificultades asociadas con la ausencia de significado, en los casos en que los estudiantes no pueden justificar sus procedimientos o bien les resulta indistinto cómo emplear o interpretar la notación matemática. Señala que reproducen procedimientos vistos en clase de forma incompleta, sin poder justificar el porqué de cada expresión planteada y en las entrevistas se identifican conceptos difusos en relación al producto escalar y al concepto de vector normal, reforzándose la idea de reproducir el trabajo del profesor que solo lleva a un aprendizaje memorístico.

Menciona además las serias dificultades de los estudiantes para reconocer que el vector dirección de una recta no necesariamente tiene que "pertenecer" a ella; hecho que como en nuestro estudio pone de manifiesto la falta de aprehensión conceptual de vector libre. Observa en los protocolos de resolución, que existen fuertes tendencias a reproducir lo que el profesor hace en el salón, lo cual parece reforzar la idea de que para los alumnos, estudiar Matemática es aprender algoritmos. La autora alega que prevalece una falta de análisis y reflexión sobre sus propias actuaciones, de modo que al enfrentarse a situaciones problemáticas que involucran distintos conceptos, están más propensos a cometer errores y en la mayoría de los casos se limitan a reproducir procedimientos, técnicas, lo cual no significa que se haya producido aprendizaje. También se refiere a las dificultades ligadas a la identificación y nomenclatura de los vectores, a la consideración de puntos y vectores de modo indistinto, a la pérdida de significado del producto escalar y a la relación del mismo con los vectores perpendiculares. Hemos observado las dificultades en dicha relación en algunas estrategias de resolución analizadas, sin embargo, en nuestro estudio se evidenciaron a través del análisis de las actividades de tratamiento y conversión.

Además, la investigadora señala que se hicieron evidentes algunos conflictos sobre las interpretaciones dadas a los elementos y variables que conforman la ecuación vectorial de la recta, observándose en algunos casos una falta de significado. Los resultados muestran que para el estudiante parece no tener tanta importancia la representación del escalar en la ecuación vectorial de una recta, a pesar de ser el generador de la infinidad de puntos que conforman la recta. Y aunque son estudiantes de nivel de licenciatura, aún se identifican concepciones de la recta como algo limitado, con un principio o un segmento. Existe cierta concordancia en estas menciones desde las propias representaciones de los alumnos de nuestro estudio. Si bien en el enfoque de esta autora fue central la representación de una recta a través de la ecuación vectorial se ha observado a través de nuestro análisis también la ausencia de significado de las variables involucradas en las representaciones semióticas utilizadas por los estudiantes. Nuestra experiencia, además, se ve reforzada por los casos de los estudiantes que mediante diferentes estrategias exhibieron ecuaciones de “una” recta y reforzaron con su argumentación literal: la recta es única. Leyendo entre líneas los protocolos de estos alumnos, que no realizaron un análisis retrospectivo de su resolución, parecieran expresar: “la recta es única y es la que yo encontré”, aún en los casos de cálculos realizados por prueba de ensayo y error, “es justo esa y no hay otra”.

En cuanto a las investigaciones previas relativas a Errores y Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática en ingresantes a la Universidad, hemos destacado los aportes de Abrate et al. (2006). Los autores señalan las dificultades presentadas por los alumnos en contenidos de escuela media, particularmente en la decodificación de información gráfica, señalando que junto a la definición de las figuras ha quedado establecida la obligación de ser presentadas en una forma particular en el plano de la hoja, para su clasificación y reconocimiento. Considerando los errores globales cometidos por los alumnos en los protocolos de evaluación, observan que prevalecieron aquellos que devienen por inferencias o asociaciones incorrectas y los que emergen ante las dificultades que presentan los alumnos para obtener información espacial. La dificultad para efectuar una lectura a través de representaciones gráficas -traducción que obliga a cambiar de código, pasando de uno gráfico a otro verbal- fue notable en la evaluación administrada, donde la mayoría de los estudiantes erraron en algunos o en todos los apartados de la situación problemática planteada. Respecto de estas consideraciones, en nuestro estudio hemos explicitado como la representación gráfica dada en el ejercicio 3 de la SPI condicionó la respuesta literal errónea en un número importante de alumnos. Además, hemos descripto las dificultades en la SPI correspondientes a los ejercicios 1 y 2 ligadas a la búsqueda de referencia al momento de graficar. Este hecho se hizo evidente en las respuestas de los alumnos que expresaron que existen dos rectas con las condiciones requeridas (con las direcciones del eje x y del eje y) en la SPI, no así en la SPII donde esta respuesta estuvo ausente.

También se reporta que el mayor número de ejercicios sin respuestas se presentó en la resolución de una ecuación de segundo grado. Además, fue notable la falta de respuestas a las situaciones que implicaron ecuaciones lineales, y en las traducciones a una ecuación lineal de expresiones dadas en lenguaje coloquial. Los autores asocian estas dificultades a la complejidad de los objetos matemáticos involucrados, en tanto los alumnos no comprenden el significado que tienen las expresiones que combinan el uso de números y letras, y el lenguaje matemático no les resulta fácilmente homologable al lenguaje natural que utilizan, por lo que les genera conflictos en la comunicación de significados. Desde este punto de vista, en nuestro estudio hemos expuesto las dificultades que hemos denominado “algebraicas” y particularmente las acontecidas al momento de resolver una ecuación lineal en tres variables.

Durante las entrevistas a los alumnos, distinguieron un fuerte apego a las reglas y leyes de la aritmética, con pérdida de significación de las operaciones, las cuales resuelven en la mayoría de los casos por medio de algoritmos mecánicos con escasa base conceptual, y con la percepción de que algo artificioso está detrás de ellos. Este hecho condice en nuestro caso con los estudiantes que alegaron usar “el truco” de intercambiar las componentes de un vector y cambiarle el signo a una de ellas, para obtener las componentes de un vector perpendicular a otro. En estos alumnos ha perdido significación la propiedad subyacente, que implica la aplicación de la operación de producto escalar.

Concluyen que la resolución de ecuaciones es un tema que ofrece serias dificultades, y en muchos casos, falencias de conocimientos elementales sobre el mismo. Un error frecuente hallado, deviene de inferencias o asociaciones incorrectas realizadas por los alumnos, que se originan por la creación de nuevas “reglas” de transposición de términos a partir de las que conocían, sin llegar a realizar un análisis retrospectivo de la solución a la que habían arribado, lo que muestra, asimismo, una falencia en la comprensión de los conceptos de ecuación, variable y solución.

