

# Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

## Óptica Geométrica parte I

Tec. Univ. en Óptica  
y Contactología

Cód. 7002-24

E. Benatti  
F. Picco  
N. Rojas



Dpto. de Física

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



# Índice

<b>Índice</b> .....	<b>1</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>3</b>
Diferencias de esta versión respecto de la versión 2020.....	4
<b>Capítulo 0: Repaso</b> .....	<b>5</b>
0.1. Ecuación de Gauss y potencia de sistemas ópticos simples.....	5
0.2. Focos y planos focales.....	6
0.2.1. Determinación de la potencia de un sistema óptico a partir de la distancias focales.....	9
0.2.2. Aumento lateral de una imagen.....	10
0.3. Determinación gráfica de imágenes.....	11
0.4. Propiedades de las imágenes.....	15
0.5. Resumen de Fórmulas.....	18
0.6. Cuestiones.....	19
0.7. Ejercicios.....	20
<b>Capítulo 1: Lentes Gruesas</b> .....	<b>22</b>
1.1. Focos y puntos principales.....	22
1.1.1. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método gráfico.....	24
1.1.2. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método analítico.....	27
1.1.3. Determinación de imágenes a partir de la modelización de una lente gruesa.....	35
1.2. Puntos nodales y centro óptico.....	38
1.3. Resumen de Fórmulas.....	42
1.4. Cuestiones.....	43
1.5. Ejercicios.....	44
1.6. Apéndice A: Demostración de la expresión 1.18.....	48
<b>Capítulo 2: Combinaciones de Lentes</b> .....	<b>49</b>
2.1. Combinación de Lentes Delgadas.....	49
2.2. Combinación de Lentes Gruesas.....	50
2.3. Resumen de Fórmulas.....	54
2.4. Cuestiones.....	55
2.5. Ejercicios.....	56
<b>Capítulo 3: Espejos Gruesos</b> .....	<b>59</b>
3.1. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Delgada separada de un Espejo Simple.....	60
3.2. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa con una Superficie Plateada.....	66
3.3. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa separada de un Espejo Simple.....	68
3.4. Métodos gráficos.....	70
3.4.1. Lente Delgada con un Espejo Simple.....	71
3.4.2. Lente Gruesa con una Superficie Plateada.....	73

# Óptica Geométrica (parte I)

---

## Tec. Univ. En Óptica y Contactología

3.4.3. Lente Gruesa con un Espejo Simple.....	74
3.5. Determinación de imágenes a partir de un sistema modelado.....	76
3.6. Resumen de Fórmulas.....	77
3.7. Cuestiones.....	79
3.8. Ejercicios.....	80
<b>Bibliografía.....</b>	<b>84</b>



# Introducción

El presente es un apunte para la materia Óptica Geométrica de la carrera de Técnico Universitario en Óptica y Contactología que se dicta en el Instituto Politécnico Gral. San Martín de la Universidad Nacional de Rosario. En éstas páginas profundizaremos los conceptos de Óptica Geométrica tratados en la materia Física de la misma carrera, aplicando los mismos a sistemas ópticos más complejos que los tratados anteriormente. También trataremos los límites de la aproximación paraxial sobre la que se sustentan las ecuaciones de uso cotidiano de la óptica, el uso de diafragmas en la formación de imágenes, así como conceptos de iluminación y colorimetría.

El contenido de estas páginas está basado en el apunte que en su momento escribiera el Ing. Osvaldo Godino, aunque hemos modificado algunos aspectos del contenido con el fin de adaptarlo a los programas de la materia sobre los que trabajamos actualmente.

Los capítulos del apunte están organizados de manera tal que los conceptos que se desarrollan en uno son necesarios para las demostraciones del siguiente, por lo tanto es preciso que antes de concluir cada capítulo se tengan en claro las expresiones finales y las suposiciones que deben cumplirse para que dichas expresiones sean aplicables.

El apunte inicia con el Capítulo 0, donde se repasan los conceptos fundamentales de óptica geométrica aplicados a espejos simples y lentes delgadas, así como los métodos fundamentales para la construcción de imágenes, analíticos y gráficos.

Los contenidos de la materia propiamente dicha inicia en el Capítulo 1, donde se estudian aquellas lentes cuyo espesor no es despreciable con respecto a su distancia focal, denominadas lentes gruesas. Se trabajan expresiones que permiten modelar a este sistema más complejo por uno más sencillo. Esto se logra a partir de determinar los denominados puntos y planos principales de un sistema óptico. Los planos principales son planos de aumento lateral unitario, que permiten reducir el conjunto de desvíos que se da en la totalidad del sistema a un único desvío que se da en dichos planos. A su vez se trata el concepto de puntos nodales de un sistema óptico, que son puntos de aumento angular unitario, es decir, puntos que no producen un desvío de los rayos que ingresan al sistema.

En el Capítulo 2 se aplican algunos de los métodos del capítulo anterior a sistemas compuestos con varias lentes, que podrían ser gruesas o delgadas. Demostraremos que sin importar la cantidad de lentes que conformen un sistema óptico, el mismo también puede ser modelado a partir de dos **planos principales** que condensan la totalidad de los desvíos que se dan en el sistema.

La primera parte de este apunte concluye en el Capítulo 3, donde trataremos la combinación de espejos con lentes de diferentes tipos, que denominaremos espejo grueso. En esta sección veremos que las imágenes formadas por tal sistema, sin importar su complejidad, pueden determinarse a partir de un sistema modelo que consta de un único foco y un plano ficticio en el que ocurre la reflexión. Denominaremos a dicho plano ficticio **plano principal** del espejo grueso.

Como toda obra que tiene fines didácticos, la misma estará en permanente revisión, por lo cual se incentiva a lector a ser un lector activo, que además de buscar de apropiarse de los contenidos que aquí figuran, encuentre y reporte errores e inconsistencias, y proponga y discuta nuevas formas de abordaje de cada uno de los temas.

### Diferencias de esta versión respecto de la versión 2020

Esta obra tiene numerosas diferencias con respecto a la versión editada en 2020. Entre las más importantes podemos mencionar:

- Se han incorporado las expresiones para calcular el aumento de una imagen en el Capítulo 0.
- Se han corregido errores de tipeo en la escritura de algunas fórmulas. La corrección más importante es la relacionada al espejo grueso constituido por una lente gruesa separada de un espejo simple.
- Se han incorporado las respuestas numéricas a todos los ejercicios.
- Al final de cada Capítulo se incorporó una sección en donde figuran las fórmulas más relevantes del mismo.
- Se han distinguido las fórmulas finales de las demostraciones (en color azul), de aquellas que funcionan como pasos intermedios de las mismas (en color rojo).



# Capítulo 0: Repaso

## 0.1. Ecuación de Gauss y potencia de sistemas ópticos simples

La determinación analítica de la posición y naturaleza de las imágenes creadas por cualquier sistema óptico se realiza empleando la **Ecuación de Gauss**:

$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = P \quad (0.1)$$

donde  $P$  es la **potencia** del sistema en cuestión. La potencia de un sistema óptico es una magnitud que depende de la geometría de las superficies refractantes o reflejantes que lo constituyen, y, en el caso de las lentes y dioptras, depende de la relación que exista entre el índice de refracción del material del que están hechas las mismas y el medio en que se encuentran. Debe recordarse que la [Ecuación \(0.1\)](#) es válida mientras todos los rayos que ingresen al sistema se encuentren próximos al eje del mismo, y sean aproximadamente paralelos al mismo. Los rayos que cumplen esta condición se denominan **paraxiales**, y la aproximación mencionada se denomina **aproximación paraxial**. Dicho de otro modo, decimos que la [Ecuación \(0.1\)](#) sólo es válida dentro de la aproximación paraxial.

Hasta el momento, quien lee este apunte debería estar familiarizado con las expresiones que permiten calcular la potencia de los sistemas ópticos simples: la **dioptra**, la **lente delgada** y el **espejo simple**:

- **Dioptra de índice de refracción  $n'$** : Si los rayos de luz van desde un medio de índice de refracción  $n$  hacia un medio de índice de refracción  $n'$ , la potencia de una dioptra se puede calcular como:

$$P_D = \frac{n' - n}{R_D} \quad (0.2)$$

donde  $R_D$  es el radio de curvatura de la dioptra.

- **Lente delgada de índice de refracción  $n'$** : Una lente delgada se puede pensar como dos dioptras consecutivas, por lo que la potencia del sistema es simplemente la suma de la potencia de cada dioptra:

$$P_{LD} = P_{D1} + P_{D2} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2} \quad (0.3)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura de la primera y segunda superficie de la lente, respectivamente. La nomenclatura elegida supone que la primer superficie de la lente está en contacto con un medio de índice de refracción  $n$ , mientras que la segunda superficie está en contacto con un medio de índice de refracción  $n''$ , y que los rayos van desde el medio de índice  $n$  a un medio de índice  $n''$ . Cuando la lente se encuentra sumergida en aire ( $n = n'' = 1$ ), la [Ecuación \(0.3\)](#) suele recibir el nombre de la fórmula del constructor de lentes.

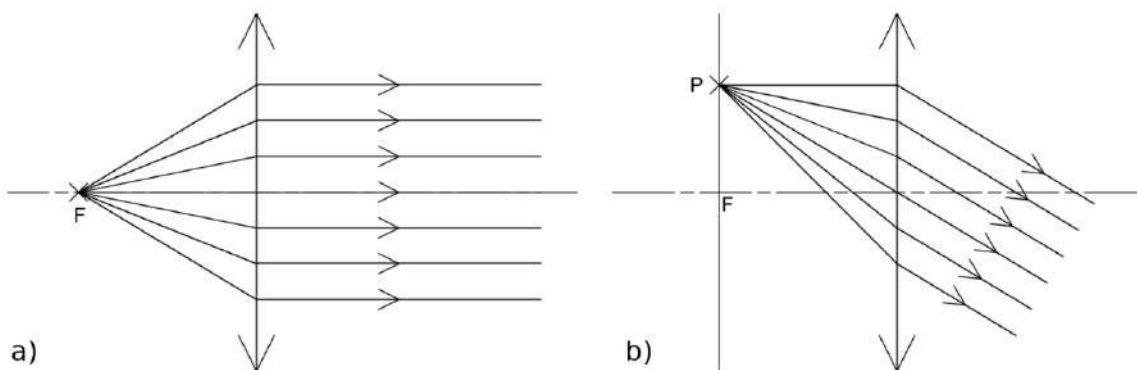
- **Espejo simple en un medio de índice de refracción  $n$ :** A diferencia de una lente o una dioptra, que son medios que desvían los rayos que inciden sobre ellas, un espejo es un sistema óptico que refleja los rayos que inciden sobre él. Esto significa que al aplicar la [Ecuación de Gauss \(0.1\)](#) siempre se cumple que  $n = n''$ . La expresión para calcular la potencia de un espejo simple es

$$P_{ES} = - \frac{2n}{R_E} \quad (0.4)$$

donde  $R_E$  es el radio de curvatura del espejo.

### 0.2. Focos y planos focales

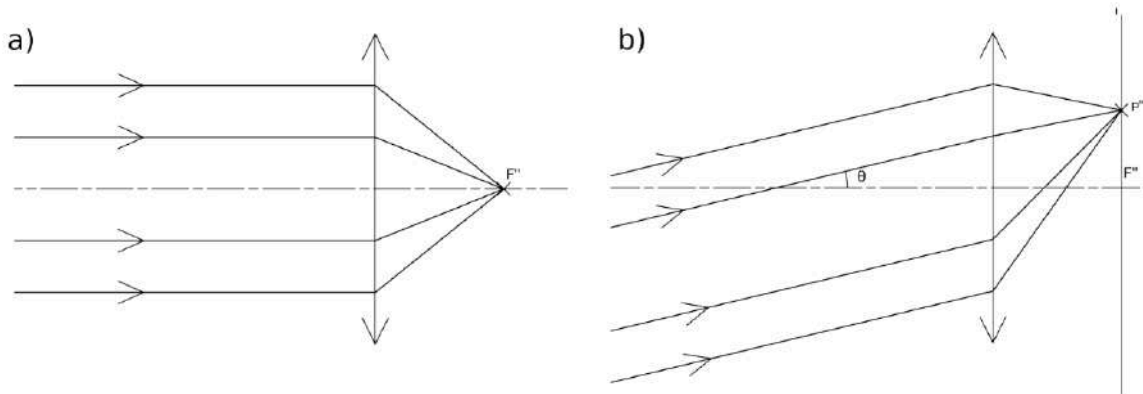
Para cualquier sistema, puede definirse el **foco objeto** como el punto objeto situado sobre el eje cuya imagen se forma en el infinito. En el caso de una lente esto significa que los rayos que divergen desde el foco objeto son paralelos, después de la refracción, al eje de la lente, como indica la [Figura 1-a](#). El foco objeto lo representaremos con la letra F.



**Figura 1** (a) Si se coloca un objeto en el Foco F de un sistema óptico su imagen se formará en el infinito. (b) Cualquier conjunto de rayos que provengan del mismo punto del plano focal objeto emergerán paralelos entre sí luego de ser refractados por la lente.



El plano que pasa por el foco objeto y es perpendicular al eje se denomina **plano focal objeto**. La [Figura 1-b](#) representa un pincel de rayos que divergen desde un punto P situado en el plano focal objeto. Después de la refracción estos rayos son paralelos entre sí, pero no al eje de la lente.



**Figura 2** (a) El foco imagen  $F''$  es la imagen de un objeto situado en el infinito. (b) Si se tiene un conjunto de rayos que inciden paralelos entre sí, luego de pasar por la lente todos convergerán a (o divergen del) mismo punto sobre el del plano focal imagen.

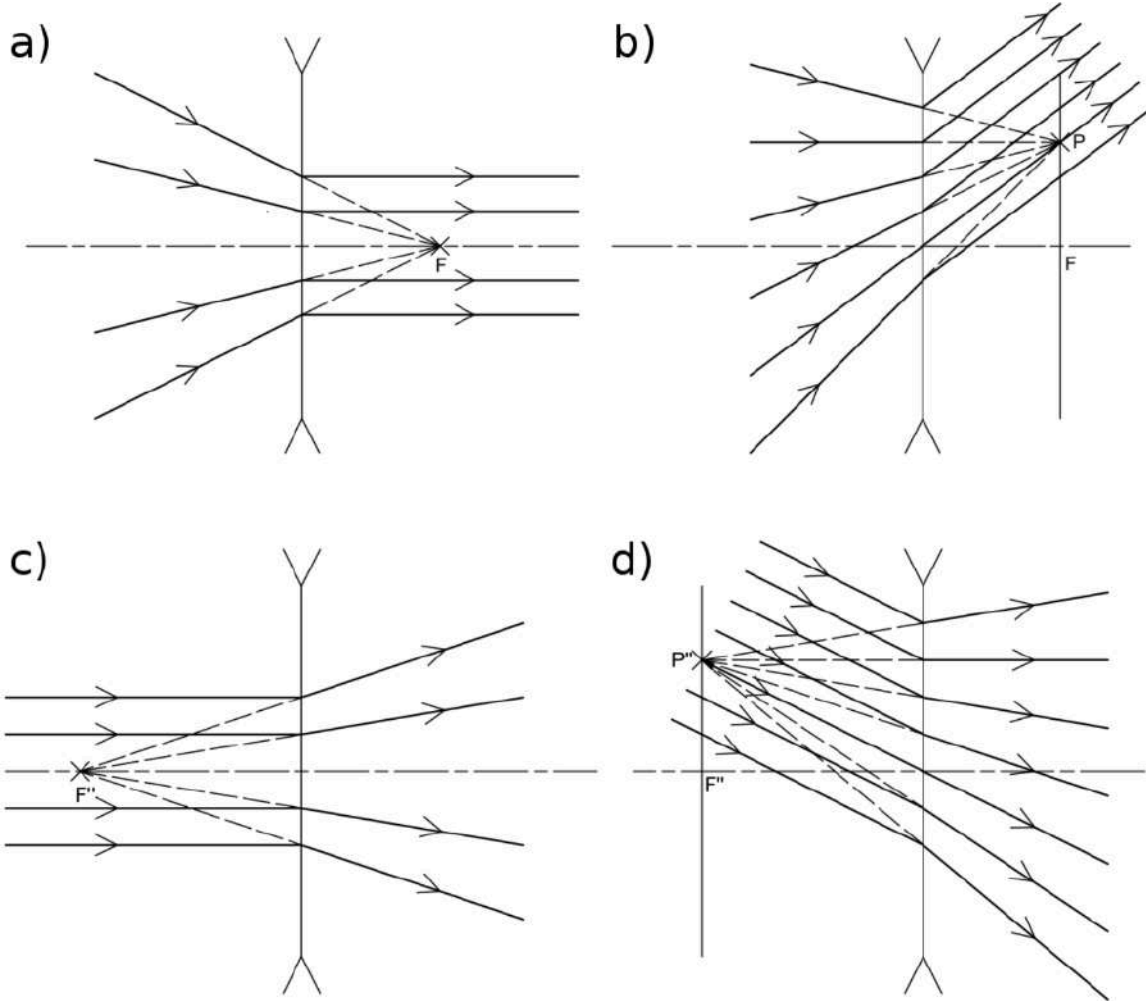
Se define el **foco imagen** de un sistema óptico como la imagen de un punto infinitamente alejado sobre el eje del sistema. Para el caso de una lente, esto significa que si se tiene un conjunto de rayos paralelos al eje que inciden sobre la misma, después de la refracción todos ellos pasarán por (o divergirán) del foco imagen, según se ve en la [Figura 2-a](#). El foco imagen se designa por  $F''$ .

Se denomina **plano focal imagen** a el plano que pasa por el foco imagen y es perpendicular al eje. En la [Figura 2-b](#), un haz de rayos paralelos procedentes de un punto objeto infinitamente alejado, y no situado sobre el eje de la lente, converge para formar una imagen  $P'$ , situada en el plano focal imagen de la lente.

No es necesario que un rayo se origine realmente en el foco objeto de una lente para que su dirección, después de refractado, sea paralela al eje de la lente. Análogamente, cualquier rayo que incide sobre una lente paralelamente al eje de la misma, pasa después de la refracción por el foco imagen.

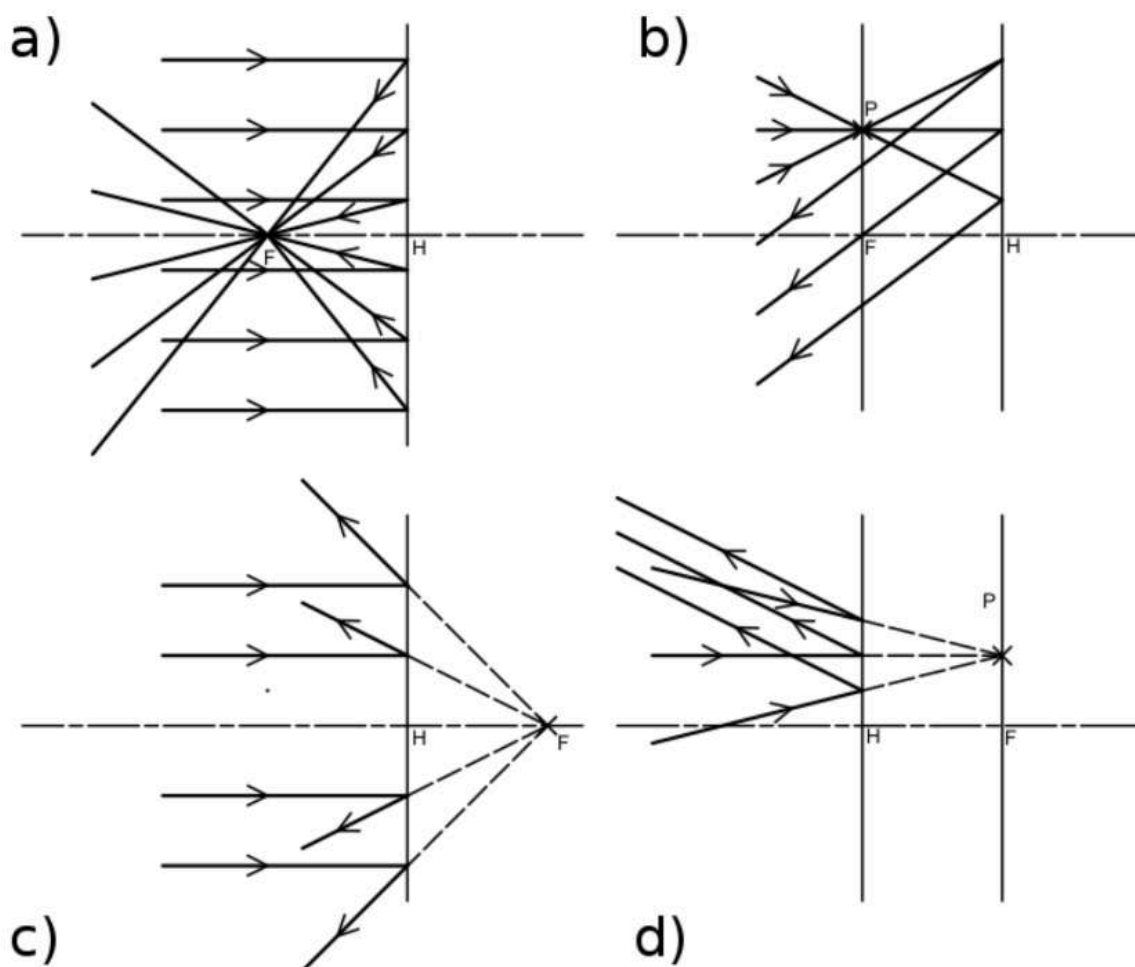
El trazado que involucra los focos objeto e imagen de una lente divergente es completamente análogo al ejemplificado hasta aquí para lentes convergentes, cambiando el hecho de que son las prolongaciones de los rayos las que pasan por los focos y los planos focales, y no los rayos propiamente dichos, como se ejemplifica en la [Figura 3](#)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Recordar que las prolongaciones de los rayos se representan con líneas de trazos.



**Figura 3** Ejemplo de los focos y planos focales para una lente divergente. (a) Foco Objeto (b) Plano focal objeto (c) Foco imagen (d) Plano focal imagen.

Para el caso de un espejo, las definiciones de foco objeto e imagen son las mismas, aunque puede demostrarse que para un espejo los focos objeto e imagen siempre coinciden. En la [Figura 4](#) se muestra como los rayos que inciden paralelos convergen a o divergen del foco y plano focal de un espejo simple, ejemplificando el trazado tanto para un espejo de potencia positiva (a-b), como para uno de potencia negativa (c-d). En la imagen se ha reemplazado a cada espejo por su correspondiente plano tangente, que se ha representado con la letra H.



**Figura 4** Foco y plano focal para un espejo simple. (a) Foco de un espejo positivo (b) Plano focal de un espejo positivo (c) Foco de un espejo negativo (d) Plano focal de un espejo negativo.

### 0.2.1. Determinación de la potencia de un sistema óptico a partir de la distancias focales

Si bien la potencia es una propiedad del sistema óptico estudiado, la misma puede determinarse experimentalmente a partir de analizar las imágenes que genera cada sistema a partir de objetos ubicados a diferentes distancias del mismo. Por ejemplo, si se tiene un objeto ubicado a una distancia infinitamente alejada un dado sistema óptico de potencia  $P$ , en la evaluación de la [Ec. 0.1](#) deberá hacerse  $s = \infty$  y  $s = f''$  por definición de foco imagen, lo que implica que

$$\frac{n''}{f''} = P \quad (0.5)$$

Por otro lado, si el objeto se encuentra en el foco objeto del sistema se tendrá que  $s = f$  y su imagen se formará en el infinito, es decir,  $s'' = \infty$ , por lo que

$$\frac{n}{f} = P \quad (0.6)$$

En función de las igualdades [0.5](#) y [0.6](#) se puede obtener una forma alternativa de escribir la [Ecuación \(0.1\)](#) que incluye las distancias focales de un sistema óptico:

$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} \quad (0.7)$$

Como es común que los fabricantes de lentes y espejo provean la distancias focales en aire de sus instrumentos, es muy común trabajar la Ec. de Gauss en su forma [\(0.7\)](#), sin embargo, no debe olvidarse que la potencia es la propiedad del sistema óptico que determina la distancia focal, y no al revés.

### 0.2.2. Aumento lateral de una imagen

Si el objeto cuya imagen se quiere determinar se encuentra a una distancia  $s$  del sistema tiene una altura  $y$ , forma una una imagen a una distancia  $s''$  que tiene una altura  $y''$ , se tiene que el cociente  $y''/y$  se denomina aumento de la imagen, y se lo representa con la letra  $m$ . Puede demostrarse que el aumento puede determinarse también a partir de conocer las distancias objeto e imagen, es decir se cumplen las siguientes igualdades:

$$m = \frac{y''}{y} = - \frac{n}{n''} \cdot \frac{s''}{s} \quad (0.8)$$

El procedimiento que suele seguirse para determinar analíticamente la imagen de un objeto extenso suele seguir los siguientes pasos:

- Conociendo los índices de refracción  $n$  y  $n''$ , la potencia  $P$  del sistema óptico y la distancia focal objeto  $s$ , se determina la distancia focal imagen  $s''$  empleando la [Ecuación \(0.1\)](#)<sup>2</sup>.
- Una vez conocida  $s''$ , se determina el aumento  $m$  empleando la [Ecuación \(0.7\)](#).
- Conociendo el aumento  $m$  y la altura  $y$  del objeto se calcula la altura  $y''$  de la imagen haciendo  $y'' = m \cdot y$ .

---

<sup>2</sup> La potencia  $P$  puede conocerse por el fabricante, a partir de parámetros constructivos del sistema, o a partir de conocer las distancias focales y empleando alguna de las Ecuaciones [\(0.5\)](#) o [\(0.6\)](#).



De la definición de aumento lateral se puede deducir inmediatamente que cuando  $|m| < 1$ , la imagen se ve reducida, cuando  $|m| > 1$  la imagen se ve ampliada y que cuando  $|m| = 1$ , el aumento es unitario, es decir, la imagen tiene el mismo tamaño que el objeto que la formó.

