FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica - Departamento de Matemática

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOs)

PRIMER ORDEN

Dirce Braccialarghe [1] - Ma. Susana Montelar [2]

-2010-

[1] *dirce@fceia.unr.edu.ar*
[2] *montelar@fceia.unr.edu.ar*

Índice

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales surgen en el siglo XVII a partir de la necesidad de analizar y predecir fenómenos naturales relacionados, fundamentalmente, con la Mecánica, la Astronomía y la Física. Su estudio constituye una de las ramas de la Matemática que tiene más aplicaciones.

Se entiende por ecuación diferencial cualquier ecuación en la que intervienen una función y una o varias de sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

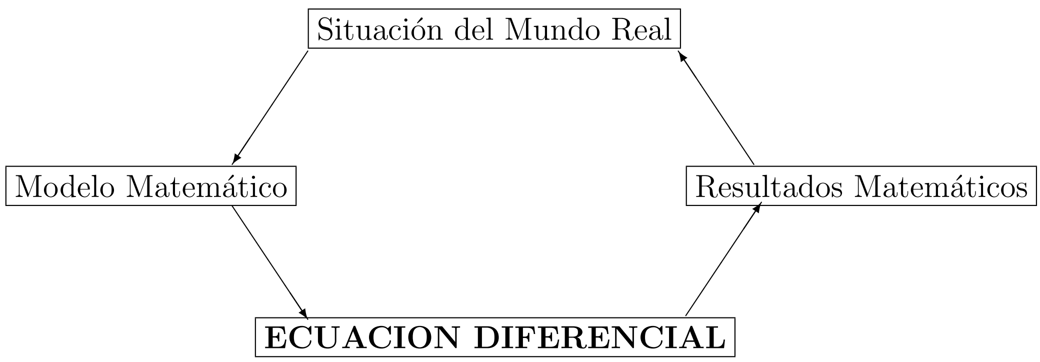
Muchas leyes de la naturaleza encuentran su expresión en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Son asimismo abundantes sus aplicaciones en la propia Matemática, especialmente en Geometría, y también en Ingeniería, Economía y en otros muchos campos de las ciencias aplicadas. Es fácil comprender la razón que se oculta tras una tan amplia gama de aplicaciones. En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionados entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso. Como es sabido, la derivada representa la razón de cambio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente. Resulta entonces natural que las ecuaciones que involucran derivadas sean apropiadas para describir el universo cambiante. Problemas relativos a la desintegración radiactiva, al crecimiento de poblaciones, a las reacciones químicas, al enfriamiento, a la determinación de la posición de un objeto, etc. pueden formularse en términos de ecuaciones diferenciales.

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene tres objetivos principales:

1. Descubrir la ecuación diferencial que describa una situación física específica (formular el problema del mundo real en términos matemáticos, construir un modelo matemático).

2. Determinar la solución o familia de soluciones.

3. Interpretar la solución.



Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos

En muchos fenómenos naturales las cantidades crecen o disminuyen con una rapidez proporcional a su tamaño. Por ejemplo, es razonable suponer que la rapidez de crecimiento de una población de animales o de bacterias sea proporcional a la cantidad de individuos en la población. Otros ejemplos se presentan al analizar la cantidad de un material radiactivo que se está desintegrando o la cantidad de dinero en una cuenta bancaria con interés compuesto continuamente. En condiciones ideales, si y representa la cantidad que aumenta o disminuye a una velocidad proporcional a su magnitud en un instante dado t, el modelo matemático representado por la ecuación

$$y' = ky$$

permite predecir con mucha precisión lo que sucede en la realidad.

Otro problema ya abordado es el movimiento en caída libre. Siendo $x(t)$ la posición de la partícula y m su masa, aplicando la segunda ley de Newton, tenemos que $mx''(t) = mg$. De esta ecuación podemos obtener la ecuación diferencial que modela el movimiento en condiciones ideales

$$x''(t) = g$$

Veamos algunos problemas particulares que también conducen a plantear ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1.1. *Un hombre fue muerto en su casa. La policía llegó a la escena a las 11:00 pm. La temperatura del cadáver en ese momento era de 31ºC y una hora después de 30ºC. La temperatura de la habitación donde se encontró el cadáver era de 22ºC. Estima la hora en que ocurrió el crimen.*

Para plantear este problema, usaremos la siguiente información adicional:

- Temperatura normal del cuerpo humano 37ºC.
- Ley de enfriamiento de Newton: Un cuerpo se enfría a un ritmo proporcional a la diferencia de temperatura (T) respecto de la temperatura ambiente (a), es decir

  $$\frac{dT}{dt} = k(T - a)$$

  donde k es la constante de proporcionalidad.

Si llamamos $T(t)$ la temperatura del cuerpo a las t horas de cometido el crimen y consideramos la temperatura ambiente constante e igual a 22ºC, el modelo matemático que responde a este problema es:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 22) \\ \\ T(0) = 31, \ T(1) = 30 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2. *Halla la ecuación de la curva que pasa por el punto* $(1, 1)$ *y tiene la siguiente propiedad: en cada uno de sus puntos, la pendiente de su recta tangente es el doble de la pendiente de la recta que pasa por ese punto y por el origen de coordenadas.*

El modelo matemático que responde a este problema es:

$$f'(x) = 2\frac{f(x)}{x}, \quad f(1) = 1$$

o bien

$$\begin{cases} y' = 2\dfrac{y}{x} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.3. ***Sistemas mecánicos y circuitos*** *[3] y [4]*

Este ejemplo nos permite comprobar el papel que desempeña la Matemática en la unificación de fenómenos muy diferentes. Veremos que simplemente renombrando las variables, el análisis del movimiento de un objeto que vibra suspendido de un resorte se convierte en el análisis de un simple circuito eléctrico.

Dado que los circuitos eléctricos son fáciles de construir y las corriente y voltajes son fáciles de medir, éstos proporcionan un método práctico para estudiar la vibración de configuraciones mecánicas complicadas, como los cigüeñales de los motores, que son costosos en su fabricación y modificación y cuyos movimientos son difíciles de registrar con exactitud.

