

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,
INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

TESIS DOCTORAL

Estudio de diversos problemas con ecuaciones diferenciales
fraccionarias de tipo parabólico

Autor: Demian Nahuel Goos

Directora: Dra. Gabriela Fernanda Reyero

Co-Director: Dr. Eduardo Santillan Marcus

Marzo de 2020



UNR Universidad
Nacional de Rosario



Dedicado a *Ako*, mi mejor amigo, hermano y compañero de la vida. Por todos estos años que hemos compartido en los que me has llenado de vida y alegría. Por incontables paseos y tremendas aventuras. Por todo lo aprendido y por el hermoso sentido que le has dado a mi vida.

Te extraño. 🐾

Quiero agradecer a todos aquellos que en mayor o menor medida han hecho posible que hoy me encuentre en esta instancia de mi carrera y de mi vida. Especialmente a mi familia, que tanto me ha apoyado y motivado a lo largo de este viaje. Los aciertos de este trabajo pertenecen a todos ustedes; los errores, son míos.

Esta tesis doctoral fue realizada durante el período Abril 2015–Octubre 2019 con la Beca Interna Doctoral otorgada por el CONICET. Además fue parcialmente financiada por los siguientes proyectos de investigación.

1. Proyecto de Investigación UNR - ING349 - *Problemas de frontera libre con Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias*, Director: Dr. Eduardo Santillan Marcus y Co-director: Dra. Gabriela F. Rejero. Período: 2013–2014
2. Proyecto de Investigación UNR - ING495 - *Estudio de diversos problemas con ecuaciones diferenciales fraccionarias*, Director: Dr. Eduardo Santillan Marcus y Co-director: Dra. Gabriela F. Rejero. Período: 2015–2018
3. Proyecto de Investigación UNR - ING588 - *Estudio de resonancias en núcleos atómicos*, Director: Dr. Rodolfo Id Betan. Período 2018-2022
4. Proyecto de Investigación UNR - 80020180200019UR - *Implementación de análisis fraccionario en algoritmos de deep learning*, Director: Dr. Eduardo Santillan Marcus. Período 2019-2020

Algunos de los resultados de esta tesis fueron publicados anteriormente en las siguientes revistas internacionales con referato:

1. D. N. Goos, G. F. Rejero, Mathematical analysis of a Cauchy problem for the time-fractional diffusion-wave equation with $\alpha \in (0, 2)$, *J Fourier Anal Appl*, DOI 10.1007/s00041-017-9527-9, (2017).
2. D. N. Goos, G. F. Rejero, S. Roscani, E. Santillan Marcus, On the Initial-Boundary-Value Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation on the Real Positive Semiaxis, *International Journal of Differential Equations*, Vol. 2015, Article ID 439419, 14 pages, (2015).

Algunos resultados de esta tesis fueron publicados en los siguientes proceedings.

1. D. N. Goos, R. Id Betan, On a Modified Fractional Schrödinger Equation and its Applications to Theory of Resonances, *Proceedings of the VI Maci 2017*, ISSN:2314-3282, pp 90-93, (2017).
2. D. N. Goos, G. F. Rejero, An application of fractional analysis to the behaviour of viscoelastic media, *Proceedings of the V Maci 2015*, ISSN: 2314-3282, pp 65-68, (2015).

Los resultados de esta tesis fueron presentados en los siguientes eventos científicos.