Adicionalmente, dentro del convenio de signos adoptado por la cátedra se tiene que si  $m > 0$  la imagen es directa, mientras que si  $m < 0$  la imagen está invertida.<sup>3</sup>

Finalmente, si se tiene un conjunto de  $N$  sistemas ópticos en serie, cada uno de ellos con respectivos aumentos  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , se puede demostrar que el aumento total del del conjunto estará dado por el producto de todos los aumentos, es decir:

$$m_{Total} = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_N \quad (0.9)$$

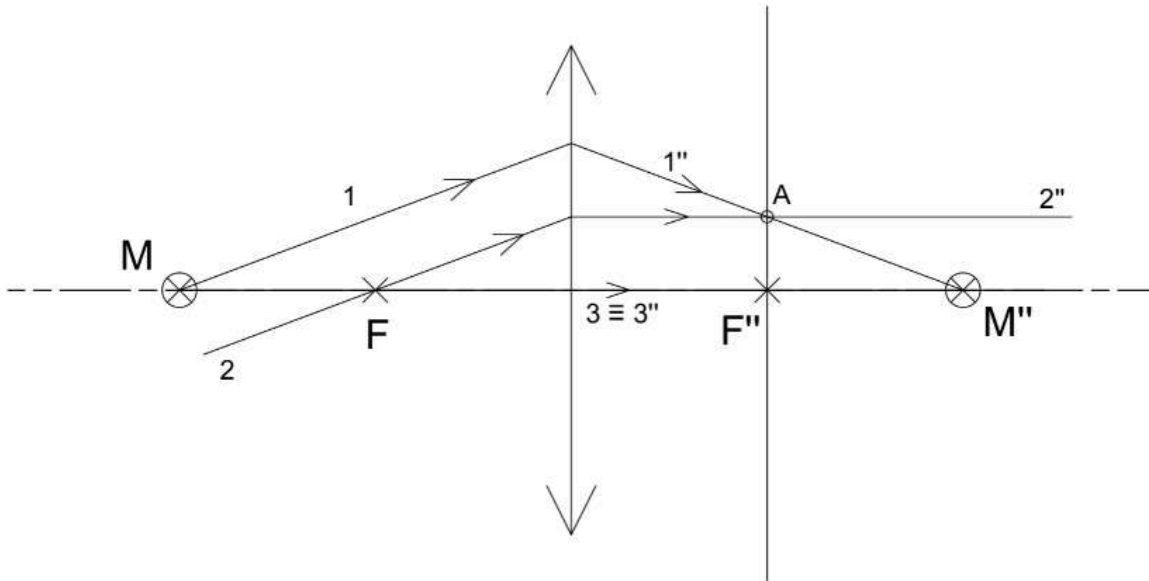
### 0.3. Determinación gráfica de imágenes

La determinación de la imagen de un objeto por el método gráfico se realiza a partir de trazar dos rayos que pasen por el objeto, y determinando en qué lugar del espacio se intersecan los rayos desviados (o sus prolongaciones). La determinación de la trayectoria de los rayos después de la refracción se realiza a partir de los llamados rayos de marcha conocida, cuya trayectoria se basa en los siguientes principios, válidos para cualquier sistema óptico:

- I. Todo rayo que pasa por el foco objeto ([Fig. 1-a](#)), o apunta a el mismo ([Fig. 3-a](#)), emerge paralelo al eje después de la refracción o de la reflexión ([Figs. 4-a y c](#)).
- II. Todo rayo que incide paralelo al eje del sistema, pasa por el foco imagen ([Fig. 2-a](#)), o diverge del mismo ([Fig. 3-c](#)) después de la refracción o de la reflexión ([Figs. 4-a y c](#)).
- III. Cualquier conjunto de rayos que pasen por algún punto del plano focal objeto ([Fig.1-b](#)), o apunten al mismo ([Fig.3-b](#)) emergen paralelos entre sí después de la refracción o de la reflexión ([Figs. 4-b y d](#)).
- IV. Cualquier conjunto de rayos que inciden paralelos entre sí, pero formando un ángulo  $\theta$  respecto al eje óptico, convergen a un mismo punto sobre el plano focal imagen ([Fig. 2-b](#)), o divergen del mismo ([Fig. 3-d](#)) luego de la refracción o de la reflexión ([Figs. 4-b y d](#)).

**Determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema.** En la [Figura 5](#) se muestra el método para determinar la imagen de un objeto puntual  $M$  que se encuentra sobre el eje óptico del sistema, en este caso una lente delgada convergente.

<sup>3</sup> Recordamos que, en el convenio de signos adoptado por la cátedra, las distancias objeto son positivas si el objeto se encuentra del lado del que provienen los rayos, y las distancias imagen son positivas si la imagen se forma en el espacio de donde salen los rayos. De esta manera las imágenes reales tienen siempre distancias imagen positivas y las imágenes virtuales tienen distancias imagen negativas.

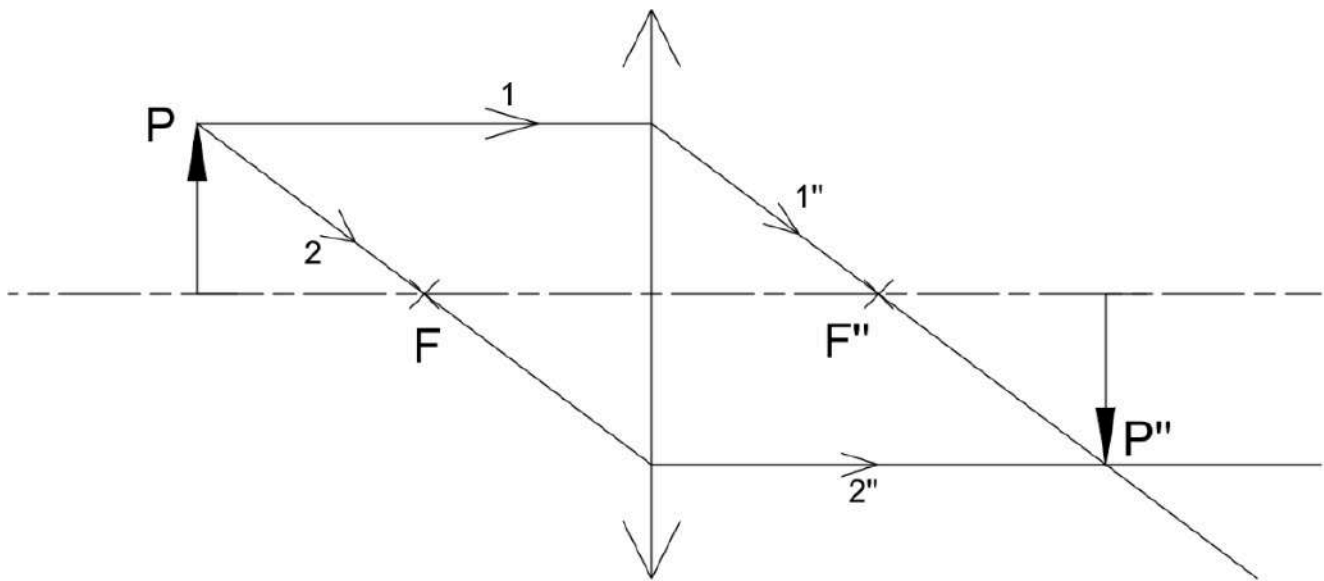


**Figura 5.** La determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado en el eje óptico de un sistema se realiza empleando el método del rayo auxiliar.

La imagen  $M''$  es la que se obtiene de la intersección de los rayos  $1''$  y  $3''$ . Mientras que el rayo  $3''$  es de marcha trivial, ya que es un rayo que no se desvía al pasar por el eje de la lente, la determinación de la dirección de  $1''$  requiere un poco más de trabajo y la aplicación del principio **IV** enunciado anteriormente. Primero se traza el rayo 1 oblicuo al eje (cualquier rayo oblicuo al eje servirá). Como el rayo 1 no es de marcha conocida, para determinar su dirección después de la refracción se requiere emplear el rayo auxiliar 2. El rayo 2 es paralelo a 1, y pasa por el foco objeto F de la lente, por lo que en virtud del principio I, el rayo  $2''$  debe emerger paralelo al eje después de refractarse. Por otro lado, dado que 1 y 2 inciden de manera paralela a la lente, por el principio IV, después de la refracción, ambos rayos deben intersectarse en un punto que se encuentra sobre el plano focal imagen, que en la [Figura 5](#) se ha denominado con la letra A. De esta manera, la dirección del rayo  $1''$  será determinada por la recta que pasa por A y por el punto donde 1 se interseca con la lente.

Una vez determinada la dirección del rayo  $1''$ , se continúa el trazado el mismo hasta que se interseca con el rayo  $3''$ , lo que determina el punto imagen  $M''$ .

**Determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema.** La determinación de la imagen de un objeto puntual que se encuentra fuera del eje de la lente puede considerarse más sencilla que la expuesta anteriormente, ya que no requiere el trazado de ningún rayo auxiliar. A su vez, la determinación de la imagen de objetos que se encuentran fuera del eje de la lente es de gran importancia porque permite la determinación de la imagen de objetos extensos, como se muestra en la [Figura 6](#).



**Figura 6.** La determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado fuera del eje óptico de un sistema se realiza con dos rayos: uno que pase por el objeto y sea paralelo al eje y otro que pase por el objeto y por el foco objeto del sistema.

Para determinar la imagen del punto P se deben emplear dos rayos que cumplen los principios I y III. El rayo 1 pasa por P y es paralelo al eje óptico, por lo que en virtud del principio I, después de pasar por la lente el rayo 1'' debe pasar por el foco imagen F''. Por otro lado, el rayo 2, que pasa por P y por el foco objeto F, luego de ser desviado por la lente debe, en virtud del principio III, emerger paralelo al eje óptico, tal como lo hace el rayo 2''.

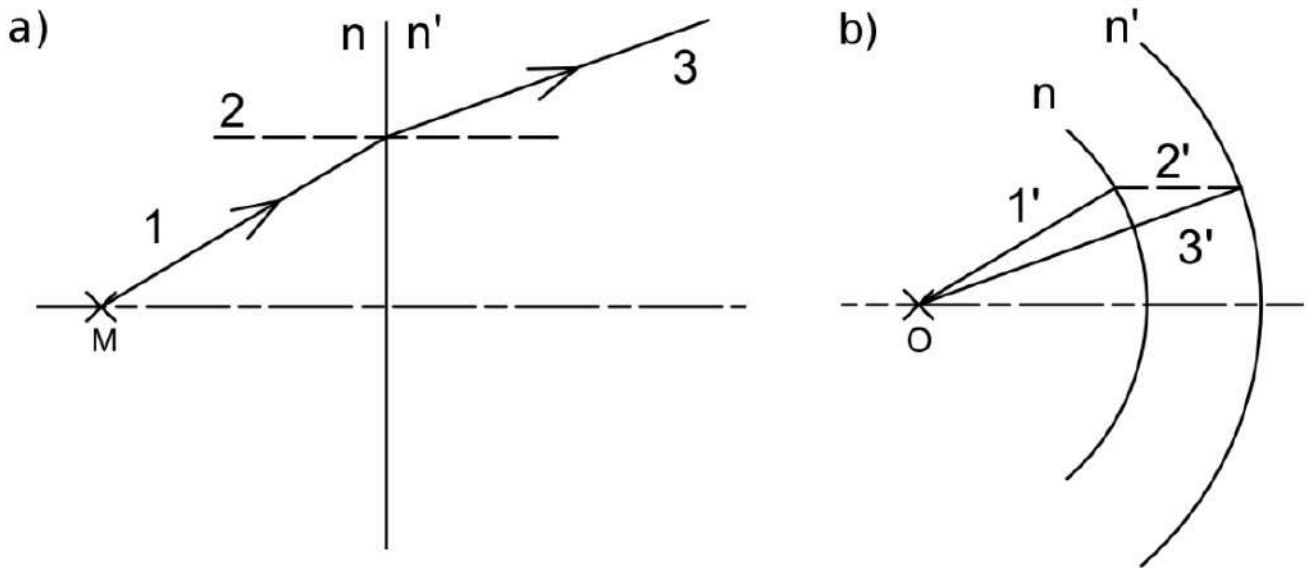
La intersección de los rayos 1'' y 2'' determinan la posición del punto imagen P''. Si se extiende una flecha perpendicularmente al eje se determina a su vez la imagen del objeto extenso<sup>4</sup>.

Los métodos para la determinación de imágenes de objetos puntuales, ubicados en el eje óptico del sistema o fuera del mismo, se pueden aplicar también para encontrar la imagen formada por espejos, teniendo en cuenta el hecho de que para un espejo los focos objeto e imagen coinciden.

**Determinación de la marcha de rayos que inciden sobre una superficie plana.** Cuando un rayo pasa de un medio de índice de refracción  $n$  a un medio con índice de refracción  $n'$  a través de una interfaz plana ( $R = \infty$ ), los métodos expuestos anteriormente no pueden emplearse, ya que cuando la superficie que separa los medio es plana, los focos correspondientes se encuentran en infinito. En una

<sup>4</sup> Estrictamente hablando, se debería trazar la imagen de la base de la flecha, empleando el método empleado para determinar imágenes de objetos ubicados en el eje óptico. Si todos los trazados son correctos y no hay errores de paralaje en el trazado, el resultado debería ser una flecha perpendicular al eje óptico.

situación así, la determinación gráfica de la dirección de salida de un rayo dado se realiza por medio del método del rayo oblicuo con diagrama auxiliar, que se ejemplifica en la [Figura 7](#).



**Figura 7:** (a) Cuando un rayo incide sobre una superficie plana (reflectante o refractante), la determinación de la marcha de los rayos no se puede hacer empleando los focos del sistema, ya que éstos se encuentran en el infinito. La determinación de la dirección del rayo saliente se hace empleando el método del rayo oblicuo que requiere la realización de un dibujo auxiliar (b).

Supóngase que se tiene un rayo 1 que parte de un objeto puntual  $M$  y que incide sobre la interfaz entre los medios  $n$  y  $n'$  con  $n' > n$  ([Fig. 7-a](#)). Por la ley de Snell, la dirección de salida del rayo 3 estará determinada por el ángulo que forme el rayo 1 con la normal 2:

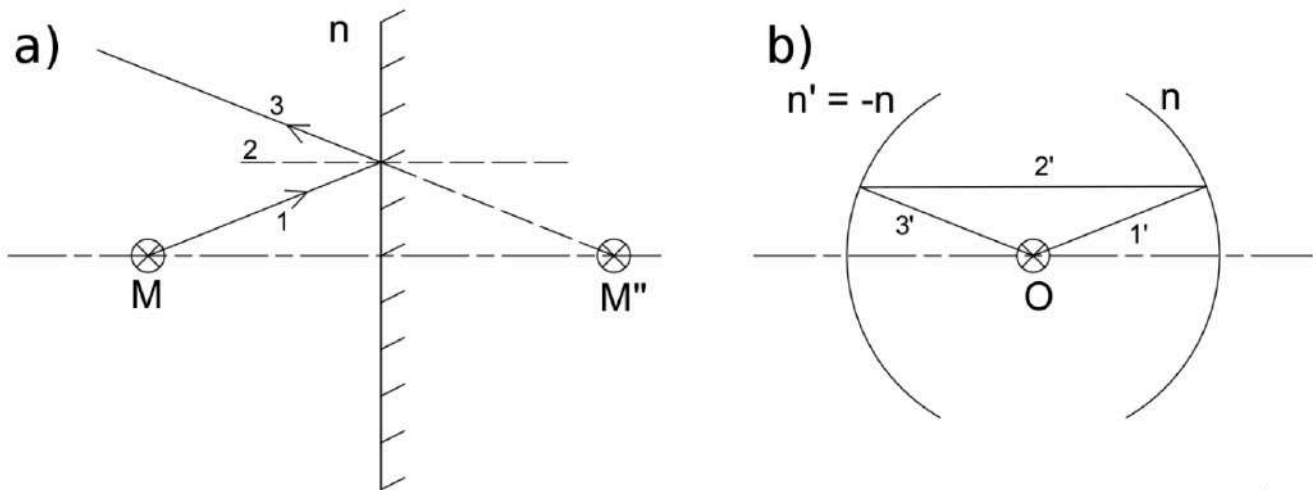
$$n \sin(\theta_1) = n' \sin(\theta_3)$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{n}{n'} \sin(\theta_1)$$

Para determinar gráficamente la dirección del rayo 3 se realiza un dibujo auxiliar en el que se trazan dos arcos de circunferencia con radios proporcionales a los medios  $n$  y  $n'$ , y se traza un rayo  $1'$  paralelo a 1 que pase por un punto  $O$  arbitrario, como se muestra en la [Fig. 7-b](#), hasta que se interseca con el arco  $n$ . Luego, el punto de intersección entre  $1'$  el arco  $n$  se traslada hasta el arco  $n'$  por medio del rayo  $2'$ , que es paralelo a la normal 2. Finalmente, se une la intersección del rayo  $2'$  con el punto  $O$ , trazando el rayo  $3'$ . Se puede ver que dada la construcción realizada, la dirección del rayo  $3'$  será la que corresponde a la ley de Snell, por lo que si se traza en el dibujo original un rayo 3 paralelo a  $3'$ , se tendrá el rayo deseado. Si se prolonga el rayo 3 se puede encontrar la imagen del objeto puntual  $M$ .



En caso de que se tenga que determinar la dirección de un rayo que incide sobre un espejo plano, el procedimiento es muy similar, sólo que como el rayo vuelve al medio del que provino originalmente, se tiene que  $n' = n$ , aunque en este caso la marcha del rayo emergente es opuesta a la del incidente. En términos del método esto significa que la normal debe invertir la marcha del rayo, lo que se logra suponiendo que  $n' = -n$ , es decir, el arco que representa a  $n'$  se debe trazar en el sentido opuesto al que se usó para trazar  $n$ , como se muestra en la [Figura 8](#).

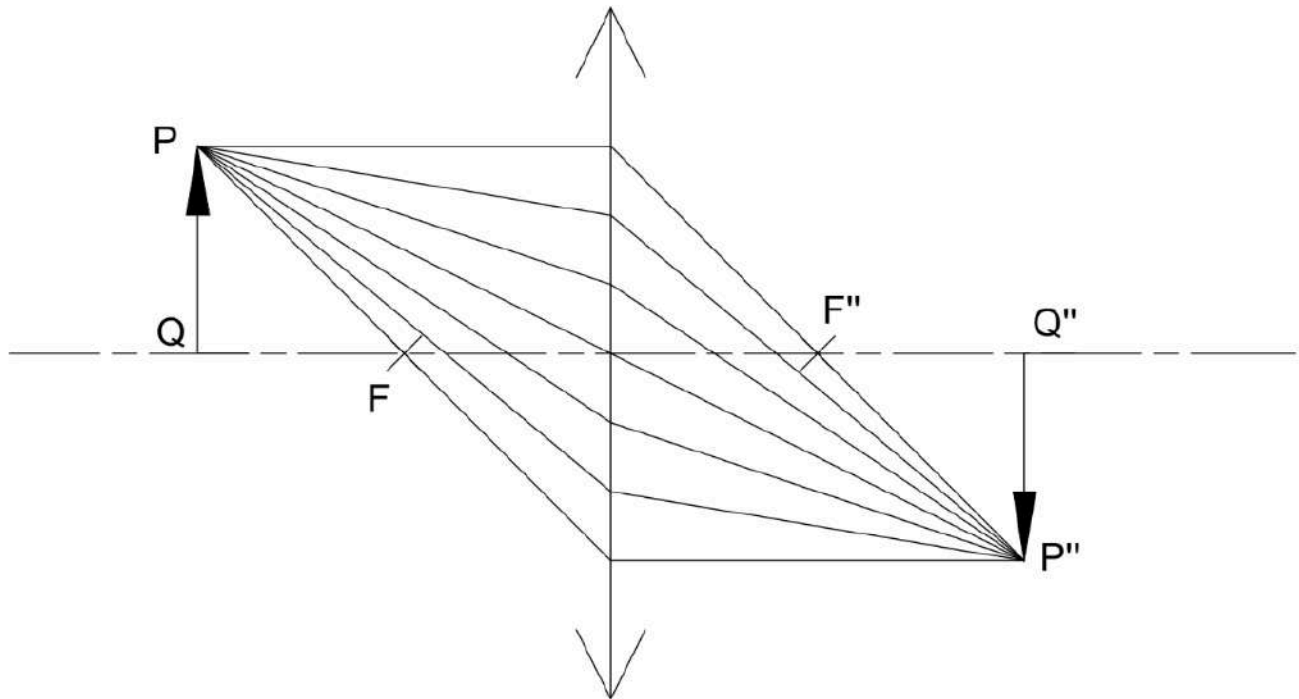


**Figura 8:** (a) Cuando un rayo incide sobre una superficie reflectante plana, la determinación de la marcha de los rayos también se hace empleando el método del rayo oblicuo, suponiendo  $n' = -n$ .

#### 0.4. Propiedades de las imágenes

**Imágenes reales y virtuales.** La imagen  $\overline{P''Q''}$  de la [Figura 9](#) es una imagen formada por un conjunto de rayos que convergen hacia ella. Esto significa que si se pone una pantalla en el lugar de convergencia de los rayos se podrá ver la imagen propiamente dicha. En este sentido se dice que la imagen es **real**.

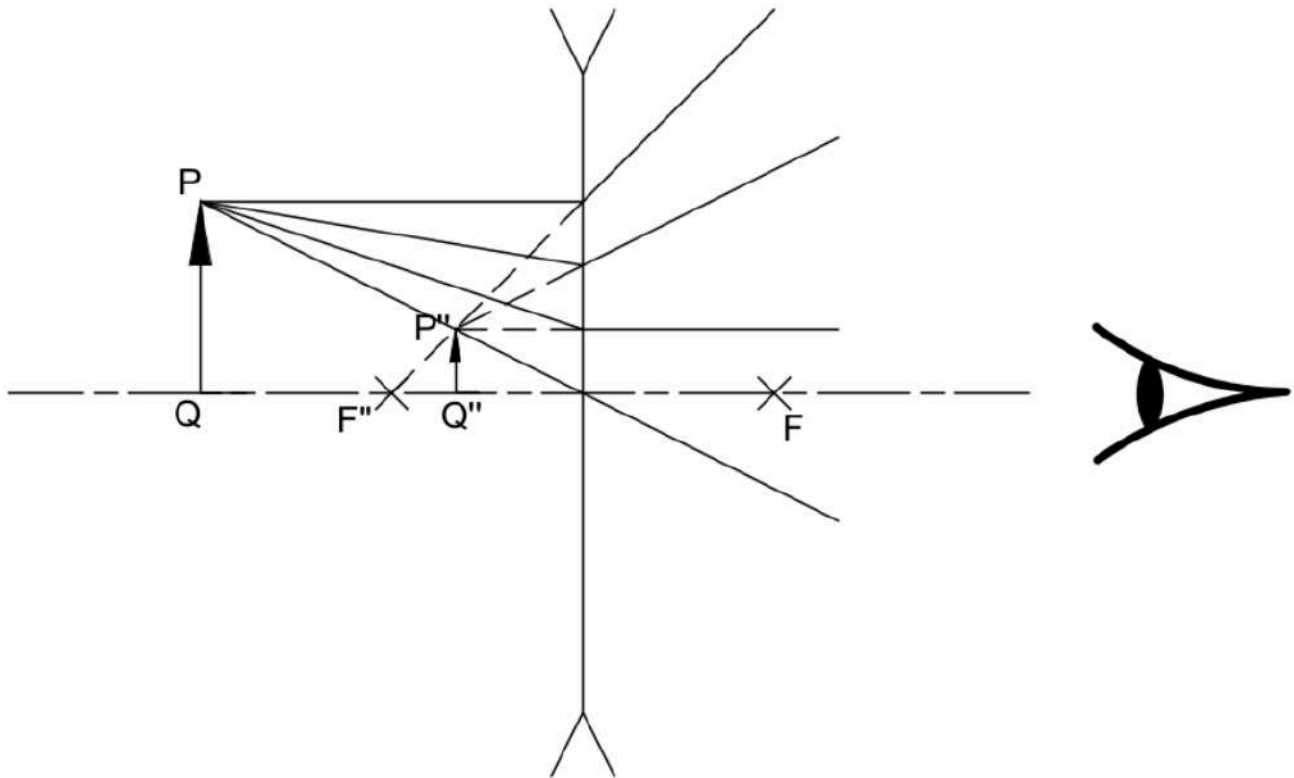
Sin embargo, no todos los sistemas ópticos forman imágenes reales. Por ejemplo, en la [Figura 10](#) se ve claramente como ninguno de los rayos converge luego de pasar por la lente. Se observa, no obstante, que todos los rayos parecen divergir de los puntos  $\overline{P''Q''}$ . En este caso, si se coloca una pantalla en lugar de donde parecen divergir los rayos, no se observará ninguna imagen. Por otro lado, para un observador ubicado a la derecha de la imagen, los rayos emitidos desde P parecerán provenir desde el punto  $P''$ , y una observación análoga se puede hacer respecto al punto  $Q''$ . Como la imagen no proviene de intersección de rayos, sino que lo hace de prolongaciones de los mismos, se dice que la imagen es **virtual**.



**Figura 9:** Cuando los rayos desviados convergen a un único punto, la imagen resultante es real. Esto significa que si se coloca una pantalla, se verá una proyección del objeto con las características de la imagen.

**Reversibilidad de los rayos.** Una consecuencia interesante de la ley de Snell, sobre la cual se basan todas las expresiones empleadas en la óptica geométrica, es que si se modifica el sentido de marcha de cualquier rayo, reflejado o refractado, el mismo volvería sobre su camino original, es decir, la marcha de los rayos es **reversible**. Este hecho tiene otra consecuencia importante y es que para cualquier sistema óptico, el objeto y la imagen del mismo son **conjugados**.

Que objeto e imagen sean conjugados significa que si, por ejemplo, si se reemplazase la imagen  $\overline{P''Q''}$  de la [Figura 9](#) por un objeto de iguales características, la imagen que formaría la lente se encontraría en  $\overline{PQ}$ , y también sería real e invertida. De la misma manera, si en la [Figura 10](#) se colocase un objeto en  $\overline{P''Q''}$  su imagen (directa y virtual) se encontraría en  $\overline{PQ}$ .



**Figura 10:** Cuando los rayos desviados no convergen a un único punto, sino que divergen de él, la imagen se denomina virtual. Bajo estas condiciones un observador que se encuentre a la salida de los rayos no verá el objeto con sus características, sino que verá un objeto aparente que es la imagen producida por el sistema óptico.

### 0.5. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
Ecuación de Gauss	$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = P$	(0.1)
Potencia de una Dioptra	$P_D = \frac{n' - n}{R_D}$	(0.2)
Potencia de una lente delgada (Fórmula del constructor de lentes)	$P_{LD} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2}$	(0.3)
Potencia de un espejo simple	$P_{ES} = -\frac{2n}{R_E}$	(0.4)
Relación de la potencia con las distancias focales	$P = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''}$	(0.5) (0.6)
Aumento lateral de un único sistema óptico	$m = \frac{y''}{y} = -\frac{n}{n''} \cdot \frac{s''}{s}$	(0.8)
Aumento lateral de un conjunto de N sistemas ópticos	$m_{Total} = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_N$	(0.9)



## 0.6. Cuestiones

0.6.1. Para un sistema óptico de potencia positiva y los objetos ubicados a las siguientes distancias, indique si la imagen es real o virtual, directa o invertida, y reducida, aumentada o de aumento unitario:

a.  $s = \frac{f}{2}$

b.  $s = f$

c.  $s = 2f$

d.  $s = 3f$

0.6.2. Para un sistema óptico de potencia negativa y los objetos ubicados a las siguientes distancias, indique si la imagen es real o virtual, directa o invertida, y reducida, aumentada o de aumento unitario:

a.  $s = \frac{f}{2}$

b.  $s = f$

c.  $s = 2f$

0.5.3. ¿Bajo qué condiciones un sistema de potencia positiva puede generar una imagen real? ¿Y una imagen virtual?

0.5.4. ¿Es posible tener una imagen real a partir de un sistema de potencia negativa? ¿Por qué?

0.5.5. Demuestre que para un sistema óptico simple (una única lente delgada, un único espejo, una única dioptra), una imagen real siempre está invertida, mientras que una imagen virtual siempre es directa.

0.5.6. Demuestre que para una superficie refractante plana, ambos puntos focales se encuentran en infinito.

0.5.7. Demuestre que para una superficie reflectante plana el punto focal del espejo está en el infinito.

### 0.7. Ejercicios

0.6.1. Siguiendo la indicaciones de la sección 0.3, indique cómo sería el trazado del rayo auxiliar para:

- Una lente divergente
- Una dioptra de potencia positiva
- Una dioptra de potencia negativa
- Un espejo cóncavo
- Un espejo convexo

0.6.2. Encontrar gráficamente la imagen de un objeto puntual situado a 2 cm de una interfaz plana:

- suponiendo que el objeto está en un medio de  $n = 1$  y después de la interfaz el índice de refracción es  $n'' = 1,5$ .
- suponiendo que el objeto está en un medio de  $n = 1,6$  y después de la interfaz el índice de refracción es  $n'' = 1$ .

**Respuestas:**  $s'' = -3 \text{ cm}$ ;  $b. s'' = -1,25 \text{ cm}$

0.6.3. Encontrar gráficamente la imagen de un objeto puntual situado en el eje óptico, y a 3 cm de un espejo plano.

**Respuesta:**  $s'' = 3 \text{ cm}$

0.6.4. Encontrar, analítica y gráficamente, la imagen formada por una lente positiva de distancia focal  $f = 4 \text{ cm}$  para un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias de la lente: 2 cm; 6 cm; 8 cm; 12 cm; 4 cm. Todo el sistema se encuentra en aire.

