



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA

POSGRADO DE MAESTRÍA EN FINANZAS

TESIS

Teoría de Markowitz y CAPM. Su aplicación en Argentina

Autor: Juan Pablo Artusi

Director: Adrián Tarallo

Rosario

Julio 2024

Agradecimientos

A mis hijos Juani, Fran y Mili; a mi esposa y compañera de vida Barbie. Siempre acompañando y siendo los pilares fundamentales en todos mis logros personales.

A mis profesores del Posgrado Maestría en Finanzas UNR, de quienes siempre tuve respuestas y consejos para la finalización de la carrera.

A mi profesora de Matemáticas IV en Economía UNR Flavia Sibuet, que me dedico tiempo y paciencia para profundizar en todos los aspectos de aplicación para justificar el desarrollo de la tesis.

Contenido

1. Capítulo I.....	4
1.1 Introducción.....	4
1.2 Antecedentes.....	5
1.3 Tema de investigación.....	8
1.4 Objetivos.....	10
2. Capítulo II.....	10
2.1 Selección de carteras y optimización.....	10
2.2 Programación matemática no lineal para optimización de carteras.....	17
2.3 La línea de mercados de capitales y maximización.....	23
2.4 Capital Asset Pricing Model (Modelo CAPM).....	24
3. Capítulo III.....	35
3.1 Metodología de investigación.....	35
4. Capítulo IV.....	41
4.1 Procedimiento para el desarrollo práctico del modelo.....	41
4.2 Pautas a tener en cuenta y exposición de resultados.....	44
5. Capítulo V.....	65
5.1 Conclusiones.....	65
6. ANEXOS.....	70
6.1 Anexo I.....	70
Bibliografía.....	81

1. Capítulo I

1.1 Introducción

Cuando se invierte dinero en el mercado de capitales argentino¹, ¿qué debe esperar uno como inversionista? En nuestro país, el sistema financiero ha debido desempeñarse dentro de un contexto de marcada volatilidad política y económica desde la vuelta a la democracia en 1983.

La aplicación de diferentes políticas macroeconómicas dependiendo el gobierno de turno han establecido que determinados rubros empresariales o conglomerados sean beneficiados y otros a su vez perjudicados. En relación al trabajo académico en cuestión, se elabora sobre dos periodos antagónicos en cuanto a decisiones de administración económica como son (Favatta, 2019):

- 1- Modelo económico de industrialización neoliberal (2002-2014): el cuatrienio que nos compete bajo análisis es 2012-2015, en el que se distinguen beneficios en empresas vinculadas al consumo masivo interno e industrial con baja intensidad de capital, tal es el caso de Mirgor S.A que produce componentes electrónicos, móviles y de automoción. En contraste, por el tipo de cambio real menos competitivo que años anteriores, se perjudican a empresas relacionadas a exportaciones del agro tales como Molino S.A, así como en gas y petróleo distinguiendo YPF S.A.
- 2- Modelo económico de inserción internacional (2015-2018): caracterizado por devaluaciones y quita de retenciones a sectores vinculados al agro, se destacarían en principio grandes subas de precios de acciones en empresas como San Miguel S.A, a la que se pondera su comienzo de exportación de limones en mercados como EEUU. Agrometal S.A, vinculada a la construcción de maquinaria agrícola, y Aluar S.A dedicada a la exportación de aluminio. El hecho que la libre movilidad de capitales, el alto nivel de endeudamiento en moneda extranjera junto a una inflación creciente e incontrolable fueron hechos fundamentales que describen la situación de crisis económica sobre el 2018.

¹ Enmarcado su desarrollo en la Ley de Mercado de Capitales N° 26.831 (B.O. 28-12-12) que tiene por objeto el desarrollo del mercado de capitales y la regulación de los sujetos y valores negociables comprendidos en el ámbito del mismo.

Ya definido los periodos bajo análisis para un mercado emergente como el argentino, se presenta un resumen de la evolución de teorías de cartera y modelos de evaluación de activos riesgos y ponderación de este último concepto. Realizaremos pruebas empíricas de aplicación de las mismas y su veracidad para producir pronósticos futuros dentro de determinados lineamientos. Se utilizan herramientas de Excel² basadas en programación no lineal y se verifica el cumplimiento con las denominadas condiciones de Karush-Kuhn-Tucker³, así como con conceptos de estadísticas descriptivas sobre hechos pasados y estadísticas inferenciales para la predicción de riesgos futuros.

El volumen de negociación de mercado accionario argentino no es caracterizado por su “profundidad”⁴ y mucho menos por la pluralidad y diversidad de empresas que componen sus índices bursátiles. A su vez, la población en su conjunto no tiene un sustento educativo financiero que permita el entendimiento del mercado de capitales para poder invertir en activos riesgos y en instrumentos de deuda corporativos.

Un buen punto de inicio para incentivar a inversores locales es explicar y aplicar los modelos de diversificación de carteras eficientes en el ámbito local, mencionando los autores ampliamente reconocidos a nivel mundial en el ámbito bursátil y brindando detalles de sus trabajos académicos.

1.2 Antecedentes

Hasta bien entrada la primera mitad del siglo xx los directores financieros se dedicaban primordialmente a reunir fondos y administrar el movimiento de efectivo de la empresa, siendo la clave fundamental incrementar en lo posible el resultado de cada ejercicio contable/financiero en base a una planificación de utilidad perseguida (Antuña & Bottegoni, 2011). Pero el objetivo antes mencionado no identificaba el “esfuerzo” de

² Se aplica la herramienta de Solver de Programación no Lineal.

³ La metodología de Karush-Kuhn-Tucker es descrita en capítulos posteriores según lo mencionado en Alpha Chiag (2007) para el establecimiento de condiciones necesarias de un “óptimo” en la función objetivo obtenida del Solver.

⁴ La profundidad de mercado (market depth) se define como la capacidad que tiene un valor negociable de poseer varias órdenes de compra y venta con diferentes precios y cantidades, lo cual permite medir la cantidad de vendedores y compradores para una acción en particular; y determinar así la cotización de la misma.

capital necesario como inversión para obtener la maximización de utilidad, de aquí que se incorpora el punto de resultados obtenidos en relación a los capitales necesarios para obtenerlos.

La ocurrencia temporal de los resultados tampoco encontraba consideración alguna, los mismos no se evaluaban por el momento en que se producían sino por su simple valor. En la década de 1950, la creciente aceptación de los conceptos de valor presente animaron a los directores financieros a ampliar sus responsabilidades y a tomar un papel más activo en la selección de los proyectos de inversión de capital (Van Horne & Wachowicz, 2010, pág. 2).

Luego de la Segunda Guerra Mundial se instala un nuevo sistema monetario internacional a los fines de promover el pleno empleo y la estabilidad de precios, y a su vez permitiera a cada país conseguir el equilibrio externo sin imponer restricciones al comercio internacional. El sistema creado en Bretton Woods definía unos tipos de cambio fijos en relación con el dólar y un precio invariable del oro en dólares.⁵ Los flujos de capitales del mundo comienzan a financiar en gran medida la reconstrucción europea y hacerse eco en la financiación de las balanzas de pagos deficitarias de países como Argentina (Krugman, Obstfeld, & Melitz, 2010).

Desde ese momento las evaluaciones y ponderaciones sobre el riesgo en inversiones financieras ganaron terreno, dando lugar análisis de cómo se podía mitigar el riesgo y obtener los mejores rendimientos.

Con anterioridad al desarrollo teórico de Markowitz (1952) para los inversores solo era de interés aquellos activos con los mayores rendimientos posibles y solo los adquirirían en base a la regla de los retornos esperados o anticipados. El Nobel identificaba a dichas exigencias como “*inadecuadas*”, *dado que “hay una cartera que ofrece tanto el rendimiento máximo esperado como el mínimo variación, y recomienda esta cartera al inversor”* (Markowitz, 1952, pág. 79). Define esta elección por parte del inversor como un “*comportamiento racional*”, dado que se pretenda la rentabilidad y se rechaza el riesgo.

Para 1958, James Tobin de la Universidad de Yale, presenta su trabajo “*La preferencia por la liquidez como comportamiento frente al riesgo*”. Extiende el modelo de Markowitz

⁵ Los 44 países que se reunieron en Bretton Woods firman el acta constitutiva del Fondo Monetario Internacional. Argentina rechaza su ingreso hasta el año 1955 que ingresa como país miembro.

planteando la idea que todos los inversores puedan prestar o tomar prestado a la misma tasa de interés.

Fueron, sin embargo, William F. Sharpe (Universidad de Stanford) y James Lintner (Universidad de Harvard) quienes completaron el estudio despertando un enorme interés en los círculos académicos y profesionales, desarrollando lo que se convertiría en uno de los ejes de la teoría financiera moderna y en uno de los modelos preferidos para realizar valuaciones de activos financieros. Este modelo se denominó "Modelo de Precios de Activos Financieros" o CAPM -"Capital Asset Pricing Model"- según sus siglas en inglés. Las teorías de armados de carteras antes mencionadas de los autores indicados serán profundizadas en los capítulos siguientes.

En el caso de nuestro país, a fin de adecuarse al nuevo desarrollo del sistema financiero internacional basado en bolsa de valores, en 1969 se promulga la Ley de Oferta Pública de Títulos Valores (N° 17.811), La mencionada ley tenía por objeto sustituir la antigua legislación vigente contenida en el Código de Comercio y en las leyes y decretos modificatorios, por un sistema actualizado que permitiera regular en forma integral todo lo relacionado con la oferta pública de títulos valores, la organización y funcionamiento de las Bolsas de Comercio y Mercados de Valores y la actualización de las personas dedicadas al comercio de aquellos.

Acercando hacia nuestros tiempos y con teorías sobre diversificación de carteras ya definidas igualmente se han producido "lecciones para el mercado". En 2008 la pérdida del S&P 500⁶ fue la peor desde 1937 y la de NASDAQ fue la más desfavorable en su relativamente corta historia. A pesar de todo fue un gran año para los inversionistas de la en las empresa de petróleo y gas Mexco Energy Corp, por la ganancia de 211% de la acción. Estos hechos demuestran la gran volatilidad de los mercados en esa época, brindando formidables y ganancias pero expuestas a un gran riesgo de perder mucho a su vez. Entonces, ¿que debe esperar uno, como inversionista del mercado de valores cuando invierte su dinero? (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012).

⁶ El índice Standard & Poor's 500, también conocido como S&P 500, es uno de los índices bursátiles más importantes de Estados Unidos. Al S&P 500 se lo considera el índice más representativo de la situación real del mercado.

En el plano local, el Dr Milanesi Gastón (2018)⁷, desarrolla un modelo de aplicación en el mercado Argentino, permitiendo “*identificar la frontera eficiente, cartera óptima y línea de mercados de capitales durante el año 2016*” (Milanesi, 2018).

En el año 2018 el MSCI⁸ aprueba la nueva clasificación de Argentina, pasando al país a mercado emergente luego de ser considerado de frontera por casi una década debido a los excesivos controles cambiarios. Este hecho permitió el ingreso de flujos de fondos a inversiones financieras destinado a dar volumen al mercado bursátil nacional con gran participación internacional.

1.3 Tema de investigación

La administración financiera es una ciencia que se encarga de administrar el recurso escaso dinero para lograr el mayor rédito posible en el menor tiempo atribuido a un entorno incierto, siendo necesario tomar decisiones financieras de inversión y financiamiento para poder obtenerlo. Se distinguen tres “pilares” analíticos que hacen de las finanzas una disciplina intelectual: el valor tiempo del dinero, la valuación de activos y la administración del riesgo.

A la administración del riesgo se la conoce como el proceso de formulación de las compensaciones entre beneficio y costo por la reducción del riesgo y la decisión de la acción que se tomará, que incluye la decisión de no actuar (Merton & Bodie, 1998, pág. 261). Dicho proceso consta de las etapas:

- 1- Identificación del riesgo
- 2- Evaluación del riesgo
- 3- Selección de técnica de administración del riesgo
- 4- Implementación
- 5- Revisión

⁷ Dr. en Ciencias de la Administración. Magister en Administración, Contador Público. Universidad Nacional del Sur, Argentina. Profesor Titular Exclusivo e Investigador Universidad Nacional del Sur. Departamento Ciencias de la Administración, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina.

⁸ MSCI Inc. (Morgan Stanley Capital Internacional), es un ponderador estadounidense de fondos de capital inversión, deuda, índices de mercados de valores, de fondos de cobertura y otras herramientas de análisis de carteras.

Con respecto a este trabajo de tesis, el tercer paso es el que se desarrolla. Hay diferentes técnicas para administrar el riesgo: evasión, prevención, retención y transferencia del riesgo. Es este último concepto el que desempeña un papel preponderante en el sistema financiero, y donde se encuadra la teoría de diversificación iniciada por Markowitz y sus posteriores complementos teóricos de colegas.

Las teorías de diversificación de carteras ayudan a entender por medio de herramientas matemáticas, conceptos estadísticos y análisis econométricos como los inversores pueden tomar las mejores decisiones posibles teniendo en cuenta las relaciones entre rendimiento y riesgo. Machain (2011) establece en "*Modelos de portafolios de inversión*" la metodología del valor en riesgo para pronosticar las pérdidas probables en la cartera (Machain, 2011, pág. 403).

En el **capítulo II** se establece el marco teórico sobre el cual se trabaja: en primera parte se describe el trabajo de Harry Markowitz "*Selección de portafolios*" del año 1952 publicado como un artículo del prestigioso *Journal of Finance*. En su escrito desarrolla el modelo de elección de cartera de acuerdo con la regla de "*rentabilidad esperada-varianza de rentabilidad*" (Markowitz, 1952, pág. 1). Utilizamos los conceptos matemáticos de programación no lineal para definir "buenos candidatos" a óptimos y verificamos su correspondencia por medio de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Mencionamos la posibilidad de endeudamiento a la tasa libre de riesgo y su alternativa de pedir prestado y prestar a la misma tasa, según teorías de James Tobin (1958). Luego especificamos los conceptos teóricos del CAPM, el cual determina, tal como expresa su traducción, cual es el costo del capital de una determinada acción, el rendimiento esperado de un determinado valor. El **capítulo III** describe el procedimiento y los supuestos adoptados para el desarrollo de la investigación, basados en la simulación sobre dos periodos con entornos macroeconómicos diferentes para la Argentina, siendo los cuatrienios 2012-2015 y 2016-2019 los seleccionados a fin de establecer la relación riesgo-rendimiento para el armado de cartera. Se mencionarán las dificultades para el desarrollo empírico en el mercado de acciones argentino. En el **capítulo IV** se exponen y comparan los resultados de los dos diferentes periodos de tiempo sujetos a las diferentes condiciones macroeconómicas mencionadas anteriormente. En el **capítulo V** se elaboran las conclusiones.

1.4 Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo general el armado de carteras eficientes con acciones argentinas que cotizan en mercados autorizados por la Comisión Nacional de Valores (CNV)⁹, aplicando el modelo teórico de optimización de activos riesgosos desarrollado por el destacado economista Harry Markowitz (1952), y el antes mencionado método de Valoración del Precio de los Activos Financieros o *Capital Asset Pricing Model*, conocido como modelo CAPM¹⁰ concibiendo la curva de mercado de valores llamada beta, donde es considerada solamente la fracción del riesgo no diversificable, desarrollada con posterioridad por William F. Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966).

Se compararán los resultados hipotéticos obtenidos de los diferentes armados de carteras frente a los datos reales de cada cuatrienio bajo análisis, y de esta manera elaborar las conclusiones correspondientes. El objetivo específico es demostrar que los rendimientos de cartera elaborados pueden ser superiores a los determinados por el índice Merval Argentino¹¹ sujetos a la misma comparación de riesgo y correspondiente a la base temporal en estudio, aplicando los modelos teóricos mencionados en el párrafo anterior.

2. Capítulo II

2.1 Selección de carteras y optimización

La idea de selección eficiente de cartera, es considerar dos puntos fundamentales. En primer lugar, el rendimiento esperado de una cartera es el promedio ponderado de los rendimientos esperados individuales. La otra cuestión, es que el riesgo de la cartera (desvío estándar) es menor que el promedio ponderado de desvío estándar de los activos evaluados (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012).

⁹ La Comisión Nacional de Valores es un organismo autárquico que funciona bajo la órbita del Ministerio de Economía de la República Argentina y es el encargado de la promoción, supervisión y control del mercado de capitales.

¹⁰ En 1990, Harry Markowitz, William F. Sharpe y Merton Miller, recibieron el Premio Nobel de Economía por su trabajo sobre diversificación y el modelo CAPM publicado en 1964.

¹¹ El índice Merval Argentina mide el valor en pesos de una canasta teórica de acciones, seleccionadas de acuerdo a criterios que ponderan su liquidez y considerando sólo empresas de capital nacional.

De manera intuitiva el inversor tratará de invertir su dinero en varias alternativas buscando diversificar su dinero de manera que cuando a una inversión le vaya mal se compense por alguna otra que le vaya bien.

La función de utilidad del inversor, expresada en forma de curvas de indiferencia, es la que en último término permite determinar la combinación de retorno - riesgo deseado.

Las características de los valores individuales para seleccionar portafolios e invertir de forma óptima que menciona Markowitz son las siguientes medidas estadísticas:

- **Rendimiento esperado.**

Es el rendimiento que un individuo espera que gane una acción durante el siguiente período, es una expectativa.

Definimos el rendimiento del título i-ésimo en el período t (R_{it}) como:

$$R_{it} = \frac{p_{it} - p_{it-1} + d_{it}}{p_{it-1}}$$

Siendo:

R_{it} : Retorno del activo i durante el período de tiempo t

p_{it} : Precio de cotización del título al final del periodo t.

p_{it-1} : Precio de cotización al comienzo del periodo t.

d_{it} : Dividendos percibidos por la acción i en el período¹² t

- **El rendimiento de una cartera.**

El rendimiento esperado de un portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos esperados de los valores individuales (Machain, 2011, pág. 406).

Se tiene varias variables aleatorias R_1, R_2, R_n . Si R es una suma ponderada (combinación lineal) de R_i entonces R es una variable aleatoria.

$$R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_n R_n$$

¹² En el trabajo de tesis no incorporamos este dato bajo análisis debido a que la obtención de información sobre las decisiones de asamblea y su publicación en los boletines en la Comisión Nacional de Valores extendían cierta parcialidad al momento de definir rendimientos.

El valor esperado (esperanza matemática) de una suma ponderada es la suma ponderada de los valores esperados

$$E(R) = \alpha_1 ER_1 + \alpha_2 ER_2 + \dots + \alpha_n ER_n$$

Sea X_i el porcentaje de los activos del inversor que se asignan a la R_i seguridad. El rendimiento (R) de la cartera en su conjunto es

$$R = \sum R_i X_i$$

Se considera que R_i (y, en consecuencia, R) son variables aleatorias. Las X_i no son variables aleatorias, sino que las fija el inversor. Desde los X_i son porcentajes tenemos $\sum X_i = 1$

- **Varianza del retorno esperado para cada activo.**

La varianza y su raíz cuadrada, la desviación estándar, son las dos medidas de dispersión más comunes de la variabilidad. En la distribución normal, la probabilidad de tener un rendimiento superior o inferior a la media en una cierta cantidad depende sólo de la desviación estándar (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 314).

En su obra Markowitz (1952) indica:

Sea la probabilidad de que $R = R_1$, sea P_1 ; que $R = R_2$, sea P_2 , etc.

La varianza¹³ de R se define como

$$V = P_1(R_1 - E)^2 + P_2(R_2 - E)^2 \dots + P_n(R_n - E)^2$$

Se tiene en cuenta el supuesto que el retorno de cualquier título valor será descrito por una variable aleatorio subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el período de referencia es conocida por el inversor. La esperanza matemática es la medida de retorno

¹³ Otras medidas de dispersión, estrechamente relacionado con V son la desviación estándar $\sigma = \sqrt{V}$ y el coeficiente de variación, σ/E .

para dicha variable aleatoria. Machian (2011) menciona que la distribución normal se utiliza para describir el comportamiento de los retornos de acciones¹⁴.

- **Covarianza de los retornos para cada par de activos**

Definimos la covarianza entre R_i y R_j como

$$\sigma_{ij} = E\{ [R_i - E(R_i)] [R_j - E(R_j)] \}$$

σ_{ij} Puede expresarse en términos del conocido coeficiente de correlación (ρ_{ij}). La covarianza entre R_i y R_j es igual a su correlación veces la desviación estándar de R_i veces la desviación estándar de R_j :

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

La varianza de una suma ponderada es

$$V(R) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j>1}^N \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}$$

- **Optimización de cartera**

Markowitz indica como “*regla*” que el inversor quiere (o debería querer) seleccionar una de esas carteras que dan lugar a las combinaciones de rendimiento esperado (E) y la varianza (V) indicadas como eficientes; es decir, aquellos con V mínimo para E dado o más y E máximo para V dado o menos. El inversor informado de las diferentes combinaciones alcanzables, puede indicar cual desea.

Se identifican tres etapas en la búsqueda de optimización de cartera¹⁵:

1. **Determinar criterio de cartera eficiente (dos alternativas)**¹⁶:

¹⁴ La distribución normal es también conocida por ser simétrica y con forma campanular. Es llamada la distribución de Gauss, siendo una de las distribuciones continuas.

¹⁵ Markowitz trabaja con tres valores $N=3$ en su modelo.

¹⁶ La programación lineal y no lineal son métodos de optimización no clásicos conocidos como de programación matemática. Alpha Chiang en su libro “Métodos fundamentales de economía matemática” Capítulo 20 describe el procedimiento para el análisis que nos compete: programación no lineal.