Infieren que gran parte de las equivocaciones cometidas tienen su origen en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática caracterizados por: uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos; desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas; abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes; escasa importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas; abuso de prototipos visuales que inhiben la formación de imágenes conceptuales; tratamientos de problemas demasiado centrados en lo numérico.

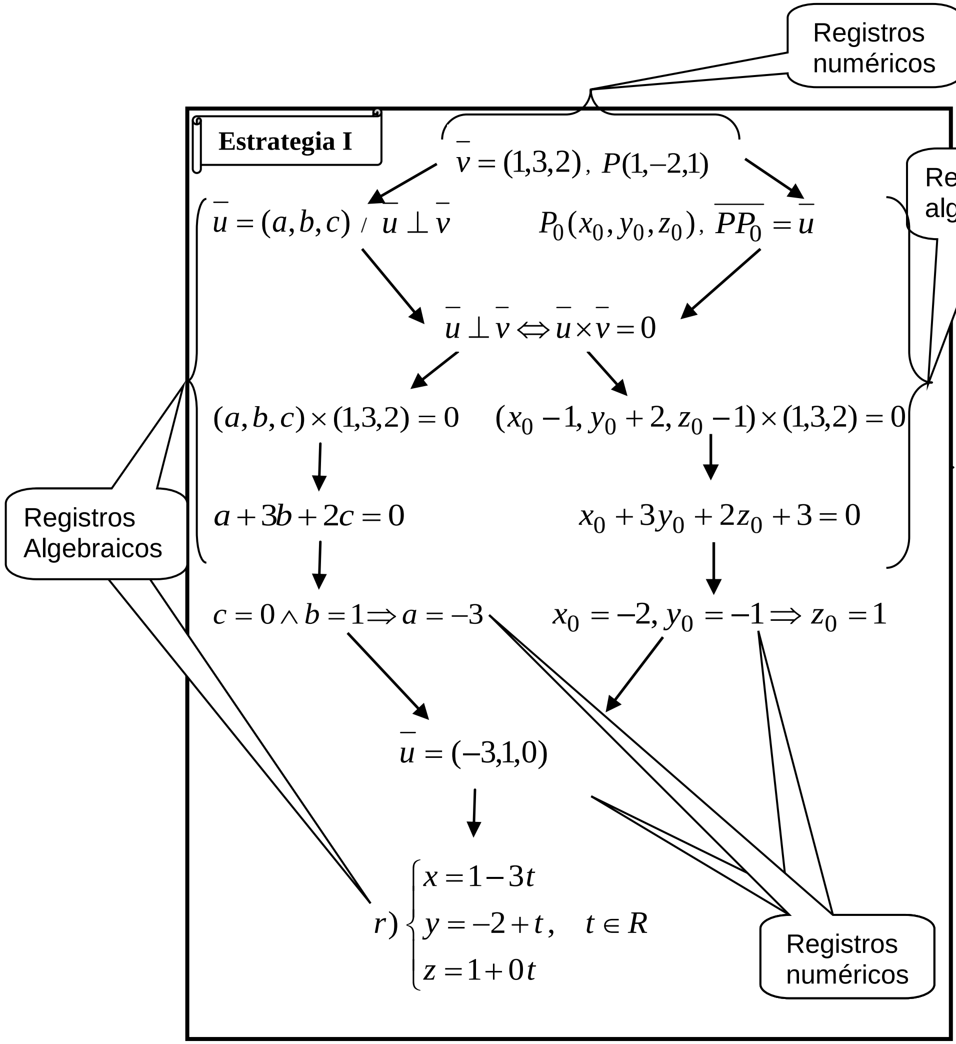
También los autores, destacan que los Profesores de Matemática entrevistados argumentaron que la mayoría de los errores que encuentran en el aprendizaje de esta ciencia se deben a que los alumnos no están acostumbrados a leer e interpretar consignas, a releer el enunciado, reflexionar sobre lo realizado, buscar datos relevantes, estrategia de resolución diferentes, hacerse preguntas, entre otras acciones. En relación a estas consideraciones, en nuestro estudio la ausencia de reflexión por parte de los estudiantes, se puso de manifiesto a través de los sesgos de confirmación presentes en las respuestas literales tanto en la SPI como en la SPII. En el caso particular de la SPI también se observaron dificultades en la búsqueda de similitudes en los tres ejercicios planteados.

Por otra parte, en nuestro estudio, en relación a la resolución de ecuaciones, los estudiantes tenían la posibilidad de realizar un análisis retrospectivo de la solución, y sin embargo esto no ha ocurrido en numerosos casos, aún entre quienes resolvieron correctamente algunos de los ítems planteados. Simplemente, se limitaron a la aplicación de una técnica o a efectuar transformaciones mecánicas, sin mediar otro proceso de reflexión.