**Respuestas:**  $s''_1 = -4 \text{ cm}$ ;  $m_1 = 2$ ;  $s''_2 = 12 \text{ cm}$ ;  $m_2 = -2$ ;

$$s''_3 = 8 \text{ cm}; m_3 = -1; s''_4 = 6 \text{ cm}; m_4 = -0,5; s''_5 = \infty$$

0.6.5. Se tiene una lente de potencia  $P = 33,333 \text{ D}$ . La lente se encuentra rodeada por aire ( $n = 1$ ) a un lado y por agua ( $n'' = \frac{4}{3}$ ) al otro. Encuentre, analítica y gráficamente, la imagen de un objeto extenso de altura 1 cm que se encuentra del lado en que hay aire. Resuelva para las siguientes distancias objeto: 2 cm; 6 cm; 8 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -8 \text{ cm}$ ;  $m_1 = 3$ ;  $s''_2 = 8 \text{ cm}$ ;  $m_2 = -1$ ;  $s''_3 = 6,4 \text{ cm}$ ;  $m_3 = -0,6$ ;

0.6.6. Encontrar, analítica y gráficamente, la imagen formada por la lente del ejercicio 0.6.4. para un objeto puntual, ubicado a las siguientes distancias: 2 cm; 6 cm; 8 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -4 \text{ cm}$ ;  $s''_2 = 12 \text{ cm}$ ;  $s''_3 = 8 \text{ cm}$ ;  $s''_4 = 6 \text{ cm}$ ;  $s''_5 = \infty$



0.6.7. Encontrar, analítica y gráficamente, la imagen formada por una lente de distancia focal  $f = -4$  cm para un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias de la lente: 2 cm; 4 cm; 6 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -1,333$  cm;  $m_1 = 0,667$ ;  $s''_2 = -2$  cm;  $m_2 = 0,5$ ;  $s''_3 = -2,4$  cm;  $m_3 = 0,4$ ;

0.6.8. Se tiene una lente cuya distancia focal objeto es -3 cm y cuya distancia focal imagen es -4 cm. Determinar, analítica y gráficamente, la imagen formada por dos objetos extensos de 1 cm de altura, ubicados a 2 cm y 6 cm, respectivamente, de la lente.

**Respuestas:**  $s''_1 = -1,6$  cm;  $m_1 = 0,6$ ;  $s''_2 = -2,667$  cm;  $m_2 = 0,3333$

0.6.9. Resolver el ejercicio 0.6.7, pero para dos objetos puntuales, ubicados a 2 cm y 8 cm de la lente.

**Respuestas:**  $s''_1 = -1,333$  cm;  $s''_2 = -2,667$  cm;

0.6.10. Para un espejo cuyo radio de curvatura es  $R = -4$  cm, determinar, analítica y gráficamente, la posición y naturaleza de un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias del espejo: 1 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 2 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -1,333$  cm;  $s''_2 = -2,667$  cm;

0.6.11. Para un espejo cuyo radio de curvatura es  $R = 4$  cm, determinar, analítica y gráficamente, la posición y naturaleza de un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias: 1 cm; 2 cm; 4 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = 0,667$  cm;  $m_1 = 0,667$ ;  $s''_2 = 1$  cm;  $m_2 = 0,5$ ;  $s''_3 = 1,333$  cm;  $m_3 = 0,333$ ;

0.6.12. Se tiene un sistema que consiste en dos lentes delgadas de distancias focales  $f_1 = 2$  cm y  $f_2 = 1,5$  cm, separadas a 5 cm. Determinar la posición y naturaleza de la imagen formada por un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a 3,5 cm de la primera lente.

**Respuestas:**  $s'' = 15$  cm (respecto de la segunda lente);  $m_{Total} = 6$ ;

### Capítulo 1: Lentes Gruesas

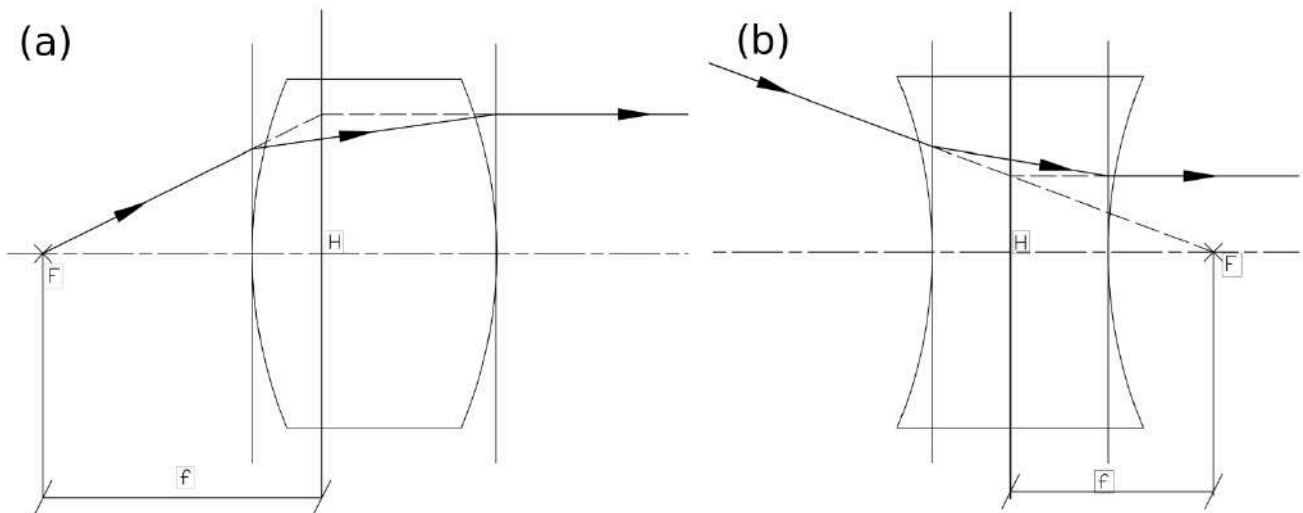
Cuando el espesor de una lente no es despreciable frente a su distancia focal, a esta se la considera una **lente gruesa**. Una lente gruesa está compuesta por dos superficies esféricas, o bien, una esférica y otra plana, en donde cada una de las superficies contribuye a la formación de la imagen final del objeto dado. En este capítulo estudiaremos las similitudes y diferencias que existen entre las lentes gruesas y las lentes delgadas estudiadas anteriormente, y desarrollaremos métodos analíticos y gráficos que nos permitirán determinar las magnitudes ópticas relevantes a partir de la información que tengamos de la lente.

Conceptualmente, la diferencia de una lente delgada y una lente gruesa es el desarrollo del rayo en el interior del sistema. En una lente delgada se supone que los rayos no se desarrollan en el interior de la misma, lo que da como resultado que la potencia del sistema sea simplemente la suma de las potencias de cada dioptra como se vio en la [Ecuación 0.3](#). Por otro lado, en una lente gruesa el rayo sí se desarrolla en el interior del sistema, lo que da lugar a que la potencia del sistema no sea simplemente la suma de las potencias de cada dioptra, sino que haya que incluir un término que incluya el desvío de los rayos en el interior de la misma.

#### 1.1. Focos y puntos principales

Al igual que una lente delgada, la lente gruesa cuenta con un foco objeto y un foco imagen. El foco objeto  $F$  es un punto axial tal que cualquier rayo procedente de él o que se dirija hacia él, se propaga paralelamente al eje una vez refractado en las dos superficies. Análogamente, el foco imagen  $F''$  es un punto axial tal que cualquier rayo paralelo al eje, se dirige hacia él o diverge de él una vez refractado en las dos superficies. A su vez, los focos objeto e imagen permiten determinar experimentalmente la existencia de los que denominaremos planos principales de la lente.

En la [Figura 1.1-a](#) se ve como un rayo parte del foco objeto  $F$  de una lente gruesa convergente, para luego salir paralelo al eje de la lente, mientras que en la [Figura 1.1-b](#) se tiene la situación análoga para una lente divergente. En ambos casos se puede trazar una prolongación imaginaria del rayo que ingresa a la lente y del que sale de la misma. Si se traza un plano perpendicular al eje de la lente por el punto de intersección de las dos prolongaciones, se habrá determinado lo que se denomina el plano principal objeto, que corta el eje de la lente en el punto principal objeto  $H$ . Nótese que como el plano principal objeto se construye a partir de la prolongación del rayo que ingresa y, aún no fue desviado, y del rayo que sale del sistema, se puede interpretar el plano principal objeto como el plano en que todos los rayos que ingresan al sistema parecen iniciar su desvío.



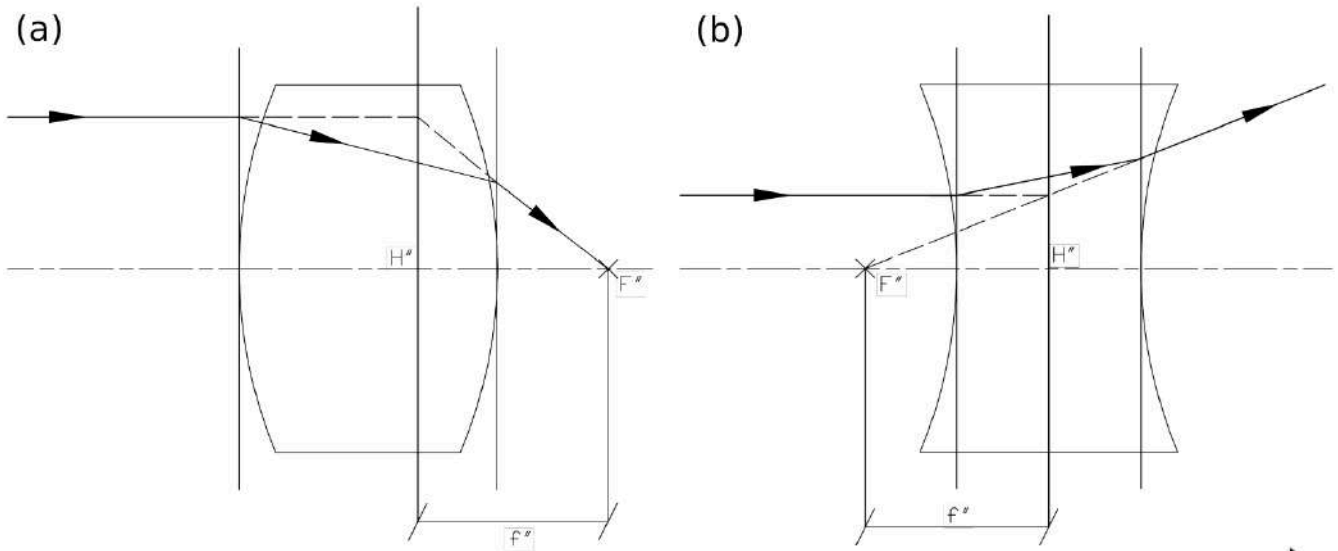
**Figura 1.1:** Definición del Foco Objeto y Plano Principal Objeto de una lente gruesa para una lente convergente (a) y una lente divergente (b). Puede verse en el esquema que la dirección de salida de los rayos después de dos desvíos es la misma que si se considerase que el rayo concluye su desvío en el plano principal objeto.

La determinación del plano principal imagen se puede construir de una manera similar, sólo que en este caso deberemos trabajar con el foco imagen  $F''$  de la lente. En la [Figura 1.2-a](#) se muestra un rayo paralelo al eje de una lente convergente que proviene del infinito, y que luego de desviarse en cada superficie pasa por el foco imagen  $F''$ , mientras que en la [Figura 1.2-b](#) se tiene la situación análoga para una lente divergente. Si, como se hizo anteriormente, se extienden los rayos ingresantes y salientes hasta que se intersecan, y se traza una perpendicular al eje de la lente por el punto de intersección, se habrá determinado el plano principal imagen, que corta el eje de la lente en el punto principal imagen  $H''$ . De manera similar a lo analizado en el caso del plano principal objeto, como el plano principal imagen se construye a partir de la prolongación del rayo desviado y del rayo que ingresó al sistema, se puede interpretar al plano principal imagen como el plano del que parecen provenir todos los rayos desviados.

A partir de las interpretaciones anteriores de los planos principales objeto e imagen, es posible concluir que una lente gruesa se puede modelar a partir de sus planos principales, de modo tal que los rayos que ingresen al sistema, en vez de desviarse en el inicio físico del mismo, iniciarán su desvío en el plano principal objeto, para luego trasladarse de manera horizontal hasta el plano principal imagen, y desde dicho plano continuar su marcha fuera del sistema. Una consecuencia de aplicar este modelo es que las distancias focales se miden desde cada uno de los focos al plano principal correspondiente, por lo que se tiene que

$$\overline{HF} = f \text{ y } \overline{H''F''} = f'' \quad (1.1)$$

A partir de lo dicho anteriormente, también se puede concluir que los planos principales son dos planos que tienen un aumento lateral unitario y positivo, es decir, cualquier objeto que se encuentre en el plano principal objeto tendrá su imagen en el plano principal imagen, con una imagen directa y de aumento unitario.



**Figura 1.2:** Definición del Foco Imagen y Plano Principal Imagen de una lente gruesa para una lente convergente (a) y una lente divergente (b). Puede verse en el esquema que la dirección de salida de los rayos después de dos desvíos es la misma que si se considerase que el rayo inicia su desvío en el plano principal objeto.

En función de todo lo explicado anteriormente, es claro que la construcción de imágenes producidas por una lente gruesa se puede simplificar enormemente si en vez de analizar la refracción de los rayos en cada una de las superficies, se supone que el desvío ocurre en los planos principales. A este fin, será preciso entonces determinar la relación que existe entre la posición de los focos y puntos principales, con los parámetros que determinan la construcción de la lente gruesa, es decir, los radios de curvaturas de cada una de sus superficies refractantes, su espesor e índice de refracción. Tal como cuando se trabajó con lentes delgadas en el curso anterior, la determinación de la potencia de la lente gruesa, así como la posición de su focos, se puede realizar tanto gráfica como analíticamente.

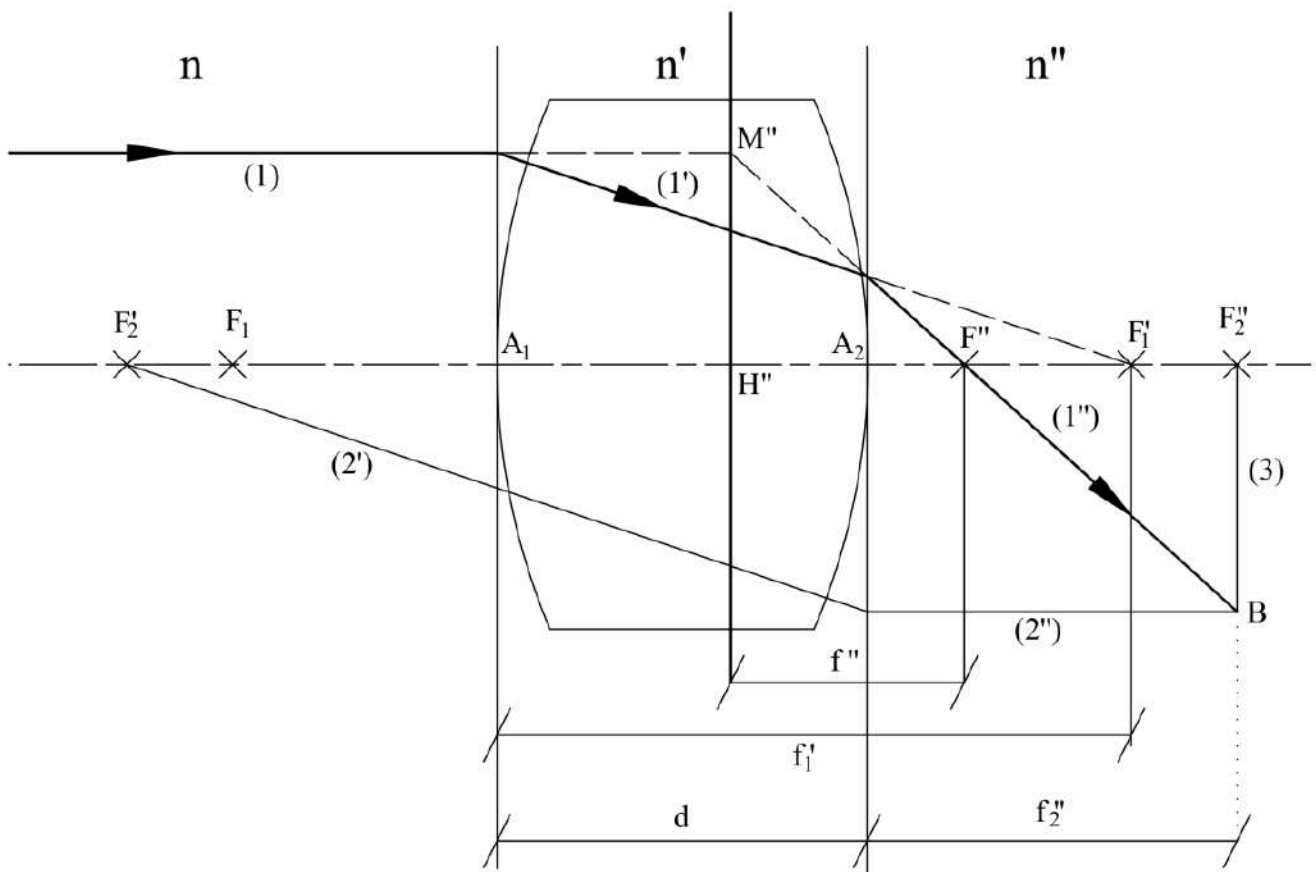
### 1.1.1. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método gráfico

La determinación de los focos y puntos principales de una lente gruesa requiere el trazado de rayos que cumplan con la definición escrita en la sección anterior, es decir, para determinar el foco imagen, se debe trazar un rayo que ingrese al sistema desde el espacio objeto y determinar su marcha hasta que egrese del sistema, tal como se mostró en la [Figura 1.2](#). De esta manera, el punto de intersección del rayo de salida con el eje óptico determinará la posición del foco imagen  $F''$ , mientras que la intersección



del rayo que ingresa con el rayo que egresa, dará la posición del plano principal imagen y del punto principal imagen  $H''$ , consecuentemente. Desde luego, el trazado inverso se puede emplear para determinar el foco y punto principal objeto,  $F$  y  $H$ , respectivamente.

Supóngase que se tiene una lente gruesa con superficies esféricas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , construida de un material con índice de refracción  $n'$  y entre dos medios de índice  $n$  y  $n''$ , como se muestra en la [Figura 1.3](#), y que se quiere determinar la posición del foco y punto principal imagen.



**Figura 1.3:** Determinación del Foco Imagen y Plano Principal Imagen de una lente gruesa por el método gráfico. El método inicia trazando un rayo que incide a la lente paralelo al eje. Dicho rayo, al desviarse en la primera superficie, apunta al foco imagen de la misma, y sufre un segundo desvío en la segunda superficie. La dirección del desvío del rayo en la segunda superficie debe determinarse empleando un rayo auxiliar. Finalmente, la intersección del rayo emergente con el eje determina la posición del foco imagen, y la intersección de las prolongaciones de los rayos incidentes y emergentes determina la posición del plano principal imagen.

Para lograr esto se debe primeramente determinar las distancias focales objeto e imagen de cada superficie esférica, que se notarán como  $f_1$ ;  $f_1'$ ;  $f_2$ ;  $f_2''$ <sup>5</sup>.

<sup>5</sup> En lo que sigue siempre se denotará con el subíndice 1 a las magnitudes que corresponden a la primera dioptra y con el subíndice 2 a las magnitudes correspondientes para la segunda dioptra. De manera parecida, el

Para la primera superficie se cumple:

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n'-n}{R_1} \quad \text{y} \quad \frac{n'}{f'_1} = \frac{n'-n}{R_1} \quad (1.2)$$

Por otro lado, para la segunda superficie se tiene:

$$\frac{n'}{f'_2} = \frac{n''-n'}{R_2} \quad \text{y} \quad \frac{n''}{f''_2} = \frac{n''-n'}{R_2} \quad (1.3)$$

Calculadas las distancias focales, se traza el eje del sistema como se indica en la [Figura 1.3](#), y sobre él se dibuja la lente con los focos de cada superficie. Para determinar el foco y punto principal imagen se parte de un rayo (1) que proviene del infinito y por lo tanto es paralelo al eje. Luego de desviarse en la primera superficie, que se ha aproximado por el plano tangente que pasa por  $A_1$ , el rayo sigue una trayectoria (1'), dirigiéndose al foco imagen  $F'_1$  de la primera dioptra.

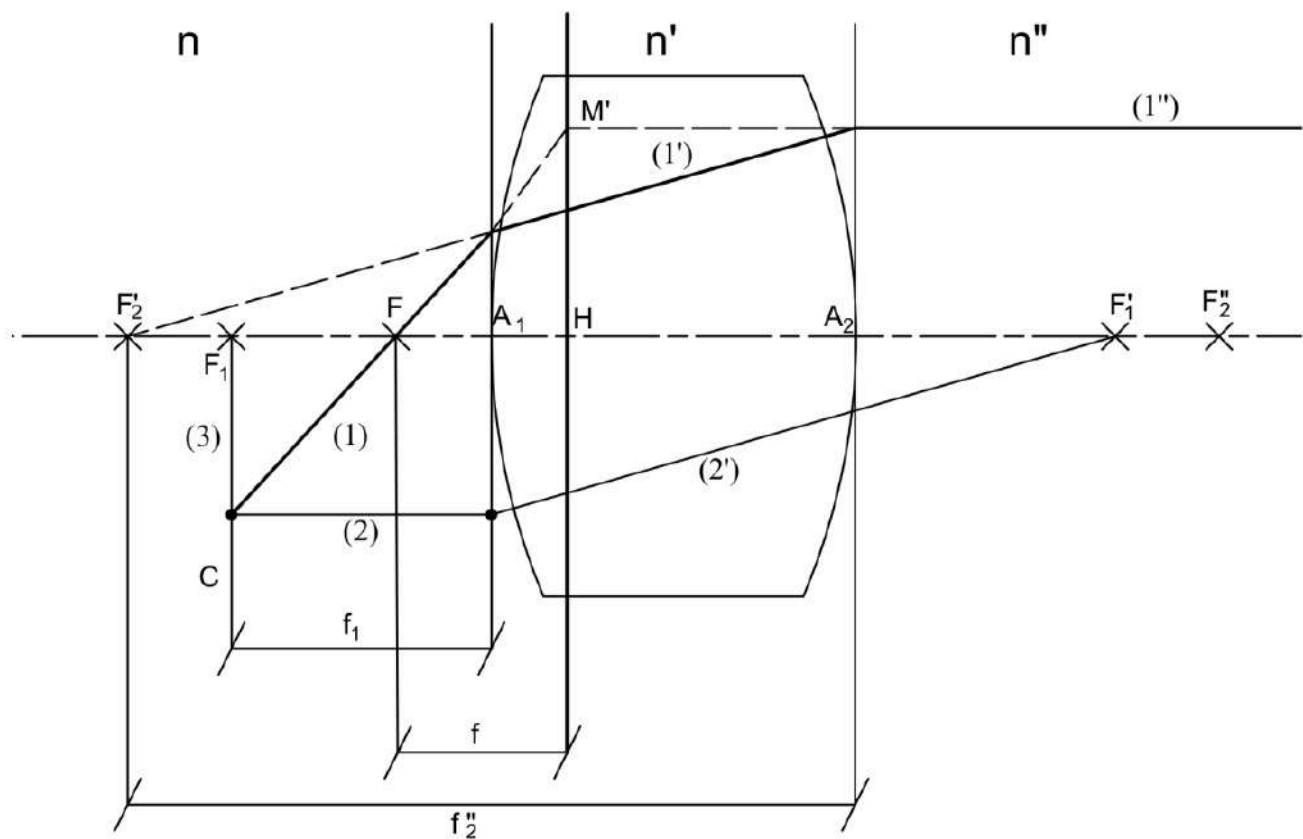
Como el rayo (1') incide de manera oblicua a la segunda superficie, su marcha no es conocida, por lo que se deberá emplear un rayo auxiliar para determinar su trayectoria. El rayo auxiliar (2') es paralelo a (1') y pasa por el foco objeto  $F'_2$  de la segunda superficie. Como dicho rayo pasa por el foco objeto, el rayo auxiliar saliente (2'') emergerá paralelo al eje después de refractarse. Dado que (1') y (2') inciden en la segunda superficie de forma paralela, ambos rayos se intersecan en el punto B del plano focal imagen de la superficie 2, de modo que la trayectoria del rayo (1'') se determina a desde la intersección de (1') con el plano tangente definido por  $A_2$  y el punto B, que es la intersección del rayo (2'') con el plano focal (3).

Una vez completado el trazado, se tendrá que la intersección del rayo saliente (1'') con el eje óptico determinará la posición del foco imagen de la lente gruesa, mientras que si se prolongan (1) y (1'') hasta su intersección, se habrá determinado la posición del plano principal imagen definido por  $H''$ .

La determinación del foco y del plano principal objeto se hacen de manera análoga, iniciando el trazado a partir de un rayo (1'') emergente paralelo al eje, continuando el método hacia atrás, como se muestra en la [Figura 1.4](#).

---

índice de refracción del lugar de donde provienen los rayos se simboliza  $n$ , mientras que el índice de refracción a donde van los rayos se simboliza  $n''$ , y el índice de refracción de la lente será  $n'$ .



**Figura 1.4:** Para determinar el foco y plano principal objeto de una lente gruesa se aplica un método análogo al empleado para determinar la posición del foco y plano principal imagen, sólo que en este caso el rayo incide paralelo desde la derecha del sistema, y el trazado de rayo se hace “hacia atrás”.

