ORGANO OFICIAL DEL CENTRO DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL LITORAL

N. 10

SEPTIEMBRE 1936

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
BIBLIOTECA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS ETC.

Sumario

Proyecto de Defensa Discontínua de Hormigón Armado para un Canal Cabotaje en el Río de la Plata
Ing. Cándido C. Martino

Placas Elásticas
Prof. Ing. J. C. Van Wyk

Urbanización de una Isla
Sr. Luis Moreno Díaz

Un Hotel en las Sierras
Arqs. De Lorenzi, Otaola y Roca

Una Bolsa de Comercio
Sr. Raúl Costa Varsi

Método para Calcular el Valor de los Angulos de un Cuadrilátero dado por sus Lados y el Area (Continuación)
Prof. Ing. Simón Rubinstein

Determinación Microquímica Colorimétrica del Sodio
Dr. A. Elías

Análisis del Taquímetro Auto Reductor Bosshardt - Zeiss (Continuación)
Ing. Raúl V. Lucchini

Determinación de las Losas de Hormigón Armado más Económicas
Ing. J. Daniel Médici

El Factor de Potencia en un Circuito de Corriente Alternada (2ª Parte)
Ing. Juan G. Schildknecht

Métodos Generales para la Determinación de la Humedad de las Substancias
Dr. Pedro H. Gambetta

Problema del Cuadrilátero (Continuación)
Ing. Higinio Greppi

Breves Nociones Sobre Acústica Arquitectónica
Arq. Ermete De Lorenzi

Función Social de la Ciencia Pura
Dr. S. Neuschlosz

DIRECCION Y ADMINISTRACION: AVENIDA PELLEGRINI 250 — ROSARIO

SOCIOS PROTECTORES DE LA REVISTA

• CEFCM •

Agr. ACHILLI Manlio
Ing. AGUERRIBERRY Enrique
Agr. ALBANESE Julio
Sr. ALBANESE Santiago
Ing. ALBANO Horacio
Ing. ALBERDI Juan
Agr. ANTRUEJO Isidro
Ing. ARDIGO Dante
Ing. AUDET Arturo

Ing. BAIOCCHI Pablo
Ing. BARALIS Lorenzo
Ing. BERNARD Lucio X.
Arq. BESSONE Emilio
Arq. BIANCHI Héctor
Sr. BILBAO Ricardo J.
Ing. BOLLERO Santiago
Agr. BORASIO Teresio
Ing. Dr. BORDABEHERE Ismael C.
Ing. BOSSERT Carlos
Ing. BOURGEON Mario
Ing. BRINDISI Félix

Prof. CAGGIANO César
Ing. CANTERO Fermín
Dr. CASTELLANOS Alfredo
Ing. CHIAPPARA Héctor
Ing. CHICHONI Roberto
Ing. CHICHIZZOLA Eduardo
Dr. COLOMBO BERRA Juan J.
Ing. CORNERO Guillermo
Ing. COSTANTINO Francisco

Arq. DELLAROLLE Víctor
Arq. DE LORENZI Ermete
Arq. DIAZ ANDRIEU Luis
Agr. DIEULEFAIT Carlos

Agr. ELLERT Walter
Agr. ERLIJMAN Marcos

Ing. FARENGO Adolfo
Sr. FERNANDEZ DE LA PUENTE Edgar
Sr. FERRARESE Enrique
Ing. FRAQUELLI Carlos

Ing. GACHE Eulogio
Dr. GAMBETTA Pedro H.
Ing. GIANNONE José
Arq. GIOVANNONE Lorenzo
Arq. GIORGETTI Angel
Ing. GREPPI Higinio
Arq. GUIDO Angel

Ing. HUTMACHER Celestian

Ing. INFANTE Alejo
Ing. INFANTE Juan
Ing. ISELLA Carlos

Ing. LACAL Emilio
Ing. LAMARQUE Eduardo
Arq. LAMOURET León
Ing. LEIVA Otoniel
Agr. LOCATELLI Delfo E.
Ing. LOUREIRO Jorge A.
Arq. LO VOI Guido
Ing. LUCCHINI Raúl V.
Ing. LUNA Alejandro
Ing. LUPPI Carlos A.

Arq. MAISONNAVE Emilio
Agr. MALDONADO Samuel
Ing. MARTINO Cándido
Ing. MAZZONI Eduardo
Ing. MEDICI Daniel
Arq. MICHELETTI José
Ing. MICHELETTI Luciano
Ing. MIGLIERINI León
Agr. MILIA Julián H.

Agr. NOREMBERG Arón
Arq. NEWTON Juan

Prof. OCAMPO Manuel
Agr. OLGUIN Juan
Ing. ORDOÑEZ Santiago
Ing. OSTROVSKY Jaime

Ing. PARENTI Domingo
Ing. PARFAIT Rodolfo
Ing. PERFUMO Mario
Ing. PLA Cortés
Ing. PINASCD Emidgio
Agr. PROVERA Hugo

Ing. QUAGLIA Edmundo

Ing. RICUCCI Vicente
Arq. RIMBAU Jaime
Ing. ROSENTHAL Erico
Ing. RUBINSTEIN Simón

Ing. SALLOVITZ Manuel
Ing. SANCHO José
Arq. SANMARTINO José
Ing. SCHILDKNECHT Juan
Arq. SCHMIDT Carlos
Sr. SOLHAUNE Oscar W.
Ing. SPIRANDELLI Juan

Sr. TAVERNIER Julio
Arq. TORRES Antonio
Arq. TRANGONI Domingo S.

Arq. VANOLI Angel A.
Ing. VAN WIK Juan C.
Dr. VASALLI Miguel
Ing. VASALLO Manuel
Ing. VERGA Luis C.

Ing. WEIHMULLER Waldo
Sr. WEILL Marcelo

Ing. ZAPATA Raúl

Proyecto de defensa discontínua de hormigon armado para un canal cabotaje en el Rio de la Plata

POR EL ING. CANDIDO C. MARTINO

Se proyecta construir en el Río de la Plata un canal costanero para el tránsito de embarcaciones de cabotaje, y que sirva de vinculación entre el Puerto de Buenos Aires con todo el sistema afluente del citado río.

El tipo de defensa elegido para protejer el canal de los aterramientos y a las embarcaciones que lo naveguen contra los embates del oleaje es de hormigón armado y de las denominada a caballete.

Consta de un tablestacado discontínuo con pilotes distanciados 4 m. uno del otro, a manera de anclaje y ambos con inclinación de 1:3 con respecto a la vertical (Lam. I).

El procedimiento de cálculo seguido es el conocido "método de Gaillard", que se funda en la impulsión ejercitada por una masa de agua que choca contra una pared plana normal a la dirección del movimiento (en el caso que nos ocupa la masa de agua la constituye el oleaje), y en la observación de Gaillard que, cuando la ola se rompe o se halla próxima a romperse, la masa de agua que forma la cresta, se mueve hacia adelante con una velocidad horizontal W, por lo menos igual y a veces mayor, que la velocidad V de propagación de la ola, aumentada de la velocidad orbicular teórica u de las partículas superficiales de la cresta de la ola.

Tratándose de olas que se propagan en profundidades limitadas, en la que la longitud de la ola es mayor que la profundidad H, la hemos considerado como onda de traslación según la teoría de Airy y por lo tanto, las órbitas descriptas por las partículas líquidas, son elípticas con su eje mayor horizontal.

Se tiene entonces:

$$W = V + u \quad (1)$$

y el valor de lavelocidadde traslación de la ola deducida de la teoría trocoidal (1), está dado por la expresión:

$$(2)\quad V = \sqrt{\frac{bs}{a_s}}\ \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

y el valor de la velocidad orbicular $(3)\quad u = \dfrac{2\,as\,\pi\,v}{L} = \dfrac{2\,\pi\,as}{T}$

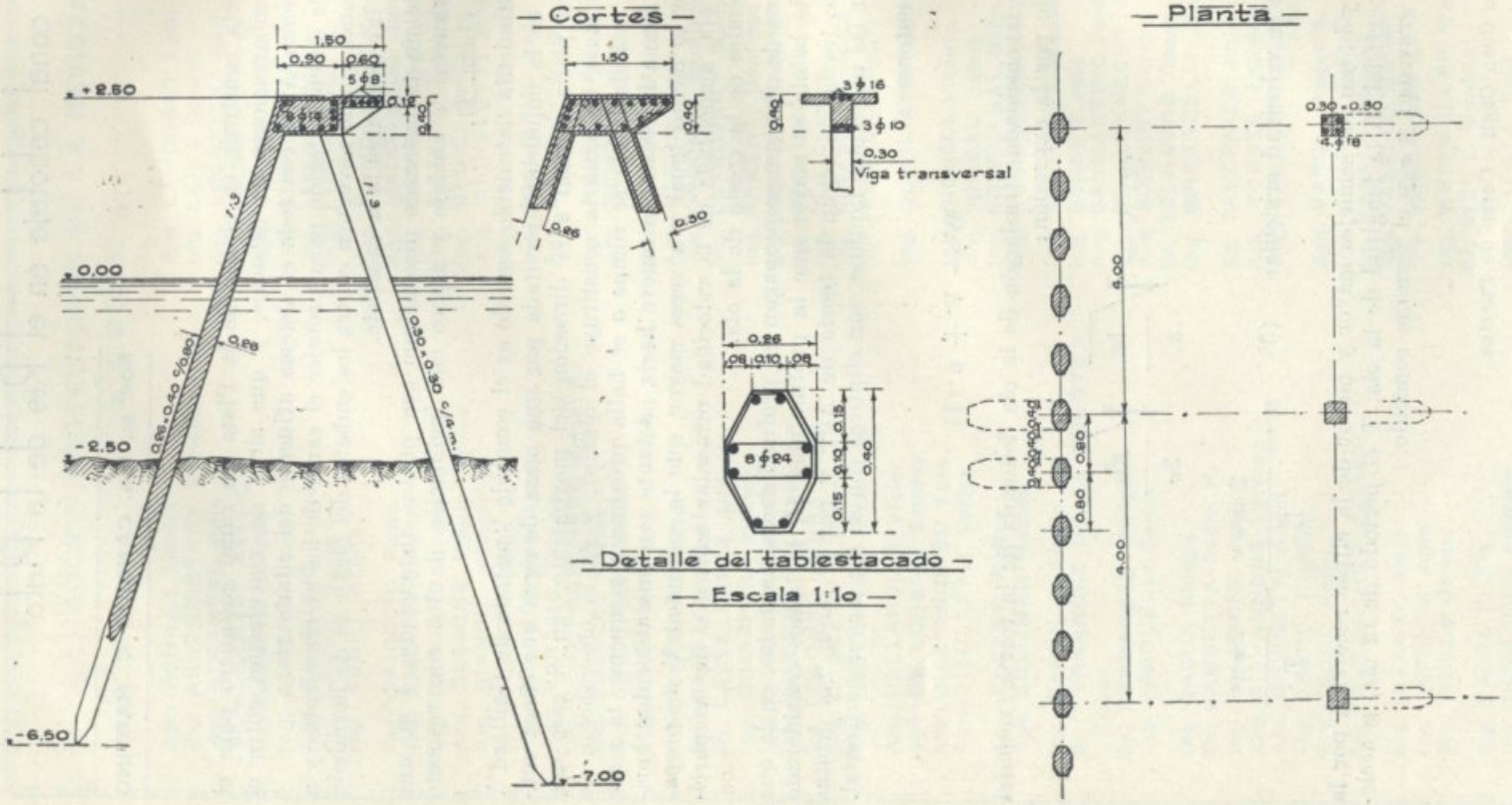
en la que a_s y b_s son los semiejes mayor y menor de la elipse recorrida por la partícula superficial, L la longitud de la ola, T el período de la ola, g aceleración de la gravedad y π y el término conocido.

(1) Bénezit o Coen Cagli - Curso de Puertos.

Tipo de defensa de hormigón armado

Anteproyecto

Escala 1:50



Detalle del tablestacado

Escala 1:10

Fig. 1

Si en la expresión (2) hacemos $\sqrt{\frac{bs}{as}} = \frac{1}{K}$

la (2) se transforma en $V = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$

La expresión que nos dá el valor de la impulsión es

$$P = f\,\rho\,\Omega\,\frac{W^2}{2g}$$

en la que f es un coeficiente de reacción; ρ el peso específico del agua, Ω la superficie chocada; y W la velocidad que tiene la ola en el momento de chocar contra el obstáculo.

El valor medio del coeficiente de reacción obtenido como resultado de 107 observaciones efectuadas con dinamómetros, es:

$f = 1{,}31$ que es el valor adoptado en nuestros cálculos y en casos excepcionales en que se desea tener un gran margen de seguridad se aconseja tomar $f = 2$.

La ley de repartición de las presiones sobre una vertical, si bien no ha sido determinada por Gaillard, es posible trazarla si se tiene en cuenta la observación del autor, de que el esfuerzo máximo se verifica a un nivel superior al nivel de equilibrio, disminuyendo luego rápidamente hacia arriba y por debajo de este nivel.

La sobreelevación de la cresta de la ola sobre el nivel de reposo, cuando ésta se propaga en pequeñas profundidades, está dada por la siguiente expresión:

$$A = \frac{h}{2} + \frac{\pi\,as\,bs}{L}$$

pero teniendo en cuenta que durante las fuertes marejadas, la ola se encuentra con los 2/3 de su altura sobre el nivel de reposo, se puede tomar como valor aproximado de la sobreelevación de la ola, el de:

$$A = \frac{2}{3}\,h$$

Los datos tomados para el cálculo, son los siguientes: Nivel medio de las aguas en el Río de la Plata sobre el plano de referencia (cero del Riachuelo, escala del M.O.P.) es + 1,50; la cota del río — 2.50, es decir, que la altura total del tirante de agua $H = 1.50 + 2.50 = 4$ m.; la altura de las olas de tempestad calculada es $h = 2$ m. y la longitud $L = 30$ m.

Con los valores H y L determinamos el valor de K mediante la fórmula indicada precedentemente o bien se obtiene directamente de la tabla redactada en base a ella por el Ing. Lira.

$\frac{H}{L}$	K	$\frac{\pi}{4} K^2$	$\sqrt{K^2-1}$	$\sqrt{K}$
0.05	3.39	12.50	3.13	1.81
0.10	1.80	3.15	1.49	1.34
0.15	1.36	1.41	0.92	1.16
0.20	1.18	1.09	0.62	1.09
0.25	1.09	0.95	0.44	1.04
0.30	1.05	0.86	0.22	1.04

$$\text{para } \frac{H}{L} = \frac{4 \text{ m.}}{30 \text{ m.}} = 0{,}133$$

corresponde $K = 1.50$ y por consiguiente

$\sqrt{K} = 1.22$ y el semi eje menor de las órbitas elipticas será:

$$b_s = \frac{h}{2} = \frac{2 \text{ m.}}{2} = 1.—$$

y el semi eje mayor $a_s = K\, b_s = 1.50 \times 1 \cong 1.50$

$$V = \frac{1}{K} \times \sqrt{\frac{g\, l.}{2\pi}} = \frac{1}{1{,}22} \times \sqrt{\frac{9{,}81 \times 30}{2 \times 3{,}14}} = 5{,}65 \text{ m.}$$

velocidad de propagación de la ola

$$u = \frac{2\pi\, as\ V}{L} = \frac{2 \times 3.14 \times 1.50 \times 5.65}{30} = 1.80 \text{ m.}$$

velocidad orbicular

$W = u + V = 1.80 + 5.65 \cong 7.45$ m. velocidad total de la masa de agua

Con estos valores calculamos la impulsión o presión P adoptando para ello el coeficiente $f = 1{,}31$.

y $\rho = 1.000$ Kg/m³.

se tiene luego $P = 1.31 \times 1000 \times 1 \times \frac{7.45^2}{19.62} = 3700$ Kg/m².

Este es el valor de la presión en la zona donde se produce el máximo esfuerzo y que como se ha dicho se encuentra arriba del nivel de equilibrio. Sobre este nivel se toma la altura máxima a que alcanza la ola que es 2/3 de h y donde la presión es O y con estos elementos y recordando que el valor de la presión es también O en correspondencia del nivel del terreno, se puede trazar el diagrama de las presiones totales en la forma, que se indica claramente en la lámina nº 2.

Del diagrama de presiones, se deduce que la presión total en una faja de 1 m. de ancho es de 7380 Kg. y que la recta de acción se encuentra a 3.50 m. sobre el nivel del fondo.

Para la determinación de los empujes activos E_a y pasivo E_p del terreno sobre la parte de tablestaca empotrada en él, se han aplicado las fórmulas conocidas véase por ejemplo (1)

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) h^2 = \frac{1}{2} \lambda_a h^2 = \frac{1}{2} g_a h.$$

$$E_p = \frac{1}{2} \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) h^2 = \frac{1}{2} \lambda_p h^2 = \frac{1}{2} g_p h.$$

en las cuales

$$\lambda_a = \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2} \right)$$

$$\lambda_p = \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2} \right)$$

en los que γ es el peso específico del terreno, ρ el talud natural de la tierra, λ_a y λ_p los coeficientes de empuje activo y pasivo y g_a y g_p son las bases de los triángulos representativos del empuje y resistencia del terreno.

Tomando $\rho = 20^\circ$; $\gamma = 1100$ Kg/m^3 y reemplazando estos valores en las fórmulas anteriores, se obtienen los siguientes resultados

$$\lambda_a = 2{,}224$$
$$\lambda_p = 0{,}540$$
$$\text{y } E_p = 754 \text{ Kg.}$$

E_p se aplica a los 2/3 de la ficha t = 1,40 o sea a 0,94 m. medido a partir del nivel del fondo y cuyo cálculo no se desarrolla para no extender demasiado este trabajo, y que puede verse claramente en (1).

Los valores de las reacciones A y B resultan

$$R_B = \frac{4{,}44 \text{ m.} + 2.952 \text{ Kg.}}{5.94 \text{ m.}} = 2.200 \text{ Kg.}$$

$$R_A = 2.952 - 2.200 = 752 \text{ Kg.}$$

valos que como observamos es prácticamente igual al que nos resultó para E_p, que es como debe ser para satisfacer la solución.

Determinación de la carga que actúa sobre el pilote y la tablestaca que lo enfrenta.

El peso propio de la estructura para cada tramo de 4 m. (exceptuando las tablestacas comprendidas entre caballetes), es de 6.000 Kg. tomando como peso específico del hormigón, 2.500 Kg/m^2.

---

(1) C. C. MARTINO. — "Cálculo de muelles con anclaje y pilotes" en la Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires - Nos. 411 y siguientes o Ing. Julio R. Castiñeiras curso de mampostería.

Descomponiendo el peso propio según las direcciones de las tablestacas y pilote, nos resulta para cada una de éstas, (en virtud de la simetría de ambas direcciones con respecto a la vertical), una componente de 3.400 Kg. como se puede observar en el diagrama de ffs. de la lámina nº 2.

La carga horizontal que actúa sobre el caballete, es de 11.000 Kg. pués a cada tramo le corresponden 4 tablestacas sobre las que actúa una carga de 2.200 Kg. en cada una de ellas.

Descomponiendo éstas según las direcciones del pilote y tablestacas como se puede observar en el mismo diagrama antes citado, se tiene que el valor de cada una de las componentes es de 18.000 Kg.

Resultando por lo tanto, que el esfuerzo total de tracción T en la tablestaca que enfrenta el pilote, es de:

$$T = 18.000 \text{ Kg.} - 3.400 \text{ Kg.} = 14.600 \text{ Kg.}$$

y el esfuerzo de comprensión en el pilote es de:

$$P_c = 18.000 \text{ Kg.} + 3.400 \text{ Kg.} = 21.400 \text{ Kg.}$$

La luz libre del pilote es de 7 m.

Cálculo de los momentos en la ménsula y en lo sola.

La sobrecarga total que actúa sobre la ménsula es igual al peso propio más la sobrecarga útil.

El peso propio es de 300 Kg/m^2 y el de la sobrecarga útil adoptada es de 150 Kg/m^2; se tiene entonces que el valor de la sobrecarga total será:

$300 \text{ Kg/m}^2 + 150 \text{ Kg./m}^2 = 450 \text{ Kg/m}^2$.
Sup. carga $S = 0.60 \text{ m.} \times 4 \text{ m.} = 2.40 \text{ m}^2$.
$Q' = 2.40 \text{ m}^2 \times 450 \text{ Kg/m}^2 = 1.080 \text{ Kg.}$
$Q = 1.080 + \text{p.ménsula} = 1.080 + 60 \text{ Kg.} \cong 1140 \text{ Kg.}$

El momento de la ménsula será:
siendo la luz $1 = 0.70$ m.
$M = 1/2 \times 1.140 \text{ Kg.} \times 0.70 \text{ m.} = 40.000 \text{ Kg/cm.}$
y el momento de la losa
$M = 1/8 \times 1.080 \text{ Kg.} \times 4.15 \text{ cm.} = 56.000 \text{ Kg/cm.}$

Cálculos de los momentos M_x e M_y de la viga según los planos horizontales y vertical.

La viga se apoya sobre los caballetes distanciados de 4m. de eje a eje y sobre ella descansan cuatro tablestacas sobre las que actúa en cada extremo B una carga horizontal o reacción B = 2.200 Kg. y que por su proximidad podemos considerarla como uniformemente repartida, es decir, la carga total que actúa en el plano horizontal, será:

$$Q = 4 \times 2.200 \text{ Kg.} = 8.800 \text{ Kg.}$$

y el momento $M_x = \dfrac{1}{10} Q\, 1$

$$M_x = 1/10\ 8.800 \text{ Kg.} \times 4000 \text{ cm.} = 352000 \text{ Kg/cm.}$$

La carga que actúa sobre el plano vertical, será el peso propio de la viga más la sobrecarga útil.

$$pp = 4 \times 0.40 \times 0.70 \times 2.500 = 2.800 \text{ Kg.}$$

$$s/carga = 150 \times 0.70 \times 4 \text{ m.} = 420 \text{ „}$$

$$Q = 3.220 \text{ Kg.}$$

y el M_y será:

$$M_y = \frac{1}{10} 3.220 \times 400 = 128.800 \text{ Kg/cm.}$$

Determinación del momento máximo en el tablestacado.

Siendo el diagrama de carga del pilote de forma irregular (diagrama de Gaillard), se ha determinado gráficamente el valor del momento máximo según se observa en la figura (3) y se han determinado las reacciones R_1 y R_2 que como se observa, difieren muy poco de las determinadas analíticamente. Del diagrama antes citado, resulta el momento máximo en el tablestacado 202.500 Kg/cm.

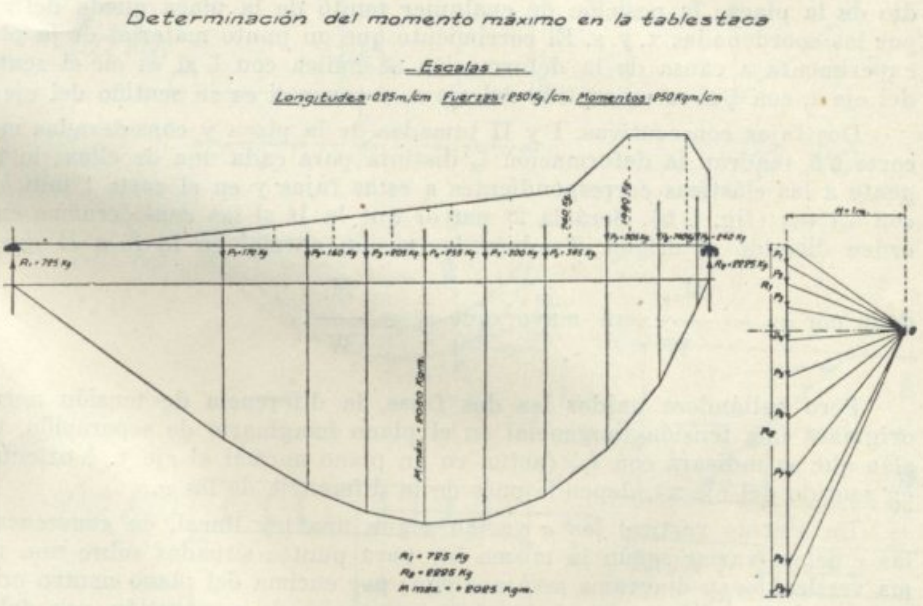


Fig. 3

Con estos valores podemos calcular las secciones de los distintos elementos y armaduras de la defensa y redactar en base a ello el cómputo y presupuesto de la obra.

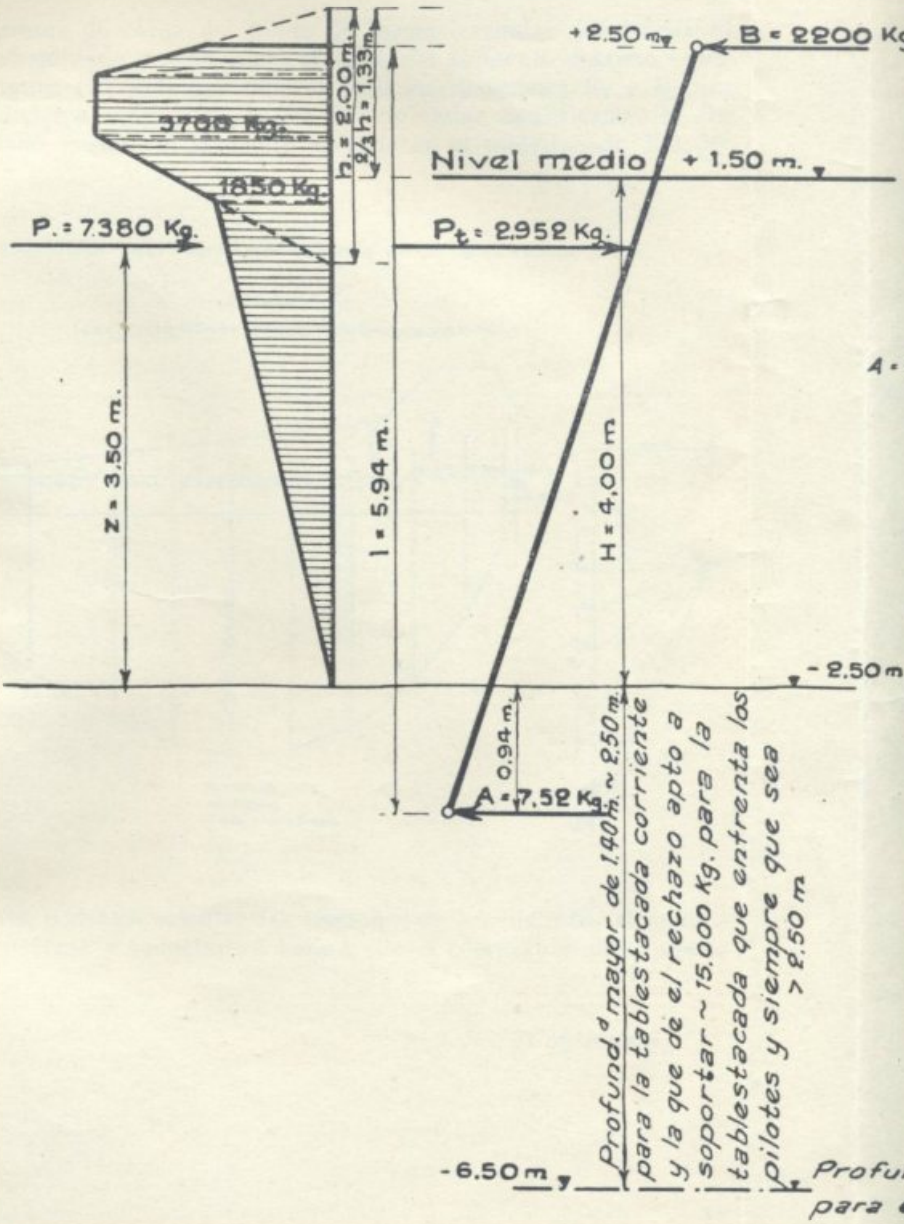
(Continuará)

Tipo de defensa de horm

Ante Proyec

Cálculos

Diagrama de Gaillard

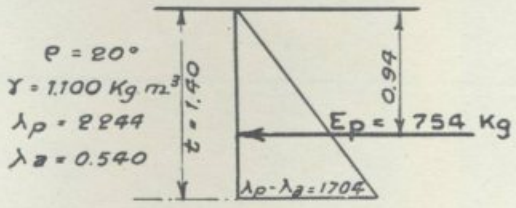


ormigón armado

yecto

S

200 Kg

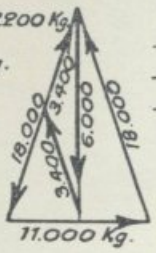


$Ep = 0.40 \times \frac{1}{2} \times 1.704 \times 1.100 \times (1.40)^2 \quad 754 \text{ Kg}$

$B = \frac{4.44 \times 2.950}{5.94} = 2.200 \text{ Kg}$

$A = 2.952 - 2.200 = 752 \text{ Kg}.$

$Ep \simeq A$



Peso propio de la estructura exceptuando las tablestacas corrientes = 6.000 Kg para cada tramo de 4.00 m

- 2.50 m.

Cómputo para cada tramo de 4m

Pilote	0.85 m³
Tablestacado	3.25 "
Viga	1.40 "
Losa	0.30 "
Total	5.80 m³

$p.m.l. = \frac{5.80}{4} = 1.45 \text{ m}^3$

Presupuesto p.m.l.

$1.45 \text{ m}^3 \times 190\$ = 275.50\$$

Profundidad fijada para el cómputo métrico

PLACAS ELASTICAS

POR EL PROF. ING. J. C. VAN WYK

Nociones previas de las fuerzas elásticas que actúan en una placa rectangular sometida a carga repartida y apoyada en su contorno.

Una explicación muy clara al respecto da el Dr. Ing. W. Gehler en su comentario al reglamento alemán sobre las construcciones en hormigón armado, año 1932, pág. 194, y cuyos conceptos trato de sintetizar en esta introducción.

Considérase una placa plana rectangular A-B-C-D apoyada en su contorno, de material elástico, y de espesor pequeño en comparación a sus dimensiones, sometida a una carga uniformemente distribuída, y en estado de equilibrio elástico.

A los fines de referencia se adoptan ejes coordenados con origen en el centro de la placa y a mitad de su espesor; el plano x. y. será el plano medio de la placa; la posición de cualquier punto de la placa queda definido por las coordenadas x. y. z. El corrimiento que un punto material de la placa experimenta a causa de la deformación se indica con ζ si es en el sentido del eje z, con ξ si es en sentido del eje x, y con η si es en sentido del eje y.