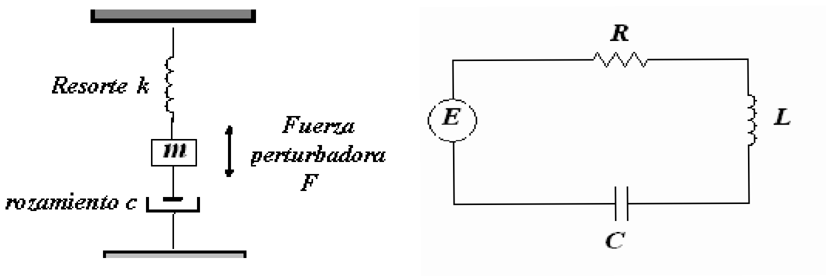


Figura 1: Sistema mecánico - Circuito RLC

Observemos el sistema mecánico de la figura. Se supone que el objeto de masa m se guía, de modo que sólo es posible el movimiento vertical, sin oscilar. Se supone que en todo instante actúa, además de la fuerza de reposición debida al resorte, una fuerza de rozamiento, opuesta al movimiento, proporcional a la velocidad del objeto. Finalmente sobre el sistema, actúa una fuerza perturbadora externa $F(t)$. Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene que el desplazamiento vertical del objeto, $x(t)$, con relación a la posición de equilibrio, considerando como sentido positivo el vertical hacia arriba, viene gobernado por la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$$

donde k es la constante de elasticidad del resorte y c es la constante de amortiguamiento.

Consideremos ahora un circuito eléctrico como el de la figura. El mismo consta de: una resistencia de R ohms, un condensador de capacitancia C faradays y un inductor con inductancia L henrys, conectados en serie con una fuente de fuerza electromotriz (batería o generador) que proporciona un voltaje $E(t)$ voltios. Utilizando la segunda ley de Kirchhoff se obtiene la ecuación diferencial lineal no homogénea cuya solución proporciona la corriente I en el tiempo t:

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)$$

Al comparar las ecuaciones anteriores vemos que matemáticamente son idénticas. Así, el mismo tipo de ecuación permite modelizar situaciones físicas que, a primera vista, son muy diferentes.

> *El objetivo de esta unidad es proporcionar una serie de herramientas que nos permitan resolver estas ecuaciones para poder dar una solución a los problemas planteados.*

2. Definiciones y conceptos generales

Una ***ecuación diferencial*** es una ecuación que relaciona una función, la *incógnita*, una o varias de sus derivadas y la o las variables de la que dependen.

Según el tipo de función incógnita, las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos grandes grupos:

Ecuación Diferencial Ordinaria (**EDO**) Una ecuación diferencial se dice ordinaria si la función incógnita solo depende de una variable independiente.

Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales Una ecuación diferencial se dice en Derivadas Parciales si la función incógnita depende de dos o más variables independientes.

En nuestro curso trabajaremos sólo con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Otro criterio de clasificación de las ecuaciones diferenciales es el ***orden***, es decir, el mayor orden de derivación de la función incógnita presente en la ecuación. Así,

$xy' = e^{xy}$ EDO de primer orden

$y''' + 5y' + 2y - \operatorname{sen} x = 0$ EDO de tercer orden

$s'' = -32$ EDO de orden 2

$(y')^2 + x^2 y = \cos x$ EDO de orden 1

$2y'' - 3y = e^x$ EDO de orden 2

Se puede observar en los ejemplos anteriores que es bastante frecuente omitir las variables independientes cuando no intervienen directamente en la expresión. Así, por ejemplo, hemos escrito $2y'' - 3y = e^x$ en lugar de $2y''(x) - 3y(x) = e^x$ o $2f''(x) - 3f(x) = e^x$.

En general una **EDO de orden** n, puede expresarse como:

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad \textbf{Forma implícita} \tag{2.1}$$

o bien

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad \textbf{Forma explícita}$$

Decimos que φ es una ***solución*** de (2.1) en un intervalo abierto I si y sólo si

(i) φ es n veces derivable en I

(ii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x), \varphi^{(n)}(x)) = 0$ para todo $x \in I$

Es decir, solución de una EDO es toda función que sustituida juntamente con sus derivadas en la ecuación, conduce a una identidad.

Resolver o ***integrar*** una EDO, es hallar todas las soluciones.

La ***solución general*** o familia de soluciones de una EDO es una solución que depende de n parámetros. Fijando los valores de los parámetros en la solución general, se obtiene una ***solución particular*** de la ecuación. La solución general de una ecuación diferencial puede expresarse de distintas formas.

Forma explícita si la incógnita y está despejada en función de la variable independiente x , es decir $y = \varphi(x, C)$.

Forma implícita si la solución viene expresada por medio de una ecuación que relaciona la incógnita y y la variable independiente x, es decir $g(x, y, C) = 0$.

Si $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in I$ es solución de una EDO, se la llama ***solución trivial***.

Una ecuación diferencial acompañada de condiciones iniciales se la denomina ***problema de Cauchy*** o ***de valores iniciales***(PVI) asociado a una EDO, y lo podemos expresar de la forma:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Por ejemplo

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3. EDO de primer orden

Una EDO de primer orden se expresa de la siguiente manera:

$$G(x, y, y') = 0 \quad \text{Forma implícita} \tag{3.1}$$

o bien

$$y' = F(x, y) \quad \text{Forma explícita}$$

donde $y = y(x)$ es la función incógnita.

Una solución de esta ecuación es una función derivable φ definida en un intervalo abierto I tal que $G(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ o bien $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$.

Caso particular

Supongamos que f es una función continua de una variable real definida en un intervalo I. La ecuación $y' = f(x)$ tiene solución y sus soluciones pueden expresarse de la siguiente manera:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C \tag{3.2}$$

siendo $x, x_0 \in I$ y C una constante arbitraria.

La familia de soluciones de la ecuación depende de una constante arbitraria. Si se desea hallar la solución de la ecuación que además verifique la condición inicial $y(x_0) = y_0$, se deberá hallar la constante C de modo que se satisfaga esta condición. Reemplazando en (3.2) resulta $C = y_0$ teniendo en este caso como única solución

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

En ciertos casos, la integral de (3.2) puede hallarse por los métodos del cálculo. En otras ocasiones puede ser difícil o imposible hallar una fórmula para tal integral. Se sabe por ejemplo, que $\int e^{-x^2}dx$ y $\int(\operatorname{sen} x/x)dx$ no son expresables mediante un número finito de funciones elementales.

Problema de valores iniciales En el caso de EDOs de primer orden, un (PVI) presenta una sola condición y lo podemos expresar de la siguiente manera

$$(PVI) \quad \begin{cases} y' = F(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Resulta importante saber cuándo un (PVI) tiene solución y también si ésta es única, aunque no podamos conseguir explícitamente la solución. El teorema que presentamos a continuación, y cuya demostración puede encontrarse en [1] responde a estas cuestiones.

Teorema 3.1. Picard *(de existencia y unicidad local)*
Sea el problema de valores iniciales

$$(PVI) \quad \begin{cases} y' = F(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $(x_0, y_0) \in R = [a, b] \times [c, d]$.

