

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPPO LEVI

AÑO TERCERO
FASC. 4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1943

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

—El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.

—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.

INDICE

—Teoría matemática del aparato de Mariotte (*Resolución de la cues-*

ción N° 7) (B. LEVI) pág. 185

—Ejercicios y Problemas — Resueltos » 216

—Ejercicios y Problemas — Propuestos » 238

—Bibliografía » 239

TEORIA MATEMATICA DEL APARATO DE MARIOTTE

(RESOLUCION DE LA CUESTION N° 7)

1 — Como está dicho en el enunciado de la cuestión, es de costumbre en los tratados de física (*) tratar el problema del choque de las bolas elásticas como ejemplo de aplicación de los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética (fuerza viva). Se dice brevemente:

Un cuerpo (punto material) con masa m y velocidad v choca contra otro con masa m_1 y velocidad v_1 ; después del choque habrán adquirido nuevas velocidades respectivamente x y x_1 ; los aludidos principios dicen que tendrán que realizarse las relaciones

$$mv + m_1 v_1 = mx + m_1 x_1, \quad mv^2 + m_1 v_1^2 = mx^2 + m_1 x_1^2;$$

considerando éste como un sistema de dos ecuaciones en x , x_1 se obtiene con un cálculo simple, que, *si no es que cada cuerpo conserve su propia velocidad*, las nuevas velocidades serán expresadas por

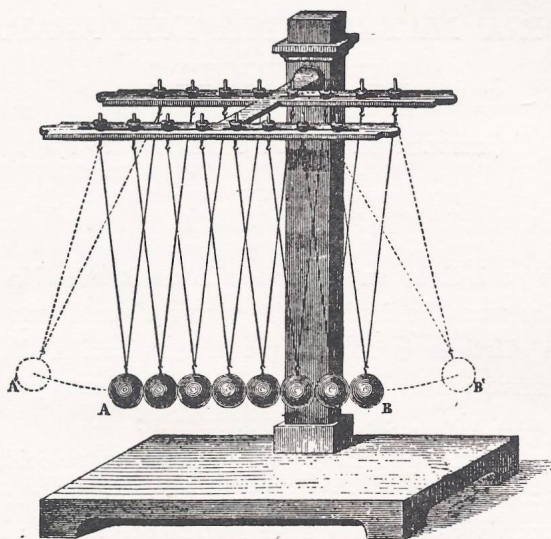
$$x = \frac{2 m_1 v_1 + (m - m_1) v}{m + m_1} \quad x_1 = \frac{2 m v + (m_1 - m) v_1}{m + m_1} \quad [1]$$

Nótese que, en esta deducción, ya no todo es razonamiento matemático, porque nada está escrito en las ecuaciones que impida aceptar las soluciones $x = v$, $x_1 = v_1$; para concluir debe aceptarse como hecho de experiencia (por más que sea una observación muy elemental y grosera) que no pueden haberse conservado las velocidades respectivas porque, por el choque, no puede invertirse el

(*) Véase, por ejemplo, O. MURANI, *Tratado de Física*, t. I, ed. castellana, pág. 200. A. BATELLI-P. CARDANI, *Trattato di Fisica sperimentale*, vol. I, pág. 156.

orden de los cuerpos sobre la línea de movimiento, lo que llevaría a una penetración de ellos.

Pero el llamado aparato de MARIOTTE, que sirve de demostración escolar, no se compone de dos bolas solamente sino de una



hilera de bolas iguales y la experiencia muestra que al levantar una en una extremidad y dejarla luego caer contra las otras, éstas, salvo algunas vibraciones que muy fácilmente se está dispuest oa atribuir a imperfecciones experimentales (choque no absolutamente central, imperfecta elasticidad, etc.) quedan todas inmóviles salvo la última, que se levanta aproximadamente de la misma cantidad de la cual la primera había caído. Por otra parte se dan también al experimento algunas variantes, como la de levantar y dejar caer no una sino cierto número de bolas, observando que del otro lado se levantará, después del choque, igual número de bolas, quedando paradas las otras; también se levantan y dejan caer simultáneamente bolas en las dos extremidades de la hilera, etc.

Es evidente que, considerando el problema en su aspecto simplemente mecánico, los dos principios de conservación aplicados para obtener las fórmulas [1], no pueden ser suficientes en el caso de más de 2 bolas, porque, para determinar las n velocidades incógnitas después del choque, serán necesarias n ecuaciones; a menos que otros elementos sean proporcionados por alguna consideración de otra naturaleza.

Juzgamos en efecto como no indiferente el acto de fe que viene a pedirse al considerar muy simple y muy natural la extensión por analogía del caso de dos bolas a un número cualquiera. Cuando una bola choca contra el grupo de n , ¿qué diferencia hay con el caso en que la bola chocara con un cuerpo de masa n -ple?; en cuyo caso, aplicando las fórmulas [1], se obtendría que la bola tendría que volver atrás con la velocidad $\frac{n-1}{n+1}v$ y el grupo de n correr adelante con velocidad $\frac{2v}{n+1}$.

El problema del choque ha preocupado a los mecánicos desde el siglo XVII, y ya en el caso de dos cuerpos solamente, siendo sustancialmente la piedra de toque para la larga polémica si debe ser el momento o la energía cinética lo que revela la fuerza; si es cierto que actúa una fuerza cada vez que se modifican las condiciones de movimiento de un punto material, y que el efecto de la fuerza se revela por la aceleración, ¿qué será el cambio en las condiciones de movimiento que se revela por un cambio brusco de las velocidades, sin visible intervención de aceleraciones? Se supera la dificultad aparentemente buscando en el submicroscópico la explicación de lo macroscópico, al considerar deformaciones y reacciones elásticas o plásticas; sin embargo es más que todo un desplazamiento de la dificultad, porque, si la explicación de estas fuerzas se busca a su vez en algo como la estructura corpuscular de los cuerpos ⁽¹⁾, bien se ve que el problema, eliminado para el cuerpo, renace para el corpúsculo. Dependen de eso las incertidumbres y las diferentes soluciones a las que vamos a aludir a continuación ⁽²⁾.

Aceptando por el momento sin crítica el razonamiento que nos condujo a las fórmulas [1], la explicación que se da por tradición y sin modificaciones más que de detalles en todos los libros y en todos los cursos para los fenómenos que se demuestran con el apa-

⁽¹⁾ Precisamente como lo hace POISSON, pueden admitirse fuerzas repulsivas intramoleculares para evitar el choque directo también en el submicroscópico.

⁽²⁾ Mientras la nota presente ya estaba redactada, nos llega un número de las *Edinburgh Mathematical Notes* (Nº 33, septiembre 1943), con un trabajo del Sr. A. G. WALKER, titulado *The inextensible string*, donde todavía se propone la dificultad del movimiento impulsivo, representándolo bajo la forma del hilo inextensible.

rato de MARIOTTE es la siguiente que no difiere esencialmente de aquella dada por el mismo MARIOTTE (1).

Al chocar una bola contra la primera de una hilera de bolas iguales, le cede toda su velocidad y se para; pero esa primera bola choca, por la misma razón, la bola que le está atrás y le cede la velocidad adquirida, parándose; el mismo juego ocurre luego entre la segunda y la tercer bola, hasta llegar a la última, que, por no poder ceder la velocidad adquirida a una siguiente, sale con la misma velocidad que tenía la bola chocante.

Lo que esta explicación olvida es que no puede haber velocidad sin movimiento y no puede haber movimiento sin recorrido; la explicación introduce subrepticamente una noción de *velocidad virtual* que pueda ser adquirida y cedida sin movimiento aparente, y que no aparece en ninguna otra parte de la física; y lo que es notable es que la objeción, que se pasa ordinariamente por alto, ya había sido señalada por el mismo MARIOTTE (2), el cual creyó darle contestación con observar que la esfera chocado, por el mismo efecto del choque, se retrae en el punto golpeado extendiéndose en sus secciones normales al diámetro que pasa por este punto; esta extensión tiene por respuesta una contracción de la esfera en el polo opuesto al punto golpeado la cual debería producir un vacío momentáneo entre la bola y la siguiente, creando por consiguiente el espacio necesario para que la bola adquiriera efectivamente la velocidad. Para que nada sea dejado a la imaginación, MARIOTTE apoya experimentalmente esta consideración observando la deformación producida golpeando sobre anillos elásticos colgados.

La contracción y extensión previstas por MARIOTTE son efectivamente conocidas en la teoría de las vibraciones elásticas de la esfera; pero no es sin razón que para hacerlas experimentalmente visibles, le fué necesario cambiar las esferas en anillos; de un cálculo que sigue resultará claro que en ningún caso el vacío producido en tal forma podría bastar para que la esfera adquiriera la ve-

(1) MARIOTTE vivió de 1620 a 1684; en las Memorias de la Academia de Francia, fundada en 1666, se encuentran resumidas varias memorias suyas y de contemporáneos y de otros autores sucesivos sobre argumentos de mecánica y del choque en particular.

(2) Siento tener que dar esta referencia únicamente de memoria; el trabajo de MARIOTTE al cual aludo vino a mis manos hace muchos años, y posiblemente en la Biblioteca Palatina de Parma, y no me queda de él una constancia escrita, ni pude reencontrar nada que se le refiera en el país, ni en Montevideo.

locidad en cuestión. Podemos luego decir que la observación de MARIOTTE, cualitativamente exacta, no lo es cuantitativamente, a pesar de ser un bello ejemplo de agudeza y de conciencia científica.

Un siglo y medio después Poisson trata, en la primera edición de su *Traité de mécanique* (T. II, París, 1811) el problema del choque de un número cualquiera de esferas (n° 444 y sig.) en un modo que debemos reconocer todavía bastante primitivo; con respecto a la experiencia de MARIOTTE se expresa de la manera siguiente:

(p. 256-7, n. 447). « Por ejemplo, si consideramos una hilera de bolas en reposo $A, A', A'', \dots$, perfectamente elásticas, yuxtapuestas y con los centros dispuestos en línea recta; y si suponemos que otra bola elástica B , cuyo centro se mueve sobre la misma recta, viene a chocar la primera bola A , la comunicación del movimiento no se realizará en el mismo instante a todo el grupo de cuerpos; al contrario, el movimiento se propagará sucesivamente de una bola a la siguiente, y empleará para llegar a la última un cierto tiempo que resultaría apreciable si el número de las bolas fuese muy grande. *La experiencia demuestra entonces que las cosas ocurren como si las bolas no se tocaran rigurosamente, y que cada bola, antes de actuar sobre las siguientes, tuviera el tiempo de adquirir la velocidad que la anterior debe comunicarle...* » ⁽¹⁾. Poisson sigue con el razonamiento recordado arriba, teniendo cuidado de anotar « y supongamos que esos cuerpos no estén en contacto » para concluir finalmente: « Ahora la experiencia muestra que también cuando las bolas $A, A', A'', \dots$ están yuxtapuestas y forman una serie ininterrumpida, el choque de B contra A separa únicamente la última bola, de manera que todas las demás bolas y el móvil quedan en reposo y yuxtapuestas después del choque ».

En la segunda edición del mismo tratado de mecánica de Poisson (París, 1833) toda la teoría del choque de las bolas se encuentra enormemente reducida; sin embargo se cita todavía el fenómeno de MARIOTTE dándole una aparente explicación, no cierto comparable con la honesta reserva anterior o con la agudeza — a pesar de equivocada — de MARIOTTE; después de haber explicado el caso de una hilera de bolas que, sin precisa expresión, se sobreentienden separadas entre sí por distancias indeterminadas, dice: (T. II, p. 32, n. 363): « y como este resultado es independiente de la anchura de los intervalos comprendidos entre las bolas sucesivas,

⁽¹⁾ Claro está que el subrayado es nuestro para llamar la atención del lector.

resulta natural inferir que se realizará todavía cuando estos intervalos desaparecerán y las bolas chocadas estén en contacto ». ¡ Sucede que, en realidad, para que el razonamiento de la transmisión de la velocidad pueda hacerse sin mayor cuidado, es necesario que la distancia inicial entre bolas consecutivas no pase debajo de cierta longitud!

Para no hacer hipótesis acerca de este cambio de actitud mental, podemos, como matemáticos, notar que entre tanto el problema había hecho, en su esquematización, un paso adelante. Dejando de lado el problema de las esferas, CAUCHY, en 1826 ⁽¹⁾, había estudiado matemáticamente, por sugestión de CORIOLIS, el problema del choque de punta de dos barras cilíndricas de igual sección, el que, evidentemente, se puede considerar como la esquematización lineal del choque de las esferas; y el mismo problema se encuentra tratado por POISSON en las páginas 331 y siguientes de la citada 2ª edición del T. II, del *Traité de mécanique*. Finalmente, en 1866, DE SAINT-VENANT dedica a este mismo problema una larga memoria publicada en el *Journal de Liouville* de 1867: *Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la force vive qui est perdue pour la translation ultérieure; et généralement sur le mouvement longitudinal d'un système de deux ou plusieurs prismes élastiques*.

Como dijimos más arriba, la traducción matemática del problema ofrece dificultades para encuadrar lógicamente el mecanismo posible de transmisión de la velocidad. POISSON y SAINT-VENANT admiten que ello se realice únicamente por la acción inmediata entre elementos próximos de los cuerpos, propagándose luego, como onda elástica, con la velocidad del sonido en el material de las barras. Matemáticamente, para todo el tiempo que las barras quedan en contacto, ellas se comportarían como un sólido elástico único, separándose solamente cuando un salto de velocidad se forma correspondientemente a la abscisa de una base común de dos barras sucesivas. El resultado sería, según POISSON, que la separación podría realizarse solamente en el caso de dos barras de

⁽¹⁾ Citamos CAUCHY y CORIOLIS únicamente por lo que dice SAINT-VENANT en la memoria de la cual hablamos después; no hemos podido encontrar la nota de CAUCHY; pero SAINT-VENANT advierte que es muy breve, conteniendo únicamente enunciados sin indicación de cálculos ni tampoco del concepto que ha presidido la traducción matemática del problema físico y fué publicada en el *Bulletin de la Société Philomathique*.

longitud idéntica, es decir con probabilidad práctica cero; según SAINT-VENANT la separación se realizaría en cualquier caso cuando la onda de choque ha recorrido en ida y vuelta la barra más larga ⁽¹⁾; resultado éste que contrasta menos con los hechos experimentales observables macroscópicamente por la dificultad práctica de apreciar tiempos cortísimos, pero que llevaría al resultado poco probable que la separación no se realizaría cuando la barra más larga se extendiera al infinito ⁽²⁾.