Dos fajas consecutivas, I y II tomadas de la placa y consideradas en el corte t t, tendrán la deformación ζ_t distinta para cada una de ellas; la tangente a las elásticas correspondientes a estas fajas y en el corte t indícanse con ω_{x1} ω_{x2} (fig. I b). Será la 2ª mayor que la 1ª si las consideramos en el órden dirigido al orígen. También la tensión normal en la faja II que es dada por $\sigma_{II} = \frac{M_{II}}{W}$ será mayor que $\sigma_I = \frac{M_I}{W}$.

Pero hallándose unidas las dos fajas, la diferencia de tensión normal originará una tensión tangencial en el plano imaginario de separación, tensión que se indicará con τ_{yx} (actúa en un plano normal al eje y. é orientado en sentido del eje x), depende pués de la diferencia de las σ.

En sentido vertical las σ varían segun una ley lineal, en consecuencia las τ deben variar según la misma ley para puntos situados sobre una misma vertical, y su diagrama será análogo; por encima del plano neutro orientado según las diferencias de tensiones normales de compresión, por debajo según las diferencias de las tensiones de tracción (fig. I f).

Por idénticas razones habrán tensiones τ_{xy} en los planos imaginarios de separación entre fajas tomadas en el sentido del eje de las y.

Estas tensiones tangenciales considerando aquellas encima del plano neutro forman pares con las tomadas por debajo y el cuadrado de la fig. 2b tomado en la parte superior 1 - 2 - 3 - 4 se deforma en rombo 1 - 2' - 3' - 4' la diagonal extendida 1 - 3.

En la parte inferior el cuadrado 5 - 6 - 7 - 8 se deforma en rombo con la diagonal opuesta, la 6 - 8 extendida, la prueba de esta condición puede

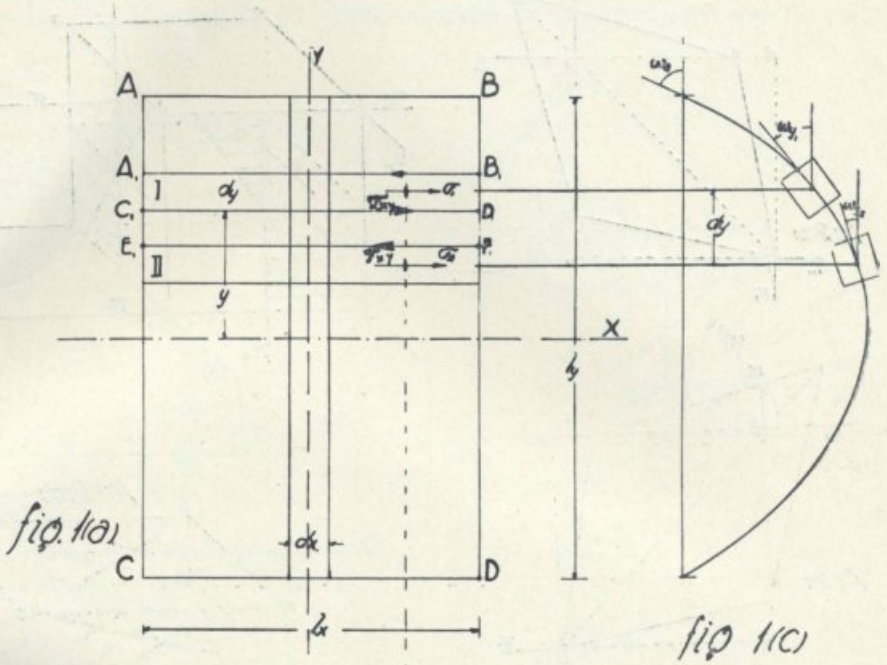


fig. 1(a)

fig. 1(c)

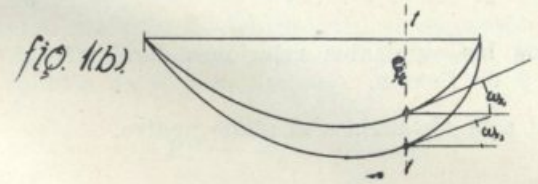


fig. 1(b)

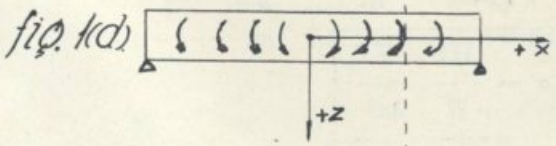


fig. 1(d)

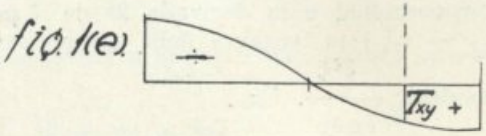


fig. 1(e)

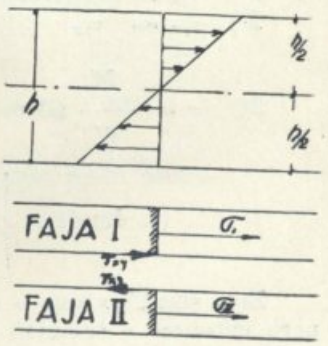
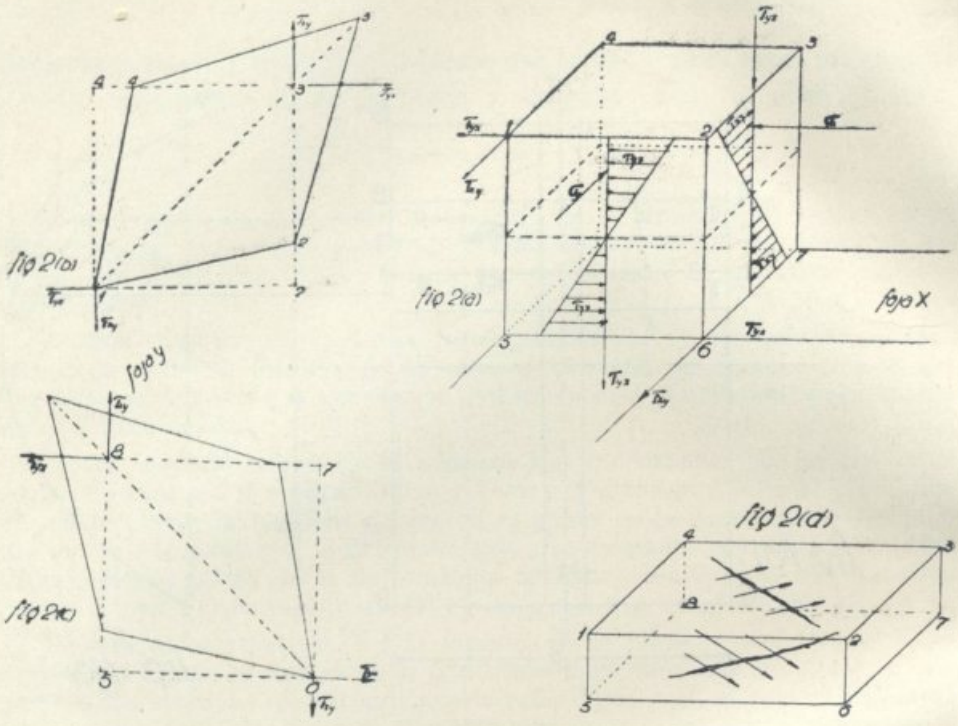


fig. 1(f)

observarse en placas de hormigón, se producen grietas en dirección normal a la diagonal extendida por la escasa resistencia a la tracción que ofrece este material. Estas imágenes dan la indicación de la posición de la armadura de hierro que debe aplicarse para evitar tal deterioro.



Pueden entonces fijarse las siguientes relaciones fundamentales para los momentos tangenciales y de flexión.

1º) τ_{yx} es proporcional a la distancia z al plano neutro.

2º) $\tau_{yx} = \tau_{yx}$

3º) $\sigma = \dfrac{M}{W}$ además $\dfrac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} = \dfrac{M}{EI} = \dfrac{1}{\rho}$

de donde $\boxed{\sigma = \dfrac{E.I}{W} \dfrac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2}}$

Esto significa que σ es proporcional a la derivada 2ª de la deflexión ζ, pero entonces τ también será proporcional a la derivada 2ª de ζ pero en virtud de la correspondencia $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ esta tensión τ debe ser proporcional a la derivada respecto a x é y, es decir $\dfrac{\delta^2 \zeta}{\delta x . \delta y}$.

4º) Análogo a la ley de Hooke $\varepsilon = \dfrac{\delta}{E}$, se verifica también $\gamma = \dfrac{\tau}{G}$ y se escribe

$$T_{xy} = T_{yx} = KGz \frac{\delta^2 \zeta}{\delta_x . \delta_y}$$ siendo K un coeficiente a determinar.

Los corrimientos ζ; η; ξ en dirección de los ejes x; y; z respectivamente son muy pequeños frente a las dimensiones de la placa (fig. 3 y 4), o sea frente a las coordenadas de un punto material de la placa pero son función

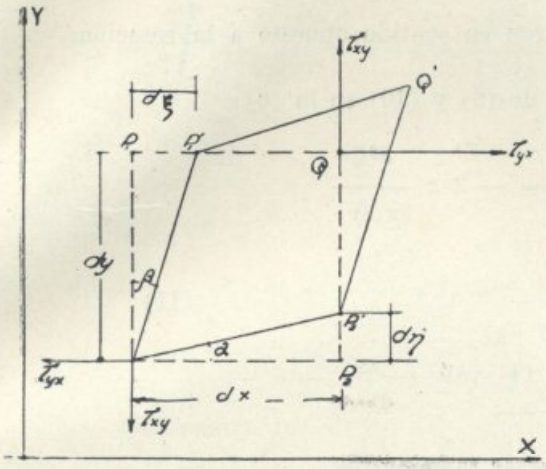


fig 3

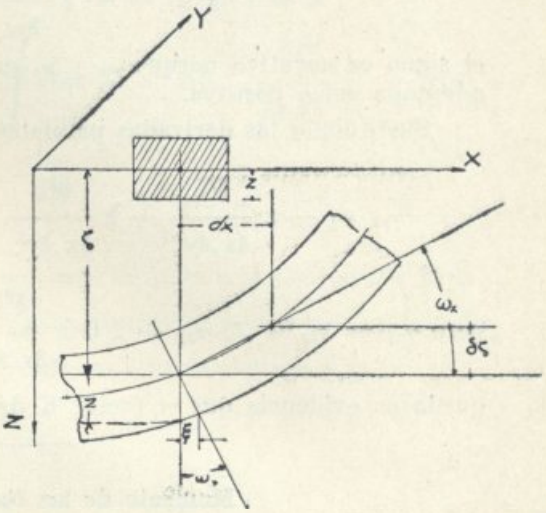


fig 4

de estas. A causa de la deformación el segmento PQ se transforma en PQ'; proyectado el corrimiento sobre el eje **x** será el segmento PP' = $d\xi$ pero siendo función de y, debe notarse

$$PP' = d\xi = \frac{\delta \xi}{\delta y} dy . \qquad (5)$$

Analogamente el corrimiento proyectado sobre el eje y es:

$P_2P_2' = \frac{\delta \eta}{\delta x} . dx$. La variación del ángulo recto será

$$\alpha + \beta = \gamma_{xy} = \frac{\delta \xi}{\delta y} + \frac{\delta \eta}{\delta x} \qquad (6)$$

La tangente a la superficie elástica en orientación del eje **x** es:

$$\text{tg } \omega_x = \omega_x = \frac{\delta \zeta}{\delta x} \qquad (7)$$

Según el eje y: $\text{tg } \omega_y = \omega_y = \frac{\delta \zeta}{\delta y}$ (8)

y de la observación de la fig. 4 surge que el corrimiento de un punto situado en un plano paralelo al xy será

$$\xi = z \operatorname{tg} \omega_x = - z \frac{\delta \zeta}{\delta x} \qquad (9)$$

$$\eta = z \operatorname{tg} \omega_y = - z \frac{\delta \zeta}{\delta y} \qquad (10)$$

el signo es negativo porque ω_x y ω_y giran en sentido opuesto a la rotación adoptada como positiva.

Sustituimos las derivadas parciales de (9) y (10) en la (6):

$$\gamma_{yx} = - z \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x . \delta y} - z \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x . \delta y} = - 2 z \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x . \delta y}$$

$$\text{pero } \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \therefore \tau_{xy} = 2 G z \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x . \delta y} \qquad (11)$$

queda en evidencia que el factor K de (4) vale (—2).

Momento de las fuerzas tangenciales

En el área 2 - 3 - 7 - 6 de la fig. 5 considerando el plano elemental dy.dz obra ahí la fuerza tangencial τ_{xy} . dy . dz.

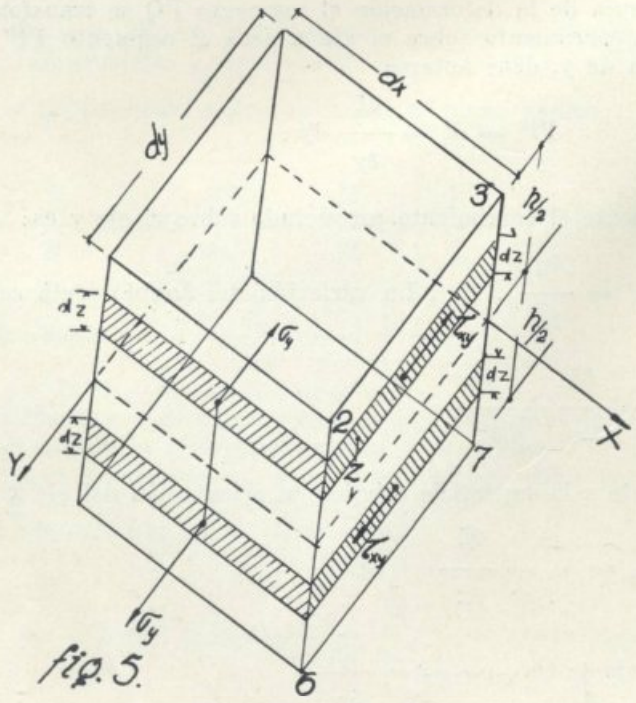


fig. 5.

El momento estático de todas las fuerzas análogas en el área citado se obtiene de la integración entre los límites $z = +\frac{h}{2}$; y $z = -\frac{h}{2}$.

El momento sobre la unidad se designará con T_{xy}

$$T_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot dz \cdot z = -2G\frac{\delta^2\zeta}{\delta x \cdot \delta y}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -2G \cdot I_y \frac{\delta^2\zeta}{\delta x \cdot \delta y} \qquad (12)$$

donde $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz = \frac{h^3}{12} = I_y$ es el momento de inercia del elemento de la sección para altura h y ancho igual a la unidad medido en sentido del eje y.

Análogamente:

$$T_{yx} = -2G \cdot I_x \cdot \frac{\delta^2\zeta}{\delta_x \cdot \delta_y} \qquad (13)$$

Considerando las (6) y (7) . $\frac{\delta\zeta}{\delta x} = \omega_x$ y $\frac{\delta\zeta}{\delta x} = \omega_y$ escríbense las (12) y (13)

$$T_{xy} = -2G \cdot I_y \cdot \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta\zeta}{\delta x}\right) = -2G \cdot I \cdot \frac{\delta\omega_x}{\delta y} \qquad (14)$$

$$T_{xy} = -2G \cdot I_x \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta\zeta}{\delta y}\right) = -2G \cdot I \cdot \frac{\delta\omega_y}{\delta x} \qquad (15)$$

Expresiones que ponen en evidencia que los momentos tangenciales son funciones de la variación en la deformación angular, el momento T_{xy} situado en un plano normal al eje **x** depende de la variación de ω_x al progresar en la orientación de y como ya por intuición aclara la simple observación de la fig. 16. Estos momentos tangenciales se oponen a la rotación relativa entre dos planos consecutivos y contribuyen así en una proporción notable según el caso, a la resistencia de la placa contra una deformación.

Aclarado este criterio respecto a las fuerzas elásticas en la placa se deduce la ecuación diferencial de la superficie elástica, problema clásico ya planteado por Gras hof en 1878, y por cuya integración y teniendo en cuenta las condiciones de borde del problema se llega al conocimiento de las fuerzas elásticas.

Ecuación diferencial de la superficie elástica

En la fig. 6 se representa un trozo de placa referida a ejes coordenados cuyo origen está en el centro de la placa y a mitad de su espesor. Se designa con ζ los corrimientos elásticos en sentido vertical del eje de las z; ξ y η los corrimientos respectivamente en dirección de x é de y; debe tenerse en cuenta que por la índole del problema estos corrimientos son muy pequeños frente a las dimensiones de la placa.

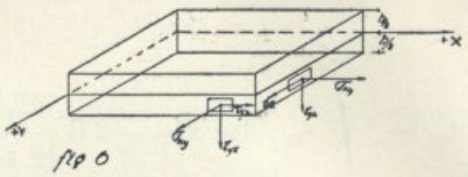


fig 6

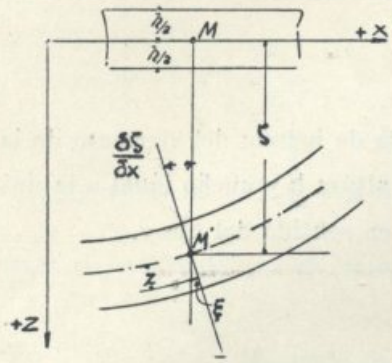


fig 7(a)

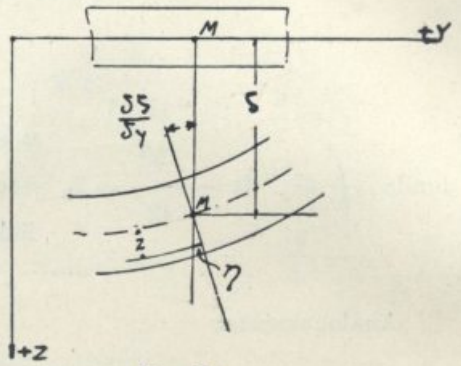


fig 7(b)

De la observación de la fig. 7a y 7b surge:

$$\xi = -z\,\frac{\delta\zeta}{\delta x} \qquad (16) \qquad\qquad \eta = -z\,\frac{\delta\zeta}{\delta y} \qquad (17)$$

Las dilataciones específicas serán:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta\xi}{\delta x} = -z\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} \qquad (18) \qquad\qquad \varepsilon_y = \frac{\delta\eta}{\delta y} = -z\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2} \qquad (19)$$

De la teoría de las tensiones se obtiene

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,.\,\sigma_y\right) \quad (20a) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\,\sigma_x\right) \quad (20b)$$

y resolviendo respecto a σ_x y σ_y y luego sustituyendo la (18) y (19)

$$\sigma_x = \frac{E\,.\,m^2}{m^2-1}\left(\varepsilon_x + \frac{1}{m}\,.\,\varepsilon_y\right) = -\frac{E\,.\,m^2}{m^2-1}\,.\,z\,.\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right) \quad (21)$$

$$\sigma_y = \frac{E\,.\,m^2}{m^2-1}\left(\varepsilon_y + \frac{1}{m}\,.\,\varepsilon_x\right) = -\frac{E\,.\,m^2}{m^2-1}\,.\,z\,.\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2}\right) \quad (22)$$

En la fig. 8 se reprenta en planta un rectángulo de dimensiones **dx** y **dy** tomado en el interior de la placa a distancia z del plano neutro **xy**.

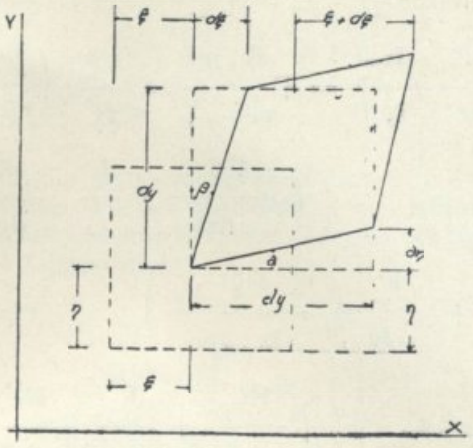


fig 8

La distorsión será:

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{\delta\xi}{\delta y} + \frac{\delta\eta}{\delta x} \quad \text{pero} \quad \tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\delta\xi}{\delta y} + \frac{\delta\eta}{\delta x}\right)$$ aquí sustituídos las derivadas de 16 y 17 encontramos:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2\,G \cdot z \cdot \frac{\delta^2\zeta}{\delta x \cdot \delta y} \qquad (23) \qquad \gamma_{yx} = -2\,z\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta x \cdot \delta y}$$

la relación entre G y E es: $G = \dfrac{m}{2\,(m+1)}\,E$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{E \cdot m}{m+1} \cdot z\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta x \cdot \delta y} \qquad (24)$$

Recordamos las ecuaciones de equilibrio de un paralelepípedo infinitísimo de aristas **dx**; **dy**: **dz** solicitado por tensiones normales y tangenciales se deduce (en el presente caso no habrá tensiones normales σ_z).

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz} \qquad (25)$$

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z} = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{zy}}{\delta z} = 0 \qquad (27)$$

resueltas estas ecuaciones con respecto a $\frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z}$ y $\frac{\delta\tau_{zy}}{\delta z}$ y sustituyendo luego las derivadas parciales de 21 - 22 - 24

$$\frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z} = -\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} - \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} = +\frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot z \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\right.$$

$$\left(\frac{\delta^2\zeta}{dx\delta} + \frac{1}{m}\frac{\delta^2\zeta}{dy^2}\right) +$$

$$+\frac{E \cdot m}{m+1} \cdot z \cdot \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x \cdot \delta y}\right) \quad \text{efectuando operaciones}$$

$$\frac{\delta\tau_{xz}}{dz} = \frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot z \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right) +$$

$$+\frac{E \cdot m^2}{(m+1)\ (m-1)} \cdot z \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right)$$

finalmente

$$\frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z} = \frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot z \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right)$$

y análogamente

$$\frac{\delta\tau_{zy}}{\delta z} = -\frac{\delta\sigma_y}{\delta y} - \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} = \frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot z \cdot \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right)$$

Intégrase estas dos ecuaciones

$$\int \frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z} \cdot dz = \frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right) \int z \cdot dz \,.$$

$$\tau_{zx} = \frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right)$$

para $z = \pm \frac{h}{2}$ debe ser $\tau_{zx} = o$ porque en los planos superior e inferior no pueden existir fuerzas tangenciales τ_{zx} ó τ_{zy}. El valor máximo de τ_{zx} se alcanzará para $z = o$,y el mínimo valor o sea O para $z = \pm \frac{h}{2}$; por tal razón:

$$\tau_{zx} = -\frac{E \cdot m^2}{m^2-1}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right)\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} \pm \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right) \quad (28)$$

$$\tau_{zy} = \frac{E \cdot m^2}{m^2-1}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right)\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right) \quad (29)$$

En la fig. 9, en los dos planos elementales dx - dz y dy . dz, las tensiones dan origen a los momentos estáticos siguientes, y que indicaremos con S_x; S_y; los correspondientes a las tensiones normales; además con T_{xy}; T_{yx} los correspondientes a tensiones tangenciales.

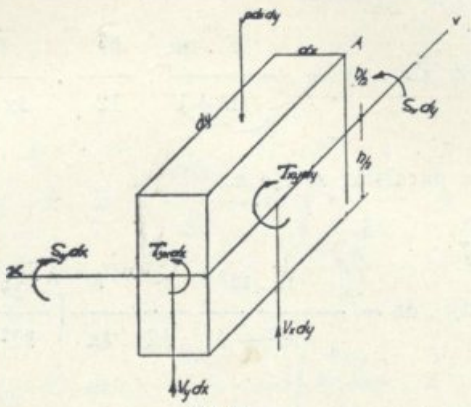


fig 9

En torno al eje y:

$$S_x \cdot dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right) dy$$

En torno al eje x:

$$S_y \cdot dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dx \cdot dz = -\frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2}\right) dx$$

Momento tangencial en el plano z y:

$$T_{xy}\,dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot m^2}{m+1} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz \, \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x \cdot \delta y} =$$

$$= -\frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\delta^2 \zeta}{dx \cdot dy}\,dy$$

Momento tangencial en el plano zx:

$$T_{yx}\,dx = \int \tau_{yx} \cdot z \cdot dx \cdot dy = -\frac{E \cdot m}{m+1} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x \cdot \delta y}\,dx$$

Fuerzas cortantes paralelas al eje z.

$$V_x\,dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot m^2}{m^2-1} \frac{h^3}{12} \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta^2 \xi}{\delta d^2} + \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} \right) dy$$

$$V_y\,dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \cdot dx \cdot dz = -\frac{Em^2}{m^2-1} \frac{h^3}{12} \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2} \right) dx$$

llamaremos: $\dfrac{m^2}{m^2-1} \dfrac{E \cdot h^3}{12} = N$ la rigidez de la placa entonces las relaciones anteriores referidas a la unidad

$$S_x = -N \left(\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} + \frac{1}{m} \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2} \right) \qquad (30)$$

$$S_y = -N \left(\frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2} + \frac{1}{m} \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} \right) \qquad (31)$$

$$T_{yx} = T_{xy} = -N \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x \cdot \delta y} \qquad (32)$$

$$V_x = - N \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2} \right) \qquad (33)$$

$$V_y = - N \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2} \right) \qquad (34)$$

Las ecuaciones 26 y 27 multiplicamos por z e integramos:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} \cdot z \cdot dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} \cdot z \cdot dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} \cdot z \cdot dz = 0$$

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \therefore \frac{\delta Sx}{\delta x} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} \cdot z \cdot dz$$

$$T_{xy} = \int \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \therefore \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta y} = \int \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} \cdot z \cdot dz$$

$$V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot dz = \int \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} \left(\frac{h}{2} - z \right) dz =$$

$$V_x = \frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \tau_{xz}}{dz} \cdot dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \tau_{xz}}{dz} \cdot z \cdot dz =$$

$$V_x = \frac{h}{2} \left[\tau_{xz} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \tau_{xz}}{dz} \cdot z \cdot dz =$$

$$V_x = \quad O \quad - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} \cdot z \cdot dz \cdot$$

con estas expresiones deducidas sustituídas en la 26 y 27 como arriba indicada

$$\text{de la 26} \qquad \frac{\delta S_x}{\delta x} + \frac{\delta T_{xy}}{\delta y} - V_x = O \tag{37}$$

$$\text{de la 27} \qquad \frac{\delta S_y}{\delta y} + \frac{\delta T_{xy}}{\delta x} - V_y = O \tag{38}$$

Para el elemento de la placa de altura **h** y planta dx . dy expresamos el equilibrio entre la carga p . dx . dy y las fuerzas verticales de corte por V_x y V_y (fig. 9).

$$dy \cdot -\frac{\delta V_x}{\delta x} \cdot dx + dx \cdot \frac{\delta V_y}{\delta y} \cdot dy + p \cdot dx \cdot dy = O \quad \text{reduciendo}$$

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} \pm \frac{\delta V_y}{\delta y} + p = O \tag{39}$$

en esta sustituído las derivadas parciales de V_x y V_y de las 37 y 38. Resulta

$$\frac{\delta^2 S_x}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 T_{xy}}{\delta x^2 \cdot \delta y^2} + \frac{\delta^2 S_y}{\delta y^2} = -p \tag{40a}$$

la carga repartida p es función de los derivadas parciales segundas de los momentos de tensiones.

En la 40a sustituimos todavía las derivadas parciales segundas de las 30; 31 y 32

$$\boxed{\frac{\delta^4 \zeta}{\delta x^4} + 2\frac{\delta^4 \zeta}{\delta x^2 \cdot \delta y^2} + \frac{\delta^4 \zeta}{\delta y^4} = \frac{p}{N}} \tag{40}$$

que es la ecuación diferencial fundamental de la placa elástica, válida para placas de relativa rigidez, vale decir, cuyos corrimientos sean muy pequeños. En placas de pequeña rigidez y fijadas en los bordes, debido a la gran deformación se presentan además en el plano central (plano x y) tensiones normales de la acción de membrana.

Por la integracin de la 40 y empleando las condiciones de borde a los efectos de determinar las constantes de la integración se obtiene la ecua-

ción de las flechas o sea de la superficie elástica y aplicando luego las 30 - 31 - 32 - 33 y 34 se pueden calcular los momentos y fuerzas de las tensiones que son S_x; S_y; T_{xy}; V_x; V_y quedando así resuelto el problema.

La solución del problema ha sido lograda para los casos fundamentales y por aproximación por Nadai, Henky y Leitz. Recién en 1925 el Dr. Ing. Lewe y el Dr. Ing. Marcus, cada uno han dado una solución completa; el primero mediante la aplicación de las series de Fourier, el segundo reduciendo la ecuación parcial de 4º orden a dos ecuaciones de 2º orden y las sustituye por ecuaciones a las diferencias, en rigor reemplaza así la superficie elástica por una superficie de facetas y desarrolla su teoría de los tejidos elásticos, así llamado por cuanto reune las propiedades elásticas del material en las líneas poligonales que forman las aristas de las facetas.

Estas soluciones rigurosas no se prestan para las rápidas aplicaciones que requiere la técnica y por tal razón el mismo Dr. Marcus ha ideado un método aproximado que responde a tales exigencias y cuyo grado de aproximación suficiente comprueba por confrontación de los resultados con la teoría exacta. Antes de ocuparnos del método aproximado de Marcus, vamos a aplicar la ecuación diferencial de la superficie elástica al estudio de la solución rigurosa de las placas circulares con carga central simétrica. Veremos que en tal condición es fácil la integración de la ecuación diferencial, pero previamente conviene transformarla en coordenadas polares.

La ecuación diferencial de la placa en coordenadas polares

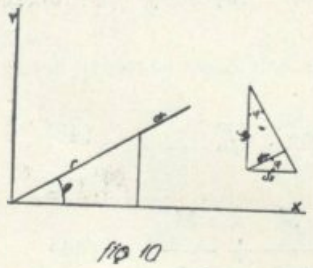


Fig 10

De la figura 10 anotamos

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad (44)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} \qquad (42)$$

siendo **r** y φ funciones de **x** e **y**.