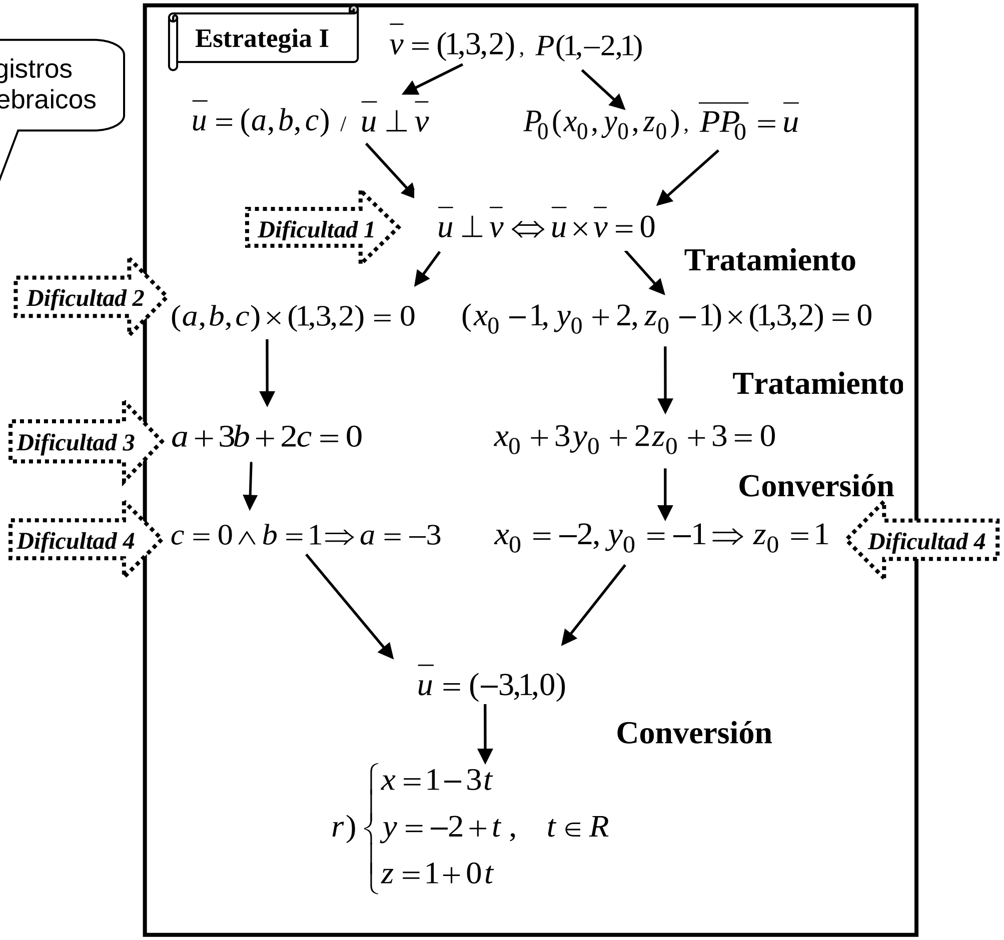
Señalamos que las relaciones establecidas con las investigaciones de los diferentes autores, que hemos descripto, se considera un aporte. Dichos antecedentes, como lo señalamos en el capítulo I, sólo en parte se refieren a nuestro tema de interés. Ninguno focaliza su estudio en el tipo de situación problemática planteada en esta tesis, y además Duval, referente que ha sustentado nuestro trabajo, no ha sido el marco teórico implicado en los mismos. Por tal motivo, se considera que hemos ampliado el campo de los errores y las dificultades a otro contexto: los registros de representación en Álgebra y Geometría Universitaria.

Otra contribución interesante de esta tesis es la forma en que se ha descripto e interpretado, paso a paso, la conformación del proceso de resolución a través de los esquemas presentados en el capítulo V. Los mismos constituyen una síntesis gráfica de tal proceso, que hizo posible reconocer la secuencia de registros en las actuaciones de los estudiantes, admitiendo una caracterización de cada estrategia. Estos esquemas, en los que se reproduce la sucesión de representaciones semióticas organizadas en los lineamientos de resolución, posibilitaron efectuar un análisis comparativo de las acciones de los estudiantes. Las operaciones y propiedades aplicadas pueden ser las mismas, pero cada forma de resolución presenta diferentes calidades de resolución.

A fin de ejemplificar la forma de análisis surgida a partir de estos esquemas, a continuación, se amplían los esquemas 5.1 y 5.9, correspondientes a la Estrategia I. Allí se evidencian con claridad las diferentes representaciones semióticas acontecidas, que permitieron clasificar los tipos de registros involucrados, y evaluar las actividades de tratamiento y conversión implicadas, determinando las evoluciones y dificultades en la resolución.



Representaciones semióticas en la EI



Dificultades en las representaciones semióticas en la EI

Es importante destacar que el esquema comparativo 5.7 de las estrategias detectadas facilitó el reconocimiento de aspectos comunes y características distintivas, visualizando la evolución de los registros mediante las representaciones semióticas utilizadas en cada una. Así como se presentó el esquema anterior pueden realizarse las mismas consideraciones en relación a las actividades cognitivas y la clasificación de los registros involucrados en la totalidad de las estrategias.

También en esta tesis se han caracterizado las respuestas de los estudiantes a través de los diagramas presentados en el capítulo V. Los mismos constituyen una síntesis de las respuestas de los estudiantes en cada estrategia de resolución, que permiten visualizar las actuaciones de los estudiantes en función de las solicitudes del enunciado. Estos diagramas no sólo permitieron sintetizar las relaciones entre lo que los estudiantes expresaron literal y algebraicamente, sino que, además, posibilitaron efectuar un análisis comparativo de las acciones de los estudiantes, presentado en el diagrama 5.14.
A fin de ejemplificar la forma de análisis surgida a partir de estos diagramas, a continuación, se presenta el diagrama 5.8 -correspondiente a la EI-.

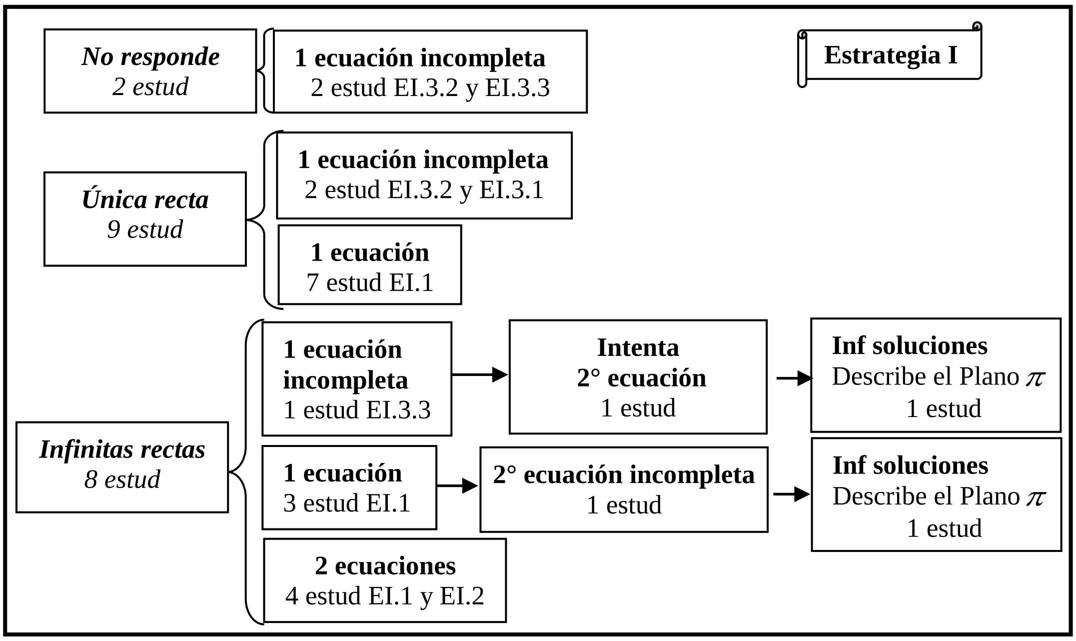


Diagrama 5. 8. Caracterización de las respuestas de los estudiantes en la EI

Por otro lado, los diagramas y esquemas realizados admitieron un análisis y síntesis que confluyeron en una caracterización de dificultades como generales y algebraicas. Y a su vez las mismas permitieron el estudio de dificultades ligadas a las actividades de tratamiento y conversión implicadas. Duval (1999) sostiene que dichas actividades deben ser consideradas como relevantes en la enseñanza de la Matemática. Sin embargo, plantearnos el objetivo que los estudiantes sean capaces de transitar de una representación a otra en toda actividad matemática se reconoce como una meta difícil.