Si F *y* F_y *son continuas en* R*, existe un intervalo abierto* I *con centro en* x_0 *y contenido en* $[a, b]$ *y una única función* φ *definida en* I *que satisface el problema* (PVI)*.*

Observación 3.2. *Es claro que* φ *es una función derivable en* I *y su derivada es una función continua en* I *ya que* $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ *es continua para todo* $x \in I$*. Luego la gráfica de* φ *es una curva suave.*

En la Figura 1 se observa la gráfica de la función φ, solución del (PVI) en I. Además la pendiente de la recta tangente a la gráfica de φ en el punto de abscisa x_0 es $\varphi'(x_0) = F(x_0, \varphi(x_0)) = F(x_0, y_0)$.

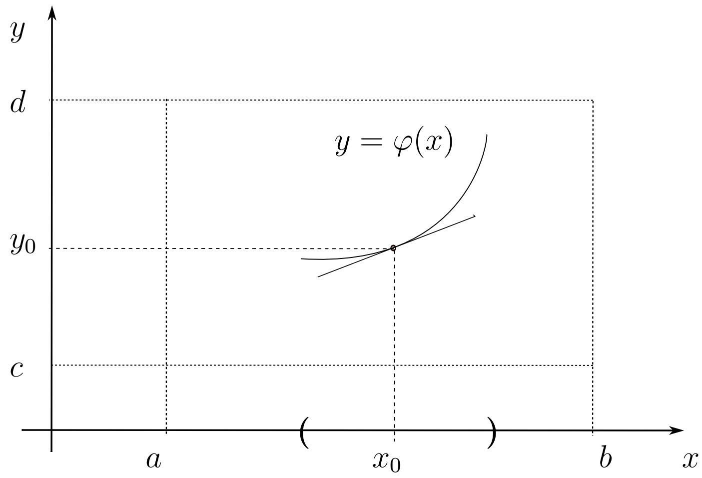


Figura 2: Teorema de Picard

Observación 3.3. *Un PVI puede no tener solución, tener una solución única o muchas (aún infinitas soluciones). En los ejercicios 6 y 7 se muestran PVI en los que se presentan estas situaciones.*

Campo de pendientes

La observación anterior nos sugiere una interesante interpretación geométrica de una EDO de la forma $y' = F(x, y)$. La gráfica de una solución de una ecuación diferencial se denomina *curva solución* o *curva integral* de la ecuación. Supongamos que la función φ es una solución de $y' = F(x, y)$ esto es $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$, resulta entonces que la recta tangente a la gráfica de φ en cada punto (x, y) tiene pendiente $F(x, y)$.

Entonces desde el punto de vista geométrico una curva solución es una curva en el plano cuya recta tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente $m = F(x, y)$.

Consideramos un punto (x, y) y trazamos por dicha punto un pequeño segmento de recta con pendiente $m = F(x, y)$ o bien una dirección, como se indica en la Figura 3. El conjunto de todos estos segmentos se llama ***campo de pendientes*** o ***campo de direcciones*** para la ecuación $y' = F(x, y)$.

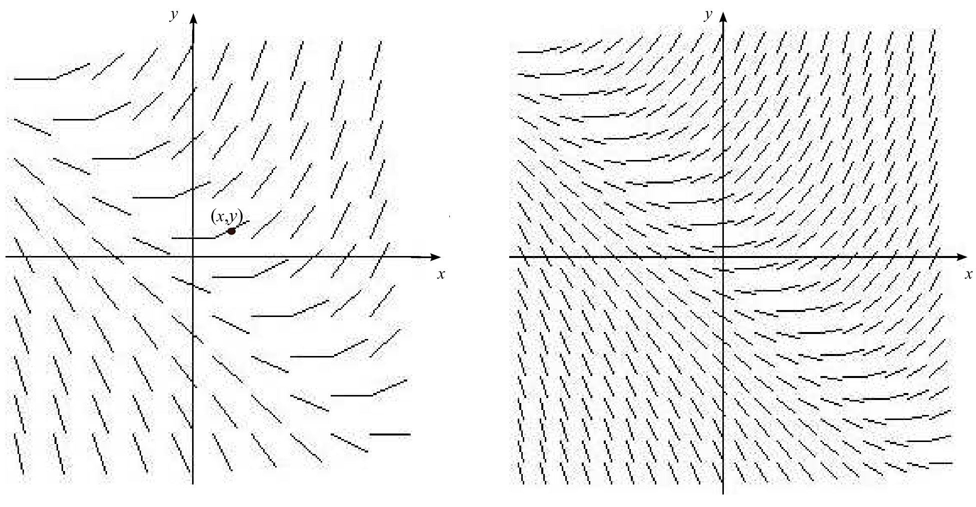


Figura 3: Campo de pendientes

Este campo de direcciones nos permite inferir propiedades cualitativas de las soluciones. Además sugiere un método gráfico para construir soluciones aproximadas de la EDO $y' = F(x, y)$.

En la Figura 4 se presenta el campo de pendientes y algunas curvas solución para la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y} \tag{3.3}$$

Observamos que el campo de pendientes nos brinda cierta información acerca del conjunto de soluciones de ecuación (3.3). Por ejemplo viendo la Figura 4, es claro que las curvas solución son ramas de hipérbolas de ecuación $y = \sqrt{x^2 + C}$ e $y = -\sqrt{x^2 + C}$. Se propone al lector comprobar este último resultado.

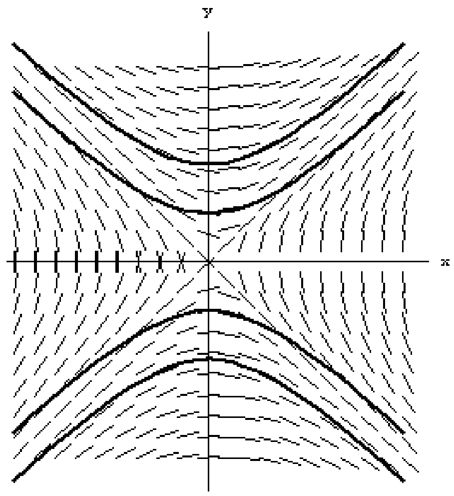


Figura 4: Campo de pendientes y curvas solución de $y' = x/y$

3.1. EDO a Variables Separables

Una EDO de primer orden es a ***variables separables*** cuando F puede expresarse como producto de una función que depende sólo de x por otra dependiente sólo de y. Es decir es una ecuación de la forma

$$y' = F(x, y) = g(x)h(y). \tag{3.4}$$

Si $h(y) = 0$ la ecuación (3.4) tiene solución $y = C$ con $C \in \mathbb{R}$. Supongamos que $h(y) \neq 0$, en este caso podemos expresar esta ecuación de la forma

$$\frac{1}{h(y)} y' = g(x).$$

Entonces $y = \varphi(x)$ es solución de (3.4) si y sólo si $\frac{1}{h(\varphi(x))}\varphi'(x) = g(x)$, integrando respecto de x, tenemos que

$$\int \frac{1}{h(\varphi(x))}\varphi'(x)dx = \int g(x)dx.$$

Teniendo en cuenta que $dy = \varphi'(x)dx$, esta última igualdad podemos expresarla como:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx.$$

Siendo H y G primitivas de las funciones $1/h$ y g, respectivamente,

$$H(y) = G(x) + C.$$

Por lo tanto $y = \varphi(x)$ es solución de (3.4) si y sólo si $H(\varphi(x)) = G(x) + C$.