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \cos\varphi \;;\; \frac{\delta\varphi}{\delta x} = -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\frac{\delta r}{\delta y} = \mathrm{sen}\,\varphi \;;\; \frac{\delta\varphi}{\delta y} = \frac{1}{r}\,.\,\cos\varphi$$

para una función F de **x** é **y** o de **r** y φ tendremos

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta r}\frac{\delta r}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta\varphi}\frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta r}\cos\varphi - \frac{\delta F}{\delta\varphi}\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right) = \left[\cos\varphi\,\frac{\delta(\,)}{\delta r} - \frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\frac{\delta(\,)}{\delta\varphi}\right] -$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = \cos^2\varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta^2 r} - \frac{1}{r} \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \frac{\delta^2 F}{\delta\varphi \cdot \delta r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \frac{\delta F}{\delta\varphi} -$$

$$- \frac{1}{r} \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta r \cdot \delta\varphi} + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2\varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta\varphi}$$

y reduciendo:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 F}{\delta r^2} \cdot \cos^2\varphi + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2\varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{sen}^2\varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta r}$$

$$- 2 \frac{1}{r} \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta r \cdot \delta\varphi} + 2 \frac{1}{r^2} \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta\varphi}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 F}{\delta r^2} \cdot \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1}{r} \cdot \cos^2\varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{sen}^2\varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta r} +$$

$$+ 2 \frac{1}{r} \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta^2 \cdot \delta\varphi} 2 \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta\varphi}$$

la suma de las dos derivadas parciales segundas es

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 F}{\delta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 F}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta F}{\delta r} = \nabla^2 F \qquad (43)$$

indicando con ∇^2 el operador de Laplace $\nabla^2 = \dfrac{\delta^2}{\delta x^2} + \dfrac{\delta^2}{\delta y^2}$ (44)

Ahora convertimos la (40) en coordenadas polares

$$\frac{\delta^4 \zeta}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \zeta}{\delta x^2 . \delta y^2} + \frac{\delta^4 \zeta}{\delta y^4} = \frac{p}{N} \quad (40) \text{ que escribimos}$$

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \zeta \right) = \frac{\rho}{N} \text{ y con referencia a la } (43)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \right) \zeta = \frac{\rho}{N} \qquad (45)$$

que es la ecuación diferencial de superficie elástica en coordenadas polares.

En caso el contorno de la placa como también la carga son centralsimétricos, también así será la superficie elástica, su ordenada ζ dependerá solamente de la variable r entre r = o y r = a (radio del contorno de la

placa), y será independiente de φ; por cuya razón la ecuación diferencial (45) se simplifica en

$$\nabla^2 \nabla^2 \zeta = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 = \frac{p}{N} \qquad (46)$$

N siembre tiene el mismo significado dado anteriormente (30): $N = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{E\, h^3}{12}$ = rigidez de la placa.

Las (30) a (34) en coordenadas ortogonales dan los momentos y fuerzas S_x ; S_y ; T_{yx} ; T_{xy} ; V_x ; V_y ; y también a estas aplícanse las fórmulas de pasaje a coordenadas polares.

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 F}{\delta r^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta \varphi^2} + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta r} -$$

$$- 2 \frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta r \cdot \delta \varphi} + 2 \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\delta F}{\delta \varphi}$$

en el presente caso por ser ζ independiente de φ queda:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\zeta}{dr} \operatorname{sen}^2 \varphi \text{ analogamente}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \cdot \cos^2 \varphi$$

estas sustituidas en las (30) y (31) adoptando para el eje **x** la orientación **r** y $\varphi = o$ y se escribe S_r en vez de S_x, también S_t en vez de S_y

$$(47) \quad \boxed{S_r = - N \left(\frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right)}$$

$$(48) \quad \boxed{S_t = - N \left(\frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} + \frac{1}{m} \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \right)}$$

Los movimientos específicos tangenciales son dados por la (32); las fórmulas de pesaje son:

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \cos \varphi \; ; \; \frac{\delta r}{\delta y} = \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = -\frac{1}{r}\,\operatorname{sen}\varphi\ ;\ \frac{\delta\varphi}{\delta y} = \frac{1}{r}\,.\,\cos\varphi$$

para F función de **x** e **y** ó de **r** y φ tendremos

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta r}\,.\,\frac{\delta r}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta \varphi}\,.\,\frac{\delta \varphi}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta r}\cos\varphi - \frac{\delta F}{\delta \varphi}\,\frac{1}{r}\,.\,\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\delta(\ )}{\delta y} = \frac{\delta(\ )}{\delta r}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\delta(\ )}{\delta\varphi}\,.\,\frac{1}{r}\cos\varphi$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x\,.\,\delta y} = \operatorname{sen}\varphi\,.\cos\varphi\,.\,\frac{\delta^2 F}{\delta r^2} - \frac{1}{r^2}\,.\,\operatorname{sen}^2\varphi\,.\,\frac{\delta F}{\delta\varphi} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}^2\varphi\,\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi\,.\,\delta r} +$$

$$+\frac{1}{r}\cos^2\varphi\,\frac{\delta^2 F}{\delta r\,.\,\delta\varphi} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\varphi\,.\cos\varphi\,.\,\frac{\delta F}{\delta r} -$$

$$-\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\varphi\,.\cos\varphi\,\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi^2}\,. - \frac{1}{r^2}\,.\cos^2\varphi\,.\,\frac{\delta F}{\delta\varphi}$$

debido a la simetría central ya citada pueden tacharse las derivadas en φ con lo que queda

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x\,.\,\delta y} = \frac{\delta^2\zeta}{\delta x\,.\,\delta y} = \operatorname{sen}\varphi\,.\cos\varphi\,.\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta r^2} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\varphi\,.\cos\varphi\,.\,\frac{\delta\zeta}{\delta r}$$

ahora en orientación al eje **x** cuando $\varphi = o$ como también para $\varphi = \frac{\pi}{2}$

será $\dfrac{\delta^2\zeta}{\delta x\,.\,\delta y} = o$

significando esto $T_{rt} = o = T_{tr}$ los momento tangenciales son nulos.

El esfuerzo de corte en coordenadas ortogonales es dado por la (33) y transformado en coordenadas polares es

$$V_x = V_r = -N\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta r^2} + \frac{1}{r^2}\,.\,\frac{\delta^2\zeta}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\delta\zeta}{\delta r}\right)$$

también por ser ζ independiente de φ:

$$V_r = -N\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\zeta}{dr}\right) \qquad (49)$$

Si $r = a$ es el radio del contorno exterior de la placa la resolución general de la ecuación diferencial (46) es

$$\zeta = \zeta_o + C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_3 \cdot r^2 \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right) + C_4 \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right) \qquad (50)$$

La integral particular ζ_0 puede hallarse por separación de la ecuación de 4º orden en dos partes de 2º orden, con analogía a la ecuación diferencial de la línea elástica.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) M = -p\left(1 + \frac{1}{m}\right) \text{ é } \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\zeta = -\frac{M}{N\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

y su transformación

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dM}{dr}\right) = -p.r\left(1 + \frac{1}{m}\right) \text{ é } \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{d\zeta}{dr}\right) = -\frac{M}{N\left(1+\frac{1}{m}\right)} r \qquad (51)$$

su integración para **p** constante es

$$\zeta_o = \frac{p\, r^4}{64\, N} \qquad (52)$$

En esta **M** significa $S_r + S_t$ una invariante puesto que esta suma expresa la suma de las curvaturas para dos orientaciones normales en un punto de la superficie elástica (regla de Gauss).

$$M = S_x + S_y = -N\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2}\right)$$

$$= -N\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y}\right)$$

$$= -N\left(1 + \frac{1}{m}\right)\nabla^2\zeta$$

sustituídas las derivadas 1ª y 2ª de la (50) en (47), (48) y (49) y ordenando:

$$S_r = -\frac{p \cdot r^2}{16}\left(3 + \frac{1}{m}\right) - N\left\{2\, C_2\left(1 + \frac{1}{m}\right) + C_3\left[3 + \frac{1}{m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)\ln\frac{r}{a}\right] - C_4\left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{r^2}\right\} \qquad (53)$$

$$S_t = -\frac{p \cdot r^2}{16}\left(1+\frac{3}{m}\right) - N\left\{2\,C_2\left(1+\frac{1}{m}\right)+C_3\left[\frac{3}{m}+1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\left(2+\frac{m}{1}\right)\ln\frac{r}{a}\right]+C_4\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{r^2}\right\} \qquad (54)$$

$$M = S_r + S_t = -\frac{p \cdot r^2}{4}\left(1+\frac{1}{m}\right) - N\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[4\,C_2+\right.$$

$$\left.+4\,C_3\left(1+\ln\frac{r}{a}\right)\right] \qquad (55)$$

$$V_r = -\frac{p \cdot r^2}{2} - 4\,N\,\frac{C_3}{r} \qquad (56)$$

$$\frac{d\zeta}{dr} = \frac{p \cdot r^3}{16\,N} + 2\,C_2\,r + C_3\left(2\,r \cdot \ln\frac{r}{a} + r\right) + \frac{1}{r} \cdot C_4 \qquad (57)$$

Convenimos en indicar con ζ_1 las coordenadas de la superficie elástica de la placa circular apoyada en su contorno y sometida a la carga uniforme **p** ; con ζ'_1 las ordenadas de la superficie elástica originada por un par de empotramiento uniforme en el contorno $M_e = 1$;

Con ζ_2 las ordenadas de la superficie elástica de la placa circular empotrada en su contorno y cargada con la carga uniforme **p**.

La condición de empotramiento implica para el contorno r = a

$$\frac{d\zeta_1}{dr} + M_e\,\frac{d\zeta'_1}{dr} = 0 \qquad \text{(tangente horizontal)}$$

y las coordenadas de la superficie elástica de la placa empotrada son dadas por

$$\zeta_2 = \zeta_1 + M_e\,\zeta'_1$$

En el caso de la carga p total, se anulan los términos logarítmicos de la integral general (50) porque para r = o corresponde ln o = ∞, como el corrimiento ζ no puede ser ∞ debe anularse C_3 y C_4.

Las constantes C_1 y C_2 obtenemos de las condiciones de borde

para r = a corresponde ζ = o y S_r = o

En el problema de la placa anular puede utilizarse para la determinación de C_3 y C_4 las condiciones siguientes,

para r = b corresponde S_r = o y V_r = o

De tal manera para las distintas condiciones de carga siempre centralsimétricas para placas circulares y anulares de radio exterior = a, hállanse las constantes y estas sustituídas en las (53) (54) (55) (56), proporcionan las fórmulas finales que a continuación se indican y por cuyo medio se pueden calcular las tensiones o también las dimensiones convenientes.

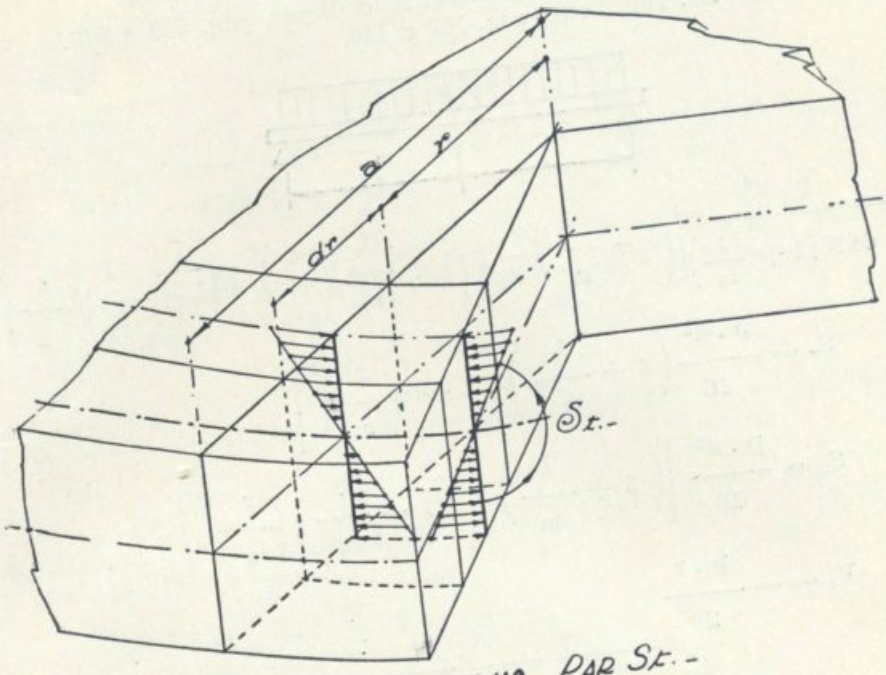


FIGURA Nº 11a. PAR Sr.-

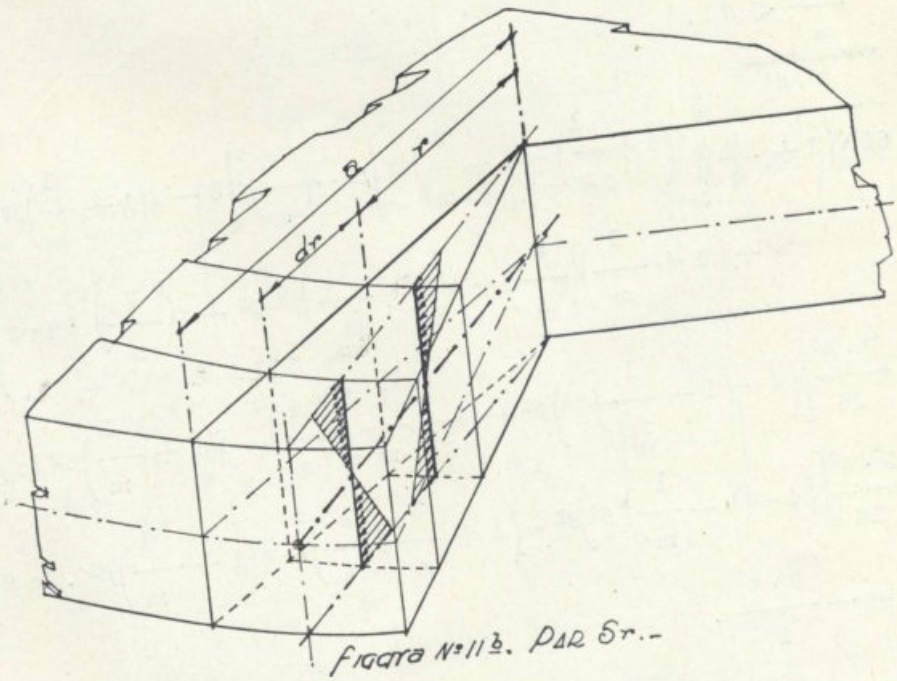
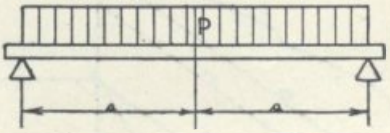


FIGURA Nº 11b. PAR Sr.-

Las tablas completas se encuentran en las obras siguientes:
Statik im Eisenbetonbau - Dr. Ing. Kurt Beyer, pág. 559 a 570.
Pilzdecken Dr. Ing. Lewe, pág. 112 a 115.

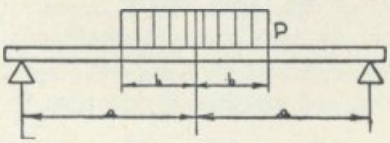


$$\zeta = \frac{p \cdot a^4}{64\,N\left(1+\frac{1}{m}\right)}\left[\left(5+\frac{1}{m}\right)-2\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^4\right]$$

$$S_r = \frac{p \cdot a^2}{16}\left(3+\frac{1}{m}\right)\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$S_t = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(3+\frac{1}{m}\right)-\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$V_r = -\frac{p \cdot r}{2}$$



$$\frac{b}{a} = \beta$$

$$\frac{r}{a} < \beta$$

$$\zeta = \frac{p \cdot a^4}{64\,N\left(1+\frac{1}{m}\right)}\left\{\left[4\left(3+\frac{1}{m}\right)-\left(7+\frac{3}{m}\right)\beta^2\right]\beta^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[8-2\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^2\right]\beta^2 + \left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^4+4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\left[\beta^2+2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\ln\beta\right\}$$

$$S_r = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(4-\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^2\right)\beta^2-\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\ln\beta\right]$$

$$S_t = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(4-\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^2\right)\beta^2-\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2 \cdot \ln\beta\right]$$

$$V_r = -\frac{p \cdot r}{2}.$$

$$\frac{r}{a} > \beta$$

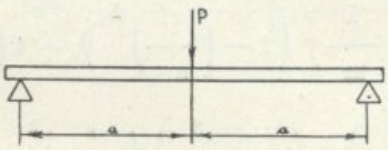
$$\zeta = \frac{p \cdot a^2 \cdot b^2}{32\,N\left(1+\frac{1}{m}\right)}\left[2\left(3+\frac{1}{m}\right)-\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right.$$

$$\left.\left[2\left(3+\frac{1}{m}\right)-\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^2\right]+2\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[\beta^2+2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$S_r = -\frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^4\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)+4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$S_t = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^2\left(4-\beta^2\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\right)-4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$V_r = -\frac{pl}{2}\,\frac{b}{r}$$



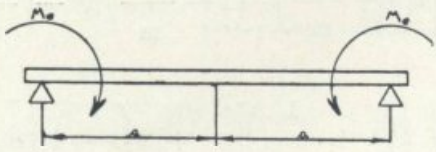
$$\zeta = \frac{P \cdot a^2}{16\,\pi\,N\left(1+\frac{1}{m}\right)}\left[\left(3+\frac{m}{1}\right)\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]+2\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$S_r = -\frac{P}{4\pi}\left(1+\frac{1}{m}\right)\ln\frac{r}{a}$$

$$S_t = \frac{P}{4\pi}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)-\left(1+\frac{1}{m}\right)\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$V_r = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

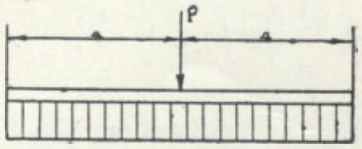
$$\zeta = \frac{M_e \cdot a^2}{2N\left(1+\frac{1}{m}\right)}\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$



$$S_r = M_e$$

$$S_t = M_e$$

$$V_r = 0$$



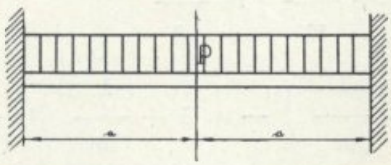
$$\zeta = \frac{P \cdot a^2}{64\pi N\left(1+\frac{1}{m}\right)}\left[\left(7+\frac{3}{m}\right)-2\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^4+ \right.$$

$$\left. + 8\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2 \ln\frac{r}{a}\right]$$

$$S_r = -\frac{P}{16\pi}\left[\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)+4\left(1+\frac{1}{m}\right)\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$S_t = \frac{P}{16\pi}\left[\left(1-\frac{5}{m}\right)+\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{m}\right)\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$V_r = -\frac{P}{2\pi \cdot a}\left(\frac{a}{r}-\frac{r}{a}\right)$$

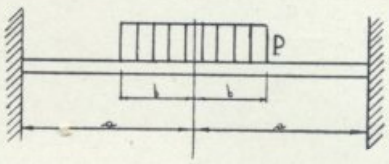


$$\xi = \frac{p \cdot a^4}{64N}\left[1-2\left(\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{r}{a}\right)^4\right]$$

$$S_r = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)-\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$S_t = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)-\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$V_r = -\frac{p \cdot r}{2}$$



$$\beta > \frac{b}{a}$$

$$\zeta = \frac{p \cdot a^4}{64\,N}\left[4\beta^2 - 3\beta^4 - 2\beta^4\left(\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{r}{a}\right)^4+4\beta^2\left(\beta^2+2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\ln\beta\right]$$

$$S_r = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^4-\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\ln\beta\right]$$

$$S_t = \frac{p \cdot a^2}{16}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^4-\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\ln\beta\right]$$

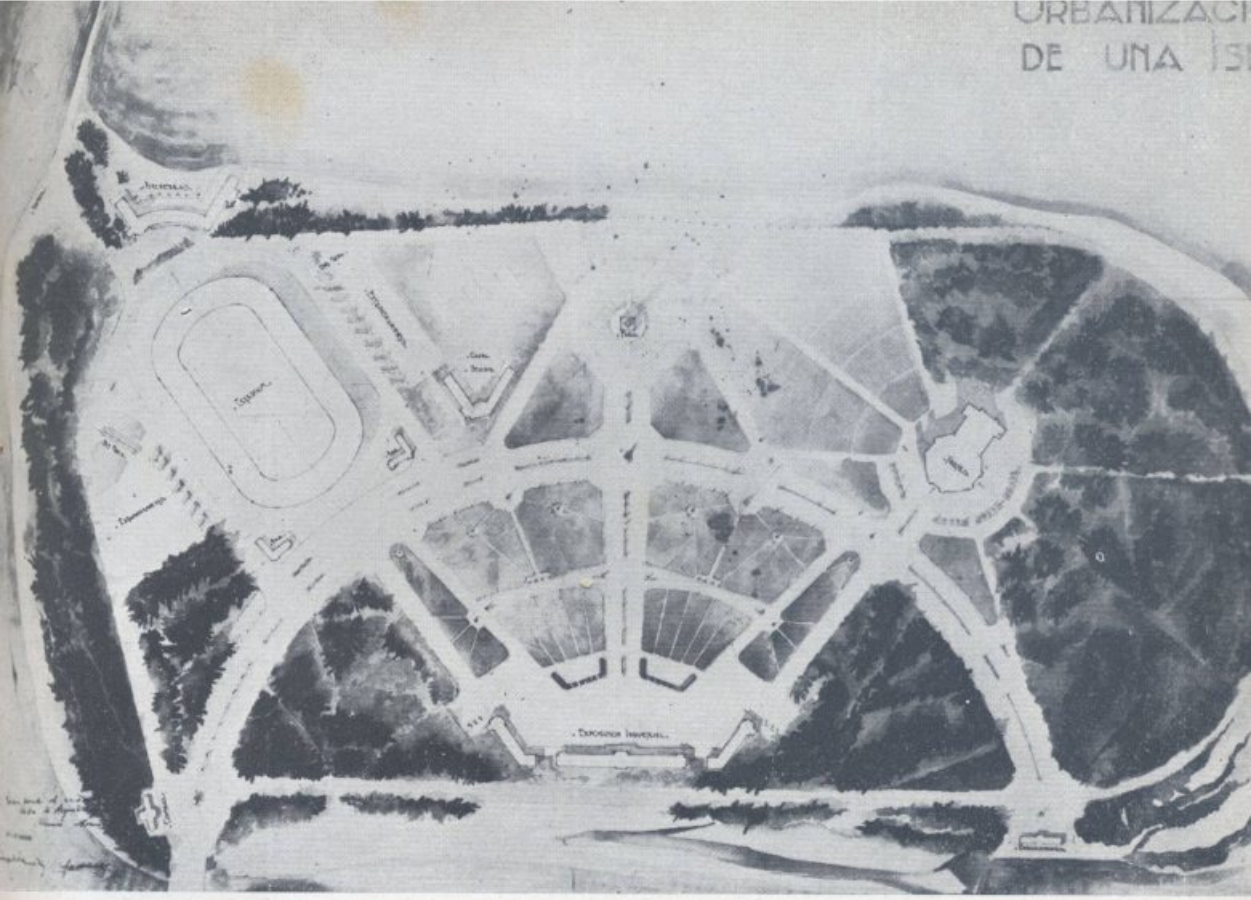
$$V_r = -\frac{p \cdot r}{2}$$

$$\beta < \frac{r}{a}$$

$$\zeta = \frac{p \cdot a^4}{32\,N}\beta^2\left[\left(2+\beta^2\right)\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)+2\left(\beta^2+2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\ln\frac{r}{a}\right]$$

$$S_r = -\frac{p \cdot a^2}{16}\left[4\beta^2-\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^4-\left(1-\frac{1}{m}\right)\beta^4\left(\frac{r}{a}\right)^2+\right.$$

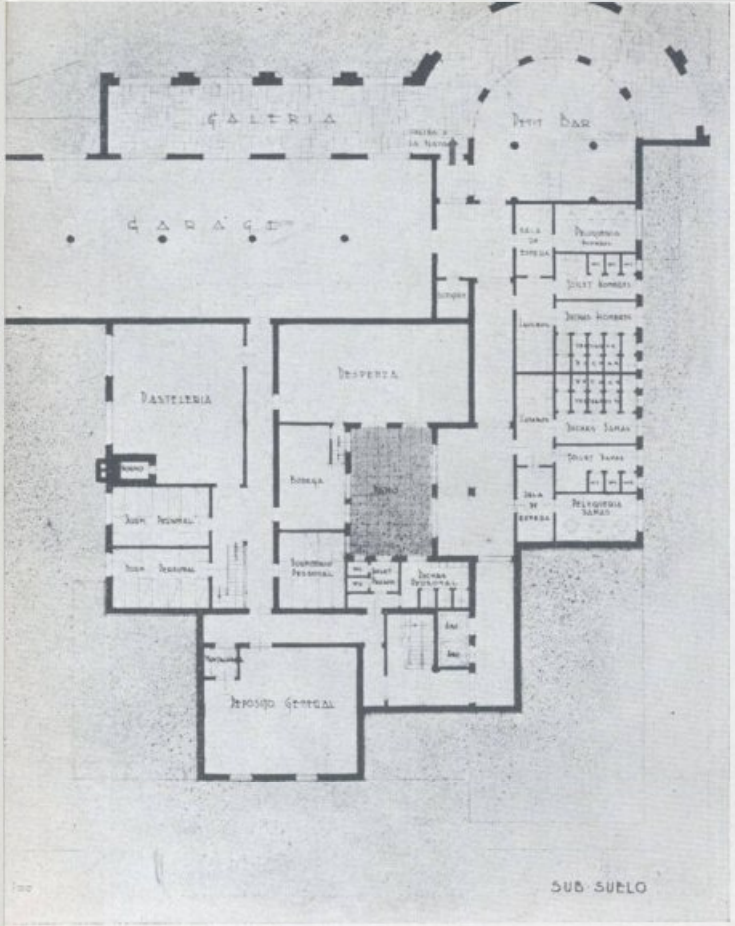
$$\left.+4\left(1+\frac{1}{m}\right)\beta^2\ln\frac{r}{a}\right]$$



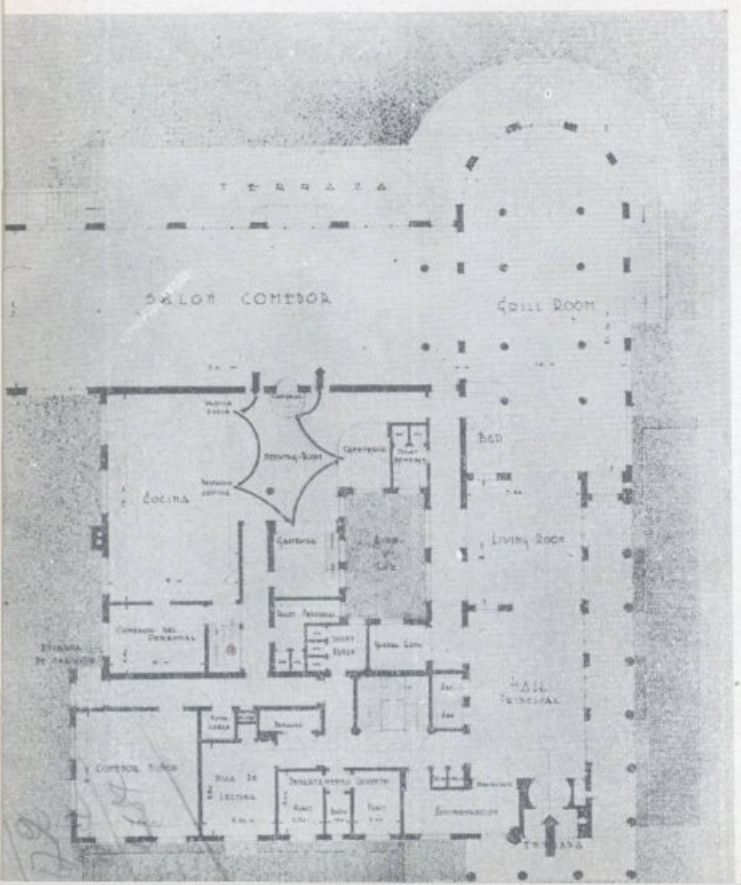
ARQUITECTURA — IV CURSO

ALUMNO
LUIS MORENO DIAZ

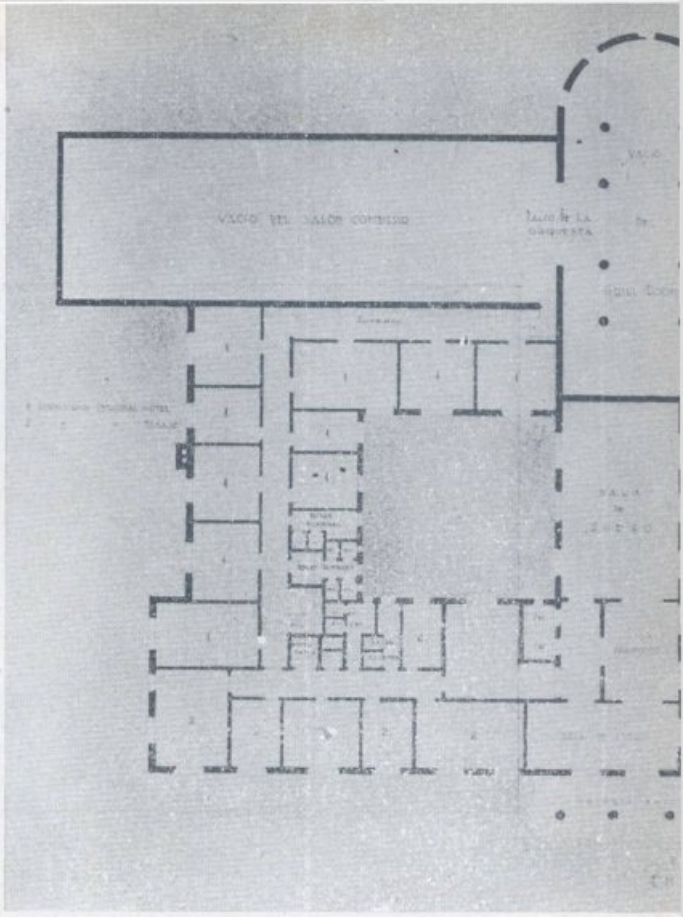
PROFESOR
ARQ. JOSÉ MICHELETTI

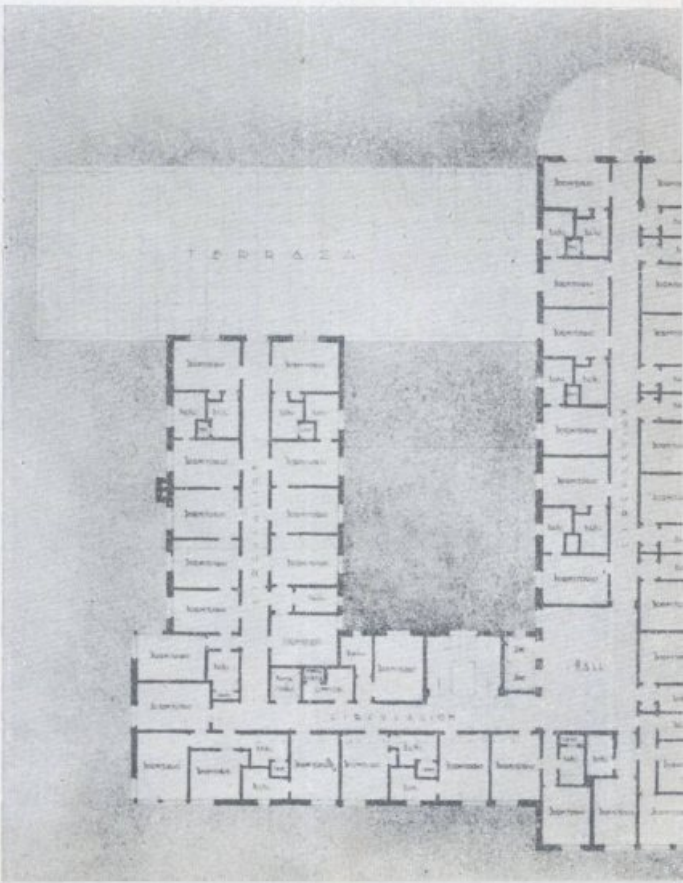


UN HOTEL EN LAS SIERRAS



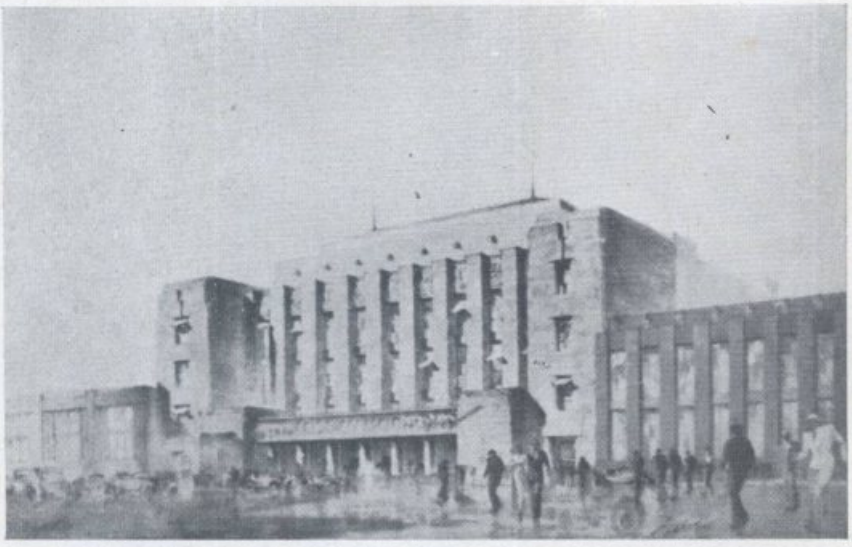
Arqs. De Lorenzi





Otaola y Roca

UNA BOLSA DE COMERCIO



ARQUITECTURA — IV CURSO

ALUMNO
RAÚL COSTA VARSI

PROFESOR
ARQ. JOSÉ MICHELETTI

Método para calcular el valor de los ángulos de un cuadrilátero dado por sus lados y el área