- (1) *Fractional Kernels vs. Fractional Fourier Kernels in Anomalous Diffusion Processes*; D. Goos (expositor), G. Rejero; International Congress of Mathematicians (internacional); del 1 al 9 de agosto de 2018; Rio de Janeiro, Brasil.
- (2) *On the Nonlinear Nature of Homogeneous PDEs of Fractional Order*; D. Goos (expositor), R. Id Betan; V International Symposium on Nonlinear PDEs and Free Boundary Problems (internacional); del 18 al 21 de diciembre de 2017; Buenos Aires, Argentina.
- (3) *Aplicación de una nueva ecuación de Schrödinger fraccionaria al pozo potencial (infinito y finito)*; D. Goos (expositor), R. Id Betan; Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, LXVI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas. XXXIIX Reunión de Educación Matemática. XXIV Encuentro de Estudiantes de Matemática. VIV Festival de Matemática (nacional); del 11 al 15 de diciembre de 2017; Buenos Aires, Argentina.
- (4) *On the Construction of a Fractional Quantum Mechanical Model*; D. Goos (expositor), R. Id Betan; V Heidelberg Laureate Forum (internacional); del 24 al 29 de septiembre de 2017; Heildeberg, Alemania.
- (5) *Construction of a Fractional Schrödinger Equation and Some First Predictions on Quantum Mechanical Problems*; D. Goos (expositor), R. Id Betan; XI Americas Conference on Differential Equations and Nonlinear Analysis (internacional); del 12 al 19 de agosto de 2017; Alberta, Canada.
- (6) *On a Modified Fractional Schrödinger Equation and its Applications to Theory of Resonances*; autores: D. Goos (expositor), R. Id Betan; VI MACI 2017 (internacional); del 2 al 5 de mayo de 2017; Comodoro Rivadavia, Argentina.
- (7) *Problemas variacionales con derivadas fraccionarias de Caputo*; M. Barrios (expositor); D. Goos, G. Rejero; IX Jornada de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Rosario (nacional); el 11 de noviembre de 2015; Rosario, Argentina.

-
- (8) *Análisis de algunos problemas variacionales fraccionarios*; M. Barrios (expositor), D. Goos, G. Reyero; Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, LXIV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas. XXXVIII Reunión de Educación Matemática. XXVII Encuentro de Estudiantes de Matemática. VII Festival de Matemática (nacional); del 18 al 21 de septiembre de 2015; Santa Fe, Argentina.
- (9) *Nuevas propiedades de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria con $\alpha \in (0, 2)$* ; D. Goos(expositor), G. Reyero; Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, LXIV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas. XXXVIII Reunión de Educación Matemática. XXVII Encuentro de Estudiantes de Matemática. VII Festival de Matemática (nacional); del 18 al 21 de septiembre de 2015; Santa Fe.
- (10) *Advances in some fractional variational problems with Caputo derivatives*; M. Barrios, D. Goos (expositor), G. Reyero; 13th EurOpt Workshop on Advances in Continuous Optimization (internacional); del 8 al 10 de julio de 2015; Edimburgo, Escocia.
- (11) *On some new properties of the solution to an initial-boundary-value problem for the time-fractional diffusion equation with $\alpha \in (0, 2)$* ; D. Goos (expositor), G. Reyero; EquaDiff 2015 (internacional); del 6 al 10 de julio de 2015; Lyon, .
- (12) *An application of fractional analysis to the behaviour of viscoelastic media*; D. Goos (expositor), G. Reyero; V MACI 2015 (internacional); del 4 al 6 de mayo de 2015; Tandil, Argentina.
- (13) *Fluidos no newtonianos viscoelásticos: un modelo matemático*; D. N. Goos (expositor), G. F. Reyero, VIII Jornada de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Rosario (nacional); el 9 de octubre de 2014; Rosario, Argentina.
- (14) *Obtención de la solución de la ecuación de calor/ondas tiempo-fraccionaria por medio del método de separación de variables*; D. N. Goos (expositor), G. Reyero; XXII Jornadas de Jóvenes Investigadores de la Asociación de Universidades Grupo Montevideo (AUGM) (internacional); del 29 de septiembre al 1 de octubre de 2014; Valparaíso, Chile.

Resumen

En esta tesis se estudian diversos problemas asociados a dos ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias, a saber la Ecuación de Difusión Fraccionaria y la Ecuación de Schrödinger Fraccionaria, donde se considera la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in (0, 2)$. En la primera parte se estudia un problema de Cauchy unidimensional para la Ecuación de Difusión Fraccionaria sobre \mathbb{R} . Se obtiene la solución al problema que coincide con la solución obtenida por otros autores previamente, se prueba por primera vez de manera rigurosa que la función obtenida es, efectivamente, solución al problema planteado y luego se deducen una serie de propiedades para la solución obtenida. Entre ellas, se destacan la obtención de cotas para las normas $L^p(\mathbb{R})$ y la prueba de la continuidad de la solución obtenida con respecto al orden de derivación α .