De esta manera hemos resuelto la ecuación diferencial dada encontrando todas las soluciones. En éste, como en otros tipos de ecuaciones, el método de resolución conduce a una expresión implícita de la solución.

Ejemplo 3.4. *Resuelve la siguiente ecuación diferencial*

$$(x^2 + 4)y' = xy. \tag{3.5}$$

Esta ecuación es a variables separables: Si $y \neq 0$, separamos variables

$$\frac{1}{y}y' = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x}{x^2 + 4}dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 4\right| + C$$

$$|y| = \sqrt{x^2 + 4}\; e^C$$

$$y = \pm e^C\sqrt{x^2 + 4}$$

teniendo en cuenta que cuando C varía en $\mathbb{R}$, e^C varía en $\mathbb{R}^+$ podemos expresar la solución como

$$y = K\sqrt{x^2 + 4}$$

con $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por último, debemos analizar si la función nula es solución, para lo cual reemplazamos $y = 0$ en (3.5) verificando que en este caso lo es y por tanto haciendo variar K en $\mathbb{R}$, podemos expresar la solución como:

$$y = K\sqrt{x^2 + 4}.$$

Ejemplo 3.5. *La velocidad de desintegración radioactiva se considera proporcional a la cantidad $x = x(t)$ (t: tiempo) de sustancia aún no desintegrada. Encuentra $x(t)$.*

La ecuación diferencial que rige este fenómeno es de la forma $x' = -kx$ siendo k la constante positiva de desintegración (coeficiente de proporcionalidad). El signo menos indica que x decrece cuando t va aumentando. Separando variables tenemos

$$\int \frac{dx}{x} = \int -kdt \quad \text{con} \quad x \neq 0.$$

Integrando, resulta

$$\ln|x| = -kt + \tilde{C}$$

luego, $x(t) = \pm e^{\tilde{C}}e^{-kt} = C^* e^{-kt}$ con $C^* \neq 0$, es la familia que reúne todas las soluciones de la ecuación excepto la solución trivial. Siendo ahora C un parámetro que puede tomar todos los valores (incluido el cero), la expresión

$$x(t) = Ce^{-kt}$$

proporciona la solución general de la ecuación.

Ejemplo 3.6. *Una población aislada, afectada de una enfermedad desconocida, va desapareciendo a ritmo inversamente proporcional a la población presente. Se sabe que la población que inicialmente es de 10000 habitantes se reduce a 9000 en 24 horas. Si $x(t)$ indica la población en el instante de tiempo t (medido en días), se pide:*

a) Completar la siguiente tabla

t	2	3	4	5
$x(t)$				

indicando los valores de $x(t)$ mediante aproximaciones por defecto.

b) Hallar el número de personas que permanece con vida transcurridas seis horas del sexto día.

c) Hallar el número de personas que permanece con vida a las seis horas y quince minutos del sexto día.

d) Calcular $\lim_{t\to(100/19)^-} x(t)$ y explicar el significado de este resultado.

La ecuación deferencial correspondiente a este problema es de la forma

$$x' = \frac{k}{x}, \qquad (k < 0, x > 0).$$

Resolviendo esta ecuación resulta:

$$\frac{1}{2}x^2 = kt + C \quad \text{o sea,} \quad x(t) = \sqrt{2(kt + C)}. \tag{3.6}$$

Pra obtener los valores de k y C, reemplazando $x(0) = 10000$ y $x(1) = 9000$ en (3.6), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \sqrt{2C} = 10000 \\ \\ \sqrt{2(k + C)} = 9000 \end{cases}$$

cuya solución es $C = 50 \times 10^6$ y $k = -\frac{19}{2} \times 10^6$. Por lo tanto, la ley de la población en función del tiempo resulta:

$$x(t) = 1000\sqrt{100 - 19t} \quad \text{con} \quad 0 \leq t < \frac{100}{19}. \tag{3.7}$$

a) Completamos el cuadro de valores:

t	2	3	4	5
$x(t)$	7874	6557	4898	2236

b) Como 6 horas equivale a $\frac{1}{4}$ día, $x(5 + \frac{1}{4}) = x(\frac{21}{4}) = 500$. Luego, transcurridas seis horas del sexto día permanecen con vida 500 personas.

c) Como 15 minutos equivale a $\frac{15}{1440}$ día, $x(5 + \frac{1}{4} + \frac{15}{1440}) = x(\frac{505}{96}) \approx 228$. Por lo tanto a las seis horas y quince minutos del sexto día permanecen con vida 228 personas

d)

$$\lim_{t\to\left(\frac{100}{19}\right)^-} x(t) = \lim_{t\to\left(\frac{100}{19}\right)^-} 1000\sqrt{100 - 19t} = 0.$$

Esto significa que no queda ningún habitante con vida a las 6 horas 18 minutos 57 segundos del sexto día (los segundos han sido redondeados por exceso).

3.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Existen dos usos bien diferenciados de la palabra homogénea en la teoría de EDOs, el que se va a presentar a continuación y aquél que implica la inexistencia del término independiente en una ecuación diferencial.

La ecuación diferencial de primer orden $y' = F(x,y)$ se dice ***homogénea*** si puede expresarse como

$$y' = g(\frac{y}{x}) \tag{3.8}$$

donde g es una función de una variable.

Una ecuación diferencial homogénea se transforma en una ecuación a variables separables mediante el cambio de variable: $\frac{y}{x} = v$, despejando y, resulta $y = xv$ y por lo tanto, $y' = v + xv'$. Reemplazando en la ecuación (3.8), resulta:

$$v + xv' = g(v). \tag{3.9}$$

Esta es una EDO a variables separables en x y v. Si $g(v) \neq v$, la solución general viene dada por

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{dx}{x}.$$

Además $v = \varphi(x)$ es solución de (3.9) si y sólo si $y = x\varphi(x)$ es una solución de (3.8).