El fenómeno del choque es ciertamente complejo y ciertamente no se puede despreciar el movimiento vibratorio que le sigue o lo acompaña, máxime por lo que se refiere a la dispersión de la energía; sin embargo la forma adoptada por POISSON y SAINT-VENANT para plantear el problema parece defectuosa principalmente por dos razones: 1° Que en la consideración de las ecuaciones de la elasticidad es esencial la hipótesis de la continuidad de la velocidad; igualmente en los casos de quebrantamiento de los cuerpos por rotura del equilibrio elástico, es por exceso de aceleración y no por discontinuidad en la velocidad. — 2° Que por su naturaleza las deformaciones elásticas se calculan respecto a un sistema de ejes respecto del cual el cuerpo « en conjunto » queda sustancialmente fijo; pero las acciones elásticas no pueden sustituir las acciones de masa y los movimientos finitos. Si el choque y cualquier acción exterior al cuerpo puede producir una deformación elástica, la cual sucesivamente se propaga en el cuerpo con una velocidad propia, esto es solamente porque el cuerpo *resiste* a dichas acciones de masa como si fuera virtualmente rígido, permitiendo una *composición de fuerzas*, determinación de un *centro de masas*, *reacción inercial* y *reacción de vínculos*; sólo al llegar a la superficie de los cuerpos (o, más generalmente, a superficies de discontinuidad) las ac-

⁽¹⁾ cfr. SAINT-VENANT, *l. c.*, p. 240, « Mais cette contiguité des extrémités dure peu, et elles s'éloignent infailliblement l'une de l'autre dès qu'il arrive un deuxième instant, celui où l'ébranlement a parcouru aller et retour la barre la plus longue ».

⁽²⁾ H. LAMB, en el artículo *Schwingungen elastischer Systeme, insbesondere Akustik*, de la *Encyklopädie der Math. Wissenschaften* (Vol. IV, N° 26), al dar cuenta de estos resultados, dice que la separación ocurre cuando la onda de choque ha recorrido la barra *más corta*; por esta razón en la nota anterior hemos reproducido textualmente las palabras de SAINT-VENANT; posiblemente equivoque LAMB entre el momento en que cesa la presión entre las barras y el momento de la separación. De todos modos nota LAMB que los datos experimentales están en contra de los resultados de SAINT-VENANT por lo que se refiere al coeficiente de reflexión (v. más adelante) y a la duración del choque.

ciones elásticas actúan como acciones de masa precisamente porque exigen las fuerzas de masa que deben resistirles.

Partiendo de hipótesis en cierto modo opuestas a las de SAINT-VENANT, el problema del choque de los cuerpos ha sido reconsiderado por H. HERTZ en 1881 ⁽¹⁾. En efecto, supone HERTZ que los efectos de las ondas de choque sean despreciables y transportables en un tiempo despreciable lejos de la región en la cual ocurre el choque; el primer contacto de los cuerpos se supone puntual (es decir se supone que las superficies de contacto de los cuerpos no se adaptan una a la otra en más de un punto; (al contrario, para SAINT-VENANT los cuerpos se adaptaban en el momento del choque uno contra el otro por una superficie plana); y la superficie de contacto se extiende luego por efecto de la deformación progresiva; sin embargo las dimensiones de la región en la cual se realiza tal deformación elástica, a la que corresponden las presiones que componen la fuerza de masa de la cual acabamos de hablar, son todavía despreciables respecto de las dimensiones de los cuerpos. Si en los dos cuerpos elegimos respectivamente dos puntos sobre una recta paralela a la normal común a las superficies de los dos cuerpos en el punto de impacto y no inmediatamente próximos a este punto, y comparamos su distancia inicial (en el instante en que los cuerpos vienen en contacto) con la distancia en un instante sucesivo arbitrario, esta segunda es siempre menor (hasta tanto que dura el contacto) y la diferencia entre las dos no depende de los puntos elegidos; podemos considerarla como la *medida de la deformación* (y la indicaremos, cuando ocurra, con α). En el caso de dos esferas y de choque central elegiremos sin más los centros. El resultado de HERTZ enseña que la aludida resultante de las presiones debidas a la deformación (cuando se desprecian los infinitesimos de orden igual o superior al segundo) es proporcional a la potencia 3 : 2 de la deformación.

Terminaremos esta reseña preliminar con recordar que a los estudios citados, conducidos con intentos matemáticos, sobre un más o menos hipotético mecanismo elemental para la transmisión de la energía mecánica en el choque, se oponen algunas afirmacio-

⁽¹⁾ HEINRICH HERTZ: *Ueber die Behrührung fester elastischer Körper* - Journal für die reine und angew. Mathematik (Crelle) Bd. 92 (p. 156-171); está reproducido en las *Gesammelte Werke*, Vol. I, p. 155-173, y se continúa en otra memoria de 1882, *Ueber die Behrührung fester elastischer Körper und über die Härte*.

nes globales, igualmente y más clásicas, que se refieren más que todo a los efectos que se presentan como imperfecta elasticidad; tal es la observación que, conservándose la cantidad de movimiento total antes y después del choque, la diferencia de velocidad entre los dos cuerpos sufra una reducción respecto de lo que resulta de las fórmulas [1] debido a la energía que queda almacenada en los cuerpos bajo formas más o menos vibratorias (calor, sonido, etc.). El coeficiente (siempre < 1) que representa aquella reducción es lo que se llama *coeficiente de restitución*, y fué considerado ya por NEWTON, con indicaciones numéricas que se consideran todavía como atendibles. Entre los tratados de mecánica que se refieren a estos detalles conviene recordar principalmente el clásico *A Treatise of Natural Philosophy* de THOMSON y TAIT; notamos que estas consideraciones quedan parcialmente incluídas en el orden de ideas de POISSON y SAINT-VENANT, mientras quedan excluídas en el de HERTZ y que a ellas indudablemente podrían referirse parcialmente divergencias entre lo que enseña la experiencia y los resultados de una investigación teórica. En lo que sigue va a resultar que esta clase de explicaciones pueden considerarse en todos los casos como de importancia del todo secundaria.

3 — Empezaremos con estudiar el problema del movimiento en el aparato de MARIOTTE en *primera aproximación* suponiendo poder aplicar en modo grosero la ley de HOOKE en cuanto afirma la reacción elástica proporcional a la deformación; si, en lugar del choque de bolas, propusiéramos, imitando a CAUCHY, POISSON, SAINT-VENANT, de estudiar el choque de una serie de cuerpos constituidos por trozos iguales de un mismo cilindro (lo cual — es muy importante notarlo, — a los efectos de la crítica del razonamiento corriente que hemos recordado al principio, es más que permitido, puesto que en ese razonamiento nada se refiere particularmente a la forma esférica de los cuerpos que se chocan), tal aplicación de la ley de HOOKE sería totalmente rigurosa, porque, como notamos anteriormente, tal sustitución equivale a la esquematización lineal del problema; las cosas son diferentes cuando se quiera tener en cuenta los resultados de HERTZ, en los cuales, como dijimos, la forma de los cuerpos tiene importancia y es la razón del exponente $3:2$ que se presenta para establecer la razón entre la fuerza y la deformación. Sin embargo veremos después hasta qué punto los resultados de la primera aproximación — además de poner en

claro la validez de la crítica expresada al razonamiento clásico — nos proporcionan los elementos para una segunda aproximación más adecuada.

Teniendo en cuenta que un cambio de la unidad de medida del tiempo induce la multiplicación de las aceleraciones por una constante arbitraria, podemos siempre suponer que el coeficiente de proporcionalidad entre fuerza y deformación se exprese por el mismo número que la masa común de los cuerpos (esferas o cilindros) que se chocan; tendremos luego igualdad entre las deformaciones y las correspondientes aceleraciones.

A pesar de que, por lo que se refiere al cambio de velocidades, las fórmulas [1] con el simple razonamiento del n. 1, resuelven por completo el caso de dos esferas, vamos a estudiar primero este mismo caso, según la línea general de cálculo que se aplicará al caso de más esferas, no solamente por su simplicidad, sino también porque las puntualizaciones que siguen van a servirnos en cálculos sucesivos.

Suponiendo fijado sobre la recta de los centros un sistema de abscisas, indicaremos con x_1, x_2 las coordenadas instantáneas (funciones del tiempo t) de dichos centros. Para todo el tiempo que las esferas quedan en contacto (es decir la distancia de los centros es menor o igual que el diámetro, y las dos esferas reaccionan por presión una contra la otra) las ecuaciones diferenciales del movimiento serán expresadas por

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= x_2 - x_1 - 2r \\ \ddot{x}_2 &= x_1 - x_2 + 2r\end{aligned}\tag{2}$$

con las condiciones iniciales

$$x_2 - x_1 = 2r, \quad \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = v, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

De [2] se deduce

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = 2\ddot{x}_2$$

y luego, derivando la segunda [2] dos veces y sustituyendo,

$$x_2^{(4)} + 2\ddot{x}_2 = 0.$$

Esta ecuación diferencial lineal se integra de manera conocida, obteniendo, con las condiciones iniciales dadas,

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} t + 2r \\ \ddot{x}_2 &= -\ddot{x}_1 = \frac{v}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} t, \\ \dot{x}_1 &= \frac{v}{2} (\cos \sqrt{2} t + 1), \quad \dot{x}_2 = \frac{v}{2} (-\cos \sqrt{2} t + 1).\end{aligned}\tag{3}$$

Creciendo el tiempo t a partir de 0, se realiza por primera vez

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= 2r \\ \text{por} \quad T &= \pi : \sqrt{2}\end{aligned}\tag{4}$$

y, para este valor de t ,

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = v;$$

por tanto las dos esferas se separan, siendo [4] la duración total del choque y confirmándose el resultado clásico obtenido en el n. 1; pero con la ventaja, sobre el razonamiento fundado sobre los principios conservativos, de que la demostración, después de su exacta posición física, se ha desarrollado completamente en términos matemáticos, sin hacer ulteriormente recurso a intuiciones.

En el intervalo de tiempo $0 - T$ el punto x_2 , centro de la segunda esfera, recorre el espacio

$$s = \int_0^T \frac{v}{2} (1 - \cos \sqrt{2} t) dt = \frac{\pi v}{2\sqrt{2}},$$

mientras que el máximo de la contracción se realiza al tiempo $T : 2$ con el valor

$$2r - (x_2 - x_1) = \frac{v}{\sqrt{2}}.\tag{5}$$

Por razón de simetría el radio de cada esfera, sobre la recta de los centros, se habrá reducido en $v : 2\sqrt{2}$; resulta de aquí cómo es inadmisibles la explicación de MARIOTTE, por el vacío que, en el caso de más esferas, esta contracción debería producir entre la segunda y la tercera. En efecto, aún admitiendo en la segunda es-

fera una contracción radial simétrica (lo cual ciertamente no ocurre) en el polo opuesto del punto que sufre la compresión de choque por la primera, esta contracción no alcanzaría a tampoco $\frac{1}{3}$ del espacio que la esfera tendría que recorrer antes de haber adquirido la velocidad v para golpear la tercera.

4— Pasemos ahora al estudio del aparato de MARIOTTE, con un número $n > 2$ de bolas; llamaremos $x_1, x_2, \dots, x_n$ las abscisas de los centros; tendremos que escribir n ecuaciones de las cuales la primera y la última serán, análogamente a las [2]

$$\ddot{x}_1 = x_2 - x_1 - 2r, \quad \ddot{x}_n = x_{n-1} - x_n + 2r, \quad [6]$$

mientras las $n - 2$ restantes deberán expresar que los puntos $x_2, \dots, x_{n-1}$ están empujados, cada uno, por dos fuerzas, debidas a las compresiones de la esfera correspondiente contra la que precede y contra la que sigue; estas dos fuerzas tienen necesariamente sentidos opuestos; tenemos luego el sistema

$$\ddot{x}_i = x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} \quad (i = 2, \dots, n-1) \quad [7]$$

[6] y [7] constituyen un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales para las n funciones incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ que pertenece a un tipo muy conocido en la teoría de los movimientos oscilatorios ⁽¹⁾.

Es evidente, por el modo como el problema ha sido puesto, que la solución puede determinar las x_i , sólo salvo un término aditivo común arbitrario. Esto significa que, cuando sean conocidas las x_i , sólo podremos determinar todavía las diferencias mutuas de las x_i . Es claro entonces que, en cuanto serán conocidas las $\ddot{x}_i$, estas diferencias se determinan resolviendo ordenadamente las ecuaciones dadas:

$$x_2 - x_1 = \ddot{x}_1 + 2r, \quad x_3 - x_2 = \ddot{x}_2 + (x_2 - x_1) = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2r, \dots$$

En consecuencia de esta observación, conviene limitarnos a la determinación de las derivadas, y por tanto sustituir a las ecuacio-

⁽¹⁾ Cfr. KÁRMÁN y BIOT: *Mathematical Methods in Engineering*. New-York, London, 1940, p. 170. LAMB: *The dynamical Theory of Sound*, 2ª ed. London, 1931, p. 44.

nes [6] y [7] sus derivadas (tomando luego por incógnitas las $\dot{x}_i$), con lo cual vienen a eliminarse los términos constantes de las ecuaciones [6] y el sistema resulta homogéneo; si se pone, por comodidad

$$\dot{x}_i = y_i,$$

tendremos así

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -y_1 + y_2 \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \ddot{y}_3 &= y_2 - 2y_3 + y_4 \\ &\dots\dots\dots \\ \ddot{y}_{n-1} &= y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ \ddot{y}_n &= y_{n-1} - y_n \end{aligned} \quad [8]$$

Podríase, por medio de una sucesión de derivaciones y eliminaciones, eliminar todas las funciones incógnitas menos una, obteniendo como resultado una única ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes de orden $2n$; se sabe que tal ecuación tiene como solución general una combinación lineal de determinadas soluciones elementales, por medio de las cuales se podrán sucesivamente determinar, por simples cálculos algebraicos, todas las incógnitas restantes. Pero la naturaleza mecánica del problema nos asegura que, cualesquiera que sean las condiciones iniciales, las $y_i = \dot{x}_i$ no pueden tomar valores superiores a ciertos límites finitos (por ser constante la energía total del sistema); se sigue que dicha solución general no puede contener exponenciales con exponente real, ni términos con el factor t . Esto nos asegura que la ecuación característica de la aludida ecuación diferencial no tendrá otras raíces que simples e imaginarias puras y que las aludidas soluciones elementales serán solamente senos y cosenos.