En la segunda parte se utilizan las nuevas herramientas obtenidas en la parte precedente para generalizar estos resultados a un problema de Cauchy multidimensional de la Ecuación de Difusión Fraccionaria sobre \mathbb{R} y a uno en el cual se generaliza el orden de derivación a $\alpha > 0$. Además, se generalizan los requerimientos para la condición inicial del problema unidimensional, nuevamente se prueba la continuidad de la solución obtenida con respecto al orden de derivación α y se observan propiedades de la solución obtenida en el marco de los procesos estocásticos.

La tercera parte analiza un problema de Cauchy unidimensional de la Ecuación de Difusión Fraccionaria sobre \mathbb{R}^+ con condición de contorno, donde el foco se centra en probar rigurosamente que la función considerada efectivamente verifica la ecuación diferencial.

La cuarta parte presenta un argumento heurístico para derivar una Ecuación de Schrödinger Fraccionaria dependiente del tiempo, para luego ponerla a prueba en tres problemas físicos básicos: la partícula libre, el problema de pozo infinito y el problema del pozo finito.

A partir de las observaciones realizadas en la parte anterior, la quinta parte realiza una serie de observaciones relacionadas a las limitaciones de la derivada fraccionaria de Caputo. Resulta inmediato que una de las mayores falencias que posee este operador tanto a nivel teórico como práctico reside en el hecho que el mismo no verifica una fórmula de integración por partes práctica.

Índice

Índice de figuras	13
1. Introducción	14
1.1. El arte de definir	14
1.2. Definiciones preliminares	17
1.2.1. Espacios funcionales y teoría de distribuciones	17
1.2.2. La función Gamma y la función Beta	19
1.2.3. Espacios de Hilbert	21
1.2.4. Problemas variacionales	22
1.2.5. Operadores y funciones importantes del análisis fraccionario	22
2. Un problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre \mathbb{R}	29
2.1. El problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria	30
2.2. Cotas para las normas L^p de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria	36
2.3. Continuidad de la solución del problema de Cauchy con respecto al orden de diferenciación	38
2.4. La solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria con condiciones iniciales explícitas.	43
3. Generalizaciones del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre \mathbb{R}	47
3.1. Generalización a operadores diferenciales fraccionarios de mayor orden y a problemas multidimensionales	48
3.2. Generalización de la condición inicial	50
3.3. Continuidad de la solución del problema de Cauchy con respecto al orden de diferenciación.	55
3.4. La solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria como un proceso estocástico	57

4. Un problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre \mathbb{R}^+	62
4.1. El candidato a solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre el semieje real positivo	62
4.2. El candidato a solución verifica la ecuación de difusión fraccionaria	64
4.3. El candidato a solución verifica las condiciones de contorno	70
5. Una ecuación de Schrödinger fraccionaria	73
5.1. Construcción de la ecuación de Schrödinger fraccionaria	78
5.2. El problema de la partícula libre	81
5.3. El problema de la partícula en un pozo infinito	83
5.4. El problema de la partícula en un pozo finito	90
6. Limitaciones de la derivada fraccionaria de Caputo	96
6.1. La derivada fraccionaria de Caputo no es un operador autoadjunto	96
6.2. La derivada fraccionaria de Caputo no verifica la fórmula de derivación del producto	98
6.3. La derivada fraccionaria de Caputo no verifica la fórmula de integración por partes clásica	100
7. Conclusiones	103

Índice de figuras

1. Función de Mainardi	28
2. Función coseno fraccionario	75
3. Función seno fraccionario	75
4. Ceros de la función coseno fraccionario	77
5. Onda plana fraccionaria	79
6. Solución de la ecuación de Schrödinger fraccionaria para el pozo infinito 1	85
7. Solución de la ecuación de Schrödinger fraccionaria para el pozo infinito 2	86
8. Solución de la ecuación de Schrödinger fraccionaria para el pozo infinito 3	87

1. Introducción

1.1. El arte de definir

La historia de la matemática es la historia de buenas definiciones y la de los autores que las idearon. A menudo, esto pasa desapercibido entre famosísimos teoremas y sorprendentes demostraciones que incluso trascienden las fronteras del ámbito matemático académico. Sin embargo, requiere un alto grado de conocimiento sobre un tópico en particular y una creatividad insondable para dar con la definición precisa y exacta necesaria para llevar una teoría adelante. Es fácil caer en la trampa y confiarse en una cierta forma de expresar un concepto deseado, sólo para verse inmediatamente traicionado por los caprichos de la matemática, que a diferencia de la mayoría de las disciplinas creativas nunca respeta la voluntad de su maestro. Sigue su propio camino y a los matemáticos no nos queda otro rol que el de aprendices. Un notable ejemplo que refleja tanto esta naturaleza emancipada de la matemática como también la dificultad de definir propiamente un concepto es la historia de la definición de continuidad de una función [49].