Ejemplo 3.7. *Resuelve la ecuación diferencial*

$$y' = \frac{xy + y^2}{x^2}. \tag{3.10}$$

Esta ecuación es homogénea. Efectivamente, distribuyendo el denominador se tiene

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Sustituyendo $\frac{y}{x} = v$ e $y' = v + xv'$, en esta última igualdad, resulta

$$v + xv' = v + v^2 \quad \text{o bien} \quad xv' = v^2.$$

Ahora resolvamos esta última ecuación.

Si $v \neq 0$

$$\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{v} = \ln|x| + C \Longrightarrow v(x) = -\frac{1}{\ln|x| + C}.$$

Luego $y(x) = -\dfrac{x}{\ln|x| + C}$.

Si $v = 0$ obtenemos $y = 0$, que es solución de la ecuación diferencial 3.10.

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial (3.10) viene dada por:

$$y = 0, \quad y = -\frac{x}{\ln|x| + C} \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

3.3. EDO Lineal

La ecuación diferencial ***lineal*** es de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3.11}$$

donde las funciones P y Q son continuas sobre un intervalo J.

El teorema que presentamos a continuación, garantiza la existencia y unicidad de solución de un (PVI) en todo el intervalo J.

Teorema 3.8. *(de existencia y unicidad global)*
Sea el problema de valores iniciales

$$(PVI) \begin{cases} y' = Q(x) - P(x)y \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $x_0 \in J$ e y_0 es algún valor real.
Si P y Q son continuas en J, existe una única función φ definida en J que satisface el (PVI).

Problemas de circuitos RL y de mezclas conducen a ecuaciones lineales de primer orden.

Para resolver una ecuación de este tipo se puede utilizar el método del factor integrante. Este método consiste en multiplicar ambos miembros de la ecuación por una función positiva I que transforme el lado izquierdo de la ecuación en la derivada del producto $I(x) \cdot y(x)$. Suponiendo que una tal función I haya sido encontrada, la solución general de la ecuación se obtiene de la siguiente manera:

$$\underbrace{I(x)\,(P(x)y + y')}_{\frac{d}{dx}(I(x)\cdot y)} = I(x) \cdot Q(x)$$

Observemos que esta última ecuación es equivalente a la ecuación (3.11), es decir, ambas tienen la misma familia de soluciones. Integrando a ambos miembros tenemos:

$$I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot Q(x)dx$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \int I(x) \cdot Q(x)\; dx$$

Esta última expresión muestra la solución general de la ecuación en términos de la función $I(x)$ y de $Q(x)$. A la función $I(x)$ se la llama *factor integrante* de la ecuación (3.11).

¿Cómo se halla la función $I(x)$? La condición que se impuso a esta función es:

$$\frac{d}{dx}(I(x) \cdot y) = I(x)\,(P(x)y + y')$$

Así, derivando en el primer miembro y distribuyendo en el segundo, se tiene que:

$$I'(x)y + I(x)y' = I(x)P(x)y + I(x)y'$$

Cancelando se observa que la función I debe verificar la ecuación

$$I'(x) = I(x)P(x),$$

de donde

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{3.12}$$

Observemos que el factor integrante no es único. La familia de factores integrantes viene dada por la expresión

$$I(x) = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt + C} \quad \text{con} \quad x_0 \in J$$

Considerando $C = 0$, podemos expresar la solución de la ecuación (3.11) de la siguiente manera:

$$y(x) = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} P(u)du} \cdot Q(t)\ dt}_{y_P(x)} + \underbrace{K e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}}_{y_H(x)} \tag{3.13}$$

para todo $x \in J$.

Ejercicio: a) Demuestra que la función (3.13) es solución de la ecuación diferencial (3.11).

b) El segundo miembro de (3.13) puede expresarse como $y_P + y_H$. Comprueba que y_P es una solución particular de (3.11) y y_H la solución general de la EDO lineal $y' + P(x)y = 0$, asociada a la EDO (3.11).

Ejemplo 3.9. *Resuelve la ecuación diferencial*

$$y' + 3x^2 y = 6x^2 \tag{3.14}$$

En este caso tenemos que $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Por lo tanto, un factor integrante es $I(x) = e^{\int_0^x 3t^2 dt} = e^{x^3}$. Reemplazando en (3.13) resulta

$$y(x) = e^{-x^3}\left(\int e^{x^3} 6x^2\ dx + C\right) = 2 + Ce^{-x^3} \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Observación: Si bien reemplazando en las fórmulas (3.12) y (3.13) obtenemos la solución, resulta conveniente resolver este tipo de ecuaciones siguiendo el método que nos llevó a dichas fórmulas. Es decir, si I es tal que

$$I(x)(y' + 3x^2 y) = \frac{d}{dx}(I(x) \cdot y)$$

$$I(x)y' + I(x)3x^2 y = I'(x)y + I(x)y'$$

entonces

$$I(x)3x^2 = I'(x)$$

de donde un factor integrante es $I(x) = e^{x^3}$.

Multiplicando ambos miembros de (3.14) por e^{x^3}

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3} y) = e^{x^3} 6x^2$$

e integrando respecto de x, obtenemos

$$e^{x^3} y = \int e^{x^3} 6x^2 dx = 2e^{x^3} + C.$$

Luego, la solución general de la ecuación (3.14) viene dada por:

$$y(x) = 2 + Ce^{-x^3} \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

3.4. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una ecuación diferencial del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

donde α es un número real tal que $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$. Esta ecuación no es lineal pero mediante la sustitución $y^{1-\alpha} = z$ puede transformarse en la ecuación diferencial lineal

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$

cuya función incógnita es z. Su comprobación queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 3.10. *Resuelve el (PVI)*

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{x^2}{2y} \\ \\ y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2y}$ que es del tipo Bernoulli con $\alpha = -1$. Mediante la sustitución $y^2 = z$ se obtiene la ecuación lineal

   $$z' - \frac{1}{x}z = x^2$$

   cuya solución general es $z(x) = Cx + \frac{1}{2}x^3$ con $C \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que se concluye que $y^2 = z$, las soluciones de la ecuación de Bernoulli quedan expresadas implícitamente por la ecuación $y^2 = Cx + \frac{1}{2}x^3$ con $C \in \mathbb{R}$.

2. Si además $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se tiene $\frac{1}{2} = C + \frac{1}{2}$, de donde $C = 0$. Así la solución buscada es

   $$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^3}.$$

3.5. EDO Exacta

Supongamos ahora que la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ es de la forma

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \text{ o, equivalentemente } P(x,y) + Q(x,y)y' = 0.$$

Supongamos también que las funciones P y Q son continuas en un disco D con Q no idénticamente nula en D.

Definición: Una ecuación diferencial del tipo $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ se dice ***exacta*** sobre el disco D si existe una función f, llamada función potencial, tal que $\nabla f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ en D.

En este caso la ecuación

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{3.15}$$

puede ser escrita en la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y'=0$$

en D.