(Continuación de la revista Nº 8)

POR EL PROF. ING. SIMON RUBINSTEIN

Una aplicación del método que acaba de exponerse se presentará cuando en el plano de una propiedad limitada por un cuadrilátero indebidamente se indiquen solo las longitudes de los lados y el área, proponiéndose calcular los ángulos. Hay que tener presente, que las propiedades limitadas por polígonos se representan en los planos con polígonos compensados (sin error de cierre) que quedan determinados al corregir las coordenadas parciales en las planillas correspondientes, y las áreas de estos polígonos compensados que figuran en las mismas planillas son las que se anotan en los planos. En otros términos entonces, el problema planteado es el siguiente:

Dado un cuadrilátero compensado por sus lados y el área, determinar los ángulos del mismo. La aplicación del método será útil si el problema, para cuadriláteros convexos o cóncavos, presenta una sola solución (ejemplo II), o cuando presentando dos soluciones, sean éstas suficientemente próximas para que pueda aceptarse indiferentemente una ú otra, o bien tan distintas que pueda saberse sin efectuar mediciones, por una simple inspección en el terreno o por el plano, cual es la que corresponde, lo que ocurre en el ejemplo I.

Ahora, analizaré las causas de los errores en los resultados obtenidos. Desde luego, una de ellas son los errores en los cálculos logarítmicos o los errores en los cálculos con máquina que pueden restringirse ya sea tomando una tabla de logaritmos con más cifras decimales o en el segundo caso con una tabla de valores naturales de las funciones trigonométricas con más cifras decimales.

Otro motivo de error, se debe al hecho de que en los planos de polígonos se anotan como longitudes de los lados los valores obtenidos por la medición directa, y no los valores efectivos de los lados del polígono compensado que podrían calcularse en base a las coordenadas parciales corregidas de los mismos que figuran en la planilla de coordenadas y área correspondiente.

Por último, otra causa de error sería el redondeo en el plano del área tenida en la planilla respectiva. En el presente estudio, me limitaré a analizar la influencia de esta última causa. Nos proponemos entonces, calcular la influencia de un error **dS** en **x; y; u** y **v.**

Diferenciando la fórmula (I) se tiene:

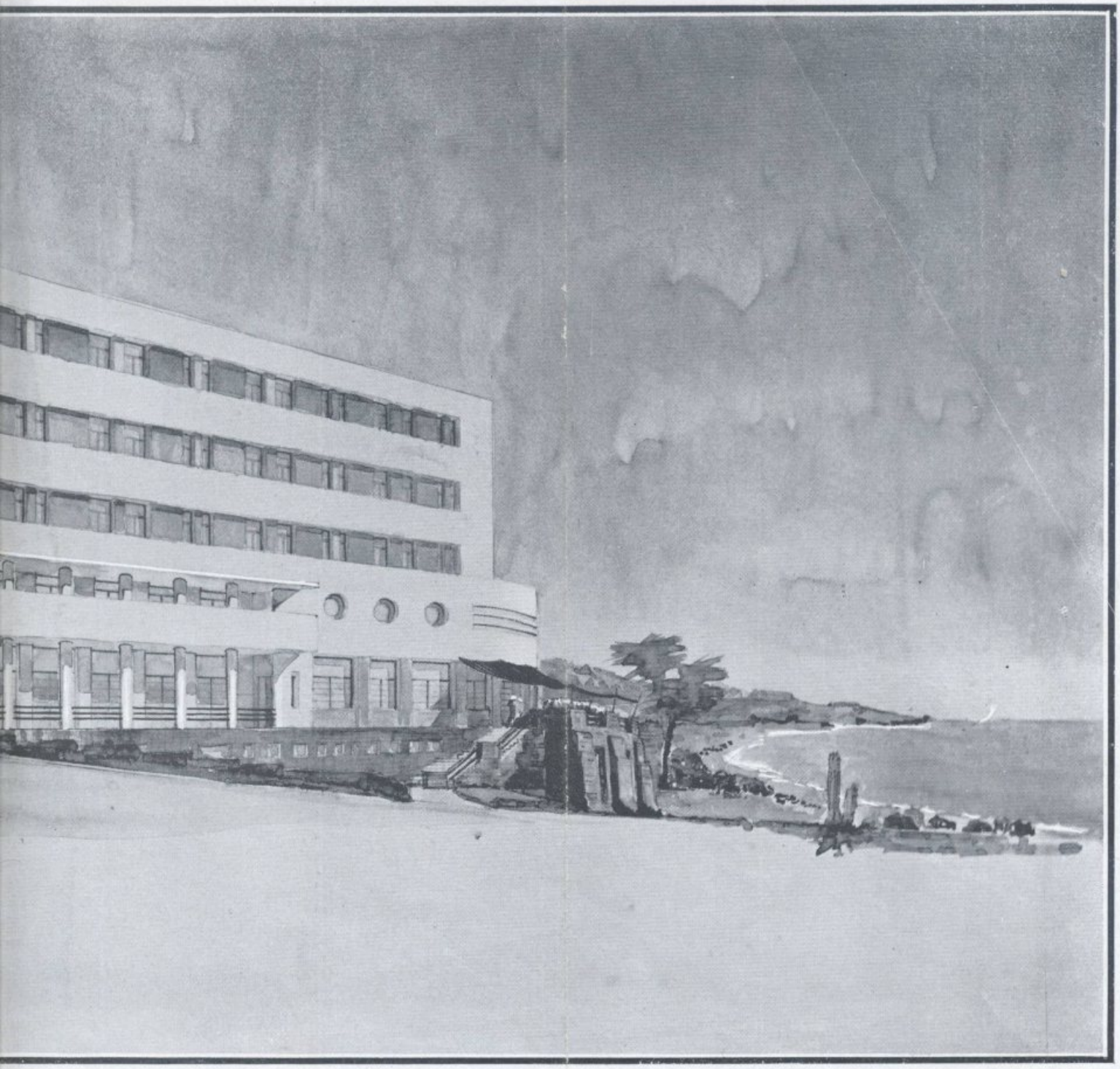
$$2dS = abcosxdx + cdcosydy \qquad (18)$$

Diferenciando (II) y simplificando:

$$absenxdx = cdsenydy \qquad (19)$$

$$\therefore \quad cddy = ab \frac{senx}{seny} dx$$

UN HOTEL EN LAS SIERRAS



Arqs. De Lorenzi, Otaola y Roca

Sustituyendo en (18) a **cd.dy** por el valor que acabamos de encontrar:

$$2dS = abcosxdx + ab\frac{senx}{seny}cosydx$$

$$dS = \frac{ab}{2seny}[cosxseny + senxcosy]\,dx = \frac{absen(x+y)}{2seny}dx =$$

$$= \frac{absen\delta}{2seny}dx$$

$$\therefore \quad dx = \frac{2senydS}{absen\delta} \qquad (IX)$$

En esta fórmula **dx** está expresado en radianes; si se quiere el resultado en segundos sexagesimales bastará multiplicar por $\rho'' = 206.264'',8$

$$\boxed{dx = \frac{2\,sen\,y\,dS}{ab\,sen\,\delta}\rho''} \qquad (IX_1)$$

Análogamente:

$$\boxed{dy = \frac{2\,sen\,x\,dS}{cd\,sen\,\delta}\rho''} \qquad (IX_2)$$

y teniendo en cuenta que en los cuadriláteros convexos o cóncavos por ser $\delta' = 360^o - \delta$; $sen\,\delta' = -sen\delta$

$$\boxed{du = \frac{-2\,sen\,v\,dS}{bc\,sen\delta}\rho''} \qquad (IX_3)$$

y

$$\boxed{dv = \frac{-2\,sen\,u\,dS}{ad\,sen\,\delta}\rho''} \qquad (IX_4)$$

Si se tiene presente que para la primer solución de **x; y; u** y **v** $sen\,\delta = sen\omega$ y para la segunda $sen\delta = -sen\omega$ los denominadores de las fórmulas (IX_1); (IX_2); (IX_3); y (IX_4) se obtiene inmediatamente (ejemplo I) ó bien sus logaritmos correspondientes (ejemplo II) aprovechando los cálculos efectuados al determinar **x'; y'; u'** y **v'.**

Diferenciando la expresión $x + y + u + v = 360^o$ se llega a la ecuación $\boxed{dx + dy + du + dv = o}$ (X) que nos servirá para controlar los valores obtenidos para **dx; dy; du** y **dv.**

EJEMPLO

Apliquemos las fórmulas que acabamos de deducir a la 2ª solución del ejemplo II (Revista Nº 8) admitiendo que el área S = 210.400 m² está redondeada en m² en cuyo caso el valor absoluto de dS $\leqq$ 0,5 m².

Haremos los cálculos para dS = 0,5 m².

$$(IX_1)\quad dx = \frac{2 \operatorname{sen} y\, d S}{ab \operatorname{sen} \delta}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} y\, d S}{-a\, b \operatorname{sen} \omega}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} 112^{\circ}19'35'' \times 0{,}5}{[5{,}73949\ (n)\ ]}\rho'' =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 112^{\circ}19'35''}{[5{,}73949\ (n)\ ]} \cdot \rho'' = [\bar{6}{,}26051\ (n)\ ] \operatorname{sen} 112^{\circ}19'35'' . \rho'' = -0'',34762$$

$$\operatorname{colog}\ (-ab \operatorname{sen} \omega) = \bar{6}{,}26051\ (n)$$

$$\log \operatorname{sen} 112^{\circ}19'35'' = \bar{1}{,}96616$$

$$\log \rho'' = 5{,}31443$$

$$\log dx = \bar{1}{,}54110\ (n)$$

$$dx = -0'',34762$$

$$(IX_2)\quad dy = \frac{2 \operatorname{sen} x . d S}{c\, d \operatorname{sen} \delta}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} x . d S}{-cd \operatorname{sen} \omega}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} 192^{\circ}17'44'' \times 0{,}5}{[5{,}69955\ (n)\ ]}\rho'' =$$

$$= [\bar{6}{,}30045\ (n)\ ] \operatorname{sen} 192^{\circ}17'44'' . \rho'' = 0'',08773$$

$$(IX_3)\quad du = \frac{-2 \operatorname{sen} v . d S}{bc \operatorname{sen} \delta}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} v . d S}{bc \operatorname{sen} \omega}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} 4^{\circ}43'12'' \times 0{,}5}{[5{,}56627]}\rho'' =$$

$$= [\bar{o}{,}43373] \operatorname{sen} 4^{\circ}43'12'' . \rho'' = 0'',04608$$

$$(IX_4)\quad dv = \frac{-2 \operatorname{sen} u . dS}{ad \operatorname{sen} \delta}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} u . dS}{ad \operatorname{sen} \omega}\rho'' = \frac{2 \operatorname{sen} 50^{\circ}39'30'' \times 0{,}5}{[5{,}87277]}\rho'' =$$

$$= [\bar{6}{,}12723] \operatorname{sen} 50^{\circ}39'30'' . \rho'' = 0'',21382$$

Comprobación:

$$(X)\quad dx+dy+du+dv = -0''34762+0''08773+0'',04608+0''21382 = 0'',000.01$$

Aplicando las mismas fórmulas al ejemplo I con dS = 0,5 m² en la 1er. solución se llega a los resultados siguientes:

dx = 4'',92 ; **dy** = 1'',13 ; **du** = — 0''33 y **dv** = — 5'',71

En la segunda solución del mismo ejemplo se llega a los resultados que se indican a continuación:

dx = —3'',58 ; **dy** = — 2'',46 ; **du** = 1'',95 y **dv** = 4'',10

Para los cuadriláteros inscriptos, a los cuales corresponde $\delta = 180^{\circ}$, las fórmulas (IX_1) ; (IX_2) ; (IX_3) ; (IX_4) dejan de tener validez, y para los cuadriláteros que se le aproximan, es decir para los cuales δ sea próximo a 180°, las fórmulas mencionadas dan resultados poco satisfactorios. En estos casos, para estudiar la influencia del redondeo del área en **x** ; **y** ; **u** y **v** conviene proceder de la manera siguiente:

Iniciaremos el estudio con la influencia en **x**. Se toma a **x** como variable independiente y a **S** como función y se calcula ΔS en función del incremento **dx** utilizando el desarrollo en serie de Taylor hasta el término siguiente a **dS**:

$$\Delta S = \frac{dS}{dx}\,dx + \frac{dx^2}{2}\,\frac{d^2S}{dx^2} \quad (20) \quad \text{es decir} \quad \Delta S = dS + \frac{1}{2}\,d^2S$$

De (IX) deducimos:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{a\,b\,\operatorname{sen}\delta}{2\operatorname{sen} y} \quad (21)$$

Si recordamos que $\delta = x + y$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{ab}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen} y}$$

y derivando con respecto a **x**

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{ab}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} y\cos(x+y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right] - \operatorname{sen}(x+y)\cos y\,\frac{dy}{dx}}{\operatorname{sen}^2 y} =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} y\cos(x+y) - \frac{dy}{dx}\left[\operatorname{sen}(x+y)\cos y - \operatorname{sen} y\cos(x+y)\right]}{\operatorname{sen}^2 y} =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} y\cos(x+y) - \frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left[(x+y) - y\right]}{\operatorname{sen}^2 y} =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} y\cos\delta - \frac{dy}{dx}\cdot\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 y}$$

Ahora, si reemplazamos a $\frac{dy}{dx}$ por su valor $\frac{ab\operatorname{sen} x}{cd\operatorname{sen} y}$ deducido de (19) tendremos:

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\text{senycos}\delta - \dfrac{\text{absenx}}{\text{cdseny}}}{\text{sen}^2y} \cdot \text{senx}$$

y por último:

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{ab}{2cd} \cdot \frac{cd\,\text{sen}^2y\cos\delta - ab\,\text{sen}^2x}{\text{sen}^3y} \qquad (22)$$

Reemplazando en (20) a $\frac{dS}{dx}$ y $\frac{d^2S}{dx^2}$ por sus valores dados respectivamente en (21) y (22) llegamos a:

$$\Delta S = \frac{ab\,\text{sen}\delta}{2\text{seny}}\,dx + \frac{ab}{4cd} \cdot \frac{cd\,\text{sen}^2y\cos\delta - ab\,\text{sen}^2x}{\text{sen}^3y}\,dx^2 \qquad (XI)$$

En esta fórmula **dx** está expresado en radianes.

Por analogía fácil sería escribir las fórmulas que nos dan ΔS en función respectivamente de **dy; du** y **dv.**

Si en la fórmula (XI) hacemos $\Delta S = 0{,}5\ m^2$ tendremos una ecuación de 2º grado en **dx** que nos dará en general dos raíces reales y de signo distinto. Para $\Delta S = -0{,}5\ m^2$ en las aplicaciones tendremos siempre dos raíces reales y de signo contrario. En ambos casos, una de las raíces corresponde al polígono adoptado y la otra al otro polígono. Es menester entonces, dar un criterio que permita elegir la raíz. En la continuación de este trabajo, que próximamente publicaré en esta Revista, analizaré detenidamente esta cuestión. Por ahora, adelantaré que si $\Delta S = 0{,}5\ m^2$ la raíz positiva corresponde cuando $x + y = \delta < 180^\circ$ y la negativa cuando $x + y = \delta > 180^\circ$. Para $\Delta S = -0{,}5\ m^2$ ocurre lo contrario.

Para los cuadriláteros inscriptos ($\delta = 180^\circ$) la expresión (XI) se simplifica tomando la forma siguiente:

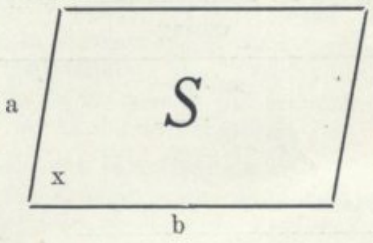
$$\Delta S = -\frac{ab}{4cd} \cdot \frac{cd\,\text{sen}^2y + ab\,\text{sen}^2x}{\text{sen}^3y}\,dx^2 \qquad (XII)$$

En este caso, para $\Delta S = 0{,}5\ m^2$ obtendremos para **dx** dos valores imaginarios, lo que no debe sorprender por ser los cuadriláteros inscriptos los de área máxima. Para $\Delta S = -0{,}5\ m^2$ obtendremos dos raíces reales, iguales en valor absoluto y de signo contrario, ambas válidas en las aplicaciones.

Consideremos por último, un caso particular de los cuadriláteros inscriptos: los rectángulos. Para éstos, siendo $a = c$; $b = d$; $x = y = 90^\circ$, la expresión (XII) se simplifica en la forma siguiente:

$$\Delta S = -\frac{ab}{2}\,dx^2 \qquad (XIII)$$

Esta última fórmula puede deducirse más rápidamente de esta manera:



El área del paralelógramo de la figura es:

$$S = a\,b\,\text{sen}\,x \quad (23)$$

Demos al ángulo **x** un inscremento **dx**, entonces:

$$S + \Delta S = ab\,\text{sen}\,(x + dx) = ab\,[\text{sen}x + dx.\cos x - \frac{dx^2}{2}\,.\,\text{sen}x]$$

$$S + \Delta S = ab\,\text{sen}x + ab\cos x.dx - ab\,\text{sen}x.\,\frac{dx^2}{2} \quad (24)$$

A la ecuación (24) restemos miembro a miembro la (23)

$$\Delta S = ab\cos x dx - ab\,\text{sen}x.\,\frac{dx^2}{2}$$

Para los rectángulos $x = 90^{\circ}$

$$\therefore\ \Delta S = -\,ab\,.\,\frac{dx^2}{2}$$

La fórmula (XIII) para $\Delta S = -\,0{,}5\ m^2$ nos dá:

$$dx = \pm\,\frac{1}{\sqrt{ab}} = \pm\,\frac{1}{\sqrt{S}}$$

Como vemos **dx** es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del área del rectngulo. Calculemos la influencia **dx** para 1 Ha.

$$dx = \pm\,\frac{1}{\sqrt{10.000}} = \pm\,0{,}01 \quad \text{radián} = \pm\,0{,}01\,.\,\rho' = \pm\,34',38$$

Por consiguiente si expresamos el área **S** de un rectángulo en Ha.

$$d\,x = \pm \frac{34',38}{\sqrt{S}}$$

Así por ejemplo, para un rectángulo de 900 Ha.

$$d\,x = \pm \frac{34',38}{\sqrt{900}} = \pm\ 1'146$$

Pasemos ahora, a estudiar la influencia de los errores de los lados.

(Continuará).

Nota: En la primera parte de este trabajo publicado en el Nº 8 se han utilizado los signos: $<$ ó $=$ y $>$ ó $=$ por carecer la imprenta de los correspondientes $\leqq$ y $\geqq$.

Determinación microquímica colorimétrica del sodio [1]

POR EL DR. A. ELIAS

Exponemos a continuación una nota preliminar sobre un procedimiento original para la determinación colorimétrica microquímica del sodio en casi todos sus compuestos minerales. El método ha sido comprobado en repetidos casos, demostrándose su eficacia y exactitud.

Se basa nuestro método en la precipitación del sodio bajo la forma de acetato triple de uranio sodio y magnesio mediante el empleo del reactivo de Streng (algo modificado en su composición, de acuerdo con las indicaciones de Curtman) valorando luego el uranio del precipitado, colorimétricamente.

Dicho reactivo uránico se prepara en la forma siguiente: 50 g. de acetato de uranio purísimo, exento de sodio, se disuelve en 30 cm^3 de ácido acetico glacial, completando con agua destilada a 250 cm^3.

Por otra parte se hace una solución de 165 g. de acetato de magnesio también puro, en 30 cm^3 de ácido acético glacial, completando a 250 cm^3.

Se mezclan las dos soluciones y se dejan en reposo, filtrando después de varios días.

Se requiere además para la valoración del uranio una solución al 2 %, aproximadamente de salicilato de sodio purísimo.

A continuación exponemos sintéticamente un caso práctico de determinación. Se valora el sodio de una solución de cloruro de sodio al 2 o/oo. Debe operarse en forma tal que la cantidad a precipitar contenga un tenor de sodio correspondiente a 0,001 o 0,002 g. por cm^3 de Na_2O. aproximadamente.

La solución tipo es simplemente una solución normal décimo de hidróxido sódico.

En un pequeño vaso se mide 1 cm^3 de la solución de cloruro y se agregan 5 cm^3 del reactivo uránico.

Simultáneamente se mide en otro vaso 1 cm^3 de la solución de hidróxido sódico y se acidula ligeramente con ácido acético glacial.

Luego se le agregan 5 cm^3 del reactivo uránico. El precipitado de ambas soluciones se manifiesta rápidamente frotando las paredes de los vasos con varillas de vidrio.

Conviene dejar en reposo 24 horas en una heladera. Al cabo de dicho tiempo se agrega, a cada vaso un volumen igual de alcohol etílico puro. Se deja en reposo unos 20 minutos y se filtra, decantando. Se levan los precipitados por decantación 3 ó 4 veces con alcohol, pasando los líquidos opr el filtro. El líquido que pase al último, diluído con agua, no debe dar reacción alguna con la solución de salicilato sódico.

Luego se evapora el alcohol de los precipitados que han quedado en los vasos y los filtros, empleando para ello un chorro de aire y se procede a di-

(1) (Extractado de los "Anales de la Asociación Química Argentina", t. XXIII, No. 121, p. 1 y sig.).

solverlos separadamente, tratándolos con agua destilada, llevando cada solución al volumen final de 50 cm^3.

Las dos soluciones son de color amarillo, proporcional sensiblemente en su intensidad a los tenores de sodio.

Para comparar al colorímetro se sigue el procedimiento indicado por Muller (2): 5 cm^3 de cada solución se tratan con 5 cm^3 de la solución de salicilato sódico al 2 %. Se desarrolla una coloración amarillo-anaranjada, que se compara muy bien. Previamente se diluye el tipo y la solución a dosar, de modo que sus tintes sean parecidos.

Este procedimiento que proponemos, permite el dosaje rápido del sodio en las aguas, procediéndose directamente sobre 10 cm^3 de agua, si es poco mineralizada, concentrada hasta 1 cm^3. El potasio no precipita con el reactivo si su concentración en cloruro es inferior al 20 %. El litio precipita a partir del 11 % calculado en cloruro.

En el análisis de aguas solo pueden perturbar los fosfatos y arseniatos que no son muy comunes y pueden ser eliminados con facilidad previamente. No debe haber ácidos minerales libres.

BIBLIOGRAFIA

1.—**Curtman**, "Qualitative Chemical Analysis", pág. 500.
2.—**E. Kahane**, "Bull. Soc. Chim.", 1933, **53**, 555.
3.—**Müller**, "Chem. Ztg.", 1919, **43**, 739-40.

Análisis del Taquímetro Auto Reductor Bosshardt-Zeiss

(Continuación) POR EL ING. RAUL V. LUCCHINI

La agudeza estaría dada por:

$$A) \quad \alpha'' = 0'',091 \frac{0'',82}{L_{(m)}} \qquad (21)$$

$$B) \quad \alpha'' = 0'',109 \frac{0'',62}{L_{(m)}}$$

Aplicando las (21) para un lado de 80 m. se tiene:

$$\alpha_A = 2'',4 \; ; \; \alpha_B = 2'',8$$

ya reducidas a un aumento de 1 X. Valores bastante cercanos a los obtenidos anteriormente.

Las experiencias de Klein y Sous (1), que permitieron afirmar la variación logarítmica de la agudeza con respecto a la iluminación, nos hace ver que la aquí adoptada satisface ampliamente las necesidades fisiológicas, aunque hay que observar, que parte del mayor rendimiento visual nocturno, se debe a la seguridad de lectura, como consecuencia de la estabilidad de las masas de aire, que durante el día, como resultado del calor solar, producen vibraciones que entorpecen la estimación de la distancia.

Las expresiones con las que se calcularía el error total absoluto ε, siguiendo el procedimiento indicado en las observaciones diurnas, serían:

$$A) \quad \varepsilon_{(mm)} = 1,3 + 0,082 \; L_{(m)} \qquad (22)$$

$$B) \quad \varepsilon_{(mm)} = 1,1 + 0,107 \; L_{(m)}$$

y el error relativo:

$$A) \quad E_t = 0,000082 + \frac{0,0013}{L_{(m)}} \qquad (23)$$

$$B) \quad E_t = 0,000107 + \frac{0,0011}{L_{(m)}}$$

Calculemos E_t para los límites de validez de las expresiones (22) y (23).

L = 5 m. A) E_t = 1/2920 ; B) 1/3060

L = 200 m. A) E_t = 1/11300 ; B) 1/8000

Para el lado medio de 100 m.:

A) 1/10050 B) 1/8470

(1) Henri Fromaget y H. Bichelonne, etc. Examen fonctionnel de l'oeil.

Estos resultados evidencian una mayor precisión en las observaciones nocturnas y nos permiten afirmar nuevamente, la elección conveniente de la fuente luminosa.

Si se observa además los valores obtenidos para **c** y **a** en uno y otro caso,

A) { Diurno: $c = 99{,}9849 \pm 0{,}0035$; $a = 2{,}06$ cm. $\pm$ 0,081 cm.
   { Nocturno: $c = 99{,}9810 \pm 0{,}0066$; $a = 1{,}11$ cm. $\pm$ 0,170 cm.

B) { Diurno: $c = 99{,}9901 \pm 0{,}0041$; $a = 2{,}06$ cm. $\pm$ 0,094 cm.
   { Nocturno: $c = 99{,}9874 \pm 0{,}0080$; $a = 0{,}96$ cm. $\pm$ 0,24 cm.

se puede deducir que la diferencia de luz no ha cambiado la constante de multiplicación, pese a la diferente refrangibilidad de los rayos luminosos en la constante de adición, así como también más fuertes a los valores de las constantes de adición **s** correspondientes a los errores absolutos.

Se ha representado también en un **gráfico (ver 3),** los errores absolutos, indicándose las rectas ajustadas para los dos observadores, resaltando inmediatamente, la menor influencia del error de coincidencia.

En el **gráfico 4,** se ha ejecutado una correlación gráfica de los valores diurnos y nocturnos para los dos observadores, representando los errores verdaderos. Del examen de ese gráfico en el que sólo se han consignado las observaciones diurnas que corresponden en longitud a las nocturnas, se nota una correspondencia en los signos, y casi en los valores, de las dos observaciones. Esa simultaneidad de los errores, para ambos observadores, ejecutadas en condiciones totalmente distintas no pueden ser atribuídas al azar, y examinando las causas sistemáticas, se observa la posibilidad de una influencia por parte del error de graduación de la mira. Al hacerse notable en la observación confirma nuestros resultados anteriores, obtenidos experimentalmente, y que estaban en contradicción con los obtenidos por Bosshardt, y por otra parte nos permite manifestar la necesidad de pulimentar más ese divisionamiento.

III) Al conocer el valor de los errores medios en distancia y angular se puede estimar el error transversal y longitudinal que se comete al establecer un punto.