Duval (2002, c. p. Font, Godino, D'Amore, 2007) alega que la comprensión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de la Matemática. Movilizar y coordinar varios registros en el desarrollo de una misma tarea, en el aprendizaje de un concepto, o bien poder elegir un registro en lugar de otro, es esencial en toda actividad matemática. En definitiva, las representaciones son parte esencial de la estructura conceptual necesaria para poder realizar un análisis de los procesos de comprensión, aprendizaje y asignación de significados que llevan a cabo los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998, c. p. Macías Sánchez, 2014).

Duval (1999) postula una naturaleza mental en la resolución de las actividades, a través de representaciones internas y atribuye un papel esencial en el proceso de aprehensión de las representaciones mentales -noesis- al lenguaje en sus diversas expresiones. El uso de diversos sistemas de representación semiótica y sus transformaciones se consideran indispensables en la concepción de los objetos matemáticos, pero la semiosis -producción de representaciones- no es espontánea y su dominio debe ser considerado en la enseñanza con una especial atención en la conversión de registros. "Comprender o saber un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas que le son propuestas en el aula" (Font et al., 2007, p. 15).

Para lograr que los estudiantes adquieran conocimientos de forma significativa no podemos basar la enseñanza en la transmisión de estrategias de cálculo o métodos algorítmicos, sino que se requiere entre otras condiciones que el alumno establezca relaciones básicas entre las distintas representaciones que hacen referencia a una misma noción. Restar importancia a la pluralidad y diversidad de registros de representación trae como consecuencia por parte del estudiante la consideración de que todas las representaciones de un objeto matemático determinado tienen el mismo contenido. Considerar un objeto a través de un único registro de representación da lugar a confusión, por la identificación del objeto de conocimiento con la representación utilizada, lo que admite una pérdida de información significativa. Al respecto, Duval (1999, c. p. Ospina García, p. 33) expresa: "todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación". Para configurar un concepto en toda su extensión y profundidad de manera que se evidencien todas sus propiedades y características se hace imprescindible trabajar con varias representaciones del concepto objeto de aprendizaje (Macías Sánchez, 2014).

La pluralidad de sistemas semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto y así ampliar las capacidades cognitivas y las representaciones mentales. En términos de Duval (1999) la noesis no es independiente de la semiosis, ya que es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis. Los principales obstáculos semióticos frente al aprendizaje tienen relación con la distinción que se realiza entre representante y representado y en la coordinación de registros, lo que implica desde el ámbito de la enseñanza que dediquemos tiempo a comprender estos procesos y a la búsqueda de formas de superación en el contexto de la enseñanza de la Matemática.

En referencia al estudio de las dificultades en el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio, en el presente estudio, hemos observado dificultades por un lado de carácter geométrico y por otro de índole algebraico, será entonces donde deberemos hacer hincapié en la enseñanza, pero particularmente en establecer las relaciones pertinentes entre los registros involucrados en ambas dimensiones de análisis. Si bien hemos hecho referencia a las dificultades intrínsecas en ciertos registros -algebraicos, gráficos, coloquiales y numéricos-, será en las transformaciones de unos a otros donde se debe prestar especial atención.