- Maximizar rentabilidad sujeto a la restricción de riesgo y composición de cartera:

$$E(R) = \alpha_1 ER_1 + \alpha_2 ER_2 + \dots + \alpha_n ER_n$$

Restricciones:

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

- Minimizar riesgo de la cartera sujeto a restricción de rentabilidad:

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}$$

Restricciones:

$$E(R) = \alpha_1 ER_1 + \alpha_2 ER_2 + \dots + \alpha_n ER_n$$

$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Por medio de estas dos alternativas de optimización de cartera (Chiang & Wainwright, 2007, pág. 354), ya sea por maximización de rentabilidad sujeto a la restricción de riesgo, o minimización de riesgo sujeto a restricción de rentabilidad, se obtiene un conjunto de carteras eficientes identificadas gráficamente como una curva convexa respecto al eje de las ordenadas, llamada “*frontera eficiente*” (Ver Figura 2).

2. Elección de cartera:

Dependiendo el grado de aversión al riesgo del inversor, se determinara la composición de la cartera en base a la función utilidad que describa mejor la relación riesgo-rentabilidad. La descripción cóncava de la curva de indiferencia respecto al eje de las ordenadas reflejan la relación positiva creciente entre riesgo-rendimiento (Ver Figura 1).

Dadas las hipótesis sobre racionalidad y aversión al riesgo, cada punto sobre la curva de indiferencia dará la misma utilidad al inversor y, por lo tanto, le será indiferente la elección entre uno u otro activo sobre la curva. Cuanto más arriba y a la izquierda estén situadas, representarán niveles de utilidad esperadas superiores.

Con respecto a las curvas de indiferencia del inversor averso al riesgo (Machain, 2011): Resulta indiferente para el inversor optar por el activo **P** o por el activo **B** como consecuencia que el mayor retorno de este último es suficiente para compensar el mayor riesgo asumido.

Los inversores van a querer incrementar su retorno sin asumir un mayor riesgo. La manera de lograrlo es aumentando el nivel de satisfacción, efectuando una traslación de I_2 a I_1 de manera que todas las combinaciones dentro de I_1 van a ser superiores a las de I_2 . Sin embargo, el inversor sólo podrá incrementar su nivel de satisfacción siempre que exista un activo disponible para hacerlo, es decir, las curvas de indiferencia indican preferencia pero ello no significa que sea posible lograrlo y, por ende, existe una restricción.

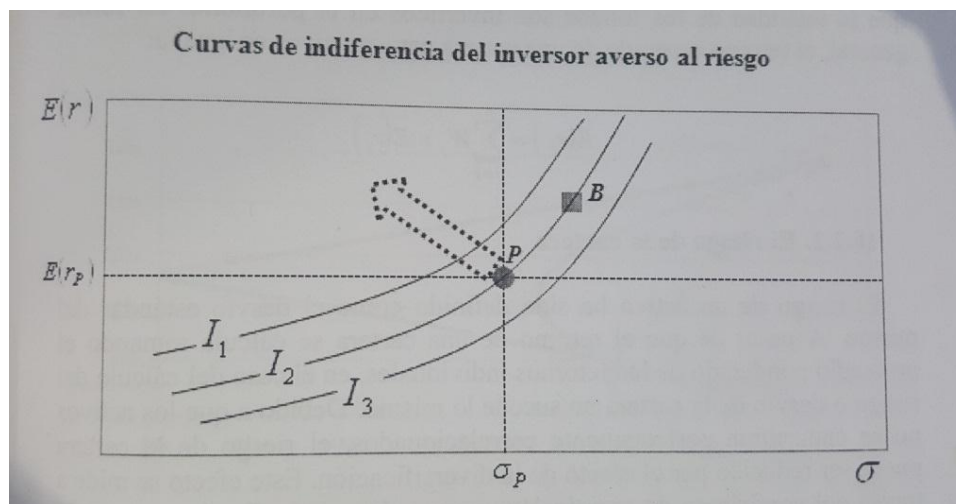


Figura 1 Curvas de Indiferencia Inversor (Machain, 2011, pág. 405).

3. Determinación de cartera eficiente:

Se puede demostrar que una curva sencilla puede esquematizar todos los portafolios posibles. El área sombreada de la Figura 2 representa el conjunto de oportunidad o conjunto factible cuando se consideran muchos valores. Dicha área representa todas las combinaciones posibles de rendimientos esperados y desviaciones estándar de un portafolio. Ningún valor o combinación de valores puede caer fuera de la región sombreada; es decir, ningún inversor racional asumiría una posición autodestructiva de pérdida garantizada por estar fuera del área sombreada.

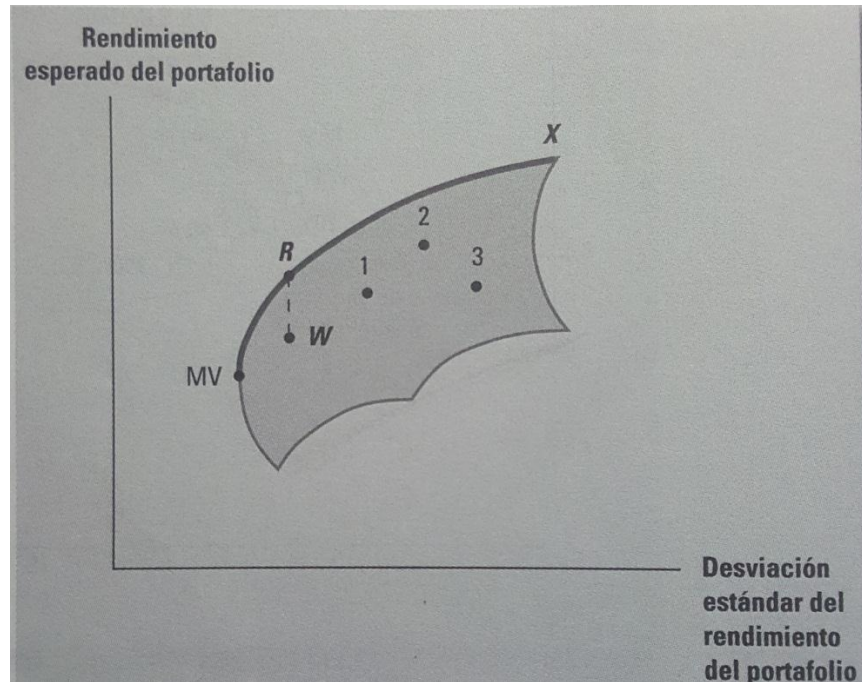


Figura 2 Conjunto factible de portafolios compuesto por muchos valores (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 345)

Como se aprecia en la Figura 2, un inversor querrá estar en algún punto en el filo superior entre Mínima Varianza (**MV**) y **X**. El filo superior de curva gruesa se denomina conjunto eficiente.

En el desarrollo del modelo CAPM se hace una extensión en detalle, tanto analítica como grafica de la composición de las diferentes curvas de indiferencia y su relación con la frontera eficiente.

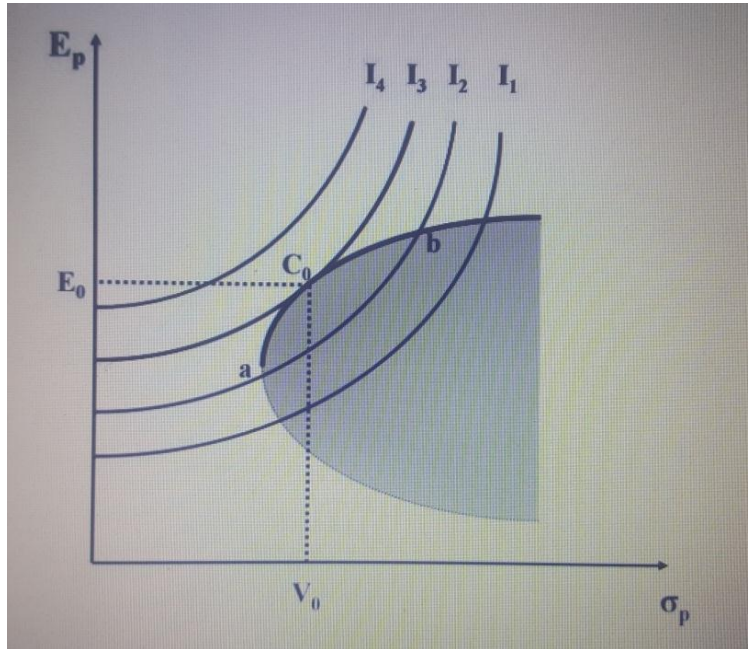


Figura 3 Curvas de isoutilidad y punto de tangencia con cartera óptima.

La cartera óptima se encuentra en el punto de tangencia entre la frontera eficiente y una curva de isoutilidad. La cartera **O** es la que proporciona mayor utilidad posible al situarse en la curva de indiferencia más elevada.

2.2 Programación matemática no lineal para optimización de carteras

A mediados del siglo XVIII, Lagrange publicó un método para resolver problemas de optimización condicionada solo a restricciones de igualdad: el método de los multiplicadores de Lagrange.

El objetivo del presente texto es mostrar una extensión del teorema de Lagrange que sirva para resolver un programa mixto, que es un problema de optimización condicionada donde se minimiza (el caso de este trabajo bajo análisis) o maximiza una función sujeta a ambos tipos de restricciones: de igualdad y de desigualdad.

Las condiciones de Karush-Kuhn –Tucker son el resultado analítico más importante de la programación no lineal, se desarrolla una explicación teórica acotada de estas condiciones acotadas a problemas de minimización, dado que los problemas de optimización de cartera siempre son desarrollados bajo este análisis.

- **Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker**

El cumplimiento de las mismas nos permitirá identificar si la cartera optima definida es un buen candidato siendo “la condición de primer orden para un extremo relativo o local es simplemente las derivadas parciales primeras de la función lagrangiana (diferenciable) con respecto a todas las variables de elección y los multiplicadores de Lagrange sean cero” (Chiang & Wainwright, 2007, pág. 739).

a) Condiciones de no negatividad:

Como primer paso, consideramos un problema con restricciones de no negatividad, pero son ningún otro tipo de restricciones. Tomando, en particular, el caso de una única variable, tenemos:

$$\text{Minimizar } \pi = F(x_1)$$

$$\text{Sujeto } x_1 \geq 0$$

Donde la función $F(x_1)$ se supone diferenciable. En vista de la restricción $x_1 \geq 0$, pueden surgir tres situaciones posibles. Primero, si aparece un máximo local de π en el interior de la región factible tenemos una solución interior, la condición de primer orden en este caso es $\frac{d\pi}{dx_1} = f'(x_1) = 0$ al igual que en problema clásico.

Segundo, podemos tener una solución de frontera, donde con $x_1 = 0$ la condición de primer orden $f'(x_1) = 0$ resulta valida. Sin embargo, como una tercera posibilidad, un máximo local puede caracterizarse, no solo por la ecuación $f'(x_1) = 0$, sino también por la desigualdad $f'(x_1) > 0$.

La conclusión es que para x_1 dé un máximo local de π debe satisfacer una de las tres condiciones siguientes:

1	$f'(x_1) = 0$	$x_1 > 0$
2	$f'(x_1) = 0$	$x_1 = 0$
3	$f'(x_1) > 0$	$x_1 = 0$

Estas tres condiciones pueden resumirse en una expresión única:

$f'(x_1) \geq 0.$	$x_1 \geq 0$	$x_1 f'(x_1) = 0$
-------------------	--------------	-------------------

Tomando juntas las tres partes se constituye la condición necesaria de primer orden para un mínimo local en un problema donde la variable de elección debe ser no negativa.

Cuando el problema contiene n variables de elección:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \pi &= F(x_1, x_2, x_n) \\ \text{Sujeto } x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

La condición clásica de primer orden $f_1=f_2 = f_n = 0$ debe modificarse a

$f_j \geq 0$	$x_j \geq 0$	$x_j f_j = 0$
--------------	--------------	---------------

Donde f_j es la derivada parcial de $\frac{\partial \pi}{\partial x_j}$.

b) Condiciones de desigualdad:

En este segundo punto se considera la incorporación de restricción de desigualdad y otra variable de elección.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \pi &= f(x_1, x_2) \\ \text{Sujeto } g_1(x_1, x_2) &\geq r_1 \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

La restricción de desigualdad puede transformarse en una igualdad incorporando una variable de holgura o de excedente.

Si están ausentes las restricciones de no negatividad, podemos formar la función lagrangiana correspondiente al objetivo de minimización:

$$F(x_1, x_2, \mu_1, s_1) = f(x_1, x_2) + \mu_1[r_1 - g_1(x_1, x_2) + s_1]$$

Y las condiciones necesarias de extremo se obtienen igualando a cero las derivadas parciales de F .

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \mu_1 \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \mu_1 \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = 0$$

Dado que las variables s_1 y x_j deben ser no negativas, de acuerdo a lo indicado en el punto a) precedente en relación a las condiciones de no negatividad, se pueden reexpresar estas condiciones como:

$\frac{\partial F}{\partial x_j} \geq 0$	$x_j \geq 0$	$x_j * \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2)$
--	--------------	--

$\frac{\partial F}{\partial s_1} \geq 0$	$s \geq 0$	$s * \frac{\partial F}{\partial s_1} = 0$
$\frac{\partial F}{\partial \mu_1} = 0$		

Luego, dado que $\frac{\partial F}{\partial s_1} = \mu_1$ para mínimo (el caso de nuestro trabajo), la segunda línea determina que $-\mu_1 \leq 0$. A su vez, la tercera línea indica que $s_1 = -r_1 - g$. Por consiguiente, considerando lo mencionado se puede combinar la segunda con la tercera línea de forma que se pueda expresar KKT sin las variables artificiales:

$\frac{\partial F}{\partial x_j} \geq 0$	$x_j \geq 0$	$x_j * \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 (j = 1, 2)$
$\frac{\partial F}{\partial \mu_1} \geq 0$	$\mu_1 \geq 0$	$\mu_1 * \frac{\partial F}{\partial \mu_1} = 0$

Entonces para el caso general de **n** variables de elección y **m** restricciones, las funciones lagrangiana **F**

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \mu_i [r_1 - g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

El cumplimiento de los parámetros antes mencionados de condiciones de no negatividad y las correspondientes a desigualdades, bajo los parámetros de la función lagrangiana, podemos finalizar el análisis de “condiciones necesarias de KKT” si se cumple cualificaciones de restricciones.

- **Cualificación de restricciones:**

Las condiciones de KKT son necesarias sólo si se satisface una determinada hipótesis. Esta impone un cierto requisito sobre las restricciones de un programa no lineal, con el propósito específico de desechar irregularidades en la frontera de la región factible, que invalidarían las condiciones en caso de que la solución óptima se diese allí.

Dado que las restricciones establecidas en nuestro trabajo son lineales¹⁷, no se dan situaciones de irregularidad en los puntos de frontera. Por lo que se considera satisfecha la cualificación de restricciones, y así las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son necesarias por el cumplimiento del punto precedente y justificado por hipótesis de restricción (Chiang & Wainwright, 2007, pág. 753).

- **Teorema de la suficiencia de Karush-Kuhn-Tucker**

¹⁷ En el punto 3.1 se detalla en forma analítica las restricciones que son lineales.

En los párrafos anteriores se describieron los conceptos teóricos de las condiciones necesarias para un mínimo en programación no lineal.

Alpha Chiang (2007) sobre el cumplimiento de las condiciones comenta: *“utilizando las condiciones necesarias como una red de pesca, podemos recoger tanto soluciones óptimas auténticas como otras no tan genuinas”*

En este sentido, las condiciones suficientes proporcionan un tipo de prueba más definitivo. La situación más gratificante que podríamos obtener de nuestros cálculos es que se determinen condiciones necesarias y suficientes.

a) Programación cuadrática

Adecuado a nuestro trabajo de selección de carteras de activos financieros, nos centramos en programación cuadrática. Ésta considera el problema de optimizar una función objetivo cuadrática sujeta a restricciones lineales y a condiciones de no negatividad.

Una forma cuadrática en R^n es una función $f(x)$ definida sobre R^n cuyo valor en un vector X en R^n se pueda calcular mediante una expresión de la forma $f(x) = X^T V X$, donde V es una matriz simétrica¹⁸ de $n \times n$.

Tal como se describe en el punto 2.1 Selección de carteras y optimización, la varianza (riesgo) de una cartera depende más de cómo es la covarianza entre los activos financieros que de las varianzas individuales de cada uno. En cambio, el rendimiento de la cartera es un promedio ponderado de la participación de cada instrumento en la composición de la misma. Así, para exponer con mayor facilidad, analizamos la varianza de una cartera compuesta por dos títulos, la misma es:

$$\text{Varianza cartera} = X_1^2 \sigma_1^2 + 2X_1 X_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + X_2^2 \sigma_2^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + 2X_1 X_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + X_2^2 \sigma_2^2$$

Donde X_i es la participación del título i en el portfolio, σ_i^2 es la varianza del título i , y ρ_i es la correlación entre los activos i y j .

En caso de n títulos la notación matricial que podemos utilizar para hallar la medida de riesgo de la cartera es:

$$\sigma_{cartera}^2 = X^T V X$$

¹⁸ Una matriz simétrica es una matriz A tal que $A^T = A$. Esta matriz es necesariamente cuadrada. Sus entradas en la diagonal principal son arbitrarias, pero sus otras entradas se presentan por pares, en lados opuestos de la diagonal principal (McDonald & Lay, 2016).

Siendo:

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ El vector de participación relativa de cada activo en la cartera.

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \text{ La matriz de varianzas y covarianzas.}$$

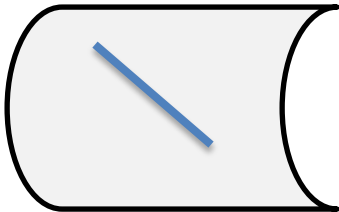
Como $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$, entonces la matriz V es simétrica y $\sigma_{cartera}^2$ es una forma cuadrática. Esto permite establecer problemas de programación matemática no lineal, específicamente cuadrática para resolver el problema de inversores adversos al riesgo que quieran como objetivo minimizar el riesgo de su cartera.

b) Convexidad

Para conocer si las condiciones de KKT son suficientes se debe determinar si el problema es un programa convexo. Para ello hay que verificar que tanto el espacio de soluciones como la función objetivo sean convexos, dado que es un problema de minimización.

Siendo todas las restricciones lineales se puede afirmar que la región factible es un espacio convexo. Definiendo un conjunto convexo V si para cada $p, q \in V$, el segmento de recta pq está contenido en V .

Conjunto convexo



Conjunto no convexo



Dado el anterior ejemplo, podemos indicar que “Una función $F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función convexa sobre un conjunto convexo V si sólo sí para todo $x_1, x_2 \in V$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica la desigualdad (McDonald & Lay, 2016, pág. 456):

$$F(x) = (1 - t)p + tq, \text{ con } t \in R$$

Asimismo, para corroborar si la función objetivo es convexa se pueden analizar los valores propios (autovalores) de la matriz V de varianzas y covarianzas.

Tal como indica el Teorema 5 de Lay David (2016) “Formas cuadráticas y valores propios”:

Sea V una matriz simétrica de $n \times n$. Así, una forma cuadrática $X^T V X$ es:

- a) Definida positiva sí y sólo sí todos los valores propios de V son positivos.
- b) Definida positiva sí y sólo sí todos los valores propios de V son negativos.
- c) Definida positiva sí y sólo sí todos los valores propios de V son positivos y negativos.

En relación al trabajo de tesis, esperemos que para problemas de minimización de riesgos la función cuadrática sea definida positiva para que ésta sea una función convexa.

2.3 La línea de mercados de capitales y maximización

James Tobin (1958) en su trabajo “La preferencia por la liquidez como comportamiento frente al riesgo” identifica cuanta riqueza se invertirá en activos monetarios y se ocupa de la asignación de estos importes entre efectivo y activos monetarios alternativos, los cuales denomina consolas (bonos). Al incorporar la posibilidad de endeudamiento y colocación de fondos al tipo sin riesgo se está incorporando un nuevo activo (Milanesi, 2018, pág. 45).

Un activo libre de riesgo, como su propio nombre indica, son aquellos valores con riesgo igual a cero o muy próximos al cero y con una rentabilidad esperada $E(R)$ completamente cierta. Tal como si descripción indica, al ser libre de riesgo, $\sigma_R = 0$.

El modelo de Tobin se complementa al modelo de Markowitz; al considerar se va a poder prestar dinero o pedir prestado dinero a una tasa de interés libre de riesgo, invirtiendo así ya no solo en activos de rentabilidad variable sino en el activo libre de riesgo¹⁹. Con respecto a la “incertidumbre, aversión al riesgo y preferencia por la liquidez” (Tobin, 1958):

Cuanto mayor sea la proporción de su saldo de inversión que mantiene en activos riesgosos, mayor riesgo asume el inversor. Al mismo tiempo, aumentar la proporción en dichos activos también aumenta su rendimiento esperado... () El inversor puede esperar más rendimiento si asume más riesgo.

¹⁹ El activo sin riesgo se refiere a un activo que ofrece una tasa de rendimiento predecible en el horizonte de negociación (es decir, el horizonte de decisión más corto posible). Así si el dólar de EEUU se toma como unidad de cuenta y el horizonte de negociación es un día, la tasa libre de riesgo es la tasa de interés de las letras del Tesoro de EEUU que vence al día siguiente (Merton & Bodie, 1998, pág. 323).

La combinación óptima de activos riesgosos se encuentra en el punto de tangencia entre la línea recta desde el punto que representa al activo sin riesgo (eje vertical) y la frontera eficiente de activos riesgosos descrita en Modelo de Markowitz. Esta línea recta (Línea de Mercado de Capitales) es la mejor línea de compensación riesgo-rendimiento alcanzable.