### 1.1.2. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método analítico

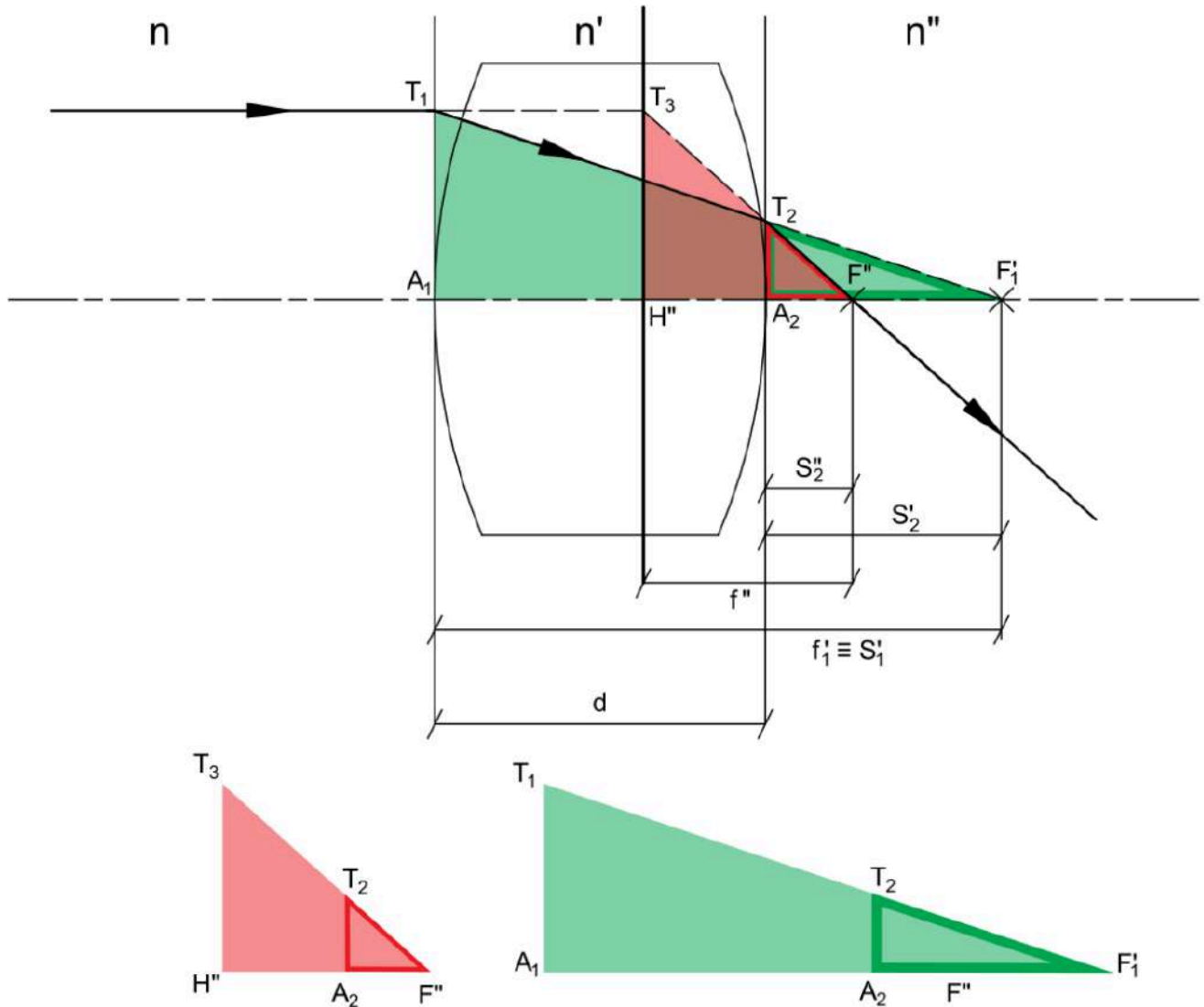
Recordando lo discutido en el Capítulo 0, la potencia de un sistema óptico es una cantidad que depende de las características geométricas del mismo, así como del material que fue construido. Asimismo, la potencia es la cantidad que determina la formación de imágenes de cualquier sistema óptico a partir de la ley de Gauss, [Ec \(0.1\)](#):

$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = P \quad (0.1)$$

siendo  $P$  una cantidad que en el caso particular de la lente gruesa debe depender de los radios de curvatura de cada una de las superficies, del índice de refracción  $n'$  del que está hecha la lente y de su espesor.

En lo que sigue se determinará la potencia de una lente gruesa partiendo de un sistema como el que empleó en la sección anterior, es decir, una lente gruesa cuyas superficies tienen radios de curvatura  $R_1$

y  $R_2$ , y que está construida de un material con índice de refracción  $n'$ , y que tiene a la izquierda un medio de índice  $n$  y a la derecha un medio de índice  $n''$ , como se muestra en la [Figura 1.5](#). Se supondrá además que la lente gruesa tiene un espesor  $d$ .



**Figura 1.5:** La determinación de la potencia de una lente gruesa de forma analítica descansa en el empleo sucesivo de la [Ec. de Gauss](#) para cada superficie, así como en la comparación de triángulos semejantes que permiten expresar la potencia de la lente sólo en función de sus parámetros constructivos.

Para determinar la potencia de la lente gruesa, se deberá plantear un sistema de ecuaciones del cual se despejará la potencia y la posición de los puntos principales en función de los parámetros constructivos de la lente. En particular, la posición de los puntos principales y focos se realizará en función de los vértices de la lente, que en la [Figura 1.5](#) se han denominado  $A_1$  y  $A_2$ .



El primer conjunto de ecuaciones que se plantearán será a partir de la aplicación sucesiva de la ecuación de Gauss para un objeto que se encuentra en el infinito ( $s_1 = \infty$ )<sup>6</sup>:

$$\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$\frac{n}{\infty} + \frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$0 + \frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$\frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$\frac{n'}{s'_1} = \frac{n'}{f'_1}$$

$$s'_1 = f'_1 \quad (1.4)$$

Donde en los últimos tres pasos se utilizó el hecho de que  $P_1 = \frac{n'}{f'_1}$ , en virtud de la [Ecuación \(0.5\)](#).

Para la segunda superficie se debe aplicar una ecuación similar, teniendo en cuenta que la imagen de la primera superficie será el objeto de la segunda, por lo que

$$s'_2 = - (s'_1 - d) = - (f'_1 - d) \quad (1.5)$$

---

<sup>6</sup> Se parte de un objeto que se encuentra en infinito ya que la imagen del dicho objeto deberá estar ubicada en el foco imagen  $F''$  del sistema por definición. El lector puede considerar que este es el equivalente analítico al método gráfico que se empleó en la sección anterior.

En función de esto, la Ec. de Gauss para la segunda superficie queda

$$\begin{aligned}\frac{n'}{s'_2} + \frac{n''}{s''_2} &= P_2 \\ -\frac{n'}{f'_1-d} + \frac{n''}{s''_2} &= P_2 \\ \frac{n''}{s''_2} &= P_2 + \frac{n'}{f'_1-d}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Debe notarse en este punto, que la [Ecuación 1.6](#) involucra a la cantidad  $s''_2$ , que indica la posición de la imagen producida por la lente gruesa de un objeto ubicado en el infinito, pero medida desde la segunda superficie, por lo que no es equivalente a la distancia focal imagen. Para determinar la distancia focal imagen  $f''$  es preciso determinar la distancia entre la segunda superficie y el punto principal imagen  $H''$ , es decir el segmento  $\overline{A_2H''}$ .

Para lograr esto, se debe volver a la [Figura 1.5](#) y observar que  $s''_2$  es un lado del triángulo rectángulo<sup>7</sup>  $\Delta(T_2A_2F'')$ , que es semejante al triángulo rectángulo  $\Delta(T_3H''F'')$ , por lo que

$$\frac{\overline{T_3H''}}{\overline{T_2A_2}} = \frac{f''}{s''_2}\tag{1.7}$$

A su vez, se tiene otra semejanza entre  $\Delta(T_1A_1F'_1)$  y  $\Delta(T_2A_2F'_1)$ , lo que implica que:

$$\frac{\overline{T_1A_1}}{\overline{T_2A_2}} = \frac{f'_1}{f'_1-d}\tag{1.8}$$

<sup>7</sup> En realidad los triángulos que se emplearán en esta demostración lo son porque se considera que los rayos se desvían en el plano tangente de cada superficie, lo cual es cierto mientras los rayos se mantengan dentro de la aproximación paraxial. Más adelante, cuando se trabaje el trazado estricto de rayos, se desarrollarán los métodos para determinar bajo qué condiciones dicha aproximación es adecuada.



De la [Figura 1.5](#) se puede ver que  $\overline{T_1 A_1} = \overline{T_3 H''}$ , lo que implica que los términos del lado derecho de la las Ecs. [1.7](#) y [1.8](#) son iguales, por lo que se los puede igualar entre sí para obtener una igualdad con magnitudes que sólo estén asociadas a la lente gruesa:

$$\frac{f'_1}{f'_1 - d} = \frac{f''}{s''_2}$$

$$s''_2 = f'' \frac{f'_1 - d}{f'_1} \quad (1.9)$$

Si se elimina  $s''_2$  de las Ecs. [1.6](#) y [1.9](#) y se toma en cuenta que la potencia  $P$  de la lente gruesa se puede igualar al cociente  $\frac{n''}{f''}$  se puede determinar, luego de un poco de álgebra, que:

$$P = P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2 \text{ con } C = \frac{d}{n'} \quad (1.10)$$

Además de la potencia de lente gruesa, es preciso poder ubicar el punto principal imagen  $H''$  y el foco imagen  $F''$  de la misma. Esto es una operación sencilla si se nota que  $s''_2 = \overline{A_2 F''}$ , por lo que  $\overline{A_2 F''}$  está implícito en la [Ec. 1.9](#):

$$\overline{A_2 F''} = f'' \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right) \quad (1.11)$$

Por otro lado, de la [Figura 1.5](#) se puede ver que  $\overline{H'' A_2} = \overline{H'' F''} - \overline{A_2 F''}$ , por lo tanto:

$$\overline{H'' A_2} = \overline{H'' F''} - \overline{A_2 F''}$$

$$\overline{H'' A_2} = f'' - f'' \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right)$$

$$\overline{H'' A_2} = f'' \frac{d}{f'_1}$$

$$\overline{A_2 H''} = - f'' \frac{d}{f'_1} \quad (1.12)$$

Donde, en el último paso se utilizó el hecho de que  $\overline{H''A_2} = -\overline{A_2H''}$ .

Con consideraciones matemáticas y geométricas similares, pero considerando un objeto ubicado en el foco de la lente gruesa, cuya imagen se encuentra en el infinito se puede demostrar que:

$$\boxed{\overline{A_1F} = -f \left( 1 - \frac{d}{f'_2} \right)} \quad (1.13)$$

$$\boxed{\overline{A_1H} = f \frac{d}{f'_2}} \quad (1.14)$$

Vale la pena aclarar que las magnitudes determinadas por las Ecuaciones [\(1.11\)](#), [\(1.12\)](#), [\(1.13\)](#) y [\(1.14\)](#) deben ser medidas empleando un convenio de signos **geométrico**<sup>8</sup> y no óptico.

---

<sup>8</sup> Que el convenio de signos sea geométrico, significa que si se tiene, por ejemplo, dos segmentos  $AB = 1 \text{ cm}$  y  $CD = -2 \text{ cm}$ , en el primer caso, el punto B se encuentra 1 cm **a la derecha** de A, mientras que en el segundo caso el punto D se encuentra 2 cm **a la izquierda** de C.



**Ejemplo: Lente Gruesa Divergente** Sea una lente gruesa bicóncava de 4 cm de espesor, hecha de un material de índice de refracción 1.5, y rodeada de aire. Sabiendo además que el radio de curvatura de cada superficie es  $|R| = 5 \text{ cm}$ , determine su potencia, así como la posición de los focos y puntos principales.

Método analítico: Dado que el enunciado afirma que la lente es bicóncava, se sabe entonces que  $R_1 = -5 \text{ cm}$  y que  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Para completar los datos de la lente, se tiene que  $n' = 1,5$  y  $d = 4 \text{ cm}$ . Finalmente, como la lente está rodeada de aire vale que  $n = n'' = 1$ .

Como para aplicar las Ecs. 1.11, 1.12, 1.13 y 1.14 es necesario conocer las distancias focales objeto e imagen, el cálculo se inicia por la Ecs. 0.2 y 1.10, que permiten determinar en la potencia de cada una de las dioptras que constituyen la lente, para luego determinar la potencia de todo el sistema.

$$P_1 = \frac{n' - n}{R_1} = \frac{1,5 - 1}{-5 \text{ cm}} = -10 \text{ Dp} \Rightarrow f_1 = \frac{n}{P_1} = \frac{1}{-10 \text{ Dp}} = -10 \text{ cm} \wedge f'_1 = \frac{n'}{P_1} = \frac{1,5}{-10 \text{ Dp}} = -15 \text{ cm}$$

$$P_2 = \frac{n'' - n'}{R_2} = \frac{1 - 1,5}{5 \text{ cm}} = -10 \text{ Dp} \Rightarrow f'_2 = \frac{n'}{P_2} = \frac{1,5}{-10 \text{ Dp}} = -15 \text{ cm} \wedge f''_2 = \frac{n''}{P_2} = \frac{1}{-10 \text{ Dp}} = -10 \text{ cm}$$

$$P = P_1 + P_2 - CP_1P_2 = (-10 \text{ Dp}) + (-10 \text{ Dp}) - \frac{0,04 \text{ m}}{1,5} (-10 \text{ Dp})(-10 \text{ Dp}) = 22,67 \text{ Dp}$$

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1}{-22,67 \text{ Dp}} = -4,41 \text{ cm} \wedge f'' = \frac{n''}{P} = \frac{1}{-22,67 \text{ Dp}} = -4,41 \text{ cm}$$

Conocida la potencia de la lente gruesa y las distancias focales se puede calcular la posición de los focos y puntos principales aplicando las Ecs. 1.11, 1.12, 1.13 y 1.14:

$$\overline{A_1F} = -f \left( 1 - \frac{d}{f'_2} \right) = -(-4,41 \text{ cm}) \left( 1 - \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} \right) = 5,59 \text{ cm}$$

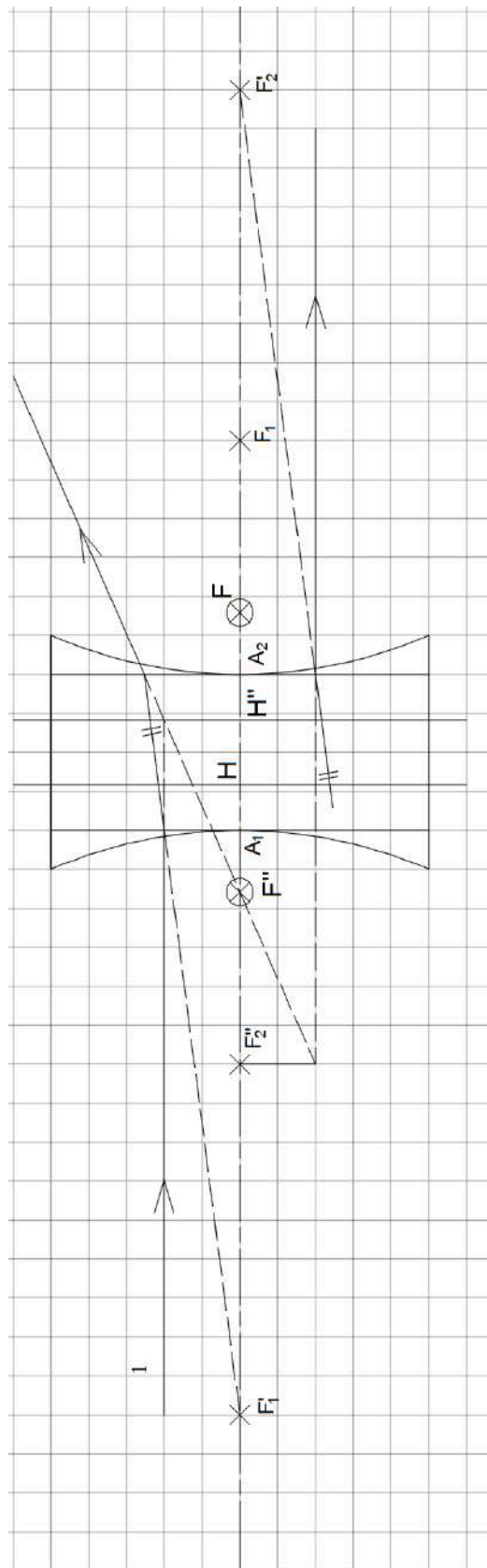
$$\overline{A_2F''} = f'' \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right) = (-4,41 \text{ cm}) \left( 1 - \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} \right) = -5,59 \text{ cm}$$

$$\overline{A_1H} = f \frac{d}{f'_2} = -(-4,41 \text{ cm}) \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = 1,18 \text{ cm}$$

$$\overline{A_2H''} = -f'' \frac{d}{f'_1} = -(-4,41 \text{ cm}) \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = -1,18 \text{ cm}$$

Una vez determinados los puntos principales y los focos, los mismos pueden ubicarse en un esquema como el mostrado en la [Figura 1.6](#), donde se ha representado la lente gruesa en una escala tal que cada cuadrado equivale a 1 cm. En la imagen se muestra el trazado que debe realizarse para ubicar el foco y plano principal imagen, indicando el inicio del trazado con el rayo 1. Se deja como ejercicio al lector determinar la posición del foco y punto principal objeto realizando el trazado inverso. Notar que se han marcado las posiciones del foco y punto principal objeto a modo de comprobación<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> ¡Cuidado con los errores de paralaje!



**Figura 1.6:** Ejemplo del trazado de rayos para encontrar el Foco y Plano Principal Imagen de una lente gruesa



### 1.1.3. Determinación de imágenes a partir de la modelización de una lente gruesa

Una vez modelizada cualquier lente gruesa, es decir, una vez encontrados los focos y puntos principales, los mismos se pueden utilizar para encontrar imágenes de objetos puntuales y extensos. Los métodos que se emplean para encontrar imágenes son muy similares a los conocidos, y que fueron tratados en el Capítulo 0.

**Determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema** Supóngase que se ha determinado la posición de los focos y puntos principales de un sistema convergente y se lo ha representado en la [Figura 1.7](#). Nótese que en este caso también se han representado los vértices del sistema. Si bien la ubicación de los vértices no es necesaria para el trazado de rayos, es importante guardar la referencia de la extensión de la lente física.

En cualquier caso, para encontrar gráficamente la imagen de un objeto puntual que se encuentra en el eje óptico del sistema, se debe emplear el método del rayo auxiliar. Primero, se traza un rayo oblicuo que va desde el objeto  $M$  hasta el plano principal objeto (rayo 1, que interseca al plano principal en el punto  $A$ ).

Ahora bien, como los planos principales son planos de aumento lateral unitario, el rayo que llega a  $A$  debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen (punto  $B$ ). Dado que el rayo 1 no es de marcha conocida, para determinar su dirección de salida se debe emplear un rayo auxiliar, que pase por el foco objeto  $F$  y que sea paralelo a 1 (rayo 2, que interseca al plano principal objeto en  $C$ ). Una vez más, este rayo debe trasladarse horizontalmente hasta llegar al plano principal imagen (punto  $D$ ). Como el rayo 2 pasa por el foco objeto, luego de salir del sistema, el mismo debe ser paralelo al eje óptico (rayo 2").

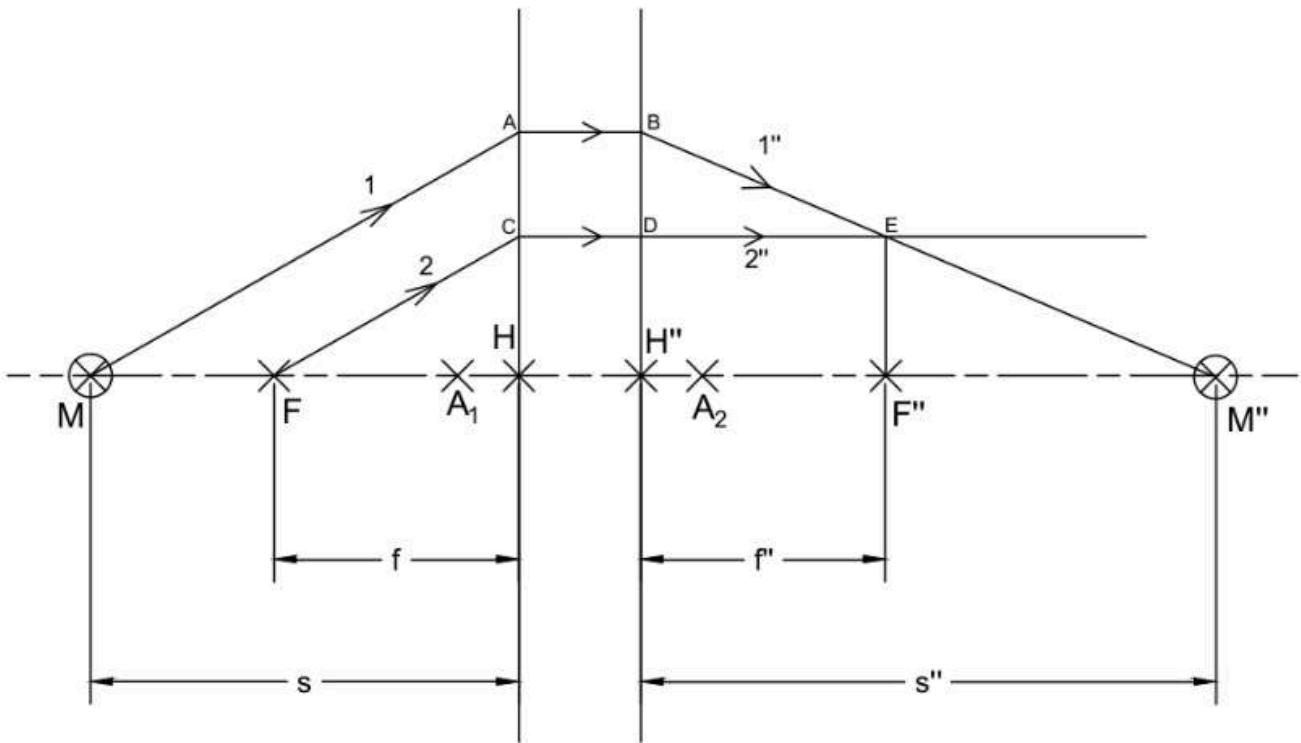
Ahora bien, como los rayos 1 y 2 ingresan paralelos entre sí, ambos deben cruzarse en el plano focal imagen de la lente gruesa al emerger, por lo tanto la extensión del rayo 2" hasta su intersección con el plano focal imagen (punto  $E$ ), determinará el punto de salida del rayo 1", que va desde  $B$  hasta  $E$ . Finalmente, la intersección del rayo 1" con el eje óptico determina la posición de la imagen  $M''$ .

La determinación analítica de la posición de la imagen del objeto se realiza empleando la [Ec. de Gauss 0.1](#), teniendo en consideración que la distancia objeto  $s$  debe medirse desde el objeto  $M$  hasta el punto principal objeto  $H$  y la distancia focal objeto se mide desde el foco objeto  $F$  hasta el punto principal objeto  $F$ , como se muestra en la [Fig. 1.7](#). Una vez despejada la distancia imagen  $s''$ , para

ubicar a la imagen es preciso medir la distancia desde el plano principal imagen  $s''$ . Escrito en símbolos, lo dicho hasta ahora se puede expresar de la siguiente manera:

$$s = \overline{MH}; s'' = \overline{H''M''}; f = \overline{FH}; f'' = \overline{H''F''}$$

Es importante tener en cuenta que mientras  $s$ ,  $s''$ ,  $f$  y  $f''$  se miden empleando el convenio **óptico** de signos, los segmentos  $\overline{MH}$ ,  $\overline{H''M''}$ ,  $\overline{FH}$  y  $\overline{H''F''}$  se miden empleando el convenio de signos **geométrico**.



**Figura 1.7:** Determinación gráfica de la imagen de un objeto puntual a partir de la modelización de una lente gruesa. La determinación de la imagen del objeto M se realiza empleando el método del rayo auxiliar, siempre teniendo en cuenta que cualquier rayo que llega al plano principal objeto debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen, para luego continuar con su correspondiente marcha.

**Determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema** La determinación de la posición de la imagen de un objeto situado fuera del eje, o, equivalentemente, la de un objeto extenso se ejemplifica en la [Figura 1.8](#), y se realiza empleando el método del rayo paralelo<sup>10</sup>.

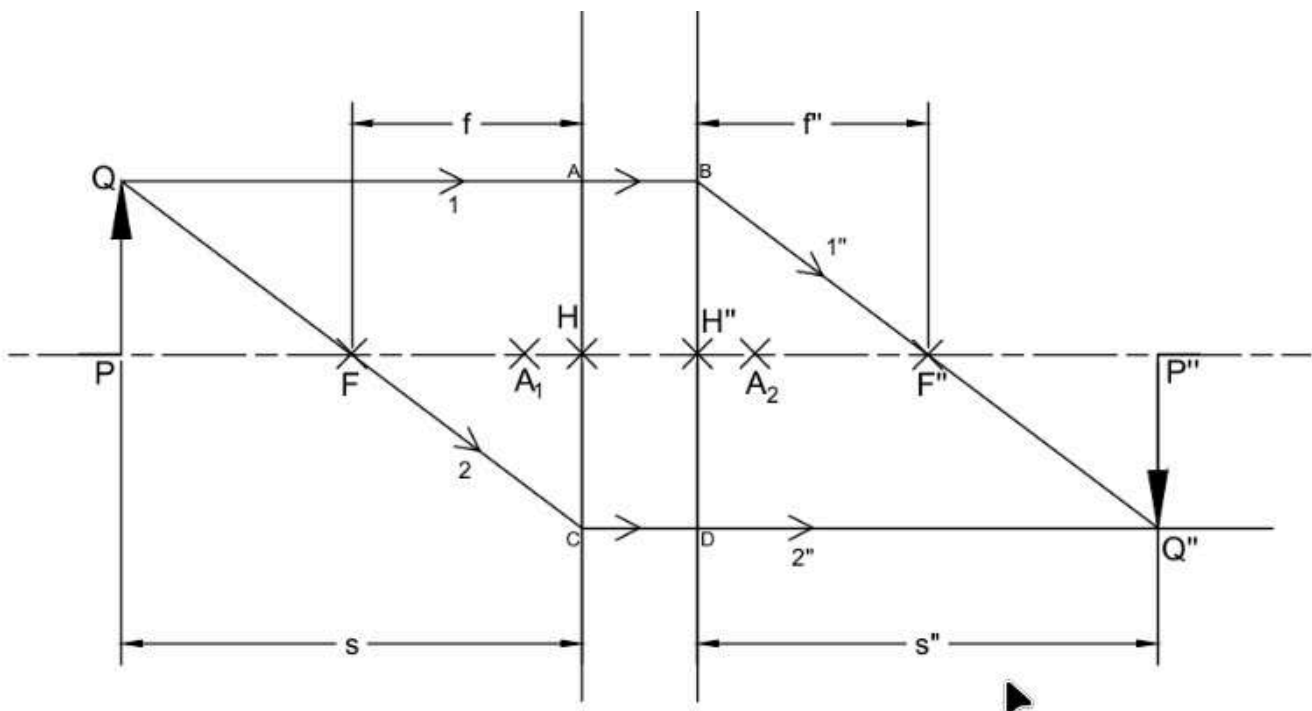
<sup>10</sup> Cuando se trazan rayos para encontrar las imágenes producidas por una lente delgada, y el índice de refracción a ambos lados de la lente es el mismo, se puede emplear un tercer rayo, que es el rayo que no se desvía, que pasa por el centro óptico de la lente. Notar que cuando se trabaja con modelizaciones, no se puede hablar de centro óptico en el sentido usual, por lo que para la construcción de imágenes de lentes gruesas, no se puede emplear el rayo que no se desvía de la misma manera que se hacía con las lentes delgadas.



Primero se traza el rayo 1, paralelo al eje y que pase por el objeto  $Q$ . Una vez que dicho rayo interseca el plano principal objeto (punto  $A$ ), el mismo debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen (punto  $B$ ), después de lo cual continuará su marcha hacia el foco imagen  $F''$  (rayo 1").

El segundo rayo parte desde  $Q$  y pasa por el foco objeto  $F$ , hasta intersectar al plano principal objeto (punto  $C$ ), luego de lo cual se traslada horizontalmente hasta el plano principal imagen (punto  $D$ ), para emerger paralelamente al eje óptico (rayo 2"). Una vez trazados los rayos 1" y 2", se encuentra la imagen  $Q''$  en la intersección de ambos rayos.

La determinación analítica de la posición, aumento y naturaleza directa o invertida de la imagen se realiza empleando las Ecs. [0.1](#) y [0.8](#), midiendo las distancias objeto e imagen respecto de los puntos principales objeto e imagen, respectivamente<sup>11</sup>.



**Figura 1.8:** Determinación gráfica de la imagen de un objeto extenso a partir de la modelización de una lente gruesa. La determinación de la imagen del objeto  $\overline{PQ}$  se realiza empleando los rayos de marcha conocida foco-paralelo y paralelo-foco, siempre teniendo en cuenta que cualquier rayo que llega al plano principal objeto debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen, para luego continuar con su correspondiente marcha.