Así llamando con M_α, el transversal y M_l el longitudinal se tendría siendo L la distancia:

$$M_\alpha = \frac{L.m''_\alpha}{\rho''}$$

y teniendo en cuenta el valor de m''_α obtenido anteriormente para el observador A se tiene para relevamiento de puntos comunes:

$$M_\alpha = \frac{12'', 6 \cdot L}{206265} \; ; \; M_{\alpha\,(mm)} = 0{,}061\ L_{(m)} \qquad (24)$$

$$M_\alpha = \frac{6'', 3 \cdot L}{206265} \; ; \; M_{\alpha\,(mm)} = 0{,}031\ L_{(m)} \qquad (25)$$

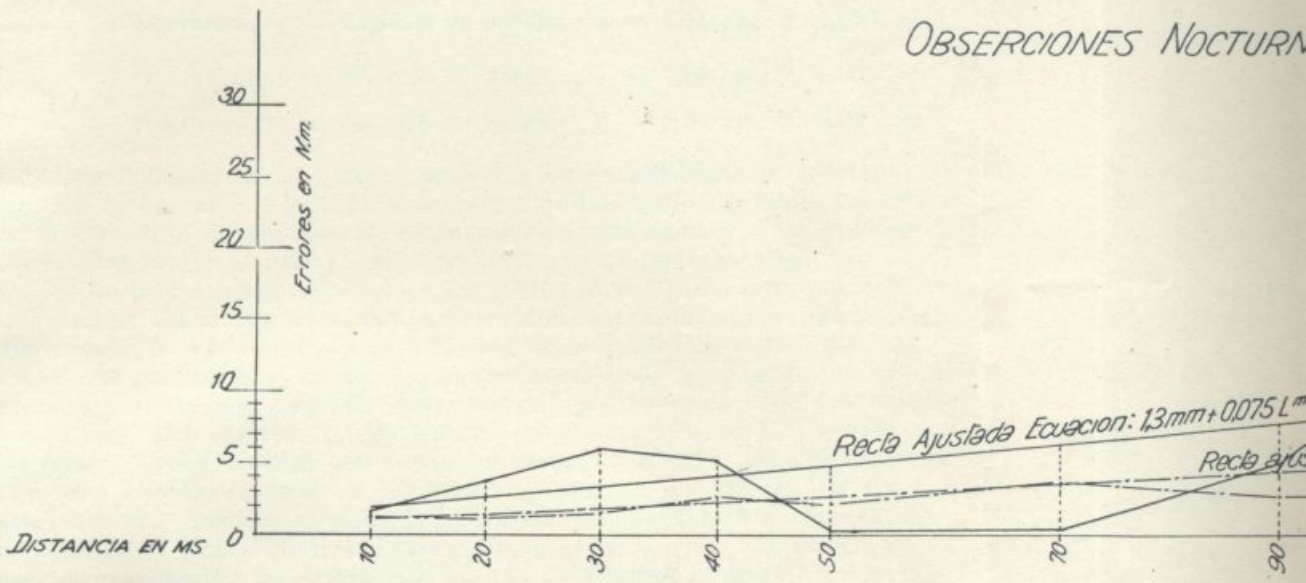
Por otra parte (fórmula 15):

$$M_l = \varepsilon_{(mm)} = 0{,}6 + 0{,}120\ L_{(m)} \qquad (26)$$

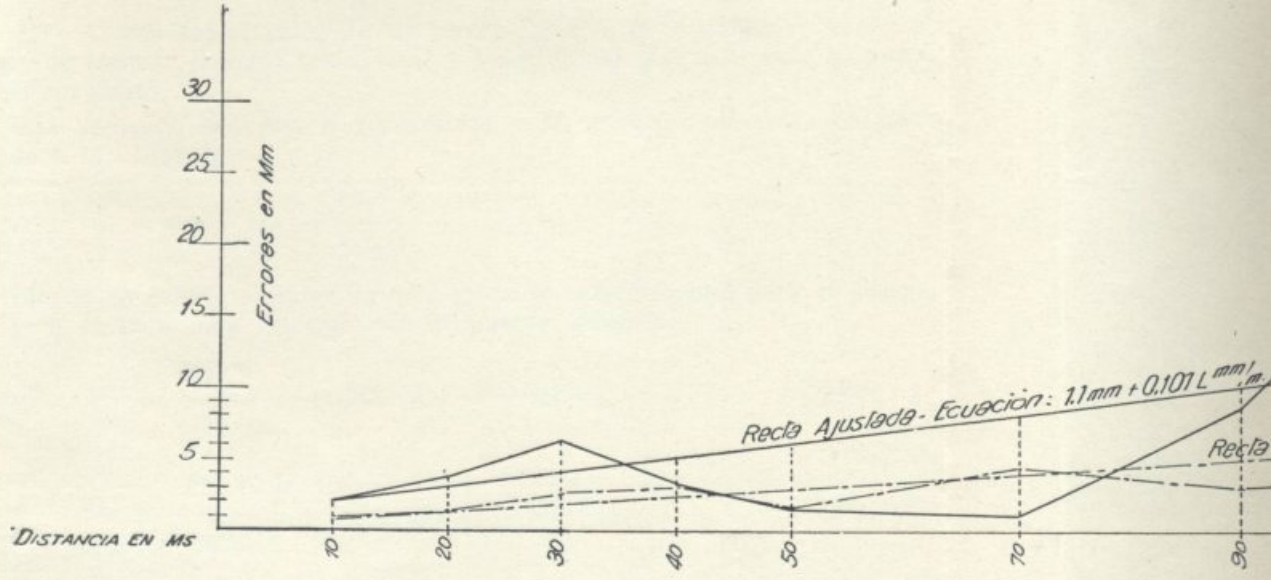
TAQUIMETRO-AUTO-REDUCTOR RE

ERRORES DE DISTANCIA Y DE A

OBSERCIONES NOCTURN



OBSERVADOR "A"



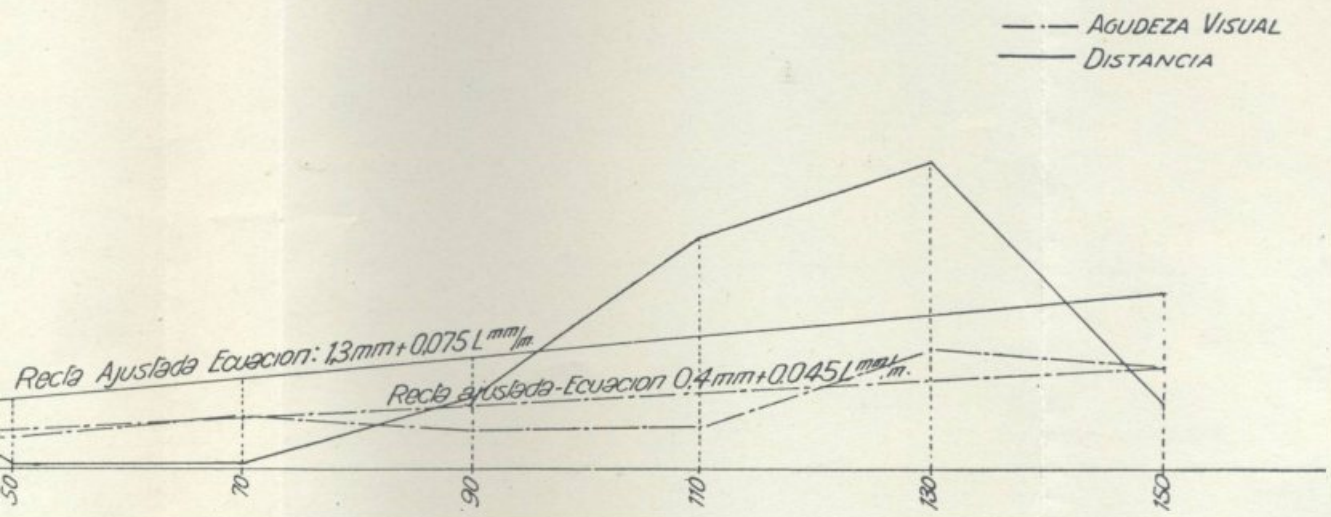
OBSERVADOR "B"

TAQUIMETRO-AUTO-REDUCTOR REDTA III 36698

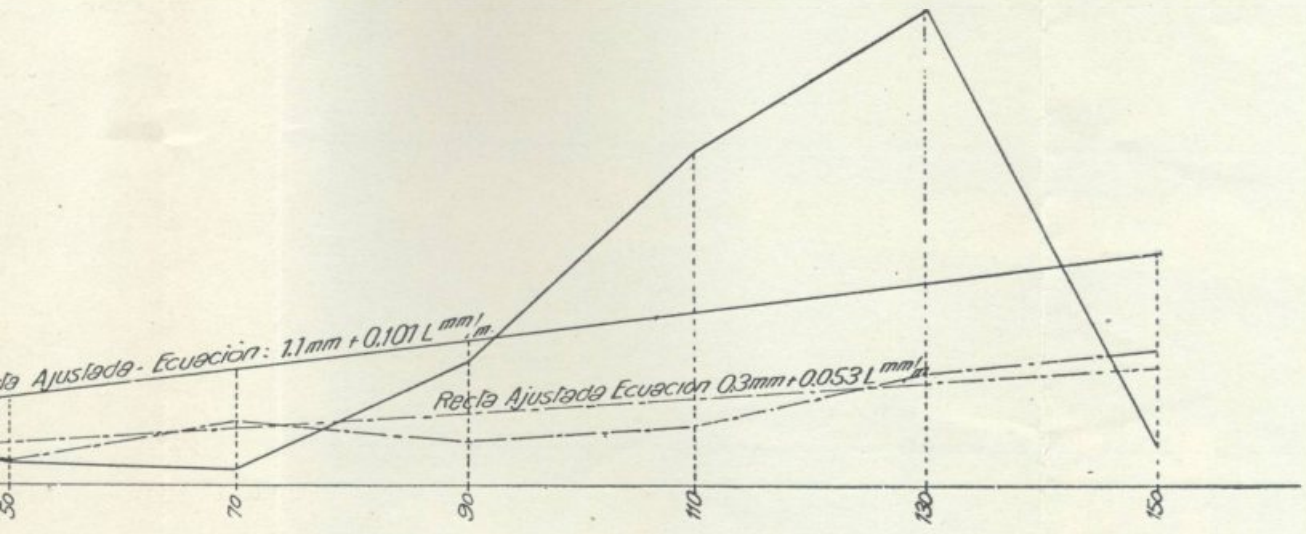
Graf: 3.

ORES DE DISTANCIA Y DE AGUDEZA VISUAL

OBSERCIONES NOCTURNAS



OBSERVADOR "A"



OBSERVADOR "B"

Comparado a (24) y a (26) se observa en los resultados la relación:

$$M\alpha : Ml :: 1 : 2$$

en cambio (25) y (26):

$$M\alpha : Ml :: 1 : 4$$

Esos valores evidencian lo innecesario de la colocación del micrómetro óptico, que puede proveerse a pedido, y que aumentaría la precisión de la lectura a 2" en lugar de 12"; sólo subsistiría como ventaja la de simplificación de la lectura.

El error de fijación de un punto estaría dado por:

$$M_p = \sqrt{M^2\alpha + M^2l}$$

Sustituyendo, se obtendría:

$$1^o)\quad M_{p(mm)} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}144\ L_{(m)} + 0{,}018\ L^2_{(p)}} \qquad (27)$$

$$2^o)\quad M_{p(mm)} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}144\ L_{(m)} + 0{,}015\ L^2_{(p)}}$$

Calculemos las expresiones (27). Del relevamiento practicado surgió como lado poliginal medio 130 m., correspondiendo como radio medio de relevamiento 80 m. Sustituyendo (27) se obtiene:

1º) $L = 80$ m. $\qquad M_p = 11{,}3$ mm.

2º) $L = 130$ m. $\qquad M_p = 16{,}5$ mm.

Estos resultados denotan la alta precisión factible de alcanzarse con este medio de medición óptica.

Las fórmulas (27) expresan el error de fijación de un punto, pero han sido obtenidas aplicando estrictamente la teoría de errores, veamos si ellas tienen una confirmación experimental.

El marco de apoyo de toda la medición óptica lo ha constituído un polígono ejecutado en forma tal de poder afirmar una precisión de 1/100000, valiéndose para ello de una cinta de acero de 50 m. debidamente contrastada y de ecuación conocida por determinación directa, y de un teodolito Zeiss II Nº 31688, midiendo los ángulos por triple reiteración y los lados tres veces. Los errores medios angulares y lineales, el cierre angular y lineal darán una idea de los resultados.

Error medio angular (3 observaciones	= 0",9
Error relativo medio, lineal (3 obervaciones)	= 1/200000
Error cierre angular (12 ángulos)	= 1",3
Error cierre lineal (12 lados; perímetro: 3710 m.)	ε_x = 11,5 mm.
	ε_y = 5,7 mm.
	Cierre lineal: ε = 12,8 mm.

Error relativo medición poligonal = 1/300000.

Frente a estas observaciones los errores que podían derivarse de la medición óptica, apoyados en estos datos podían suponerse verdaderos. Los errores de cierre poligonales para las 4 poligonales principales son:

6 lados: $\varepsilon_x = 0{,}091$ m.; $\varepsilon_y = 0{,}013$ m.; $\varepsilon = 0{,}091$ m.; perím. = 900 m.

5 „ $\varepsilon_x = 0{,}054$ m.; $\varepsilon_y = 0{,}027$ m.; $\varepsilon = 0{,}060$ m.; „ = 470 m.

7 „ $\varepsilon_x = 0{,}035$ m.; $\varepsilon_y = 0{,}081$ m.; $\varepsilon = 0{,}088$ m.; „ = 820 m.

9 „ $\varepsilon_x = 0{,}070$ m.; $\varepsilon_y = 0{,}075$ m.; $\varepsilon = 0{,}103$ m.; „ = 1130 m.

de los que se deduce un error relativo medio de: 1/9000, valor que está en concordancia con los resultados anteriores.

Analizando la tabla 3 del trabajo del Dr. Heiskanen, de un total de 28 cierres lineales surge un error medio de fijación de:

$$\varepsilon = 12 \text{ mm. para un largo de } 100 \text{ m.}$$

siendo el error relativo de: 1/8300.

Estos resultados evidencian su concordancia con los anteriormente indicados, los que hacen resaltar la precisión capaz de alcanzarse.

IV) Al tratar de los errores del aparato y de la mira, hicimos caso omiso de su influencia sobre los ángulos de altura. En efecto, los errores sistemáticos del teodolito, salvo el error de zenit que puede eliminarse fácilmente o tenerse en cuenta, tienen sobre la medición de los ángulos zenitales una influencia de segundo orden. En lo que respecta a la mira la influencia de la falta de verticalidad, debe desecharse por la existencia del nivel esférico, y sólo tendría influencia el desgaste del pie con el uso, pero frente a la influencia que surge de una deficiente centración de la burbuja del nivel testigo, y de los errores de lectura, así como la apreciación de la altura del plano visual de estacionamiento esos errores son despreciables.

Para poder valorarlos, el mejor procedimiento es la vía experimental, para lo cual se ha nivelado puntos con el instrumento que con anterioridad se habían nivelado con un nivel Wild.

Como se deduce del cuadro que sigue, el error medio en altura es,

Nº	Dist. aproxim m.	Errores para:		Reducidos a 100 m.	
		Ang. alt. cm.	Tang. cm.	Ang. alt. cm.	Tang. cm.
1	10	+ 0,2	+ 0,5	+ 1,7	+ 4,4
2		+ 0,3	+ 0,4	+ 2,6	+ 3,5
3	20	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,5	+ 1,5
4		+ 0,1	+ 0,0	+ 0,5	+ 0,0
5	25	+ 0,3	+ 0,2	+ 1,2	+ 0,8
6		+ 0,1	+ 0,2	+ 0,4	+ 0,8
7	30	— 0,3	— 0,1	— 0,9	— 1,6
8		— 0,4	— 0,2	— 1,2	— 0,6
9	35	+ 0,6	+ 0,5	+ 1,7	+ 1,4
10		+ 0,7	+ 0,9	+ 2,0	+ 2,5
11	45	0,0	0,0	0,0	0,0
12	50	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,4
13		— 0,3	— 0,3	— 0,6	— 0,6
14	55	0,0	— 0,1	0,0	— 0,2
15		+ 0,4	+ 0,5	+ 0,7	+ 0,9
16	60	— 1,4	— 0,8	— 2,3	— 1,3
17	65	— 1,9	— 1,0	— 3,0	— 1,6
18		— 1,3	— 1,6	— 2,0	— 2,5

para 100 m. de distancia, según que las diferencias de nivel se obtengan con:

ángulos de altura: ± 1,5 cm.

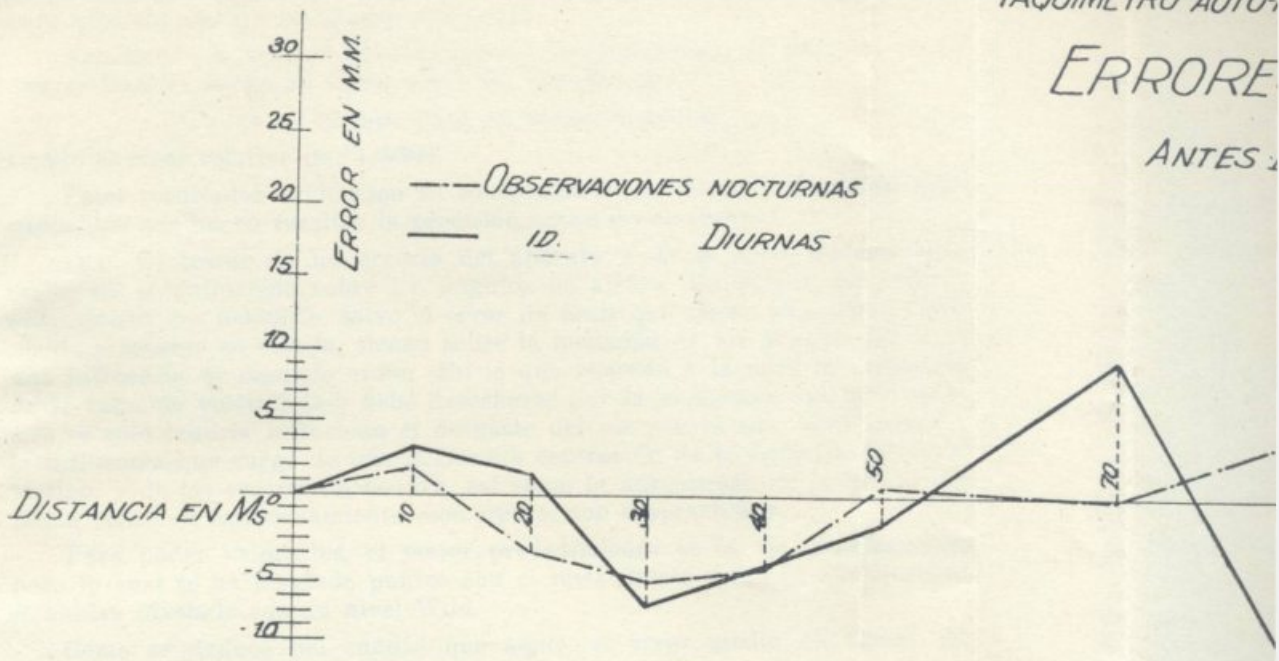
tangentes: ± 1,8 cm.

Como es lógico, el primero da más preciso por la mayor seguridad en la lectura como consecuencia de un mejor divisionamiento del círculo. Co-

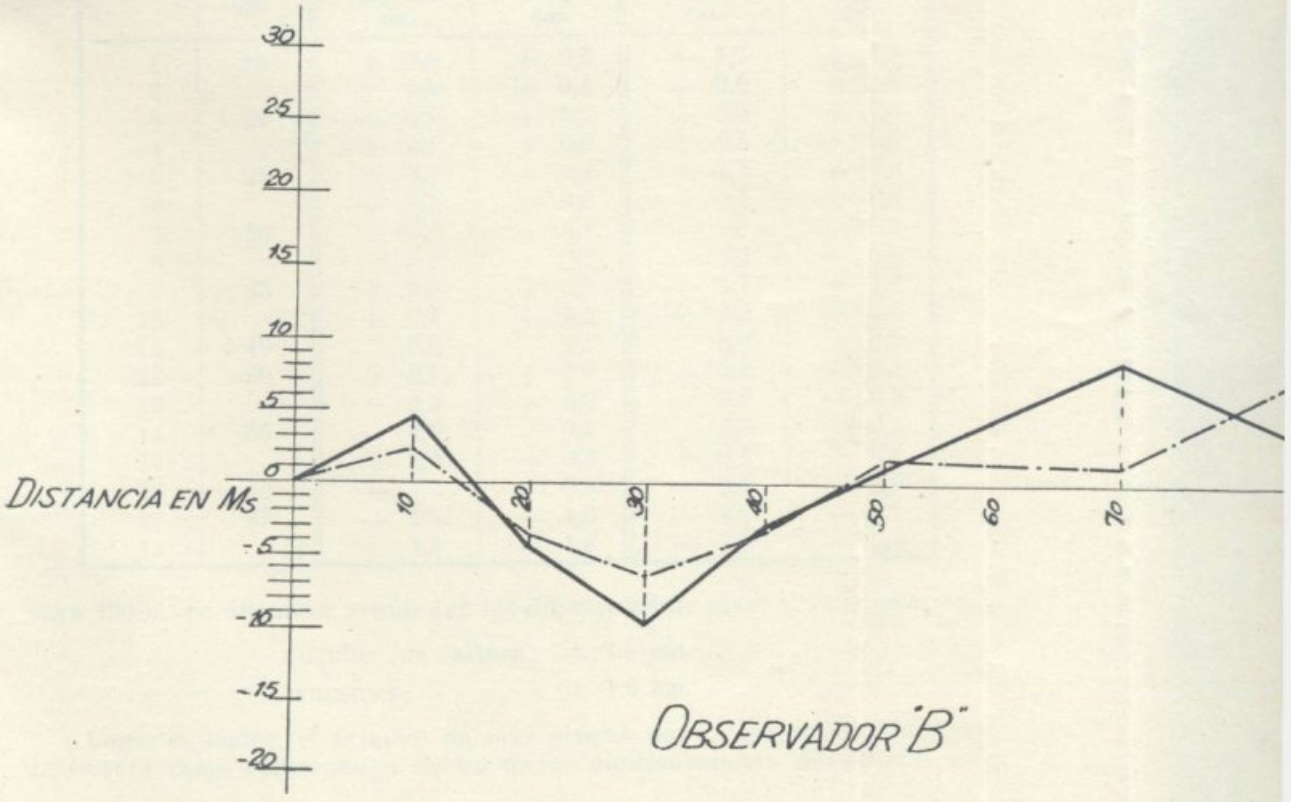
TAQUIMETRO AUTO-

ERRORE

ANTES



OBSERVADOR "A"



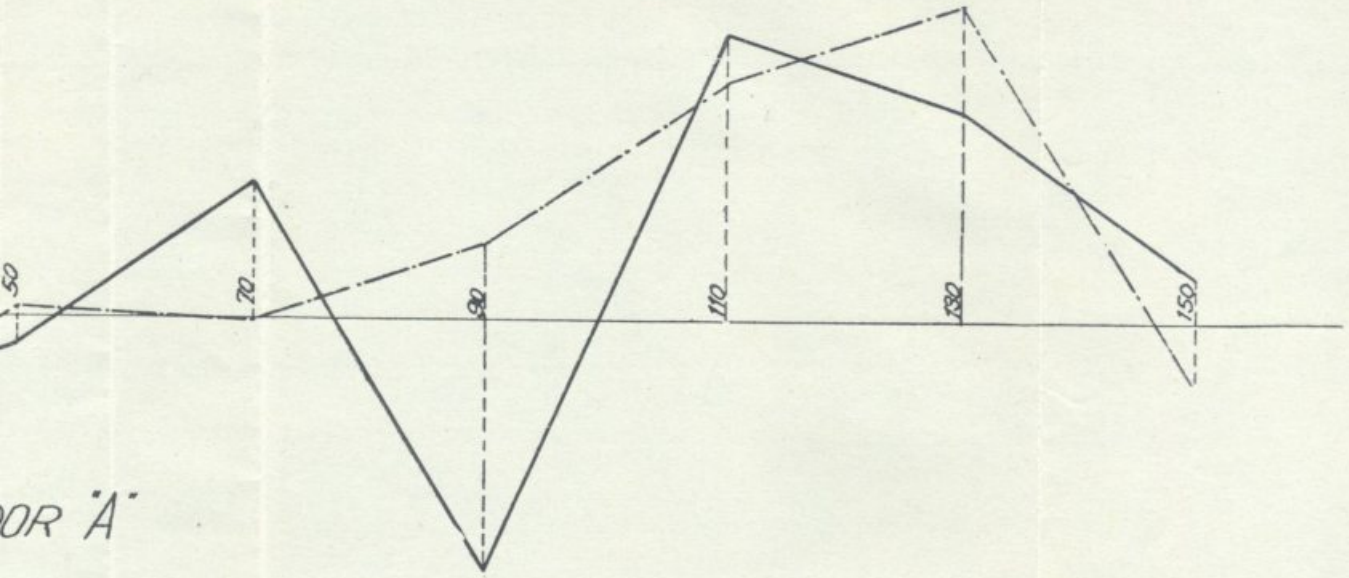
OBSERVADOR "B"

TAQUIMETRO AUTO-REDUCTOR REDTA III 36698

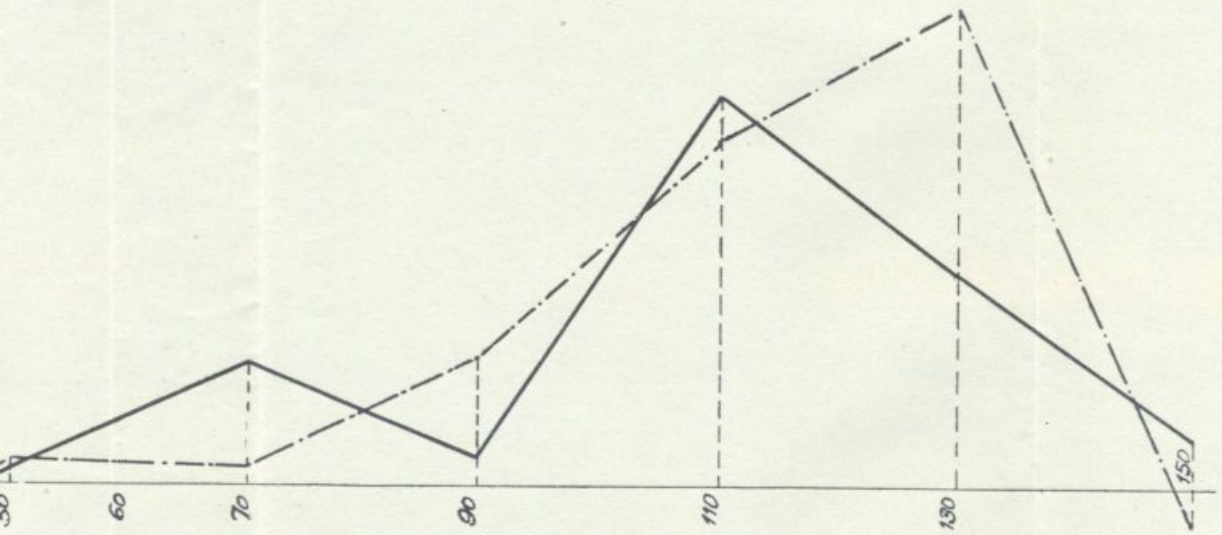
ERRORES EN DISTANCIA

GRAF. 4

ANTES DEL AJUSTE



OR "A"



R "B"

mo puede observarse, el error global en altura permite afirmar el uso ventajoso del instrumento, en la confección de planos acotados desplazando ventajosamente al taquímetro común y al nivel.

Estos resultados favorables, unidos a la gran precisión en distancia, hacen del taquímetro auto-reductor un instrumento valioso para la ejecución de planos de detalle, con destino a la confección de trabajos destinados a solucionar los problemas edilicios y urbanos, como ser los planos reguladores y de extensión.

Para poder apreciar que proporción del error global en altura le corresponde al error de lectura, se ha analizado un total de 50 lecturas con las dos escalas y comparando los resultados se ha obtenido que la diferencia media entre la tangente calculada y la tangente directamente leída, es de: ± 0,00008, en un entorno de lecturas de + 30° a — 30 °, con respecto a la horizontal.

Aceptando la proporción 1,5 : 1,8, obtenida anteriormente como representativa de la parte con que intervienen cada una de las lecturas en el valor ± 0,00008, y llamando con m_t, el error en la tangente observada se podría escribir:

$$m^2_t + \frac{1{,}5^2}{1{,}8^2}\, m^2_t = (\pm\, 0{,}00008)^2$$

ejecutando operaciones resultaría:

error en la tangente observada: $m_t = \pm\, 0{,}00006$; y para la tangente calculada (ángulos de altura): ± 0,00005

expresando este último en unidades de la escala respectiva, se tendría finalmente:

Angulos de altura: ± 10"; Tangentes: ± 0,00006.

Estos errores repercuten a los 100 m. en:

± 5 mm.; ± 6 mm., respectivamente, equivaliendo a 1/3 del error global. Se puede observar también que el error de lectura angular es aproximadamente igual a la apreciación del instrumento. Este valor siendo igual a 10" nos significa la necesidad de centrar la burbuja dentro del milímetro, y virtualmente dentro del 1,5 mm., siguiendo las conclusiones de T. Berlese, ya citadas anteriormente.

Ese centrado se consigue fácilmente, lo que pone de relieve el correcto dimensionamiento del nivel testigo.

d) Observaciones al instrumental y métodos operatorios.

El máximo rendimiento técnico-económico de un instrumento, sólo se conseguirá, cuando ajustado a las características del aparato, se emplee un método operatorio que permita sacar de él, todas las ventajas que se derivan de la experiencia, obteniéndose al mismo tiempo datos que respondan a la realidad, dentro del entorno de precisión asignado a las operaciones.

En los tres capítulos anteriores hemos tratado los dos grupos de errores que pueden responder a teorías que el observador se pueda forjar para interpretarlos, pero quedan todavía aquéllos que nacen de descuidos del operador, denominados por algunos autores, "errores groseros" (1), y por otros "faltas" (2), que escapan a las consideraciones teóricas, quedando únicamente el

(1) G. Forni: "Teoría degli Errori".
(2) R. Danger: "Cours de Topométrie Urbaine".

recurso de evitar su origen, mediante controles que pueden ser, "in situ" estableciendo directamente la falta, o "a posteriori" en el gabinete mediante mediciones de control, de origen distinto a las que se trata de establecer su bondad.