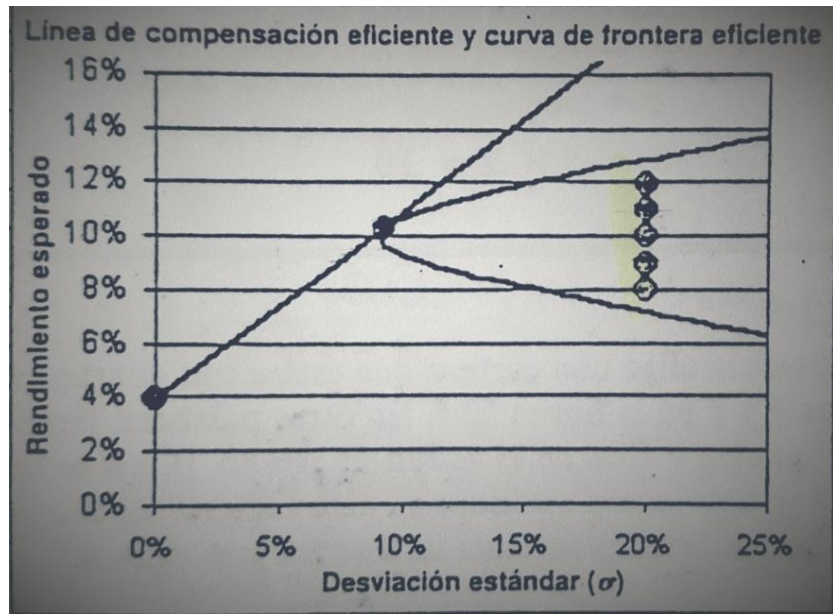


Figura 4 Optimización de cartera (Merton & Bodie, 1998, pág. 336)

La combinación óptima de activos riesgosos se encuentra como el punto de tangencia entre las curvas de indiferencia del inversor y la frontera eficiente.²⁰ Una vez elegida, se obtienen los " X_i "; es decir, se obtienen los porcentajes que se debe invertir en cada uno de los activos que conforman el portafolio.

2.4 Capital Asset Pricing Model (Modelo CAPM)

William Sharpe (1964) indica que "Uno de los problemas que ha acosado a quienes intentan predecir la el comportamiento de los mercados de capitales es la ausencia de un

²⁰ Merton, Robert; Bodie, Zvi en Finanzas Corporativas (1998) realizan un ejemplo gráfico identificando el punto de tangencia entre la línea recta desde el punto que representa el activo libre de riesgo y la frontera eficiente de activos riesgosos, a la cual mencionan como la "mejor línea de compensación riesgo- rendimiento alcanzable".

cuerpo de teoría microeconómica positiva que se ocupe de las condiciones de riesgo” (Sharpe, 1964, pág. 1).

Fue pionero en el desarrollo de un modelo teórico sobre equilibrio en fijación de precios de activos de capital denominado Capital Asset Pricing Model (CAPM).²¹ Su trabajo proporciona el modelo de comportamiento de los inversores individuales en condiciones de riesgo, las condiciones de equilibrio en que se deriva la línea del mercado de capitales, y las implicaciones para la relación entre los precios de los activos de capital individuales y los diversos componentes del riesgo. Expone que *“poco se ha dicho en relación con el componente de riesgo particular que es relevante”, y que “es difícil dar un significado real a la relación entre el precio de un solo activo y su riesgo. A través de la diversificación, parte del riesgo inherente a un activo puede evitarse de modo que su riesgo total obviamente no sea la influencia relevante en su precio”*.

Su trabajo complementó los desarrollos de diversificación de Markowitz. Incorporó un análisis sensible sobre riesgos y la vinculación de los mismos con un armado eficiente de carteras de inversión. Proporciona el modelo de comportamiento de los inversores individuales en condiciones de riesgo, las condiciones de equilibrio en que se deriva la línea del mercado de capitales, y las implicaciones para la relación entre los precios de los activos de capital individuales y los diversos componentes del riesgo.

- **Suposiciones del Modelo CAPM**

Este modelo fue desarrollado en 1960 y, desde entonces, ha tenido importantes implicaciones para las finanzas. Aunque otros modelos también intentan captar el comportamiento del mercado, el CAPM se basa en un concepto sencillo y se puede aplicar en el mundo real. Nos permite obtener ciertas inferencias acerca del riesgo y el tamaño de la prima por riesgo necesaria para compensar el hecho de correr ese riesgo.

Al igual que con cualquier modelo, deben hacerse suposiciones. Primero, suponemos que los mercados de capital son eficientes en cuanto a que los inversionistas están bien informados, los costos de las transacciones son bajos, existen restricciones despreciables

²¹ William Sharpe presenta en 1962 un documento que detalla el modelo CAPM en la revista Journal of Finance, el cual en principio fue descripto como irrelevante por la comunidad académica. En 1964 es republicado denominado su trabajo traducido al español "Precios de capital de los activos: una teoría del equilibrio del mercado en condiciones de riesgo", acompañando sus desarrollos de manera independiente y en forma posterior por parte de John Lintner, Jan Mossin y Jack Treynor.

sobre la inversión, y ningún inversionista es suficientemente grande para afectar el precio de mercado de una acción. También suponemos que los inversionistas aceptan el acuerdo general sobre el posible desempeño de las acciones individuales y que sus expectativas se basan en un periodo acostumbrado de propiedad, digamos, un año. Hay dos tipos de oportunidades de inversión que estudiaremos. La primera es una acción sin riesgo cuyo rendimiento en el periodo de propiedad se conoce con certidumbre. Con frecuencia, se usa la tasa para corto y mediano plazo de los valores del Tesoro como sustituto de la tasa sin riesgo. La segunda es el portafolio de mercado de las acciones ordinarias. Está representado por todas las acciones ordinarias disponibles y se ponderan según sus precios de mercado agregados totales. Como el portafolio de mercado es algo difícil de manejar, la mayoría de las personas usan un sustituto, como el Índice Standard & Poor 500 (Índice S&P 500)²². Este índice de base amplia del valor ponderado del mercado refleja el desempeño de las 500 acciones ordinarias más importantes de EEUU.

- **Riesgo sistemático y no sistemático**

El riesgo total de una cartera está compuesto por dos elementos (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 348):

- 1) Riesgo sistemático: es cualquier riesgo que afecta un gran número de activos, cada uno en mayor o menor medida. Incluso un inversionista con una cartera bien diversificada estará expuesto a este tipo de riesgo.
- 2) Riesgo no sistemático: es un riesgo que específicamente afecta un solo activo o un grupo pequeño de activos. La diversificación eficiente puede mitigar este riesgo y reducirlo de manera significativa.

Van Horne (2010), indica que *“El riesgo importante de una acción es su riesgo sistemático o inevitable. Los inversionistas pueden esperar ser compensados por correr este riesgo sistemático. Sin embargo, no deben esperar que el mercado brinde una compensación adicional por correr el riesgo evitable. Es esta lógica la que fundamenta el modelo de fijación de precios de activos de capital.”*

²² También podemos mencionar el Índice EuroStoxx 50, el cual es de referencia en la Eurozona y que incluye a las 50 compañías más importantes por capitalización bursátil, incluyendo actualmente empresas de España, Francia, Alemania, Bélgica, Irlanda, Italia y Holanda.

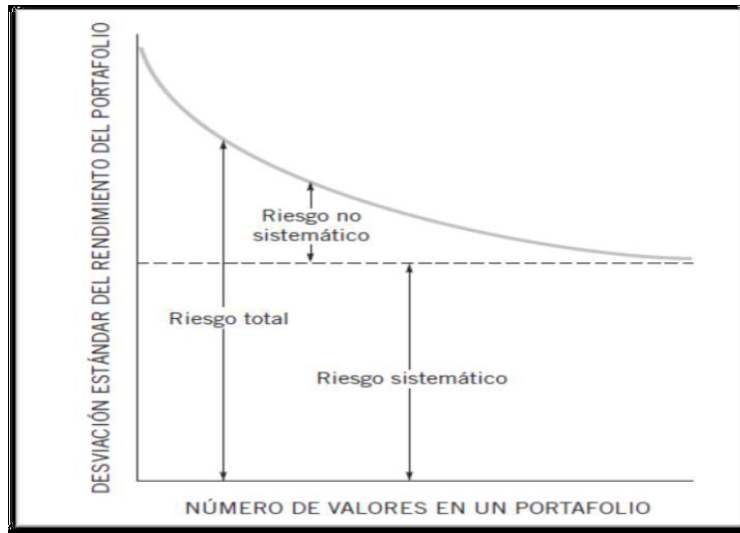


Figura 5 Relación de riesgo total, sistemático y no sistemático con el tamaño del portafolio (Van Horne & Wachowicz, 2010, pág. 105)

- **Política de inversión óptima para el individuo**

Suponga que un individuo ve el resultado de cualquier inversión en términos probabilísticos; es decir, piensa en los posibles resultados en términos de alguna distribución de probabilidad. Al evaluar la conveniencia de un determinado inversión, sin embargo, está dispuesto a actuar sobre la base de sólo dos parámetros de esta distribución: su valor esperado y su desviación estándar (Sharpe, 1964, pág. 3).

$$U = f(E_w; \sigma_w)$$

Siendo:

E_w ; Es riqueza futura esperada

σ_w El estándar predicho desviación de la posible divergencia de la riqueza futura real E_w .

Se supone que los inversores, bajo condiciones racionales, prefieren una mayor riqueza futura esperada a un valor más bajo, manteniendo el resto de los parámetros constante (ceteris paribus).

$$\left(\frac{dU}{dE_w} > 0\right)$$

Además, continuando con un análisis racional, eligen una inversión con un σ_w más bajo con respecto a un mismo nivel de E_w .

$$\left(\frac{dU}{d\sigma_w} < 0\right)$$

Estos supuestos implican que las curvas de indiferencia que relacionan E_w y σ_w serán de pendiente ascendente.

Considerando una riqueza actual W_i que se comprometerá a una inversión para obtener una determinada riqueza terminal W_t a una determinada tasa de rendimiento R .

$$R = \frac{W_t - W_i}{W_i}$$

Tenemos:

$$W_t = R * W_i + W_i$$

En términos de R, podemos expresar la utilidad del inversor:

$$U = g(E_R; \sigma_R)$$

De esta manera se podrán conformar las diferentes preferencias de los inversores en un conjunto de curvas de indiferencia, denotado con mayor utilidad moviéndose hacia abajo y/o a la derecha.

- **El portafolio óptimo**

Tal como se comentó en capítulo anterior, la frontera de eficiencia es el conjunto de posibilidades óptima de inversión y refleja la totalidad de combinaciones eficientes en el que el inversor puede invertir considerando su curva de indiferencia o función utilidad.

Un inversionista puede optar por distribuir sus fondos entre un activo libre de riesgo (desvío estándar es cero) y una porción destinada a alguna cartera dentro de la frontera de eficiencia de activos riesgosos. Se denota que el retorno de la nueva cartera como su riesgo mantienen relaciones lineales, de manera que las combinaciones de portafolios

entre carteras riesgosas en frontera y el activo libre de riesgo se grafica mediante una línea recta denominada “Línea de Mercado de Capitales” (Sharpe, 1964, pág. 432).

La relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de los portafolios compuestos por un activo riesgoso y un activo libre de riesgo puede verse en el Grafico 5. Considerando el portafolio representado en el *punto P*, el mismo se encuentra dentro del conjunto factible de los valores riesgos. Las diferentes combinaciones de la cartera del *punto P* con las inversiones en el activo libre de riesgo alcanzarían puntos sobre la línea recta denominada *línea LI*. Las inversiones que se podrían obtener en cualquiera de los puntos sobre la *línea LI* serían ineficientes.

Por otro lado, el *punto T* representa un portafolio de valores riesgosos. La *línea LII* representa portafolios formados por combinaciones del activo libre de riesgo y los valores de *A*. Los puntos sobre la *línea LII* que se extienden sobre la recta luego del *punto T* se alcanzan solicitando fondos en préstamo a la tasa libre de riesgo para comprar más de *T* de lo que se podría comprar sólo con los fondos originales.

Tal como se observa en la gráfica, la *línea LII* es tangente al conjunto eficiente de valores riesgosos. Dicha recta proporciona al inversionista las mejores oportunidades posibles, considerándola de este modo como el “conjunto eficiente de todos los activos”, tanto riesgos como no riesgosos (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 353).

Un inversor con mayor aversión al riesgo²³ podría elegir un punto por debajo de *T* sobre la *línea LII*, más cerca de r_f . Aquel que tenga una menor aversión al riesgo elegiría algún punto más cercano a *T*, incluso más allá siempre sobre la *línea LII* (solicitando dinero prestado a la tasa libre de riesgo).

La importancia que ilustra la gráfica es que bajo el supuesto de poder pedir prestado y prestar a la tasa libre de riesgo r_f , el portafolio de activos riesgosos que mantiene un inversionista siempre estará en el *punto T*. Independientemente de aversión al riesgo, nunca seleccionaría un punto por fuera ni en el interior de la región factible correspondiente al conjunto eficiente de activos riesgos representado por el antes mencionado “Paraguas de Marckowitz”.

Los conceptos antes mencionados se resumen en el denominado “*principio de separación*” representado por dos pasos para selección de carteras eficientes:

- 1) Estimar:

²³ La aversión al riesgo es la preferencia de un inversor por evitar incertidumbre en sus inversiones financieras.

Muy restrictivos e indudablemente poco realistas, pero la aceptabilidad de sus formulaciones y dado que estos supuestos implican condiciones de equilibrio que forman una parte importante de la doctrina financiera clásica; especialmente en vista de la escasez de modelos alternativos conduciendo a resultados similares

En un mundo con expectativas homogéneas, todos los inversionistas mantendrían el portafolio de activos riesgosos representado por el *punto T* de la Figura 5. Tal como se mencionó párrafos anteriores, los economistas usan un índice de base amplia como el Standard & Poor's 500 (S&P 500) como una representación del portafolio de mercado.

- **Los precios de activos de capital**

Hasta el momento se ha establecido una relación lineal entre el rendimiento esperado y la desviación estándar del rendimiento para combinaciones eficientes de activos riesgosos. Ahora podemos comentar sobre dicha relación pero con activos individuales, los cuales pueden estar normalmente por encima de la línea del mercado de capitales; lo que refleja la ineficiencia de las participaciones no diversificadas.

Comparando el rendimiento esperado de una acción individual con el rendimiento esperado para un portafolio de mercado²⁵, es útil manejar rendimientos que exceden la tasa libre de riesgo. El rendimiento excedente es aquel esperado menos la tasa libre de riesgo. En la Figura 6 se puede observar la relación existente entre ambos rendimientos, donde la recta lineal se denomina “recta característica” conformada a través de una regresión lineal con datos históricos.

²⁵ En el libro de Van Horne (2010) se utiliza el Índice Standard & Poor 500 como base representativa de un portafolio diversificado de valor ponderado del mercado que refleja el desempeño de las 500 acciones ordinarias más importantes.

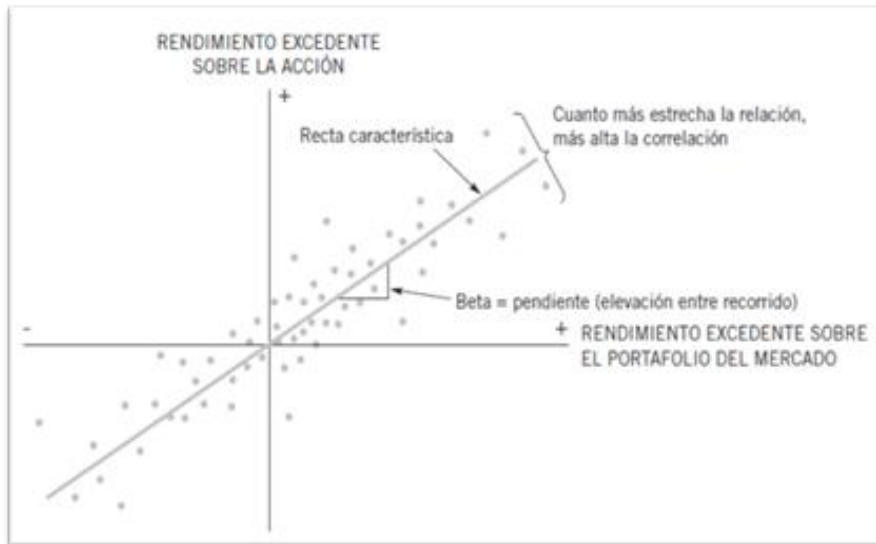


Figura 7 Relación entre rendimiento excedente sobre la acción y rendimiento excedente sobre portafolio de mercado con datos históricos (Van Horne & Wachowicz, 2010).

Se ha comentado que a través de la diversificación el riesgo no sistemático puede atenuarse en un portafolio grande, pero se continúa expuesto al riesgo sistemático. La pregunta es ¿hay alguna manera de medir el riesgo sistemático al que se deba preocupar un inversionista diversificado? La respuesta a esa pregunta es el concepto de la Beta. *“Resulta ser que la beta es la mejor medida del riesgo de un valor específico desde el punto de vista de un inversionista diversificado”* (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 354).

En la Figura 6 vemos que la Beta es la pendiente de la recta característica la cual describe, bajo el concepto matemático de derivar, como el cambio (sensibilidad) en el rendimiento excedente sobre la acción entre el cambio en el rendimiento excedente sobre el portafolio de mercado.

$$B_i = \frac{Cov(E_i, E_M)}{\sigma^2(E_M)}$$

- $Cov(E_i, E_M)$ es la covarianza entre el rendimiento del activo i y el rendimiento del portafolio del mercado.
- $\sigma^2(E_M)$ es la varianza del mercado.

Beta mide el riesgo sistemático de un valor. Por lo tanto, los inversionistas diversificados prestan atención al riesgo sistemático de cada valor. El resultado de la fórmula de Beta establecerá el grado de agresividad que tiene el inversionista, analizando ciertos resultados se puede distinguir en inversores (Ver Figura 7):

- Conservadores con $Beta < 1$. El rendimiento excedente de la acción varía menos que proporcionalmente que el rendimiento excedente del portafolio de mercado diversificado.
- Agresivos con $Beta > 1$. El rendimiento excedente de la acción varía más que proporcionalmente que el rendimiento excedente del portafolio de mercado diversificado.
- $Beta = 1$. El rendimiento excedente de la acción varía en la misma proporción que el rendimiento excedente del portafolio de mercado diversificado.

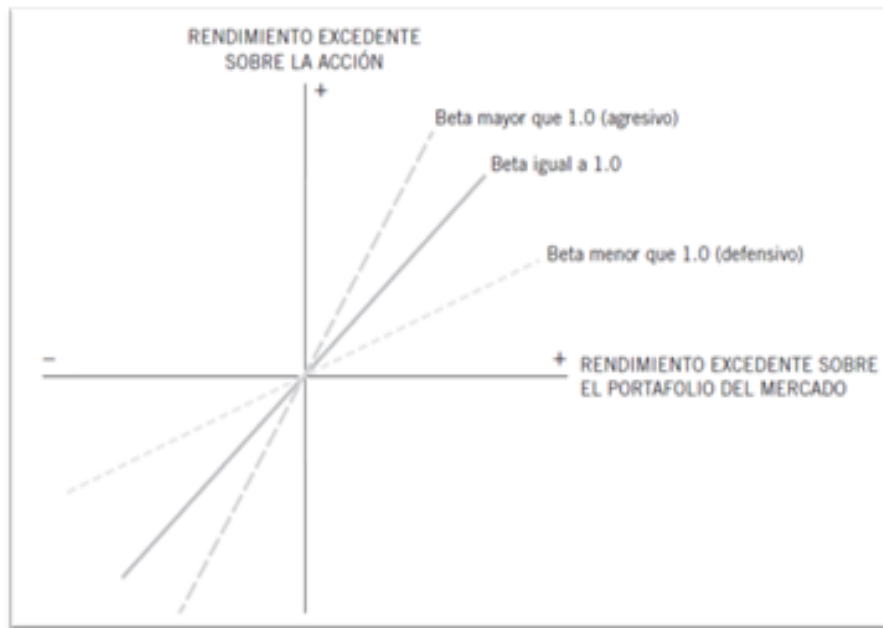


Figura 8 Betas según el tipo de inversionista. (Van Horne & Wachowicz, 2010)

Los individuos racionales mantendrán un activo riesgoso sólo si su rendimiento esperado compensa su riesgo. Entendiendo que los inversionistas están bien diversificados, el rendimiento de un valor debería estar positivamente relacionado con su beta. La relación

entre el rendimiento esperado y beta se puede representar en la fórmula que exterioriza el Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM):

$$R = R_f + \beta * (E_M - R_f)$$

- R Rendimiento esperado de un activo.
- R_f Tasa libre de riesgo (pura).
- β Beta del activo.
- $(E_M - R_f)$ Excedente entre el rendimiento de mercado y la tasa libre de riesgo.