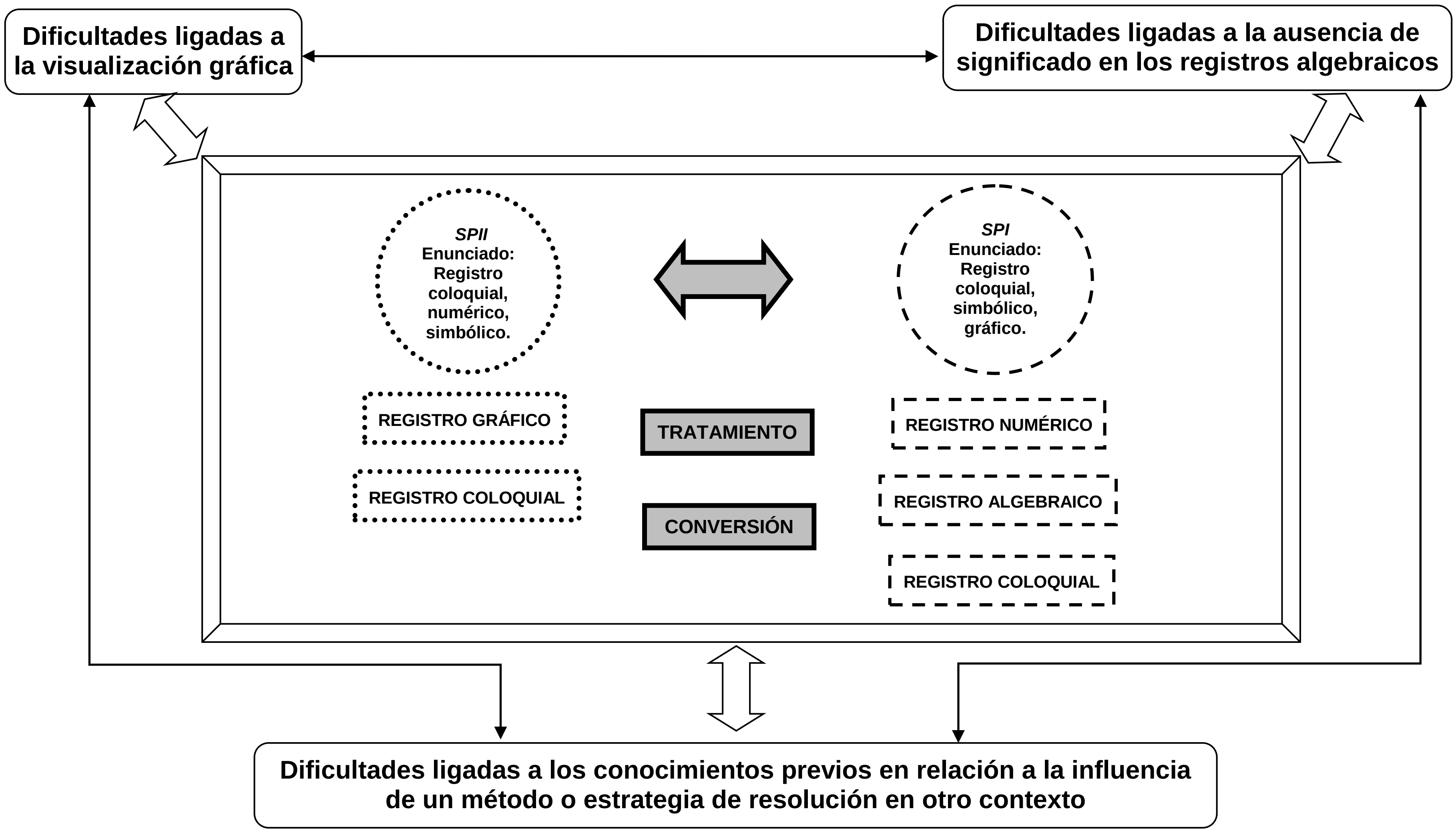


Diagrama 6. 2. **Diagrama global VI**

6.4 Limitaciones

El hecho que los resultados se obtuvieran exclusivamente a partir del análisis de las resoluciones de dos situaciones problemáticas diseñadas para esta investigación constituye una primera limitación de este trabajo. No obstante, las dos situaciones pueden ser consideradas como representativas del tipo de complejidad que implica la resolución de problemas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio. Por otro lado, si bien se reconocen las restricciones ligadas al uso del registro individual, oral y escrito, se cree haber mostrado una riqueza de información a través de la numerosa muestra de estudiantes de la cual se extrajo.

6.5 Implicaciones educativas

Como se ha mencionado al comienzo de esta tesis, para el CONFEDI (2014), la resolución de problemas constituye uno de los ejes sobre los que debería centrarse el aprendizaje y la evaluación en cursos universitarios de Matemática básica. Esto se contrapone con la forma tradicional de desarrollar las clases de algunos profesores, en general, en el aula no se analiza ni se discute un aspecto fundamental como es la comprensión del enunciado en función del tiempo requerido por los alumnos. Se incentiva muy poco el trabajo sobre las hipótesis, las interpretaciones y las fundamentaciones erróneas, priorizándose, en su lugar, las respuestas correctas que permiten avanzar en forma lineal hacia la solución del problema planteado.

Ausubel (1976, c.p. Gutierrez, 1987) propone la organización del contenido en función de una estructura lógica, es decir atendiendo a su organización formal, pero también atendiendo a la representación que cada estudiante haga de esos contenidos en relación con su estructura mental de conocimientos. Para generar un aprendizaje significativo es necesaria una enseñanza favorecedora del mismo, planificando acciones en función de la experiencia docente, en función de los errores y dificultades observados en los alumnos, con la finalidad de que se produzcan avances, cambios y las modificaciones necesarias.

En este sentido, es importante que los docentes trabajen situaciones problemáticas en el aula, orientando a los estudiantes en la elaboración de modelos coherentes y funcionales a partir de una lectura comprensiva del enunciado y de un análisis cualitativo de la situación. El ejercicio de esa lectura comprensiva en conjunto, entre profesor y alumnos, identificando los datos explícitos y ocultos, las implicancias de las condiciones claves y las hipótesis implícitas permitirá que los estudiantes se apropien de criterios de análisis que les facilitarán el abordaje de situaciones nuevas. Tal explicitación permitirá reflexionar acerca de la situación presentada en el enunciado y comenzar a transitar el camino a la abstracción que la misma implica. En este sentido, es importante trabajar sobre situaciones que admitan soluciones alternativas, contrastando las creencias de los estudiantes con las estructuras de conocimiento implicadas en la disciplina a fin de detectar y explicitar toda posible inconsistencia. De este modo el estudiante podrá dar un nuevo sentido a la información presente en el enunciado contemplando su estructura conceptual en consonancia con su experiencia previa, revisando y modificando las creencias de partida, identificando la información externa relevante y recuperando y aplicando la información interna útil.

En Matemática el uso del Álgebra es importante, ya que con ella, los alumnos amplían su visión tanto de los objetos matemáticos como de las operaciones que pueden estar representadas por los sistemas formales. Esta comprensión de la representación algebraica es lo que posibilita un trabajo formal aplicable a todas las ramas de la Matemática o situaciones provenientes de otras ciencias (Abrate et al., 2006).

Centrando la atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, pueden encontrarse numerosas investigaciones sobre los graves riesgos que se corren cuando se privilegia en forma casi exclusiva la realización de rutinas algorítmicas de un modo abstracto. Particularmente, esta situación pudo ser advertida en nuestro estudio, en las producciones de los alumnos que cometieron errores por ajustarse a procesos mecánicos con escaso sustento conceptual; lo que nos lleva a considerar necesario que se indague sobre las influencias que tienen el conjunto de recetas y técnicas a las que muchas veces son sometidos los estudiantes durante su formación en la aparición de errores en el aprendizaje de la Matemática.

Es frecuente ver que en muchos casos los alumnos desean saber simplemente el algoritmo que permite resolver un ejercicio, sin preocuparse por los conceptos subyacentes o las ideas involucradas. Cuando estas ideas son explicadas, es común observar que los alumnos se "desconectan" dejando pasar ese ruido molesto -la voz del docente- y esperan el momento en que se les dice “cómo se hace”, “cuál es la receta”, percibiendo así a la Matemática como un conjunto fijo de conocimientos pulidos y acabados. Una explicación a esta creencia, expresa que la visión que tienen los estudiantes de la Matemática está asociada con la certeza, y el saber Matemática lo relacionan con aplicar las reglas que propone el docente, -ya sea cuando hace una pregunta, plantea una tarea, o evalúa–, y que adquiere en la escuela a través de años de mirar, escuchar y practicar (Lampert, c.p. Abrate et al., 2006). En este aspecto Esquinas Sancho (2009) sostiene que el álgebra escolar es rica en sintaxis, pero pobre en significados y la razón radica en el contacto de los alumnos con los contenidos algebraicos de forma poco significativa. A lo largo de la historia la diversidad de los problemas que la humanidad ha enfrentado ha sido la causa de la evolución del álgebra. La duración de su desarrollo histórico es una prueba más de la complejidad y dificultad que esconde el álgebra, como cita Brousseau, parafraseando a Dieudonné, “mientras que apenas fue necesario un siglo para que la geometría elemental lograra una forma casi definitiva, han sido necesarios trece siglos desde Diofanto para que el álgebra llegue a ser lo que ahora conocemos” (1989, c.p Esquinas Sancho, 2009, p. 82). Hoy se considera el Álgebra como una herramienta fundamental en el trabajo con modelos matemáticos y en la resolución de una gran variedad de problemas, ya que, proporciona una valiosa estructura para el estudio de la realidad desde un punto de vista matemático. Pero con frecuencia su complejidad es subestimada en la enseñanza al presentar a los alumnos un Álgebra radicalmente sesgada, como un instrumento vacío de significado, que resulta fuente de errores y dificultades.