Después de estas observaciones resulta que las soluciones elementales serán de la forma

$$y_i = a_i \sin \omega t, \quad y_i = b_i \cos \omega t \quad [9]$$

donde a_i , b_i , ω son números que quedan por determinar. Bastará para eso sustituir en [8] una cualquiera de las expresiones [9]; el factor trigonométrico se elimina por reproducirse, factor común a todos los términos y se obtiene, para determinar las a_i o las b_i

el mismo sistema [8] donde se haya escrito en lugar de cada y_i el correspondiente coeficiente a_i o b_i y en lugar de las y_i se ponga respectivamente $-\omega^2 a_i$ o $-\omega^2 b_i$. Como condición para la existencia de la solución, anulando el determinante de los coeficientes, se obtiene la *ecuación característica*:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \omega^2 - 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2 - 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \omega^2 - 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad [10]$$

Llamemos D_n al primer miembro de esta ecuación (el índice n es el orden del determinante), y llamemos Δ_n al determinante que se obtiene de D_n al cambiar el primer elemento en $\omega^2 - 2$; resulta inmediatamente

$$D_n = \Delta_n + \Delta_{n-1};$$

además, desarrollando Δ_n según los elementos de la primer columna, para $n \geq 3$,

$$\Delta_n = (\omega^2 - 2) \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2};$$

se sigue que, para $n \geq 4$, será también

$$D_n = (\omega^2 - 2) D_{n-1} - D_{n-2}. \quad [11]$$

El cálculo directo da

$$\begin{aligned} D_1 &= \omega^2 - 1 \\ D_2 &= (\omega^2 - 1)^2 - 1 = \omega^2 (\omega^2 - 2) \\ D_3 &= \omega^2 (\omega^2 - 1) (\omega^2 - 3) \end{aligned}$$

Se nota de inmediato que D_2 y D_3 son divisibles por ω^2 ; por [11] se sigue que este factor se reproducirá en todas las D_n siguientes; conviene luego poner

$$\begin{aligned} D_n &= \omega^2 D'_n \\ D'_2 &= \omega^2 - 2, \quad D'_3 = (\omega^2 - 1) (\omega^2 - 3) = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 \end{aligned}$$

La [11] se escribe entonces

$$D'_n = (\omega^2 - 2) D'_{n-1} - D'_{n-2} \quad [12]$$

$$D'_n + D'_{n-1} = \omega^2 D'_{n-1} - (D'_{n-1} + D'_{n-2}), \quad [13]$$

de donde, notando que D_2' , D_3' y $D_3' + D_2'$ son polinomios con primer coeficiente positivo y los siguientes de signo alternado, se sigue por recurrencia que la misma propiedad vale para todos los D_n' . Esto demuestra que, considerando $D_n' = 0$ como ecuación en ω^2 , no tiene raíces reales negativas. Precisamente, la única raíz de $D_2' = 0$ es $\omega^2 = 2$, y evidentemente D_2' es negativo para $\omega^2 < 2$ y positivo para $\omega^2 > 2$; por otra parte las raíces de $D_3' = 0$ son $\omega^2 = 1$ y $\omega^2 = 3$, comprendiendo la de $D_2' = 0$. Notando, además, que por [13], de los valores $D_2'(0) = -2$, $D_3'(0) = 3$, sigue que en general $D_n'(0) = (-1)^{n-1}n$, se deduce fácilmente de [12] que todas las raíces de $D_n' = 0$ (considerando ω^2 como incógnitas) son reales y positivas, como se había previsto. Se deduce también, con mayor precisión, que todas estas raíces están comprendidas entre 0 y 4, agrupándose en pares de la forma ω^2 y $4 - \omega^2$.

Notamos finalmente que para sustituir en las fórmulas [9], de cada una de estas raíces será de considerar una sola de las raíces cuadradas, de manera que también los valores de ω podrán suponerse sin más positivos, porque los valores opuestos no proporcionan soluciones linealmente independientes del sistema diferencial.

A cada raíz ω^2 de $D_n = 0$ (0 o raíz de $D_n' = 0$) corresponde para las correspondientes soluciones elementales [9] un sistema de coeficientes que son todavía determinados, para cada valor de i , salvo un factor de proporcionalidad; esto es, proporcionales a los valores que, por dichas raíces, adquieren los menores complementarios de los elementos de una línea del determinante [10]. Eligiendo la primera línea, se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 : \dots : a_i : \dots : a_n &= b_1 : b_2 : \dots : b_i : \dots : b_n \\ &= \Delta_{n-1} : -\Delta_{n-2} : \dots : (-1)^{i-1} \Delta_{n-i} : \dots : (-1)^{n-1}. \end{aligned} \quad [14]$$

Para la raíz $\omega = 0$ se reconoce fácilmente que

$$\Delta_i = (-1)^i, \quad [15]$$

por lo cual resultan todos los coeficientes correspondientes a_i^0 o b_i^0 iguales.

Para determinar en modo definitivo una solución del sistema [10] es necesario introducir las condiciones iniciales, y si éstas son generales (como también va a ocurrir en una aplicación sucesiva), deberá formarse dicha solución como combinación lineal de los dos tipos de soluciones elementales [9], salvo que para la raíz 0

que proporciona una sola solución elemental correspondiente a elegir los cosenos en la [9]; la razón estriba en que la solución $\omega = 0$ es doble, lo cual debería introducir en la solución general del sistema [10] un término de la forma $a_i t$, el cual queda excluido por la anterior observación de que, por la naturaleza del problema físico, las soluciones no pueden contener términos de valor absoluto ilimitadamente creciente al crecer t .

En el problema como está planteado en el momento, sabemos que todas las aceleraciones iniciales ($t = 0$) son nulas; se sigue que las $\ddot{x}_i$ deberán expresarse por solos senos y las $\dot{x}_i = y_i$ por solos cosenos. La solución será luego de la forma

$$\dot{x}_i = (-1)^{i-1} \sum_j \lambda_j \Delta_{n-i}^{(j)} \cos \omega_j t \quad [16]$$

donde el índice j se refiere a las diferentes raíces de $D_n = 0$.

Si suponemos que en el instante inicial sólo la primera bola tiene la velocidad v , mientras todas las demás están en reposo, tendremos que determinar las λ_j por las condiciones

$$\sum_j \lambda_j \Delta_{n-1}^{(j)} = v, \quad \sum_j \lambda_j \Delta_{n-i}^{(j)} = 0 \quad (i > 1) \quad [17]$$

La resolución del sistema se efectúa numéricamente en cada caso particular; puede dársele una expresión general por la consideración siguiente:

Una propiedad conocida de los coeficientes a_i^j es la ortogonalidad expresada por

$$\sum_i a_i^j a_i^l = 0 \quad (1)$$

Se sigue que si, para realizar la proporcionalidad [15], en lugar de la determinación simple elegida en [16] y [17], se elige

$$a_i^j = \frac{\Delta_{n-i}^{(j)} (-1)^{i-1}}{\sqrt{\sum_h \Delta_{n-h}^{(j)2}}}, \quad [18]$$

(1) La propiedad es general para los sistemas de soluciones $\xi_i = a_i^j$ de sistemas de la forma

$$\rho \xi = \sum_h k_{ih} \xi_h \quad (k_{ih} = k_{hi})$$

que determinan los ejes de una variedad cuadrática, por lo menos mientras tales ejes están determinados (variedades no de rotación). Para la aplicación especial a los sistemas oscilatorios, v. por ej. KARMAN y BIOT, *l. c.*, p. 137.

cada a_i^j será igual a su propio menor complementario respecto de la matriz $\{a_i^j\}$, de donde sigue que la solución de [17] está proporcionada por

$$\lambda_j = \frac{\nu}{\sum_h \Delta_{n-h}^{(j)2}} \Delta_{n-1}^{(j)}.$$

Luego

$$\dot{x}_i = (-1)^{i-1} \nu \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\Delta_{n-1}^{(j)} \Delta_{n-i}^{(j)}}{\sum_h \Delta_{n-h}^{(j)2}} \cos \omega t + \frac{\Delta_{n-1}^{(0)} \Delta_{n-i}^{(0)}}{\sum_h \Delta_{n-h}^{(0)2}} \right] \quad [19]$$

5. — El problema esencial que debe ocuparnos es de determinar el instante en que una primera vez una de las bolas se separa de la próxima; si las dos bolas son las de índices k y $k+1$, esto significa que en el punto de contacto entre las dos bolas la presión total es 0 ⁽¹⁾, es decir que la suma de las aceleraciones de las bolas que preceden este punto es igual a la suma de las aceleraciones de las bolas que siguen. Teniendo en cuenta que la suma total de las aceleraciones es constantemente 0 (por ser el sistema sometido solamente a fuerzas internas) resulta la ecuación

$$\sum_1^k \ddot{x}_i = \sum_{k+1}^n \ddot{x}_i = 0;$$

se debe determinar la mínima raíz de estas ecuaciones para todos los valores de k . Después de este instante el problema se repite para cada uno separadamente de los dos grupos de bolas que quedan en contacto (o más grupos si la separación se hiciera contemporáneamente en varios puntos), tomando como condiciones iniciales las velocidades y las aceleraciones que en dicho instante cada bola habrá adquirido. Se tratará luego de iniciar nuevamente el cálculo, refiriéndose a sistemas con un menor número de bolas y con condiciones iniciales que implican generalmente el uso de soluciones elementales ya en senos ya en cosenos.

(1) Esta condición es evidentemente necesaria; y esto es suficiente para justificar el cálculo que sigue. Para que ella sea también suficiente para la separación de las bolas, es necesario además que en el instante considerado las dos bolas no tengan la misma velocidad; se verifica fácilmente que esta condición se realiza en efecto. Hemos recordado que los cálculos de Saint-Venant llevan al resultado que en determinados instantes ella no sea realizada.

En lugar de seguir con el problema general, que evidentemente no podrá llegar hasta los cálculos efectivos de las aludidas raíces y deberá enfrentarse preferentemente en el sentido cualitativo y asintótico, vamos a aplicar en los párrafos siguientes los anteriores resultados a los casos de $n = 3$ y $n = 4$. Mientras tanto vamos a deducir como resultado general que *es absurdo suponer que la separación de dos bolas consecutivas, cuando $n > 2$, pueda corresponder a velocidades nulas para todas las bolas menos la última.* (Notamos, sin embargo, que tal proposición, sin evaluaciones numéricas, no tiene significado físico, porque deben considerarse como experimentalmente nulas velocidades que tan sólo fuesen inferiores a cierto límite, por ej. $\frac{1}{10}$ o $\frac{1}{100}$ de la velocidad de choque). Si, en efecto, para cierto valor de t se realizaran las ecuaciones

$$\dot{x}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad [20]$$

los valores de los $\cos t$ tendrían que ser proporcionales a los menores complementarios de la última línea del determinante de los coeficientes de las combinaciones lineales [19]; esto significa que para determinar t tendríamos $n-1$ ecuaciones simultáneas que nada deja pensar deban tener una solución común. Pero he aquí un análisis más detenido que lo excluye en absoluto. Ya hemos visto que es ortogonal el determinante que tiene por elementos los [18]; de este determinante se obtiene el determinante de los coeficientes de las [19] multiplicando cada columna (la columna correspondiente al índice superior j) por $\Delta_{n-i}^{(j)} : \sqrt{\sum \Delta_{n-h}^{(j)^2}}$. Se sigue que el complementario del elemento $(-1)^{i-1} \Delta_{n-1}^{(j)} \Delta_{n-i}^{(j)} : \sum \Delta_{n-h}^{(j)^2}$ es precisamente

$$(-1)^{i-1} \frac{\Delta_{n-i}^{(j)} \prod_s \Delta_{n-1}^{(s)}}{\prod_s \sqrt{\sum_h \Delta_{n-h}^{(s)^2}}} \quad (r \neq j, s = 0, 1, \dots, n-1)$$

Resulta así que para realizarse [20] debe ser

$$\cos \omega_j t = \frac{\Delta_0^{(j)}}{\Delta_{n-1}^{(j)}} : \frac{\Delta_0^{(0)}}{\Delta_{n-1}^{(0)}} = \frac{\Delta_{n-1}^{(0)}}{\Delta_{n-1}^{(j)}}$$

Sustituyendo para $\cos$ el $\omega_j t$ la expresión euleriana y resolviendo se obtiene

$$(e^{it})^{\omega_j} = \text{número algebraico}$$

y comparando estas expresiones para dos índices j, l ,

$$(e^{it})^{\omega_l} = (e^{it})^{\omega_j} \cdot \frac{\omega_l}{\omega_j} = (\text{número algebraico})^{\omega_l : \omega_j} = \text{número algebraico}$$

Un teorema de Gelfond dice que esta igualdad es absurda, porque nunca un número algebraico elevado a potencia algebraica (que no sean uno u otro racionales) puede ser un número algebraico.

Una vez establecida esta imposibilidad, los principios conservativos llevan fácilmente a la conclusión que el movimiento final consiguiente con el análisis anterior es compatible sólo con el caso de que la primera bola vuelve atrás; en efecto, llamando siempre $\dot{x}_i$ a las velocidades finales, de las ecuaciones

$$\sum \dot{x}_i = v \quad ; \quad \sum \dot{x}_i^2 = v^2$$

se deduce

$$\sum \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 ,$$

la cual no puede realizarse sino por ser nulas todas las $\dot{x}_i$ salvo una o bien algunas de ellas negativas. Necesariamente, en este caso la máxima velocidad retrógrada debe pertenecer a la primera bola.

6 — Vamos a tratar ahora en detalle los casos de $n = 3$ y $n = 4$.
 $n = 3$. — Se tiene

$$D'_3 = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 = (\omega^2 - 1)(\omega^2 - 3)$$

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1^2 = 1 \quad \omega_2^2 = 3$$

$$\Delta_2 = \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \quad , \quad \Delta_1 = (\omega^2 + 1) \quad , \quad \Delta_0 = 1$$

$$\Delta_2^{(1)} = -1 \quad , \quad \Delta_2^{(2)} = 1 \quad , \quad \Delta_1^{(1)} = 0 \quad , \quad \Delta_1^{(2)} = 2 \quad , \quad \Delta_2^0 = 1 \quad \Delta_1^0 = -1$$

Las fórmulas [22] proporcionan luego

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \left(\frac{\cos t}{2} + \frac{\cos \sqrt{3} t}{6} + \frac{1}{3} \right) \\ \dot{x}_2 &= -v \left(\frac{\cos \sqrt{3} t}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ \dot{x}_3 &= v \left(-\frac{\cos t}{2} + \frac{\cos \sqrt{3} t}{6} + \frac{1}{3} \right) , \end{aligned} \quad [21]$$

de donde las aceleraciones serán

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{v}{2} \left(\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \right) \\ \ddot{x}_2 &= v \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \\ \ddot{x}_3 &= \frac{v}{2} \left(\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \right) = -(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2).\end{aligned}\quad [22]$$

Nos preguntamos entre $\ddot{x}_1$ y $\ddot{x}_3$ cuál llega antes al valor 0; se ve en seguida que en el primero y segundo cuadrante $\sqrt{3} \operatorname{sen} t > \operatorname{sen} \sqrt{3} t$; se sigue que ciertamente se anula primero $\ddot{x}_1$ para t en el segundo cuadrante y $\sqrt{3} t$ en el tercero o cuarto. Por un procedimiento cualquiera de aproximaciones numéricas se obtiene luego que será $\ddot{x}_1 = 0$ para

$$t = 2,5548 = 146^\circ 22' 46'' \quad (\ddot{x}_1 = 0,000005 v) \quad [23]$$

al cual corresponde

$$\dot{x}_1 = -0,13026 v.$$

Por tanto a este momento la primer bola se separa volviendo atrás, mientras las otras siguen avanzando conjuntamente apretadas una contra otra con la aceleración

$$-\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = 0,554 v$$

y con las velocidades respectivas

$$\dot{x}_2 = 0,428 v, \quad \dot{x}_3 = 0,702 v$$

Por efecto de esta diferencia de velocidad y de la aludida presión la segunda bola sigue, después de la separación de la primera, a retardar, y la tercera a crecer su velocidad. Las velocidades finales se obtienen sin mayores cálculos de los principios conservativos, debiendo realizar las condiciones

$$\dot{x}_2^* + \dot{x}_3^* = 1,13 v \quad x_1^{*2} + x_2^{*2} = 0,9831 v^2;$$

luego

$$\dot{x}_2^* = 0,15 v, \quad \dot{x}_3^* = 0,98 v$$

Puede notarse que es bien cierto que la tercera bola, según este cálculo, sale con una velocidad sensiblemente igual a la velocidad de choque, pero las dos primeras adquieren velocidades opuestas entre sí, dando lugar a una velocidad relativa no despreciable.