Este último método que se practica en las triangulaciones y polígonos, deja de tener eficacia en el método polar, siendo necesario ejecutar el control directo.

El control de las coordenadas polares debe alcanzar a sus dos atributos: argumento y radio vector.

La falla que se debe localizar en el argumento, sólo tiene un origen, el de una falsa lectura en las grandes divisiones, la que puede eliminarse procediendo como sigue:

1) Leyendo, apuntando primero al pie y luego a otro punto de la mira a distancia conocida del pie como ser el visor. Estas dos lecturas diferirían de una magnitud función de la distancia, que se puede tabular teniéndose así un control rápido de las mediciones. Este método tendría aplicación en el caso de existir micrómetro de coincidencia.

2) Leyéndose en los dos nonius separadamente cuando viene provisto de escalas de interpolación. Este método no tiene una eficacia real en los instrumentos Zeiss, pues las lecturas se hacen por un microscopio único en ambas escalas a la vez; por eso es recomendable para obligar al operador, a ejecutar dos lecturas independientes, afectar una escala de un fuerte error de índice conocido en el que deberían diferenciarse todas las lecturas. Esta desviación puede conseguirse en el instrumento.

En cuanto al radio vector (distancia), la falta tiene un doble origen: falsa lectura en la regla y falsa lectura en el tambor centimetrado.

Para controlar la lectura de la regla se puede proceder a:

1) Leer la distancia separadamente con los dos nonius, sirviendo el negro de control en las distancias pequeñas y el rojo (para algunos casos, menos de 140 m.) en las largas. Este método tiene el inconveniente de los cambios de apunte.

2) Leer con el nonius correspondiente y luego con un guión auxiliar expresamente colocado que importara en la distancia un error constante. Esto se podría practicar con la división auxiliar que hay antes de cada nonius, la que introduciría un error constante de 1,80 m.

3) Leer con el origen verdadero del nonius correspondiente y luego tomando como origen la parte posterior, resultando las medidas complementarias.

Este método es propiciado por Bosshardt, y lo consideramos el más práctico, habiéndose utilizado con todo éxito en el relevamiento presente.

Una falsa afreciación en el tambor induce a cometer errores de 10 cm., al tomar por ejemplo 3 cm. por 13 cm. y por otra parte el que surge de una equivocada coincidencia. El primero se salva pintando, por ejemplo, las divisiones de 10 cm. a 20 cm. de distinto color que las otras, y el segundo repitiendo al hacer el control la coincidencia que se puede ejecutar independientemente de la primera.

En cuanto a las observaciones de altura que definirían la tercer coordenada del punto tienen un control eficaz, leyendo independientemente la distancia zenital y la tangente. Tiene el defecto de no ser un control "in situ", perdiéndose la observación una vez constatada la falla, pero se puede obviar esta dificultad, comparando la lectura ejecutada con otras hechas con anterioridad, obteniéndose así con bastante exactitud un primer control. Otra forma sería la de ejecutar dos observaciones, pero este procedimiento es muy oneroso y poco recomendable, pues a más de introducir mayor trabajo en las operaciones, recarga la labor de cálculo.

El método operatorio permite eliminar las falsas apreciaciones de lectura, pero es ineficaz para los errores groseros derivados de defectos del instrumental. Entre ellos el más importante es el apunte del visor.

En el transcurso de varios meses de observaciones se evidenció la estabilidad del instrumento manteniendo sus constantes instrumentales, pero es conveniente ejecutar un control bimestral general del mismo. En cuanto al visor por su facilidad de contraste con un prisma escuadra, es recomendable revisarlo diariamente, siendo ésta una de las partes menos estables, como consecuencia de su conexión por intermedio de un brazo.

En lo que respecta a la consignación de libretas especiales, su forma de rayado, así como la importancia de los croquis no vamos a insistir, pues es un asunto ya ampliamente tratado por Bosshardt, y que depende en gran parte de la organización técnica de los trabajos.

Siendo la longitud de la regla 2,20 m. el radio de acción del instrumento queda limitado a 200 m., pudiendo pensarse que el distanciamiento de los vértices poligonales podría ser de 400 m. con un estacionamiento intermedio. Esta longitud no puede ser alcanzada en la práctica dado que el relevamiento de los puntos de detalle, puede ser llevado tomando el caso más favorable hasta 45º con respecto al lado base, lo que daría una longitud máxima de 280 m.

Si s etiene en cuenta que a ciertas propiedades hay que fijarlas desde más de un vértice poligonal, esta longitud vuelve a reducirse, siendo recomendable, como norma general, mantener esa distancia dentro de los 200 m. En el caso presente el lado medio es de 130 m. y la longitud media de relevamiento 80 m.

(Continuará)

Determinación de las losas de hormigón armado más económicas

Por el Ing. J. DANIEL MEDICI

Calculadas ya las solicitaciones máximas que se ejercerán en una losa de hormigón armado (sea ésta de uno o más tramos, apoyada, empotrada o semienpotrada), procédese al dimensionamiento de la misma fijando para ello las tensiones admisibles del hierro y del hormigón σ_e y σ_b.

Cuando no existen razones en contra (razones o criterios que el calculista aprecia caso por caso) suelen adoptarse dichas tensiones a los valores máximos admisibles, admitiéndose que cuanto mayores sean dichas tensiones, tanto más económica resultará la losa.

Veremos ahora que en realidad existen valores límites pasados los cuales el costo de la losa aumenta en vez de disminuir. En efecto; comencemos por mencionar que el costo de una estructura de hormigón armado es función de los costos del hierro y del hormigón que se utilizan, del encofrado y de las maderas de sostén y apuntalamiento.

El costo de 1 m^2 de losa terminada quedará fijado (una vez determinados los costos unitarios) si conocemos la cantidad de hormigón y de hierro que entra en dicha superficie: el hormigón efectivo es fácilmente calculado; pero para computar el hierro que entra efectivamente en 1 m^2 de losa debemos notar que, considerada la sección más solicitada, determínase por los procedimientos conocidos la superficie de hierro necesaria f_e cm^2, y para tener en cuenta las inevitables superposiciones, doblados, ganchos, hierros agregados (y en vigas y columnas también los estribos) debemos multiplicar esta superficie por un coeficiente $a > 1$, obteniéndose así el área media $a \cdot f_e$ que entra en cada sección de la estructura considerada; adoptando pues como peso específico del hierro $\gamma = 0,008$ kg. cm^3, se tiene que el peso del hierro en kg. por metro lineal de elemennto, está dado por

$$0,008 \times 100\ a f_e = 0,8\ a\ f_e$$

y si notamos que f_e se determina en las losas para una profundidad b = 100 cm., resulta que la expresión 0,8 a f_e indica también la cantidad de hierro en kg. por metro cuadrado de losa.

A título de información y de guía, se pueden aceptar los siguientes valores aproximados de a:

1)	losa simplemente apoyada, caso común	$a = 1$ á 1,05
2)	„ de un tramo, empotrada en los extremos	$a = 1,05$ á 1,10
3)	„ contínua (en condiciones medias)	
	3a) luces extremas	$a = 1,10$ á 1,15
	3b) „ internas	$a = 1,15$ á 1,20
4)	„ de armadura cruzada, simplemente apoyada	$a = 1$ á 1,10
5)	„ „ „ „ perfectamente empotrada	$a = 1,10$ á 1,20
6)	„ „ „ „ en entrepias contínuos	$a = 1,10$ á 1,30

Hechas estas consideraciones, designemos ahora con:

C_b ; el costo de 1m^3 de hormigón colocado realmente en obra

C'_b ; id. de ccm^3.

C_e ; el costo de 1 ton. de hierro colocado en la losa.

C'_e ; id. de 1 kg.

C_m ; el costo de 1m^2 encofrado (medido sobre la superficie de hormigón)

C_a ; costo de las maderas para sostén y apuntalamiento, referida al m^2 de losa.

Sea además:

h = espesor de la losa, en cm.
h' = altura útil, en cm.

$$\varepsilon = \frac{h}{h'}$$

Para las losas en general podemos aceptar $\varepsilon = 1{,}15$.

Podemos ahora expresar el costo de $1m^2$ de losa terminada, de la siguiente manera:

$$C = 10000\ h.C'_b + 0{,}8\ a\ f_e\ C'_e + C_m + C_a \qquad (1)$$

Ahora bien, nosotros queremos determinar para un caso dado, la losa cuyo costo sea un mínimo, por lo cual (siendo constantes C_m y C_a) es suficiente que estudiemos la función:

$$C_1 = 0{,}01\ \varepsilon\ h'\ C_b + 0{,}0008\ a\ f_e\ C_e \qquad (2)$$

Con las notaciones, acostumbradas, y expresando el momento flector M en kgm., se tiene:

$$h' = r\ .\ \sqrt{M} \quad ; \quad f_e = \gamma\ .\ b\ h' = 100\ \gamma\ .\ h' = \gamma_1\ .\ h'$$

$$f_e = 100\ t \sqrt{M} = t_1 \sqrt{M} \quad ; \quad t = \gamma\ .\ r.$$

Notemos de paso que las tablas en uso dan en realidad los valores γ_1 y t_1 bajo la denominación de γ y t respectivamente.

Por tanto, si reemplazamos en la (2) y operamos, haciendo

$$\varphi = 8\ .\ \frac{a}{\varepsilon}\ .\ \frac{C_e}{C_b} \qquad (3)$$

y consideramos constantes (con cierta aproximación es cierto) a M y ε, se tiene:

$$C_2 = \frac{100\ C_1}{\varepsilon C_b\ .\ \sqrt{M}} = r + \varphi\ .\ t \qquad (4)$$

Se demuestra en Estática del Hormigón armado que:

$$r = \sqrt{\frac{6}{\sigma_b\ s\ (3 - s)}} = \frac{n\ \sigma_b}{\sigma_b + \sigma_e} \sqrt{\frac{6}{n\ (2\ n\ \sigma_b + 3\ \sigma_e)}} = u\ .\ v.$$

$$t = \gamma\ .\ r = \frac{n\ \sigma_b}{2\ \sigma_e} \sqrt{\frac{6}{n\ (2\ n\ \sigma_b + 3\ \sigma_e)}} = y\ .\ v$$

$$s = \frac{n\ \sigma_b}{n\ \sigma_b + \sigma_e} \quad ; \quad \gamma = \frac{\sigma_b\ .\ s}{2\ \sigma_e} \quad ; \quad m = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

en que hemos hecho:

$$u = \frac{n\,\sigma_b + \sigma_e}{\sigma_b} \qquad v = \sqrt{\frac{6}{n\,(2\,n\,\sigma_b + 3\,\sigma_e)}}$$

$$y = \frac{n\,\sigma_b}{2\,\sigma_e}$$

Se tiene pues que:

$$C_2 = u \,.\, v + \varphi \,.\, y \,.\, v. \qquad (5)$$

Vemos así que (lo que por otra parte ya sabíamos), para cierto valor de φ, el costo depende de σ_e y σ_b.

Si hacemos σ_e =cte., la función C_2 (y portanto el costo de la losa) será un mínimo para el valor de σ_b que haga nula la $\frac{d\,C_2}{d\,\sigma_b}$.

Tenemos pues:

$$u\frac{dv}{d\sigma_b} + v \,.\, \frac{du}{d\sigma_b} + \varphi \left[y\frac{dv}{d\sigma_b} + v \,.\, \frac{dy}{d\sigma_b} \right] = 0. \qquad (6)$$

Como podemos comprobar, es:

$$\frac{dv}{d\sigma_b} = -\sqrt{\frac{6\,n}{(2\,n\,\sigma_b + 3\,\sigma_e)^3}} \;;\; \frac{du}{d\,\sigma_b} = -\frac{\sigma_e}{\sigma_b^2} \;;\; \frac{dy}{d\sigma_b} = \frac{n}{2\,\sigma_e}$$

Si reemplazamos estos valores en la (5), multiplicando después por

$$2\,n\,\sigma_e\sigma_b^2\,\sqrt{(2\,n\,\sigma_b + 3\,\sigma_e)^3},$$

dividiendo por $\sqrt{6\,n}$, operando y considerando n = 15, se obtiene finalmente:

$$\varphi = \frac{0{,}4\,m^3 + 6\,m^2 + 30\,m}{3\,m + 15} \qquad (7)$$

que es la ecuación que nos dará el σ_b más económico, pues habiendo hecho σ_e = cte, se tendrá el costo mínimo cuando se elija el σ_b cuyo correspondiente valor de $m = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$ satisfaga a la (7).

Ahora bien, reemplazando en la (5) los valores de u, v, y, y poniendo $\sigma_b = \frac{\sigma_e}{m}$, puede comprobarse de la expresión resultante que, para un valor

de m fijado de acuerdo a la (7), el costo mínimo será tanto menor cuanto mayor sea el σ_e adoptado.

Adoptaremos pues para σ_e el máximo admisible $\sigma_e = 1200$ kg/cm^2; calculamos con la (7) el valor m más conveniente para distintos valores de φ, y deducimos enseguida la más económica tensión admisible a adoptarse para el hormigón con $\sigma_b = \frac{1200}{m}$; de esa manera hemos obtenido la siguiente

Tabla de los σ_b más económicos para $\sigma_e = 1200$ kg/cm^2 $\left(\varphi = 8 \frac{C_e}{C_b}\right)$

φ	σ_b	φ	σ_b
55	78	90	57
60	73	95	55
65	70	100	53
70	67	110	50
75	64	120	48
80	61	130	46
85	59	140	44

Notemos que no es necesario (según se vé en la tabla) apreciar exactamente el valor de φ siendo suficiente que calculemos con $\varphi = 8 \frac{C_e}{C_b}$.

Además, para valores de φ menores de 50 a 60 el σ_b más económico resulta muy elevado por lo que en estos casos obtendremos la máxima economía haciendo trabajar ambos materiales a sus máximos admisibles.

Ejemplo: Calculemos los costos C_e y C_b que aproximadamente se tienen en esta localidad.

Supongamos un hormigón denso de proporción 1 : 3 : 3 y que podemos aceptar como máximo admisible $\sigma_b = 60$ kg. cm^{-2}; calculadas ya las cantidades de materiales, tendremos:

Cemento: 280 kg. a $ 0,046	=	$ 12.90
Arena: 0,7 m^3 a $ 5,50	=	„ 3.75
Piedra: 0,7 m^3 a $ 20.—	=	„ 14.—
Costo materiales		$ 30.65
Desperdicio materiales 3 %		„ 0.90

Mano de obra para el movimiento de los materiales en la obra	$ 0.80	
Elaboración del hormigón a mano	„ 2.50	
Colocación y apisonamiento del hormigón	„ 1.00	
Costo mano de obra		$ 4.30
Seguro de obreros al 40 o/oo		„ 0.15
Gastos generales al 10 %		„ 0.45
C_b = Costo de 1 m³ de hormigón colocado		$ 36.45

Calculamos ahora el valor de C_e.

1 ton. de hierro redondo en obra	$ 200.—	
Pérdida por cortes, retazos, etc. 5 %	„ 10.—	$ 210.—
Mano de obra para movimiento de hierros en la obra, cortar, y doblar	$ 19.50	
Id. para armar y colocar la armadura, preparada en el mismo piso del encofrado	„ 33.00	„ 52.50
Seguro de obrero al 40 o/oo		„ 2.10
Gastos generales 10 %		„ 5.25
Costo de 1 ton. de ϕ en losas. C_e =		$ 269.85

Tenemos pues:

$$\varphi = 8 \frac{C_e}{C_b} = \frac{8 \times 269{,}85}{36{,}45} \cong 60$$

El σ_b más económico es de 73 kg. cm^{-2} siendo σ_e = 1200 kg. cm^{-2}; pero como no podemos admitir más de 60 kg. cm^{-2}, nos vemos forzados a establecer los máximos de 60 y 1200.

Supongamos ahora los mismos materiales, pero en un lugar en que C_e = $ 310.— y C_b = $ 29.— con lo que:

$$\varphi = 8 \times \frac{310}{29} \cong 85$$

En este caso el σ_b más económico es de 59 kg. cm^{-2}; y si por último, fuesen C_e = $ 340.— y C_b = $ 25.— con lo que $\varphi \cong 110$, tendríamos el σ_b más económico de 50 kg. cm^{-2}.

En este último caso, supongamos una losa en que se verifica máx M = + 700 kgm. y comprobemos numéricamente que con 50 y 1200 obtendremos una estructura más económica que con 60/1200. En efecto: con 50 y 1200 tenemos h' = 9,13 cm. f_e = 8,33 cm² (con 15 ϕ 8 m/m es f_e = 7,5 cm²) por lo que h = 10,5 cm.; con 60 y 1200 se tiene en cambio, h' = 7,96 cm. f_e = 8,55 cm² (con 11 ϕ 10 m/m es f_e = 8,65 cm²) por lo que h = 9,5 cm.

Suponiendo a = 1,05 y calculando los costos en ambos casos sin contar el encofrado, tendremos:

con 50 y 12000) $C_x' = 0{,}01 \times 10{,}5 \times 25 + 0{,}0008 \times 1{,}05 \times 7{,}5 \times 340 =$

$$= 2{,}65 + 2{,}14 = \$\ 4{,}79 \text{ el } m^2$$

con 60 y 1200) $$C'' = 0{,}01 \times 9{,}5 \times 25 + 0{,}0008 \times 1{,}05 \times 8{,}65 \times 340 =$$

$$= 2{,}38 + 2{,}47 = \$\ 4{,}85 \text{ el } m^2.$$

Vemos pues que el costo es menor con 50 y 1200 que con 60 y 1200, aunque la diferencia es despreciable, (y en la práctica tal vez nula).

Establezcamos ahora esta diferencia de costos en el caso primeramente citado en que $\varphi = 60$ (en nuestra localidad); vimos que la tensión más económica era de 73 $kgcm^{-2}$; pero que podíamos contar a lo sumo con 60 $kgcm^{-2}$; supongamos poder admitir los 73 kg cm^{-2}; y consideremos una losa en que M = 700 kgm. Con 73/1200 tendremos: h' = 6,85 cm.; $f_e = 9{,}95\ cm^2$ (con 13 ϕ 10 m/m es $f_e = 10{,}2\ cm^2$) y h = 8,0 cm. ; con 60/1200 tuvimos h = 9,5 cm y $f_e = 8{,}65\ cm^2$.

Los costos serán pues en este caso en que $C_b = \$\ 36{,}45$ y $C_e = \$\ 269{,}85$:

con 73 y 1200 $$C' = 0{,}01 \times 8{,}0 \times 36{,}45 + 0{,}0008 \times 1{,}05 \times 10{,}2 \times 269{,}85 =$$

$$= \$\ 2{,}92 + \$\ 2{,}31 = \$\ 5{,}23 \text{ el } m^2.$$

con 60 y 1200 $$C'' = 0{,}01 \times 9{,}5 \times 36{,}45 + 0{,}0008 \times 1{,}05 \times 8{,}65 \times 269{,}85 =$$

$$= \$\ 3{,}46 + \$\ 1{,}96 = \$\ 5{,}42 \text{ el } m^2.$$

Suponiendo que el costo del encofrado y apuntalamiento sea de unos \$ 3.— el m^2 (teniéndose en cuenta el número de utilizaciones sucesivas de la madera) resultan los costos de la losa en ambos casos de \$ 8,23 y \$ 8,42 el m^2. Vemos pues que a un aumento de más o menos el 20 % de σ_b (de 60 a 73 kg cm^{-2} corresponde una economía de alrededor del 2 % $\left(100 \dfrac{8{,}42 - 8{,}23}{8{,}42} \right)$ En realidad es pequeña y deducimos así que no hay objeto ni es razonable (al menos en esta localidad) querer sobrepasar los 60 a 65 kg cm^{-2} en la tensión de trabajo del hormigón en las losas preocupándose por confeccionar hormigón de más elevada resistencia, o bien elevando, audaz e inútilmente, el coeficiente de seguridad de los hormigones de común utilización.

El factor de potencia en un circuito de corriente alternada

(2a. PARTE)

POR EL ING. JUAN G. SCHILDKNECHT

III. DETERMINACION PRACTICA DE LA AUTOINDUCCION:

Aclarados en el capítulo anterior los fenómenos que produce la corriente alternada en los circuítos con selenoides intercalados, corresponde ahora establecer que efectos eléctricos origina la autoinducción.

Tal como se ha deducido más arriba, se observó que por la autoinducción la intensidad tiene su fase desplazada con respecto a la tensión por un ángulo que en el diagrama B. se designó con φ, determinándose su valor matemático por la fórmula deducida de la Fig. C.

$$(10) \qquad \text{tang } \varphi = \frac{E_1}{E_0} = \frac{I.\omega.L}{I.R} = \frac{\omega.L}{R}$$

En la electrotécnica práctica las fórmulas (9) y (10) tienen una importancia primordial por cuanto sirven para determinar fácil y rápidamente el coeficiente de autoinducción L y el ángulo φ cuando se conocen:

E = tensión alternada en voltios
I = intensidad que circula por el solenoide en Amperios
f = frecuencia en períodos por segundo
ω = $2.\pi.f$ = velocidad angular del vector que representa la tensión

Por simple transformación de la fórmula (9) y con los valores facilmente medibles que anteceden, se obtiene:

$$(9) \qquad \frac{E}{I} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\omega.L = \sqrt{\frac{E^2}{I^2} - R^2}$$

$$(11) \qquad L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{E^2}{I^2} - R^2} = \frac{1}{2\pi.f}\sqrt{\frac{E^2}{I^2} - R^2}$$

$$(12) \qquad \text{tang } \varphi = \frac{\omega.L}{R} = \frac{2.\pi.f.L}{R}$$

Teniendo presente que la técnica opera con mayor frecuencia con el cos φ, como se demostrará más adelante, este valor se determina por las conocidas ecuaciones trigonométricas:

$$\text{tang } \varphi = \frac{\text{sen}\varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{\cos \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\varphi}}$$

IV.—FACTOR DE POTENCIA.

Hechas las deducciones que anteceden corresponde analizar el significado que tiene "el factor de potencia" en la técnica de los circuítos de corriente alternada.

A los efectos del caso debe recordarse que, para determinar la potencia de un circuíto de corriente contínua, se aplica la fórmula

Wattios = Amperios × Voltios

Esta misma ley tiene su aplicación en los circuítos de corriente alternada cuando en el mismo se encuentran únicamente intercaladas resistencias ohmicas que no originan un defasaje entre la intensidad y la tensión. Es el caso que vectorialmente se ha representado en la Fig. A., cuando Io forma un ángulo O° con el vector tensión E_1.

Cuando el circuíto posee además una resistencia inductiva, como sucedería al intercalarse a éste un solenoide, se produce un defasaje que provoca un atraso del vector intensidad con respecto al de la tensión. (Véase Fig. B.)

Ilustrando más detalladamente la influencia de las resistencias inductivas, se representa en la Fig. D., el desarrollo de las funciones sinusoidales y vectoriales de la intensidad y de la tensión.

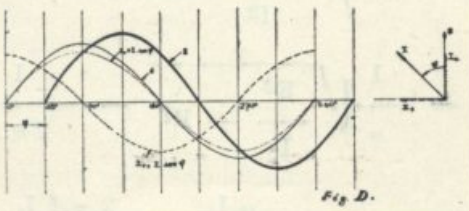


Fig. D.

La componente Io en el polígono de los vectores, significa que dicha función está en fase con el voltaje E y por consiguiente el producto de ambos valores Io . E es igual a la potencia real del circuíto.

Efectuando prácticamente las mediciones en un circuíto con resistencia inductiva, se determina:

a) La tensión E por medio de un voltímetro.
b) La intensidad "aparente" I con un amperómetro.
c) La resistencia óhmica R con corriente contínua.
d) La frecuencia f con frecuencímetro.

Substituyendo en las fórmulas (11) y (12) los valores se obtiene el ángulo φ que es el de defasaje entre la intensidad aparente y la tensión.

La intensidad "activa" Io resulta así determinada matemáticamente por la expresión

$$I_0 = I \cdot \cos \varphi$$

y la potencia "activa" o "efectiva" o "Wattiada", será:

$$(1) \qquad P_w = E \cdot I_0 = E \cdot I \cdot \cos \varphi$$

El valor trigonométrico "cos φ" ha sido llamado en la electrotécnica "factor de potencia" por influir el mismo sobre la magnitud del efecto activo de la potencia.

La componente horizontal de la intensidad, es decir, la que matemáticamente viene a ser I . sen φ, representa un valor que eléctricamente queda atrasado en un ángulo $\varphi = 90^0$ con referencia al vector tensión E.

Esa intensidad I . sen φ no tiene componente activa y actúa por lo tanto en forma de intensidad reactiva o bien en el caso E . I . sen $\varphi = P_r$ como potencia reactiva, es decir, como potencia que absorbe intensidad sin producir potencia eléctrica efectiva.

Resumiendo lo que antecede, se clasifica para los circuítos de corriente alternada, las siguientes definiciones de potencias, que asimismo pueden traducirse por transformación matemática en energías:

$P_a = E \cdot I$ .....Potencia aparente en V.A.
$P_w = E \cdot I \cdot \cos \varphi$ „ activa en K.W. activos
$P_r = E \cdot I \cdot \text{sen } \varphi$ „ reactiva en K.W. reactivos.

Con referencia a lo deducido sobre potencia activa, potencia aparente y reactiva, debe hacerse notar que I e I_0 son intensidades medidas en la unidad amperios, que se diferencian únicamente cuando actúan para la determinación de la potencia y cuando existe el defasaje según el ángulo φ. Considerados desde el punto de vista de efecto eléctrico rige para ambas intensidades la ley de Joule en su forma I^2R, por consiguiente, a mayor intensidad aparente las pérdidas en el circuíto resultan igualmente más elevadas.

La importancia que tiene el ángulo φ se vé reflejada en la parte referente a la intensidad en relación a la potencia efectiva. A ángulo φ pequeño, es decir, próximo a 0^0, el cos φ se aproxima a la unidad, lo que significa que la intensidad activa tiene un valor poco diferente a la intensidad aparente.

Para la figura E anexa, se observa cuál puede ser la variación de la intensidad I al aumentar el ángulo φ y la relación que existe entre la intensidad activa I_0 y la aparente I con respecto a la potencia activa constante.

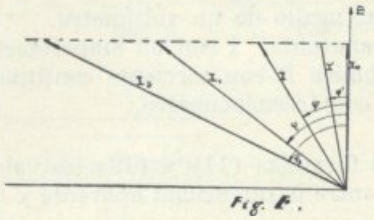


Fig. E.

El aumento del defasaje φ significa eléctricamente una elevación de la intensidad I y un desfavorable aprovechamiento de la potencia que es capaz de producir la intensidad activa conjuntamente con la tensión.

Llevado éste fenómeno al terreno de la mecánica puede calificarse al "factor de potencia", es decir, el cos φ, como si se tratara de un coeficiente de rendimiento del sistema que forma el circuito eléctrico en el cuál se encuentra una rsistencia inductiva.

Es por consiguiente de gran importancia para la electrotécnica dedicar la mayor atención a ese factor de rendimiento que se bautizara acertadamente "factor de potencia", por cuanto del mismo depende el aprovechamiento racional de las instalaciones en las cuales se presentan los efetos de la autoinducción.

Hechas las consideraciones que anteceden sobre los efectos eléctricos que produce un solenoide, es decir, una inductividad, intercalado en un circuito, debe hacerse resaltar que ese fenómeno se produce casi exclusivamente en las redes a las cuales se encuentran acoplados dispositivos o mecanismos que deben producir campos de magnetización. Este es el caso de todos los tipos de motores y transformadores que, en su esencia, se componen de bobinas que desempeñan el papel de solenoide dentro del circuito.

Sin embargo la electrotécnica registra entre esos fenómenos, igualmente otro que es el que se origina por los efectos de los condensadores eléctricos que pueden también estar intercalados en los circuitos de corriente alternada.

A la inversa de lo que produce la autoinducción, es decir, un atraso en la intensidad con referencia a la tensión, los condensadores provocan un adelanto en la fase del vector I con respecto al E.

Estos efectos contrarios, son los que la electrotécnica utiliza para compensar el defasaje entre intensidad y tensión, dando lugar con ello a interesantes problemas económicos que en las grandes industrias pueden reportar apreciables ventajas.

(Continuará).

Métodos generales para la determinación de la humedad de las substancias

APUNTES DEL DR. PEDRO H. GAMBETTA

La determinación de la humedad en el análisis químico cuantitativo es de suma importancia; en primer término, esta determinación nos permite conocer exactamente los porcentajes en que ciertas substancias se encuentran mezcladas o formando combinaciones en productos definidos y en segundo lugar para reconocer la calidad y rendimiento de ciertos productos alimenticios e industriales sujetos a un pliego de condiciones donde se fijan los límites máximos de humedad para su clasificación o aptitud para su uso.

En la práctica nos encontramos con muy diversos casos según los productos a analizar:

1º — Las substancias no sufren alteraciones por calentamiento a la temperatura de 100º - 105º C. y que por su naturaleza, ceden fácilmente el agua en estas condiciones; para este caso se recomienda el empleo del método de la estufa a 100º - 105º C.

2º — Las substancias no se alteran por el calentamiento pero que, por su naturaleza, ceden con dificultad la humedad (por ejemplo: Substancias plásticas); en este caso se empleará el método del baño-maría y estufa a 100º - 105º. C

3º — Las substancias se alteran a la temperatura de 100º - 105º C. ya sea por descomposición o por influencia del oxígeno del aire a esa temperatura (por ejemplo en los carbones con elevada cantidad de materias volátiles). Se recomienda en este caso el método del desecador sulfúrico con o sin vacío.

4º — Las substancias se alteran al aire; recomendándose en este caso por su rapidez el método de la estufa de 100º - 105º C. en atmósfera inerte.

5º — Por destilación o arrastre con Xilol (método de Holde-Marcusson).

MODO OPERATORIO A SEGUIR EN LOS DIFERENTES METODOS

1º **METODO DE LA ESTUFA A 100º - 105º C.** — Caso de substancias que no sufren alteraciones por calentamiento a esta temperatura y que por su naturaleza, pueden ceder con facilidad el agua o humedad.

Para este método se operará de la siguiente manera: Se pesará 1 a 3 gramos de la substancia a analizar, colocándola en un cristalizador de vidrio o cápsula chata de porcelana; luego se llevará a la estufa de temperatura de 100º - 105º C. constante, durante dos horas. Transcurrido este tiempo se deja enfriar en un desecador y se pesa. Debe comprobarse que por 30 minutos de calentamiento en estufa no se produce nueva pérdida de peso; en caso contrario se continúa el calentamiento hasta confirmar la constancia de peso.