Si una función φ definida sobre un intervalo I es solución de la ecuación (3.15) entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \tag{3.16}$$

Si $w(x)=f(x,\varphi(x))$, la ecuación (3.16) puede escribirse como $w'(x)=0$. Resulta entonces $w(x)=C$ para todo $x\in I$. O sea $f(x,\varphi(x))=C$ donde C es una constante. Por lo tanto la solución φ de la ecuación deberá ser una función definida implícitamente por la ecuación $f(x,y)=C$.

Recíprocamente, si $y=\varphi(x)$ es una función derivable sobre un intervalo I definida implícitamente por la ecuación $f(x,y)=C$, entonces $f(x,\varphi(x))=C$ para todo $x\in I$. Derivando miembro a miembro respecto de x, para todo $x\in I$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)&=0\\ P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)&=0.\end{aligned}$$

Lo que demuestra que la función $y=\varphi(x)$ es solución de la ecuación diferencial (3.15).

Resumiendo: Si la ecuación diferencial $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ es exacta su solución general $y=y(x)$ viene expresada implícitamente por la ecuación $f(x,y)=C$ donde la función f es tal que $\nabla f(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$.

En este punto se plantean dos cuestiones:

- ¿Cómo saber si una ecuación es exacta?
- ¿Cómo hallar una función potencial f que nos permita expresar la solución general?

El siguiente teorema da una respuesta a la primera cuestión.

Teorema 3.11. *(Criterio para ED exactas)*

Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un disco $D\in\mathbb{R}^2$, entonces la condición necesaria y sufciente para que la ecuación diferencial $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ sea exacta es que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad \textit{para todo}\quad (x,y)\in D.$$

Demostración. Como $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ es una ecuación diferencial exacta, entonces existe un campo escalar $f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y)\ \text{ y }\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y).$$

Derivando la primera igualdad respecto de y y la segunda respecto de x, tenemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\ \text{ y }\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Como las derivadas parciales de P y Q son continuas en D resulta que las derivadas parciales segundas mixtas de f también son continuas en D y entonces el teorema de Clairaut nos asegura que son iguales, por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ para todo } (x, y) \in D.$$

Para demostrar que la condición es suficiente es necesario abordar contenidos pertenecientes al Análisis Vectorial. □

La segunda cuestión que nos planteamos es la obtención de la función potencial f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

1. Consideramos la primera igualdad, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$, e integramos con respecto a x dejando a y constante:

$$f(x, y) = \int P(x, y)\ dx + g(y) \tag{3.17}$$

2. Derivamos con respecto a y la ecuación (3.17) y consideramos la segunda igualdad, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x, y)\ dx) + g'(y) = Q(x, y), \tag{3.18}$$

depejamos $g'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x, y)\ dx)$

3. Resolvemos esta última ecuación para hallar g y reemplazamos en (3.17).

Ejemplo 3.12. *Determina si la ecuación diferencial*

$$4x + 3y + 3(x + y^2)y' = 0$$

es exacta en $\mathbb{R}^2$ *y en caso afirmativo halla su solución.*

En este ejemplo

$$P(x, y) = 4x + 3y \ \wedge \ Q(x, y) = 3(x + y^2) \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el teorema anterior asegura que la ecuación es exacta en $\mathbb{R}^2$.

Para hallar la función potencial f que nos permita hallar la solución general de la ecuación utilizaremos el procedimiento anterior. La función potencial buscada deberá verificar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 3y \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(x + y^2).$$

Integrando la primera igualdad respecto de x obtenemos:

$$f(x, y) = \int (4x + 3y)\ dx = 2x^2 + 3yx + g(y) \tag{3.19}$$

Como además debe verificarse que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(x+y^2)$ tenemos que

$$3x + g'(y) = 3(x+y^2)$$

$$g'(x) = 3y^2$$

$$g(y) = y^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Reemplazando (3.19), obtenemos una familia de funciones potenciales que viene dadas por la expresión

$$f(x,y) = 2x^2 + 3yx + y^3 + C.$$

Para expresar las soluciones de la ecuación necesitamos sólo una de estas funciones, podemos entonces considerar $C = 0$. Todas **las soluciones de la ecuación diferencial** dada quedan expresadas implícitamente por la ecuación

$$2x^2 + 3yx + y^3 = K \quad \text{con} \quad K \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

Esto es, toda función derivable φ definida implícitamente por la ecuación (3.20) es solución de la ecuación diferencial dada; recíprocamente, todas las soluciones se obtienen de esa manera.

Ejemplo 3.13. *Halla la solución del problema de valor inicial:*

$$(PVI) \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y + 3(x+y^2)y' = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

Conocemos la solución general de la ecuación diferencial, basta entonces determinar el valor de K para el cual se satisface la condición $y(0) = 1$. Reemplazando en (3.20), $x = 0$ e $y = 1$ se tiene que $K = 1$, luego la solución del (PVI) está dada implícitamente por la ecuación

$$2x^2 + 3yx + y^3 = 1.$$

Cuando la ecuación diferencial $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ no es exacta podemos proponernos determinar alguna función $I = I(x,y)$ (llamada factor integrante) de modo que la ecuación diferencial $I(x,y)P(x,y) + I(x,y)Q(x,y)y' = 0$ resulte exacta.

Por ejemplo, la ecuación $(x^2+y^2)x^2 + x + yy' = 0$ no es exacta (comprobarlo), pero multiplicada miembro a miembro por la función $I(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (factor integrante) se convierte en la ecuación

$$x^2 + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}y' = 0$$

que es exacta (comprobarlo) y que ya sabemos resolver.

La búsqueda de un factor integrante $I = I(x,y)$ conduce a la búsqueda de una solución particular no idénticamente nula de la ecuación en derivadas parciales que resulta de la condición $\dfrac{\partial(IP)}{\partial y} = \dfrac{\partial(IQ)}{\partial x}$. Desarrollando esta última expresión resulta:

$$P\frac{\partial I}{\partial y} + I\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial I}{\partial x} + I\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.21}$$

Resumiendo, debe determinarse una solución no trivial de la ecuación (3.21) en derivadas parciales en la función incógnita $I = I(x,y)$. El problema inicial parece entonces haberse complicado; sin embargo, en algunas ocasiones la situación se simplifica notablemente. En el caso en que la ecuación admita un factor integrante de una sola variable, ya sea $I = I(x)$ o $I = I(y)$ la ecuación (3.21) queda mucho más simple. Por ejemplo si $I = I(x)$ tenemos que $\dfrac{\partial I}{\partial y} = 0$. En este caso un factor integrante deberá verificar:

$$I(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)I'(x) + I(x)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

es decir,

$$\frac{I'(x)}{I(x)} = \frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}.$$

Es importante observar que la condición de existencia de un factor integrante dependiente sólo de la variable x, es que el segundo miembro de esta última igualdad, resulte ser una función dependiente sólo de la variable x.