Esta ecuación es la que se representa gráficamente en la Figura 8: Línea de Mercados de Valores:

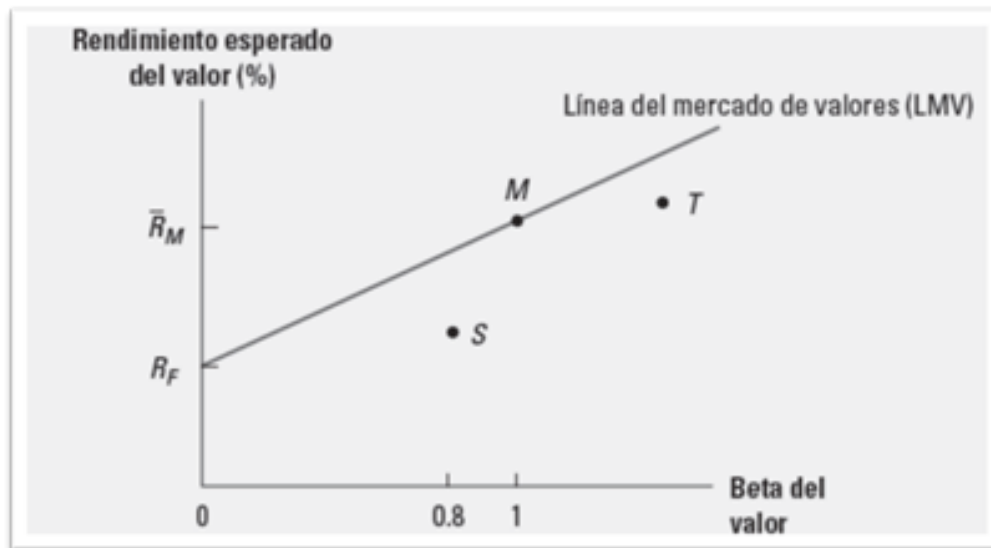


Figura 9 Relación entre rendimiento esperado de un activo y la beta de dicho valor (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 358)

Si consideramos los puntos S , M , y T de la Figura 8. Los puntos S y T son precios de valores sobrevaluados, y ningún inversionista los mantendría en esa posición, ya que tendría un rendimiento menor para un determinado riesgo. Los precios de las acciones disminuirían por desprenderse de esos activos, aumentando el rendimiento esperado de los dos valores. El ajuste de precio se mantendría hasta que se sitúen en la Línea de Mercados de Valores. Si habría valores por encima de la LMV, se consideraría valores

que se encuentran subvaluados, y habría una corrección de valores aumentando el precio y disminuyendo rendimientos esperados de dichos valores.

3 Capítulo III

3.1 Metodología de investigación

El objetivo del trabajo, tal como se menciona en el **Capítulo I**, es referido al armado de una cartera teórica óptima adecuada al riesgo-rendimiento requerido por el inversionista aplicando las teorías de diversificación de Markowitz que supere al rendimiento del Merval y sea un buen pronosticador de escenarios similares al futuro. Para el desarrollo de este trabajo se establecieron ciertas pautas y supuestos para luego elaborar las conclusiones correspondientes:

- **Períodos analizados:**

Se establecen el diferencial de dos armados de carteras en base a los cuatrienios 2012-2015 y 2016-2019. Fue definido de esta manera teniendo en cuenta que se corresponden a gobiernos antagónicos en cuanto a sus medidas económicas, marcos normativos y factores políticos y sociales.

Nos sustentamos sobre la idea en que *“los responsables políticos de una economía abierta tienen un trilema inevitable al elegir los sistemas de política económica que mejor les permiten alcanzar sus objetivos de equilibrio interno y externo”* (Krugman, Obstfeld, & Melitz, 2010, pág. 547).

La imposibilidad de que un país pueda tener simultáneamente más de dos puntos de la siguiente lista²⁶:

- 1) Estabilidad de tipo de cambio.
- 2) Política monetaria orientada a objetivos nacionales.

²⁶ Por supuesto, el trilema no implica que los régimen intermedios sean imposibles, solo exigen que el responsable de la policía económica elija entre objetivos distintos. Derivada del modelo de los economistas Mundell y Fleming, en ella se afirma que no pueden obtenerse simultáneamente estos tres objetivos de política macroeconómica: Tipo de cambio controlado, apertura al mundo de los mercados de capitales domésticos y una política monetaria también autónoma controlada por las autoridades.

3) Libre movilidad internacional de capitales.

Período 2012-2015:

En este cuatrienio lo que se representa como política restrictiva y no aplica es la movilidad de capitales, dando paso a que no se tenga que cumplir la condición de paridad de tasas de interés. Así mismo, identificamos otras características propias del trilema:

- Ley 22.208 “Inversiones Extranjeras”: Limitación en cuanto a la movilidad de capitales y a la repatriación de utilidades hacia el extranjero.
- Juicio por default técnico.
- Cepo cambiario.
- Fijación de tasas de interés pasivas, líneas de inversión productiva. Comité de Política Monetaria (COPOM).

Periodo 2016-2019

En este caso, el país con tipo de cambio flexible puede utilizar la política monetaria para conducir a la economía incluso cuando los flujos financieros se mueven libremente a través de sus fronteras. Las características principales del cuatrienio en cuestión son:

- Libre movilidad de capitales.
- Endeudamiento en Mercados de Capitales.
- Sin cepo cambiario (hasta el 2019 que se volvió a reglamentar).

- **Selección de acciones:**

Fueron seleccionadas acciones que cotizan en el Merval Argentino con rendimientos que tengan una medida de tendencia central positiva²⁷. Este índice pondera en base a la liquidez de los papeles y el volumen de operaciones, y no en relación al valor de capitalización bursátil como es realizado el Burcap.

Por estos motivos, fueron seleccionadas las siguientes acciones para los dos periodos:

²⁷ No se tienen en cuenta acciones que tengan como medida de tendencia central rendimientos negativos, ya que dicho dato alteraría los resultados finales en los armados de carteras.

Periodo 2012-2015:		Periodo 2016-2019
TRANSENER		SIDERAR
ALUAR		ALUAR
SAN MIGUEL		SAN MIGUEL
BCO FRANCÉS		BCO FRANCÉS
AGROMETAL		AGROMETAL
FERRUM		FERRUM
PAMPA ENERGÍA		PAMPA ENERGÍA
MOLINOS		CENTRAL PUERTO
AUTOPISTAS DEL SOL		AUTOPISTAS DEL SOL
LEDESMA		TGLT
JMIN		JMIN
TELECOM		SOC COMERCIAL DEL PLATA
YPF		Petroleo Brasileiro
TRANSP DE GAS DEL SUR		TRANSP DE GAS DEL SUR
MIRGOR		MIRGOR

Sin embargo, debemos mencionar que la concentración que existe en la cartera que compone el Merval hace que sea un índice muy expuesto a las volatilidades del mercado y con alto riesgo. Cuando algún sector específico de los que forman parte del mismo tiene un mal rendimiento, el resto del mercado replicará e mayor o menor medida el dato perjudicial (Instituto Argentino de Mercados de capitales).

Composición del Merval por sector

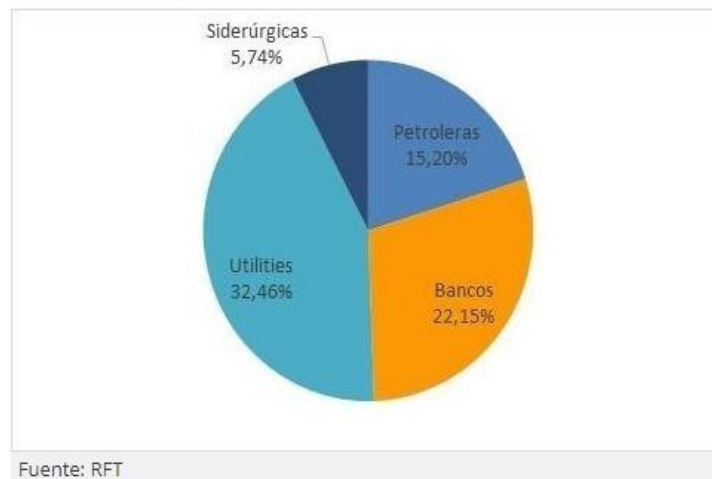


Figura 10 Gráfico de composición Merval (Instituto Argentino de Mercados de capitales)

Las influencias de sectores petroleros y energéticos, junto con las entidades financieras; configuran el ánimo del mercado. El precio y la evolución del valor del petróleo, la soja,

junto con las concentración y monopolio de los bancos a los largo de los años son determinantes fundamentales a la hora de hablar de rendimientos del índice Merval.

- **Obtención de datos:**

La base de datos que fue utilizada es la información brindada por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC). Fueron exportados los informes diarios con las cotizaciones de inicio y cierre de cada mes correspondiente a los meses de los periodos cuatrienios analizados bajo estudio.

- **Medidas de posición y localización:**

Si las medidas se calculan para los datos de una muestra, se les llama estadístico muestral (Anderson, Sweeney, & Williams, 2012, pág. 87).

- **Retornos esperados:**

Los retornos mensuales se calcularon según la siguiente fórmula: $R_i = \ln(P_1/P_{n-1})$. Se trabaja con tabla de frecuencia a los fines del cálculo del promedio simple para datos agrupados. Fue seleccionada esta medida de tendencia central dado que *“tiene la ventaja de ser un concepto intuitivo. Tiene una única media, es posible utilizar este valor para efectuar una comparación preliminar de distintos grupos. Es posible de utilizar ya que no hay intervalos abiertos”* (Machain, 2011, pág. 50).

- **Volatilidad:**

Partimos de los datos brindados de la frecuencia de tablas de datos agrupados antes mencionadas. El desvío estándar muestral permite medir en las mismas unidades que los datos originales; por esta razón dicha medida se compara más fácilmente con la media y con otros estadísticos que se miden en las mismas unidades que los datos originales. No es otra cosa que la raíz cuadrada de la varianza, es decir, la raíz cuadrada de la suma de las distancias entre cada observación y la media elevadas al cuadrado dividido por el número de datos menos uno.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i^{LM} - X)^2}{n - 1}}$$

Siendo f la frecuencia absoluta individual de cada uno de los intervalos, x_i^{LM} el valor correspondiente al promedio de los límites inferior y superior y X es la media aritmética para datos agrupados.

➤ Coeficiente de variación:

El desvío estándar es una medida de dispersión en términos absolutos. Si se quisieran comparar dos distribuciones es necesario evaluar la “escala”. “El resultado vendrá dado en una escala que va de 0% a 100% posibilitando la comparación entre diferentes distribuciones de frecuencias” (Machain, 2011, pág. 69).

$$\text{Coeficiente de Variación} = \frac{\sigma}{X} \times 100$$

Dónde:

σ Desvío estándar.

X Rendimiento medio de la acción.

➤ Variables aleatorias discretas:

Corresponde a intervalo dado representa la probabilidad de que la variable aleatoria continua X asuma un valor dentro de ese intervalo. Teniendo en cuenta que trabajamos con “Muestra aleatoria (Población infinita)” se utilizarán valores de “Estimación puntual” como medidas de tendencia central y dispersión.

➤ Distribución de muestreo:

La población tiene distribución normal. Suponemos que la población de la que se selecciona la muestra aleatoria simple tiene distribución normal o casi normal. Cuando esto ocurre, la distribución de muestreo de X está distribuida normalmente cualquiera que sea el tamaño de la muestra. Entendiendo que la muestras aleatorias simples es suficientemente grande para cumplir con la “Teoría del Límite Central”.

➤ Distribución de probabilidad t:

No tenemos el dato de la desviación estándar poblacional, por lo que se usa la misma muestra para calcular μ y σ . Esta situación se conoce como σ desconocida.

$$\text{Estimacion por intervalo de la media muestral} = X \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Dónde:

s Desvío estándar muestral.

$(1 - \alpha)$ es el coeficiente de confianza.

$t_{\frac{\alpha}{2}}$ es el valor de t que proporciona un área $\alpha/2$ en la cola superior de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad.

- **Esquema de optimización de cartera de programación no lineal:**

Un programa no lineal posee tres directrices:

- 1- Función objetivo: minimizar el riesgo (desvío estándar) de la cartera.
- 2- Conjunto de m restricciones.
- 3- Las condiciones de no negatividad sobre el X_i variables de elección.

A su vez, se mencionan aspectos a tener en cuenta:

- a- El campo de elección se extiende por toda la región factible, no sólo a los puntos extremos.
- b- El número de restricciones satisfechas como igualdades (y las restricciones de no negatividad) puede no coincidir con el número de variables de elección.
- c- La adherencia a una dirección uniforme de movimiento puede no conducir a valores continuamente crecientes (o decrecientes) de la función objetivo.
- d- La región factible puede no ser un conjunto convexo.
- e- Un óptimo local puede no ser un óptimo global.

Teniendo en cuenta lo citado los puntos anteriores, si bien mediante el uso de la herramienta del Solver para programación no lineal obtendremos un candidato a óptimo para el armado de cartera, es necesario ver el cumplimiento de las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker²⁸.

- **Estimación de beta de cada acción:**

La beta de un valor es la covarianza estandarizada del rendimiento de una acción con el rendimiento de una cartera de mercado.

²⁸ H.W. Kuhn y A.W Tucker elaboraron las teorías de condiciones necesarias y suficiencia en su trabajo "Programación no lineal" desarrollado en 1951 en la Universidad de California, Berkeley.

$$\text{Beta del valor } i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)} = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_M^2}$$

La fórmula indica que la beta es la covarianza de un valor con el mercado, dividido entre la varianza del mercado. Por definición, la beta del portafolio del mercado es 1.

Mencionamos las siguientes aclaraciones:

1. Las betas pueden variar a lo largo del tiempo.
2. El tamaño de la muestra puede ser inadecuado.
3. Las betas son influenciadas por los cambios en el apalancamiento financiero y los riesgos del negocio.

Como alternativa para aminorar los antes mencionados inconvenientes sería necesario examinar las estimaciones promedio de beta de varias empresas comparables dentro de la industria.

- **Estimación de la beta del portafolio de activos seleccionado:**

La beta del portafolio es simplemente un promedio ponderado de las betas de los valores que componen la cartera. La beta de cada portafolio se puede interpretar como la sensibilidad del rendimiento de éste con respecto al rendimiento del mercado (índice Merval).

4. Capítulo IV

4.1 Procedimiento para el desarrollo práctico del modelo

Para el cálculo de los portafolios óptimos se trabajó de la siguiente manera:

- 1 Utilizando herramientas de medidas de tendencia central se determina el **rendimiento de cada acción** en los periodos correspondientes.
- 2 Determinación de la **volatilidad de cada activo** en base a los supuestos indicados en el capítulo precedente.
- 3 **Covarianza de cada una de las acciones** para luego poder determinar su correlación. *“La varianza del rendimiento de un portafolio con muchos valores depende más de la covarianza entre cada uno de los valores que de las varianzas de ellos”* (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 346).

- 4 Nos enfocamos en la estructura práctica y teórica de la programación no lineal, establecemos un método de optimización²⁹ en que trabajamos con las consignas indicadas debajo utilizando la **herramienta Solver de Excel**.

No existe un algoritmo general para resolver modelos no lineales debido al comportamiento irregular de las funciones no lineales. Es por ello que el campo de elección no se puede reducir al conjunto de puntos extremos de la región factible como en programación lineal.

- Función objetivo: maximizar el rendimiento de la cartera para el menor riesgo previamente definido.
- Restricción de igualdad: La participación de acciones en cartera tendrá la posibilidad de ser alternativa de inversión o no serlo, se debe indicar que la suma de las proporciones a invertir sea 100%.
- Restricciones de no negatividad: ninguna acción tendrá una participación negativa en la cartera de inversión $w \geq 0$.
- Restricción de desigualdad: El rendimiento esperado de la cartera es el promedio ponderado de la participación de cada acción multiplicado por su retorno definido en puntos precedentes. El modelo solicita que por lo menos rinda el retorno establecido por el índice de mercado que se compara, en nuestro trabajo el Merval.

5 **Razón de Sharpe**

Adicional al dato de riesgo-rendimiento del armado de cada cartera, se menciona el dato de Razón de Sharpe. Esta razón se calcula como la prima de riesgo del activo dividida entre la desviación estándar.³⁰

6 **Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker**

Bajo las pautas teóricas de cumplimiento de las condiciones de KKT definidas en el punto 2.2 del capítulo anterior, nos centramos en la evaluación del candidato a óptimo dado por el solver en el caso de varianza mínima (menor riesgo). Utilizamos los datos de

²⁹ El conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen simultáneamente las restricciones se denomina “Región Factible” (RF) (Chiang & Wainwright, 2007).

³⁰ La razón de Sharpe se denomina en ocasiones razón de premio a riesgo, donde el premio es el rendimiento promedio y el riesgo es la desviación estándar (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 314).

rendimientos mensuales de los activos que componen la cartera, sus varianzas y las covarianzas entre ellos a fin de establecer la matriz cuadrática para suficiencia.

Verificamos que se cumplan las condiciones necesarias junto a cualificación de restricciones junto a la suficiencia. Se establecen las variables determinadas en el punto de varianza mínima, se definen las restricciones lineales de desigualdad en búsqueda de un rendimiento objetivo (mayor al Merval) y las de no negatividad.

A su vez definimos la función objetivo vinculado a la minimización del riesgo y determinamos la función lagrangiana para optimización de cartera. Así establecemos la holgura complementaria y el cumplimiento de las fórmulas de derivadas parciales para condiciones necesarias.

Para la suficiencia utilizamos la función cuadrática que corresponde a la matriz simétrica de varianzas y covarianzas. Utilizando el sistema informativo GeoGebra clásico y colocando la matriz correspondiente obtenemos los autovalores para determinar la suficiencia para determinar que la cartera de varianza mínima es el óptimo adecuado.

7 Rendimiento del mercado:

Utilizamos el índice Merval Argentino como un representante de una “cartera bien diversificada”. Machian (2011) indica que el *“rendimiento del mercado se refiere a un índice representativo de la economía y que refleje una cartera de activos que represente a todos los sectores económicos...que si bien en Estados Unidos suele tomarse el S&P 500, en Argentina el índice Merval sería uno representativo”*.

Se tomará este índice como el *“benchmark”*³¹ a superar a través de la aplicación de la teoría de Markowitz.

8 Beta de las acciones seleccionadas

Tal como se explicó anteriormente, la beta mide la sensibilidad del rendimiento del valor respecto al rendimiento de mercado.

9 Tasa libre de riesgo

³¹ Es la denominación que adopta como “punto de referencia” útil para la comparación.

Utilizamos la tasa de política monetaria definida por el Banco Central de la República Argentina en su Comité de Política Monetaria (COPOM).

Con respecto al primer cuatrienio 2012-2015 no había una determinación explícita de tasa de política monetaria; sino que se elaboraban escritos trimestrales denominados “Informe Macroeconómico y de Política Monetaria” y se presentaban en forma de secuencia todo un análisis coyuntural internacional y nacional y las decisiones de política monetaria global por parte del BCRA. Su principal herramienta de política monetaria eran las denominadas Lebac (Letras del BCRA) con una curva de rendimientos hasta 365 días. Dado que el spread de tasas era muy acotado, era muy similar la tasa del instrumento del BCRA con la de plazos fijos. Teniendo en cuenta lo antes mencionado y que los depósitos a plazo fijo se encuentran garantizados por la Ley 24.485 y posteriores modificaciones se utilizó la tasa Badlar Banco Privados³² mensual en promedio para su determinación.

Para el periodo 2016-2019 ya el BCRA publicaba diariamente su tasa de política monetaria en su página web <https://www.bcra.gob.ar/> como herramienta de referencia. La misma también se obtuvo por un promedio mensual de dicho cuatrienio.

Es un dato relevante para determinar la Razón de Sharpe y la pendiente de la recta tangente sobre la curva de frontera eficiente. Si bien los bonos soberanos de países desarrollados suelen ser considerados libres de riesgo, la susceptibilidad a las crisis financieras, sobre todo desde el 2008, ha comenzado a ser fuertemente cuestionada por la academia (Machain, 2011, pág. 410).

4.2 Pautas a tener en cuenta y exposición de resultados

a) Variables macroeconómicas que afectan de manera sistémica resultados

La decisión de trabajar con dos cuatrienios debido a las diferentes variables macroeconómicas que se corresponden a cada período 2012-2015 y 2016-2019 los resultados de riesgo-rendimientos tendrá distintas perspectivas.

El método de administración de carteras de Markowitz es mucho más eficaz cuando las variables macroeconómicas son estables que en épocas de distorsiones severas, esto se

³² La tasa BADLAR la calcula el BCRA en función de la tasa de interés de plazos fijos de más de un millón de pesos o dólares.

debe a que los pronósticos de los retornos esperados para las acciones están calculados sobre la base de datos históricos y para el cálculo de los mismos no se toman en cuenta los cambios en las perspectivas macroeconómicas.

En el periodo 2012-2015 se identifican armados de carteras eficientes con mayor volatilidad (riesgo) comparado a la del cuatrienio 2016-2019. Con respecto al primer cuatrienio mencionado podemos citar algunas cuestiones coyunturales que impactaron sobre la volatilidad de los activos:

- En el año 2008 se da el colapso del mercado hipotecario en Estados Unidos, sin embargo en América Latina y la Argentina la crisis tiene comienzo a sentirse alrededor desde 2010 hacia los años posteriores. Afectando tanto los canales financieros, por medio de la salida de flujos de capitales hacia los altos rendimientos del tesoro norteamericano *flight to quality*³³, y la restricción del crédito internacional; así como el comercio internacional y su consecuente caída de precios de commodities.
- En relación a la política económica interna, se produce un conflicto entre el gobierno y sectores agropecuarios. La denominada resolución 125 del año 2008 estableció el inicio una fisura que tuvo repercusiones en el cuatrienio 2012-2015.
- En el año 2014 la agencia de medición de riesgo Standard and Poor's (S&P) declaró a la Argentina en "default selectivo" luego que un fallo de la Justicia de Estados Unidos determinó que no puede pagar sus bonos reestructurados hasta terminar de negociar con el 7% que se rehusó a entrar en los canjes de deuda de 2005 y 2010.
- El aumento de déficit fiscal y la existencia de tasas de interese real negativa, presionaron a niveles de desinversión que impactaban sobre los análisis de crecimientos sostenidos en el futuro. La maniobra de intervención del INDEC³⁴ desde 2007 hasta el 2015 es una situación que alteraba todas las cifras relacionadas con inflación, pobreza, cálculo de PBI, y tasas de interés reales. (Ver tabla 1)

³³ El término *flight to quality* se refiere a un movimiento por parte de los inversionistas mediante el cual liquidan sus posiciones en activos riesgosos y transfieren sus recursos a títulos considerados menos riesgosos o libres de riesgo.