La continuidad de una función es uno de los conceptos más primitivos e intuitivos del análisis y suele ser suficiente comprender que es *una línea que se traza sobre un papel sin separar el lápiz de la hoja* para visualizar lo que representa. A pesar de eso, su definición no deja de ser año tras año uno de los primeros shocks que sufren los estudiantes al comenzar su primer curso de análisis en la universidad. Lo contraintuitivo aquí es el grado de abstracción necesario para definir algo tan simple y lo frustrante para muchos es que aún no llegaron a ese grado de abstracción. Surge la inmediata pregunta: ¿Por qué recurrimos a la tan famosa definición con ε y δ ? ¿No había una forma más simple de expresar continuidad?

Originalmente para Leonhard Euler una función continua podía ser caracterizada como aquella que posee una forma de formularse con una sola expresión analítica. Pero naturalmente, no sólo era esta definición sumamente restrictiva, sino que hoy también sabemos que tampoco es correcta. Es suficiente considerar expresiones que tengan problemas con el dominio, como $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$ o integrales que diverjan para ciertos valores. También fue considerada por mucho tiempo la caracterización de que para todo $x \in (a, b)$ en el dominio,

$f(x)$ asumiría todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Si bien es sumamente gráfica esta definición, no deja de ser falsa, como puede verse considerando por ejemplo

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \frac{1}{2} & x = 0, \end{cases}$$

que verifica esa propiedad en 0 por más que no es continua en ese punto.

Luego surgieron dos definiciones similares una a la otra, que si bien no poseían el rigor matemático de la definición definitiva, ya comenzaban a reflejar el mismo concepto. Augustin-Louis Cauchy sostuvo que la continuidad de una función f en un punto x equivalía a que un cambio infinitamente pequeño en la variable x implique una variación infinitamente pequeña en la imagen de la función. Bernard Bolzano mientras tanto aseguró que para que f sea continua en x , $f(x+h) - f(x)$ debería poder hacerse tan chico como se desee al variar h . Estas dos definiciones representaron un fundamental avance hacia la definición actual, ya que pasaban a ver la continuidad como una propiedad local en x , más que una propiedad en un intervalo. Este cambio de perspectiva para el concepto de continuidad de lo global a lo local resultó ser fundamental para el análisis. Sin embargo, hablar de *variaciones infinitamente pequeñas o hacerse tan chico como se desee* no cumplía con el rigor que tanto caracteriza a los matemáticos.

Fue Karl Weierstraß finalmente quien introdujera la famosa definición que en la forma actual, *aritmétizando el análisis* como suele decirse hoy en día y transformándolo en el arte de *acotar*:

Definición 1.1. *Una función f se dice continua en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Una función f se dice continua en un intervalo (a, b) si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

Aprendemos de este caso que para dar con ciertas definiciones consistentes y válidas, no sólo se requiere tiempo y paciencia, sino también el esfuerzo colectivo de los matemáticos más destacados en el área. La definición actual de continuidad de Weierstraß se impuso por sobre las demás por dos motivos fundamentales. Uno es la naturaleza rigurosa de la misma, que reflejaba el espíritu de la época de sentar fundamentos sólidos en las diferentes ramas de la matemática. Esto fue particularmente crucial luego de generaciones durante las cuales la falta de unicidad de criterios y de consistencia en

las definiciones llevó a resultados contradictorios entre sí. El célebre término *Weierstraßsche Strenge*, traducido libremente del alemán como *rigor o exactitud de Weierstraß*, incluso refleja cuánta influencia él tuvo en la filosofía exacta y rigurosa que tanto caracteriza a los matemáticos hoy en día. El segundo motivo por el cual esta definición se impuso por encima de sus pares más intuitivos es el simple hecho de que éstos no resultaron ser fieles al concepto que pretendían describir.