En forma análoga se deduce que la condición de existencia de un factor integrante de la forma $I = I(y)$ es que la función cociente

$$\frac{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)}$$

dependa únicamente de la sola variable y.

Ejemplo 3.14. *Resuelve la ecuación*

$$2x + y^2 + xyy' = 0 \tag{3.22}$$

Esta ecuación no es exacta ya que

$$P(x,y) = 2x + y^2 \ \wedge \ Q(x,y) = xy \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y \ \wedge \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y$$

En este caso, la función cociente

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

depende sólo de x, luego podemos encontrar un factor integrante resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{I'(x)}{I(x)} = \frac{1}{x}$$

Así, un factor integrante es $I(x) = x$. Multiplicando miembro a miembro la ecuación (3.22) por $I(x) = x$ obtenemos la ecuación

$$2x^2 + xy^2 + x^2yy' = 0$$

que es exacta (comprobarlo) y que ya sabemos resolver.

3.6. Trayectorias Ortogonales

Una curva que corta a cada miembro de una familia de curvas en un ángulo recto se llama ***trayectoria ortogonal*** a la familia.

Dos familias de curvas $f(x, y, C) = 0$ y $g(x, y, K) = 0$ se denominan ***familias de trayectorias ortogonales*** si cada curva de una de ellas es una trayectoria ortogonal a la otra familia. Por ejemplo, las rectas que contienen al origen son trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas, como se observa en la Figura 5. Determinar la familia de trayectorias ortogonales a una familia de curvas

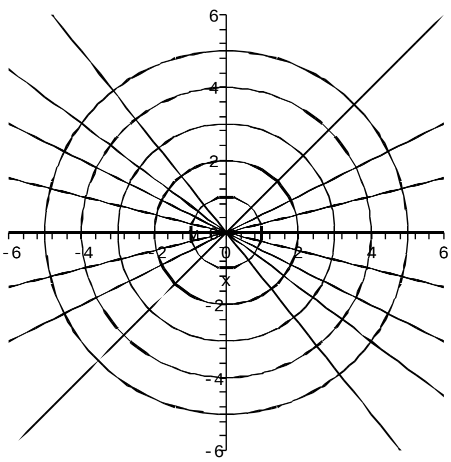


Figura 5: Trayectorias ortogonales

dada es de importancia en problemas de flujo de corriente eléctrica, hidrodinámica y flujo de calor. Para encontrar trayectorias ortogonales, podemos seguir los siguientes pasos. Sea

$$f(x, y, C) = 0 \tag{3.23}$$

una familia de curvas. Queremos obtener una familia de trayectorias ortogonales a ella. Obsevemos que en el punto donde se cortan dos trayectorias ortogonales las rectas tangentes son perpendiculares.

Derivando con respecto a x la ecuación (3.23), tenemos:

$$f_x(x, y, C) + f_y(x, y, C)y' = 0. \tag{3.24}$$

Observemos que para cada valor de C, esta es una ecuación diferencial en la que y' representa la pendiente en el punto (x, y) de la correspondiente curva de la familia (3.23). Eliminando el parámetro C de (3.23) y (3.24) se obtiene la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.25}$$

que satisface la familia (3.23).

Como la pendiente en el punto (x, y) de cada trayectoria ortogonal deberá ser $\dfrac{-1}{y'}$, resolviendo la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0, \tag{3.26}$$

se obtiene la familia de trayectorias ortogonales buscada, $g(x, y, K) = 0$ (una curva para cada valor del parámetro K).

Ejemplo 3.15. *Encuentra las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = kx^2$, con $k \neq 0$.*

El primer paso es encontrar una ecuación diferencial de primer orden que satisfagan todos los miembros de esta familia. Si derivamos miembro a miembro la ecuación $y = kx^2$ obtenemos la ecuación diferencial de la cual la familia de parábolas es solución:

$$y' = 2kx.$$

Esta ecuación diferencial depende de k. Para eliminar k, observemos que de la ecuación $y = kx^2$, si $x \neq 0$ tenemos que $k = y/x^2$. Así la ecuación diferencial puede expresarse:

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Resulta entonces que la pendiente de la recta tangente en un punto (x, y) a la curva de la familia de parábolas es $y' = 2y/x$. La pendiente de la recta tangente a la trayectoria ortogonal correspondiente deberá ser $-1/y'$. Esto nos lleva a la siguiente ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}.$$

Esta ecuación diferencial es a variables separables y su solución general puede expresarse como

$$\frac{x^2}{2c} + \frac{y^2}{c} = 1$$

donde $c \in \mathbb{R}^+$. Ésta es la ecuación de una familia de elipses con centro en el origen y semiejes $\sqrt{c}$ y $\sqrt{2c}$. Tengamos en cuenta que todo esto vale para $x \neq 0$, o sea no estamos considerando la trayectoria ortogonal que interseca a la familia de parábolas en el punto $(0, 0)$, obviamente ésta es el eje y. Por lo tanto la familia de trayectorias ortogonales buscada es:

$$\frac{x^2}{2c} + \frac{y^2}{c} = 1 \ (c \in \mathbb{R}^+), \quad x = 0.$$

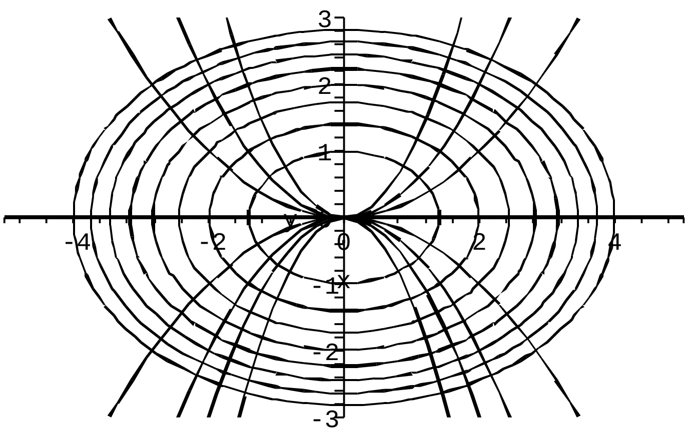


Figura 6: Ejemplo 3.15

4. Ejercitación

1. Verifica que las siguientes funciones (definidas explícitas o implícitamente) son soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales:

   a) $y = Cx^2, \quad xy' = 2y$

   b) $x^2 = 2y^2 \ln y, \quad y' = xy/(x^2 + y^2)$

   c) $y + \operatorname{sen} y = x, \quad (y \cos y - \operatorname{sen} y + x)y' = y$

   d) $x + y = \arctan y, \quad y^2y' + 1 + y^2 = 0$

2. Escribe una ecuación diferencial de primer orden que sea un modelo matemático de la situación que se describe.

   a) La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población P es proporcional a la raíz cuadrada de P.

   b) La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad v de un bote de motor es proporcional al cuadrado de v.

   c) La aceleración de un Lamborghini es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad del automóvil.

   d) En una ciudad que tiene una población fija de P personas la tasa de cambio con respecto al tiempo del número de personas N que han oído cierto rumor es proporcional al número de personas que aún no lo han escuchado.

   e) En una ciudad con una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han contraído cierta enfermedad contagiosa es proporcional al producto del número de quienes están enfermas y el número de las que no lo están.