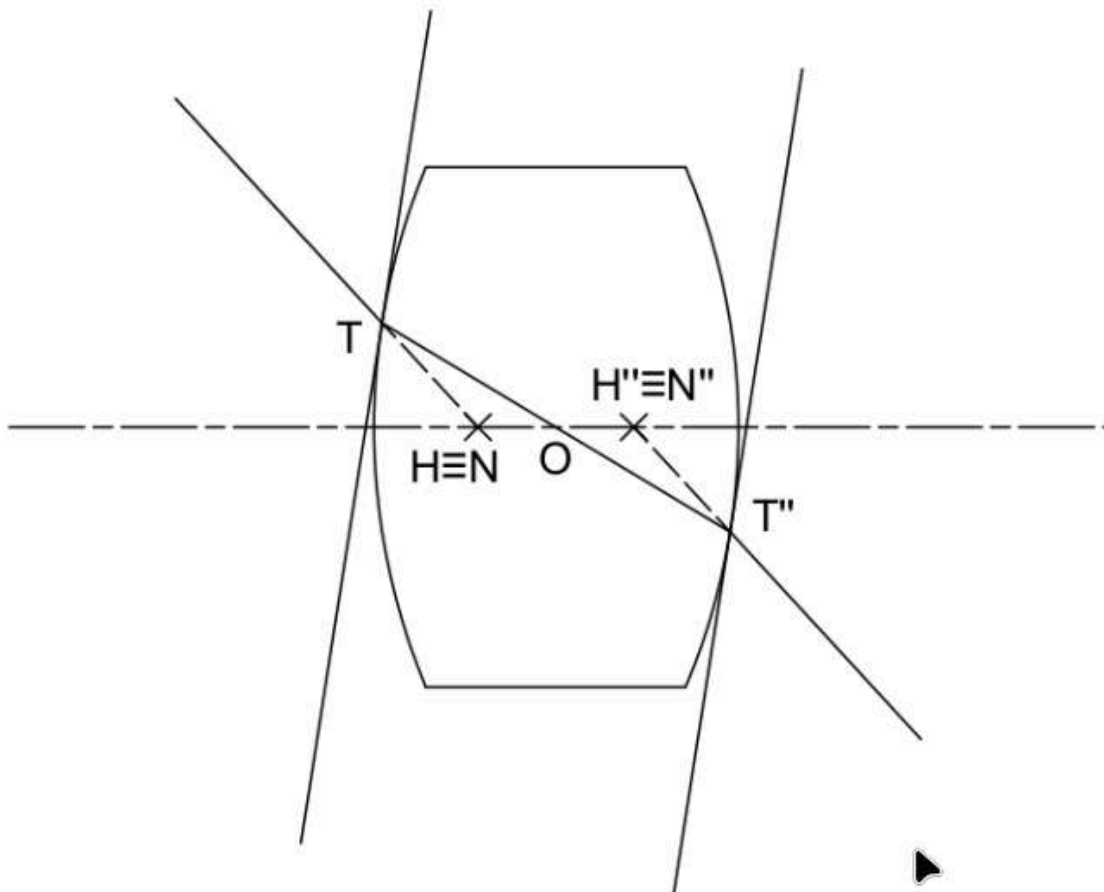
La determinación de la naturaleza real o virtual de la imagen es un poco más complicada, ya que, en el caso más general, puede darse que la modelización indique la imagen se forme a partir de la intersección de rayos, pero en un lugar en que los rayos no puedan cruzarse efectivamente, por

<sup>11</sup> Dado que los planos principales son planos de aumento lateral unitario, los mismos no inciden en el aumento lateral total de un objeto extenso.

ejemplo, en el interior de la lente gruesa. Debido a esto es necesario que siempre se tengan como referencia los límites físicos del sistema (los puntos  $A_1$  y  $A_2$  en las Figuras 1.7 y 1.8). Si, por ejemplo, la modelización indica que los rayos que formarán la imagen se intersectan dentro de la lente gruesa, la imagen que se formará será en realidad virtual, a pesar de que provino de la intersección de los rayos salientes.

### 1.2. Puntos nodales y centro óptico

De todos los rayos que atraviesan una lente gruesa procedentes de un punto objeto situado fuera del eje, habrá siempre uno cuya dirección luego de emerger de la lente sea la misma que la que tenía al incidir sobre dicha lente. Los puntos en que las prolongaciones de dichos rayos cortan al eje principal se llaman puntos nodales y los planos transversales a los que ellos pertenecen se denominan planos nodales. Todos los sistemas ópticos tienen dos puntos nodales, que se denominan puntos nodales objeto e imagen, y se representan con  $N$  y  $N''$ , respectivamente.



**Figura 1.9:** Cualquier sistema óptico posee dos puntos tales que cualquier rayo que incide sobre la lente y apunte a ellos no será desviado, sino simplemente trasladado en forma paralela. Dicho par de puntos se denominan nodales.

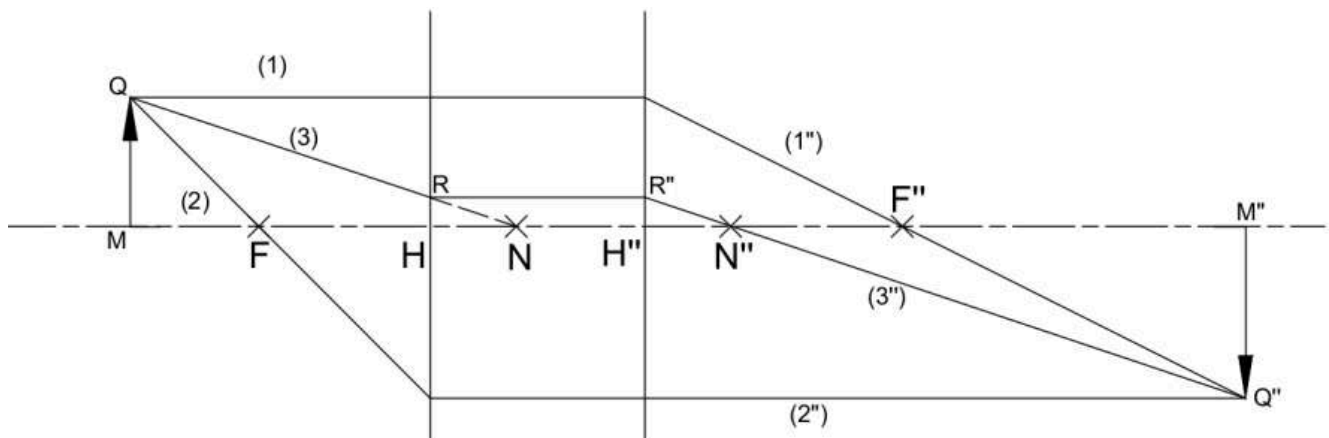


En la [Figura 1.9](#) se ha dibujado una lente gruesa rodeada del mismo medio a ambos lados, es decir,  $n = n''$ . En este caso los puntos nodales objeto e imagen coinciden respectivamente con los puntos principales objeto e imagen. Como el rayo incidente y emergente forman ángulos iguales con el eje óptico, los puntos nodales se llaman puntos conjugados de aumento angular unitario.

La dirección del rayo  $\overline{TT''}$  corta al eje óptico en el punto O, que es el centro óptico de la lente. Una propiedad importante del centro óptico es que todo rayo no desviado, al prolongarse pasa por dicho punto. Se puede demostrar que la posición de este punto depende de los radios de curvatura de cada superficie, así como del espesor de la lente, pero no del índice de refracción del material del que está hecho la lente, por lo tanto no variará con el color de la luz incidente.

En la [Figura 1.9](#) se han trazado además las tangentes a las superficies en T y T'', con lo cual se puede apreciar que el efecto que producen los puntos nodales sobre un rayo que luz que incide sobre una lente gruesa es el mismo que produce una lámina de caras paralelas, es decir, el efecto de trasladar el rayo incidente sin desviarlo.

A continuación se determinarán algunas expresiones generales que permiten ubicar a los puntos nodales en función de los parámetros constructivos de la lente. Para ello, se supondrá una lente gruesa dada, en la que se sabe la posición de los focos, los puntos principales y los puntos nodales. Se ha dispuesto además, un objeto arbitrario y su imagen, así como los rayos paralelo-foco (1-1''), foco-paralelo (2-2''), y de no desvío, que pasan por los puntos nodales N y N'' (3-3''), como se muestra en la [Figura 1.10](#). Dado que los puntos nodales no coinciden con los puntos principales, se puede afirmar que  $n \neq n''$ .



**Figura 1.10:** Una propiedad interesante de los puntos nodales es que la distancia entre los mismos siempre es idéntica a la distancia que existe entre los puntos principales. A su vez, la distancia entre los puntos nodales y sus respectivos puntos principales es igual a la diferencia entre las distancias a ambos lados de la lente gruesa.

Por definición de punto nodal, los rayos 3 y 3" deben ser paralelos. Adicionalmente, como los planos principales son de aumento unitario, los puntos  $R$  y  $R''$  se encuentran a la misma altura sobre el eje óptico. Esto implica que el cuadrilátero  $RR''N''N$  es un paralelogramo, lo significa que:

$$\overline{HH''} = \overline{NN''} \quad (1.15)$$

Por otro lado, y por la mismas razones, es claro que los triángulos  $\Delta(RHN)$  y  $\Delta(R''N''H)$  son congruentes, por lo tanto:

$$\overline{HN} = \overline{H''N''} \quad (1.16)$$

Finalmente, aunque el procedimiento es un poco más engorroso, se puede demostrar que la distancia entre cada punto principal y su respectivo punto nodal es igual a la diferencia entre las distancias focales imagen y objeto<sup>12</sup>, es decir:

$$\overline{HN} = \overline{H''N''} = f'' - f \quad (1.17)$$

Teniendo en cuenta las expresiones [1.15](#), [1.16](#) y [1.17](#), pueden obtenerse expresiones que permiten ubicar los puntos nodales en función de los vértices de la lente:

$$\overline{A_1N} = f \left( \frac{n''-n}{n} + \frac{d}{f'_2} \right) \quad (1.18)$$

$$\overline{A_2N''} = -f'' \left( \frac{n''-n}{n} + \frac{d}{f'_1} \right) \quad (1.19)$$

Por otro lado, dado que los puntos nodales definen puntos nodales de aumento angular unitario, puede definirse a partir de ellos una forma alternativa de calcular el aumento lateral:

$$m = \frac{y''}{y} = - \frac{s'' - \overline{H''N''}}{s - \overline{HN}} = - \frac{s'' - (f'' - f)}{s - (f'' - f)} \quad (1.20)$$

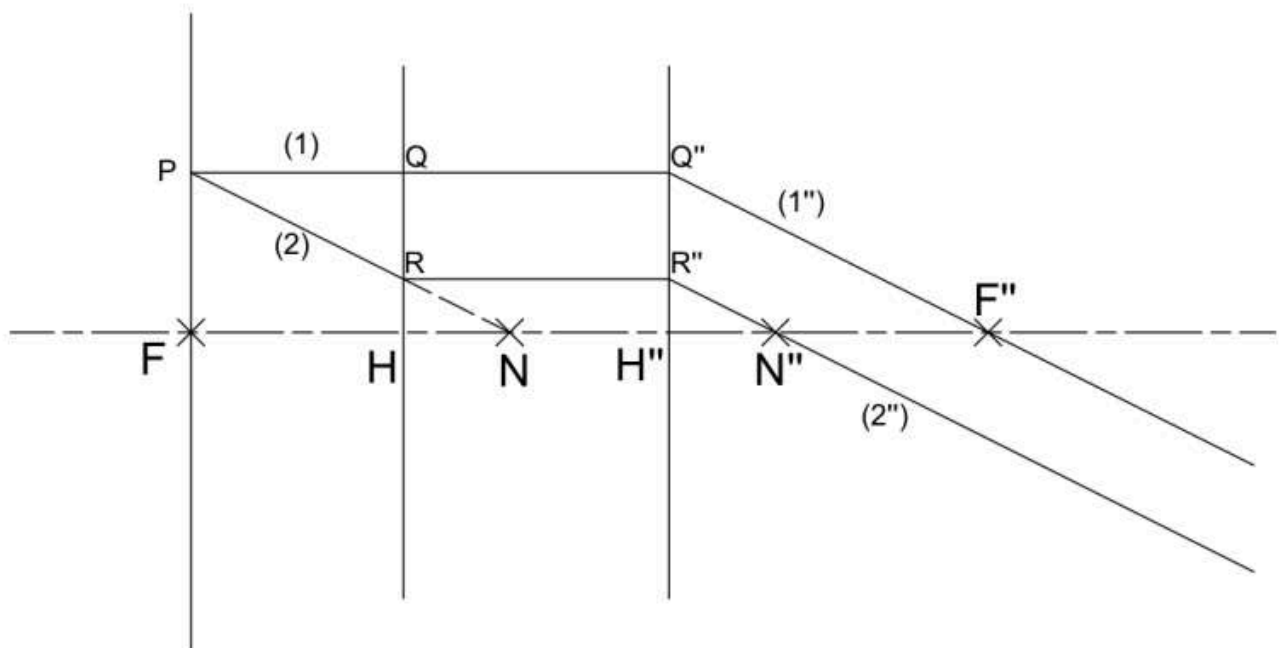
La determinación de los puntos nodales por el método gráfico se hace haciendo uso del principio óptico (III) mencionado en la sección 0.3, que estipula que todo conjunto de rayos que se intersecan en el mismo punto del plano focal objeto, emergen paralelos entre sí luego de la refracción.

<sup>12</sup> Un esbozo de la demostración se encuentra en un apéndice al final del capítulo.



El trazado que permite determinar la ubicación de los puntos nodales se muestra en la [Figura 1.11](#). Primeramente se traza un rayo (1) que pase por un cierto punto  $P$  ubicado en el plano focal objeto, que sea paralelo al eje óptico. Dicho rayo se trasladará desde el punto  $Q$  en el plano principal objeto hasta el punto  $Q''$  en el plano principal imagen, y deberá pasar por el foco imagen del sistema  $F''$  al salir del mismo, tal como lo hace el rayo (1'').

Ahora bien, **todos** los rayos que pasen por  $P$  deberán, luego de atravesar al sistema, ser paralelos al rayo (1''). En particular, si se traza un rayo (2), que sea paralelo a (1'') y que pase por  $P$ , luego de pasar por la lente, la dirección del rayo saliente (2''), será a la vez paralelo a (1'') y a (2). Como (2) y (2'') son paralelos, ambos deben pasar por los puntos nodales  $N$  y  $N''$  respectivamente. En el caso del rayo (2) se debe trazar una prolongación desde el punto  $R$  hasta cortar al eje óptico, mientras que en el caso del rayo (2''), el propio rayo ya interseca al eje óptico en el punto nodal imagen  $N''$ .



**Figura 1.11:** La determinación gráfica de la ubicación de los puntos nodales se realiza a partir de emplear un rayo que incide en la lente gruesa paralelo al eje, y usando el principio óptico que establece que dos rayos que emergen paralelos entre sí de cualquier sistema óptico se deben intersectar en el plano focal objeto.

Una vez determinados los puntos nodales de una lente gruesa, los mismos pueden emplearse para determinar la posición del centro óptico, como se muestra en la [Figura 1.10](#).

### 1.3. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
Potencia de una lente gruesa	$P = P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2$ <p>con <math>C = \frac{d}{n'}</math></p>	(1.10)
Posición de los planos principales de una lente gruesa	$\overline{A_1 H} = f \frac{d}{f'_2}$ $\overline{A_2 H''} = -f'' \frac{d}{f'_1}$	(1.14) (1.12)
Posición de los focos de una lente gruesa	$\overline{A_1 F} = -f \left(1 - \frac{d}{f'_2}\right)$ $\overline{A_2 F''} = f'' \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right)$	(1.13) (1.14)
Separación de los puntos nodales	$\overline{H H''} = \overline{N N''}$	(1.15)
Ubicación de los puntos nodales respecto de los puntos principales	$\overline{H N} = \overline{H'' N''} = f'' - f$	(1.17)
Ubicación de los puntos nodales respecto de los vértices del sistema	$\overline{A_1 N} = f \left(\frac{n''-n}{n} + \frac{d}{f'_2}\right)$ $\overline{A_2 N''} = -f'' \left(\frac{n''-n}{n} + \frac{d}{f'_1}\right)$	(1.18) (1.19)
Aumento lateral a partir de los puntos nodales	$m = -\frac{s'' - \overline{H'' N''}}{s - \overline{H N}} = -\frac{s'' - (f'' - f)}{s - (f'' - f)}$	(1.20)



## 1.4. Cuestiones

- 1.4.1. Analizar cómo se modifican las expresiones obtenidas para la lente gruesa cuando se considera que  $d$  tiende a 0 y comparar los resultados con lo que se sabe para el caso de una lente delgada.
- 1.4.2. Demostrar las Ecs. [1.13](#) y [1.14](#).
- 1.4.3. Analice qué es lo que ocurre en las expresiones [1.18](#) y [1.19](#) si se hace  $n'' = n$ . Interprete el resultado en función de cuál debería ser la ubicación de los puntos nodales cuando el sistema se encuentra inmerso en un medio uniforme.
- 1.4.4. Analice qué es lo que ocurre en las expresiones [1.18](#) y [1.19](#) si hace  $d = 0$ . Interprete el resultado en función de lo que esperaría obtener si tuviera una lente delgada con medios diferentes a cada lado.
- 1.4.5. Analice qué es lo que ocurre en las expresiones [1.18](#) y [1.19](#) si hace  $n'' = n$  y  $d = 0$ . Interprete el resultado en función de lo que esperaría obtener si tuviera una lente delgada sumergida en un medio uniforme.
- 1.4.6. Demuestre la expresión alternativa para el aumento lateral, [Ec. 1.20](#). Verifique que dicha expresión se reduce a la expresión [\(0.8\)](#) para una lente sumergida en un medio homogéneo.

### 1.5. Ejercicios

1.5.1. Los radios de una lente equiconvexa de  $n' = 1,8$  miden 4 cm y su espesor es 3,6 cm.

Determinar analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices a los correspondientes focos y puntos principales.
- ¿A partir de qué espesor esta lente tendrá una potencia negativa?
- ¿Cómo se ubican los planos principales si  $R_1 = R_2$ ?

#### Respuestas:

- $f_1 = 5 \text{ cm}; f'_1 = 9 \text{ cm}; f'_2 = 9 \text{ cm}; f''_2 = 5 \text{ cm}; P = 32 \text{ Dp}; f = f'' = 3,13 \text{ cm}$
  - $\overline{A_1F} = -1,88 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 1,88 \text{ cm}; \overline{A_1H} = 1,25 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -1,25 \text{ cm}$
  - 18 cm
  - De forma simétrica respecto de los vértices
- 1.5.2. Una lente plano-convexa de 3,2 cm de espesor tiene un  $n' = 1,6$ . Si el radio de la segunda superficie mide 3,2 cm, calcúlese analítica y gráficamente:
- La potencia y la distancia focal.
  - Las distancias entre los vértices a los correspondientes focos y puntos principales.
  - Esquematice la ubicación de los planos principales de una lente convexa-plana ( $R_1 > 0; R_2 = \infty$ ).

#### Respuestas:

- $f_1 = \infty; f'_1 = \infty; f'_2 = 8,53 \text{ cm}; f''_2 = 5,33 \text{ cm}; P = 18,75 \text{ Dp}; f = f'' = 5,33 \text{ cm};$
  - $\overline{A_1F} = -3,33 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 5,33 \text{ cm}; \overline{A_1H} = 2 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = 0$
- 1.5.3. El espesor de una lente de vidrio es 3 cm y su índice de refracción es 1,5. Los radios de sus caras son:  $R_1 = 3 \text{ cm}$  y  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Calcúlese analítica y gráficamente:
- La potencia y la distancia focal.
  - Las distancias entre los vértices y los correspondientes focos y puntos principales.
  - Si  $R_1 < R_2 \wedge d = 3 \text{ cm} \Rightarrow P > 0$ . ¿Existe un espesor tal que  $P < 0$ ? Si existe, calcúlelo.

#### Respuestas:

- $f_1 = 6 \text{ cm}; f'_1 = 9 \text{ cm}; f'_2 = -15 \text{ cm}; f''_2 = -10 \text{ cm}; P = 10 \text{ Dp}; f = f'' = 10 \text{ cm};$
- $\overline{A_1F} = -12 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 6,67 \text{ cm}; \overline{A_1H} = -2 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -3,33 \text{ cm}$
- No existe



1.5.4. Los radios de una lente de  $n' = 1,5$  y espesor  $3\text{ cm}$  miden  $R_1 = 5\text{ cm}$  y  $R_2 = 2,5\text{ cm}$ .

Calcúlese analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices y los correspondientes focos y puntos principales.
- Si  $R_1 > R_2 \wedge d = 3\text{ cm} \Rightarrow P < 0$ . ¿Existe un espesor tal que  $P > 0$ ?

**Respuestas:**

- $f_1 = 10\text{ cm}; f'_1 = 15\text{ cm}; f'_2 = -7,5\text{ cm}; f''_2 = -5\text{ cm}; P = -6\text{ Dp}; f = f'' = -16,67\text{ cm};$
- $\overline{A_1F} = 23,33\text{ cm}; \overline{A_2F''} = -13,33\text{ cm}; \overline{A_1H} = 6,67\text{ cm}; \overline{A_2H''} = 3,33\text{ cm}$
- Si existe.  $d = 7,5\text{ cm}$

1.5.5. Una lente gruesa se encuentra en el extremo de un tubo que contiene un aceite de  $n'' = 1,3$ . Los radios de la lente son  $R_1 = 4,2\text{ cm}$  y  $R_2 = -2\text{ cm}$ . Su espesor es de  $5,1\text{ cm}$  y  $n' = 1,7$ . Si  $R_2$  está en contacto con el aceite; calcúlese analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices y los correspondientes focos y puntos principales.

**Respuestas:**

- $f_1 = 6\text{ cm}; f'_1 = 10,20\text{ cm}; f'_2 = 8,5\text{ cm}; f''_2 = 6,5\text{ cm};$   
 $P = 26,67\text{ Dp}; f = 3,75\text{ cm}; f'' = 4,88\text{ cm}$
- $\overline{A_1F} = -1,5\text{ cm}; \overline{A_2F''} = 2,44\text{ cm}; \overline{A_1H} = 2,25\text{ cm}; \overline{A_2H''} = -2,44\text{ cm}$

1.5.6. Una lente con radios de curvatura iguales  $R_1 = R_2 = 5\text{ cm}$ ; tiene un espesor de  $3\text{ cm}$  y  $n' = 1,5$ , si la lente está rodeada de aire, hállese:

- La potencia y la distancia focal.
- La posición de los focos y los puntos principales respecto de los vértices de la lente.

**Respuestas:**

- $f_1 = 10\text{ cm}; f'_1 = 15\text{ cm}; f'_2 = -15\text{ cm}; f''_2 = -10\text{ cm};$   
 $P = 2\text{ Dp}; f = f'' = 50\text{ cm}$
- $\overline{A_1F} = -60\text{ cm}; \overline{A_2F''} = 40\text{ cm}; \overline{A_1H} = -10\text{ cm}; \overline{A_2H''} = -10\text{ cm}$

1.5.7. Una lente concéntrica de  $R_1 = -5 \text{ cm}$  y  $R_2 = -8 \text{ cm}$  tiene un  $n' = 1,5$ . Suponiendo que está rodeada de aire, hállese:

a. La potencia y la distancia focal.

b. La posición de los focos y los puntos principales respecto de los vértices de la lente.

**Respuestas:**

a.  $f_1 = -10 \text{ cm}$ ;  $f'_1 = -15 \text{ cm}$ ;  $f'_2 = 24 \text{ cm}$ ;  $f''_2 = 16 \text{ cm}$ ;

$$P = -2,5 \text{ Dp}; f = f'' = -40 \text{ cm}$$

b.  $\overline{A_1F} = 35 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2F''} = -48 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_1H} = -5 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2H''} = -8 \text{ cm}$

1.5.8. Determine, para la lente gruesa del ejercicio 1.5.5, determine la posición de sus respectivos puntos nodales, analítica y gráficamente.

**Respuestas:**  $\overline{A_1N} = 3,37 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2N''} = -1,31 \text{ cm}$

1.5.9. Dados los datos de las siguientes lentes gruesas, determinar:

a. Potencia y distancia focal.

b. Distancia de los vértices a los correspondientes focos, puntos principales y puntos nodales.

LENTE A)  $R_1 = 5 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 2 \text{ cm}$ ;  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $n' = 1,5$ ;  $n = 1$ ;  $n'' = 1,4$

LENTE B)  $R_1 = 4 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 4 \text{ cm}$ ;  $d = 1,5 \text{ cm}$ ;  $n' = 1,5$ ;  $n = 1$ ;  $n'' = 1,3$

LENTE C)  $R_1 = 6 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 5 \text{ cm}$ ;  $d = 4,8 \text{ cm}$ ;  $n' = 1,6$ ;  $n = 1,2$ ;  $n'' = 2$

**Respuestas:**

a. LENTE A)  $P = 6 \text{ Dp}$ ;  $f = 16,67 \text{ cm}$ ;  $f'' = 23,33 \text{ cm}$

LENTE B)  $P = 8,13 \text{ Dp}$ ;  $f = 12,31 \text{ cm}$ ;  $f'' = 16 \text{ cm}$

LENTE C)  $P = 13,07 \text{ Dp}$ ;  $f = 9,18 \text{ cm}$ ;  $f'' = 15,31 \text{ cm}$

b. LENTE A)  $\overline{A_1F} = -18,33 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2F''} = 18,67 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_1H} = -1,67 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2H''} = -4,67 \text{ cm}$ ;

$$\overline{A_1N} = 5 \text{ cm}; \overline{A_2N''} = 2 \text{ cm}$$

LENTE B)  $\overline{A_1F} = -12,92 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2F''} = 14 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_1H} = -0,62 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2H''} = -2 \text{ cm}$ ;



$$\overline{A_1 N} = 3,08 \text{ cm}; \overline{A_2 N''} = 1,69 \text{ cm}$$

$$\text{LENTE C) } \overline{A_1 F} = -6,98 \text{ cm}; \overline{A_2 F''} = 12,24 \text{ cm}; \overline{A_1 H} = 2,2 \text{ cm}; \overline{A_2 H''} = -3,06 \text{ cm};$$

$$\overline{A_1 N} = 8,33 \text{ cm}; \overline{A_2 N''} = 3,06 \text{ cm}$$

1.5.10. Para las lentes del ejercicio 9, ubique los siguientes objetos y determine sus imágenes por el método gráfico, empleando al menos un rayo que pase por los puntos nodales de su correspondiente lente:

- Un objeto extenso de altura 1 cm, tal que  $s = 0,5 f$ .
- Un objeto extenso de altura 1 cm, tal que  $s = 1,5 f$ .
- Un objeto extenso de altura 1 cm, tal que  $s = 2 f$ .

**Respuestas:**

- $s'' = -23,33$ ;  $m = 2$
- $s'' = 47,97 \text{ cm}$ ;  $m = -2$
- $s'' = 15$ ;  $m = -1$

### 1.6. Apéndice A: Demostración de la expresión 1.18

Para demostrar la expresión [1.17](#), partimos de la expresión del aumento [1.20](#) y la igualamos a la expresión ya conocida para calcular el aumento lateral, [Ec. 0.8](#):

$$-\frac{s'' - \overline{H''N''}}{s - \overline{HN}} = -\frac{n \cdot s''}{n'' \cdot s}$$

$$\frac{s'' - \overline{H''N''}}{s - \overline{HN}} = \frac{n \cdot s''}{n'' \cdot s}$$

$$\frac{s'' - \overline{HN}}{s - \overline{HN}} = \frac{n \cdot s''}{n'' \cdot s}$$

$$(s'' - \overline{HN}) \cdot n'' \cdot s = (s - \overline{HN}) \cdot n \cdot s''$$

$$n'' \cdot s \cdot s'' - n'' \cdot s \cdot \overline{HN} = n \cdot s'' \cdot s - n \cdot s'' \cdot \overline{HN}$$

$$n'' \cdot s \cdot s'' - n \cdot s'' \cdot s = n'' \cdot s \cdot \overline{HN} - n \cdot s'' \cdot \overline{HN}$$

$$(n'' - n) \cdot s \cdot s'' = (n'' \cdot s - n \cdot s'') \cdot \overline{HN}$$

En el segundo paso se reemplazó  $\overline{H''N''}$  por  $\overline{HN}$ , en virtud de la [Ec. 1.16](#). Si se divide miembro a miembro por  $s \cdot s''$ , y se toma en cuenta la [Ec. de Gauss \(0.1\)](#) queda:

$$n'' - n = P \cdot \overline{HN}$$

Finalmente, si se divide miembro a miembro por la potencia P de la lente, y se toman en cuenta las expresiones [0.5](#) y [0.6](#), que vinculan la potencia de un sistema con sus distancias focales, se llega a la expresión [1.17](#).