Observación: (Para tarar el cristalizador o cápsula se lo desecará previamente en estufa o pasándolo ligeramente por la llama de gas y se lo pesará después de enfriarlo en el desecador).

La pérdida de peso relacionado a 100 gramos del producto representará la humedad.

2º **METODO DEL BAÑO-MARIA Y ESTUFA A 100º - 105º C., empleando substancias inertes intermedias.** — Caso de substancias que no se alteran por el calentamiento pero que, por su naturaleza, ceden con dificultad su humedad; por ejemplo en las substancias plásticas, jabones, grasas, etc.

En este método el producto deberá estar cortado en pequeños fragmentos o mejor aún, en virutas.

Se pesarán 2 - 3 gramos del producto en un cristalizador de 20 a 30 cc. de capacidad; operando en el siguiente orden:

a) Se tara el cristalizador, seco y frío; llamemos a este peso (P.).

b) Se pesa con la substancia a analizar; llamando a este peso (P_1).

c) Se introduce en el cristalizador unos 10 a 15 gramos de arena lavada, gruesa y seca, y una varilla de vidrio con la extremidad aplanada, para que ofrezca mayor superficie, y se vuelve a pesar el todo; llamemos a este peso (P_2).

Se agrega unos 10 a 15 cc. de alcohol puro y por suave calentamiento, a baño-maría se favorece la disolución del producto, por ejemplo jabón, ayudándose con la varilla procurando hacerlo con cuidado para evitar las pérdidas. Continuando la evaporación los granos de arena se incorporan íntimamente a la masa siruposa y se continúa el calentamiento, agitando con cuidado, hasta sequedad. Se lleva luego a la estufa durante 2 horas, se deja enfriar en el desecador y se pesa, comprobando la constancia de peso por otros 30 minutos de estufa; llamando a este peso (P_3).

$P_1 - P =$ peso de la substancia.

$P_2 - P_3 =$ humedad sobre la cantidad de substancia analizada. El resultado se relacionará a 100 gramos y tendremos la humedad del producto.

3º **METODO DEL DESECADOR SULFURICO CON O SIN VACIO.** — Caso de substancias que se alteran a 100º - 105º C., ya sea por descomposición o por influencia del oxígeno del aire a esa temperatura como sucede en los carbones con alta cantidad de materias volátiles.

Se opera en cristalizador pesando 2 a 4 gramos del producto y se coloca en un desecador conteniendo ácido sulfúrico de densidad 1,84. Se tapa el desecador cuidando que el cierre sea perfecto y después de 4 días se pesa de nuevo el cristalizador; comprobándose por otra pesada 1 día después la constancia de peso.

Para abreviar 1 ó 2 días la operación o en el caso de las substancias que pierden con gran dificultad su humedad a presión ordinaria, se empleará entonces desecadores con tubuladuras para vacío, los cuales después de tapados se le efectuará el vacío por medio de una trompa de agua, cerrándose la llave esmerilada que lleva la tubuladura del desecador a los 2 a 3 minutos. Se cuidará que la llave se abra muy lentamente tanto al hacer el vacío como al dejar entrar el aire, cuando se trate de retirar el cristalizador para pesarlo.

En este caso la pérdida de peso relacionada a 100 gramos de la substancia nos dará la humedad.

Observación: En casos especiales se procede en el vacío y a temperatura más elevada que la normal; 40 - 50 - 60º C. (para substancias alterables) pudiendo aplicarse mayores temperaturas para cuerpos inalterables que pierden la humedad difícilmente por los procedimientos anteriores.

4º **METODO DE LA ESTUFA EN ATMOSFERA INERTE.** — Para las substancias que se alteran al aire, a veces este procedimiento da resultados iguales que el indicado en el método anterior; pero es más rápido pues se trabaja a la temperatura de 100º - 105º C.

Se opera en estufa por la cual se le hace pasar una corriente lenta de un gas inerte, como ser anhídrido carbónico, nitrógeno, etc.

Es necesario elegir el gas de acuerdo con la naturaleza de la substancia; así el nitrógeno deberá preferirse siempre que se sospeche carbonatación por el anhídrido carbónico y este último puede aplicarse para el caso de los carbones.

5º **METODO POR DESTILACION O ARRASTRE CON XILOL de Holde-Marcusson.** — Este método se funda en que si se hierve una mezcla de xilol (xylolum ó xilene ó mexcla de Orto, Meta o Para xilene de punto de ebullición 138º - 152º C.) y de una substancia que contenga agua ésta se elimina rápidamente gracias a la temperatura de ebullición del líquido y al arrastre de los vapores del xilol, a través de un refrigerante; y en un tubo graduado se puede leer el agua que se decanta en la parte inferior, dada la insolubilidad del agua en el xilol.

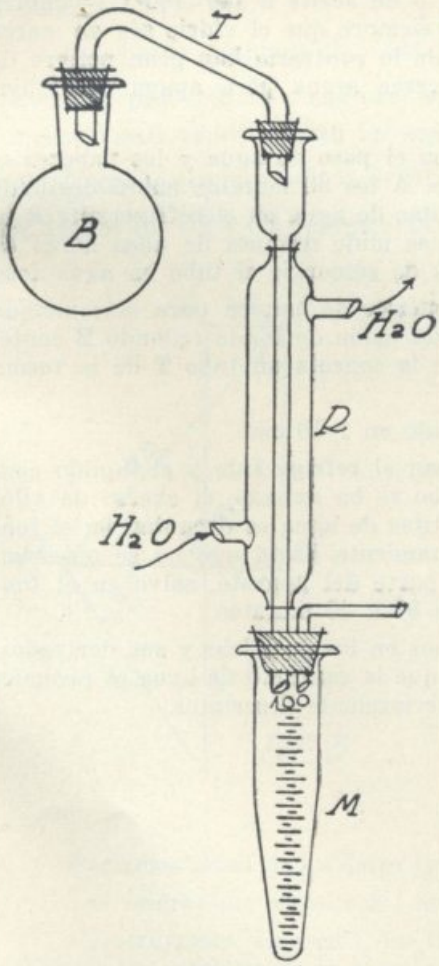


FIGURA Nº 1

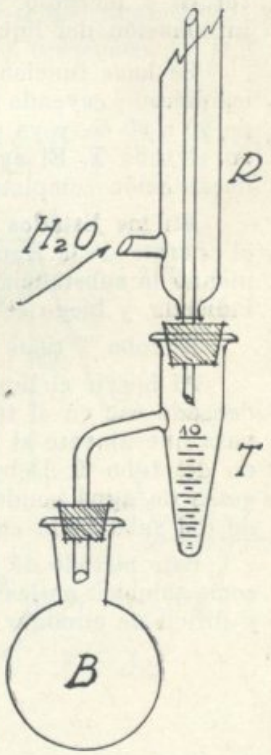


FIGURA Nº 2

Descripción del aparato. (Ver figura 1). — El aparato está compuesto por un balón B. de fondo redondo de 400 cc., con cuello corto de 4-5 cm. que lleva un tapón de corcho de buen cierre, atravesado por un tubo de vidrio acodado doble T. (diámetro 1 cm.) el que se une a su vez con el refrigerante perpendicular, (se puede también emplearlo algo inclinado) de 40 cm. de superficie de refrigeración y cuyo tubo de salida encaja en un tubo especial de "Marcusson" M., de la forma indicada en la figura 1., de 100 cc. dividida la parte inferior en 1/10 de cc. y la parte superior (de 10 a 100 cc.) en 1 cc.

Modo operatorio. — En el balón B. se introduce de 10 a 40 gramos de la substancia a analizar (según el contenido de agua) o 100 cc. de petróleo o producto derivado. En este último caso se mide con probeta, recuperando la substancia que queda adherida, con enjuagues con xilol.

Se agregan 100 cc. de xilol, previamente saturado con agua y se agita para uniformar. En caso necesario (mucha cantidad de agua en la substancia a analizar) debe agregarse pequeños fragmentos de piedra pomez previamente calcinada, para regularizar la ebullición. Después de haber hecho las conexiones cuidando mucho la seguridad de los cierres, se calienta muy suavemente el balón con baño de arena o de aceite a 140 - 160° C., también puede usarse una pequeña llama de gas siempre que el vidrio sea de marca conocida de Jena, Pirex, Murano, etc.; de lo contrario hay gran peligro de rotura o incendio. Es necesario tener cerca arena para apagar cualquier inflamación del líquido de análisis.

Se hace funcionar el refrigerante con el paso de agua y los vapores se condensan, cayendo en el tubo graduado. A los 30 minutos habrá destilado de 80 a 90 cc. y ya no se observarán gotitas de agua en el refrigerante **R** ni en el tubo **T**. El agua decantada en **M** se mide después de unas horas de decantación completa o a los 20 minutos de sumergir el tubo en agua fría.

En los Estados Unidos de Norte América se emplea para este método el aparato de la figura 2. que consta de un balón de fondo redondo **B** conteniendo la substancia y el xilol; a éste se le conecta un tubo **T** de la forma indicada, y luego el refrigerante **R**.

El tubo T tiene 10 cc. y está graduado en 1/10 cm.

Al hervir el líquido, los vapores pasan al refrigerante y el líquido condensado cae en el tubo T; cuando el tubo se ha llenado, el exceso de xilol pasa nuevamente al balón B, pero las gotitas de agua se decantan en el fondo del tubo T. Debe continuar el calentamiento hasta que no se observan gotas de agua condensadas en ninguna parte del aparato, salvo en el fondo del tubo T, lo cual se obtendrá a los 30 a 40 minutos.

Este método dá resultados muy buenos en los petróleos y sus derivados, como también en las grasas y aceites, en que la cantidad de agua es pequeña y difícil de eliminar por los métodos anteriormente descriptos.

Problema del Cuadrilatero

(Continuación)

POR EL ING. HIGINIO GREPPI

SOLUCION GRAFICA

Vamos a resolver gráficamente las ecuaciones

1) $ab \cos \alpha_1 - cd \cos \alpha_2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) = C$

2) $ab \operatorname{sen} \alpha_1 + cd \operatorname{sen} \alpha_2 = 2S$

Supongamos que conocemos α_1 y α_2

Tomemos en escala una recta $\overline{P_1 A}$ cuya longitud nos represente la cantidad ab (fig. 3) y proyectésmosla según el ángulo α_1. Sus proyecciones serán $\overline{AB}$ y $\overline{P_1B}$ que en la misma escala representarán los primeros términos de las ecuaciones 1) y 2).

Si a partir del punto P_1 y bajo el ángulo α_2 tomamos una recta $\overline{PE}$ proporcional al producto cd . sus proyecciones serán $\overline{DE}$ y $\overline{P_1D}$ que también en la misma escala representarán los segundos términos de las ecuaciones 1) y 2).

Luego los segmentos $\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{OE}$ y $\overline{DB} = \overline{OA}$

se deduce que $\overline{OE}$ y $\overline{OA}$ representan a escala los valores 2S y $\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$

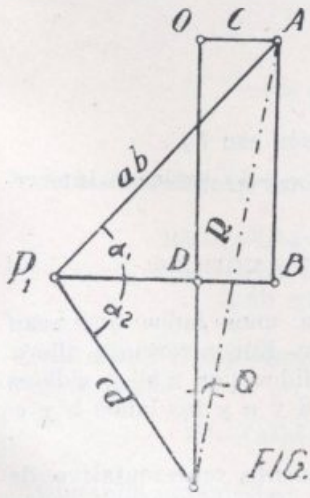


FIG. 3

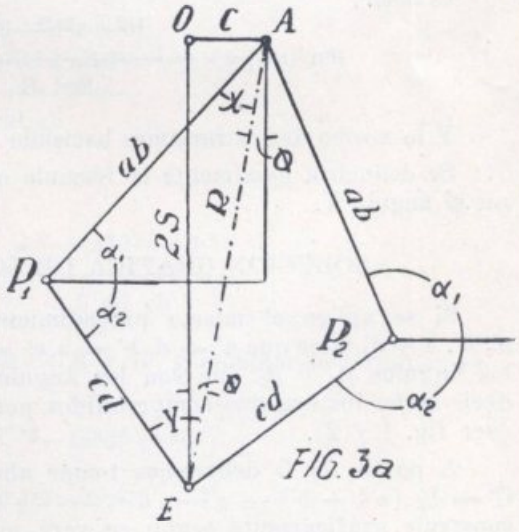


FIG. 3a

Partamos ahora de los datos (véase fig. 3ª)

Los valores que necesitamos son 2 S y $\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) = C$

Construyamos, en escala, un triángulo rectángulo con los valores 2 S y C y desde los extremos de la hipotenusa y con arcos iguales, en escala, a los valores ab y cd respectivamente, encontramos los puntos de intersección de P.

Trazando desde P una paralela al cateto C se tienen los ángulos α_1 y α_2. El valor de C puede ser positivo o negativo, para que la construcción gráfica guarde siempre la misma posición relativa de sus valores vamos a convenir tomar siempre ab desde el extremo A y cd desde el extremo E; el valor de C lo tomaremos desde O a la derecha si es positivo y hacia la izquierda si fuera negativo.

En esta forma α_1 y α_2 tendrán siempre su origen en el segmento paralelo al cateto C situado a la derecha del punto P, midiendo el ángulo α_1 en sentido positivo desde este segmento hasta la recta ab girando en sentido contrario al de las agujas del reloj y el ángulo α_2 en sentido positivo desde este mismo segmento hasta la recta cd girando en el mismo sentido que las agujas del reloj.

Si se varía la posición de los datos los ángulos α_1 y α_2 aparecerán en distinta forma pero el máximo de soluciones serán siempre dos. (Tantas soluciones como intersecciones tengan las circunferencias de radio ab y cd trazadas desde A y E respectivamente).

Observando la construcción gráfica se vé que al trazar la hipotenusa AE se tiene representado el valor de R y que en el triángulo AOE el ángulo en E es ϕ. Si se traza la perpendicular a OA desde A se tiene otro triángulo rectángulo en el que

$$90^\circ - \alpha_1 = X + \phi$$

$90^\circ - (\alpha_1+\phi) = X$ es decir que sen $(\alpha_1+\phi) = \cos X$ y en el triángulo AP_1E aplicando el teorema del coseno

$$\cos X = \frac{R^2+a^2b^2-c^2d^2}{2cd\ R}$$

es decir

$$\text{sen } (\alpha_1+\phi) = \frac{R^2+a^2b^2-c^2d^2}{2cd\ R}$$

Y lo mismo demostraríamos haciendo la construcción con P_2.

Se deduciría igualmente la fórmula que da sen $(\alpha_2-\phi)$ haciendo intervenir el ángulo Y.

SOLUCION GRAFICA DE LOS CUATRO ANGULOS

Si se aplica el mismo procedimiento pero con unos lados que sean a', b', c' y d' tales que a' = d, b' = a, c' = b, d' = c. Encontraremos ahora los ángulos β_1 y β_2 que son los ángulos comprendidos por a'b' y c'd' es decir serán los ángulos comprendidos por los lados d y a y los lados b y c. (ver fig. 1 y 2).

A partir de O deberemos tomar ahora un segmento representativo de $C' = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2 - c'^2 - d'^2) = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - c^2 - b^2)$ que se puede construir gráficamente según se verá más adelante (ver ejemplo de construcción gráfica).

Construído entonces el triángulo rectángulo OA'E desde los extremos de la hipotenusa A'E representativa de R' con arcos a'b' es decir ad, desde A' y c'd' es decir cb, desde E, encontraremos por intersección los puntos P' que nos permitirán hallar en la forma ya establecida los valores de β_1 y β_2 (fig. 4).

Los valores necesarios para la construcción gráfica doble: C, C' ab, cd, ad y cb que es necesario calcular previamente en base a los datos a, b, c, d podrán calcularse a regla de cálculo, o bien sacarlos de los cálculos analíticos cuando el gráfico se haga como guía para el cálculo de la planilla. Si se desea hacer íntegramente el cálculo por medio del gráfico, se indican más adelante la forma de hacerlo.

INDIVIDUALIZACION DE SOLUCIONES

Faltará ahora determinar cual de los puntos P' pertenecerá a una solución y cual a la otra habiéndose ya fijado las posiciones de los puntos P; asignando a uno la solución 1ra. y designándolo con P_1 y al otro la solución 2da. designándolo con P_2. (Fig. 4).

Vamos a demostrar previamente que la inclinación con que se cortan las rectas ab y cd es la misma que la inclinación con que se cortan las rectas ad y cb. En efecto llamemos al ángulo menor que 180º que forman al cortarse φ.

En los triángulos APE por el teorema del coseno tenemos
(AP$_1$E igual AP$_2$E)

$$-\cos\varphi = \frac{R^2 - (a^2b^2 + c^2d^2)}{2\ ab\ cd}$$

En los triángulos AP'E igualmente:

(triángulo AP$_1$'E igual al AP$_2$'E)

$$-\cos\varphi = \frac{R'^2 - (a^2d^2 + c^2b^2)}{2\ ad\ cb}$$

Si los dos ángulos son iguales:

$$\frac{R^2 - (a^2b^2 + c^2d^2)}{2\ ab\ cd} = \frac{R'^2 - (a^2d^2 + c^2b^2)}{2\ ad\ cb}$$

En efecto reemplazando los valores de R y R' y eliminando términos comunes se llega

$$C^2 - (a^2b^2 + c^2d^2) = C'^2 - (a^2d^2 + c^2b^2)$$

Quitando paréntesis y trasponiendo términos:

a) $$C^2 - C'^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - a^2d^2 - c^2b^2$$

b) $$(C+C')\ (C-C') = a^2(b^2-d^2) - c^2(b^2-d^2) = (a^2-c^2)\ (b^2+d^2)$$

Pero

$$C = \tfrac{1}{2}\ (a^2 - c^2 + b^2 - d^2)$$
$$C' = \tfrac{1}{2}\ (a^2 - c^2 + b^2 - d^2)$$

Sumando y restando

e) $\qquad C + C' = a^2 - c^2 \qquad\qquad C - C' = b^2 - d^2$

que reemplazadas en b) la convierten en una identidad.

Demostrado que los ángulos que se forman en los puntos P y P' son iguales, y habiendo asignado subíndice a los puntos P (es decir que si uno pertenece a una solución el otro punto P simétrico con respecto a R pertenecerá a la otra solución) veamos cómo se pueden individualizar los subíndices de los puntos P'.

Designamos con el subíndice 1 al punto P a la izquierda de la recta R yendo desde E a A el otro punto será entonces P_2. (Lo mismo se puede razonar si al de la izquierda lo designamos con 2 y al de la derecha con 1).

Suponiendo entonces al punto P a la izquierda de R como solución 1ra., tendremos que: (fig. 4 y 4a.)

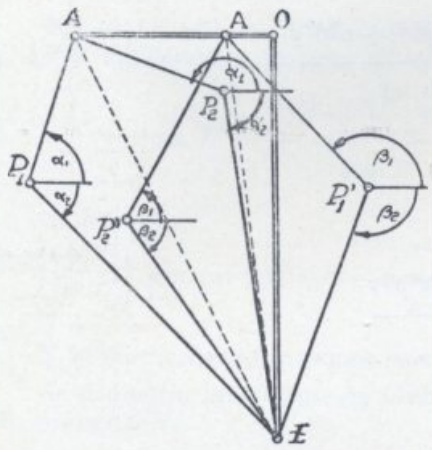


fig. 4

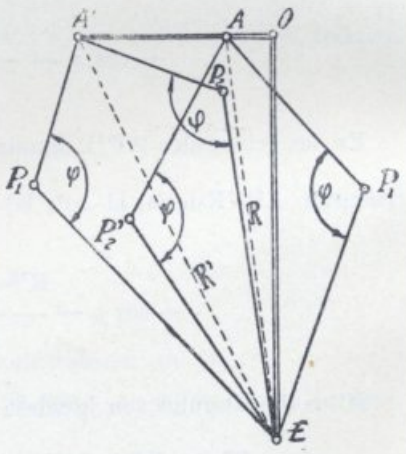


fig. 4a

d) $\alpha_1 + \alpha_2 = \varphi$ en caso de cuad. cruzado será $\alpha_1 + \alpha_2 = \varphi + 360^\circ$

En el punto P_1' se deberá verificar que

e) $\beta_1 + \beta_2 = 360^\circ - \varphi$

De tal modo que d) y e) nos darán:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 360^\circ$ cuadrilátero convexo o cóncavo
$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 720^\circ$ cuadrilátero cruzado.

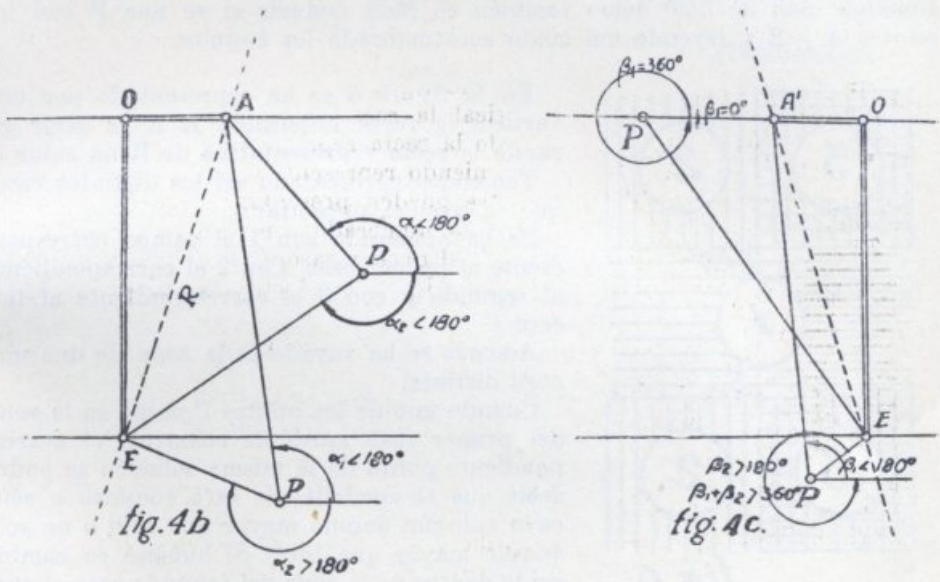
Para que se verifique e) en el punto P_1' se deduce de la figura que este punto debe estar situado a la derecha de la recta R' yendo desde E a A'. El punto P_2' será el simétrico con respecto a R' del punto P_1'.

Luego los puntos P y P' pertenecientes a una misma solución se hallan partiendo desde E uno a la derecha y el otro a la izquierda de las rectas R y R' respectivamente.

Veremos ahora como por la posición relativa de los puntos P y P' se pueden determinar a simple golpe de vista si el cuadrilátero es convexo, cóncavo o cruzado. Es decir ningún ángulo mayor que 180º, un ángulo mayor que 180º y la suma de dos ángulos opuestos mayor que 360º.

Analicemos para esto un caso cualquiera la posición de un solo punto P ó P'.

Sea en la figura 4 b el trazado para encontrar los ángulos a_1 y a_2 es decir que tenemos dibujado el triángulo rectángulo AOE formado por los lados C, 2S y R. En la figura 4 c tenemos el trazado para encontrar en cambio β_1 y β_2. Procederemos análogamente en ambas figuras.



Si se prolongan en ambos las rectas AO y EA y además se traza por E una paralela a AO se tiene dividido el plano del dibujo en seis campos que tienen las siguientes propiedades.

Primero: Vamos a considerar como uno solo a los dos campos comprendidos entre las paralelas indefinidas OA y la que pasa por E.

Si un punto P cae dentro de este campo corresponderá a un par de ángulos ninguno de los cuales será mayor de 180º.

En efecto si se traza por P el segmento paralelo a C desde el cual se toma el origen de los ángulos. Se deduce que para ser un ángulo mayor que 180º la paralela que pasa por P y el punto A ó el E deben estar sobre una misma recta cosa que no puede suceder sin salirse de este campo. Cuando un punto P cae sobre la recta indefinida OA o su paralela por E el cuadrilátero tendrá un ángulo que vale 360º o 0º siendo de considerar este caso tanto como cruzado o convexo.

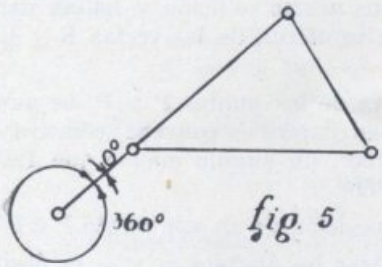


fig. 5

Es decir; será un triángulo formado por lados en los que uno de ellos está formado por la diferencia de dos lados dados como datos en el problema. (Fig. 5).

Segundo: Si un punto P cae en cambio en el campo situado a la derecha de la recta indefinida AE pero por arriba de la recta OA o por debajo de la paralela a C que pasa por E, habrá un ángulo mayor que 180º y el otro menor que 180º como se ve inmediatamente si se une el punto P con los puntos E y A y trazando la paralela por P a C se leen los ángulos de la manera ya indicada.

Tercero: Y por último si un punto P cae en el campo situado a la izquierda de la recta indefinida EA pero por arriba de OA o por debajo de la paralela a C que pasa por E, los dos ángulos que se lean en dicho punto P sumarán más de 360º como también es fácil deducir si se une P con los puntos A y E y leyendo del modo acostumbrado los ángulos.

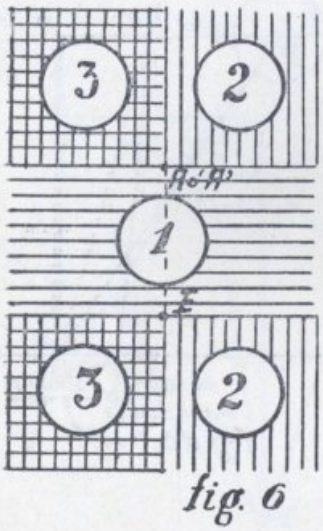


fig. 6

En la figura 6 se ha representado por una vertical la recta indefinida E A es decir girando la recta representativa de R un calor ϕ.

Teniendo representado así los distintos casos que se pueden presentar:

Se ha numerado con 1 el campo correspondiente al primer caso. Con 2 el correspondiente al segundo y con 3 el correspondiente al tercero.

Además se ha rayado cada zona de una manera distinta.

Cuando uno de los puntos P caiga en la zona del primer caso antes de construir el correspondiente punto de la misma solución se podrá decir que el cuadrilátero será convexo o cóncavo (ningún ángulo mayor que 180º o un solo ángulo mayor que 180º) Si hubiese en cambio caído dentro de la zona del segundo caso el cuadrilátero podrá ser cóncavo o cruzado (un ángulo por lo menos mayor que 180º) y por último si un punto P cae en la zona del tercer caso rayada en dos sentidos en la figura corresponderá a una solución que dará un cuadrilátero cruzado (suma de dos ángulos opuestos mayor que 360º).

Cuando un punto P cae sobre la recta indefinida EA veremos más adelante que el cuadrilátero será inscriptible en una circunferencia convexo si está dentro del campo 1 y cruzado si está fuera de él.

DISCUSION DE LAS SOLUCIONES

Los casos de posibilidad e imposibilidad de que el problema tenga solución, se reducen aquí a que se pueda o no construir el gráfico.

Descartamos de antemano el caso de que entre los cuatro lados que se dan como datos haya uno que sea mayor que la suma de los otros tres restantes por ser evidente que el cuadrilátero no se podrá construir para ningún valor de la superficie.

Analizamos solamente el caso de que con los cuatro lados no se pueda obtener la superficie dada para definirlo como caso imposible.

El problema será posible siempre que con ab, cd y R se pueda construir representándolos con segmentos proporcionales, un triángulo o lo que es lo mismo hallar un punto P que diste ab y cd de los extremos de R, esta posibilidad es que ningún segmento representativo, ningún lado del triángulo, sea mayor que la suma de los otros dos ni menor que su diferencia.

Aplicando esto al lado R se tiene, para que el problema tenga solución debe verificarse conjuntamente:

$$R < ab + cd \qquad R > |ab - cd|$$

Excluyendo por lo tanto los casos;

$$R > ab + cd \qquad R < |ab - cd|$$

Cada uno de los cuales es suficiente para hacer imposible la solución.

(Continuará)

BREVES NOCIONES SOBRE ACUSTICA ARQUITECTONICA

Circunstancias especialísimas me impiden dedicar a estas breves consideraciones el estudio que ellas requieren. La falta material de tiempo e inconvenientes de última hora, unidos al deseo de no dejar incumplida la promesa que he formulado al Centro Estudiantes, me obligan a presentar estas líneas sin la dedicación requerida y llenas de una serie de deficiencias que espero serán perdonadas —con un poco de buena voluntad— si es que algún provecho puede sacarse del conjunto.

★

Cuando se trata de abordar el problema de la acústica en una sala o ambiente en general, un fantasma (que el tiempo nos ha legado) se nos presenta: son tantos y tan delicados los elementos que intervienen que, al último, se termina generalmente por creer en la suerte como factor que lleva al éxito o fracaso del conjunto.

No solo intervienen las formas y proporciones de los locales sino que los mismos materiales de que están constituídos y, áún estos, según su: aplicación, estructuras, decoraciones, etc., etc., así como el mismo caudal de público son factores que, combinándose entre sí, hacen, de primera intención, parecer fantástico y difícil encerrar tantas circunstancias en los límites del cálculo, de los trazados y de lo previsible.

Uno de los más notables catedráticos de Teoría de la Arquitectura, decía, hace años, que no quería tocar en su cátedra el tema de la Acústica Arquitectónica por tener tan triste idea de la misma —en lo que a su cálculo se refería— hasta llegar al convencimiento de que al final no existían sinó desilusiones: no por las consecuencias de los cálculos de la teoría misma, sino que por los resultados de la práctica.

Era el concepto general, hasta hace pocos años, que podían preverse las circunstancias capaces de llevar al fracaso la acústica de un ambiente pero que no podía asegurarse de antemano (ni con los más cuidadosos y metódicos estudios) en absoluto el éxito de la misma. Por las consideraciones que expondremos más adelante, como criterio a seguirse en los modernos estudios, veremos que aquel concepto podía tener una evidente razón de ser

en las pesadas arquitecturas donde las complicaciones estructurales, arquitectónicas o decorativas, podían traer todos los inconvenientes de reflejos, ecos, etc., etc., dado que la misma complejidad de formas hacía imposible descubrir, seguir y estudiar metódicamente, todos esos infinitos fenómenos acústicos, de fácil origen en tales ambientes. La arquitectura moderna, con sus formas funcionales y sencillas, permite salvar tales escollos y es así como —dejando de lado las pasadas formas basadas en el arreglo de un cieloraso, de una boca de escenario, etc.— se han ido perfilando las salas de arquitectura acústica que no parten de la forma estética premeditada sino de aquella que la acústica arquitectónica indica como más conveniente. Es así como no vamos hoy tras las composiciones y el decorado que satisfagan una perspectiva (en los salones de audiciones) sino que nos atenemos a las formas que resuelven los problemas acústicos, con las pequeñas variantes que en cada caso estos permitan para hacerlos más agradables y recurriendo al color, cuando fuera indispensable, para mejorar arreglos.