³⁴ El Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) es un organismo público desconcentrado de carácter técnico, dentro de la órbita del Ministerio de Economía de la Nación, que ejerce la dirección superior de todas las actividades estadísticas oficiales que se realizan en la República Argentina.

El denominado “lunes negro” del 12 de agosto del 2019³⁵, descripta por una caída inaudita para un sólo día en la bolsa local, las acciones se desplomaron y el índice S&P Merval se derrumbó más de 38%. Fue la segunda peor caída en la historia del índice, sólo superada por uno de los derrumbes de 2002.

Sumado al hecho descripto, durante el periodo 2015-2019 se mencionan los siguientes sucesos económicos y financieros:

- En diciembre del 2015 se produce la liberación del cepo cambiario y salto en el tipo de cambio oficial dando lugar al pass-through³⁶.
- El incremento de la deuda bruta de la Administración Central en % del PBI detalla que en el año 2012 era del 44,4%, en 2015 del 52,6%, y en 2019 89,8% (Argentina, 2022, pág. 14). Frente a incrementos de la deuda sobre todo externa en términos del PBI (Ver gráfico 10), un tipo de shock asociado a la restricción externa es lo que se conoce como un sudden stop o frenada súbita. ¿En qué consiste una frenada súbita?, (Braun & Llach, 2010, pág. 365) indican:

Puede entenderse tanto en un sentido de precio como en un sentido de cantidad: puede reflejarse tanto en un incremento en la tasa de interés por los préstamos que recibe un país (o la tasa de retorno que se le exige a las inversiones reales en ese país) o quizás sencillamente en un monto menor de crédito disponible (...). El aumento en el riesgo país, que hace crecer la tasa de interés y por lo tanto retrae tanto el gasto de consumo como de inversión, generando recesión.

³⁵ Un día antes del crack bursátil, se habían llevado a cabo las elecciones Primarias Abiertas Simultáneas y Obligatorias (PASO) en las que Alberto Fernández se impuso a Mauricio Macri por 16 puntos.

³⁶ En la literatura económica, el efecto que tiene una variación en la tasa de cambio sobre los precios domésticos se conoce como pass-through o coeficiente de traspaso de la tasa de cambio a los precios.

➤ Deuda Bruta de la Administración Central en % del PBI

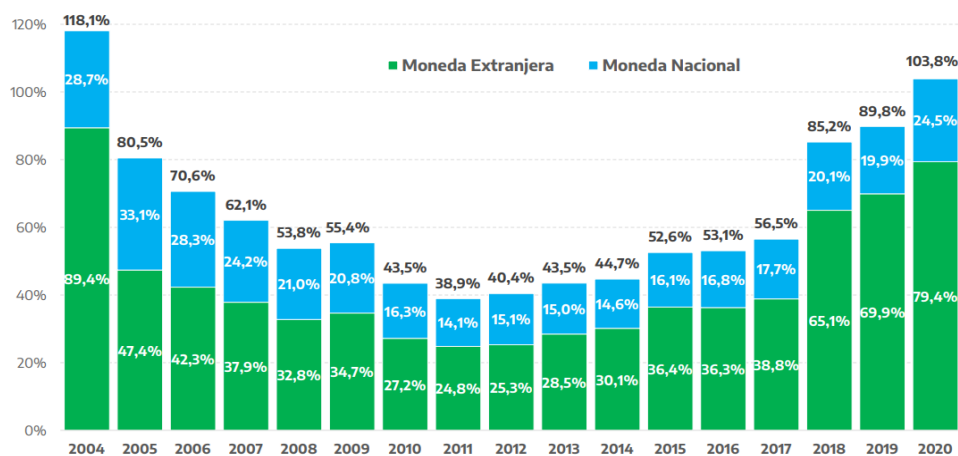


Figura 11 Deuda Bruta de la Administración Central en % del PBI diferenciado por Moneda Nacional y Extranjera (Argentina, 2022).

b) Resultado individual acciones bajo análisis

En primera instancia procedemos a brindar los datos resumidos de rendimientos mensuales y volatilidad de cada una de las acciones bajo análisis en cada periodo³⁷. Tal como mencionamos en el Capítulo III, al no tener el dato de la desviación estándar poblacional, trabajaremos con estimación de la media maestra en un intervalo de confianza del 95%. El valor medio del mismo es el retorno mensual indicado y determinado a su vez por la media de datos agrupados.

³⁷ En el Anexo I se encontrará con detalle la cotización de apertura y cierre de cada mes junto con los datos de rendimiento mensual y volatilidad.

Rendimiento-Riesgo acciones periodo 2012-2015

Periodo 2012-2015	Retorno mensual	intervalo 95% de confianza del retorno mensual		Riesgo
TRANSENER	4,08%	4,83%	3,33%	17,62%
PETROLEO BRASILEIRO	0,16%	5,67%	-5,35%	16,81%
SAN MIGUEL	0,09%	5,20%	-5,02%	23,42%
BCO FRANCÉS	5,35%	10,35%	0,34%	13,24%
AGROMETAL	2,14%	6,78%	-2,50%	15,74%
FERRUM	0,24%	4,56%	-4,09%	11,94%
PAMPA ENERGÍA	2,96%	8,66%	-2,73%	16,28%
MOLINOS	2,27%	7,85%	-3,32%	15,73%
AUTOPISTAS DEL SOL	5,37%	10,18%	0,55%	15,36%
LEDESMA	0,24%	5,05%	-4,56%	11,95%
JMIN	1,66%	5,70%	-2,38%	10,73%
TELECOM	1,89%	7,09%	-3,31%	13,12%
YPF	0,84%	6,13%	-4,45%	16,29%
TRANSP DE GAS DEL SUR	3,13%	8,16%	-1,90%	13,36%
MIRGOR	4,26%	8,79%	-0,27%	11,46%

Rendimiento-Riesgo acciones periodo 2016-2019

Periodo 2016-2019	Retorno mensual	intervalo 95% de confianza del retorno mensual		Riesgo
SIDERAR	1,31%	1,82%	0,81%	11,87%
ALUAR	2,37%	2,82%	1,91%	10,74%
SAN MIGUEL	1,98%	2,50%	1,46%	12,15%
BCO FRANCÉS	1,09%	1,76%	0,42%	15,74%
AGROMETAL	1,04%	1,78%	0,30%	17,44%
YPF	2,18%	2,66%	1,70%	11,22%
PAMPA ENERGÍA	2,83%	3,41%	2,25%	13,61%
CENTRAL PUERTO	2,73%	3,44%	2,02%	16,71%
AUTOPISTAS DEL SOL	2,85%	3,45%	2,25%	14,10%
CAPX	1,87%	2,49%	1,25%	14,65%
JMIN	4,36%	5,06%	3,66%	16,42%
CONSULTATIO	1,81%	2,31%	1,32%	11,64%
EDENOR	2,15%	2,82%	1,47%	15,89%
TRANSP DE GAS DEL SUR	3,32%	3,89%	2,76%	13,20%
MIRGOR	2,63%	3,30%	1,95%	15,92%

Ya determinada la varianza y la desviación estándar en los activos, procedemos al armado de una matriz de $15 \times 15 = 225$ cuadros. La varianza del portafolio es la suma de los términos en todos los cuadros (Ross, Westerfield, & Jaffe, 2012, pág. 345). Dependiendo de cómo se encuentre conformada la cartera en diferentes proporciones de activos, la matriz determinará diferentes valores para definir el riesgo de la misma.

Siempre recordando que la varianza del rendimiento de un portafolio con muchos valores depende más de la covarianza entre cada uno de los valores que de las varianza entre ellos. Ross, Westerfield, & Jaffe (2012) desarrollan la fórmula de la varianza de muchos activos empleando la matriz que se muestra en las siguientes dos figuras:

Stock	1	2	3	...	N
1	$X_1^2 \sigma_1^2$	$X_1 X_2 \text{Cov}(R_1, R_2)$	$X_1 X_3 \text{Cov}(R_1, R_3)$		$X_1 X_N \text{Cov}(R_1, R_N)$
2	$X_2 X_1 \text{Cov}(R_2, R_1)$	$X_2^2 \sigma_2^2$	$X_2 X_3 \text{Cov}(R_2, R_3)$		$X_2 X_N \text{Cov}(R_2, R_N)$
3	$X_3 X_1 \text{Cov}(R_3, R_1)$	$X_3 X_2 \text{Cov}(R_3, R_2)$	$X_3^2 \sigma_3^2$		$X_3 X_N \text{Cov}(R_3, R_N)$
.					
.					
.					
N	$X_N X_1 \text{Cov}(R_N, R_1)$	$X_N X_2 \text{Cov}(R_N, R_2)$	$X_N X_3 \text{Cov}(R_N, R_3)$		$X_N^2 \sigma_N^2$

Figura 12 Matriz que se utiliza para calcular la varianza de un portafolio.

Número de acciones en el portafolio	Número total de términos	Número de términos de varianza (número de términos sobre la diagonal)	Número de términos de covarianza (número de términos fuera de la diagonal)
1	1	1	0
2	4	2	2
3	9	3	6
10	100	10	90
100	10 000	100	9 900
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	N^2	N	$N^2 - N$

Figura 13 Número de términos de varianza y covarianza como función del número de acciones en el portafolio.

Con respecto al índice Merval Argentino los resultados que serán el objetivo a superar con la aplicación de la teoría de Markowitz, ya sea un mejor rendimiento para un mismo riesgo, o un menor riesgo para un mismo rendimiento:

Rendimiento-Riesgo índice periodo 2012-2015

Periodo 2012-2015	Retorno mensual	intervalo 95% de confianza del retorno		Riesgo
MERVAL	2,73%	10,86%	-5,39%	10,64%

Rendimiento-Riesgo índice periodo 2016-2019

Periodo 2016-2019	Retorno mensual	intervalo 95% de confianza del retorno		Riesgo
MERVAL	1,49%	1,97%	1,02%	11,10%

c) Resultados general de carteras diversificadas

Se definen 16 carteras diferentes en función de la relación riesgo-rendimiento determinada por el grado de aversión que el inversor desee. Se utiliza el programa de Excel Solver para trabajar con optimización y las restricciones de no negatividad³⁸ y suma de proporción de carteras al 100%.

La amplitud en el riesgo asignada en cada cartera está determinada en la diferencia entre el mayor riesgo que podría obtenerse de una cartera (portafolio Nro 15) y el de “mínima varianza” (cartera MV), y luego dividirlo por la cantidad de acciones bajo análisis que en nuestro trabajo son 15.

La razón de Sharpe y el coeficiente de variación son dos caras de una misma moneda. El primero mencionado establece la razón entre diferencia entre el retorno esperado de la cartera y la tasa libre de riesgo dividido por el riesgo de la cartera; por otro lado el coeficiente de variación, antes definido en el Capítulo III-Metodología de investigación, es la relación entre el riesgo y el rendimiento. Ambos sirven para realizar comparaciones de manera relativa en cuanto a las “escalas” de las medidas de tendencia central y dispersión. La tasa de política monetaria efectiva mensual del COPOM determinada como libre de riesgo, bajo las premisas indicadas en el capítulo anterior, para los periodos son las siguientes:

³⁸ Este análisis fue desarrollado en principio tanto por Markowitz en su teoría de optimización de cartera sujeto a restricciones sin negatividad, como Tobin en la que su solución generalmente incluiría tenencias negativas de algunos activos.

Periodo 2012-2015	Tasa libre de riesgo-Política Monetaria BCRA (MENSUAL)	Periodo 2016-2019	Tasa libre de riesgo-Política Monetaria BCRA (MENSUAL)
	1,5%		3,4%

En el periodo 2016-2019, la razón de Sharpe brinda datos negativos. La cuestión es que el diferencial entre el rendimiento de mercado y la tasa definida en el párrafo anterior es negativa, es decir una “prima de riesgo” negativa. En las conclusiones brindaremos más detalle a esta cuestión, pero en primera instancia el hecho de altos niveles de inflación y tipo de cambio flotante determinaban la tasa de interés de referencia real positiva por encima de los retornos de la acciones.

El punto de Mínima Varianza MV representa el portafolio que tiene la dispersión (varianza) más baja posible. Por definición, este portafolio también debe tener la desviación estándar más baja posible. Como contra partida, la cartera más riesgosa será la Nro 15, con el mayor desvío estándar. Por la relevancia que tiene en nuestro análisis sólo informamos en este apartado la composición de cartera correspondiente a la varianza mínima. En relación a la composición de carteras de cada uno de los portafolios restantes, se detallan en el Capítulo V.

Rendimiento-Riesgo de Portflio diversificado periodo 2012-2015

PORTFOLIO	RETORNO	σ	Razón de Sharpe	Coefficiente de variación
MV	1,88%	8,56%	4,00%	4,55%
1	2,25%	9,16%	7,77%	4,07%
2	2,48%	9,77%	9,65%	3,94%
3	2,66%	10,37%	10,82%	3,90%
4	2,82%	10,98%	11,68%	3,89%
5	2,96%	11,58%	12,28%	3,91%
6	3,09%	12,18%	12,74%	3,94%
7	3,22%	12,79%	13,16%	3,97%
8	3,34%	13,39%	13,46%	4,01%
9	3,45%	14,00%	13,66%	4,06%
10	3,56%	14,60%	13,85%	4,10%
11	3,68%	15,20%	14,09%	4,13%
12	3,79%	15,81%	14,25%	4,17%
13	3,88%	16,41%	14,27%	4,23%
14	3,96%	17,02%	14,24%	4,30%
15	4,08%	17,62%	14,43%	4,32%

Composición de cartera de Mínima Varianza periodo 2012-2015

Acciones	MV
	w
TRANSENER	0,0%
Petroleo Brasileiro	4,4%
SAN MIGUEL	0,0%
BCO FRANCÉS	0,0%
AGROMETAL	0,0%
FERRUM	26,3%
PAMPA ENERGÍA	0,0%
MOLINOS	0,0%
AUTOPISTAS DEL SOL	0,0%
LEDESMA	0,0%
JMIN	32,6%
TELECOM	6,3%
YPF	4,1%
TRANSP DE GAS DEL SUR	0,0%
MIRGOR	26,3%

Rendimiento-Riesgo de Portfolio diversificado periodo 2016-2019

	PORTFOLIO	RETORNO	σ	Razón de Sharpe	Coficiente de variación
	MV	2,57%	7,55%	-11,25%	2,94%
	1	2,62%	8,10%	-9,87%	3,09%
	2	2,63%	8,64%	-9,13%	3,29%
	3	2,64%	9,19%	-8,48%	3,48%
	4	2,65%	9,73%	-7,90%	3,67%
	5	2,65%	10,28%	-7,48%	3,88%
	6	2,66%	10,83%	-7,01%	4,07%
	7	2,66%	11,37%	-6,68%	4,28%
ineficiente	8	2,56%	11,92%	-7,21%	4,66%
ineficiente	9	2,43%	12,46%	-7,94%	5,13%
ineficiente	10	2,30%	13,01%	-8,60%	5,66%
ineficiente	11	2,08%	13,56%	-9,88%	6,52%
ineficiente	12	1,79%	14,10%	-11,55%	7,88%
ineficiente	13	1,50%	14,65%	-13,10%	9,77%
ineficiente	14	1,25%	15,19%	-14,28%	12,16%
ineficiente	15	1,09%	15,74%	-14,80%	14,44%

Composición de cartera de Mínima Varianza periodo 2016-2019

Acciones	MV
	w
SIDERAR	0,0%
ALUAR	48,2%
SAN MIGUEL	0,0%
BCO FRANCÉS	0,0%
AGROMETAL	0,7%
YPF	8,6%
PAMPA ENERGÍA	0,0%
CENTRAL PUERTO	0,0%
AUTOPISTAS DEL S	24,0%
CAPX	0,0%
JMIN	0,0%
CONSULTATIO	0,0%
EDENOR	0,0%
TRANSP DE GAS DE	9,1%
MIRGOR	9,5%

d) Comparación de resultados de diversificación en relación al índice Merval

➤ Periodo 2012-2015

Las composiciones de carteras eficientes son las correspondientes a los portafolios de mínima varianza hasta la cartera 15. La razón de Sharpe expone un *premio a riesgo* por sobre la tasa de política monetaria (definida como libre de riesgo en todas las carteras). De acuerdo con lo anteriormente expuesto, las carteras 3 y 4 tienen un rendimiento y riesgo muy similar al índice de mercado admitido (Merval). La curva se extiende de modo que a medida que se exige mayor rendimiento el riesgo se incrementa.

Con respecto a las carteras ineficientes, son denominadas de esta manera ya que para un nivel de riesgo menor obtendríamos un mayor rendimiento. Si decidiéramos invertir un porcentaje fijo superior al 50% en aquella que identificamos con menor riesgo individual, como es la acción de JMIN- HOLCIM; obtendríamos un retorno de la cartera Nro 16 (adicional al análisis) de *Mínima Varianza* del 1,73% con un riesgo del 8,71% *desvío estándar*. Ta como mencionara William Sharpe (1964) “*cualquier inversor racional, tanto aquel adverso al riesgo, cómo el aquél más osado, actuaría de modo de optimizar sus inversiones.*”

Conjunto factible de portafolios periodo 2012-2015

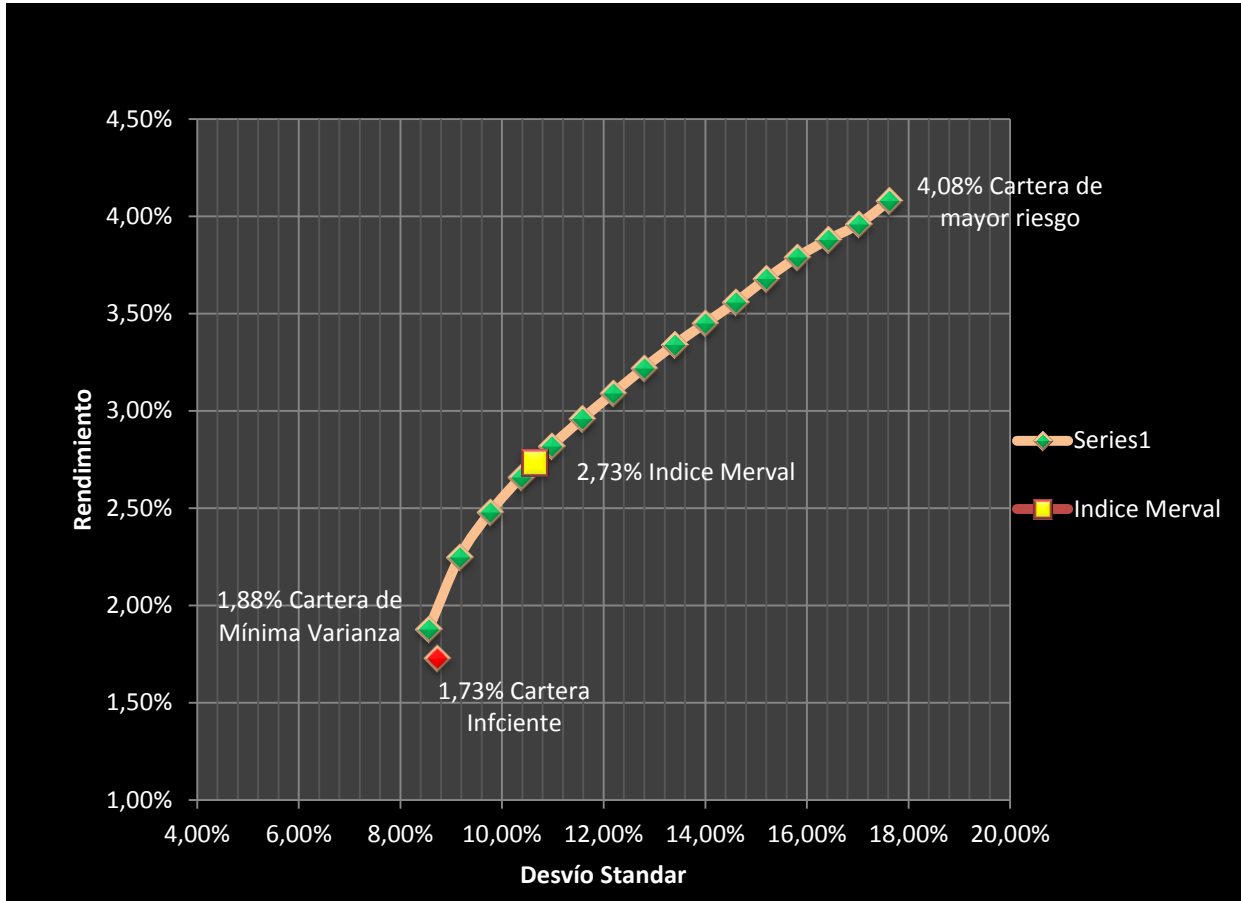


Figura 14 Gráfica de curva de eficiencia Riesgo-Rendimiento período 2012-2015.

➤ Periodo 2015-2019

En el siguiente gráfico expone que las carteras eficientes (puntos verdes de la gráfica) identificadas desde el portafolio de mínima varianza hasta la cartera 7, así como las aquellas ineficientes (puntos rojos de la gráfica) que se referencias desde la cartera 8 a la 13, tienen rendimientos superiores al índice Merval. En cambio, las carteras 14 y 15 además de ser ineficientes sus rendimientos son menores al índice en cuestión.