# Capítulo 2: Combinaciones de Lentes

La mayor parte de las lentes utilizadas en los instrumentos ópticos son compuestas, ya que esto permite reducir las aberraciones. En este capítulo se estudiarán sistemas ópticos compuestos por dos o más lentes, que podrán ser gruesas o delgadas, y que a su vez pueden estar separadas o adosadas. Asimismo, se demostrará que cualquier combinación de lentes, sin importar su complejidad, puede ser modelada a partir de seis puntos cardinales, es decir, dos focos, dos puntos principales y dos puntos nodales. Se verá que, una vez determinados los puntos cardinales de un sistema óptico, se puede, empleando los mismos, utilizar un sistema modelo que producirá las mismas imágenes que el sistema real, pero a través de un trazado de rayos mucho más sencillo. En la primera sección se estudiará la combinación de lentes delgadas, donde se verá que el método de análisis comparte muchos puntos en común con lo visto en el capítulo anterior. En la sección siguiente se analizará la combinación de lentes gruesas, y se tratará el problema a partir de reducir cada lente gruesa a una correspondiente modelización, para luego tratar la combinación de los sistemas modelados.

## 2.1. Combinación de Lentes Delgadas

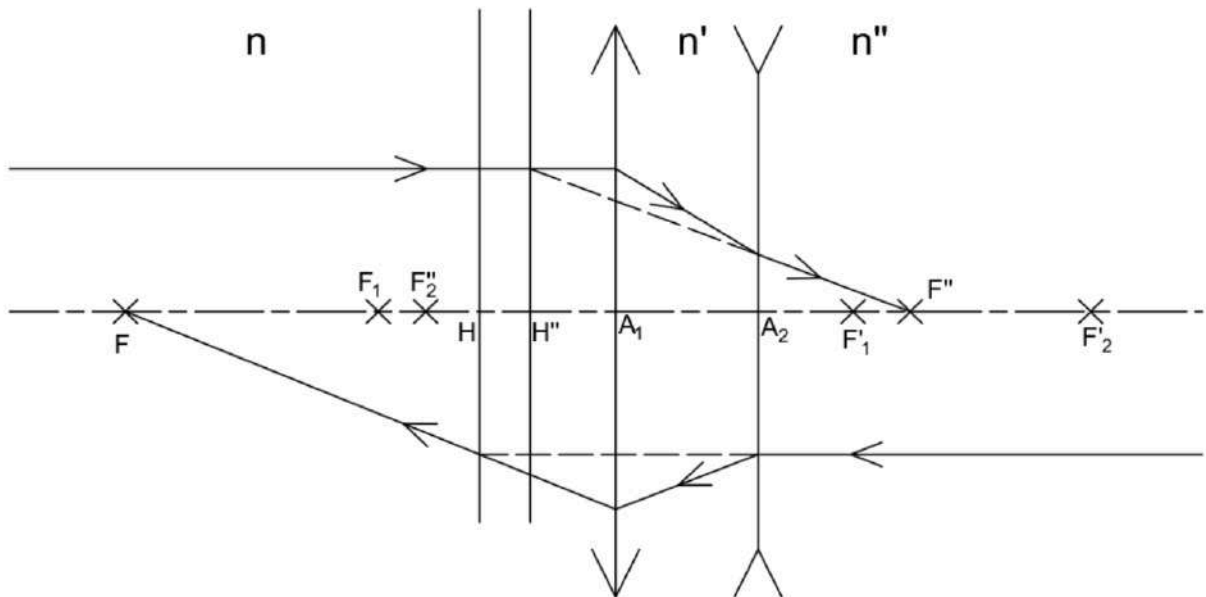
Cuando un rayo de luz interactúa con una lente gruesa, el mismo sufre dos refracciones, una en cada superficie. Por otro lado, cuando un rayo de luz interactúa con un par de lentes delgadas, también puede suponerse que el rayo sólo sufre dos desvíos, debido a que, dentro del modelo de las lentes delgadas, se considera que el rayo no se desarrolla dentro de la lente. Esto implica que una combinación de dos lentes delgadas puede también trabajarse con los métodos empleados con lentes gruesas.

En este sentido, se puede afirmar, con mayor generalidad, que las propiedades ópticas de un par de lentes delgadas coaxiales pueden modelarse a partir de sólo dos focos y dos puntos principales, tal como se hizo con las lentes gruesas.

La determinación de los focos y puntos principales de una combinación de lentes delgadas se realiza empleando un procedimiento similar al tratado en el [Capítulo 1](#), con la salvedad de que en este caso, la posición de los focos de cada lente delgada se determina a partir de la [expresión 0.3](#).

El trazado de rayos para determinar los focos y puntos principales se realizan siguiendo el procedimiento explicado en la [sección 1.1.1](#), mientras que las expresiones [1.10](#), [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#) se pueden emplear para determinar analíticamente la potencia y la posición de los puntos principales del sistema, atendiendo a las siguientes salvedades a la hora de interpretar los términos empleados, a saber:

- Los índices de refracción de cada una de las lentes se notan  $n_{v1}$  y  $n_{v2}$ , mientras que el índice de refracción del medio que se encuentra entre las lentes, se nota  $n'$  (ver [Figura 2.1](#)).
- El índice de refracción del medio del que provienen los rayos se sigue representando como  $n$  y el índice de refracción en donde terminan los rayos se representa ( $n''$ ), tal como cuando se trabajaba con lentes gruesas.
- $A_1$  representa la posición de la primera lente delgada  $LD_1$ , mientras que  $A_2$  representa la posición de la segunda lente delgada  $LD_2$ .
- $f_1$  y  $f'_1$  son las distancias focales de  $LD_1$ , y  $f'_2$  y  $f''_2$  son las distancias focales correspondientes a  $LD_2$ , ambas determinadas por las Ecs. [0.3](#), [0.5](#) y [0.6](#).
- $d$  representa la separación entre lentes.



**Figura 2.1:** Una combinación de lentes delgadas también puede modelarse a partir de un par de planos principales y sus respectivos focos. El procedimiento para determinar gráficamente la ubicación de tales planos y focos es conceptualmente idéntico al empleado para determinar la ubicación de los focos puntos principales de una lente gruesa.

Una vez determinada la posición de los focos y puntos principales, la determinación de imágenes se realiza directamente sobre el sistema modelado, tal como se explicó en la [sección 1.1.3](#).

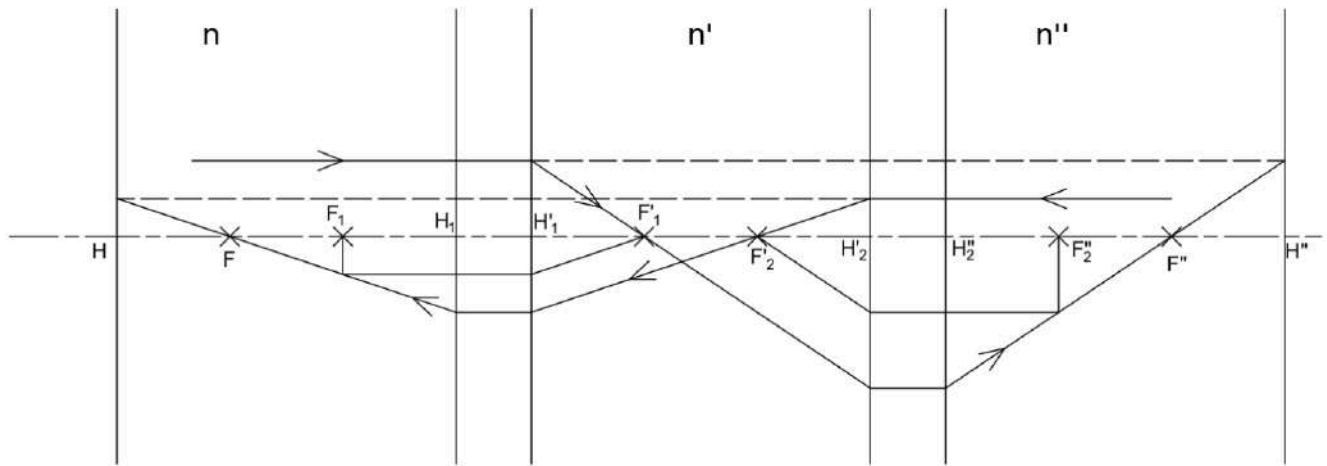
## 2.2. Combinación de Lentes Gruesas

Cuando se tiene una combinación de dos lentes gruesas, no se puede considerar que el rayo sólo sufre dos desvíos, ya que en este caso, el rayo tiene un desarrollo dentro de cada lente. Esto implica que el rayo sufre cuatro desvíos. Por lo tanto, para poder determinar la posición de los focos y puntos



principales de una combinación de lentes gruesas, primero deben determinarse los focos y puntos principales de cada lente, empleando las expresiones [1.10](#), [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#). Una vez modelada cada lente gruesa, se tiene un sistema efectivo en el que se puede trabajar suponiendo que los rayos que ingresan “sólo” sufre dos desvíos, permitiendo aplicar los resultados del [Capítulo 1](#).

En la [Figura 2.2](#) se muestra una combinación de dos lentes gruesas  $LG_1$  y  $LG_2$ , cada una de las cuales se encuentra ya modelada con sus respectivos focos y puntos principales.



**Figura 2.2:** Si se tiene un par de sistemas que ya han sido modelados a partir de sus respectivos focos y puntos principales, se pueden aplicar los métodos ya conocidos para determinar los focos y puntos principales del sistema compuesto.

La determinación gráfica de los focos y puntos principales se realiza siguiendo un método análogo al empleado con lentes gruesas, es decir, se parte de un rayo que incide paralelo al eje y se sigue su recorrido hasta que el mismo emerge del sistema. De esta manera, la intersección del rayo entrante con el saliente, determinan la posición del plano principal, mientras que la intersección del rayo saliente con el eje óptico determina la posición del foco imagen del sistema.

Inversamente, si se parte de un rayo que emerge paralelo al eje óptico y se sigue su marcha “hacia atrás”, se puede determinar la posición del plano principal objeto a partir de la intersección de los rayos salientes y entrantes así trazados, mientras que la intersección del rayo entrante con el eje óptico determina la posición del foco objeto del sistema. De esta manera, el sistema total queda reducido a un único par de focos y puntos principales.

La determinación analítica de la potencia del sistema se realiza también empleando la [Ec. 1.10](#), teniendo en cuenta las siguientes salvedades:

- $P_1$  y  $P_2$  son las potencias de las lentes gruesas  $LG_1$  y  $LG_2$ , construidas con materiales de índice de refracción  $n_{v1}$  y  $n_{v2}$ , respectivamente.
- El índice de refracción del medio que se encuentra entre las lentes se nota como  $n'$ .
- El índice de refracción del medio del que provienen los rayos se sigue representando como  $n$  y el índice de refracción en donde terminan los rayos se representa ( $n''$ ), tal como cuando se trabajaba con lentes gruesas.
- $f_1$  y  $f'_1$  son las distancias focales de  $LG_1$ , y  $f'_2$  y  $f''_2$  son las distancias focales correspondientes a  $LG_2$ , ambas determinadas por las Ecs. [1.10](#), [0.5](#) y [0.6](#), o bien empleando las Ecs. [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#).
- $d$  representa la separación entre los modelos, es decir es la distancia entre el punto principal imagen de la primera lente  $H'_1$  y el punto principal objeto de la segunda lente  $H''_2$ , independientemente que dichos puntos sean contiguos o no. Dicho en símbolos  $d = \overline{H'_1 H''_2}$ .

A su vez, la determinación analítica de los puntos principales se realiza a partir de los puntos en los que inician y terminan los modelos. En este sentido, se considera el inicio del sistema como el punto principal objeto de la primera lente  $H_1$ , y el final del sistema como el punto principal imagen de la segunda lente  $H''_2$ . Es importante remarcar que esto es independientemente de que el  $H_1$  y  $H''_2$  sean efectivamente los puntos más a la izquierda y más a la derecha del sistema, respectivamente.

Se puede demostrar, a partir del análisis de semejanza de los triángulos que aparecen en la [Figura 2.2](#), que la posición de los puntos principales del sistema combinado se puede calcular como:

$$\overline{H_1 H} = f \frac{d}{f'_2} \quad (2.1)$$

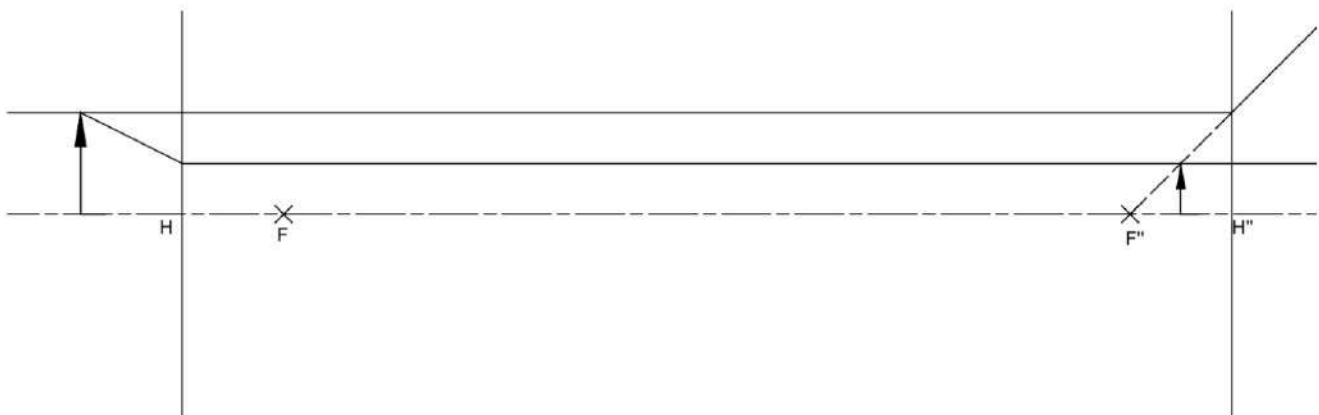
$$\overline{H''_2 H''} = - f'' \frac{d}{f'_1} \quad (2.2)$$

Una vez modelado el sistema, la determinación de imágenes, se puede hacer analítica o gráficamente con los métodos explicados en el [Capítulo 1](#). En la [Figura 2.3](#) se muestra el trazado de un objeto extenso para el sistema mostrado en la [Figura 2.2](#).



Cabe mencionar que en el ejemplo mostrado, la imagen resultante es real y directa, pese a haber sido hallada por la prolongación de rayos hacia atrás de los rayos emergentes. Para no cometer errores en la determinación de la naturaleza de la imagen en los sistemas compuestos, debe analizarse cómo va resultando la misma, lente por lente. Un criterio que puede utilizarse es el de observar si la imagen resultante queda dentro o fuera del sistema óptico real, ya que si la imagen queda dentro del mismo, ésta siempre va a ser virtual. Es por esto que es una buena práctica marcar siempre en el eje óptico la posición de los vértices físicos de las lentes gruesas y la ubicación de las lentes delgadas.

Un detalle importante que vale la pena destacar es que las expresiones [2.1](#) y [2.2](#), así como todo lo mencionado en esta sección, tiene como punto de partida la combinación de dos modelos. Por lo visto anteriormente, dicho modelo puede provenir de una lente gruesa, de una combinación de lentes delgadas, de una combinación de lentes gruesas y otros sistemas más complejos. De esta manera queda claro que cualquier sistema compuesto por un conjunto de lentes gruesas y delgadas, puede modelarse a partir de un único par de focos y puntos principales, por medio de la aplicación sucesiva de los métodos discutidos en este capítulo.



**Figura 2.3:** Una vez modelado el sistema compuesto, los métodos analíticos y gráficos ya conocidos para encontrar imágenes a partir de los puntos principales se pueden aplicar sin problema. Es importante notar, sin embargo, que el hecho de que una imagen sea real o virtual en el sistema modelado, no implica necesariamente que la imagen que produzca el sistema real vaya a tener la misma naturaleza.

A su vez, una vez determinados los focos y puntos principales de un sistema cualquiera, se puede trabajar sobre el modelo final para obtener los puntos nodales del conjunto, siguiendo los métodos explicados en la [Sección 1.2](#).

### 2.3. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
Posición de los planos principales de una lente gruesa que proviene de una combinación de lentes	$\overline{H_1 H} = f \frac{d}{f_2}$	<u>(2.1)</u>
	$\overline{H''_2 H''} = -f'' \frac{d}{f_1}$	<u>(2.2)</u>



## 2.4. Cuestiones

- 2.4.1. Analice la necesidad de cumplir la aproximación de rayos paraxiales para emplear las expresiones 1.10, 2.1 y 2.2 para determinar los puntos principales de una combinación de lentes gruesas.
- 2.4.2. Se cuentan con dos lentes delgadas positivas sumergidas en aire, con distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente. Deducir la relación que debe existir entre las distancias focales de las mismas y su separación para que el sistema sea:
- convergente;
  - divergente;
  - afocal ( $f = \infty$ ).
- 2.4.3. ¿Es posible, a partir de la combinación de dos lentes divergentes, obtener un sistema afocal ( $f = \infty$ )? En caso afirmativo, determine qué condición debe cumplirse, en caso negativo justifique.
- 2.4.4. ¿Es posible, a partir de la combinación de dos lentes divergentes, obtener un sistema convergente? En caso afirmativo, determine qué condición debe cumplirse, en caso negativo justifique.

### 2.5. Ejercicios

2.5.1. Dados las siguientes combinaciones de lentes delgadas, determine, de forma analítica y gráfica:

- Potencia y distancia focal del sistema.
  - Distancia de los centros de las lentes a los focos y puntos principales.
- A.  $f_{LD1} = 10 \text{ cm}; f_{LD2} = 10 \text{ cm}; d = 4 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- B.  $f_{LD1} = 10 \text{ cm}; f_{LD2} = -10 \text{ cm}; d = 5 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- C.  $f_{LD1} = -10 \text{ cm}; f_{LD2} = 10 \text{ cm}; d = 5 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- D.  $f_{LD1} = -10 \text{ cm}; f_{LD2} = -20 \text{ cm}; d = 5 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- E.  $LD_1(\text{equiconvexa}): |R| = 4 \text{ cm}; n_{v1} = 1,5;$

$LD_2(\text{equicóncava}): |R| = 6 \text{ cm}; n_{v2} = 1,6$

$$n = n'' = 1; n' = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

#### Respuestas:

- A. a.  $P = 17.33 \text{ Dp}; f = 5.77 \text{ cm}$   
b.  $\overline{A_1H} = 1.54 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -1.54 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -4.23 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 4.23 \text{ cm};$
- B. a.  $P = 3.33 \text{ Dp}; f = 30 \text{ cm}$   
b.  $\overline{A_1H} = -10 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -10 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -40 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 20 \text{ cm};$
- C. a.  $P = 3.33 \text{ Dp}; f = 30 \text{ cm}$   
b.  $\overline{A_1H} = 10 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = 10 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -20 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 40 \text{ cm};$
- D. a.  $P = -36.67 \text{ Dp}; f = -2.73 \text{ cm}$   
b.  $\overline{A_1H} = 1.82 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -0.91 \text{ cm}; \overline{A_1F} = 4.55 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = -3.64 \text{ cm};$
- E. a.  $P = 23.75 \text{ Dp}; f = 4.21 \text{ cm}$   
b.  $\overline{A_1H} = -3.16 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -3.95 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -7.37 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 0.26 \text{ cm};$

2.5.2. Se tiene una lente convergente de distancia focal de 10 cm, y se sabe que un objeto tiene su imagen a 30 cm de la misma. Por otro lado, si se le adosa dicha lente otra lente divergente de distancia focal desconocida, la imagen del mismo objeto se aleja 10 cm del sistema. Determine la distancia focal de la lente divergente.

**Respuestas:**  $P = -0.8333 \text{ Dp}$



- 2.5.3. Se tiene una lente divergente con  $|f| = 5\text{ cm}$ , y se sabe que la misma forma una imagen virtual de un objeto dado, y que dicha imagen se encuentra a 4 cm de la lente. Por otro lado, si se le adosa dicha lente una lente convergente de distancia focal desconocida, la imagen del mismo objeto sigue siendo virtual, pero se encuentra a  $20/3$  cm del sistema. Determine la distancia focal de la lente convergente.

**Respuestas:**  $P = 10\text{ Dp}$

- 2.5.4. Se tiene una lente delgada de distancia focal  $f_1 = 10\text{ cm}$  y otra lente de distancia focal  $f_2 = 20\text{ cm}$ . Determine la separación que debe haber entre las mismas para que la imagen de un objeto que se encuentra en el infinito, también se forme en el infinito (del espacio imagen). Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**  $d = 30\text{ cm}$

- 2.5.5. Se tienen dos lentes gruesas como las del ejercicio 1.5.1 del Capítulo 1 sumergidas en aire. La distancia entre el vértice final de la primera lente y el vértice inicial de la segunda lente es de 7,5 cm.
- Determine la posición de los focos y puntos principales del sistema, analítica y gráficamente.
  - Si se tiene un objeto extenso de altura 1 cm ubicado a 10 cm del primer vértice de la primera lente gruesa, determine analítica y gráficamente la posición, tamaño y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**

**a.**  $P = -38.40\text{ Dp}$ ;  $f = -2.60\text{ cm}$ ;  $\overline{H_1H} = -8.33\text{ cm}$ ;  $\overline{H''_2H''} = 8.33\text{ cm}$ ;

**b.**  $s'' = -1.377\text{ cm}$ ;  $m = 0.471$ ;

- 2.5.6. Se tienen dos lentes plano-convexas idénticas en oposición, de modo que sus caras planas se encuentran enfrentadas. El radio de curvatura de las caras curvas es de 10 cm y el material del que están hechas las lentes tiene un índice de refracción 1,5. Las lentes se encuentran separadas 80 cm y todo el sistema se encuentra sumergido en aire.
- Determine la posición de los focos y puntos principales del sistema, analítica y gráficamente.
  - Si se tiene un objeto puntual ubicado a 20 cm del primer vértice de la primera lente gruesa, determine analítica y gráficamente la posición, tamaño y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**

a.  $P = -13.33 \text{ Dp}$ ;  $f = -7.5 \text{ cm}$ ;  $\overline{H_1 H} = -35 \text{ cm}$ ;  $\overline{H''_2 H''} = 35 \text{ cm}$ ;

b.  $s'' = -15 \text{ cm}$ ;  $m = -1$ ;

2.5.7. Se tiene un sistema conformado por dos lentes delgadas y una lente gruesa. La primera lente es delgada y tiene una potencia de  $-10 \text{ Dp}$ . A  $5 \text{ cm}$  de esta lente se encuentra la segunda, que también es delgada pero tiene una potencia de  $-5 \text{ Dp}$ . A  $6,5 \text{ cm}$  de la segunda lente se encuentra una lente gruesa con  $R_1 = 3 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 5 \text{ cm}$ ,  $n_{v3} = 1.5 \text{ cm}$  y espesor de  $3 \text{ cm}$ .

a. Determine la posición de los focos y puntos principales del sistema, analítica y gráficamente.

b. Si se tiene un objeto extenso de altura  $1 \text{ cm}$  ubicado a  $4 \text{ cm}$  de la primera lente, determine analítica y gráficamente la posición, tamaño y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**

a.  $P = 4.17 \text{ Dp}$ ;  $f = 24 \text{ cm}$ ;  $\overline{H_1 H} = 15.60 \text{ cm}$ ;  $\overline{H''_2 H''} = 26 \text{ cm}$ ;

b.  $s'' = 23.981 \text{ cm}$ ;  $m = 7.093$ ;

2.5.8. Se tiene un sistema constituido por tres lentes delgadas. La primera tiene una distancia focal de  $4 \text{ cm}$ , y la segunda, ubicada a  $6 \text{ cm}$  de la primera, una distancia focal de  $-8 \text{ cm}$ . La tercera lente tiene una distancia focal desconocida, y se encuentra a  $1,4 \text{ cm}$  de la segunda lente. Determine cuál debe ser la distancia focal de la tercera lente, de modo tal que el sistema sea afocal ( $f = \infty$ ).

**Respuesta:**  $P = 33.333 \text{ Dp}$



## Capítulo 3: Espejos Gruesos

El término espejo grueso se usa para referirse a un sistema óptico que consiste en una combinación de lentes con una superficie reflectante al final. Este tipo de sistemas tiene la característica distintiva de que el rayo final siempre emerge por el mismo medio que ingresó (esto es lo que distingue a los espejos de las lentes). En este capítulo estudiaremos los casos más comunes de espejo grueso, que se ejemplifican en la [Figura 3.1](#), y son:

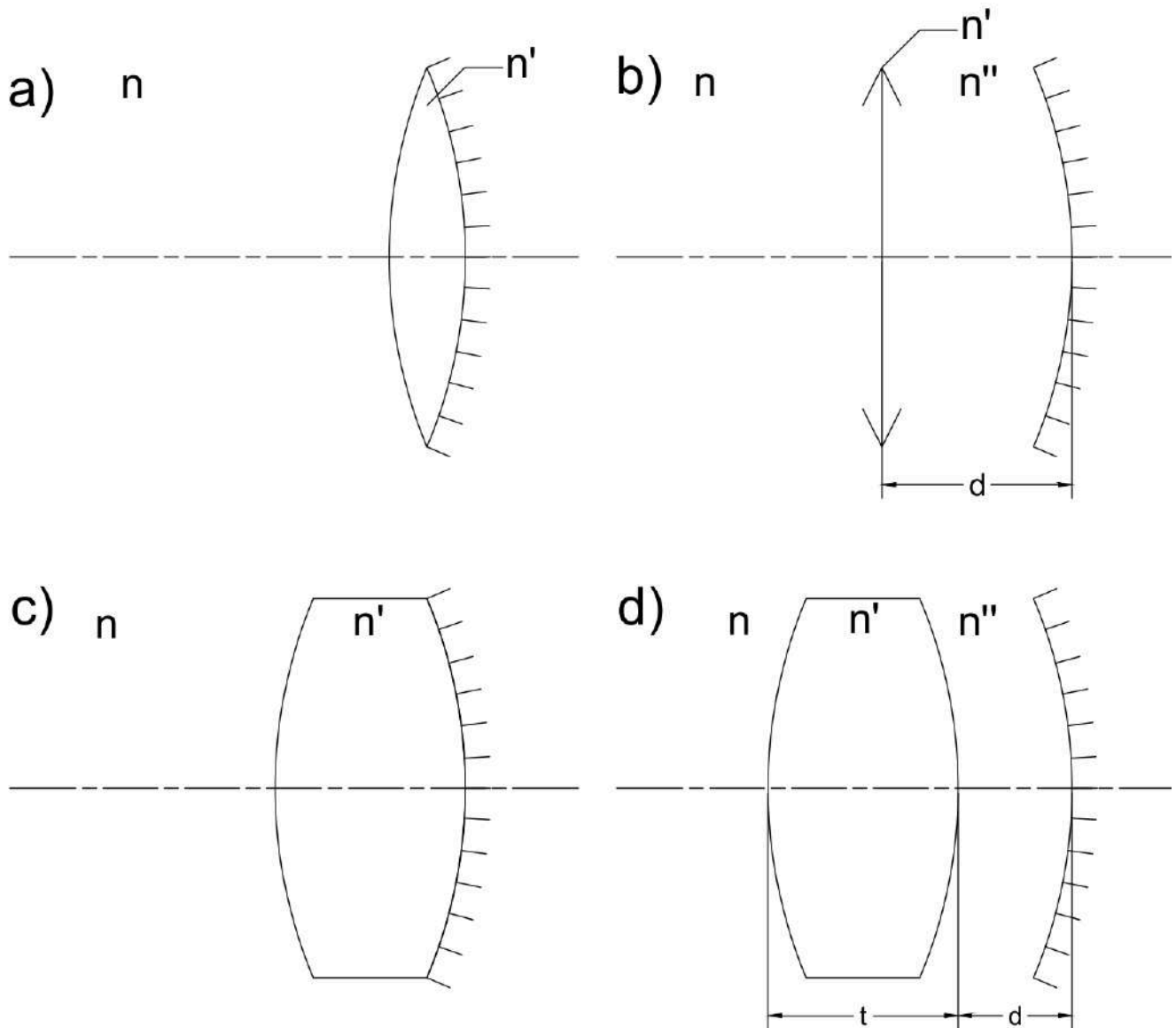
- I. Una lente delgada con una superficie plateada;
- II. Una lente delgada separada de un espejo simple;
- III. Una lente gruesa con una superficie plateada;
- IV. Una lente gruesa separada de un espejo simple.