Por tales motivos: por los conceptos que hoy se tienen como norma para los cálculos y proyectos, por una parte, y la libertad que los principios funcionales de la arquitectura nos dan para la elección de las formas, por la otra, resulta que el tal fantasma del problema acústico arquitectónico es relativo en la actualidad; el fracaso que se produce en la mayoría de los casos no se debe ya a la mala suerte sino que al desconocimiento de los conceptos básicos, fundamentales, por parte de los proyectistas. Como ha ocurrido siempre, ante los problemas de más difícil solución, o aquellos en que los resultados entraban en la categoría de lo dudoso, el hombre de ciencia y los experimentadores han redoblado sus esfuerzos para alcanzar el terreno de lo positivo: es así que se cuenta hoy con una enorme profusión de textos que tratan extensamente el punto y, justamente por ello, surge la dificultad de resumir en pocas páginas los elementos más indispensables para la solución de los casos generales. Tratar de salvar esa dificultad es lo que nos proponemos con la presente publicación.

HISTORIA

Largo sería pretender hacer historia sobre este punto. Ello nos obligaría a seguir la evolución humana desde las más remotas épocas, desde el momento aquel en que el hombre tuvo el concepto de la palabra y, más lejos aún, de la distinción de las voces y los ruidos: su atención recayó en esos fenómenos e intuitivamente o por la observación comprobó el efecto de ciertos ele-

mentos naturales (montañas, fondos de barrancas, arbolados, etc., etc.) en la trasmisión de las voces, sonidos o ruidos y comenzó, como se ha constatado, a utilizarlos para sacarles provecho en determinado sentido. Puede decirse que allí comienza el estudio de la acústica, por lo menos los más indecisos pasos de la experiencia: es muy largo el camino adelantado desde ese momento hasta nuestros días y pretensión ridícula sería por ello querer historiarlo y, menos aún, en breves páginas.

En ciertos asuntos creo que lo histórico reviste un simple carácter de curiosidad y lo especializado de nuestras actividades, así como el máximo aprovechamiento del tiempo, nos obliga a ir directamente a las conclusiones de aplicación inmediata y práctica, frutos de los siglos de experiencias y profundos trabajos científicos.

De la historia, para el presente caso, nos interesa únicamente el reconocimiento hacia aquellas lejanas civilizaciones que observaron los fenómenos más elementales, punto de partida a todas las posteriores conclusiones y la aplicación que de ello hicieron ya en forma más concreta en sus teatros, y recintos de conferencias los Griegos, Romanos, los artistas Medioevales, los del Renacimiento, etc., etc., hasta llegar a nuestros días. Pero aún estas simples consideraciones nos llevarían a un enorme conjunto de antecedentes que escapan a nuestra finalidad por la cual creemos más interesante la sencilla puntualización de las dos consecuencias fundamentales que se saca de todo el estudio histórico; ellas son las siguientes:

1º Desde la más remota antiguedad el hombre conoció y aprovechó ciertos fenómenos acústicos para intensificar y transmitir los sonidos; con un concepto aún intuitivo en aquel entonces,

2º Cuando surgen los instrumentos musicales, cuando ellos se perfeccionan, cuando el hombre penetra en el secreto de los sonidos (en sí, en su origen, emisión y trasmisión) recién aborda científicamente, el estudio de los fenómenos acústicos y, como

Conclusión: lo que la intuición había consagrado, comparado con los resultados de la experiencia y de los estudios científicos llevó a esos fundamentos de la Acústica Arquitectónica Moderna que a continuación exponemos.

(*Continuará*)

Funcion social de la ciencia pura

POR EL DR. S. M. NEUSCHLOSZ

Conferencia pronunciada por el Dr. S. M. Neuschlosz en el salón de actos de la Facultad de Ciencias Matemáticas el día 29 de Septiembre bajo los auspicios de los Centros de Estudiantes de las Facultades de Ciencias Matemáticas y de Ciencias Médicas.

El incremento cada vez mayor que toman, entre las actividades humanas, las que se orientan hacia la investigación desinteresada de los problemas de la ciencia pura, es, sin lugar a dudas, uno de los caracteres más distintivos de nuestra época. Es indiscutible que la curiosidad y el afán de comprender que son, y han sido siempre, los resortes que han inducido a la humanidad a plantearse problemas cuya solución no parecía prometer ventajas materiales inmediatas, son muy antiguos, probablemente tan antiguos como el mismo "homo sapiens". En efecto, la historia nos demuestra que en todas partes en donde las condiciones económicas y sociales se habían consolidado lo suficientemente para permitir que, al menos, una parte de la población no se ocupe exclusivamente de las tareas indispensables para asegurarse la vida, aparecían en seguida hombres que se dedicaban a actividades que podemos considerar como científicas. Que la investigación no se hacía siempre en forma desinteresada, es cierto. Además de la curiosidad y el afán de comprender que he mencionado, la propulsaban, a menudo de manera decisiva, intereses económicos y político-sociales: el deseo de extender su poderío sobre la naturaleza y sobre los hombres. En realidad, con respecto a los primeros pueblos civilizados (Egipto, Babilonia, etc.) no sabemos con seguridad, si existía entre ellos algo que podríamos llamar ciencia pura. Es, pues, indudable que los progresos considerables que estos pueblos han realizado en los campos de las matemáticas, de la astronomía y de la meteorología se debían a investigaciones llevadas a cabo con fines prácticos relacionados con sus tareas de agricultores y ganaderos. Pero ya, en cuanto a los griegos se refiere, la actuación entre ellos, de investigadores desinteresados, no puede ser dudosa. Y desde los tiempos de Jales y de Pitágoras hasta nuestros propios días no había época en que, por lo menos unos **espíritus selectos** no se hayan dedicado a estudiar problemas más o menos desvinculados de intereses económicos inmediatos.

La aparición de hombres de ciencia, en el sentido que atribuimos a este término en la actualidad, de ninguna manera representa, entonces, una novedad. Pero lo que ha cambiado profundamente es la actitud que adopta, frente a la ciencia y sus representantes la sociedad y, como exponente de la misma, el estado.

Si, en otros tiempos, alguien se dedicaba al estudio y la investigación científica, fué asunto particular del mismo. Como es natural, del ocio necesario para ello no podían disponer sino los representantes de las clases privilegiadas cuya subsistencia fué asegurada automáticamente, por el orden social vigente. Si prescindimos de ciertas actividades guerreras y políticas, ningún trabajo obligatorio incumbía a las clases gobernantes de la antigüedad y del medioevo feudal. Sus componentes podían divertirse libremente con ejercicios deportivos, juegos, y, si se les antojaba, hasta con estudios científicos. Mientras no parecían peligrar el orden social existente, todas estas actividades se consideraban igualmente inofensivas y por lo tanto, permitidas. Y este estado de cosas tampoco ha sufrido cambios fundamentales con la formación de la burguesía hacia fines del medioevo y en los tiempos del renacimiento. Paulati-

namente también ciertas familias burguesas podían acumular fortunas bastante cuantiosas para poder permitir a sus hijos desentenderse de la industria o del negocio paterno.

Que no todos los pensadores y hombres de ciencia de esta época eran ricos, es cierto. Basta recordar el caso de Espinosa quien, para poder realizar su obra filosófica independientemente de influencias mercenarias se vió necesitado a trabajar durante doce horas del día fabricando anteojos. Al mismo tiempo numerosos investigadores debían buscar el favor de algún príncipe o noble rico que los mantenía en su corte como astrólogos o alquimistas, o simplemente para divertirse con ellos, como lo hacía con sus artistas cortesanos o con su bufón. De lo que no cabe duda es que frente a las manifestaciones de la ciencia misma, la actitud de los gobernantes se caracterizó por su indiferencia y hasta por su hostilidad.

Una modificación desde este punto de vista puede establecerse recién después de que la burguesía, ya consolidada y poderosa, se apodera también del poder político. Es entonces que, para combatir los prejuicios y privilegios de las clases feudales, el estado burgués se constituye en propulsor de las ciencias y se empieza a considerar la investigación como función social. Como acontecimiento significativo que señala el advenimiento de nuevas relaciones entre los poderes del estado y las ciencias, puede ser considerada la fundación de la "Royal Society" en Inglaterra, en 1645, ejemplo que fué seguido, en el transcurso de los dos siglos subsiguientes por los demás países. Es mediante estas instituciones, llamadas generalmente Academias de Ciencias, que se asigna, por primera vez, cierta remuneración a determinadas personas con la finalidad de que éstas se dediquen única y exclusivamente a la investigación y aunque el número de los hombres de ciencia que pueden ubicarse de esta manera es, aún hoy en día, bien escaso, el cambio producido en la actitud de los gobiernos frente a las ciencias puras se hace sentir, ya en el siglo XIX en forma mucho más general. Careciendo de puestos destinados a investigadores puros se ubica a éstos, en número cada vez mayor, en las universidades, museos, observatorios, etc., llegando a dominar, hacia fines del siglo, al menos en la Europa occidental y central, el criterio que la primera condición para ser profesor universitario o jefe técnico de un museo, etc. es de dedicarse, en forma sistemática, a la investigación científica.

Y los resultados de este sistema en ninguna parte han defraudado las esperanzas de los que lo preconizaban y aplicaban. Que la investigación científica desvinculada de toda aplicación utilitaria es una función social que el estado debe costear e impulsar en toda forma, es actualmente reconocido —por lo menos en teoría— por todos los gobiernos del mundo. El número de las instituciones dedicadas, total o parcialmente, a las ciencias puras y el de los que trabajan en ellas, aumenta de día en día. Y esta labor sistemática y perseverante, que se realiza en todas partes, no deja de dar sus frutos abundantes. Basta recordar el progreso vertiginoso que han señalado, en los últimos años, la física atómica o ciertos capítulos de la química biológica para disipar cada duda acerca de la eficacia de la ciencia contemporánea.

Pero, a pesar de todo, si comparamos el panorama que presenta el mundo científico actual con el que ofreció a la vista, en los últimos lustros del siglo pasado, debemos reconocer que en un aspecto, al menos, no solamente no se ha realizado progreso alguno, sino, por el contrario, existe un evidente retroceso; su función más importante, la de ser las guías espirituales de la humanidad, las ciencias la cumplen hoy en un grado mucho menor que hace cincuenta años. ¿A qué se debe entonces?, y ¿cómo puede explicarse este retroceso? Y, lo que es más importante aún: ¿Cómo pueden recuperar las ciencias su influencia decisiva sobre el pensamiento general de los hombres?

Hemos hecho notar más arriba que el apoyo que la burguesía prestaba, desde un principio, a las ciencias, se debía, en primer término, a que éstas le servían de armas en su lucha libertadora contra los poderes feudales: el clero y la nobleza. El significado de armas lo tenían entonces las ciencias en doble sentido: material y

espiritual. La evolución de la física desde el renacimiento hasta el siglo XVIII creó las condiciones técnicas indispensables para la emancipación económica de la burguesía. Sin máquinas que la sustituyan nunca hubiera sido posible abolir la esclavitud, ni declarar los derechos inajenables del hombre. Que los principios enunciados por la Revolución Francesa pudieron ser llevados a la práctica se debe, en mayor grado, a la invención del telar mecánico, de las máquinas a vapor y de la corriente eléctrica que a la actividad política de los Mirabeau, Danton o Robespierre.

Pero este cambio en las condiciones materiales en que vivía la humanidad representa solamente una de las consecuencias de la evolución promovida por las ciencias, en los siglos mencionados. Una importancia, al menos igual, debe atribuirse a la influencia espiritual que las ciencias ejercían en el sentido de liberar el pensamiento humano de los prejuicios religiosos y sociales multiseculares en que el feudalismo se apoyaba. Sin haber pasado por la escuela de Newton, ni Holbach, ni Diderot hubieran podido crear su filosofía y la Enciclopedia, base ideológica de la Revolución, sería inconcebible. Y este compañerismo de armas entre las ciencias y la burguesía liberal ha quedado en pie durante todo el siglo XIX. Mientras el desarrollo incesante de la técnica científica refuerza cada vez más su posición económica y política, los grandes descubrimientos hechos en el terreno de la ciencia pura (principios temodinámicos, descendencia del hombre, etc.) le facilitan nuevas armas doctrinarias para combatir el aliado tradicional de sus enemigos, el misticismo. En unísono con las ciencias físico-naturales de la época, nacen entonces las filosofías positivistas de un Comte, de un Spencer o de un James, como exponentes del espíritu progresista y humanitario de la burguesía victoriosa y optimista.

Y este optimismo parece bien fundado. Las fuerzas obscurantistas del pasado se presentan definitivamente vencidas. Nada obsta a que el futuro de la humanidad se rija, no por prejuicios atávicos que levantan barreras entre hombre y hombre, sino por la luz de la inteligencia que ha creado las ciencias para que éstas reunan, en pro de su progreso colectivo, la humanidad entera.

Pero el camino de la evolución humana es tortuoso. El movimiento iniciado en forma tan promisora, hacia la unificación espiritual de los hombres, se interrumpe bruscamente y en los primeros lustros de este siglo vemos a las ciencias abandonar su posición ideológica y ceder su papel de guías espirituales a un misticismo sectario que, al prevalecer, amenaza a hundir la humanidad en una nueva edad media agravada por los medios técnicos que estas mismas ciencias han colocado al alcance de las fuerzas antihumanitarias de la regresión.

Si nos ponemos a analizar los motivos que han conducido a este cambio de actitud que se pone de manifiesto, precisamente en los escritos de algunos de los investigadores contemporáneos más representativos, podemos establecer que éstos se basan, al menos aparentemente, en ciertas modificaciones que han sufrido, en el transcurso de los últimos años, las concepciones fundamentales de las ciencias mismas y muy especialmente las de la física. No puede ser mi objeto entrar aquí en una discusión detallada de los problemas que han sido planteados en esta relación y de que me ocupo especialmente en un libro que aparecerá próximamente. Por ahora basta recordar que las nociones fundamentales, frente a las cuales la actitud de la física contemporánea ha cambiado más profundamente, son las de la materia y de la causalidad que a su vez han formado las bases de las concepciones filosóficas denominadas materialismo resp. determinismo.

Como se sabe, el materialismo tradicional cuyos orígenes remontan a los filósofos griegos Leucipo y Demócrito de Abdera, ha considerado el universo como compuesto por partículas materiales y tendió a interpretar todos los fenómenos físico-naturales como cambios producidos en las interrelaciones existentes entre dichas partículas. Pero como las investigaciones físicas de los últimos años han demostrado que las partículas materiales mencionadas no tienen existencia real y que su apariencia se debe únicamente a una acumulación local, pasajera de energía, la concepción

materialista del mundo, en dicho sentido tradicional, evidentemente no puede sostenerse más.

Más grave aún que este renunciamiento obligado a todo materialismo, parece, en el primer momento, la necesidad, aparentemente impuesta por los resultados de la física de abandonar el principio del determinismo que ha sido durante tanto tiempo el eje central, no solamente de las ciencias sino de todas las actividades racionales del hombre. Afortunadamente, sin embargo, la situación, con respecto a este último problema, no es tan grave como podría creerse después de la lectura de ciertas exposiciones hechas alrededor del flamante principio físico, llamado "de inseguridad". En el fondo, este principio, cuya exactitud en sí parece actualmente indiscutible, no tiene otro significado que el de obligar a los físicos a emplear procedimientos estadísticos para la resolución de problemas que habían sido considerados antes como accesibles al tratamiento dinámico-causal usado en la física clásica. La cuestión, sí, en nuestra concepción filosófica del mundo, admitimos o no, la existencia de un determinismo riguroso, queda, en cambio, completamente fuera de los alcances del principio de inseguridad.

Cualquiera que sea, sin embargo, la solución de dicho problema no cabe duda de que los resultados obtenidos por los físicos en el primer tercio de nuestro siglo (teoría de relatividad, mecánica, cuántica, etc.) nos obligan a abandonar ciertas convicciones profundamente arraigadas acerca de la estructura del mundo. Pero, naturalmente, con este derrumbe de la concepción del mundo sostenida por la física clásica, el proceso de reformación no puede darse por terminado. En lugar del edificio demolido debía elevarse otro nuevo que esté en armonía con las adquisiciones de las ciencias. Es en estas condiciones que nos encontramos frente al hecho sorprendente de que los físicos más representativos de nuestro tiempo no solamente se niegan a colaborar en dicha tarea sino que la declaran como esencialmente irrealizable puesto que, según ellos, la estructura del mundo no puede ser comprendida intuitivamente y carece, en realidad, de todas aquellas calidades que nuestro intelecto, formado bajo la influencia de nuestra sensorialidad, le quiere atribuir. Por esta razón se declara que la representación matemática es la única que se conforma a la realidad y que toda tentativa de diseñar una imagen sensorial del mundo, involucra necesariamente una falsificación de los hechos.

En efecto, para la física un fenómeno o un grupo de fenómenos parece perfectamente aclarado, tan pronto que se conozcan las ecuaciones matemáticas a que obedece siendo, desde este punto de vista, las imágenes mentales que nos creamos para visualizar los sucesos, de una importancia muy secundaria. Pero este conocimiento formal del mundo, que satisface la física, deja en nuestro espíritu una sensación de vacío que aspira a ser llenado por algo más sustancial que fórmulas matemáticas. Y cuando las ciencias parecen incapaces de dar abasto a esta aspiración se recurre, instintivamente, al misticismo que promete satisfacerla ampliamente. Y esta fuga hacia el misticismo está, aparentemente, en perfecta concordancia con la ideología de muchos físicos que, en lugar de deplorar la pérdida de su influencia sobre el pensamiento contemporáneo, que han sufrido las ciencias, la saludan como una liberación de las responsabilidades morales y sociales que ha comprendido hasta ahora la investigación científica pura. Es evidente, pues, que dicha negación, de parte de las ciencias, a facilitarnos una concepción inteligible del mundo acaba por colocar a sus representantes en una situación cómoda en cuanto se refiere a las posibles consecuencias filosóficas de los resultados obtenidos por ellos.

Que esta actitud negativa de los hombres de ciencia frente a los problemas filosóficos más fundamentales no se basa realmente en los resultados de sus investigaciones, lo he hecho notar ya más arriba. En mi libro mencionado este hecho se demuestra con todo rigor. Pero basta observar la satisfacción con que ciertos físicos se desprenden de la concepción determinista, como de un lastre pesado y molesto, para darse cuenta de que los descubrimientos hechos en el campo de la física no han

servido sino de pretexto para justificar un cambio de actitud, motivado, en el fondo, por una alteración que ha sufrido, en los últimos tiempos, la mentalidad íntegra de muchos representantes destacados de las ciencias.

Hemos visto que, históricamente, las ciencias han sido desarrolladas por la burguesía, como armas, en su lucha contra los poderes feudales. Con la derrota y desaparición definitiva del feudalismo, que se ha producido, en la casi totalidad de los países europeos y americanos, en el siglo XIX, esta función combativa de las ciencias ha perdido su importancia. La burguesía que ha creado las ciencias y ha consolidado, por su intermedio, su poderío económico y social, se ha tornado conservadora y, como los hombres de ciencia siguen reclutándose preferentemente de la clase burguesa, dicho conservadorismo se está imprimiendo a la ideología filosófica sostenida por sus representantes. Se entiende así que éstos se han alejado sucesivamente de sus convicciones liberales negando, en forma cada vez más decidida, que las ciencias tuvieran el papel de suministrarle a la humanidad las bases de una concepción filosófica del mundo.

Pero si las ciencias se niegan a realizar esta función, que podríamos llamar filosófica, ¿cuáles son los títulos que pueden seguir ostentando sus representantes para que su labor se considere de utilidad social y que justifique sus pretensiones de ser mantenidos a expensas del erario público? Para poder investigar esta cuestión debemos distinguir entre las finalidades perseguidas por las llamadas ciencias puras y las aplicadas. Por investigación científica pura entendemos, como se sabe, toda actividad que tiene por fin, acrecentar o profundizar nuestro saber acerca del mundo que nos rodea, sin tener en cuenta para nada, si los conocimientos creados contribuyen o no, a aumentar el bienestar material de la humanidad.

No cabe duda de que resulta a veces harto difícil establecer límites netos entre la ciencia pura así definida y las ciencias aplicadas. Para no mencionar sino un sólo ejemplo bien conocido, los trabajos de Faraday y Maxwell, que culminaron en la teoría electro-magnética de este último, con toda seguridad no perseguían otra finalidad que la de llegar a una mejor comprensión de ciertos fenómenos de interés exclusivamente teórico y, sin embargo, era en estos trabajos en que se basaban las investigaciones experimentales de Hertz que han conducido ulteriormente, a través de los trabajos de Marconi y de otros físicos, a la invención de la telegrafía y telefonía sin hilos. Si Faraday y Maxwell, en lugar de dedicarse al estudio de determinados problemas de ciencia pura, se hubieran puesto a hacer descubrimientos prácticos, éstos, con toda probabilidad nunca hubiesen alcanzado la transcendencia de las invenciones a que ha conducido su labor desinteresada.

Pero no obstante esta dificultad existen problemas científicos de gran importancia teórica de los cuales puede afirmarse, con seguridad casi absoluta, que su solución carece de significado práctico. Así por ejemplo, resulta muy difícil imaginarse que la teoría de relatividad, a pesar de su enorme transcendencia científica, llegue a tener jamás consecuencias prácticas. Y, sin embargo, en una sola expedición organizada por la Royal Society con la finalidad de controlar un fenómeno astronómico previsto por dicha teoría, se ha gastado una suma aproximada a cien mil pesos que, en última instancia, debían ser pagados por los contribuyentes ingleses.

Ahora bien, no puede ser dudoso que la enorme mayoría de dichos contribuyentes no solamente no ha entendido el significado de la observación astronómica mencionada, sino que toda la teoría de relatividad le es complementa incomprensible y, por lo tanto, también indiferente. ¿Qué derecho ha asistido, entonces, al gobierno inglés a gastar fondos públicos para costear expediciones de cuyos resultados pudo anticiparse que en nada beneficiarían a la población en general? Y esta cuestión puede aplicarse en la misma forma al mantenimiento de los observatorios astrofísicos en que se investigan los espectros de luces de origen extragaláctico, o de los institutos palentológicos en que se tratan de reconstruir los caracteres de seres vivos que han habitado nuestro planeta hace varios millones de años.

Los datos inmediatos suministrados por todas estas investigaciones no interesan, ni son accesibles sino a un grupo reducidísimo de especialistas cuyas aficiones particulares de ninguna manera justifican las sumas ingentes invertidas en ellas. Lo que puede justificar dichos gastos por parte de los estados, es únicamente el significado cultural o filosófico de los problemas estudiados, y para que éste se destaque debe darse a los resultados obtenidos, una expresión que sea comprensible también más allá de los círculos científicos especializados. Si los hombres de ciencia se niegan a realizar generalizaciones y a colaborar en la síntesis de una concepción inteligible del mundo, pierden su derecho de ser considerados servidores de la humanidad y hacerse costear su labor a expensas de las multitudes trabajadoras.

Como único título para que las ciencias sobrevivan quedarían, en tales condiciones, los beneficios materiales que su actividad aporta a la humanidad. Es efectivamente innegable que una parte muy considerable del trabajo que se lleva a cabo en los laboratorios y demás institutos científicos es realizado bajo este punto de vista. Todo progreso de la técnica, de la agricultura, de la medicina, está íntimamente vinculado con los adelantos científicos hechos en el terreno de la física, de la química, de la biología, etc., y que dichos progresos pueden contribuir eficazmente a un mayor bienestar de la humanidad, no es dudoso.

Ello no obstante, si su importancia para la evolución de las diferentes técnicas representaría el único aspecto de la función social de las ciencias, podría parecer muy discutible si sus progresos vertiginosos que nos es dado presenciar en la época presente debían considerarse como beneficio incondicional para nuestra especie. Que una comparación entre la situación actual de la humanidad y la que ésta presentaba otrora no siempre resulta favorable para la primera, lo evidencia la añoranza con que se habla tan a menudo de "aquellos buenos tiempos pasados".

Resulta, en efecto, innegable que el mejoramiento técnico de los medios de producción, en lugar de elevar, ha rebajado el nivel de vida de la mayor parte de los hombres. La experiencia de los últimos decenios demuestra, sin dejar lugar a dudas, que los progresos materiales que las ciencias nos aseguran, carecen de efectos benéficos para la humanidad en general si no están acompañados por un progreso paralelo de las concepciones ético-sociales que forman las bases de su vida colectiva.

En el pasado, los fundamentos éticos, indispensables para la vida social, han sido deducidos, en la mayoría de los casos, de nociones místico-religiosas y, muy especialmente, la civilización occidental ha sido guiada, en este respecto, durante más de 1500 años, por la doctrina cristiana. Pero esta doctrina, a pesar de todas sus pretensiones a ser ecuménica, en realidad nunca lo fué, como no podrá llegar a serlo tampoco otra religión mística cualquiera. Las religiones, como creaciones del espíritu humano, se basan en determinados sentimientos y son aceptadas y seguidas, por lo tanto, solamente por aquellos —pocos o muchos— que participan en los sentimientos de sus creadores. Por esta razón, en la historia de la humanidad, las corrientes religiosas más intensas, en que su carácter sentimental se polariza de manera especial, han actuado siempre más bien como fuerzas separadoras que en el sentido de unir a los hombres entre sí.

La comprensión de las ciencias, en cambio, no presupone sino una cierta organización intelecto-sensorial que es común a todos los hombres. Una filosofía basada en éstas es, por consiguiente, capaz de hacer lo que ninguna religión puede realizar: de facilitarnos una concepción del mundo que sea bien común de la humanidad entera y forme un fundamento sólido para la evolución cultural futura de nuestra especie. Para que esta concepción científica del universo sea completa, necesita la contribución de todas las ramas del saber y toda investigación que conduce a un aumento de nuestro conocimiento en cualquier campo, representa un grano de arena que se ha aportado a la construcción de dicho edificio conceptual. Al lado de las ciencias especiales corresponde en esta obra un papel importantísimo también a la filosofía que tiene la misión de coordenar los resultados incorporados y de efectuar las modificaciones de

nuestra concepción integral que hagan necesarios los progresos incesantes de nuestro saber positivo. Con otras palabras, es tarea de la filosofía asegurar que los progresos espirituales de la humanidad se mantengan al nivel de sus progresos materiales, pues como lo hemos visto, es solamente en estas condiciones que estos últimos podrán significar un beneficio efectivo para la especie.

Es en sus relaciones con nuestra concepción filosófica del mundo que debe buscarse, entonces, según mi parecer, la función social de las ciencias puras que al rehuir la responsabilidad que dicha tarea representa, pierden su derecho a ser costeadas a expensas de los fondos públicos. Cuando los representantes de las ciencias, de origen burgués, en su afán de defender la posición económico-social de la clase a que pertenecen, niegan el significado filosófico de su labor, desconocen, al mismo tiempo, su propia razón de ser. Pero cualquiera que sea la actitud de los poderes del momento la evolución de las ideas, a lo largo, no puede obstaculizarse y, tarde o temprano, las ciencias deben retomar su función tradicional constituyéndose nuevamente en lo que han sido ya en el pasado: en guías espirituales de la humanidad.

GUIA PROFESIONAL

BERIZZO ANTONIO J.
Ingeniero Civil
Sarmiento 333 U. T. 7956

CASELLA ALBERTO T.
Ingeniero Civil
Laprida 2192

COSTA VARSI RAUL
Arquitecto
Rioja 1023 U. T. 5954

DIAZ ALBOTT CARLOS
Arquitecto
Chacabuco 1356 U. T. 4805

D'ANGELO JUAN
Ingeniero Civil
Ayacucho 1762

DIAZ VALENTIN JOSE
Ingeniero Industrial
Avda. Pellegrini 634

DOTTA LORENZO Z.
Ingeniero Civil
Alvear 543

DUGHERA EDUARDO
Arquitecto
Moreno 834 U. T. 21463

FIALLO MONTERO JORGE
Ingeniero Civil
Mendoza 467 Corrientes

GARCIA ANGEL
Agrimensor Nacional
J. J. Paso 1187

GRONDONA VALENTIN
Ingeniero Civil
Pte. Roca 175

LAPORTE LUIS B.
Ingeniero Civil
1º de Mayo 1059

MALAJOVICH LUIS
Ingeniero Civil
Est. La Chispa (F. C. C. A.)

MOUNIER CELESTINO
Ingeniero Civil
Santa Fe San Gerónimo 3277

NAVRATIL CARLOS
Arquitecto
La Paz 920 U. T. 23192

OCCHILUPPO ITALO
Ingeniero Civil
San Juan 455

PICASSO Y FERNANDEZ DIAZ
Arquitectos
Paraguay 594 U. T. 22518

QUAGLIA EDMUNDO D.
Ingeniero Civil
Italia 531

RIAL CELESTINO P.
Agrimensor
Reconquista 1180

RICARDO PABLO E.
Ingeniero Civil
Montevideo 530

RIESTRA MARTIN A.
y
JUAN C. DE LA
Arquitectos
Santa Fe 1859 U. T. 27072

RIZZOTTO DOMINGO
Arquitecto
Mendoza 1581

ROUILLON ERNESTO
Arquitecto
Córdoba 1995

SIBURU DAVID
Agrimensor
Laprida 1146

SIMONUTTI ATILIO
Ingeniero Civil
Santa Fe Belgrano 3055

SONVICO PABLO
Arquitecto
Colón 1661

TAVERNIER JORGE A.
Arquitecto
Av. Belgrano 348

TODESCHINI ATILIO
Arquitecto

TORRIGLIA CESAR
Agrimensor
Salta 2484

VACCA ENRIQUE
Agrimensor
E. Zeballos 642

VERGARA OROÑO G.
Agrimensor
U. T. 0249 San Luis 1188

VESCOVO CARLOS
Arquitecto
E. S. Zeballos 2084

VIEYRA ANTONIO H.
Agrimensor
Felipe Moré 1205

ZANOTTI PASCUAL E.
Ingeniero Civil
Maipú 841 U. T. 20774