Para lo sucesivo es interesante notar que en el momento de separación de la primer bola, la tercera ya tiene velocidad sensiblemente mayor que la segunda, lo que indica que ha sido superado el momento de máxima compresión; éste se verifica para $t = 2,3$, con la aceleración, para la tercer bola, $\ddot{x}_3 = 0,586 v$.

7. — $n = 4$. Se tiene

$$\begin{aligned} D_4' &= (\omega^2 - 2) (D_3' - 1) = (\omega^2 - 2) (\omega^4 - 4\omega^2 + 2) \\ \omega_0 &= 0, \quad \omega_1^2 = 2 - \sqrt{2}, \quad \omega_2^2 = 2, \quad \omega_3^2 = 2 + \sqrt{2} \\ \Delta_3 &= \omega^6 - 5\omega^4 + 6\omega^2 - 1, \quad \Delta_2 = \omega^4 - 3\omega^2 + 1, \quad \Delta_1 = \omega^2 - 1, \quad \Delta_0 = 1 \\ \Delta_3^{(0)} &= -1 \quad \Delta_2^{(0)} = 1 \quad \Delta_1^{(0)} = -1 \\ \Delta_3^{(1)} &= 1 \quad \Delta_2^{(1)} = \Delta_1^{(1)} = 1 - \sqrt{2} \\ \Delta_3^{(2)} &= \Delta_2^{(2)} = -1 \quad \Delta_1^{(2)} = 1 \\ \Delta_3^{(3)} &= 1 \quad \Delta_2^{(3)} = \Delta_1^{(3)} = 1 + \sqrt{2} \\ \Sigma \Delta_{n-h}^{(0)2} &= \Sigma \Delta_{n-h}^{(2)2} = 4, \quad \Sigma \Delta_{n-h}^{(1)} = 4(2 - \sqrt{2}), \quad \Sigma \Delta_{n-h}^{(3)} = 4(2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Aplicando las [22] se obtiene luego

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{v}{4} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} t + \cos \sqrt{2} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} t + 1 \right) \\ \dot{x}_2 &= \frac{v}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} t - \cos \sqrt{2} t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} t + 1 \right) \\ \dot{x}_3 &= \frac{v}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} t - \cos \sqrt{2} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} t + 1 \right) \\ \dot{x}_4 &= \frac{v}{4} \left(-\frac{1}{2 - \sqrt{2}} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} t + \cos \sqrt{2} t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} t + 1 \right) \end{aligned} \quad [24]$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{v}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \sqrt{2-\sqrt{2}} t + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2} t + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \sqrt{2+\sqrt{2}} t \right) \\
 \ddot{x}_2 &= -\frac{v}{4} \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2-\sqrt{2}} t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2} t - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2+\sqrt{2}} t \right) \\
 \ddot{x}_3 &= \frac{v}{4} \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2-\sqrt{2}} t + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2} t - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2+\sqrt{2}} t \right) \\
 \ddot{x}_4 &= \frac{v}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \sqrt{2-\sqrt{2}} t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2} t + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \sqrt{2+\sqrt{2}} t \right) \\
 \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= -\frac{v}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \sqrt{2-\sqrt{2}} t - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \sqrt{2+\sqrt{2}} t \right) \\
 \ddot{x}_4 + \ddot{x}_3 &= -\frac{v}{2} \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2} t
 \end{aligned} \tag{25}$$

Se reconoce inmediatamente en estas expresiones que $\ddot{x}_4 < -\ddot{x}_1$ hasta que $\sqrt{2} t$ no haya pasado en el tercer cuadrante; además $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$ se mantiene constantemente < 0 mientras $\sqrt{2 + \sqrt{2}} t$ no haya recorrido todo el giro y más. Por otra parte, al llegar $\sqrt{2} t$ en proximidad de $\frac{3\pi}{2}$ en la expresión $\ddot{x}_1$ domina ciertamente el signo del término $\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2} t$; se sigue que de las expresiones $\ddot{x}_1, \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2, \ddot{x}_4 = -(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3)$ la primera en tomar el valor 0 será $\ddot{x}_1$, y esto va a ocurrir para un valor de t comprendido entre $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ y $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$.

Aplicando un método cualquiera de cálculo numérico (por ej. el dicotómico) se determina esta raíz y se encuentra el valor aproximado

$$t = 2,569$$

al cual corresponden

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} t = 1,96491 = 112^\circ 34' 52''$$

$$\sqrt{2} t = 3,633114 = 208^\circ 9' 44''$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} t = 4,741422 = 271^\circ 39' 48'',5$$

y consiguientemente

$$\ddot{x}_1 = 0,00046 v, \quad \ddot{x}_2 = -0,61784 v, \quad \ddot{x}_3 = 0,28310 v, \quad \ddot{x}_4 = 0,33327 v \quad [26]$$

$$x_1 = -0,132 v, \quad \dot{x}_2 = 0,397 v, \quad \dot{x}_3 = 0,543 v, \quad \dot{x}_4 = 0,192 v \quad [27]$$

Considerando buena la aproximación en la tercera cifra decimal, inferimos que al tiempo $t = 2,569$ la primer bola se separa con velocidad retrógrada $0,132 v$; valores éstos casi idénticos a los obtenidos para el caso $n = 3$.

Las otras bolas siguen avanzando conjuntamente, y, como ya se notó, debe ahora estudiarse su movimiento, como problema de 3 bolas en el cual las condiciones iniciales están dadas por los valores [26] y [27] de las velocidades y de las aceleraciones. Debe notarse que, por ser estas condiciones iniciales distintas de 0, las fórmulas que expresan el movimiento dependerán ahora tanto de los senos como de los cosenos; todavía no existirá término en t , como indicaría posible la raíz doble $\omega_0 = 0$ de la ecuación anterior característica, por realizarse la condición $\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4 = 0$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & 0,1028 \cos t - 0,08297 \cos \sqrt{3} t - 0,4757 \operatorname{sen} t - \\ & - \frac{0,142}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \sqrt{3} t + 0,3775 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = 0,16594 \cos \sqrt{3} t + \frac{0,284}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \sqrt{3} t + 0,3775$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -0,1028 \cos t - 0,08297 \cos \sqrt{3} t + 0,4757 \operatorname{sen} t - \\ & - \frac{0,142}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \sqrt{3} t + 0,3775 \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_2 = -0,1028 \operatorname{sen} t + 0,08297 \sqrt{3} \operatorname{sen} \sqrt{3} t - 0,4757 \cos t - 0,142 \cos \sqrt{3} t$$

$$\ddot{x}_3 = -0,16594 \sqrt{3} \operatorname{sen} \sqrt{3} t + 0,284 \cos \sqrt{3} t$$

$$\ddot{x}_4 = 0,1028 \operatorname{sen} t + 0,08297 \sqrt{3} \operatorname{sen} \sqrt{3} t + 0,4757 \cos t - 0,142 \cos \sqrt{3} t$$

Nuevamente se ve que al variar t , alcanzará primero el valor 0 la $\ddot{x}_2$ y esto aproximadamente por

$$t = 1,35554 = 77^\circ 40'$$

al cual corresponde

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -0,001 v, & \ddot{x}_3 &= -\ddot{x}_4 = -0,40405 v \\ \dot{x}_2 &= -0,06554 v, & \dot{x}_3 &= 0,378 v, & \dot{x}_4 &= 0,820 v \end{aligned} \quad [28]$$

Se separa luego la segunda esfera con velocidad retrógrada, mientras las dos últimas avanzan todavía conjuntas por breve rato. Para obtener el movimiento definitivo no es más necesario resolver directamente un problema de movimiento de dos bolas, bastando tener en cuenta los principios conservativos, por los cuales, llamando v_1, v_2, v_3, v_4 las velocidades finales, y teniendo en cuenta que

$$v_1 = -0,132 v, \quad v_2 = -0,0655 v,$$

debe ser

$$v_3 + v_4 = 1,198 v, \quad v_3^2 + v_4^2 = 0,978 v^2.$$

Resulta

$$v_3 = 0,238 v, \quad v_4 = 0,960 v. \quad [29]$$

Todavía se realiza que la última bola sale definitivamente con una velocidad sensiblemente igual a la velocidad de choque; pero las demás quedan en movimiento, con velocidades pequeñas, pero no del todo inapreciables.

8 — Del precedente estudio numérico ya pueden inducirse algunas conclusiones:

El hecho que la última bola parece recoger la velocidad total se encuentra plenamente confirmado; por otra parte es evidente que esto no contradice al hecho de una velocidad sensible para las demás, por cuanto estas velocidades son en parte de signo opuesto y sus cuadrados muy pequeños.

El tiempo necesario para la propagación del movimiento de la primera a la última bola es del mismo orden del tiempo necesario para que la primera bola se separe del grupo, apenas el número de las bolas va creciendo; en efecto ya en el caso de 4 bolas, la primer bola se separa con movimiento retrógrado cuando la última no ha todavía alcanzado una velocidad $1/5$ de la velocidad total.

Para tener una idea del valor de estos tiempos calculado en segundos, es necesario puntualizar la elección de la unidad de tiempo según hemos aludido al principio del n. 3; si el tiempo medido en segundos lo indicamos con T , se realizan las condiciones del n. 3 poniendo

$$t : T = k \sqrt{E : \rho} \quad [30]$$

donde k es un coeficiente geométrico, dependiente sólo de la forma y dimensiones de los cuerpos que se chocan; E es el módulo de elasticidad y, por lo tanto, en los casos prácticos del orden de 10^{12} (calculando, como es necesario, en el sistema c. g. s.) y ρ es la densidad del cuerpo. En el caso del choque de esferas de radio R , puede ponerse

$$k = \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{1}{2 \pi^2}} R^{-\frac{4}{5}} \quad (1). \quad [31]$$

Se sigue que, para valores de R del orden del centímetro, el orden de magnitud de la unidad de tiempo t puede considerarse entre 10^{-5} y 10^{-6} .

9 — Si, en lugar de la simple hipótesis de proporcionalidad entre deformación y fuerza, admitimos la ley de HERTZ, el sistema de

(1) He aquí las indicaciones necesarias para el cálculo de este coeficiente: aceptamos como coeficiente de proporcionalidad entre fuerza y deformación el mismo indicado con k_2 por HERTZ, *l. c.*

$$k_2 = \frac{8}{3 \wp} \sqrt{\frac{R}{2}} = \lambda \sqrt{\frac{R}{2}}$$

donde $\wp$ es un símbolo introducido por HERTZ, y equivalente en los símbolos corrientes a $\frac{2\mu + \lambda}{\mu(\lambda + \mu)}$, λ es la constante de LAMÉ; finalmente el último miembro es una evaluación aproximada correspondiente a tomar, como puede hacerse medianamente en los casos comunes, $\mu = \frac{1}{2} \lambda$. Indicando con m la masa de la es-

fera $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, la ecuación del movimiento tiene entonces la forma

$m \ddot{x} = k_2 \alpha$, donde α representa la deformación. Deberá ponerse $t : T = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$;

poniendo, como normalmente, $\lambda = \frac{3}{4} E$, se obtiene para k el valor del texto.

las ecuaciones [6], [7], [8] se modifica en el modo siguiente: pongamos en forma general

$$X_i = x_i - x_{i+1} + 2r ;$$

deberá ser

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x}_1 &= -X_1^{3/2} \\ \mu \ddot{x}_2 &= X_1^{3/2} - X_2^{3/2} \\ &\dots\dots\dots \\ \mu \ddot{x}_{n-1} &= X_{n-2}^{3/2} - X_{n-1}^{3/2} \\ \mu \ddot{x}_n &= X_{n-1}^{3/2} \end{aligned} \quad [32]$$

donde μ es un coeficiente que depende, como hemos visto, de las condiciones físicas y geométricas de los cuerpos y de las unidades de medida. Notando que

$$\ddot{x}_i - \ddot{x}_{i+1} = \ddot{X}_i,$$

se puede inmediatamente reducir en 1 el número de las funciones incógnitas, tomando por tales las X_i ; resulta en efecto

$$\begin{aligned} \mu \ddot{X}_1 &= -2X_1^{3/2} + X_2^{3/2} \\ \mu \ddot{X}_2 &= X_1^{3/2} - 2X_2^{3/2} + X_3^{3/2} \\ &\dots\dots\dots \\ \mu \ddot{X}_{n-1} &= X_{n-2}^{3/2} - 2X_{n-1}^{3/2}, \end{aligned} \quad [33]$$

sistema éste que no difiere de [8] sino por la introducción de los exponentes $3/2$. En el caso de $n = 2$, se reduce a la sola ecuación

$$\mu X_1'' = -2X_1^{3/2}$$

que es la misma considerada por HERTZ y se integra por separación de variables. En el caso de $n \geq 3$ puede intentarse la resolución por aproximaciones sucesivas según el método de PICARD y convendrá utilizar, como primera aproximación, la solución del sistema lineal [8].

Para la aplicación del método de PICARD deben realizarse acotaciones conocidas que, en la forma más simple, pueden expresarse en esto, que llamando b el intervalo de variabilidad en que conviene considerar las funciones incógnitas (x_i para el sistema [32]

o X_i para el sistema [33]), y llamando M el máximo valor absoluto de los segundos miembros al variar las funciones incógnitas dentro de dicho intervalo, la razón $b : M$ no sea inferior al intervalo de variabilidad en el cual es necesario considerar la variable principal. En el problema actual, va a servirnos para realizar tales condiciones el hecho de que la variable principal es el tiempo mientras las funciones incógnitas dependen de la unidad de longitud y podemos luego cambiar independientemente los valores numéricos de los intervalos con cambiar las unidades de medida.

Notemos por eso que los resultados de los nos. 6, 7 nos han mostrado que la primera aproximación del caso lineal contiene en su solución el factor v , el cual, en caso de elegir la unidad de tiempo como en el n. 8, resulta, en las condiciones experimentales ordinarias, un número grande; este v aparecerá en la razón $b:M$ como factor $v^{-\frac{1}{2}}$ (nótese que evidentemente no constituye excepción a la factorización de v la presencia del término $2r$, porque siendo r y v dos constantes, podrá siempre escribirse $r = v \frac{r}{v}$) y por esto habría que temer que se reduzca en modo no utilizable el intervalo de confianza de la aplicación del método de PICARD.