Otra rama importante de la Matemática es la Geometría, disciplina con una estructura con sintaxis y semántica propias, que requiere un cierto grado de razonamiento e intuición para su comprensión. En la escuela media la Geometría aparece con frecuencia al final de los programas y es la materia más sacrificada por la falta de tiempo para impartir en clase. Además, en general, los profesores prefieren hacer hincapié en los procedimientos operativos de la Matemática en lugar de descubrir con sus alumnos las formas y relaciones geométricas presentes en los objetos. Por otro lado, en las clases de Geometría y también en los libros de texto es frecuente ver un abuso de representaciones típicas de las figuras geométricas, lo que no es un error matemático, como lo aclaran Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), pero sí un serio error didáctico que entorpece el proceso de aprendizaje. Algunos errores que devienen de las dificultades que los alumnos tienen para obtener información espacial se encuentran ligados a los registros gráficos presentados y consecuentemente obstaculizan la abstracción de las relaciones geométricas relevantes. En particular, los resultados en esta tesis mostraron algunas dificultades asociadas a las representaciones gráficas.

En este sentido, teniendo en cuenta el modo en que ciertos conceptos quedan atados a los ejemplos típicos que se presentan en la enseñanza, los profesores debemos ser cuidadosos en la elección de los registros a utilizar.

Si bien en la enseñanza matemática, en muchos casos, se continúa privilegiando el sistema de representación algebraico, no debería priorizarse ningún sistema en detrimento de otro. Ya que cada uno realiza un aporte relevante, pero sobre todo porque se restringe a los alumnos en la construcción de conexiones de conocimiento.

Socas y Palarea (1997, c.p. Abrate et al., 2006) señalan que es razonable aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin reunir diversas representaciones del mismo. La manipulación por parte de los alumnos de representaciones les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto matemático, donde la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones que se hayan utilizado.

Como hemos observado en nuestra investigación, a pesar de que los estudiantes dieron muestra del manejo de diferentes registros (lenguaje natural, algebraico, gráfico y numérico), no se dio de manera espontánea la coordinación entre ellos, ya que los alumnos en muchas ocasiones no identificaron el mismo objeto entre sus diferentes representaciones. Esta situación es calificada por Duval (1999) como “encerramiento de los registros de representación”, lo que se produce porque comúnmente se trabaja con registros de forma separada sin hacer ningún tipo de conversión entre ellos. Para una mejora en la enseñanza hacer un análisis en términos de registros no consiste en buscar cuál es el mejor registro posible, pensar eso es quedarse en una creencia monoregistro. Debe buscarse un equilibrio en el uso de las diferentes representaciones en la construcción de conceptos y en la resolución de problemas, reflexionando acerca del proceso seguido y los resultados obtenidos. El permitir al alumno establecer relaciones entre el proceso de resolución, los resultados obtenidos y otros conocimientos anteriores es lo que le da significación al conocimiento, como un proceso evolutivo, continuo e inacabado. Estas ideas guardan relación con una concepción de aprendizaje como resultado de "(…) una interacción constante del alumno con las situaciones problemáticas, interacción dialéctica (pues el sujeto anticipa, finaliza sus acciones) en la que compromete los conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar nuevas concepciones" (Brousseau, 1983, c.p. Cid Castro, 2015, p. 11). En cuanto a la enseñanza y la aparición de errores, si se quiere desestabilizar una noción muy arraigada, será ventajoso que el estudiante pueda poner a prueba sus concepciones en numerosas situaciones, pero bajo condiciones suficientemente diferentes para un cambio significativo. Recordemos que en opinión de Brousseau un obstáculo está organizado como un conocimiento, con sus relaciones, evidencias, consecuencias y ramificaciones. El mismo va a resistir el rechazo, intentará como pueda adaptarse localmente, acomodarse, modificarse lo menos posible, optimizarse sobre un campo reducido. "Por todo ello, será necesario un flujo suficiente de situaciones nuevas, inasimilables por el obstáculo, que lo desestabilicen, lo vuelvan ineficaz, inútil, falso, que hagan necesaria la renovación o el rechazo, el olvido, la extirpación, hasta de sus últimas manifestaciones" (Brousseau, 1983, c.p. Cid Castro, 2015, p. 65).

Una recomendación que se deriva de este trabajo tiene que ver con la formación y actualización de los docentes de Matemática básica universitaria. Para que las acciones propuestas sean viables es necesario que los docentes se capaciten y se involucren en este tipo de análisis vinculados a los errores frecuentes de sus estudiantes. Cuantos más datos dispongan acerca de los errores y del tipo de razonamiento que los generan, más posibilidades tendrán de diseñar modos de intervención didáctica que orienten a los estudiantes en la tarea de resolución.

6.6 Algunas posibles derivaciones

Tan rica fue la información obtenida a partir de las resoluciones escritas que los mismos protocolos podrían utilizarse para realizar un análisis comparativo entre las actuaciones de un mismo estudiante en cada uno de los problemas. Además, creemos que sería interesante aplicar el mismo material a grupos de estudiantes con características diferentes a las que se analizaron en esta tesis. Por ejemplo, analizar las resoluciones de estudiantes recursantes de la asignatura. Esto permitiría profundizar, mediante un estudio comparativo entre estos grupos, las características de las dificultades acontecidas, su persistencia o la superación de las mismas.

También queda abierta la posibilidad de aplicar este análisis a otras situaciones problemáticas e incluso complementando la información obtenida desde la aplicación de otra metodología, como grupos de discusión, investigación en acción, entre otros.