Hoy nos encontramos en un proceso similar al aquí descrito cuando hablamos del término *derivada fraccionaria*. La idea de definir una derivada de orden no entero es tan antigua como la definición de derivada en el sentido clásico. Ya Gottfried Leibniz, uno de los padres del cálculo infinitesimal, mantuvo un ya famoso intercambio de correspondencia con Guillaume de l'Hôpital en el cual presagiaba la utilidad de considerar derivadas de orden no entero. Diferentes matemáticos distinguidos han trabajado desde entonces en el desarrollo de una definición de derivada fraccionaria, entre ellos Niels Hendrik Abel [1], Joseph Liouville [32] y Bernhard Riemann [54]. Paso mucho tiempo, hasta que en el año 1967 Michele Caputo [13] finalmente introdujo la definición que hoy goza del mayor reconocimiento.

Sin embargo, aún no hemos llegado a un puerto definitivo en este asunto. La gran cantidad de definiciones de derivada fraccionaria que circulan en la actualidad dan fe de este simple hecho (ver por ejemplo [2], [48], [60] o [65]). Además es importante resaltar que se han publicado numerosos artículos relacionados al análisis fraccionario que contienen graves errores, lo que ha llevado a la publicación de una serie de manuscritos que corrigen estos errores (ver por ejemplo [36] o [50]), pero al mismo tiempo ha llevado a poner en duda que los conceptos actuales realmente sean válidos tal como se los estudia y usa en la actualidad. Naturalmente, esperamos que una derivada fraccionaria de orden $\alpha \in (n, n + 1)$ con $n \in \mathbb{N}$ verifique una propiedad de interpolación entre la derivada n -ésima y la derivada $(n + 1)$ -ésima de una función. Esto significa que si le aplicamos a una función una derivada de orden α y luego una derivada de orden $n + 1 - \alpha$, pretendemos obtener la derivada clásica $(n + 1)$ -ésima de esa función. ¿Pero es eso todo? Para encontrar una definición definitiva, cabe preguntar qué es lo que esperamos de una derivada fraccionaria. ¿Qué propiedades debe verificar?

En esta tesis analizaremos dos ecuaciones diferenciales parciales con diferentes versiones de los operadores diferenciales fraccionarios de Caputo, a saber

la Ecuación de Difusión Fraccionaria y una Ecuación de Schrödinger Fraccionaria. En el capítulo 1 presentaremos resultados preliminares de diferentes ramas del análisis matemático que utilizaremos en el cuerpo principal de la tesis. En los capítulos 2, 3 y 4 estudiaremos diferentes problemas de Cauchy para la Ecuación de Difusión Fraccionaria y de sus respectivas soluciones, donde haremos especial énfasis en un tratamiento riguroso y preciso de los resultados obtenidos. En el capítulo 5, construiremos con un razonamiento heurístico una Ecuación de Schrödinger Fraccionaria y estudiaremos tanto la utilidad práctica de esta ecuación como también la consistencia teórica de los resultados obtenidos. En el capítulo 6 observaremos las limitaciones que ha evidenciado la derivada fraccionaria de Caputo durante el transcurso de esta tesis. Estas observaciones motivarán finalmente las conclusiones finales, en la cual expresamos qué propiedades consideramos necesarias para una definición de derivada fraccionaria.

1.2. Definiciones preliminares

En esta sección presentaremos resultados preliminares de diferentes ramas del análisis que utilizamos en esta tesis. Definiremos los diferentes espacios funcionales con los que trabajaremos, diferentes funciones especiales de uso frecuente en el análisis fraccionario y los operadores de derivación fraccionaria considerados en este trabajo.

1.2.1. Espacios funcionales y teoría de distribuciones

Los siguientes resultados pueden ser consultados por ejemplo en [16], [57] o [62].

Definición 1.2. *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida μ sobre una sigma álgebra Φ . Para cada $p \in [1, \infty)$ se define el espacio $\mathcal{L}^p(X)$ como el espacio de todas las funciones medibles que verifican:*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Se define el espacio $\mathcal{L}^\infty(X)$ como el espacio de todas las funciones medibles que verifican:

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} : \mu(x \in X : |f(x)| \geq C) = 0\} < \infty.$$

1. INTRODUCCIÓN

Se considera en $\mathcal{L}^p(X)$ con $1 \leq p \leq \infty$ la relación de equivalencia

$$fRg \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0.$$

De este modo, el espacio cociente $L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/R$ con $\|\cdot\|_p$ resulta un espacio de Banach.