Para eliminar esta dificultad y determinar al mismo tiempo una primera aproximación de la solución, pensamos efectuado un cambio de la unidad de tiempo tal que el nuevo tiempo t^* se exprese por el antiguo por

$$t^* = t \, v^{\frac{1}{5}} \quad [34]$$

donde v es una constante que queda por determinar; llamando x_i^* y y_i^* las derivadas de x_i respecto de t^* , es

$$\dot{x}_i^* = \dot{x}_i \, v^{-1} \, v^{-\frac{1}{5}}, \quad \ddot{x}_i^* = \ddot{x}_i \, v^{-2} \, v^{-\frac{2}{5}}.$$

Llamemos X_i^* la expresión que resulta para X_i cuando las x_i son las soluciones del sistema [8] donde la variable tiempo es t^* ; es

$$X_i^* = \Xi_i \, v^* = \Xi_i \, v^{\frac{4}{5}} \, v^{-1}$$

donde Ξ_i es la función numérica, combinación lineal de los sen $\omega_i t^*$,

que resulta de los cálculos de los párrafos 5, 6, 7. Multipliquemos entonces las ecuaciones [32] por el factor $\mu^{-1} \nu^{-2} \nu^{-\frac{2}{5}}$; los primeros miembros se cambian respectivamente en $\ddot{x}_i^*$ y si, después de tal multiplicación, se ponen por las X_i las X_i^* , los segundos miembros se cambian en expresiones de la forma

$$- \left(\Xi_1^{\frac{1}{5}} \mu^{-1} \nu^{-\frac{2}{5}} \right) \Xi_1 v^* , \left(\Xi_1^{\frac{1}{5}} \mu^{-1} \nu^{-\frac{2}{5}} \right) \Xi_1 v^* - \left(\Xi_2^{\frac{1}{5}} \mu^{-1} \nu^{-\frac{2}{5}} \right) \Xi_2 v_1^* \dots \quad [35]$$

Hemos conservado indeterminado el número ν ; supongamos ahora darle un valor medio entre los números

$$\Xi_1^{\frac{1}{5}} \mu^{-\frac{3}{5}} , \quad \Xi_2^{\frac{1}{5}} \mu^{\frac{2}{5}} , \quad \dots ;$$

estos números son bastante próximos entre sí, porque de las expresiones obtenidas en los casos $n = 3$, $n = 4$ se reconoce que están todos comprendidos entre 0 y pocas unidades, y la elevación a la potencia $\frac{1}{5}$ los aproxima ulteriormente. En estas condiciones los factores en paréntesis en las expresiones [35] son todos próximos a 1 y se concluye que los valores de las x_i^* que sirvieron para formar las X_i^* constituyen una solución aproximada del sistema [32]. En el mismo tiempo se ve, en las expresiones [35], que el número M es el producto de una constante de valor no superior a pocas unidades por v^* ; esto es resulta del mismo orden de magnitud numérica que b .

La sustitución [34] afecta únicamente el tiempo por un factor de proporcionalidad $\nu v^{\frac{1}{5}}$; evidentemente, para todas las deducciones que sean independientes, tal como las referentes a razones entre velocidades o generalmente a magnitudes físicas de dimensión 0 respecto del tiempo, se puede prescindir de ella y por lo tanto también de una precisa determinación del factor numérico ν .

La aplicación del procedimiento de sucesivas aproximaciones se reduce a considerar, respectivamente para los dos sistemas [32] y [33], los sistemas que se obtienen de ellos poniendo $\mu = 1$; luego poner en los segundos miembros, en lugar de las X_i , los valores Ξ_i que se obtienen dando a las x_i los valores que resultan, para $v = 1$, de los cálculos de los nos. 5, 6, 7. Después de esto se calcu-

larán las segundas aproximaciones de los x_i , X_i cuyas derivadas forman los primeros miembros por integración; sustituyendo nuevamente en los segundos miembros se calcularán las terceras aproximaciones y así siguiendo. Las aceleraciones y velocidades de los cuerpos (bolas) se obtendrán multiplicando por $v^* = v_5^4$ y los números obtenidos.

10 — Apliquemos estas conclusiones a calcular en segunda aproximación, en el caso de $n = 3$, la velocidad de la primera bola en el momento en que se separa de las demás; la primera ecuación del sistema [32] resulta, en este caso,

$$\ddot{x}_1 = - \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \left(\sin t + \frac{\sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \right)^{3/2}.$$

El valor de t para el cual esta aceleración x_1 es nula, es decir el instante en que la bola se separa de las demás, queda (formalmente), en esta segunda aproximación, el mismo que para la primera

$$t = 2,55 = 146^\circ 22';$$

para calcular la correspondiente velocidad, teniendo en cuenta que para $t = 0$ debe ser $\dot{x}_1 = 1$ habrá que calcular la integral

$$- \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \int_0^{2,55} \left(\sin t + \frac{\sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \right)^{3/2} dt + 1;$$

la integral no puede expresarse por funciones elementales; se calcula numéricamente su valor y se obtiene

$$- 0,97 + 1 = 0,03.$$

Se concluye por una velocidad positiva, pero presumiblemente inferior a lo observable; además debe considerarsela afectada por un error propio del método de aproximaciones sucesivas. La experiencia de MARIOTTE resulta, pues, confirmada teóricamente para $n = 3$, osaríamos decir más exactamente de lo esperable.

Merece notar todavía que la fórmula [34] indica que, si del tiempo ficticio t^* se vuelve al tiempo ordinario, todos los valores quedaran afectados por el factor $v^{-\frac{1}{5}}$; *las duraciones de todas las fases del fenómeno disminuyen con crecer la velocidad de choque en razón de la raíz quinta de la velocidad*. Es la misma conclusión a la cual llega HERTZ en el caso de dos cuerpos solamente, en el cual la integración se hace exactamente.

11 — Terminamos aquí nuestro estudio actual, por ser la Nota bastante larga y las conclusiones que se pueden sacar por inducción posiblemente bastante claras. Notamos que podría merecer completarlo, para puntualizar varios detalles; en el n. 7 hemos obtenido como instante de separación de la primer bola, en el caso de 4 bolas, uno muy próximo al que corresponde a 3; las propiedades de la ecuación característica que en el n. 5 hemos simplemente enunciado, dejando la demostración al lector, dejan prever que no es cosa accidental y que por lo contrario debe generalizarse a n cualquiera. Puede ser interesante también pasar a una tercera aproximación para confirmar la validez de la segunda (*).

Al estado actual de nuestros cálculos puede afirmarse lo siguiente:

1° La explicación de la experiencia de MARIOTTE no puede obtenerse por razones de mecánica elemental, sino que depende necesariamente de un análisis fundado sobre la teoría de la elasticidad.

2° Esta explicación resulta satisfactoria por la admisión de la ley de HERTZ sobre la relación entre presión y deformación; pero ella depende esencialmente de la forma de los cuerpos o por lo menos de sus superficies en proximidad del punto de contacto. Si, en lugar de esferas, se pusieran en el aparato de MARIOTTE trozos de cilindros o prismas, hay que esperar que la experiencia no se desenvolvería de la misma manera.

3° No se puede excluir que la propagación de ondas en los cuerpos que se chocan tenga una parte en el fenómeno; pero no en el sentido de POISSON y de SAINT VENANT. El tiempo de duración

(*) Finalmente los métodos de cálculo expuestos podrían generalizarse para estudiar teóricamente las experiencias de choque menos simples a las que aludimos en el n.º 2.

de la compresión entre dos esferas es del mismo orden del tiempo necesario a la onda de choque para atravesar las mismas esferas o un número reducido de las próximas; esto no contradice en nada a la observación de HERTZ que este tiempo sea muy grande en comparación de aquel necesario para que la onda se haya alejado de la región donde ocurre la compresión, porque esta región es enormemente reducida en comparación con las dimensiones de los cuerpos. El efecto eventual de la onda puede imaginarse en que, en el mismo tiempo que en proximidad del punto de contacto, se producen las fuerzas de compresión y distensión, la onda, llegando a la superficie de bolas próximas, induce una fuerza de masa por la cual éstas se comportan como si fuesen más livianas; es evidente que este efecto tendría como consecuencia de aproximar a la verdad la explicación clásica que reduce el estudio al caso de dos bolas, pero por un camino totalmente distinto.

B. LEVI.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

Nº 15. — Sean n números reales positivos ordenados en orden creciente

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n.$$

Llamemos

$$p_i = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Demostrar que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} = 0.$$

1ª SOLUCIÓN. — Procederemos por inducción. Para $n = 2$ es $p_1 = x_1 - x_2$, $p_2 = x_2 - x_1$ y evidentemente se verifica el teorema. Suponiendo que la relación es cierta para $n - 1$ números x_i , vamos a demostrar que también lo es para n .

Llamando p_i' al producto análogo al p_i pero sin la x_n , es decir $p_i' = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{n-1})$; es

$$\sum_1^n \frac{1}{p_i} = \sum_1^{n-1} \frac{1}{p_i' (x_i - x_n)} + \frac{1}{p_n}. \quad [1]$$

Pero por hipótesis $\sum_1^{n-1} \frac{1}{p_i'} = 0$ y por tanto $\frac{1}{p_{n-1}'} = -\sum_1^{n-2} \frac{1}{p_i'}$.

Sustituyendo en [1] será

$$\begin{aligned} \sum_1^n \frac{1}{p_i} &= \sum_1^{n-2} \frac{1}{p_i'} \left(\frac{1}{x_i - x_n} - \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \right) + \frac{1}{p_n} = \\ &= \frac{1}{p_n} + \frac{1}{(x_{n-1} - x_n)} \sum_1^{n-2} \frac{x_{n-1} - x_i}{p_i' (x_i - x_n)}. \end{aligned} \quad [2]$$

Llamando p_i'' al producto análogo al p_i pero formado con los números $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n$, es

$$\frac{x_{n-1} - x_i}{p_i' (x_i - x_n)} = - \frac{1}{p_i''} \quad [3]$$

y como suponemos el teorema cierto para $n-1$ números, es $\sum \frac{1}{p_i''} = 0$ extendida la sumación a $i = 1, 2, 3, \dots, n-2, n$. Por tanto

$$\sum_1^{n-2} \frac{1}{p_i''} = - \frac{1}{p_n''}.$$

Con esto de [3] y [2] se deduce

$$\sum_1^n \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n'' (x_{n-1} - x_n)} = 0$$

puesto que $p_n = p_n'' (x_n - x_{n-1})$. Queda, pues, demostrado el enunciado.

Generalización. — Vamos a demostrar que, más generalmente, se realiza

$$S_{m,n} = \sum_1^n \frac{x_i^m}{p_i} = 0 \quad , \quad \text{para } m \leq n-2. \quad [4]$$

Procederemos también por recurrencia. Como hemos demostrado que $S_{0,n} = 0$ para cualquier n mayor que dos, supongamos también que $S_{n-1,n} = 0$ y vamos a demostrar que $S_{m,n} = 0$. Es

$$S_{m,n} - x_n S_{m-1,n} = \sum_1^{n-1} \frac{x_i^{m-1} (x_i - x_n)}{p_i' (x_i - x_n)} = S_{m-1,n-1}.$$

Por consiguiente

$$S_{m,n} = S_{m-1,n-1} = S_{m-2,n-2} = \dots = S_{0,n-m} = 0.$$

Esto supone que $S_{0,n-m}$ es de la forma general, es decir, que por lo menos $n-m = 2$ para poder formar suma; por tanto la única condición es que $m \leq n-2$.

Con esto queda demostrada la fórmula general [4] para cualquier $n \geq 2$ y cualquier $m \leq n - 2$.

2ª SOLUCIÓN.— Una demostración rápida de la identidad propuesta y de otras generalizaciones se obtiene recordando la fórmula de interpolación de LAGRANGE. Poniendo

$$P_i = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

y siendo $f(x)$ una función racional entera de grado $m < n$, se observa que la ecuación

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) P_i}{p_i} - f(x) = 0 \quad [5]$$

que es de grado $n - 1$ (grado de las P_i), tiene las raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$. Por tanto, teniendo un número de raíces superior a su grado, debe ser una identidad, es decir, ordenando respecto las potencias de x , los coeficientes que se obtengan deben ser idénticamente nulos. Dando a $f(x)$ formas particulares se obtienen de esta manera muchas identidades del mismo tipo que la propuesta. Veamos algunos ejemplos.

Si $f(x) = 1$, el coeficiente de x^{n-1} en [5] nos da precisamente la identidad del problema propuesto. Los demás coeficientes, igualados a cero, dan identidades del tipo

$$\sum_i \frac{\Sigma_i x_j}{p_i} = 0, \quad \sum_i \frac{\Sigma_i x_j x_k}{p_i} = 0, \dots$$

donde en las sumas de los numeradores está excluido el valor x_i .

Poniendo $f(x) = x^m$ ($m \leq n - 2$), escribiendo que es nulo el coeficiente de x^{n-1} en [5] obtenemos la identidad [4].

En general, si $f(x)$ es de grado m ($m < n$) se obtienen relaciones del tipo

$$\sum_i \frac{f(x_i) S_{ik}}{p_i} = 0$$

donde S_{ik} indica la suma de los productos k a k de las x_j ($j \neq i$) para $k < n - m$.

Nº 42. — Demostrar que para un círculo de radio R el límite de la razón entre el cuadrado del área de un segmento y el cubo de la flecha correspondiente, cuando ésta tiende a cero, es $\frac{32}{9} R$. Generalizar este resultado al caso de una curva plana cualquiera.

1ª SOLUCIÓN. — El área de un segmento de círculo está dada por la fórmula $\frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$, siendo α el ángulo en el centro medido en radianes. El valor de la flecha h es $h = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$. Tendremos que hallar el límite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)\right]^2}{\left[R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)\right]^3}.$$

Desarrollando en serie $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ y sustituyendo en la expresión anterior, dividiendo luego numerador y denominador por α^6 se obtiene inmediatamente el límite enunciado.