Para el estudio de las dificultades en la temática de esta tesis nos hemos focalizado en las representaciones externas, en los procesos de resolución de los estudiantes, una línea diferente de la problemática sería el abordaje de las representaciones internas implicadas en dichos procesos. La perspectiva del procesamiento de la información, una de las corrientes más representativas de la Psicología Cognitiva, considera al ser humano como un procesador de información, con limitaciones y características peculiares, que codifica, almacena y recupera información para responder a los estímulos del medio, de manera que su actividad mental es posible describirla en términos de procesos computacionales. Los trabajos de Newwel y Simon (1972), fueron decisivos en la consolidación de esta postura, mostraron cómo la inteligencia humana podía estudiarse desde una perspectiva funcional, a través de los heurísticos que utilizaban las personas al resolver problemas. Desde esta perspectiva podrían estudiarse las dificultades en la temática de esta tesis, a partir de las características del “espacio del problema”, “de los operadores” y de “los modelos” construidos durante el proceso de resolución.

Es importante considerar que las carreras de Ingeniería poseen una fuerte carga en Matemática, y que esta disciplina tiene modos de funcionamiento propios -como lectura, interpretación, forma de estudio, simbología, lógica, abstracción, generalización, etc.- que deben ser enseñados pero que muchas veces constituyen una enseñanza omitida (Ezcurra, 2012). En particular, desde el punto de vista didáctico, se pretende que los resultados de esta investigación constituyan un aporte para la enseñanza de la asignatura AGA; involucrando a los docentes a la discusión de la problemática abordada, al diseño de material didáctico e implementación de estrategias en función de las dificultades que se han puesto de manifiesto en el presente trabajo. Para acercar a los alumnos al conocimiento, algunas estrategias de enseñanza tendrán la función de reactivar los conocimientos que el alumno ya posee, los recuerde, los refuerce. Otras se aplicarán para corregir ideas erróneas, ya que la permanencia de las mismas provocará que los nuevos conocimientos no se incorporen o asimilen. Y otras tendrán la misión de crear los subsunsores adecuados para la adquisición de los conocimientos venideros. Sin embargo, debemos ser conscientes que el aprendizaje es un proceso activo, en el cual se cometerán errores, no se trata de buscar “estrategias perfectas” con las expectativas puestas en la ausencia de errores. Sino de estar preparados para acompañar a nuestros estudiantes a superar las dificultades que irán transcurriendo, convirtiendo los errores en una oportunidad para que reorganicen sus esquemas y generen nuevas conexiones. Además, resulta de vital importancia que la mediación pedagógica genere un ambiente de aprendizaje agradable para los jóvenes, capaz de propiciar emociones y actitudes positivas de manera que posibiliten la transformación de las concepciones que pudieran afectar la adquisición del conocimiento matemático.
El esfuerzo y el tiempo dedicado a analizar este tipo de problemas se justifica ampliamente ya que nuestros estudiantes son los futuros ingenieros, cuya vida profesional se centrará precisamente en la aplicación de la temática abordada en la resolución de problemas concretos.

Para terminar, recuperando lo expresado en las primeras páginas, queremos destacar que esta tesis constituye un aporte para la Didáctica de la Matemática, al contribuir al conocimiento de las dificultades de los estudiantes durante la resolución de situaciones problemáticas de contenido específico. En este sentido, el marco de los registros de representación de Duval ha posibilitado desentrañar errores en el proceso de resolución de situaciones problemáticas cuyo conjunto solución está formado por infinitas rectas en el espacio, reconociendo los obstáculos en el camino a la meta. A partir de este conocimiento, ausente de antecedentes en el área de Álgebra y Geometría de nivel superior, son mayores las posibilidades de interpretar las actuaciones de los estudiantes y de orientarlos en la difícil pero apasionante tarea de resolución en Matemática Universitaria.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. y Vargas J. M. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Abrate, R., Font, V. y Pochulu M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. *Memorias de II REPEM*. La Pampa, Argentina.

Álvarez Álvarez, C. (2008). La etnografía como modelo de investigación en educación. *Gazeta de Antropología, 24(1)*. Recuperado de http://www.ugr.es/~pwlac/G24_10Carmen_Alvarez_Alvarez.html

Ascheri, M. y Rechimont E. (2007). Registros de representación semiótica: análisis a-priori de un problema de solución numérica. *Memorias de IV CIEMAC.* La Pampa, Argentina.

Benveniste, E. (1974). *Problemés de linguistique générale*, 2. Paris: Gallimard.

Brensson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de comunication. In Piaget Mounoud et Bronckart (Eds.), Psychologie. Paris: Encyclopédie de la Plegade, 933-982.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4(2),* 165-198.

Calvillo, N. y Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 421-426. Camaguey, Cuba.

Camargo, A. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. *Memorias del VII CIBEM.* Montevideo, Uruguay.

Carlino, P. (2011, 30 de Abril). Ingresar y permanecer en la universidad pública. *El Eco de Tandil*, p. 5.

Carrillo Siles, V. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Innovación y Experiencias Educativas, 16,* 1-10.

Cid Castro, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Tesis para obtener el título de Doctor, Universidad Zaragoza, Zaragoza.

C.I.S.I.A-CERESTA (1998). *SPAD integrado versión 4*.

CONFEDI. (2014, Abril). *Documentos de Confedi. Competencias en Ingeniería*. Recuperado el 2 de octubre de 2014, de http://www.confedi.org.ar/documentos2

Courant, R. y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática?*. Madrid: Aguilar.

D'Agostini, V., Demti, G. y Pérez, M. (2011). Cómo dividir en áreas iguales: un problema de la vida cotidiana. *Memorias de la V Jornada de Ciencia y Tecnología.* Rosario, Argentina.

D'Agostini, V., Demti, G. y Sánchez, P. (2012). Vectores en el Plano y en el Espacio. Una Actividad Matemática para Estudiantes Universitarios. *Memorias del Simposio de Educación Matemática. SEM 2012.* Buenos Aires, Argentina.

D'Agostini, V., Demti, G. y Katz, R. (2014). En Búsqueda de Modalidades de Enseñanza y Evaluación en la Asignatura Álgebra y Geometría I, a fin de favorecer el avance regular de los ingresantes a Ingeniería. *Memorias de las Cuartas Jornadas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico Tecnológicas.* Rosario, Argentina.