Conjunto factible de portafolios periodo 2016-2019

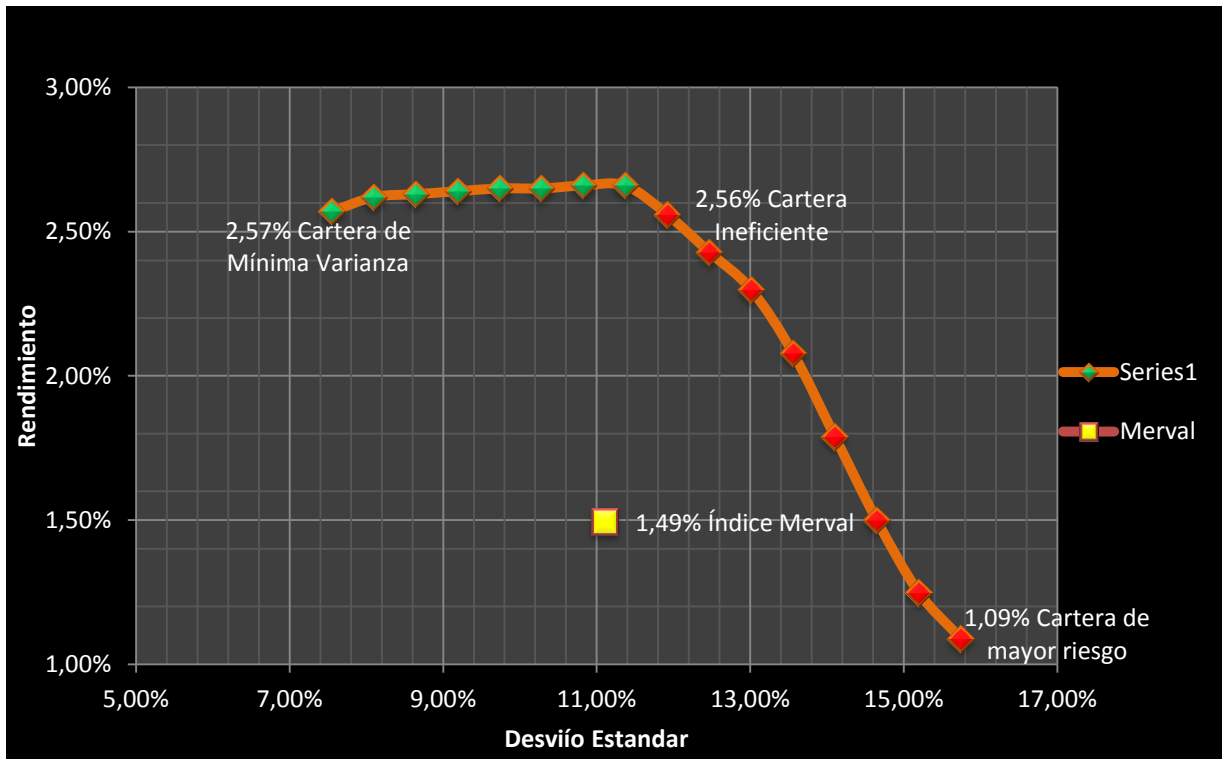


Figura 15 Gráfica de curva de eficiencia Riesgo-Rendimiento período 2016-2019.

e) Cumplimiento de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Se realizan las verificaciones de las condiciones de primer orden para el armado de las carteras de mínima varianzas para ambos cuatrienios. En primera medida es necesario mencionar los datos para los planteos:

- Periodo 2012-2015:

Datos

Rendimientos mensuales

- R_1 = rendimiento Petrobras = 0,16%
- R_2 = rendimiento Ferrum= 0,24%
- R_3 = rendimiento Holcim= 1,66%
- R_4 = rendimiento Telecom= 1,89%
- R_5 = rendimiento YPF= 0,84%
- R_6 = rendimiento Mirgor= 4,26%

Varianzas

- σ_1^2 = varianza Petrobras = 0,028264
- σ_2^2 = varianza Ferrum= 0,01425
- σ_3^2 = varianza Holcim= 0,01150
- σ_4^2 = varianza Telecom= 0,01722
- σ_5^2 = varianza YPF= 0,02652
- σ_6^2 = varianza Mirgor= 0,01312

Covarianzas

- $COV_{FERRUM-PETROBRAS}$ = 0,00797
- $COV_{PETROBRAS-JMIN}$ = 0,00461
- $COV_{PETROBRAS-TELECOM}$ = 0,01022
- $COV_{PETROBRAS-YPF}$ = 0,01210
- $COV_{PETROBRAS-MIRG}$ = 0,00507
- $COV_{FERRUM-JMIN}$ = 0,00483
- $COV_{FERRUM-TELECOM}$ = 0,00691
- $COV_{FERRUM-YPF}$ = 0,00537
- $COV_{FERRUM-MIRG}$ =0,00378
- $COV_{JMIN-TELECOM}$ = ,00557
- $COV_{JMIN-YPF}$ = 0,00446
- $COV_{JMIN-MIRG}$ =0,00594
- $COV_{YPF-TELECOM}$ =0,01228
- $COV_{MIRG-TELECOM}$ =0,00627
- $COV_{YPF-MIRG}$ =0,00784

Luego se identifican el planteo en su conjunto que estará bajo análisis para el cumplimiento de la función objetivo

Condiciones de Kuhun Tucker

Variables

- X_1 = acciones Petrobras = 4,435%
- X_2 = acciones Ferrum = 26,284%
- X_3 = acciones Holcim = 32,621%
- X_4 = acciones Telecom = 6,307%
- X_5 = acciones YPF= 4,072%
- X_6 = acciones Mirgo= 26,281%

Restricciones

- $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 1$ (100% participación en acciones, no hay holgura).
- $R_1 * X_1 + R_2 * X_2 + R_3 * X_3 + R_4 * X_4 + R_5 * X_5 + R_6 * X_6 \geq 0,0273$ (2,73 % rendimiento mensual Merval).
- $X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6 \geq 0$ (Condiciones de no negatividad).

Función objetivo

$$\sigma_1^2 * X_1^2 + \sigma_2^2 * X_2^2 + \sigma_3^2 * X_3^2 + \sigma_4^2 * X_4^2 + \sigma_5^2 * X_5^2 + \sigma_6^2 * X_6^2 + X_1 * X_2 * 2 * (Cov_{X_1 X_2}) + X_1 * X_3 * 2 * (Cov_{X_1 X_3}) + X_1 * X_4 * 2 * (Cov_{X_1 X_4}) + X_1 * X_5 * 2 * (Cov_{X_1 X_5}) + X_1 * X_6 * 2 * (Cov_{X_1 X_6}) + X_2 * X_3 * 2 * (Cov_{X_2 X_3}) + X_2 * X_4 * 2 * (Cov_{X_2 X_4}) + X_2 * X_5 * 2 * (Cov_{X_2 X_5}) + X_2 * X_6 * 2 * (Cov_{X_2 X_6}) + X_3 * X_4 * 2 * (Cov_{X_3 X_4}) + X_3 * X_5 * 2 * (Cov_{X_3 X_5}) + X_3 * X_6 * 2 * (Cov_{X_3 X_6}) + X_4 * X_5 * 2 * (Cov_{X_4 X_5}) + X_4 * X_6 * 2 * (Cov_{X_4 X_6}) + X_5 * X_6 * 2 * (Cov_{X_5 X_6})$$

Lagrangiano

- $L_1 (1 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - X_5 - X_6)$
- $L_2 (0,0273 - R_1 * X_1 - R_2 * X_2 - R_3 * X_3 - R_4 * X_4 - R_5 * X_5 - R_6 * X_6)$

➤ Periodo 2016-2019

Condiciones de Kuhn Tucker

Variables

- X_1 = acciones ALUAR = 48,203%
- X_2 = acciones AGROMETAL = 0,66%
- X_3 = acciones YPF = 8,591%
- X_4 = acciones AUSO = 24,010%
- X_5 = acciones TGS2= 9,053%
- X_6 = acciones Mirgor= 9,479%

Función objetivo

$$\sigma_1^2 * X_1^2 + \sigma_2^2 * X_2^2 + \sigma_3^2 * X_3^2 + \sigma_4^2 * X_4^2 + \sigma_5^2 * X_5^2 + \sigma_6^2 * X_6^2 + X_1 * X_2 * 2 * (\text{Cov } X_1 X_2) + X_1 * X_3 * 2 * (\text{Cov } X_1 X_3) + X_1 * X_4 * 2 * (\text{Cov } X_1 X_4) + X_1 * X_5 * 2 * (\text{Cov } X_1 X_5) + X_1 * X_6 * 2 * (\text{Cov } X_1 X_6) + X_2 * X_3 * 2 * (\text{Cov } X_2 X_3) + X_2 * X_4 * 2 * (\text{Cov } X_2 X_4) + X_2 * X_5 * 2 * (\text{Cov } X_2 X_5) + X_2 * X_6 * 2 * (\text{Cov } X_2 X_6) + X_3 * X_4 * 2 * (\text{Cov } X_3 X_4) + X_3 * X_5 * 2 * (\text{Cov } X_3 X_5) + X_3 * X_6 * 2 * (\text{Cov } X_3 X_6) + X_4 * X_5 * 2 * (\text{Cov } X_4 X_5) + X_4 * X_6 * 2 * (\text{Cov } X_4 X_6) + X_5 * X_6 * 2 * (\text{Cov } X_5 X_6)$$

Restricciones

- $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 1$ (100% participación en acciones, no hay holgura).
- $R_1 * X_1 + R_2 * X_2 + R_3 * X_3 + R_4 * X_4 + R_5 * X_5 + R_6 * X_6 \geq 0,0149$ (1,49 % rendimiento mensual Merval).
- $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$ (Condiciones de no negatividad).

Lagrangiano

- $\lambda_1 (1 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - X_5 - X_6)$
- $\lambda_2 (0,0273 - R_1 * X_1 - R_2 * X_2 - R_3 * X_3 - R_4 * X_4 - R_5 * X_5 - R_6 * X_6)$

Datos

Rendimientos mensuales

- R_1 = rendimiento ALUAR = 1,31%
- R_2 = rendimiento AGROMET= 1,04%
- R_3 = rendimiento YPF = 2,18%
- R_4 = rendimiento AUSO= 2,85%
- R_5 = rendimiento TGS2= 3,32%
- R_6 = rendimiento Mirgor= 2,63%

Varianzas

- σ_1^2 = varianza ALUAR = 0,011542
- σ_2^2 = varianza AGROMET= 0,030416
- σ_3^2 = varianza YPF= 0,012586
- σ_4^2 = varianza AUSO = 0,01987
- σ_5^2 = varianza TGS2 = 0,01742
- σ_6^2 = varianza Mirgor= 0,02532

Covarianzas

- COV ALUAR-AGROMETAL 0,003455103
- COV AUSO-YPF 0,005270307
- COV YPF-ALUAR 0,003640427
- COV YPF-TGSU2 0,009461163
- COV AUSO-ALUAR -0,001936197
- COV YPF-MIRG 0,007358894
- COV ALUAR-TGSU2 0,001534819
- COV AUSO-TGSU2 0,008447498
- COV ALUAR-MIRG 0,00131357
- COV AUSO-MIRG 0,006415888
- COV YPF-AGROMETAL 0,007026841
- COV TGSU2-MIRG 0,004771144
- COV AUSO-AGROMETAL 0,005270307
- COV AGROMETAL-TGSU2 0,013027846
- COV AGROMETAL-MIRG 0,008244568

Se verifican el cumplimiento de las condiciones de KKT para mínimo local y considerando que las restricciones son lineales se cumpliría la cualificación de restricciones. Realizamos los cálculos matemáticos para comprobar que se cumplen las holguras complementarias y se determinan los valores de los multiplicadores de Lagrange.

En los cuadros siguientes notaremos que Lambda λ_2 es igual a cero. Esta igualdad nos indica que el “precio sombra” o multiplicador de lagrange no incrementaría en ningún valor la función objetivo debido a que hay excedente de recursos sin utilizar para alcanzar el rendimiento mínimo solicitado; es decir el hecho que el rendimiento que exigiéramos en nuestra condiciones antes propuestas de varianza mínima es el del merval (2,73% mensual) y tal como señalamos en la gráfica 14 el punto de varianza mínima nos brinda un rendimiento mensual de 1,88% mensual. Cuando absorbamos mayor cantidad de recursos ese precio sobre dejará de ser 0, en caso de evaluar otros puntos sobre la frontera.

➤ Periodo 2012-2015:

Cumplimiento de condiciones

ítem	Holgura complementaria	Condiciones de no negatividad	Derivadas parciales
1	$\frac{\partial L}{\partial X_1} + X_1 = 0$	$X_1 \geq 0$ $X_1 = 4,435\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_1} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0$ $2 * X_1 * \sigma_1^2 + 2 * X_2 * CovX_1X_2 + 2 * X_3 * CovX_1X_3 + 2 * X_4 * CovX_1X_4 + 2 * X_5 * CovX_1X_5 + 2 * X_6 * CovX_1X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
2	$\frac{\partial L}{\partial X_2} + X_2 = 0$	$X_2 \geq 0$ $X_2 = 26,284\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_2} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$ $2 * X_2 * \sigma_2^2 + 2 * X_1 * CovX_1X_2 + 2 * X_3 * CovX_2X_3 + 2 * X_4 * CovX_2X_4 + 2 * X_5 * CovX_2X_5 + 2 * X_6 * CovX_2X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
3	$\frac{\partial L}{\partial X_3} + X_3 = 0$	$X_3 \geq 0$ $X_3 = 32,621\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_3} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_3} = 0$ $2 * X_3 * \sigma_3^2 + 2 * X_1 * CovX_1X_3 + 2 * X_2 * CovX_2X_3 + 2 * X_4 * CovX_3X_4 + 2 * X_5 * CovX_3X_5 + 2 * X_6 * CovX_3X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
4	$\frac{\partial L}{\partial X_4} + X_4 = 0$	$X_4 \geq 0$ $X_4 = 6,307\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_4} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_4} = 0$ $2 * X_4 * \sigma_4^2 + 2 * X_1 * CovX_1X_4 + 2 * X_2 * CovX_2X_4 + 2 * X_3 * CovX_3X_4 + 2 * X_5 * CovX_4X_5 + 2 * X_6 * CovX_4X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

ítem	Holgura complementaria	Condiciones de no negatividad	Derivadas parciales
5	$\frac{\partial L}{\partial X_5} * X_5 = 0$	$X_5 \geq 0$ $X_5 = 4,072\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_5} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_5} = 0$ $2 * X_5 * \sigma_5^2 + 2 * X_2 * CovX_5X_2 + 2 * X_3 * CovX_5X_3 + 2 * X_4 * CovX_5X_4 + 2 * X_1 * CovX_1X_5 + 2 * X_6 * CovX_5X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
6	$\frac{\partial L}{\partial X_6} * X_6 = 0$	$X_6 \geq 0$ $X_6 = 26,281\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_6} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_6} = 0$ $2 * X_6 * \sigma_6^2 + 2 * X_2 * CovX_6X_2 + 2 * X_3 * CovX_6X_3 + 2 * X_4 * CovX_6X_4 + 2 * X_1 * CovX_1X_6 + 2 * X_5 * CovX_5X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
7	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} * \lambda_1 = 0$	$\lambda_1 \geq 0$ Por el punto 1: $\lambda_1 = 0,012369$	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - X_5 - X_6 = 0$ Se cumple.
8	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} * \lambda_2 = 0$	$\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_2 = 0$	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \leq 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = (0,0273 - R_1 * X_1 - R_2 * X_2 - R_3 * X_3 - R_4 * X_4 - R_5 * X_5 - R_6 * X_6) = -0,00806$ Se cumple.

➤ Periodo 2016-2019

Cumplimiento de condiciones

ítem	Holgura complementaria	Condiciones de no negatividad	Derivadas parciales
1	$\frac{\partial L}{\partial X_1} * X_1 = 0$	$X_1 \geq 0$ $X_1 = 48,20$	$\frac{\partial L}{\partial X_1} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0$ $2 * X_1 * \sigma_1^2 + 2 * X_2 * CovX_1X_2 + 2 * X_3 * CovX_1X_3 + 2 * X_4 * CovX_1X_4 + 2 * X_5 * CovX_1X_5 + 2 * X_6 * CovX_1X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
2	$\frac{\partial L}{\partial X_2} * X_2 = 0$	$X_2 \geq 0$ $X_2 = 0,66\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_2} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$ $2 * X_2 * \sigma_2^2 + 2 * X_1 * CovX_1X_2 + 2 * X_3 * CovX_2X_3 + 2 * X_4 * CovX_2X_4 + 2 * X_5 * CovX_2X_5 + 2 * X_6 * CovX_2X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
3	$\frac{\partial L}{\partial X_3} * X_3 = 0$	$X_3 \geq 0$ $X_3 = 8,59\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_3} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_3} = 0$ $2 * X_3 * \sigma_3^2 + 2 * X_1 * CovX_1X_3 + 2 * X_2 * CovX_2X_3 + 2 * X_4 * CovX_3X_4 + 2 * X_5 * CovX_3X_5 + 2 * X_6 * CovX_3X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
4	$\frac{\partial L}{\partial X_4} * X_4 = 0$	$X_4 \geq 0$ $X_4 = 24,01\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_4} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_4} = 0$ $2 * X_4 * \sigma_4^2 + 2 * X_1 * CovX_1X_4 + 2 * X_2 * CovX_2X_4 + 2 * X_3 * CovX_3X_4 + 2 * X_5 * CovX_4X_5 + 2 * X_6 * CovX_4X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

ítem	Holgura complementaria	Condiciones de no negatividad	Derivadas parciales
5	$\frac{\partial L}{\partial X_5} * X_5 = 0$	$X_5 \geq 0$ $X_5 = 9,05\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_5} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_5} = 0$ $2 * X_5 * \sigma_5^2 + 2 * X_2 * CovX_5X_2 + 2 * X_3 * CovX_5X_3 + 2 * X_4 * CovX_5X_4 + 2 * X_1 * CovX_1X_5 + 2 * X_6 * CovX_5X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
6	$\frac{\partial L}{\partial X_6} * X_6 = 0$	$X_6 \geq 0$ $X_6 = 9,48\%$	$\frac{\partial L}{\partial X_6} \geq 0$ $\frac{\partial L}{\partial X_6} = 0$ $2 * X_6 * \sigma_6^2 + 2 * X_2 * CovX_6X_2 + 2 * X_3 * CovX_6X_3 + 2 * X_4 * CovX_6X_4 + 2 * X_1 * CovX_1X_6 + 2 * X_5 * CovX_5X_6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
7	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} * \lambda_1 = 0$	$\lambda_1 \geq 0$ Por el punto 1: $\lambda_1 = 0,012048$	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - X_5 - X_6 = 0$ Se cumple.
8	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} * \lambda_2 = 0$	$\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_2 = 0$	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \leq 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = (0,0273 - R_1 * X_1 - R_2 * X_2 - R_3 * X_3 - R_4 * X_4 - R_5 * X_5 - R_6 * X_6) = -0,00806$ Se cumple.

f) Suficiencia de condiciones de KKT

Tal como se comentó en el Capítulo II sección 2.2 en relación a la convexidad de la función objetivo, lo verificamos analizando la matriz simétrica de varianzas y covarianzas utilizando el programa Geogebra.

Una vez que cargamos los datos de matriz correspondientes a la función cuadrática de riesgo:

- Período 2012-2015:

Función cuadrática de varianzas y covarianzas						
	1	2	3	4	5	6
1	0,028264107	0,00796915	0,00461236	0,01022472	0,01209508	0,005065553
2	0,007969154	0,01425749	0,00482745	0,00690895	0,00537084	0,003775038
3	0,004612356	0,00482745	0,01150365	0,0055715	0,00446243	0,005942593
4	0,010224724	0,00690895	0,0055715	0,01722126	0,01228383	0,00627416
5	0,012095079	0,00537084	0,00446243	0,01228383	0,02652799	0,007843014
6	0,005065553	0,00377504	0,00594259	0,00627416	0,00784301	0,01312815

- Período 2016-2019:

Función cuadrática de varianzas y covarianzas						
	1	2	3	4	5	6
1	0,011542866	0,0034551	0,00364043	-0,0019362	0,00153482	0,00131357
2	0,003455103	0,03041684	0,00702684	0,00527031	0,01302785	0,008244568
3	0,003640427	0,00702684	0,01258619	0,00527031	0,00946116	0,007358894
4	-0,0019362	0,00527031	0,00527031	0,01987401	0,0084475	0,006415888
5	0,001534819	0,01302785	0,00946116	0,0084475	0,01742642	0,00477144
6	0,00131357	0,00824457	0,00735889	0,00641589	0,00477144	0,025329039

De la cual obtendremos los siguientes autovalores en Geogebra <https://www.geogebra.org/> indicando las siguientes descripciones en las fórmulas:

- ❖ Determinante(A-λ I)
- ❖ Resuelve(\$1 = 0)
- Período 2012-2015:

{λ = 0.006813293119622, λ = 0.007356829425495, λ = 0.01262551076339, λ = 0.01572274496374, λ = 0.04184195785353}

- Período 2016-2019:

{λ = 0.00361892487058, λ = 0.007902498534975, λ = 0.01288379330493, λ = 0.01819307780056, λ = 0.02127505304971, λ = 0.05330201943932}

Dado que la función cuadrática A de varianzas y covarianzas es simétrica y todos sus autovalores son positivos (alguno con multiplicidad algebraica dos) es definida positiva, por lo que la función objetivo es convexa para ambos cuatrienios..