Pasemos a demostrar lo mismo para una curva cualquiera. Notemos que, para la existencia de un segmento para el cual pueda hablarse del límite considerado en el enunciado, es necesario estar en el entorno de un punto que no sea de inflexión. Supondremos luego considerar la curva en proximidad del origen de las coordenadas y que sea tangente en el origen al eje x , siendo representada por una ecuación

$$y = ax^2 + \varepsilon x^2 \quad (a \neq 0) \quad [1]$$

donde ε representa una función de x tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$. A cada y_0 fijado arbitrariamente corresponde sea del lado de las x positivas, sea del lado de las negativas, un x_0 mínimo tal que $y_0 = y(x_0)$. Indiquemos con A_1 y A_2 las áreas comprendidas entre el eje y , la cuerda $y = y_0$ y las ramas positiva y negativa de la curva hasta este más próximo valor de x . Para fijar las ideas supondremos considerar la rama positiva ($x_0 > 0$); será

$$A_1 = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} (ax^2 + \varepsilon x^2) dx = x_0 y_0 - \frac{1}{3} a x_0^3 - \int_0^{x_0} \varepsilon x^2 dx. \quad [2]$$

Por ser $\lim_{y_0 \rightarrow 0} x_0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$, asignado arbitrariamente un $\alpha > 0$, puede elegirse y_0 bastante pequeño para que sea $|\varepsilon| < \alpha$ en todo el intervalo $0 - x_0$; se sigue entonces por [2]

$$x_0 y_0 - \frac{1}{3} a x_0^3 - \frac{1}{3} \alpha x_0^3 < A_1 < x_0 y_0 - \frac{1}{3} a x_0^3 + \frac{1}{3} \alpha x_0^3$$

y, por [1]

$$\left(\frac{2}{3} a + \varepsilon(x_0) - \frac{1}{3} \alpha \right) x_0^3 < A_1 < \left(\frac{2}{3} a + \varepsilon(x_0) + \frac{1}{3} \alpha \right) x_0^3$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{A_1}{x_0^3} = \frac{2}{3} a.$$

Análogamente, por [1]

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{y_0^{3/2}}{x_0^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a + \varepsilon(x_0) \right)^{3/2} = a^{3/2};$$

luego

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{A_1}{y_0^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_1}{x_0^3} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_0^{3/2}}{x_0^3} = \frac{2}{3 \sqrt{a}}.$$

Análogamente, considerando el área A_2 limitada por la curva, el eje y y la parte negativa de la recta $y = y_0$, resulta también

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{A_2}{y_0^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{3} a}.$$

Por consiguiente, llamando A al área total $A_1 + A_2$ limitada por la curva y una recta paralela a la tangente a distancia y_0 , será

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{A}{y_0^{3/2}} = \frac{4}{3 \sqrt{a}}. \quad [4]$$

Siendo el radio de curvatura $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ y siendo en nuestro caso $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2a$, resulta $R = \frac{1}{2a}$. Despejando de

aquí el valor de a y sustituyendo en [4], podremos escribir, después de elevar al cuadrado ambos miembros

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{A^2}{y_0^3} = \frac{32}{9} R$$

lo cual prueba el enunciado.

El cálculo puede repetirse también en el caso que, en lugar de [1], se tuviera

$$y = (a + \epsilon) x^{2p} \quad (a \neq 0, \quad p > 1);$$

pero se obtendría

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{A_1}{x_0^{2p+1}} = \frac{2p}{2p+1} a, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{y_0^{3/2}}{x_0^{2p+1}} = \lim_{x_0 \rightarrow 0} a^{3/2} x_0^{p-1} = 0;$$

luego

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{A_1}{y_0^{3/2}} = \infty$$

conforme al hecho que en este caso también $R = \infty$.

Esta solución es debida al Sr. GUIDO O. G. LISERRE, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

La segunda solución que sigue, sin diferir esencialmente de la anterior, tiene por característica el hecho de razonar con coordenadas generales. Puede notarse que la forma adoptada para la fórmula de Taylor obliga a suponer la continuidad de la derivada segunda, lo cual no es necesario en la demostración precedente. A este respecto véanse las observaciones sobre la definición de radio de curvatura en la nota « *Definición y condiciones de existencia de la tangente y el círculo osculador en un punto de una curva* ». (B. LEVI, *Mathematicae Notae*, Año II, pág. 11).

2ª SOLUCIÓN. — Dada la curva Γ y un punto genérico de la misma A , tomémoslo como origen de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales disponiendo los ejes de manera que, siendo $y = f(x)$ la ecuación de Γ , las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ que suponemos existir en un entorno α de A , con $f''(x)$ continua en A , sean positivas en α .

Consideremos una cuerda AM tal que la abscisa h del extremo M pertenezca al entorno α y sea t la tangente a Γ en el punto $P \equiv [h_1, f(h_1)]$ donde h_1 ($0 < h_1 < h$) verifica la relación $f(h) = hf'(h_1)$.

Siendo δ la distancia de A a la tangente t , es decir la flecha del segmento AMP , tenemos

$$\delta = \frac{|-f(h_1) + f'(h_1) h_1|}{\sqrt{1 + f'^2(h_1)}}.$$

Aplicando la fórmula de Taylor a $f(h_1)$ y $f'(h_1)$ obtenemos como expresión de δ

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\left| -f'(0) - h_1 f'(0) - \frac{1}{2} h_1^2 f''(h_2) + h_1 f'(0) + h_1^2 f''(h_3) \right|}{\sqrt{1 + f'^2(h_1)}} = \\ &= \frac{h_1^2 \left| f''(h_3) - \frac{1}{2} f''(h_2) \right|}{\sqrt{1 + f'^2(h_1)}} \end{aligned}$$

donde h_2 y h_3 están comprendidos entre 0 y 1, extremos excluidos.

El área del segmento es

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{2} f(h) - \int_0^h f(x) dx = \frac{h^2}{2} f'(0) + \frac{h^3}{4} f''(\theta h) - \\ &- \int_0^h \left[x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\bar{\theta} h) \right] dx = \frac{h^3}{4} f''(\theta h) - \int_0^h \frac{x^2}{2} f''(\bar{\theta} h) dx, \end{aligned}$$

donde θ y $\bar{\theta}$ verifican las desigualdades: $0 < \theta < 1$, $0 < \bar{\theta} < 1$.

Siendo L y l los extremos, respectivamente, superior e inferior de $f''(x)$ en el intervalo $(0, h)$, podremos escribir

$$\frac{h^3}{2} \left[\frac{1}{2} f''(\theta h) - \frac{L}{3} \right] \leq S \leq \frac{h^3}{2} \left[\frac{1}{2} f''(\theta h) - \frac{l}{3} \right].$$

Dividiendo los tres miembros de esta última relación por $\delta^{3/2}$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{2 h_1^3} \frac{\left[\frac{1}{2} f''(\theta h) - \frac{L}{3} \right] \left[1 + f'^2(h_1) \right]^{3/4}}{\left| f''(h_3) - \frac{1}{2} f''(h_2) \right|^{3/2}} &\leq \frac{S}{\delta^{3/2}} \leq \\ &\leq \frac{h^3}{2 h_1^3} \frac{\left[\frac{1}{2} f''(\theta h) - \frac{L}{3} \right] \left[1 + f'^2(h_1) \right]^{3/4}}{\left| f''(h_3) - \frac{1}{2} f''(h_2) \right|^{3/2}}. \end{aligned} \quad [1]$$

Pero L , l , $f''(h_2)$, $f''(h_3)$ y $f''(h)$ tienden a $f''(0)$ cuando h tiende a cero, mientras que $\frac{h^3}{h_1^3}$ (*) y $f'(h_1)$ tienden respectivamente a 8 y a $f'(0)$.

Por lo tanto, siendo R el radio de curvatura de Γ en el punto A , el límite de cada uno de los miembros extremos de la relación [1] es $\frac{4}{3} \sqrt{2R}$. El límite buscado será por tanto $\frac{32}{9} R$.

Esta solución ha sido enviada por el Prof. EDISON FARAH, de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de São Paulo (Brasil).

Una solución ha sido enviada también por el Ing. S. FREIBERG, de Tucumán, observando que la extensión de la fórmula del caso del círculo al caso de una curva cualquiera depende simplemente del hecho de que el arco de curva « puede confundirse en lo infinitésimo » con el arco del círculo osculador; débese notar que lo esencial de las demostraciones que hemos reproducido consiste, en efecto, en puntualizar esta observación estableciendo que el área comprendida entre la cuerda y el arco difieren en infinitésimos de orden superior del área comprendida entre la misma cuerda y el círculo osculador.

(*) Diversos tratados de Análisis demuestran que el θ_n del resto

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

de la fórmula de Taylor tiene por límite $\frac{1}{n+1}$ cuando h tiende a cero, si $f^{(n+1)}(x)$ es continua y diferente de cero en el punto a . Ver, por ejemplo, PH. FRANKLIN, *A treatise on advanced Calculus*, pág. 139. En nuestro caso es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\theta_1} = 2.$$

Nº 43. — Una curva corta al eje x en un punto $x = a$. La razón del área contenida entre la curva, el eje x y la ordenada de un punto variable al área del cuadrado de esa ordenada es igual a la razón entre esa misma ordenada y la abscisa. Determinar la ecuación de la curva.

SOLUCIÓN. — Sea $y = y(x)$ la ecuación a determinar. La condición del problema se escribe

$$\frac{\int_a^x y \, dx}{y^2} = \frac{y}{x}$$

o sea

$$\int_a^x y \, dx = \frac{y^3}{x}.$$

El primer miembro, por ser una integral de función continua es derivable. Por tanto es derivable el 2º miembro y luego también es derivable $y(x)$, derivando los dos miembros tendremos:

$$y = \frac{3 y^2 x y' - y^3}{x^2}.$$

Excluyendo el caso $y = 0$, en el cuál el problema no tiene sentido, esta ecuación diferencial se escribe

$$3 x y y' = x^2 + y^2.$$

Es una ecuación diferencial homogénea. Haremos el cambio de función

$$\frac{y}{x} = z, \quad dy = x \, dz + z \, dx,$$

con lo cual queda

$$3 x z \frac{dz}{dx} = 1 - 2 z^2$$

o sea

$$\frac{dx}{3 x} = \frac{z \, dz}{1 - 2 z^2}.$$

Integrando resulta $\frac{1}{3} \log x = -\frac{1}{4} \log (1 - 2 z^2) + C$, o sea

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[4]{1 - 2 z^2} = \text{cte.}$$

Reemplazando $z = \frac{y}{x}$ y determinando la constante por la condición de que para $x = a$ sea $y = 0$, resulta

$$y = \frac{x\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{4/3}},$$

o bien, quitando los radicales, $(x^2 - 2y^2)^3 = cx^2$.

Esta es la ecuación de la curva buscada.

Esta solución es análoga a las enviadas por los Sres. EDISON FARAH, de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de São Paulo, Brasil, y GUIDO O. G. LISERRE, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

Nº 45. — Demostrar que el producto de 4 números enteros consecutivos aumentado de una unidad es siempre un cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN. — Sean los 4 números $n - 1, n, n + 1, n + 2$. Poniendo $a = n + \frac{1}{2}$ el producto de ellos aumentado en una unidad vale

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{3}{2}\right) + 1 &= \left(a^2 - \frac{9}{4}\right)\left(a^2 - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= a^4 - \frac{5}{2}a^2 + \frac{25}{16} = \left(a^2 - \frac{5}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

El número $a^2 - \frac{5}{4}$ es ciertamente racional; por ser su cuadrado un número entero es, pues, entero él también; puede verificarse por el cálculo directo observando que siendo $a = n + \frac{1}{2}$ es

$$a^2 - \frac{5}{4} = n^2 + n - 1.$$

Por tanto queda demostrado el enunciado del problema.

Han enviado soluciones análogas a la anterior los Sres. ENRIQUE L. HOWARD, PABLO CAPITANICH, ENRIQUE SAID, JOSÉ LAHOZ, GUIDO O. G. LISERRE, EDUARDO A. URETA, NARCISO DE DIEGO y CARLOS A. KRÜGER, alumnos de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

Nº 47. — La ecuación

$$(\alpha^2 + \lambda^2) (x^2 + y^2) - 2 \alpha^3 x - 2 \lambda \alpha^2 = 0, \quad \alpha > 0$$

representa, al variar λ , un sistema de círculos. Se pide el lugar geométrico de los centros y la envolvente de los círculos del sistema. Tomando como polo el origen y como eje polar el eje x , determinar la ecuación de la envolvente en coordenadas polares y demostrar que es una curva cerrada. Hallar la longitud y el área de la misma.

SOLUCIÓN. — La ecuación dada representa un sistema de círculos que pasan por el origen de coordenadas. La ecuación general de un círculo de esta naturaleza, cuyo centro sea el punto de coordenadas a, b , es

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Comparando esta ecuación con la del enunciado, se obtiene

$$a = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad b = \frac{\lambda \alpha^2}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas, con parámetro λ , del lugar geométrico de los centros de los círculos del sistema, son

$$x = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad y = \frac{\lambda \alpha^2}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

Para hallar la ecuación de este lugar en forma explícita, eliminaremos λ entre las dos ecuaciones últimas. Dividiendo entre sí las dos ecuaciones se obtiene $\lambda = \frac{\alpha y}{x}$ y substituyendo este valor en una cualquiera de ellas resulta

$$x^2 + y^2 - \alpha x = 0.$$

Esto nos dice que el lugar geométrico de los centros de los círculos del sistema es otro círculo cuyo centro se halla sobre el eje x , es tangente al eje y y su radio vale $\frac{\alpha}{2}$.

Para hallar la ecuación de la envolvente tenemos que derivar la ecuación dada del sistema de círculos respecto λ ; de esta deri-

vada se despeja el valor de λ y se sustituye en la ecuación primitiva. Se obtiene

$$\alpha^2 (x^2 + y^2)^2 - 2 \alpha^3 x (x^2 + y^2) - \alpha^4 y^2 = 0.$$

Esta será la ecuación pedida de la envolvente. Para expresarla en coordenadas polares, poniendo $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, se obtiene

$$\rho^2 - 2 \alpha \rho \cos \theta - \alpha^2 \sin^2 \theta = 0$$

o sea (teniendo en cuenta que ρ debe ser positivo)

$$\rho = \alpha (1 + \cos \theta).$$

Esta es la ecuación de una « cardioide ». Se sabe que puede considerarse engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sobre otra del mismo radio.

Para el área tenemos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi \alpha^2,$$

y para la longitud

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \alpha \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi 2 \alpha \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \alpha.$$

Esta solución es debida al Sr. GUIDO O. G. LISERRE, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

Nº 48. — Si un cuerpo se deforma por homotecia, ¿cómo se desplaza el baricentro? (no se supone la densidad constante). Aplicar este concepto para demostrar que el baricentro del área de un polígono homogéneo circunscripto a un círculo y el baricentro del perímetro del mismo están alineados con el centro del círculo a distancias de razón 2:3. Nótese que el polígono no se supone regular.

SOLUCIÓN. — Considerando en general un cuerpo no homogéneo podemos siempre suponerlo dividido en elementos de volumen dv suficientemente pequeños para que en cada uno de ellos la respectiva densidad ρ pueda considerarse constante. Al deformarse el cuerpo supondremos que su densidad en cada punto varía de tal

modo que a cada uno de los anteriores elementos corresponde un homotético cuya densidad sea $K\rho$, donde K es una cierta constante no necesariamente igual a la razón de homotecia.

Supongamos que para hallar el baricentro del cuerpo primitivo se utilice el conocido método que consiste en aplicar fuerzas paralelas iguales a ρdv en los respectivos elementos y buscar el centro de dichas fuerzas mediante una cierta construcción geométrica (p. ej. un polígono funicular). Ahora bien, por la deformación, cada elemento dv se transforma en otro $C^3 dv$, donde C es la razón de homotecia, y las fuerzas que se deberán aplicar a los elementos para hallar el baricentro del cuerpo deformado serán $KC^3\rho dv$, es decir proporcionales a las anteriores. Por lo tanto la nueva construcción geométrica se puede hacer homotética de la anterior mediante una conveniente elección de la escala de fuerzas. Se deduce que el nuevo baricentro será el punto homotético del primitivo en la homotecia considerada.