Una característica que los sistemas mostrados tienen en común, es que en todos ellos el rayo de luz cuenta con una única reflexión. En los casos I, II y III se tiene que el rayo que incide sufre su reflexión entre dos refracciones que se dan en la primera superficie de la lente. En el caso IV, el rayo de luz sufre dos refracciones en la lente gruesa, luego es reflejado en el espejo simple, y después de esto sufre dos refracciones más en cada una de las caras de la lente gruesa.

En este capítulo se verá que cualquier sistema de estas características va a contar con un punto y plano focal, así como un punto y plano principal. De esta manera, y usando métodos parecidos a los discutidos en los Capítulos [1](#) y [2](#), se podrá emplear el conjunto foco y plano principal para modelar a cualquier espejo grueso, de modo tal de poder construir imágenes que sean idénticas a las que produciría el sistema más complejo, pero con un trazado de rayos y cálculos matemáticos más sencillos.

En primer lugar se tratará el problema de encontrar expresiones que permitan determinar la posición del plano principal y foco de un espejo grueso que consista en la combinación de una lente delgada separada de un espejo simple (Caso II), que es el caso más sencillo de tratar. Posteriormente, se demostrará que las expresiones obtenidas para ese caso pueden aplicarse, con modificaciones menores, para el caso III, es decir, una lente gruesa con una cara espejada. Finalmente, se determinará la expresión más general posible, que es la del caso IV. Se verá, a su vez, que el caso I puede obtenerse como caso límite de cualquiera de las expresiones obtenidas para los casos II, III y IV.

Una vez determinadas todas las expresiones analíticas, se tratará el problema de determinar la ubicación del foco y punto principal de un espejo grueso para los cuatro casos planteados por el método gráfico. Finalmente, se explicará cómo determinar las imágenes formadas por un espejo grueso a partir del sistema modelo, empleando los métodos analíticos y gráficos.



**Figura 3.1:** Un espejo grueso es un sistema óptico que consiste en una lente o combinación de lentes y una superficie reflectante. En este capítulo trataremos los casos más comunes de espejos gruesos que son: a) Una lente delgada con una superficie plateada; b) Una lente delgada y un espejo simple; c) Una lente gruesa con una superficie plateada; d) Una lente gruesa con un espejo simple.

### 3.1. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Delgada separada de un Espejo Simple

Para determinar la posición del foco y punto principal de este sistema se empleará el mismo método que en el [Capítulo 1](#), es decir, se supondrá que hay un objeto  $M_1$  que se encuentra en el infinito ( $s_{M_1} = \infty$ ) y se encontrará la posición de su imagen, que por definición debe ser el foco del sistema. En la [Figura 3.2](#) se muestra la marcha del rayo que proviene desde  $M_1$  y que luego de **dos** refracciones y **una** reflexión corta al eje en el foco del espejo. A su vez, la intersección del rayo que ingresa con el rayo que egresa



$$-\frac{1}{f''_1-d} + \frac{1}{s_2+d} = P_2 \quad (3.1)$$

donde  $P_2$  es la potencia del espejo simple, dada por la [Ec. 0.4](#), y las distancias objeto e imagen se han obtenido de la [Figura 3.2](#). La distancia focal imagen de la lente delgada  $f''_1$  se considera dato, o puede obtenerse a partir de la [Ec. 0.3](#).

Finalmente, la imagen  $M''_2$  pasa a ser el objeto  $M_3$  de la segunda refracción que ocurre en la lente delgada, cuya imagen será  $M''_3$ , que estará ubicada en el foco del sistema óptico. Aplicando la [Ec. de Gauss](#) para la lente delgada se obtiene que

$$-\frac{1}{s_2} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.2)$$

siendo  $P_1$  la potencia de la lente delgada, dada por la [Ec. 0.3](#).

El objetivo de la primera parte de la demostración será poder escribir la distancia focal del espejo grueso, el segmento  $\overline{FH}$ , en función de las magnitudes constructivas del sistema, es decir,  $P_1$ ,  $P_2$ , y  $d$ . Nótese que de momento sólo se dispone de  $\overline{FH_1}$  en función de potencia de la lente  $P_1$  y de la cantidad  $s_2$ , cuyo valor depende de la altura del rayo particular que haya trazado en esta construcción. De esto se concluye que para poder avanzar es preciso eliminar el término  $s_2$  de las Ecs. [3.1](#) y [3.2](#). Para lograr esto, primero se despeja  $s_2$  de la [Ec. 3.1](#):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f''_1-d} + \frac{1}{s_2+d} &= P_2 \\ \frac{1}{s_2+d} &= P_2 + \frac{1}{f''_1-d} = P_2 + \frac{1}{\frac{1}{P_1}-d} \\ \frac{1}{s_2+d} &= P_2 + \frac{P_1}{1-d \cdot P_1} \\ \frac{1}{s_2+d} &= \frac{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2}{1-d \cdot P_1} \end{aligned} \quad (3.3)$$



Tomando el recíproco a ambos miembros es posible completar el despeje de  $s_2$ :

$$s_2 + d = \frac{1-d \cdot P_1}{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2}$$

$$s_2 = \frac{1-d \cdot P_1}{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2} - d$$

$$s_2 = \frac{1-2 \cdot d \cdot P_1-d \cdot P_2+d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2} \quad (3.4)$$

El siguiente paso es utilizar el valor de  $s_2$  obtenido en la [Ec. 3.4](#) para reemplazarlo en la [Ec. 3.2](#), de modo de poder expresar  $\overline{FH_1}$  sólo como función de las potencias  $P_1$  y  $P_2$ , y de la distancia  $d$  entre la lente y el espejo:

$$\frac{1}{\overline{FH_1}} = P_1 + \frac{1}{s_2}$$

$$\frac{1}{\overline{FH_1}} = P_1 + \frac{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2}{1-2 \cdot d \cdot P_1-d \cdot P_2+d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}$$

Operando un poco se llega a la siguiente expresión intermedia:

$$\overline{FH_1} = \frac{1-2 \cdot d \cdot P_1-d \cdot P_2+d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{(1-d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2)} \quad (3.5)$$

En este punto, es conveniente detenerse a analizar qué es lo que se ha hecho hasta el momento. La [Ec. 3.5](#) es una expresión que permite ubicar el foco del espejo grueso respecto del punto donde ocurre la primer refracción ( $H_1$ ), y dicha magnitud se encuentra escrita en función de parámetros que sólo dependen del sistema óptico en cuestión, es decir, la potencia de la lente delgada  $P_1$ , la potencia del espejo simple  $P_2$  y la separación  $d$  entre ambos.

Es importante recordar que la distancia focal del sistema es el segmento  $\overline{FH}$ , y no el segmento  $\overline{FH_1}$  obtenido en la [Ecuación 3.5](#). Tampoco se ha determinado hasta el momento la ubicación del punto principal  $H$  del espejo grueso en función de los parámetros del sistema. Véase, no obstante, que es

posible encontrar la información faltante si se logra determinar el valor del segmento  $\overline{H_1H}$  en función de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $d$ . Para lograr tal fin es preciso volver a la [Figura 3.2](#) y buscar, a partir de triángulos semejantes, expresar, a través de identidades geométricas, la magnitud del segmento  $\overline{H_1H}$  en función de los valores de interés.

En primer lugar debe notarse que el triángulo  $\Delta(TRW)$  contiene la distancia buscada, ya que  $\overline{RW} = \overline{H_1H}$ , y que dicho triángulo es semejante al triángulo  $\Delta(TH_1F)$ , por lo que es válida la siguiente relación entre sus lados<sup>15</sup>:

$$\frac{\overline{TH_1}}{\overline{FH_1}} = \frac{\overline{TR}}{\overline{H_1H}} \quad (3.6)$$

Dado que las magnitudes  $\overline{TH_1}$  y  $\overline{TR}$  dependen del trazado de rayos que se realizó, no son función del sistema óptico, por lo que para completar la demostración es preciso eliminarlos de la [Ecuación 3.6](#), lo que implica que es necesario encontrar dos ecuaciones más.

La primera de tales ecuaciones se obtiene al observar que entre los triángulos  $\Delta(QH_E M_2)$  y  $\Delta(TH_1 M_2)$  también hay una relación de semejanza, por lo que:

$$\frac{\overline{QH_E}}{s_2+d} = \frac{\overline{TH_1}}{s_2} \quad (3.7)$$

La segunda de las ecuaciones deseadas se consigue al comparar los triángulos  $\Delta(RH_1 F'_1)$  y  $\Delta(QH_2 F_1)$ , que también son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\overline{TR} + \overline{TH_1}}{f'_1} = \frac{\overline{QH_E}}{f'_1 - d} \quad (3.8)$$

Con las Ecuaciones [3.6](#), [3.7](#) y [3.8](#) ya es posible obtener  $\overline{H_1H}$  en función de los parámetros del sistema, para lo cual primero se debe eliminar  $\overline{QH_E}$  de [3.7](#) y [3.8](#):

<sup>15</sup> Nótese que en realidad las figuras con las que se trabajan en esta parte de la demostración son triángulos en la medida en que las superficies refractantes y reflectantes puedan aproximarse por sus respectivos planos tangentes, es decir, que la expresión que se obtendrá será solamente válida dentro de la aproximación de rayos paraxiales. Vale la pena mencionar que en esta demostración, se ha suscrito a dicha aproximación en el momento en que se decidió emplear la Ec. de Gauss para encontrar la imagen de  $M$ .



$$\left(\overline{TR} + \overline{TH}_1\right) \cdot \frac{f'_1 - d}{f'_1} = \frac{s_2 + d}{s_2} \cdot \overline{TH}_1, \quad (3.9)$$

para luego utilizar la [Ec. 3.6](#) para eliminar  $\overline{TR}$  de la [Ec. 3.9](#):

$$\left(\frac{\overline{H}_1\overline{H}}{\overline{FH}_1} \cdot \overline{TH}_1 + \overline{TH}_1\right) \cdot \frac{f'_1 - d}{f'_1} = \frac{s_2 + d}{s_2} \cdot \overline{TH}_1. \quad (3.10)$$

A continuación se debe despejar  $\overline{H}_1\overline{H}$  de la [Ec. \(3.10\)](#):

$$\overline{H}_1\overline{H} = \left(\frac{s_2 + d}{s_2} \cdot \frac{1}{1 - d \cdot P_1}\right) \cdot \overline{FH}_1 \quad (3.11)$$

El paso final para obtener  $\overline{H}_1\overline{H}$  en función de los parámetros del sistema es reemplazar los valores a la derecha de la [igualdad 3.11](#) por las expresiones conocidas [3.3](#), [3.4](#) y [3.5](#). Luego de operar y simplificar, obtendremos la primera de las expresiones buscadas:

$$\overline{H}_1\overline{H} = \frac{d}{1 - d \cdot P_1}, \quad (3.12)$$

que permite a su vez determinar la distancia focal y potencia del espejo grueso:

$$f = \overline{FH} = \overline{FH}_1 + \overline{H}_1\overline{H} = \frac{1 - 2 \cdot d \cdot P_1 - d \cdot P_2 + d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{(1 - d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - d \cdot P_1 \cdot P_2)} + \frac{d}{1 - d \cdot P_1}$$

$$f = \frac{1}{(1 - d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - d \cdot P_1 \cdot P_2)}$$

$$P = (1 - d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - d \cdot P_1 \cdot P_2) \quad (3.13)$$

que es la otra expresión buscada.

Nótese que la posición del punto principal de un espejo grueso no depende de la potencia del espejo o superficie plateada del sistema, y que dicha posición está determinada solamente por la potencia de la lente delgada y la separación entre la lente y el espejo.





Puede verse que el recorrido del rayo es muy similar al de la [Figura 3.2](#). Si se plantean las ecuaciones de Gauss sucesivamente para un objeto  $M_1$  que se encuentra en infinito ( $s_{M_1} = \infty$ ), se obtienen expresiones que guardan cierta similitud con las Ecs. [3.1](#) y [3.2](#):

$$-\frac{n'}{f''_1 - d} + \frac{n'}{s_2 + d} = P_2 \quad (3.14)$$

$$-\frac{n'}{s_2} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.15)$$

siendo en este caso  $P_2$  la potencia de la cara espejada, dada por la [Ec. 0.4](#), y  $P_1$  la potencia de la dioptra, dada por la [Ec. 0.2](#). Operando con las Ecs. [3.14](#) y [3.15](#) es posible escribirlas de una manera interesante:

$$-\frac{1}{\frac{f''_1 - d}{n'} - \frac{d}{n'}} + \frac{1}{\frac{s_2}{n'} + \frac{d}{n'}} = P_2 \quad (3.16)$$

$$-\frac{1}{\frac{s_2}{n'}} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.17)$$

Es interesante observar que si se hacen las sustituciones  $s^*_2 = \frac{s_2}{n'}$ ,  $C = \frac{d}{n'}$  y  $P_1 = \frac{n'}{f'_1}$  las Ecs. [3.16](#) y [3.17](#) se escriben como:

$$-\frac{1}{\frac{1}{P_1} - C} + \frac{1}{s^*_2 + C} = P_2 \quad (3.18)$$

$$-\frac{1}{s^*_2} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.19)$$

que son expresiones idénticas a las Ecs. [3.1](#) y [3.2](#). Adicionalmente, la relación que hay entre los triángulos de la [Figura 3.2](#) es la misma que la que existe para los triángulos del mismo nombre de la [Figura 3.3](#), respetando las sustituciones hechas más arriba. Esto significa que los pasos para encontrar la ubicación del plano principal y la potencia de un espejo grueso formado por una lente gruesa con una cara espejada son los mismos que los hechos en la [Sección 3.2](#), mientras se respeten las equivalencias hechas al escribir las Ecs. [3.18](#) y [3.19](#). Podemos concluir entonces que la ubicación del plano principal y la potencia de un espejo grueso formado por una lente gruesa con una cara espejada son:

$$\overline{H_1 H} = \frac{C}{1 - C \cdot P_1} \quad \text{con } C = \frac{d}{n'}, \quad (3.20)$$

y

$$P = (1 - C \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2) \quad \text{con } C = \frac{d}{n'} \quad (3.21)$$

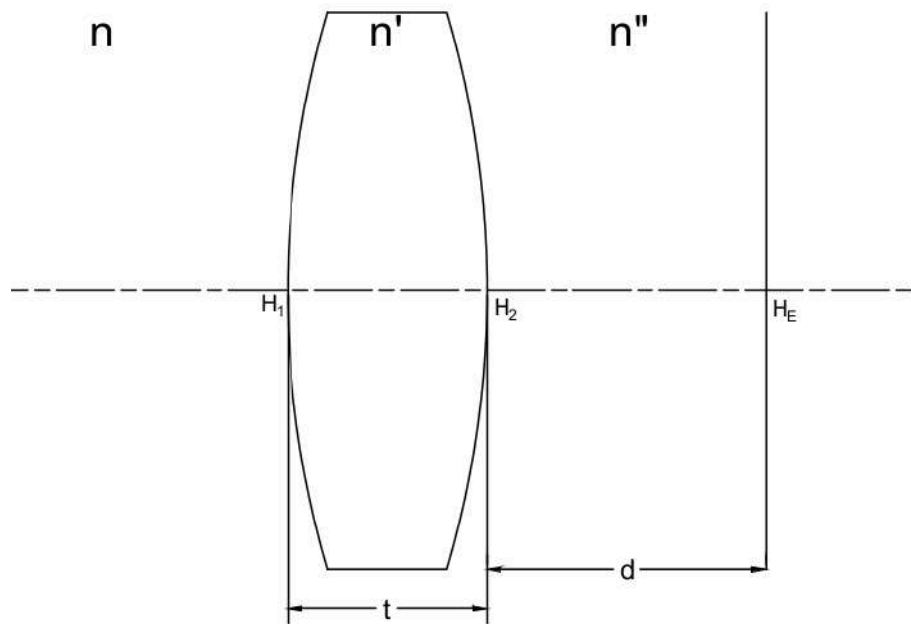
Por otro lado, vale la pena mencionar que como las expresiones [3.20](#) y [3.21](#) involucran las potencias de las componentes del espejo grueso, las mismas también se pueden aplicar a un sistema constituido por una lente delgada y un espejo simple, cuando entre la lente delgada y el espejo hay un medio de índice de refracción  $n'$ . Es más, puede verse que las ecuaciones [3.20](#) y [3.21](#) se reducen a las Ecs. [3.12](#) y [3.13](#) cuando se hace  $n' = 1$ .

Se deja como ejercicio para quien lee determinar cuál es la expresión que permite ubicar la posición del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente delgada con una cara espejada, para lo cual simplemente debe hacerse  $d = 0$  en las Ecs. [3.20](#) y [3.21](#).

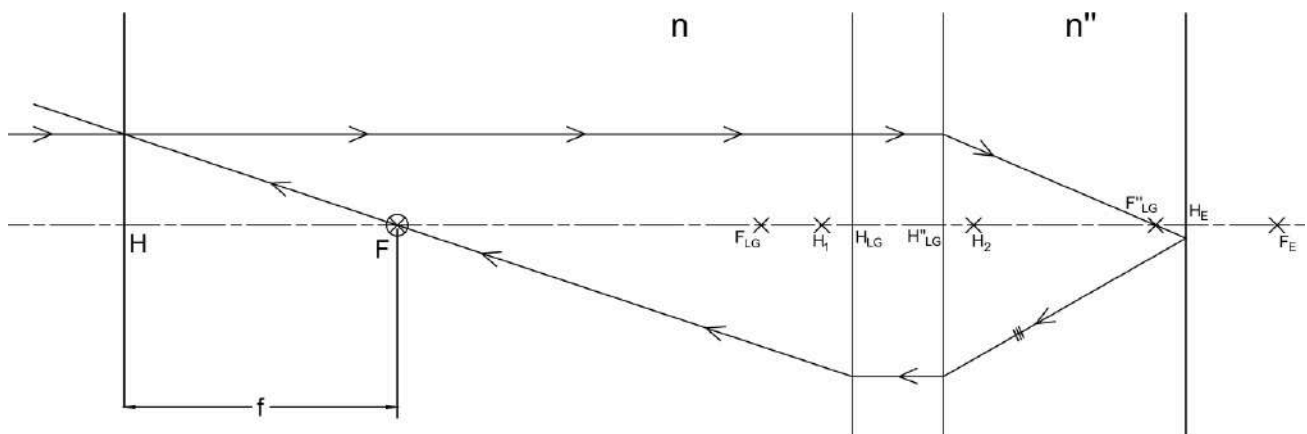
### 3.3. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa separada de un Espejo Simple

El caso más general de espejo grueso que puede obtenerse es el de una lente gruesa hecha de un material de índice de refracción  $n'$  y de espesor  $t$  que se encuentra separada a una distancia  $d$  de una superficie espejada, como se muestra en la [Figura 3.4](#).

Para trabajar con este sistema, primeramente debe reemplazarse la lente gruesa por sus respectivos focos y puntos principales, tal como se muestra en la [Figura 3.5](#). Una vez modelizada la lente gruesa se procede como en las secciones anteriores, siguiendo la marcha de un rayo que proviene de un objeto que se encuentra en infinito, realizando en el modelo de la lente gruesa el trazado de rayos explicado en la [Sección 1.1.3](#). Al igual que en las secciones anteriores, la intersección del rayo saliente con el entrante determinará la posición del plano principal, y la intersección del rayo saliente con el eje del sistema determinará la posición del foco.



**Figura 3.4:** El caso más general de espejo grueso que puede tenerse es el de una lente gruesa separada de un espejo simple. Para trabajar con tal sistema se debe, en primer lugar, reducir la lente gruesa a su correspondiente modelo empleando sus focos y puntos principales.



**Figura 3.5:** Una vez modelada la lente gruesa, la determinación del foco y punto principal de un espejo grueso se hace realizando el procedimiento empleado en los casos anteriores.

Aunque la demostración es un tanto más engorrosa que las anteriores, se puede demostrar que la posición del plano principal y la potencia de este sistema valen:

$$\overline{H_1 H} = \overline{H_1 H_{LG}} + \frac{C + C'}{1 - (C + C') \cdot P_{LG}}, \quad (3.22)$$

y

$$P = (1 - (C + C') \cdot P_{LG}) \cdot (2 \cdot P_{LG} + P_E - (C + C') \cdot P_{LG} \cdot P_E) \quad (3.23)$$

Los valores  $C$  y  $C'$  se calculan a partir de las siguientes expresiones:

$$C = \frac{d}{n''} \quad C' = \frac{\overline{H''_{LG} H_2}}{n''} \quad (3.24)$$

El resto de los términos de las Ecs [3.22](#) y [3.23](#) son los que corresponden a la [modelización de una lente gruesa](#), pero se incluyen aquí por completitud:

$$\overline{H_1 H_{LG}} = f_{LG} \frac{t}{f'_2} \quad \overline{H''_{LG} H_2} = f''_{LG} \frac{t}{f'_1} \quad (3.25)$$

$$P_{LG} = P_1 + P_2 - \frac{t}{n'} \cdot P_1 \cdot P_2 \quad P_E = -\frac{2 \cdot n'}{R_E} \quad (3.26)$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a la primera y segunda superficie de la lente gruesa, respectivamente, mientras que el subíndice E corresponde al espejo simple.

Un detalle importante, es que como las Ecs [3.22](#) y [3.23](#) emplean expresiones que corresponden al modelo de una lente gruesa, dichas fórmulas también se pueden usar en caso de que se tenga una combinación de lentes de cualquier tipo separada de un espejo, modificándose solamente las expresiones [3.24](#), [3.25](#) y [3.26](#) de acuerdo a la naturaleza de la combinación de lentes con la que se esté trabajando.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que las expresiones [3.22](#) y [3.23](#) se reducen a las expresiones [3.20](#) y [3.21](#) cuando la separación entre la lente gruesa y el espejo se hace nula, o cuando la lente gruesa se convierte en una lente delgada.

### 3.4. Métodos gráficos

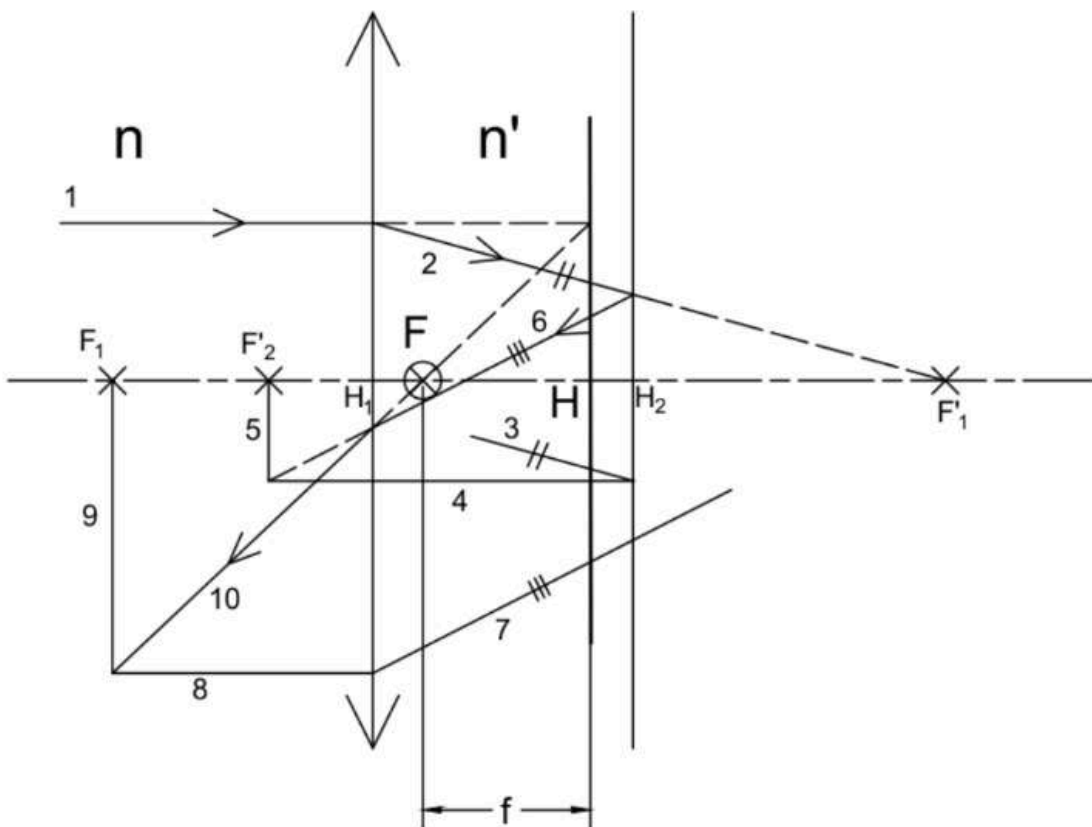
En esta sección se discuten más detalladamente los métodos gráficos que pueden emplearse para determinar la posición del foco y punto principal de un espejo grueso, en cada uno de los casos tratados en el capítulo. En esencia, todos involucran el seguimiento de la marcha de un rayo que ingresa



paralelamente al eje del sistema, de modo tal que la dirección de salida de dicho rayo permita definir la posición de los puntos cardinales del sistema.

### 3.4.1. Lente Delgada con un Espejo Simple

Cuando se tiene una lente delgada separada de un espejo simple, primero se deben ubicar los focos de cada uno de los elementos del sistema, como se muestra en la [Figura 3.6](#). Una vez hecho esto, se traza un rayo 1 que incide paralelo al eje del sistema. Dicho rayo, luego de pasar por la lente, será desviado hacia el foco  $F'_1$  de la misma (rayo 2). Como el rayo 2 no es de marcha conocida, se requiere emplear el método del rayo auxiliar explicado en la sección 0.3, que implica el trazado de los rayos 3 y 4. La intersección del rayo 4 con el plano focal del espejo (línea 5) determina la dirección de salida del rayo 6.