Por la descripción del párrafo anterior definimos que el candidato a óptimo definido por el programa Solver de Excel cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker por cualificación de restricciones, sino también que son suficientes por ser un programa convexo.

g) Betas de cada una de las acciones

En el CAPM la beta de un valor mide su sensibilidad a los movimientos del portafolio del mercado. Tal como se definió en el Capítulo II, reiteramos que en un portafolio grande y diversificado carece de riesgo no sistemático porque los riesgos de este tipo de los

valores individuales desaparecen con la diversificación. Lo relevante es dar cuenta que la diversificación no tiene efecto sobre el riesgo sistémico a la que todo el paquete accionario se encuentra expuesto.

Con un beta igual a uno entonces los rendimientos excedentes de la acción varían proporcionalmente con el rendimiento excedente para el portafolio del mercado. En otras palabras, la acción tiene el mismo riesgo sistemático que todo el mercado. Si la beta es mayor que uno significa que el rendimiento excedente de la acción varía más que proporcionalmente con el rendimiento excedente del portafolio del mercado. Dicho de otra manera, tiene más riesgo inevitable que el mercado como un todo. Este tipo de acción con frecuencia se llama inversión “*agresiva*”. En el caso de que la beta sea menor que uno quiere decir que el rendimiento excedente de la acción varía menos que proporcionalmente con el rendimiento excedente del portafolio del mercado. Este tipo de acción suele llamarse inversión “*defensiva*” (Van Horne & Wachowicz, 2010, pág. 108).

Estimación de la beta de cada acción en el periodo 2012-2015

EMPRESA	BETA
TRANSENER	1,24
PETROLEO BRASILEIRO	1,05
SAN MIGUEL	0,87
BCO FRANCÉS	1,03
AGROMETAL	0,76
FERRUM	0,58
PAMPA ENERGÍA	1,12
MOLINOS	1,03
AUTOPISTAS DEL SOL	0,61
LEDESMA	0,92
JMIN	0,56
TELECOM	1,05
YPF	1,09
TRANSP DE GAS DEL SUR	0,97
MIRGOR	0,52

Estimación de la beta de cada acción en el periodo 2016-2019

EMPRESA	BETA
SIDERAR	0,09
ALUAR	0,15
SAN MIGUEL	0,59
BCO FRANCÉS	1,26
AGROMETAL	1,06
YPF	0,70
PAMPA ENERGÍA	1,12
CENTRAL PUERTO	1,29
AUTOPISTAS DEL SOL	0,77
CAPX	1,10
JMIN	1,09
CONSULTATIO	0,67
EDENOR	1,26
TRANSP DE GAS DEL SUR	0,89
MIRGOR	0,63

h) Betas del portafolio accionario

La beta del portafolio es simplemente un promedio ponderado de las betas de los dos valores. Una propiedad muy útil es que la beta promedio de todos los valores, cuando se pondera la proporción del valor de mercado de cada título a la del portafolio del mercado, es de uno. Es decir:

$$\sum_{i=1}^N X_i B_i = 1$$

Donde X_i es la proporción del valor de mercado del título i a la de la totalidad del mercado y N es el número de títulos en el mercado. En el caso de nuestro trabajo cada una de las carteras no tendrá las proporciones del índice de referencia Merval, sino que se optimiza el riesgo-rendimiento a los fines de mejorar los resultados de dicho índice por medio de otra composición de proporciones.

De este modo, hacemos referencia a la beta correspondiente a cada una de las carteras. A medida que se incrementa el riesgo de la tenencia, la beta del portafolio tiende a incrementarse.

Recordar que aquellos portafolios remarcados en color rojo del periodo 2016-2019 son aquellos denominados “*ineficientes*” y no es racional invertir en ellos.

Estimación de la beta de cada portafolio en el periodo 2012-2015

PORTAFOLIO	BETA
MV	0,629
1	0,678
2	0,690
3	0,772
4	0,818
5	0,863
6	0,906
7	0,948
8	0,987
9	1,026
10	1,063
11	1,099
12	1,135
13	1,172
14	1,209
15	1,244

Estimación de la beta de cada portafolio en el periodo 2016-2019

PORTAFOLIO	BETA
MV	0,4672
1	0,5972
2	0,6758
3	0,7375
4	0,7904
5	0,8393
6	0,8850
7	0,9401
8	0,9950
9	1,0423
10	1,0842
11	1,1237
12	1,1622
13	1,1979
14	1,2261
15	1,2603

5. Capítulo V

5.1 Conclusiones

En el trabajo realizado desarrollamos el modelo de optimización de portafolios desarrollado por Harry Markowitz, muchas veces criticado por su elevado contenido teórico. Si bien con el paso del tiempo se han desarrollado alternativas al modelo base de diversificación, el mismo probó ser bajo determinados supuestos un poderoso aliado de los profesionales en el campo práctico.

La utilización de dos períodos diferentes bajo estudio debido a diferentes contextos macroeconómicos y financieros da cuenta de algunas coincidencias y diferencias en las conclusiones en cada cuatrienio.

Los ítems sobre los cuales nos centramos para la evaluar los resultados son los siguientes:

a) Riesgo-Rendimiento

Resumiendo los datos de cada cuatrienio hacemos mención que el promedio simple de rendimientos del 2012-2015 fue de 3,19% y un riesgo de 13,09% para las carteras eficientes. En cambio, en el correspondiente al 2016-2019 el promedio simple del retorno fue de 2,64% y un riesgo de 9,46%.

Si bien los coeficientes de variación en ambos casos se ubican en torno al 4%, el hecho que la razón de Sharpe en el segundo periodo fuera negativa, a diferencia del primero que es positiva en todas las carteras, nos indica que se aplicó una política monetaria restrictiva que desincentivaba las alternativas de inversión en carteras riesgosas.

El rendimiento del Merval para 2012-2015 se ubica sobre la curva de frontera eficiente. Si hubieses querido obtener un riesgo similar al que nos presentó el Merval en dicho periodo, el rendimiento de la cartera hubiese sido muy similar. En la Grafica 14 damos cuenta de este hecho. En cambio, para el siguiente cuatrienio bajo análisis, se obtienen rendimientos mucho mayores que el Merval en caso de haber armado carteras eficientes recomendadas; en la Grafica 15 se explicita.

Por otro lado las betas de las carteras eficientes son mayores en el primer periodo con respecto al segundo en cuestión. Es más, las betas mayores a uno en 2016-2019 no permite someternos con carteras eficientes que varían más que proporcionalmente que el rendimiento excedente del portafolio de mercado diversificado, para nuestro trabajo el Merval.

Los hechos antes planteados pueden estar vinculados a una mayor tasa de interés de referencia al momento de cambio de gobierno a fines del 2015. Tal como se comentó en párrafos anteriores, la política monetaria del Banco Central³⁹ luego de la normalización en la publicación de datos del Indec fue la de aplicar tasas reales positivas. Con relación a esta medida se puede explicar el porqué de las primas de riesgo negativas en el periodo 2015-2019 que se traducen con una razón de Sharpe negativa. Sumado a lo antes indicado, una gestión de altas tasas de interés disminuye el valor de las empresas por un menor valor de los flujos futuros descontados a una mayor tasa, de aquí los menores rendimientos mensuales para este último cuatrienio.

- Periodo 2012-2015

PORTFOLIO	RETORNO	σ	Razón de Sharpe	Beta del portafolio
MV	1,88%	8,56%	4,00%	0,63
1	2,25%	9,16%	7,77%	0,68
2	2,48%	9,77%	9,65%	0,69
3	2,66%	10,37%	10,82%	0,77
4	2,82%	10,98%	11,68%	0,82
5	2,96%	11,58%	12,28%	0,86
6	3,09%	12,18%	12,74%	0,91
7	3,22%	12,79%	13,16%	0,95
8	3,34%	13,39%	13,46%	0,987
9	3,45%	14,00%	13,66%	1,03
10	3,56%	14,60%	13,85%	1,06
11	3,68%	15,20%	14,09%	1,10
12	3,79%	15,81%	14,25%	1,14
13	3,88%	16,41%	14,27%	1,17
14	3,96%	17,02%	14,24%	1,21
15	4,08%	17,62%	14,43%	1,24
Promedio simple	3,19%	13,09%		

³⁹ El art 3 de la Ley N°24.144 establece que “Es misión primaria y fundamental del Banco Central de la República Argentina preservar el valor de la moneda”.

- Periodo 2016-2019

	PORTFOLIO	RETORNO	σ	Razón de Sharpe	Beta del portafolio
	MV	2,57%	7,55%	-11,25%	0,47
	1	2,62%	8,10%	-9,87%	0,60
	2	2,63%	8,64%	-9,13%	0,68
	3	2,64%	9,19%	-8,48%	0,74
	4	2,65%	9,73%	-7,90%	0,79
	5	2,65%	10,28%	-7,48%	0,84
	6	2,66%	10,83%	-7,01%	0,89
	7	2,66%	11,37%	-6,68%	0,94
ineficiente	8	2,56%	11,92%	-7,21%	0,995
ineficiente	9	2,43%	12,46%	-7,94%	1,04
ineficiente	10	2,30%	13,01%	-8,60%	1,08
ineficiente	11	2,08%	13,56%	-9,88%	1,12
ineficiente	12	1,79%	14,10%	-11,55%	1,16
ineficiente	13	1,50%	14,65%	-13,10%	1,20
ineficiente	14	1,25%	15,19%	-14,28%	1,23
ineficiente	15	1,09%	15,74%	-14,80%	1,26

b) Optimización y armados de cartera

El armado de carteras para ambos periodos registra para las carteras eficientes retornos superiores al índice Merval utilizado como indicador de desempeño del mercado de valores argentino. A su vez debemos recordar que dicho índice encuentra serias dificultades para ser representativo y diversificable en actividades económicas. La correlación positiva en casi todas las acciones es un dato clave que demuestra dicho inconveniente y la alta exposición al riesgo.

Para el primer cuatrienio las cantidades de carteras que podemos armar de manera eficiente son 15 tal como fue descripto párrafos anteriores. Con gran preponderancia de las empresas TRANSENER (energética), Ferrum (fabricación de artículos para la construcción del hogar) y MIRGOR (fabricación de artículos para consumo). No se identifican carteras ineficientes siempre que se respeten las proporciones asignadas a la relación riesgo/rendimiento objetivo planteado sin ponderar una participación mínima en

alguna de las acciones bajo análisis. El hecho de tener tarifas de luz, agua y gas con topes de actualización de precio por decreto del poder ejecutivo nacional afecta cotizaciones de empresas como TRANSP DE GAS DEL SUR (distribución de gas); o tasas de interés pasivas y activas totalmente reguladas impactaría de manera negativa también en empresas como BANCO FRANCÉS (servicios financieros).

En cambio; para el periodo 2015-2019 notamos que las 15 acciones seleccionadas para formar parte de nuestro portafolio, solo 7 forman parte de los armados que superan al Merval bajo régimen de optimización. Las acciones remarcadas en color rojo son aquellas que no forman parte en las proporciones de los armados de carteras eficientes. La alta correlación entre las acciones reduce de manera significativa la composición de las mismas. Forman parte en diferentes proporciones de los portafolios. La apertura a los mercados con la libre movilidad de capitales y la alta volatilidad bajo diferentes circunstancias macro hicieron que fuera necesario poseer la mayor cantidad de activos en cartera. Igualmente vale la pena mencionar que activos como SIDERAR, SAN MIGUEL y CONSULTATIO forman parte de las carteras con proporciones muy bajas. En este caso las cantidades de carteras eficientes que podemos amar con las acciones tenidas en cuenta son sólo 10. Las más significativas son ALUAR (fábrica de aluminio), YPF (energética), AUTOPISTAS DEL SOL (administración de rutas y autopistas), MIRGOR, TRANSPORTADORA DE GAS DEL SUR (energética).

- Periodo 2012-2015

Acciones	Carteras eficientes							
	MV	1	2	3	4	5	6	7
	w	w	w	w	w	w	w	w
TRANSENER	0,0%	12,5%	18,9%	30,9%	38,3%	44,9%	51,1%	57,1%
Petroleo Brasileiro	4,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
SAN MIGUEL	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
BANCO FRANCÉS	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AGROMETAL	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
FERRUM	26,3%	24,4%	16,6%	20,1%	17,8%	15,4%	13,1%	10,9%
PAMPA ENERGÍA	0,0%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
MOLINOS	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
AUTOPISTAS DEL SOL	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
LEDESMA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
JMIN	32,6%	30,9%	50,0%	27,1%	25,1%	23,0%	21,1%	19,2%
TELECOM	6,3%	4,8%	0,0%	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
YPF	4,1%	2,3%	0,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TRANSP DE GAS DEL SUR	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
MIRGOR	26,3%	24,7%	13,7%	20,8%	18,8%	16,6%	14,7%	12,8%

Acciones	Carteras eficientes								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	w	w	w	w	w	w	w	w	w
TRANSENER	57,1%	62,8%	68,4%	73,8%	79,0%	84,3%	89,5%	94,9%	100,000%
Petroleo Brasileiro	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
SAN MIGUEL	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
BANCO FRANCÉS	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
AGROMETAL	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
FERRUM	10,9%	8,9%	6,8%	4,9%	2,9%	1,0%	0,0%	0,0%	0,000%
PAMPA ENERGÍA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
MOLINOS	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
AUTOPISTAS DEL SO	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
LEDESMA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
JMIN	19,2%	17,4%	15,6%	13,9%	12,2%	10,6%	8,5%	5,1%	0,000%
TELECOM	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
YPF	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
TRANSP DE GAS DEL	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,000%
MIRGOR	12,8%	10,9%	9,2%	7,5%	5,8%	4,1%	2,0%	0,0%	0,000%

- Periodo 2016-2019

Acciones	Cartera Eficiente							
	MV	1	2	3	4	5	6	7
	w	w	w	w	w	w	w	w
SIDERAR	0,0%	0,9%	0,4%	0,4%	0,3%	0,3%	0,3%	0,0%
ALUAR	48,2%	33,6%	25,3%	18,3%	12,2%	6,6%	1,3%	0,0%
SAN MIGUEL	0,0%	0,8%	1,2%	1,5%	1,8%	2,0%	2,3%	0,0%
BCO FRANCÉS	0,0%	1,2%	2,0%	2,6%	3,1%	3,6%	4,1%	8,6%
AGROMETAL	0,7%	1,0%	1,5%	2,0%	2,4%	2,8%	3,2%	2,7%
YPF	8,5%	8,7%	9,1%	9,4%	9,7%	9,9%	10,2%	8,8%
PAMPA ENERGÍA	0,0%	2,2%	3,1%	3,8%	4,4%	4,9%	5,4%	5,8%
CENTRAL PUERTO	0,0%	3,2%	4,4%	5,2%	5,9%	6,5%	7,1%	8,2%
AUTOPISTAS DEL SOL	24,0%	24,4%	25,0%	25,5%	26,0%	26,5%	26,9%	27,0%
CAPX	0,0%	1,2%	2,0%	2,6%	3,2%	3,7%	4,2%	4,6%
JMIN	0,0%	3,0%	4,2%	5,0%	5,7%	6,3%	6,9%	8,0%
CONSULTATIO	0,0%	0,2%	0,5%	0,8%	1,1%	1,4%	1,6%	0,1%
EDENOR	0,0%	0,6%	1,4%	2,1%	2,7%	3,2%	3,8%	4,7%
TRANSP DE GAS DEL SUR	9,0%	9,3%	9,8%	10,3%	10,7%	11,1%	11,4%	10,9%
MIRGOR	9,5%	9,7%	10,2%	10,6%	10,9%	11,2%	11,5%	10,6%

6. ANEXOS

6.1 Anexo I

Se detalla el cuadro de frecuencia acumulada de cada acción por cuatrienio, necesario para determinar la media agrupada y el desvío estándar.

Donde se indica "Frecuencia" es el dato que corresponde a cantidad de variaciones mensuales que se encuentran dentro de los rangos del intervalo determinado. Dentro de cada periodo trabajamos con 48 meses, hecho por el cual el total de frecuencias suma ese número.

- Período 2012-2015

❖ Transener

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		$DISTANCIA^2$	$DISTANCIA^2$ x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-32,72%	-19,54%	-0,26129742	4	-1,04518966	0,091272076	0,365088305
2	-19,54%	-6,36%	-0,12946642	9	-1,16519782	0,028995856	0,260962706
3	-6,36%	6,83%	0,00236457	15	0,0354685	0,001478457	0,022176852
4	6,83%	20,01%	0,13419556	13	1,74454225	0,008719878	0,11335841
5	20,01%	33,19%	0,26602655	4	1,06410619	0,050720119	0,202880476
6	33,19%	46,38%	0,39785754	2	0,79571508	0,127479181	0,254958362
7	46,38%	59,56%	0,52968853	1	0,52968853	0,238997063	0,238997063
				48	1,95913306		1,458422173
		\bar{X}	media de la frecuencia	4,08%			
		S^2	Varianza	0,03103026			
		S	Desvío estándar	17,62%			

❖ Petrobras Brasil

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		$DISTANCIA^2$	$DISTANCIA^2$ x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-35,71%	-24,16%	-0,29936747	3	-0,8981024	0,090560442	0,271681327
2	-24,16%	-12,60%	-0,18380934	10	-1,83809341	0,034363703	0,343637032
3	-12,60%	-1,05%	-0,06825121	8	-0,54600972	0,004874325	0,038994602
4	-1,05%	10,51%	0,04730691	14	0,66229676	0,002092308	0,029292318
5	10,51%	22,06%	0,16286504	10	1,62865038	0,026017653	0,260176528
6	22,06%	33,62%	0,27842316	1	0,27842316	0,076650358	0,076650358
7	33,62%	45,18%	0,39398129	2	0,78796258	0,153990425	0,30798085
				48	0,07512736		1,328413016
		\bar{X}	media de la frecuencia	0,16%			
		S^2	Varianza	0,02826411			
		S	Desvío estándar	16,81%			

❖ San Miguel

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-142,21%	-116,14%	-1,29174992	1	-1,29174992	1,671011586	1,671011586
2	-116,14%	-90,07%	-1,03104213	0	0	1,064958659	0
3	-90,07%	-64,00%	-0,77033433	0	0	0,594842836	0
4	-64,00%	-37,93%	-0,50962654	0	0	0,260664119	0
5	-37,93%	-11,86%	-0,24891875	5	-1,24459376	0,062422508	0,312112538
6	-11,86%	14,21%	0,01178904	34	0,40082736	0,000118001	0,004012033
7	14,21%	40,29%	0,27249683	8	2,17997465	0,0737506	0,590004797
				48	0,04445834		2,577140953
		\bar{X}	media de la frecuencia		0,09%		
		S^2	Varianza		0,05		
		S	Desvío estándar		23,42%		

❖ Banco Francés

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-18,56%	-9,87%	-0,14212976	7	-0,99490829	0,038251937	0,267763561
2	-9,87%	-1,17%	-0,05520486	8	-0,44163885	0,011806153	0,094449228
3	-1,17%	7,52%	0,03172004	13	0,41236058	0,000472246	0,0061392
4	7,52%	16,21%	0,11864494	11	1,30509439	0,004250215	0,046752368
5	16,21%	24,90%	0,20556984	6	1,23341907	0,023140061	0,138840365
6	24,90%	33,60%	0,29249474	1	0,29249474	0,057141783	0,057141783
7	33,60%	42,29%	0,37941964	2	0,75883929	0,106255381	0,212510763
				48	2,56566092		0,823597268
		\bar{X}	media de la frecuencia		5,35%		
		S^2	Varianza		0,01752335		
		S	Desvío estándar		13,24%		

❖ Agrometal

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-28,17%	-13,91%	-0,210375568	3	-0,6311267	0,053718428	0,161155284
2	-13,91%	0,36%	-0,067746422	23	-1,5581677	0,007946513	0,182769799
3	0,36%	14,62%	0,074882724	16	1,19812359	0,002860745	0,045771915
4	14,62%	28,88%	0,21751187	4	0,87004748	0,038461123	0,153844492
5	28,88%	43,15%	0,360141016	0	0	0,114747648	0
6	43,15%	57,41%	0,502770162	1	0,50277016	0,231720319	0,231720319
7	57,41%	71,67%	0,645399308	1	0,64539931	0,389379137	0,389379137
				48	1,02704613		1,164640945
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,14%		
		S^2	Varianza		0,02477959		
		S	Desvío estándar		15,74%		

❖ Ferrum

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-21,9%	-0,124	-0,17132208	6	-1,02793245	0,030164555	0,180987329
2	-12,40%	-0,029	-0,07658782	14	-1,07222955	0,006232346	0,087252844
3	-2,9%	0,066	0,01814643	16	0,29034282	0,000249294	0,003988701
4	6,6%	0,160	0,11288068	9	1,01592609	0,012215398	0,109938584
5	16,0%	0,255	0,20761493	1	0,20761493	0,042130659	0,042130659
6	25,5%	0,350	0,30234918	1	0,30234918	0,089995077	0,089995077
7	35,0%	0,444	0,39708343	1	0,39708343	0,155808651	0,155808651
				48	0,11315445		0,670101845
		\bar{X}	media de la frecuencia		0,24%		
		S^2	Varianza		0,01425749		
		S	Desvío estándar		11,94%		

❖ Pampa Energía

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-22,19%	-12,05%	-0,17120966	9	-1,54088692	0,040332007	0,362988064
2	-12,05%	-1,90%	-0,06973852	13	-0,9066007	0,009871845	0,128333989
3	-1,90%	8,25%	0,03173263	10	0,31732627	4,46892E-06	4,46892E-05
4	8,25%	18,39%	0,13320377	8	1,06563016	0,010729878	0,085839024
5	18,39%	28,54%	0,23467491	3	0,70402474	0,042048073	0,126144218
6	28,54%	38,69%	0,33614605	4	1,34458422	0,093959053	0,375836211
7	38,69%	48,84%	0,4376172	1	0,4376172	0,166462818	0,166462818
				48	1,42169496		1,245649013
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,96%		
		S^2	Varianza		0,02650317		
		S	Desvío estándar		16,28%		