Consideremos ahora el caso del polígono de lados $L_1, L_2, \dots, L_n$ circunscripto a una circunferencia de radio R . Desde el centro de la misma trazamos rectas a todos los vértices del polígono, con lo cual su superficie quedará dividida en triángulos, el área de cada uno de los cuales vale evidentemente

$$A_i = L_i \frac{R}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ahora bien, cada lado del polígono tiene el baricentro en su punto medio y cada triángulo tiene el baricentro de su área en el tercio de la mediana que pasa por dicho punto. Por lo tanto se puede encontrar el baricentro del perímetro del polígono buscando geométricamente el centro de un sistema de fuerzas paralelas iguales a $L_1, L_2, \dots, L_n$ aplicadas en los puntos medios de los lados respectivos; también se puede encontrar el baricentro del área del polígono aplicando análogamente fuerzas $L_i R : 2$ en los baricentros de los triángulos.

Con esto de nuevo estamos en el caso anterior, puesto que si se considera centro de homotecia el centro de la circunferencia los baricentros de los triángulos son puntos homotéticos de los baricentros de los lados L_i , siendo la razón de homotecia 2:3; además uno de los sistemas de fuerzas es proporcional al otro en la razón $R:2$. Se deduce entonces análogamente que el baricentro del perí-

metro y el del área del polígono son homotéticos respecto del centro de la circunferencia inscrita, o, lo que es lo mismo, dichos tres puntos están alineados, estando sus distancias en la relación 2:3 que es la razón de homotecia en este caso.

Este teorema puede extenderse al caso de un poliedro circunscrito a una esfera subdividiendo el volumen del mismo en pirámides cuyas bases sean las caras del poliedro teniendo todas por vértice común el centro de la esfera. El baricentro de cada pirámide se halla a la cuarta parte a contar desde la base, de la recta que une el centro de gravedad de ésta con el vértice opuesto; la razón de homotecia será por lo tanto 3:4. Fácilmente se deduce entonces que en un poliedro irregular, homogéneo, circunscrito a una esfera, el baricentro de su superficie, el de su volumen y el centro de la esfera están en línea recta, las distancias estando en la relación 3:4.

Esta solución es debida al Ing. PEDRO E. ZADUNAISKY, del Instituto de Matemáticas de Rosario.

Nº 51. — En el « Cours d'Analyse » de C. JORDAN (3ª edición, París, 1913, tomo II, pág. 223) se demuestra la siguiente fórmula

$$\iiint_V x^p y^q z^r F \left[\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{b} \right)^\beta + \left(\frac{z}{c} \right)^\gamma \right] dx dy dz =$$

$$\frac{a^{p+1} b^{q+1} c^{r+1}}{\alpha \beta \gamma} \frac{\Gamma \left(\frac{p+1}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{q+1}{\beta} \right) \Gamma \left(\frac{r+1}{\gamma} \right)}{\Gamma \left(\frac{p+1}{\alpha} + \frac{q+1}{\beta} + \frac{r+1}{\gamma} \right)} \int_0^1 t^{\frac{p+1}{\alpha} + \frac{q+1}{\beta} + \frac{r+1}{\gamma} - 1} F(t) dt,$$

donde la integral triple está extendida al volumen V limitado por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y la superficie

$$\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{b} \right)^\beta + \left(\frac{z}{c} \right)^\gamma = 1.$$

Se pide generalizar la fórmula anterior al caso de considerar la integral múltiple con un número cualquiera de variables.

SOLUCIÓN. — Consideremos la integral múltiple definida

$$I_n = \iiint \dots \int_V F \left(\sum_1^n \xi_i \right) \cdot \prod_1^n \xi_i^{\lambda_i} \cdot d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \quad [1]$$

en la cual el símbolo Σ representa la suma

$$\sum_1^n \xi_i = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

y el símbolo Π el producto

$$\prod_1^n \xi_i^{\lambda_i} = \xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2} \dots \xi_n^{\lambda_n}.$$

F es una función arbitraria de un argumento. Los exponentes constantes verifican a las desigualdades $\lambda_i > -1$.

La integral se extiende al conjunto $V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de todos los valores no negativos de sus variables que verifican a la desigualdad

$$\sum_1^n \xi_i \leq 1.$$

De manera que los límites inferiores de integración son

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0, \quad [2]$$

y los superiores satisfacen a las condiciones

$$\xi_n = 1, \quad \xi_{n-1} + \xi_n = 1, \dots, \sum_1^n \xi_i = 1. \quad [3]$$

A fin de simplificar el cálculo de la integral [1] introduzcamos nuevas variables t y u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bajo las condiciones

$$\sum_1^n \xi_i = t \quad \text{y} \quad \xi_i = t u_i. \quad [4]$$

Conforme a la primera de estas relaciones la suma

$$\sum_1^n \xi_i = \sum_1^n t u_i = t \cdot \sum_1^n u_i$$

es igual a t , y por consiguiente

$$\sum_1^n u_i = 1. \quad [5]$$

Despejando u_n se obtiene la fórmula

$$u_n = 1 - \sum_1^{n-1} u_i \quad [6]$$

que expresa la variable u_n en función de las demás u_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) que son independientes.

Relacionando la primera de las fórmulas [4] con [2] y [3] se establecen para la otra variable independiente t los siguientes límites:

$$0 \leq t \leq 1. \quad [7]$$

La segunda de las fórmulas [4] en combinación con [2] conduce a los límites inferiores

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = 0 \quad [8]$$

de las nuevas variables.

Para que las variables primitivas ξ_i recorran todos los valores del conjunto V comprendidos entre los límites [2] y [3], podemos establecer, comenzando la integración por la variable u_{n-1} , los siguientes límites superiores

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 - u_1, \dots, u_{n-1} = 1 - \sum_1^{n-2} u_i \quad [9]$$

para las nuevas variables.

Efectuando ahora el cambio de variables en el producto que figura en la integral [1] encontramos

$$\prod_1^n \xi_i^{\lambda_i} = \prod_1^n t^{\lambda_i} u_i^{\lambda_i} = t^{\sum_1^n \lambda_i} \cdot \prod_1^n u_i^{\lambda_i}. \quad [10]$$

No es difícil tampoco calcular el determinante $J(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de Jacobi derivando la segunda de las relaciones [4] y la fórmula [6] lo que nos da

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_i} = t \quad \text{y} \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} = 0 \quad (j \neq i),$$

en donde i y j pasan por la serie de valores

$$1, 2, \dots, n-1,$$

y además

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial u_j} = -t, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Para el determinante funcional J se obtiene

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial \xi_n}{\partial t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ 0 & t & \dots & 0 & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t & u_{n-1} \\ -t & -t & \dots & -t & u_n \end{vmatrix}$$

Si se agregan a los elementos de la última fila los de las filas anteriores, resulta

$$J = \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ 0 & t & \dots & 0 & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t & u_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_1^n u_i \end{vmatrix}$$

Este último determinante es igual al producto de los elementos que forman su diagonal principal, ya que todos los elementos a un lado de dicha diagonal son nulos. De manera que

$$J = t^{n-1} \cdot \sum_1^n u_i,$$

o de conformidad con la relación [5]

$$J = t^{n-1}.$$

Ahora valiéndose de las fórmulas [4], [10], [7], [8] y multiplicando la función subintegral por la expresión para J recién hallada, podemos representar la integral [1] bajo la siguiente forma

$$I_n = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_{n-1}} \int_0^1 F(t) t^{\sum_1^n \lambda_i} t^{n-1} \cdot \prod_1^n u_i^{\lambda_i} \cdot dt \cdot du_{n-1} \dots du_2 du_1,$$

en donde los límites superiores $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ se determinan mediante las igualdades [9] y la variable dependiente u_n , que figura como el último factor del producto $\prod_1^n u_i^{\lambda_i}$, mediante la igualdad [6].

De suerte que vemos la integral considerada I_n descompuesta en dos factores

$$I_n = B_n \cdot I, \quad [11]$$

siendo

$$I = \int_0^1 t^{(n-1) + \sum_1^n \lambda_i} F(t) dt \quad [12]$$

y

$$B_n = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_{n-1}} \prod_1^n u_i^{\lambda_i} \cdot du_{n-1} \dots du_2 du_1.$$

Esta última integral puede ser transformada del siguiente modo

$$\begin{aligned} B_n &= \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_{n-1}} u_n \cdot \prod_1^{n-1} u_i^{\lambda_i} \cdot du_{n-1} \dots du_2 du_1 = \\ &= \lambda_n \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_{n-1}} \int_0^{u_n} u_n^{\lambda_n-1} \cdot \prod_1^{n-1} u_i^{\lambda_i} \cdot du_n du_{n-1} \dots du_2 du_1 = \\ &= \lambda_n \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_{n-1}} \int_0^{u_n} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_{n-1}^{\lambda_{n-1}} u_n^{\lambda_n-1} \cdot du_n du_{n-1} \dots du_2 du_1, \end{aligned}$$

en donde los límites superiores $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ verifican a las igualdades [9] y [6].

La integral múltiple de Dirichlet a que se llegó es igual, como se sabe, a la expresión

$$\frac{\Gamma(\lambda_1 + 1) \Gamma(\lambda_2 + 1) \dots \Gamma(\lambda_{n-1} + 1) \Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n + n)},$$

siendo Γ símbolo de la función gamma de Euler que se determina generalmente por la fórmula

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx.$$

De manera que

$$B_n = \frac{\lambda_n \Gamma(\lambda_1 + 1) \Gamma(\lambda_2 + 1) \dots \Gamma(\lambda_{n-1} + 1) \Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n + n)},$$

pero

$$\lambda_n \Gamma(\lambda_n) = \Gamma(\lambda_n + 1)$$

y por lo tanto

$$B = \frac{\prod_1^n \Gamma(\lambda_i + 1)}{\Gamma\left(n + \sum_1^n \lambda_i\right)}. \quad [13]$$

Las relaciones [11], [12], [13] permiten reducir la determinación de la integral múltiple [1] a la de una integral simple y de $n + 1$ gamma-funciones.

Generalicemos el resultado obtenido. Con tal propósito pasemos a nuevas variables x_i haciendo

$$\xi_i = f_i(x_i), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

en donde f_i son símbolos de algunas funciones diferenciables monótonas.

Los límites inferiores k_i de la integral I_n quedarán constantes y se determinarán por las ecuaciones

$$f_i(k_i) = 0.$$

Los límites superiores x_i se encontrarán sucesivamente despejando

$$\begin{aligned} x_n & \text{ de la ecuación } f_n(x_n) = 1, \\ x_{n-1} & \text{ de la ecuación } f_{n-1}(x_{n-1}) + f_n(x_n) = 1, \\ & \dots\dots\dots \\ x_1 & \text{ de la ecuación } \sum_1^n f_i(x_i) = 1. \end{aligned}$$

Reemplazando además $d\xi_i$ por $f'_i(x_i) dx_i$ bajo el símbolo de la integral y teniendo en cuenta las relaciones [11], [12], [13] se llega definitivamente a la siguiente *fórmula general*

$$\begin{aligned} \int_{k_n}^{x_n} \int_{k_{n-1}}^{x_{n-1}} \dots \int_{k_1}^{x_1} F \left[\sum_1^n f_i(x_i) \right] \cdot \prod_1^n f_i^{\lambda_i}(x_i) f'_i(x_i) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \frac{\prod_1^n \Gamma(\lambda_i + 1)}{\Gamma\left(n + \sum_1^n \lambda_i\right)} \cdot \int_0^1 t^{(n-1) + \sum_1^n \lambda_i} F(t) dt. \end{aligned} \quad [14]$$

Consideremos ahora un caso particular. Sea

$$f_i(x_i) = \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{\alpha_i},$$

siendo a_i y α_i positivas. Los límites inferiores k_i serán iguales, evidentemente, a 0. Los límites superiores se encontrarán valiéndose de la ecuación

$$\sum_1^n \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{\alpha_i} = 1.$$

Para las derivadas resulta

$$f'_i(x_i) = \frac{\alpha_i}{a_i} \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{\alpha_i - 1}$$

y por lo tanto

$$f_i^{\lambda_i}(x_i) f'_i(x_i) = \frac{\alpha_i x_i^{(\lambda_i+1)\alpha_i+1}}{a_i^{(\lambda_i+1)\alpha_i}}.$$

Haciendo

$$(\lambda_i + 1) \alpha_i + 1 = p_i$$

o bien

$$\lambda_i = \frac{p_i + 1}{\alpha_i} - 1,$$

se obtiene

$$f_i^{\lambda_i}(x_i) f_i'(x_i) = \frac{\alpha_i x_i^{p_i}}{a_i^{p_i+1}}.$$

Luego tendremos

$$n + \sum_1^n \lambda_i = \sum_1^n \frac{p_i + 1}{\alpha_i}.$$

Introduciendo estos resultados en la fórmula [14] y haciendo pasar al segundo miembro los factores constantes $\frac{\alpha_i}{a_i^{p_i+1}}$, invirtiéndolos previamente, resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_n} \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_1} F \left[\sum_1^n \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{\alpha_i} \right] \cdot \prod_1^n x_i^{p_i} \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \prod_1^n \left(\frac{a_i^{p_i+1}}{\alpha_i} \right) \cdot \frac{\prod_1^n \Gamma \left(\frac{p_i + 1}{\alpha_i} \right)}{\Gamma \left(\sum_1^n \frac{p_i + 1}{\alpha_i} \right)} \cdot \int_0^1 t^{\sum_1^n \frac{p_i + 1}{\alpha_i}} F(t) dt, \end{aligned}$$

siendo $p > -1$.