3. Halla una ecuación diferencial de primer orden para la familia de:

   a) rectas que determinan con los ejes coordenados triángulos de área constante e igual a A.

   b) curvas cuya normal en todo punto pasa por el origen de coordenadas.

   c) rectas tangentes a la parábola $y = x^2$.

   d) todas las circunferencias del plano con centro en $(k, 0)$ y que contienen al punto $(0, 0)$

   e) rectas que distan en una unidad del origen de coordenadas.

4. Un punto Q se mueve sobre una recta r y un punto P *persigue* a Q, esto es, P se mueve de tal manera que su dirección de movimiento está siempre orientada hacia Q. El punto P, en su persecución, describe una curva C llamada *curva de persecución*. Si P no se halla inicialmente sobre r y si la distancia de P a Q es k (constante), determina la ecuación de C. El problema se supone planteado sobre un plano. La curva de persecución se denomina, en este caso, *tractriz*.

   Ayuda: cuando se dice que la dirección de movimiento de P está orientada hacia Q, se quiere significar que la recta tangente a C en P contiene a Q.

5. Realiza los siguientes ejercicios del libro [2]:

   a) Sección 9.1: Todos los impares y el 36

   b) Sección 7.5: 7-8-17-19-21-22-23-24-25

6. *a*) Resuelve la ecuación diferencial $y' = 3y^{2/3}$

   b) Resuelve el (PVI)

$$(PVI)\ \begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

   c) Verifica que $y = 0$ también es solución del (PVI).

   d) Verifica que

$$y(x) = \begin{cases} (x-2)^3 \ si \ x \geq 2 \\ \\ 0 \ si \ x < 2 \end{cases}$$

   también es solución del (PVI).

   e) ¿Qué reflexión puede realizarse respecto del teorema de Picard?

7. *a*) Resuelve la ecuación diferencial $y^2 + x^2y' = 0$

   b) Resuelve el (PVI)

$$(PVI)\ \begin{cases} y^2 + x^2y' = 0 \\ \\ y(a) = b \end{cases}$$

   teniendo en cuenta los siguientes casos:
   (i) $a = b = 0$, (ii) $a = 0, b \neq 0$, (iii) $a \neq 0$, b arbitrario.

   c) ¿Qué reflexión puede realizarse respecto del teorema de Picard?

8. Determina si la ecuación es homogénea:

   a) $x^2 + 1 + 2xyy' = 0$

   b) $y' = \ln y - \ln x$

   c) $(x^2 + y^2)y' = 2xy + x^2y$

9. Resuelve la ecuación diferencial homogénea:

   a) $y' = \dfrac{x-y}{x}$

   b) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

   c) $xy' = y + x \cdot e^{\frac{y}{x}}$

10. Realiza los siguientes ejercicios del libro [2]:

   a) Sección 9.2 : Todos los impares y 28-34-36

   b) Ejercicios adicionales y avanzados pg.683: 3

11. Determina si cada ecuación diferencial es exacta:

    a) $x \operatorname{sen} y + (y \cos x)y' = 0$
    b) $2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy = 0$
    c) $(x - y) + (x + y)\frac{dy}{dx} = 0$

12. Determina si la ecuación diferencial es exacta. Si es así, resuélvela.

    a) $2x + y + (x + 2y)y' = 0$
    b) $3xy - 2 + (3y^2 - x^2)y' = 0$
    c) $\operatorname{sen} y + (1 + x \cos y)y' = 0$
    d) $(x + y)e^{\frac{y}{x}} + x - \dfrac{x^2}{y} e^{\frac{y}{x}} y' = 0$
    e) $x \ln y dx - (x + y \ln x)dy = 0$

13. Resuelve el problema con valor inicial:

    a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy)y' = 0, y(1) = 2$
    b) $1 + y \cos(xy) + x \cos(xy)y' = 0, y(1) = 0$

14. Muestra que la ecuación $y^2 + (1 + xy)y' = 0$ no es exacta pero que se convierte en exacta cuando se multiplica por el factor integrante $I(x, y) = e^{xy}$. Después, resuelve la ecuación.

15. Resuelve cada ecuación:

    a) $3xy + 2y^2 + (x^2 + 2xy)y' = 0$
    b) $2xy + 3x^2 y + 3y^2 + (x^2 + 2y)y' = 0$

16. Prueba que toda ecuación diferencial separable es exacta.

17. Realiza los siguientes ejercicios del libro [2]:

    Sección 9.5 : Todos los impares desde el 13.

18. Miscelánea. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

    a) $1 - xy + x(y - x)y' = 0$, $x > 0$
    b) $y' + y = xy^3$
    c) $xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$
    d) $y' + y \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$
    e) $(xy + xy^3)y' = \ln x$
    f) $xy' - 2y - x^5 = 0$
    g) $y'e^y \operatorname{sen} x + (1 + e^y) \cos x = 0$
    h) $(xy^2 + 3x^2 y + x^3)y' - y^3 - xy^2 - x^2 y = 0$

19. Resuelve el Ejemplo 1.1 de la página 4 y el Ejemplo 1.2 de la página 4.

Referencias

[1] Simmons G. F., *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones y Notas Históricas*, Segunda Edición - McGraw-Hill, 1995.

[2] Thomas G. B.,*Cálculo Una Variable*, Undécima Edición - Editorial Pearson-Educación, 2006.

[3] Wylie C.R., *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, Cuarta Edición - Editorial McGraw-Hill, 1986.

[4] Stewart J., *Cálculo multivariable*, Tercera Edición - International Thomson Editores, 1999.

Agradecimientos
Deseamos expresar nuestra gratitud a la Ing. Marisa Piraino quien colaboró en la selección de los ejercicios propuestos y al Lic. Emilio Sastre por su valiosa contribución y apoyo en la realización de este apunte. Agradecemos también a los docentes de la cátedra de Análisis Matemático III por sus acertadas sugerencias.