Teorema 1.3. Sean $p, q \in [1, \infty]$. de modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$. Entonces se verifica la denominada **desigualdad de Hölder**:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Definición 1.4. Sea I un subconjunto abierto de \mathbb{R} . El espacio de las funciones infinitamente diferenciables en I y de soporte compacto contenido en I se denota $\mathcal{D}(I)$ y se denomina **espacio de funciones test en I** . Tenemos

$$\varphi \in \mathcal{D}(I) \Leftrightarrow \varphi \in C^\infty(I) \text{ y } \overline{\{x \in I / \varphi(x) \neq 0\}} \text{ es compacto}$$

Definición 1.5. Sean $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(I)$ una sucesión y $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Diremos que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a φ en $\mathcal{D}(I)$ si existe un compacto $K \subset I$ tal que $\text{sop } \varphi_n \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\text{sop } \varphi \subset K$ y tal que $D^\alpha \varphi_n$ converge uniformemente a $D^\alpha \varphi$ en K para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Notamos

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} \varphi$$

Definición 1.6. Una **distribución sobre I** es un funcional lineal y continuo con dominio $\mathcal{D}(I)$. Denotamos el espacio de las distribuciones con $\mathcal{D}'(I)$. Consideramos la continuidad en el sentido débil, es decir que $u \in \mathcal{D}'(I)$ si y sólo si

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} \varphi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, \varphi_n \rangle = \langle u, \varphi \rangle$$

Teorema 1.7. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Entonces f induce una distribución sobre I , que por motivos de practicidad también llamaremos f , de la siguiente forma:

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_I f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

Ejemplo 1.8. Llamaremos **distribución delta de Dirac centrada en el punto $a \in I$** , y la notaremos δ_a a la que se define como sigue:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

Definición 1.9. Definimos el **espacio de Schwartz**, y lo notaremos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, como el espacio de las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^m D^n f(x)| = 0$$

Proposición 1.10. Se tiene que

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}),$$

con $p \in [1, \infty]$, donde \hookrightarrow representa la contención con continuidad de los respectivos espacios funcionales. De esta forma también se tienen las siguientes relaciones de los espacios duales

$$L^{p'}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Definición 1.11. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty]$, definimos el **espacio de Sobolev** del siguiente modo:

$$W^{k,p}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) / f^{(m)} \in L^p(\mathbb{R}) \quad \forall m \in \mathbb{N} : m \leq k \right\},$$

donde $f^{(m)}$ representa la derivada en el sentido débil.

Definición 1.12. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. La transformada de Fourier es un operador que a cada función f le asigna otra función que denotaremos $\mathcal{F}\{f\}$, que está definida como

$$\mathcal{F}\{f\}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta y} f(y) dy.$$

También notamos

$$f \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}\{f\}$$

La transformada inversa de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$, que verifica

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

es un operador que a cada función f le asigna otra función que denotaremos $\overline{\mathcal{F}}\{f\}$, que está definida como

$$\overline{\mathcal{F}}\{f\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy.$$

1.2.2. La función Gamma y la función Beta

Aquí presentaremos las definiciones de las funciones especiales necesarias para definir las derivadas fraccionarias con las que trabajaremos. La función

1. INTRODUCCIÓN

Gamma es entre ellas la más importante, ya que es una generalización analítica del factorial de un número natural. Los siguientes resultados pueden ser consultados en [5].

Definición 1.13. *Definimos la función Gamma en el semiplano complejo*

$$\{s \in \mathbb{C} / \Re(s) > 0\}$$

como

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (1.1)$$

De este modo la función Gamma está definida sólo para los números complejos de parte real positiva. Sin embargo, es posible prolongar analíticamente la función Gamma al dominio $\Omega = \mathbb{C} - \{s/s = -n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Dicha prolongación viene dada por

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+s} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (1.2)$$

Proposición 1.14. *La función Gamma verifica las siguientes propiedades:*

- (i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s \in \Omega$
- (ii) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$
- (iii) *La función Γ tiene polos simples en s , $\forall s \in \{s/s = -n, n \in \mathbb{N}_0\}$*
- (iv) *La función Γ no tiene ceros en su dominio.*