❖ Molinos

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-21,94%	-12,09%	-0,1701677	9	-1,53150933	0,037186939	0,33468245
2	-12,09%	-2,25%	-0,07169665	11	-0,78866311	0,008905338	0,097958713
3	-2,25%	7,60%	0,02677441	15	0,40161616	1,68343E-05	0,000252514
4	7,60%	17,45%	0,12524547	5	0,62622734	0,010521429	0,052607145
5	17,45%	27,30%	0,22371652	5	1,11858262	0,040419122	0,20209561
6	27,30%	37,14%	0,32218758	0	0	0,089709913	0
7	37,14%	46,99%	0,42065864	3	1,26197591	0,158393802	0,475181406
				48	1,08822959		1,162777838
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,27%		
		S^2	Varianza		0,02473995		
		S	Desvío estándar		15,73%		

❖ Autopistas del Sol

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-15,20%	-2,54%	-0,08873154	16	-1,41970459	0,020275057	0,324400908
2	-2,54%	10,11%	0,0378378	19	0,71891826	0,000250309	0,004755878
3	10,11%	22,77%	0,16440714	8	1,31525715	0,012265158	0,098121262
4	22,77%	35,43%	0,29097648	3	0,87292945	0,056319602	0,168958806
5	35,43%	48,08%	0,41754582	1	0,41754582	0,132413642	0,132413642
6	48,08%	60,74%	0,54411516	0	0	0,240547278	0
7	60,74%	73,40%	0,6706845	1	0,6706845	0,38072051	0,38072051
				48	2,5756306		1,109371006
		\bar{X}	media de la frecuencia		5,37%		
		S^2	Varianza		0,02360364		
		S	Desvío estándar		15,36%		

❖ **Ledesma**

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-19,60%	-11,92%	-0,15758207	8	-1,26065654	0,025609505	0,204876037
2	-11,92%	-4,24%	-0,08076781	10	-0,80767812	0,00692481	0,0692481
3	-4,24%	3,45%	-0,00395356	14	-0,05534979	4,09752E-05	0,000573653
4	3,45%	11,13%	0,0728607	7	0,51002489	0,004958	0,034706001
5	11,13%	18,81%	0,14967495	6	0,89804973	0,021675885	0,130055308
6	18,81%	26,49%	0,22648921	1	0,22648921	0,050194629	0,050194629
7	26,49%	34,17%	0,30330347	2	0,60660693	0,090514233	0,181028466
				48	0,1174863		0,670682193
		\bar{X}	media de la frecuencia		0,24%		
		S^2	Varianza		0,01426983		
		S	Desvío estándar		11,95%		

❖ **Holcim**

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-18,23%	-9,47%	-0,13852838	4	-0,55411352	0,024056269	0,096225075
2	-9,47%	-0,71%	-0,05094203	21	-1,06978256	0,004558205	0,095722307
3	-0,71%	8,04%	0,03664433	11	0,40308759	0,00040288	0,004431681
4	8,04%	16,80%	0,12423068	8	0,99384544	0,011590294	0,092722349
5	16,80%	25,56%	0,21181703	3	0,6354511	0,038120446	0,114361337
6	25,56%	34,32%	0,29940339	0	0	0,079993336	0
7	34,32%	43,08%	0,38698974	1	0,38698974	0,137208966	0,137208966
				48	0,79547778		0,540671714
		\bar{X}	media de la frecuencia		1,66%		
		S^2	Varianza		0,01150365		
		S	Desvío estándar		10,73%		

❖ **Telecom**

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		DISTANCIA ²	DISTANCIA ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-20,01%	-12,11%	-0,16060355	6	-0,96362128	0,032235432	0,193412589
2	-12,11%	-4,20%	-0,08153906	13	-1,06000772	0,010095787	0,131245226
3	-4,20%	3,71%	-0,00247456	10	-0,02474564	0,000458529	0,004585294
4	3,71%	11,61%	0,07658993	8	0,61271942	0,00332366	0,026589279
5	11,61%	19,52%	0,15565442	5	0,7782721	0,018691178	0,093455891
6	19,52%	27,43%	0,23471891	4	0,93887565	0,046561084	0,186244336
7	27,43%	35,33%	0,3137834	2	0,62756681	0,086933378	0,173866756
				48	0,90905934		0,809399371
		\bar{x}	media de la frecuencia		1,89%		
		S ²	Varianza		0,01722126		
		S	Desvío estándar		13,12%		

❖ YPF

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		DISTANCIA ²	DISTANCIA ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-48,71%	-36,94%	-0,42824822	1	-0,42824822	0,190686294	0,190686294
2	-36,94%	-25,16%	-0,31049278	2	-0,62098556	0,101710591	0,203421182
3	-25,16%	-13,39%	-0,19273734	6	-1,15642406	0,040467575	0,242805448
4	-13,39%	-1,61%	-0,0749819	9	-0,67483714	0,006957245	0,062615206
5	-1,61%	10,17%	0,04277353	18	0,76992361	0,001179602	0,021232838
6	10,17%	21,94%	0,16052897	7	1,1237028	0,023134646	0,161942519
7	21,94%	33,72%	0,27828441	5	1,39142205	0,072822376	0,364111878
				48	0,40455348		1,246815366
		\bar{x}	media de la frecuencia		0,84%		
		S ²	Varianza		0,02652799		
		S	Desvío estándar		16,29%		

❖ Transportadora de gas del Sur

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		DISTANCIA ²	DISTANCIA ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-19,46%	-10,72%	-0,15089197	6	-0,90535184	0,033189999	0,199139991
2	-10,72%	-1,97%	-0,06344499	14	-0,8882298	0,008974576	0,125644059
3	-1,97%	6,77%	0,024002	11	0,26402202	5,3104E-05	0,000584144
4	6,77%	15,52%	0,11144899	10	1,11448989	0,006425584	0,064255837
5	15,52%	24,26%	0,19889598	3	0,59668793	0,028092015	0,084276044
6	24,26%	33,01%	0,28634296	2	0,57268593	0,065052397	0,130104794
7	33,01%	41,75%	0,37378995	2	0,74757991	0,117306731	0,234613462
				48	1,50188403		0,838618332
		\bar{x}	media de la frecuencia		3,13%		
		S ²	Varianza		0,01784294		
		S	Desvío estándar		13,36%		

❖ Mirgor

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-27,82%	-19,88%	-0,2385123	2	-0,47702459	0,079042401	0,158084801
2	-19,88%	-11,94%	-0,15913024	2	-0,31826047	0,040708204	0,081416408
3	-11,94%	-4,01%	-0,07974817	5	-0,39874086	0,014977031	0,074885153
4	-4,01%	3,93%	-0,00036611	15	-0,00549166	0,001848881	0,027733216
5	3,93%	11,87%	0,07901595	10	0,79015951	0,001323755	0,013237551
6	11,87%	19,81%	0,15839801	11	1,74237815	0,013401653	0,14741818
7	19,81%	27,75%	0,23778008	3	0,71334023	0,038082574	0,114247722
				48	2,0463603		0,61702303
		\bar{X}	media de la frecuencia	4,26%			
		S^2	Varianza	0,01312815			
		S	Desvío estándar	11,46%			

- Período 2012-2015

❖ **Ternium**

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-24%	-15%	-0,1983147	3	-0,59494409	0,044704533	0,134113599
2	-15%	-6%	-0,10769993	9	-0,96929934	0,014597399	0,131376587
3	-6%	3%	-0,01708516	15	-0,25627734	0,000912337	0,013685061
4	3%	12%	0,07352961	16	1,17647383	0,00364935	0,058389594
5	12%	21%	0,16414439	2	0,32828877	0,022808435	0,04561687
6	21%	30%	0,25475916	1	0,25475916	0,058389594	0,058389594
7	30%	39%	0,34537393	2	0,69074785	0,110392826	0,220785652
					0,62974884		0,662356957
		\bar{X}	media de la frecuencia	1,31%			
		S^2	Varianza	0,0140927			
		S	Desvío estándar	11,87%			

❖ **Aluar**

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-19%	-10%	-0,14643371	3	-0,439301122	0,02893045	0,08679135
2	-10%	-2%	-0,05957948	17	-1,012851098	0,006928116	0,117777971
3	-2%	7%	0,02727475	14	0,381846564	1,30966E-05	0,000183353
4	7%	16%	0,11412899	10	1,141289855	0,008185392	0,081853922
5	16%	24%	0,20098322	2	0,401966433	0,031445003	0,062890005
6	24%	33%	0,28783745	1	0,287837447	0,069791928	0,069791928
7	33%	42%	0,37469168	1	0,374691678	0,123226168	0,123226168
					1,135479758		0,542514697
		\bar{X}	media de la frecuencia	2,37%			
		S^2	Varianza	0,011542866			
		S	Desvío estándar	10,74%			

❖ **San Miguel**

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-28%	-19%	-0,23247925	2	-0,46495851	0,063637438	0,127274875
2	-19%	-9%	-0,13933539	7	-0,97534776	0,025319416	0,177235912
3	-9%	0%	-0,04619154	11	-0,50810689	0,004352951	0,047882465
4	0%	9%	0,04695232	15	0,70428485	0,000738044	0,011070655
5	9%	19%	0,14009618	10	1,40096182	0,014474693	0,144746929
6	19%	28%	0,23324004	2	0,46648008	0,045562899	0,091125798
7	28%	37%	0,3263839	1	0,3263839	0,094002662	0,094002662
					0,94969749		0,693339296
		\bar{X}	media de la frecuencia		1,98%		
		S^2	Varianza		0,0147519		
		S	Desvío estándar		12,15%		

❖ Banco Francés

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-67%	-52%	-0,59731964	1	-0,59731964	0,369920785	0,369920785
2	-52%	-37%	-0,44285332	0	0	0,205884357	0
3	-37%	-21%	-0,288387	1	-0,288387	0,089567618	0,089567618
4	-21%	-6%	-0,13392068	10	-1,33920684	0,020970566	0,20970566
5	-6%	10%	0,02054564	26	0,53418654	9,32025E-05	0,002423265
6	10%	25%	0,17501196	7	1,22508369	0,026935527	0,188548689
7	25%	41%	0,32947828	3	0,98843483	0,10149754	0,304492619
					0,52279157		1,164658636
		\bar{X}	media de la frecuencia		1,09%		
		S^2	Varianza		0,02477997		
		S	Desvío estándar		15,74%		

❖ AGROMETAL

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-56%	-40%	-0,475930699	1	-0,4759307	0,236534213	0,236534213
2	-40%	-24%	-0,316035522	2	-0,63207104	0,106571335	0,21314267
3	-24%	-8%	-0,156140344	11	-1,71754379	0,027741393	0,305155322
4	-8%	8%	0,003754833	17	0,06383216	4,43862E-05	0,000754566
5	8%	24%	0,16365001	15	2,45475016	0,023480315	0,352204725
6	24%	40%	0,323545188	1	0,32354519	0,098049179	0,098049179
7	40%	56%	0,483440365	1	0,48344037	0,223750979	0,223750979
					0,50002234		1,429591655
		\bar{X}	media de la frecuencia		1,04%		
		S^2	Varianza		0,03041684		
		S	Desvío estándar		17,44%		

❖ YPF

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-26,46%	-19,11%	-0,22783811	1	-0,22783811	0,062309354	0,062309354
2	-19,11%	-11,76%	-0,15433084	2	-0,30866169	0,031015138	0,062030276
3	-11,76%	-4,41%	-0,08082358	13	-1,05070652	0,010527558	0,136858255
4	-4,41%	2,94%	-0,00731631	11	-0,08047946	0,000846614	0,00931275
5	2,94%	10,29%	0,06619095	9	0,59571854	0,001972305	0,017750743
6	10,29%	17,65%	0,13969821	6	0,83818928	0,013904632	0,08342779
7	17,65%	25,00%	0,21320548	6	1,27923286	0,036643594	0,219861565
					1,0454549		0,591550734
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,18%		
		S^2	Varianza		0,01258619		
		S	Desvío estándar		11,22%		

❖ Pampa Energía

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-56,40%	-44,55%	-0,5047586	1	-0,5047586	0,284161049	0,284161049
2	-44,55%	-32,71%	-0,38629914	0	0	0,171899894	0
3	-32,71%	-20,86%	-0,26783968	0	0	0,087704028	0
4	-20,86%	-9,02%	-0,14938021	6	-0,89628129	0,03157345	0,189440699
5	-9,02%	2,83%	-0,03092075	16	-0,49473202	0,003508161	0,056130578
6	2,83%	14,68%	0,08753871	16	1,40061939	0,003508161	0,056130578
7	14,68%	26,52%	0,20599818	9	1,85398358	0,03157345	0,284161049
					1,35883106		0,870023953
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,83%		
		S^2	Varianza		0,01851115		
		S	Desvío estándar		13,61%		

❖ Central Puerto

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-85,82%	-69,02%	-0,77416335	1	-0,77416335	0,642396814	0,642396814
2	-69,02%	-52,22%	-0,60616406	0	0	0,401318854	0
3	-52,22%	-35,42%	-0,43816477	0	0	0,216688416	0
4	-35,42%	-18,62%	-0,27016548	1	-0,27016548	0,088505501	0,088505501
5	-18,62%	-1,82%	-0,10216619	12	-1,22599427	0,016770108	0,201241297
6	-1,82%	14,98%	0,0658331	26	1,7116606	0,001482237	0,038538174
7	14,98%	31,78%	0,23383239	8	1,87065911	0,042641889	0,341135113
					1,31199663		1,311816899
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,73%		
		S^2	Varianza		0,027911		
		S	Desvío estándar		16,71%		

❖ Autopistas del Sol

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-51,57%	-39,91%	-0,45742351	1	-0,45742351	0,23616464	0,23616464
2	-39,91%	-28,25%	-0,34079125	0	0	0,136408696	0
3	-28,25%	-16,58%	-0,224159	1	-0,224159	0,063858919	0,063858919
4	-16,58%	-4,92%	-0,10752674	10	-1,07526741	0,018515308	0,185153078
5	-4,92%	6,74%	0,00910552	20	0,18211031	0,000377863	0,007557268
6	6,74%	18,41%	0,12573777	8	1,00590218	0,009446586	0,075572685
7	18,41%	30,07%	0,24237003	8	1,93896023	0,045721474	0,365771794
					1,3701228		0,934078383
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,85%		
		S ²	Varianza		0,01987401		
		S	Desvío estándar		14,10%		

❖ CAPX

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-46,85%	-34,16%	-0,4050584	1	-0,4050584	0,179583959	0,179583959
2	-34,16%	-21,46%	-0,2780771	1	-0,2780771	0,088085579	0,088085579
3	-21,46%	-8,76%	-0,1510958	9	-1,3598619	0,028835715	0,259521434
4	-8,76%	3,94%	-0,0241144	14	-0,3376021	0,001834365	0,025681117
5	3,94%	16,64%	0,10286689	14	1,44013646	0,007081531	0,099141437
6	16,64%	29,33%	0,22984822	8	1,83878574	0,044577212	0,356617696
7	29,33%	42,03%	0,35682955	1	0,35682955	0,114321408	0,114321408
					0,89832269		1,008631222
		\bar{X}	media de la frecuencia		1,87%		
		S ²	Varianza		0,02146024		
		S	Desvío estándar		14,65%		

❖ HOLCIM

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-64,08%	-49,61%	-0,5684243	1	-0,5684243	0,374545797	0,374545797
2	-49,61%	-35,14%	-0,4237146	1	-0,4237146	0,21836159	0,21836159
3	-35,14%	-20,67%	-0,2790049	1	-0,2790049	0,104059182	0,104059182
4	-20,67%	-6,19%	-0,1342952	4	-0,5371809	0,031638572	0,126554288
5	-6,19%	8,28%	0,01041449	20	0,2082897	0,001099761	0,021995215
6	8,28%	22,75%	0,15512419	18	2,79223545	0,012442748	0,223969461
7	22,75%	37,22%	0,2998339	3	0,8995017	0,065667533	0,1970026
					2,09170206		1,266488134
		\bar{X}	media de la frecuencia		4,36%		
		S ²	Varianza		0,02694656		
		S	Desvío estándar		16,42%		

❖ CTIO

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-23,26%	-15,78%	-0,1952034	4	-0,7808136	0,045510074	0,182040298
2	-15,78%	-8,31%	-0,1204597	2	-0,2409195	0,01920642	0,03841284
3	-8,31%	-0,83%	-0,0457161	17	-0,777173	0,004076	0,069291992
4	-0,83%	6,64%	0,02902762	10	0,29027618	0,000118813	0,001188126
5	6,64%	14,11%	0,10377129	7	0,72639904	0,007334859	0,051344015
6	14,11%	21,59%	0,17851497	5	0,89257483	0,02572414	0,128620699
7	21,59%	29,06%	0,25325864	3	0,75977592	0,055286654	0,165859962
					0,87011993		0,636757931
		\bar{X}	media de la frecuencia		1,81%		
		S^2	Varianza		0,01354804		
		S	Desvío estándar		11,64%		

❖ EDENOR

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-86,87%	-70,62%	-0,7874357	1	-0,7874357	0,654296152	0,654296152
2	-70,62%	-54,38%	-0,6249816	0	0	0,417873951	0
3	-54,38%	-38,13%	-0,4625276	0	0	0,23423438	0
4	-38,13%	-21,88%	-0,3000735	0	0	0,10337744	0
5	-21,88%	-5,64%	-0,1376195	8	-1,100956	0,025303132	0,202425056
6	-5,64%	10,61%	0,02483454	27	0,6705327	1,14546E-05	0,000309273
7	10,61%	26,85%	0,18728859	12	2,24746303	0,027502408	0,330028899
					1,02960409		1,18705938
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,15%		
		S^2	Varianza		0,02525658		
		S	Desvío estándar		15,89%		

❖ TGSU2

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-36,90%	-27,66%	-0,3227978	1	-0,3227978	0,126762309	0,126762309
2	-27,66%	-18,42%	-0,2304206	4	-0,9216825	0,069516487	0,278065949
3	-18,42%	-9,19%	-0,1380435	1	-0,1380435	0,029337743	0,029337743
4	-9,19%	0,05%	-0,0456663	10	-0,4566631	0,006226076	0,062260757
5	0,05%	9,29%	0,04671084	16	0,74737346	0,000181486	0,002903774
6	9,29%	18,53%	0,139088	11	1,52996795	0,011203973	0,123243706
7	18,53%	27,77%	0,23146515	5	1,15732575	0,039293538	0,19646769
					1,5954803		0,819041927
		\bar{X}	media de la frecuencia		3,32%		
		S ²	Varianza		0,01742642		
		S	Desvío estándar		13,20%		

❖ MIRG

Nro de clases	INTERVALOS		puntos medios	Frecuencia		<i>DISTANCIA</i> ²	<i>DISTANCIA</i> ² x Frecuencia
	Inferior	Superior					
0							
1	-30,16%	-20,01%	-0,2508419	3	-0,7525258	0,07678441	0,23035323
2	-20,01%	-9,85%	-0,1493091	7	-1,0451638	0,030823833	0,215766832
3	-9,85%	0,30%	-0,0477763	13	-0,6210918	0,005481085	0,071254107
4	0,30%	10,45%	0,05375653	12	0,6450784	0,000756166	0,009073992
5	10,45%	20,61%	0,15528936	7	1,08702551	0,016649076	0,116543531
6	20,61%	30,76%	0,25682218	2	0,51364437	0,053159814	0,106319629
7	30,76%	40,91%	0,35835501	4	1,43342003	0,110288382	0,441153528
					1,26038689		1,19046485
		\bar{X}	media de la frecuencia		2,63%		
		S ²	Varianza		0,02532904		
		S	Desvío estándar		15,92%		

Bibliografía

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2012). *Estadística Para Negocios y Economía*. Cengage Learning.
- Antuña, G., & Bottegoni, F. (2011). *Administración Financiera para Contadores. Introducción. Análisis estático*. Rosario.
- Argentina, S. d. (2022). *Deuda de la Administración Central*.
- Braun, M., & Llach, L. (2010). *Macroeconomía Argentina*. Buenos Aires: Alfaomega.
- Chiang, A., & Wainwright, K. (2007). *Métodos fundamentales de economía matemática*.
- Favatta, F. (2019). *Análisis del Comercio Exterior Argentino*. Universidad Nacional De San Martín.
- Galli, M., & Del Aguila, N. (1998). Teoría y Realidad: El aporte de Harry Markowitz a la administración de portafolios en Argentina. Universidad Torcuato Di Tella.
- GeoGebra. (s.f.). <https://www.geogebra.org/>.
- Instituto Argentino de Mercados de capitales. (s.f.). *Índices* . Recuperado el 12 de 2020, de <https://www.iamc.com.ar/metodologiaiamc/>
- Krugman, P., Obstfeld, M., & Melitz, M. (2010). *Economía Internacional*. Pearson.
- Machain, L. (2011). *Simulación de Modelos Financieros*.
- Markowitz, H. (1952). Selección de Portfolios. *Journal of Finance*, 77-91.
- McDonald, J., & Lay, D. (2016). *Álgebra Lineal*. Pearson.
- Merton, R., & Bodie, Z. (1998). *Finanzas* (Primera ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Milanesi, G. (2018). Diversificación y carteras óptimas: análisis del mercado de capitales argentino. *Revista Argentina de Investigación en Negocios*, 41-60.
- Ross, S. A., Westerfield, R. W., & Jaffe, J. F. (2012). *Finanzas Corporativas*. New York: Mc Graw Hill.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Assets Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 425-442.
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies*, 65-86.

Van Horne, J. C., & Wachowicz, J. M. (2010). *Fundamentos de Administración Financiera* (Vol. Decimotercera). Pearson.