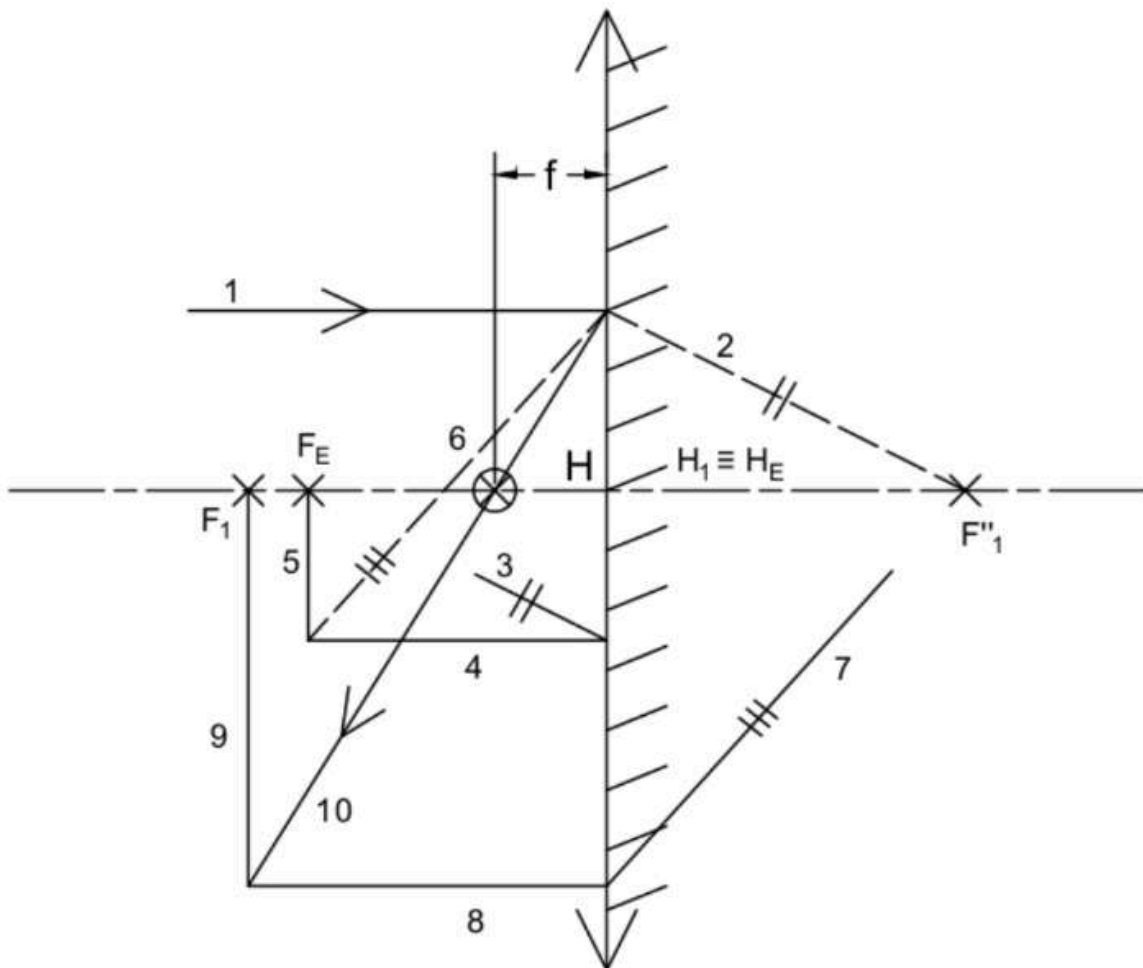


**Figura 3.6** La determinación gráfica del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente delgada separada de un espejo simple se hace siguiendo la marcha de un rayo que incide paralelo al eje, se desvía en la lente delgada, luego es reflejado en el espejo, para luego ser desviado nuevamente en la lente delgada. De los tres desvíos, los últimos dos deben determinarse empleando un rayo auxiliar.

Como el rayo 6 también incide de manera oblicua a la lente delgada, también debe emplearse el método del rayo auxiliar para determinar su dirección de salida. Esto se hace con los rayos 7 y 8, que junto con el plano focal indicado con la línea 9 determinan la dirección de salida del rayo 10.

Finalmente, para determinar la posición del plano principal del sistema, se deben prolongar el rayo incidente 1 y el rayo emergente 10 hasta que se intersequen, mientras que la intersección del rayo 10 con el eje óptico del sistema determinará la posición del foco del espejo grueso.

Un caso particular de una lente delgada con un espejo simple se da cuando el espejo se encuentra adosado a la lente, esto es, la distancia lente-espejo es nula, como se muestra en la [Figura 3.7](#). En este caso el procedimiento para determinar el foco y punto principal del sistema es idéntico al desarrollado anteriormente, con algunas salvedades.



**Figura 3.7** Cuando se tiene una lente delgada adosada a un espejo, el procedimiento para determinar gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema es idéntico al caso de la lente delgada separada del espejo. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que en este caso, el primer rayo desviado y el rayo reflejado carecen de espacio para desarrollarse, por lo que se deben trazar en su totalidad con líneas de prolongación.

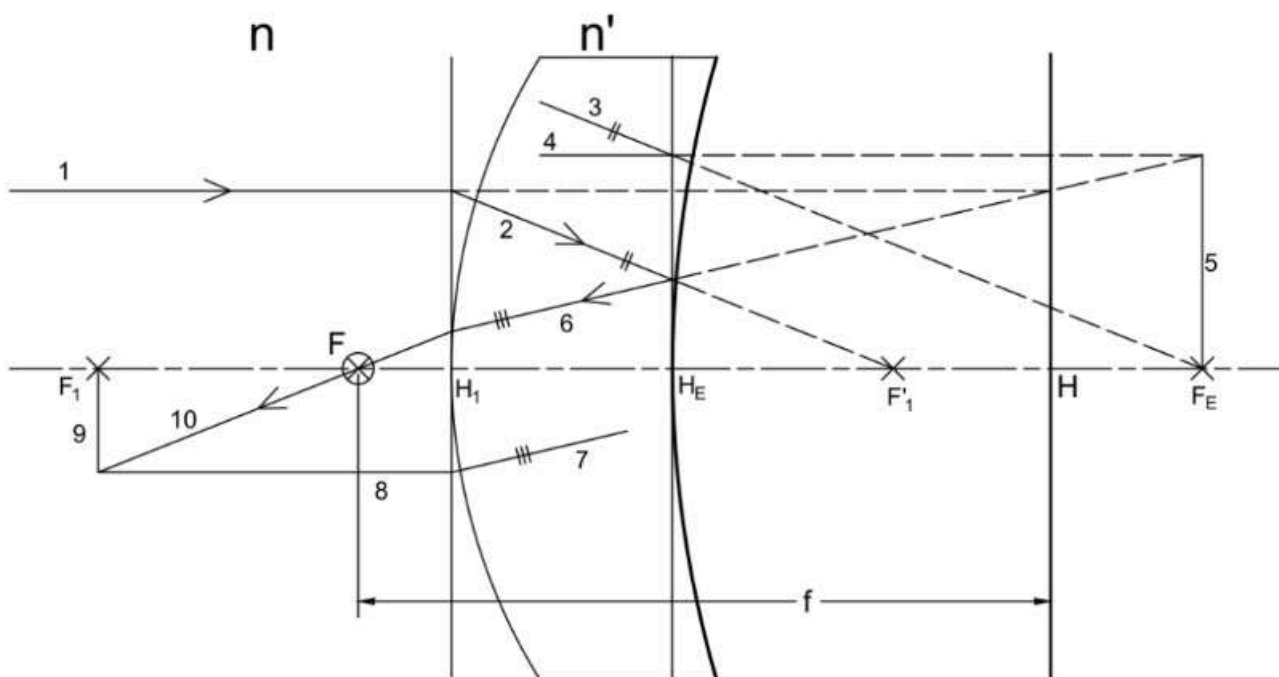


En primer lugar para ubicar el foco imagen de la lente delgada y del espejo plano debe suponerse que entre ambos existe una capa de espesor cero de un material con el mismo índice de refracción que el del material de donde provienen los rayos. En segundo lugar, y una vez ubicados todos los focos, debe realizarse el mismo procedimiento explicado anteriormente, sólo teniendo en cuenta que los rayos intermedios, rayos 2 y 6, no se desarrollan, por lo que se dibujan completamente con líneas de prolongación.

Un hecho notable de esta situación, es que debido a que los rayos 2 y 6 no se desarrollan el plano principal del espejo grueso siempre coincide con el punto donde se encuentra ubicada la lente delgada.

### 3.4.2. Lente Gruesa con una Superficie Plateada

El trazado de rayos para el caso de una lente gruesa con una superficie plateada es similar al tratado en la sección anterior, y se muestra en la [Figura 3.8](#).



**Figura 3.8** La determinación gráfica del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente gruesa con una superficie espejada se hace siguiendo la marcha de un rayo que incide paralelo al eje, se desvía en la primer dioptra, luego es reflejado en el espejo, para luego ser desviado nuevamente en la dioptra por la que ingresó el rayo. De los tres desvíos, los últimos dos deben determinarse empleando un rayo auxiliar.

La particularidad de este caso se encuentra en que como se cuenta con una lente gruesa, el medio del que provienen los rayos siempre va a ser diferente al medio en que se encuentra el espejo, por lo que debe tenerse en cuenta este hecho a la hora de ubicar el foco imagen de la primera superficie y del

espejo que se encuentra adosado a la lente. Por lo demás el trazado sigue los mismos pasos que los utilizados para encontrar el foco y punto principal de una lente delgada separada de un espejo.

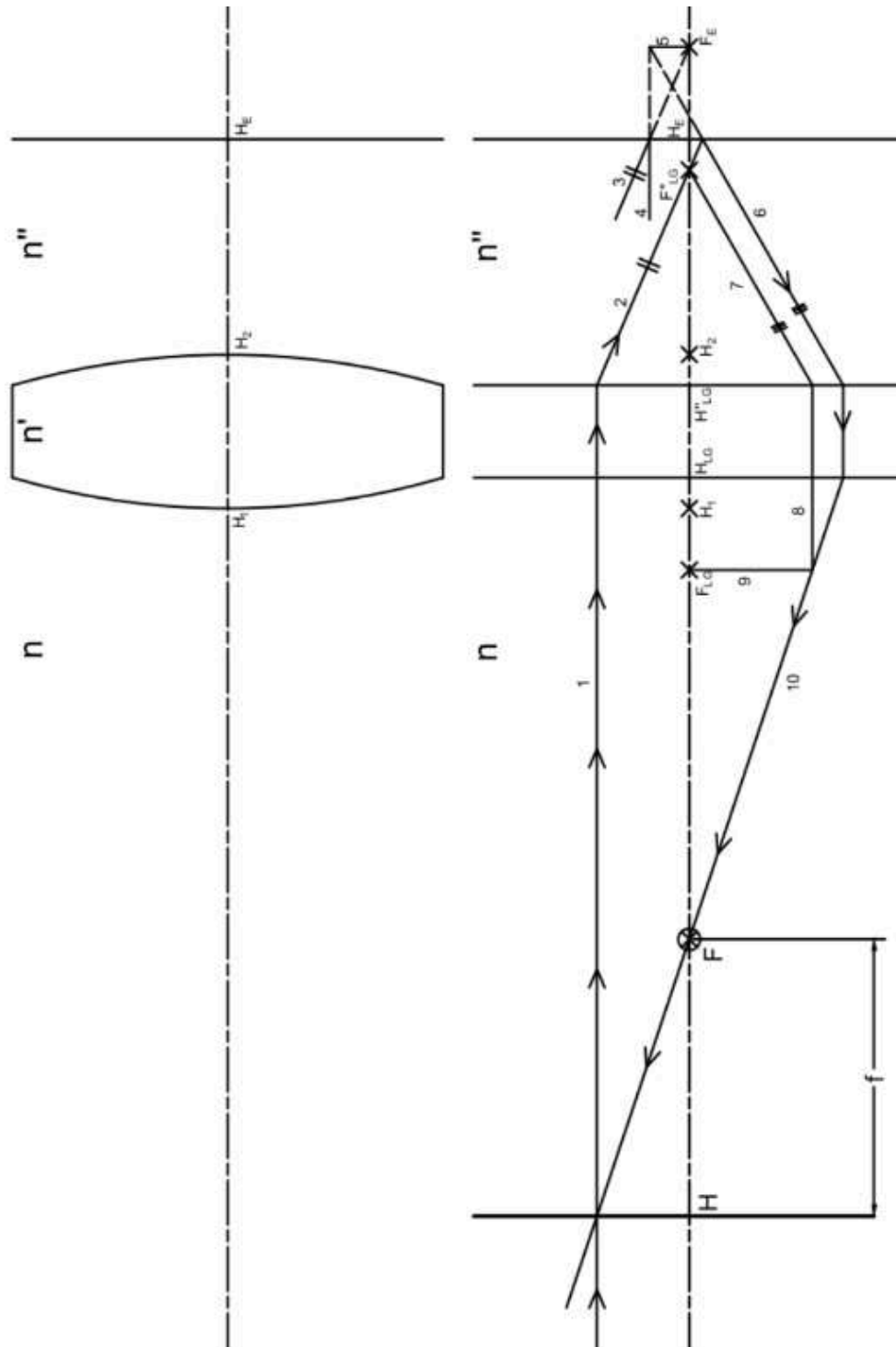
En caso de que una de las caras de la lente gruesa sea plana, para seguir la marcha de los rayos se debe emplear el método del rayo oblicuo con diagrama auxiliar, también detallado en la sección 0.3.

### 3.4.3. Lente Gruesa con un Espejo Simple

El caso de la determinación de la posición del foco y punto principal de una gruesa separada de un espejo simple, puede realizarse de dos maneras diferentes.

Una de ellas, que se encuentra ejemplificada en la [Figura 3.9](#) consiste en reemplazar la lente gruesa por el sistema modelado, empleando cualquiera de los métodos descritos en el [Capítulo 1](#). Una vez ubicados los puntos principales y focos de la lente gruesa se realiza un nuevo esquema con estos puntos, dejando como referencia la posición de los vértices de la lente.

El trazado inicia con el rayo 1, paralelo al eje del sistema, que luego de pasar por la lente se dirige hacia el foco del sistema modelo (rayo 2). Dicho rayo incide oblicuamente al espejo, por lo que para continuar su trazado debe aplicarse el método del rayo auxiliar en el espejo (rayos 3 y 4, y línea 5). De esta manera se conocerá la marcha del rayo reflejado (rayo 6), que también incide oblicuamente en el segundo plano principal de la lente gruesa. En esta situación se vuelve a emplear un rayo auxiliar 7 que determinará la salida del rayo 10, que a su vez permitirá ubicar al foco y punto principal del espejo grueso.

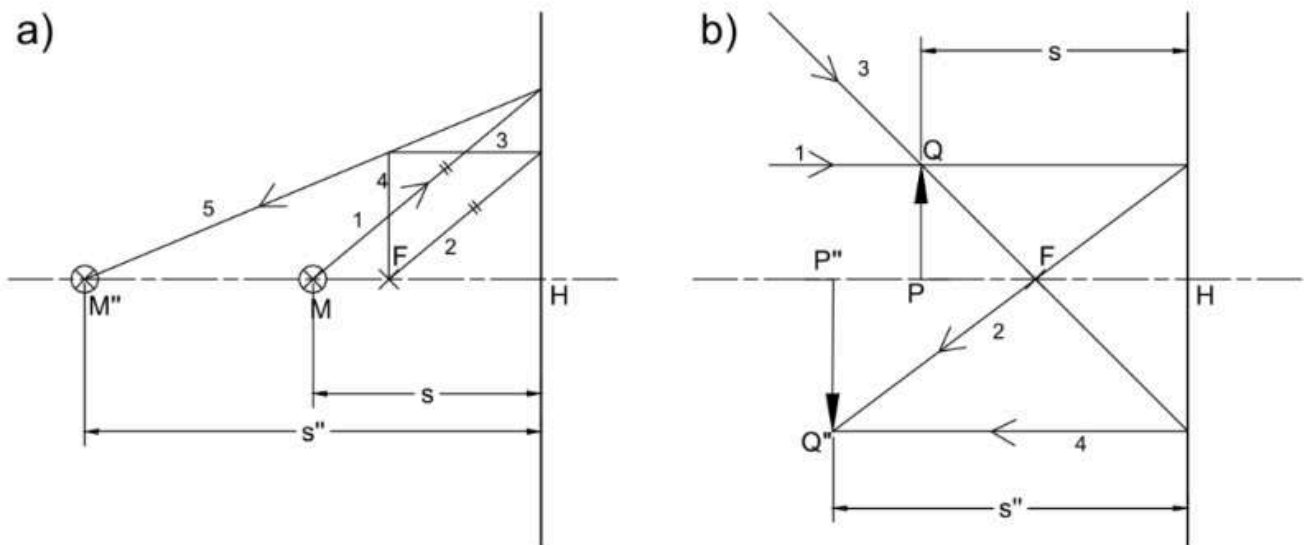


**Figura 3.9** La determinación gráfica del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente gruesa separada de un espejo simple puede realizarse de dos maneras: o bien se sigue la marcha de un rayo que incide paralelo al eje y es desviado cinco veces (dos veces en la primera superficie de la lente, dos en la segunda y una vez al reflejarse en el espejo), o bien a partir de modelar la lente gruesa, para luego seguir la marcha de un rayo que se desvía tres veces (dos veces en el sistema modelado y una vez al incidir sobre el espejo). En la figura se muestra el trazado que corresponde a realizar el segundo procedimiento, que requiere emplear dos rayos auxiliares, mientras que el primer método requiere emplear cuatro.

Una alternativa a este trazado es la de trabajar directamente con la lente física, lo que implica aplicar el método del rayo auxiliar en las dos caras de la lente y en el espejo.

### 3.5. Determinación de imágenes a partir de un sistema modelado

Una vez halladas la distancia focal y punto principal de un espejo grueso, la imagen de un objeto dado puede determinarse a posición y naturaleza de la imagen aplicando la [expresión de Gauss \(0.1\)](#), teniendo en cuenta que las distancias objeto e imagen se miden desde el punto principal del sistema, y que la distancia focal es la separación entre el foco y el punto principal.



**Figura 3.10** Una vez modelado un espejo grueso, la determinación gráfica de imágenes se hace igual que para el caso de un espejo simple, midiendo las distancias objeto e imagen a partir del plano principal del espejo. Debe tenerse siempre como referencia, sin embargo, la posición del punto donde efectivamente ocurre la primer refracción (punto  $H_1$ ), ya que, independientemente de lo que ocurra con los rayos en el sistema modelado, si la imagen se encuentra a la izquierda de  $H_1$ , la misma será real. Por otro lado, si la imagen se forma a la derecha de  $H_1$ , la misma será virtual.

El aumento lateral de la imagen se calcula también empleando utilizando la [expresión \(0.8\)](#), midiendo las distancias objeto e imagen de la misma manera que cuando se aplica la fórmula de Gauss.

La determinación gráfica de las imágenes es idéntica a la empleada para espejos simples, y se encuentra ejemplificada en la [Figura \(3.10\)](#). Debe tenerse en cuenta sin embargo, que como un espejo grueso es una modelización, no se puede emplear el rayo que pasa por el centro de curvatura, ya que físicamente no existe tal punto.

Es importante mencionar, al igual que cuando se estuvo trabajando con combinaciones de lentes, que el hecho de que una imagen parezca virtual o real en el sistema modelado, no necesariamente implica que



---

dicha imagen vaya a ser real o virtual en el sistema real. Para saber la naturaleza de la imagen debe verse su ubicación respecto del inicio del sistema, es decir, el punto donde ocurre la primera refracción de los rayos, que en nuestra nomenclatura se ha marcado como  $H_1$ . En caso de que la imagen se encuentre fuera del sistema (a la izquierda de  $H_1$ ), la imagen será real, mientras que si la imagen se encuentra dentro del sistema (a la derecha de  $H_1$ ) la imagen será virtual.

### 3.6. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
<b>Lente delgada y espejo simple // Lente Gruesa con segunda cara espejada</b>		
Posición del plano principal de un espejo respecto de la superficie de la primera refracción	$\overline{H_1 H} = \frac{C}{1 - C \cdot P_1}$	(3.20)
Potencia	$P = (1 - C \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2)$	(3.21)
Factor C	$C = \frac{d}{n'}$	
<b>Lente gruesa separada de un espejo simple</b>		
Posición del plano principal de un espejo respecto de la superficie de la primera refracción	$\overline{H_1 H} = \overline{H_1 H_{LG}} + \frac{C + C'}{1 - (C + C') \cdot P_1}$	(3.22)
Potencia	$P = [1 - (C + C') \cdot P_{LG}] \cdot [2 \cdot P_{LG} + P_E - (C + C') \cdot P_{LG} \cdot P_E]$	(3.23)
Factor C	$C = \frac{d}{n''}$	
Factor C'	$C' = \frac{\overline{H''_{LG} H_2}}{n''}$	



### 3.7. Cuestiones

- 3.7.1. Realizar la demostración de las expresiones [3.20](#) y [3.21](#).
- 3.7.2. Analice qué ocurre con las Ecs. [3.12](#) y [3.13](#) cuando se hace que la lente delgada se pegue al espejo, es decir, cuando  $d = 0$ . Interprete el resultado físicamente.
- 3.7.3. Analice qué ocurre con las Ecs. [3.20](#) y [3.21](#) cuando se hace que  $n'$  tienda a 1. Interprete el resultado físicamente.
- 3.7.4. Analice qué ocurre con las Ecs. [3.20](#) y [3.21](#) cuando se hace que la lente gruesa tenga un espesor nulo, es decir, si se hace que la lente gruesa sea delgada. Interprete el resultado físicamente.
- 3.7.5. Se cuenta con una lente delgada positiva separada de un espejo positivo. Todo el medio se encuentra sumergido en aire. La distancia focal de la lente es  $f_1$  y la del espejo es  $f_E$ . Ambas distancias focales son positivas. Deducir la relación que debe existir entre las distancias focales de la lente y el espejo y su separación para que el sistema sea:
- convergente ( $P > 0$ ),
  - divergente ( $P < 0$ );
  - afocal ( $P = 0$  o  $f = \infty$ ).
- 3.7.6. ¿Pueden obtenerse los mismos resultados si uno de los elementos posee una distancia focal negativa? En caso afirmativo, determine las condiciones necesarias para que esto suceda. En caso negativo, justifique su respuesta.
- 3.7.7. Revise los resultados obtenidos en las cuestiones 3.7.5 y 3.7.6 si se tiene una lente gruesa con una superficie espejada.
- 3.7.8. Revise los resultados obtenidos en las cuestiones 3.7.5 y 3.7.6 si se tiene una lente gruesa separada de un espejo simple.

### 3.8. Ejercicios

- 3.8.1. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente delgada de distancia focal  $f_1 = 12\text{ cm}$  y un espejo con un radio de curvatura  $R_E = -20\text{ cm}$ . La lente y el espejo están separados 2 cm. Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 20.833\text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.4\text{ cm}$$

- 3.8.2. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente delgada de distancia focal  $f_1 = -14.5\text{ cm}$  y un espejo con un radio de curvatura  $R_E = -12.5\text{ cm}$ . La lente y el espejo están separados 3 cm. Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 6.659\text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.49\text{ cm}$$

- 3.8.3. Se tiene una lente delgada y un espejo simple que responden a los siguientes datos:

$$\text{Lente: } R_1 = 50\text{ cm}; R_2 = -50\text{ cm}; n' = 1.5$$

$$\text{Espejo: } R_E = -50\text{ cm}$$

En base a esta información:

- Si se sabe que la lente y el espejo se encuentran separados 10 cm y que todo el sistema se encuentra sumergido en aire, determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
- Si se tiene un objeto extenso de altura 1 cm ubicado a 60 cm de la lente delgada, determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, tamaño y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

a.  $P = 5.760\text{ Dp}; \overline{H_1H} = 12.50\text{ cm}$

b.  $s'' = 22.827\text{ cm}; y'' = -0.315\text{ cm}; \text{Real}$



- 3.8.4. Se tiene una lente delgada con una distancia focal  $f_1 = 5 \text{ cm}$  y un espejo simple de distancia focal  $f_E = 5 \text{ cm}$ .
- Si se sabe que la lente y el espejo se encuentran separados 15 cm y que todo el sistema se encuentra sumergido en aire, determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
  - Si se tiene un objeto puntual ubicado en el eje a una distancia de 10 cm de la lente delgada, determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

- $P = 0 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = -7.5 \text{ cm}$
- $s'' = -2.5 \text{ cm}$ ; *Virtual*

- 3.8.5. Se tiene una lente delgada equiconvexa hecha de un material con un índice de refracción  $n' = 1,5$ , que en aire tiene una distancia focal de 30 cm. La lente está montada en una abertura practicada en una pared de un depósito lleno de agua. En la pared opuesta del depósito, a 80 cm de la lente, se encuentra un espejo plano.
- Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
  - Si se tiene un objeto extenso de 1 cm de altura, ubicado en el eje del sistema y a una distancia de 90 cm de la lente delgada, determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, tamaño y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

- $P = -6.666 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = -60 \text{ cm}$
- $s'' = -10 \text{ cm}$ ;  $y'' = 0.333 \text{ cm}$ ; *Virtual*

- 3.8.6. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente gruesa de 4 cm de espesor. La primera cara de la lente tiene un radio de curvatura  $R_1 = -6 \text{ cm}$ , y la segunda cara, que está espejada, tiene un radio de curvatura  $R_E = -12 \text{ cm}$ . La lente gruesa está hecha de un material con índice de refracción  $n' = 1,4$ . Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 17.196 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.40 \text{ cm}$$

- 3.8.7. Se tiene un espejo grueso conformado por una lente plano-convexa de 3,2 cm de espesor con segunda cara espejada. Se sabe además que la cara espejada tiene un radio de curvatura  $R_E = -12 \text{ cm}$  y que está hecha de un material con índice de refracción  $n' = 1,6$ . Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 26.667 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2 \text{ cm}$$

- 3.8.8. Resuelva el ejercicio anterior invirtiendo la cara espejada de la lente gruesa, es decir, suponiendo que se tiene una lente convexo-plana con segunda cara espejada.

**Respuestas:**

$$P = 6.222 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.14 \text{ cm}$$

- 3.8.9. Se tiene una lente delgada equiconvexa de radios de curvatura  $|R_{1,2}| = 12 \text{ cm}$  y de índice de refracción  $n' = 1,6$ . Si la segunda cara de la lente se encuentra espejada, determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del espejo grueso. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 11.667 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 0 \text{ cm}$$

- 3.8.10. Dada una lente delgada divergente con radios  $R_1 = -5 \text{ cm}$  y  $R_2 = -10 \text{ cm}$  e índice de refracción  $n' = 1,75$ , que tiene su segunda cara espejada, determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 20 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 0 \text{ cm}$$



- 3.8.11. Se tiene una esfera de vidrio con  $n' = 1,5$  y radio  $R = 20 \text{ cm}$  a la que se le ha espejado la segunda mitad. A  $40 \text{ cm}$  de dicha esfera se encuentra un objeto puntual ubicado en el eje del sistema.
- Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
  - Determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

a.  $P = 3.333 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = 80 \text{ cm}$

b.  $s'' = 40 \text{ cm}$ ; *Real*

- 3.8.12. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente gruesa de  $25 \text{ cm}$  de espesor separada  $40 \text{ cm}$  de un espejo cóncavo. La lente es equiconvexa, de radios  $|R_1| = |R_2| = 10 \text{ cm}$ , y el radio de curvatura del espejo es  $|R_E| = 50 \text{ cm}$ . Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.

**Respuestas:**

$P = 3.3333 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = 5 \text{ cm}$

- 3.8.13. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente gruesa separada  $15 \text{ cm}$  de un espejo cóncavo. La lente es concéntrica, de radios  $R_1 = -34 \text{ cm}$  y  $R_2 = -47 \text{ cm}$ , e índice de refracción  $n' = 1.5$ . El radio de curvatura del espejo es  $|R_E| = 70 \text{ cm}$ . Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.

**Respuestas:**

$P = -1.489 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = 16.39 \text{ cm}$

### Bibliografía

- [1] F. Sears, Principles of Physics. No. v. 3, Addison-Wesley Press, 1945.
- [2] F. Jenkins and H. White, LSC Fundamentals of Optics. McGraw-Hill Education, 2001.
- [3] E. Hecht, Optics. Pearson education, Addison-Wesley, 2002.
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_aberration](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_aberration)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Coma\\_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coma_(optics))