Si $n = 3$, se obtiene la fórmula de Jordan que puede escribirse en la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \iiint_V x^p y^q z^r F \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\gamma} \right] dx dy dz = \\ & = \frac{a^{p+1} b^{q+1} c^{r+1}}{\alpha \beta \gamma} \cdot \frac{\Gamma \left(\frac{p+1}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{q+1}{\beta} \right) \Gamma \left(\frac{r+1}{\gamma} \right)}{\Gamma \left(\frac{p+1}{\alpha} + \frac{q+1}{\beta} + \frac{r+1}{\gamma} \right)} \cdot \\ & \cdot \int_0^1 t^{\frac{p+1}{\alpha} + \frac{q+1}{\beta} + \frac{r+1}{\gamma} - 1} F(t) dt. \end{aligned}$$

La integral triple que figura en el primer miembro se extiende al volumen V limitado por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y por la superficie

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\gamma} = 1.$$

En conclusión, consideremos otro caso particular de la fórmula general [14] haciendo en ella

$$f_i(x_i) = a_i e^{-\alpha_i x_i},$$

en donde a_i y α_i son positivas. Los límites inferiores k_i serán iguales a 0, y los superiores podrán elegirse convenientemente a base de la ecuación

$$\sum_1^n a_i e^{-\alpha_i x_i} = 1.$$

Luego tendremos

$$f_i'(x_i) = -\alpha_i a_i e^{-\alpha_i x_i} \quad \text{y} \quad f_i^{\lambda_i}(x_i) f_i'(x_i) = -\alpha_i a_i^{\lambda_i+1} e^{-(\lambda_i+1)\alpha_i x_i}.$$

Si se pone

$$(\lambda_i + 1) \alpha_i = p_i,$$

es decir,

$$\lambda_i = \frac{p_i}{\alpha_i} - 1,$$

la expresión anterior tomará la forma

$$f_i^{\lambda_i}(x_i) f_i'(x_i) = -\alpha_i a_i^{\frac{p_i}{\alpha_i}} e^{-p_i x_i}.$$

Sin dificultad encontraremos también

$$n + \sum_1^n \lambda_i = \sum_1^n \frac{p_i}{\alpha_i}.$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la fórmula [14] y permutando los límites de integración, se obtiene definitivamente

$$\begin{aligned} & \int_{x_n}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{\infty} \dots \int_{x_1}^{\infty} F \left(\sum_1^n a_i e^{-\alpha_i x_i} \right) \cdot e^{-\sum_1^n p_i x_i} \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \frac{\prod_1^n \Gamma \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)}{\Gamma \left(\sum_1^n \frac{p_i}{\alpha_i} \right) \cdot \prod_1^n \left(\alpha_i a_i^{\frac{p_i}{\alpha_i}} \right)} \cdot \int_0^1 t^{\sum_1^n \frac{p_i}{\alpha_i} - 1} F(t) dt, \end{aligned}$$

siendo $p_i > 0$.

Esta solución pertenece al Dr. SERGIO SISPAOV, de Asunción, Paraguay.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

65.— Sea un triángulo ABC ; sobre las rectas de los lados AB , BC , CA sean los puntos C' , A' , B' respectivamente tales que

$$AC':AB = BA':BC = CB':CA = n$$

(n número real positivo o negativo); se trazan los segmentos AA' , BB' , CC' ; demostrar que

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = (n^2 - n + 1) (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$$

66.— Dado un triángulo ABC , ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos internos al círculo circunscrito al triángulo que son centros de elipses circunscriptas al mismo?

67.— Dados dos puntos A , B sobre la superficie de una esfera, estudiar el lugar geométrico de los puntos X de la misma, tales que el triángulo esférico AXB sea rectángulo en X .

68 — Resolver la ecuación de 6° grado

$$x^6 + 6ax^4 + 8bx^3 + 12cx^2 + 6\frac{(a^2-c)^2}{b}x - \frac{(a^2-c)^3 - 8a^3b^2}{b^2} = 0.$$

69.— Determinar una forma general de las ecuaciones de cuarto grado cuyas raíces son construibles con la regla y el compás. Examinar casos particulares que se presentan.

70.— Integrar la ecuación diferencial

$$y + y' \sin x + (1 + \cos x) \sqrt{1 - y'^2} = 0.$$

Los problemas 68, 69, 70 han sido enviados por el Prof. SERGIO SISPÁNOV, de la Universidad de Asunción, PARAGUAY.

BIBLIOGRAFIA

1. — ALONZO CHURCH: *Elementary Topics in Mathematical Logic*; A lecture given at the Galois Institute of Mathematics at Long Island University, 1940.
2. — W. VAN ORMAN QUINE: *Elementary Logic*; Ginn and Comp., 1941.
3. — BEPPO LEVI: *Correría en la Lógica*; Revista de la Universidad de Tucumán, 1942.
4. — BERTRAND RUSSELL: *An Inquiry into Meaning et Truth*; Norton et Comp., 1940.
5. — FAUSTO TORANZOS: *Introducción a la epistemología y Fundamentación de la matemática*; Espasa Calpe Argentina, 1943.

El envío de la publicación 3 nos ha procurado el gusto de recibir del autor los cuatro fascículos de nítida mimeografía que componen la publicación 1, donde pudimos conocer un breve curso dado por el prof. Church poco antes de nuestras conferencias de Tucumán y con programa muy estrechamente parecido. En efecto dichos fascículos contienen respectivamente: 1 - El álgebra de las clases; 2 - El álgebra de las proposiciones; 3 y 4 - *Set Theory*: no nos atrevemos a traducir el último título porque la palabra «set» no podría traducirse de otra manera que «clase» o «grupo» produciéndose una confusión que el autor mismo nota y quiere evitar. Los dos primeros fascículos representan de alguna manera una puesta al día de las teorías de cálculo lógico, mientras los otros dos ofrecen un bosquejo de una teoría axiomática de la lógica, personal del A. También en nuestra «Correría» el primer capítulo informa principalmente sobre el cálculo de clases y de proposiciones, y la diferencia está más que todo, si no estamos equivocados, en habernos conservado un poco más clásicos. Consiste este clasicismo máximamente en considerar la lógica como la teoría de la deducción más bien que de lo cierto y lo falso. Sin querer en este momento hacer investigaciones históricas y bibliográficas, creemos no estar equivocados en decir que cierto y falso se han introducido en la lógica aproximadamente en los últimos años del siglo pasado o primeros del presente con las famosas antinomias; antes, deducir quería decir obtener de dadas proposiciones otras que con ellas armonizarán según determinadas reglas que se decían principio de contradicción, del tertium non datur, etc.; pero sobre la *verdad* de las afirmaciones la lógica no pretendía pronunciarse. Cuando pareció que aquellas reglas pudieran caer en defecto, empezó a discutirse de lógicas bi- y polivalentes. A pesar de que el símbolo V introducido por Peano para expresar la aserción de una proposición y, paralelamente, representar la clase total, sea la inicial de *verum*, nunca la escuela de Peano se

ocupó de la verdad concreta de las proposiciones, ni tampoco Russell, ni Hilbert, tanto que la axiomática del cálculo de las proposiciones como fué sistematizada por estos últimos autores, y la misma axiomática propuesta ahora por el prof. Church no hace efectivamente ningún uso de nociones de «verdad».

¿Porqué, pues, introducir en la lógica este concepto parásito? ¿Es cierto que la proposición «la nieve es negra» sea *lógicamente* falsa? ¿O, igualmente, que sea tal «el sol está más cerca de la tierra que la luna?». Lo es, por opuesto, «13 es un número par», pero solamente porque y por cuanto el número par y 13 se quieran definir como objetos lógicos. Posiblemente fué primero Hilbert a introducir ejemplos y consideraciones de esta naturaleza a principio de la *Theoretische Logik* (Hilbert y Ackerman) para expresar observaciones acertadísimas, salvo en el detalle del ejemplo; sucesivamente un uso más amplio del «cierto» y del «falso» hicieron Hilbert y Bernays y otros para formar las matrices de *verdad* y *falsedad* que deberían caracterizar las operaciones lógicas y que vemos reproducidas en el pequeño libro de objetivos didácticos de Toranzos (1). Ni debe oponerse que la crítica nuestra tienda a reducir la lógica a la *tautología* (certeza por estructura); la lógica se sirve de sus tautologías para clasificar las proposiciones en grupos tales que las de un grupo son todas ciertas (aseribles) al serlo unas tales.

B. Russell, lógico y filósofo, al tratar el problema de la verdad, nos lleva directamente fuera de la lógica, en la epistemología; palabra ésta algún tanto nueva y de sentido algo variable; hemos preguntado sobre este particular a un amigo filósofo y greeista, y nos dió por definición la «teoría del conocimiento científico»; posiblemente correspondan más a esta definición las teorías de Mach y de Poincaré, que no tenían nombre, que otras aplicaciones más modernas. La dificultad está denunciada desde el principio por el idioma y por los idiomas; nos dice Toranzos: «Usaremos el término «proposición» para designar una expresión de la cual tenga sentido inequívoco decir si es verdadera o falsa» y la misma opinión expresa Russell (p. 215) observando sin embargo que con tal definición ya se decide en favor del principio del tercio excluso; por esto, probablemente, Church exige un poco menos al definir «proposición el contenido de significado de una oración declarativa»; pero, de inmediato pregunta Russell ¿qué es significancia?; y, preguntamos nosotros: ¿qué es declarativo? o, como lo decía Poincaré, ¿predicativo? Las palabras también no se prestan al juego: proposición, oración, sentencia son todas palabras equívocas: en su sentido común y etimológico todas suponen que al proponer (poner delante), hablar (hacer oración), expresar su propio sentir (mediante sentencias), siempre algo se quiera decir y si queremos que el lector entienda

(1) Damos el índice de los capítulos de este interesante volumen que, por su variedad no pueden ser comprendidos todos en la presente reseña: I. Introducción histórica. - II. Introducción a la lógica matemática. - III. Introducción a la metodología de la matemática. - IV. Introducción a la aritmética. - V. Introducción a la geometría. - VI. Problemas metodológicos y matemáticos. - VII. Introducción a los problemas filosóficos de la matemática. - *Bibliografía*. - *Apéndice* (Dr. Julio Rey Pastor). - La investigación matemática.

nuestra definición es necesario que le avisemos que en uno u otro lugar tomamos las palabras en el estricto sentido de los gramáticos, donde en verdad la gramática no entra.

Son todas señales de que, para fundar efectivamente la lógica hay que salir de la dificultad renunciando a la definición.

En el cap. II de nuestra *Correría* hemos aceptado como ideas primitivas, es decir *sin definición* las palabras *proposición* y *juicio*; la primera en el simple sentido etimológico « puesto delante »; podría probablemente ser más propio inventar una palabra, por ej. *logismo*, que muy bien concuerda con silogismo; la segunda en el sentido de aserción, que tiene la ventaja notable de tener traducción análoga en todos los idiomas cultos: *giudizio*, *jugement*, *judgement*, *Aussage*, etc.

Russell, al profundizar su análisis se ve obligado a complicar el problema en sentido materialista sin ganar en claridad (p. 367):

(1) « hecho » es idea primitiva.

(2) algunos hechos se « experimentan » (por tanto experimentar es otra idea primitiva).

(3) algunos hechos experimentados están ya « expresados » y ya « indicados » por « oraciones ».

(4) si *a* y *b* son palabras del mismo tipo lógico y *f(a)* es una oración que expresa un hecho experimentado. entonces o *f(b)* expresa un hecho o bien no-*f(c)* expresa un hecho.

(5) « Datos » son oraciones (traducimos en oración el « sentence »; pero, a este punto nos parece haber llegado al juicio, y que Russell use aquí « sentence » mientras otros autores dirían « proposition ») que expresan e indican hechos experimentados.

(6) « Verificables » son proposiciones que tienen tal relación sintáctica con los datos, de manera que pueden deducirse de ellos — o, podemos agregar —, resultan más o menos probables en relación a los datos.

(7) « Ciertas » son las proposiciones que indican hechos o que tienen con proposiciones que indican hechos las mismas relaciones sintácticas que las proposiciones verificables tienen con los datos.

De esta manera, comenta Russell, las proposiciones verificables son una subclase de las ciertas; y la explicación nos parece esencial. Pero más que todo nos parece esencial el hecho que resulta de este análisis: es decir que cuanto más uno quiere ahondarse, no decimos en el problema filosófico de la verdad, que dejamos, este, a la religión y a la metafísica, sino sólo en el problema de definir la palabra, siempre nuevas palabras y nuevas indeterminaciones uno se encuentra obligado a introducir; para dar ejemplo: ¿qué se quiere decir en (4) con « palabras del mismo tipo lógico »? y ¿qué es la experiencia?

No queremos decir que el expediente de admitir un cierto grupo de « ideas primitivas » sin definición lo arregle todo; y en efecto dimos en nuestra « *Correría* » particular importancia a cierto grupo de palabras que hay necesariamente que entender *según su sentido*, o como decíamos « según el vocabulario »; hecho curioso es que el mismo término lo usa también Russell (por ej. p. 368), pero en sentido diferente porque opone Russell el vocabulario

(convención) a lo que se aprende por experiencia personal; nosotros entendimos el vocabulario como catálogo de palabras y no como explicación de ellas.

El pequeño tratado de Quine nos ofrece para la fundación de la lógica una interpretación totalmente distinta dentro de un traje en la apariencia muy semejante; tenemos aquí en efecto el catálogo de las palabras que expresan relaciones lógicas, no de las que hay que entender según sentido, sino de las que a las veces en parte pueden tomarse como primitivas y en parte como combinaciones de aquellas. A partir de su significado intuitivo se estudian detenidamente sus relaciones y transformaciones de unas en otras; a propósito el autor titula el libro «lógica elemental» y nosotros diríamos «prolegómenos a la lógica»; a la teoría de la deducción el autor ha destinado otro libro *Mathematical logic*.

B. LEVI.

* * *

KNIE, GUILLERMO: *Algebra del spin*. Buenos Aires, 1943.

Este libro de unas 53 páginas se anuncia como el primero de una serie de Monografías Físico-Matemáticas. Todos saben lo que se entiende por el *spin* en las modernas teorías corpusculares; según que el valor del *spin* sea $\frac{1}{2}$, 1 ó 0 le corresponde una representación por números hipercomplejos que caracterizan las propiedades magnéticas de las partículas elementales. El libro se compone de dos partes que tratan respectivamente el álgebra de estos números hipercomplejos para el caso del *spin* $\frac{1}{2}$ y, conjuntamente, para los casos del *spin* 1 ó 0. La diferencia principal consiste en que en el caso del *spin* $\frac{1}{2}$ se engendra un grupo de 16 miembros y en el caso del *spin* 1 un anillo de 136 miembros debido a la complejidad más grande de las reglas de conmutación a las cuales obedecen los números hipercomplejos del *spin* 1. Prescindiendo de esta diferencia hay una analogía marcada entre los dos tipos de álgebra que el autor ha puesto bien a la vista. Por ejemplo, en el grupo y en el anillo hay triadas de números que pueden emplearse para la descripción de las componentes del *spin*. También las propiedades de transformación con respecto a rotaciones relativistas se investigan en relación con los invariantes respectivos de los cuales hay 16 en el primero y 36 en el segundo caso.

El autor anuncia próxima la publicación de otro fascículo sobre «Nuevas teorías físicas». Nos permitimos señalar que de algunas palabras de las cuales existe traducción castellana sería conveniente evitar formas inútilmente exóticas; tales *ring* = anillo, *spur* = traza. Igualmente sería de recomendar que las citaciones bibliográficas fuesen más completas; máxime cuando se reúnen a fines del volumen, sería deseable que los títulos de las obras y memorias fuesen reproducidos íntegramente.

B. LEVI.

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS

DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$ñ
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y) ; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Año 1940 - Vol. II.	
1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	2.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — La noción de « dominio deductivo » como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas ...	1.50
Año 1941 - Vol. III.	
1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos ...	2.00
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D ...	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota « Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas »	1.00
Año 1942 - Vol. IV.	
1 - L. A. SANTALÓ — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de 4 dimensiones	3.00
2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
3 - JOSÉ L. MASSERA — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50