D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución.* Recuperado el 22 de Mayo de 2013, de http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/479%20Conceptualisacion.pdf

D'Amore, B. (2005). *Bases pedagógicas, filosóficas y conceptuales de la Didáctica de la Matemátic*a. México: Editorial Reverté.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime, Número Especial*, 177-195.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista científica, 11*, 1-15.

Del Puerto**,** S. y Seminara, S. (2009). *Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la geometría analítica*. Recuperado el 1 de marzo de 2012, del sitio Web de la Sociedad Argentina de Educación matemática: http://www.soarem.org.ar/Documentos/44%20del%20Puerto.pdf

Del Puerto**,** S. y Seminara, S. (2010). *Cambio conceptual y trabajo cooperativo: una experiencia en el aula de matemática*. Recuperado el 5 de marzo de 2012, del sitio Web de la Sociedad Argentina de Educación matemática: http://www.soarem.org.ar/Documentos/50%20del%20puerto.pdf

Demti, G., Pérez, M. y D'Agostini, V. (2014). Repitencia en las asignaturas matemáticas de primer año en carreras de Ingeniería. *Memorias del VIII Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria y de Nivel Superior*. Rosario, Argentina.

Dolores, C. (2007). Usos de las gráficas y sus repercusiones en el aprendizaje de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *20,* 479-484. Camaguey, Cuba.

Driver, R. y Oldham, V. (1988). Un enfoque constructivista del desarrollo curricular en Ciencias. En Porlán, R., García, J. E. y Cañal, P. (Compil.). *Constructivismo y Enseñanza de las Ciencias*, 115-136. Diada: Sevilla.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* (M. Vega Restrepo, trad.). Colombia: Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995).

Esquinas Sancho, A. M. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente.* Memoria para optar al grado de de doctor, Facultad de Educación, España, Madrid.

Ezcurra, A. (2012). Hay un proceso de inclusión excluyente. *Página 12*. Recuperado el 5 de marzo de 2013, de http://www.pagina12.com.ar/diario/universidad/10-192961-2012-04-30.html

Franchi, L. y Hernández De Rincón, L. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana parte II. *Educere, 8(25),* 196-204.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27(2)*, 2 -7.

García García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula.* Tesis de Doctorado, Universidad de Granada, Granada.

García Quiroga, L., Vásquez Cedeño, R. y Hinojosa Rivera, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías, 24(7),* 27-34.

Gil Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación cualitativa.* Madrid: PPU.

Gil Pérez, D. (1986). La Metodología Científica y la Enseñanza de las Ciencias. Unas relaciones controvertidas*. Enseñanza de las Ciencias, 4(2),* 111-121.

Gimeno Sacristán, J. (1981). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya**.**

Godino, J. D. (1991). *Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática*. Editorial Síntesis: Madrid.

Guillén Soler, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. *Investigación Didáctica, 18(1),* 35-53.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y Habilidades en Visualización Espacial. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Valencia, España.

Gutiérrez, R. (1987). Psicología y Aprendizaje de las Ciencias. El modelo de Ausubel. *Enseñanza de las Ciencias*, *5 (2),* 118-128.

Gutiérrez Otálora, S. y Parada Landazábal, D. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones.* Tesis para obtener el título de Magister en docencia de la matemática, Facultad de Ciencia Y Tecnología, Bogotá DC.

Hernández Castilla, R. y Opazo Carvajal, H. (2010). *Apuntes de Análisis Cualitativo en Educación*. Recuperado el 13 de Marzo de 2013, de http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/Met_Inves_Avan/Materiales/Apuntes_Cualitativo.pdf.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Buenos Aires: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, 165-178. Universidad de Granada.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon, 23,* 49-62.

Jarero Kumul, M. (2006). *Elementos para el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta*. Tesis para obtener el título de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambrige, MA: Harvard University Press.

Lara Guerrero, J. (1997). Estrategias para un aprendizaje significativo-constructivista. *Enseñanza*, *15,* 29-50.

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de Educación*, *4*, 167-179.

Macías Sánchez, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Conect@2, 4(9),* 27-57.

Moreira, M. A. (2012). ¿Al final, qué es aprendizaje significativo?. *Revista Curriculum, 25,* 29-56.

Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Ochoviet Filgueiras, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis para obtener el título de Doctor en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, Montevideo, Uruguay.

Olmos, S., Bravo Tapia, J. y Monteverde, A. (2001). *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial.* Recuperado el 12 de Marzo de 2014, de http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Ibarra%20Olmos.pdf

Ospina García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal.* Tesis para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias, Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colombia.

Oviedo, L., Kanashiro A., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria, 13,* 29-36*.*

Pérez Gómez, A. y Gimeno Sacristán, J. (1992). *Comprender y transformar la enseñanza.* Editorial: Morata.

Perkins, D. N. (1991). *What Contructivism Demands of the Learner*. USA: Educational Technology.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Traducción española (1976): Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas.

Prieto, F. y Vicente, S. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. *Memorias de I REPEM.* La Pampa, Argentina.

Quivy, R & Van Campenhoudt, L. (1998). *Manual de Investigaciones en Ciencias Sociales*. México: Editorial Limusa.

Radillo Enríquez, M., Nesterova, E., Ulloa Azpeitia, R. y Pantoja Rangel, R. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. *Memorias de CIVE 2005 Congreso Internacional Virtual de Educación.* Guadalajara, México.

Ramírez Sandoval, O., Romero Félix, C. y Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. *Memorias de I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds). *Educación Matemática*, 69-108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rodríguez, H. (2012). Impacto del uso de Cabri II Plus en el aprendizaje del concepto de Transformación Lineal en R2. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, *3 (1),* 87-101.

Sanmartín Arce, R. (2000). Etnografía de los valores. *Teoría de la Educación*, *12,* 129-141.

Scavone, S. (2010). *La inserción universitaria, un horizonte posible.* Recuperado el 12 de Agosto de 2013, de www.redapu.com/uploads/misc/P_118_Ponencia_Scavone.pdf

Segura de Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Relime, 7 (1)*, 49-78.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra, M. Socas. *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* 125-154. Barcelona, España: Horsori.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Valdés Castro, P. y Gil Pérez, D. (1996). *Temas escogidos de la didáctica de la física*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Vallés, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social*. Madrid: Síntesis.

Velasco, H y Díaz de Rada, A. (2006). *La lógica de la investigación etnográfica. Un modelo de trabajo para etnógrafos de escuela*. Madrid: Trotta.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa*. Barcelona: Paidós-MEC.