Proposición 1.15. *Sean $s > 0$, $0 < c < 1$, entonces vale la desigualdad*

$$\Gamma(s+c) \leq s^c \Gamma(s). \quad (1.3)$$

Definición 1.16. *Sean $x, y > 0$. Definimos la función Beta en x e y como*

$$\mathcal{B}(x, y) := \int_0^1 (1-r)^{x-1} r^{y-1} dr$$

Proposición 1.17. *La función Beta verifica la siguiente propiedad*

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Definición 1.18. *Definimos la función hipergeométrica para $|s| < 1$ como*

$${}_2F_1(a, b; c; s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{s^n}{n!},$$

donde $(d)_n$ es el símbolo de Pochhammer definido como

$$(d)_n = \frac{\Gamma(d+n)}{\Gamma(d)}.$$

1.2.3. Espacios de Hilbert

Esta sección presenta brevemente la teoría que lleva a la definición de operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert y la propiedad de nuestro interés que estos operadores poseen. Los siguientes resultados pueden ser consultados en [8] o [66].

Definición 1.19. *Un espacio vectorial X sobre un cuerpo \mathbb{K} con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ se denomina espacio de Hilbert cuando es completo con la norma inducida por el producto interno.*

Definición 1.20. *Sea X un espacio de Hilbert. Diremos que $x, y \in X$ son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$. Diremos que un conjunto S es un sistema ortogonal si todos sus elementos son ortogonales entre sí. Diremos que un sistema ortogonal es ortonormal si todos sus elementos tienen norma igual a 1.*

Teorema 1.21. *Todo sistema ortonormal es linealmente independiente.*

Definición 1.22. *Diremos que un sistema ortonormal S es base ortonormal de un espacio de Hilbert X si el único vector ortogonal a S es $x = 0$.*

Teorema 1.23. *Sea X un espacio de Hilbert y T un operador lineal y continuo de X en X . Entonces existe un único operador T^* de X en X lineal y continuo, que llamaremos operador adjunto de T , tal que*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

Definición 1.24. *Sea X un espacio de Hilbert. Diremos que un operador T es autoadjunto si $T = T^*$.*

Teorema 1.25. *Sea X un espacio de Hilbert y T un operador autoadjunto. Entonces los posibles autovalores de T son reales y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Este teorema final será de interés para este trabajo, ya que los operadores fraccionarios que consideramos aquí no son autoadjuntos, con lo que no podemos asegurar que posean la valiosa propiedad de tener únicamente autovalores reales y autofunciones ortogonales.

1.2.4. Problemas variacionales

Esta sección presenta brevemente un tipo de problema variacional y un teorema con una ecuación de Euler–Lagrange para resolverlo. El resultado puede ser consultado en [11].

Un problema variacional clásico puede ser expresado como sigue: hallar una función y que maximice o minimice un funcional J sujeto a una serie de restricciones. Se puede expresar como

$$\begin{cases} J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \rightarrow \max/\min \\ I(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx = c \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b. \end{cases} \tag{1.4}$$

El siguiente teorema brinda el fundamento teórico del método usual para resolver este tipo de problemas, que consiste en resolver una ecuación de Euler-Lagrange.

Teorema 1.26. *Consideremos el problema de hallar $y \in E$ que verifique las condiciones de (1.4), donde L es un Lagrangiano con derivada continua con respecto a cada variable, c constante y*

$$E = \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : y, y' \in C^0([a, b])\}.$$

Si y maximiza o minimiza J sobre E sujeto a la restricción $I(y) = c$, entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que y satisface la ecuación de Euler–Lagrange dada por

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

con $F = L - \lambda G$.

El motivo de la inclusión de esta breve sección se halla en el hecho que las versiones fraccionarias de este tipo de problemas ponen en manifiesto las características no deseadas de las derivadas fraccionarias de Caputo que intentaremos visualizar en el último capítulo de esta tesis.

1.2.5. Operadores y funciones importantes del análisis fraccionario

A continuación definiremos los operadores fraccionarios integro–diferenciales con los que trabajaremos [15] y funciones destacadas [25], [35], [40], [61], [64]. Al ser operadores integro–diferenciales, estas derivadas fraccionarias son

asociadas a procesos de memoria cuando la derivada fraccionaria se aplica a la variable temporal y al comportamiento no local de un fluido cuando la derivada fraccionaria se aplica a la variable espacial.

Notemos que en cada caso hay dos definiciones simétricas de cada operador, a derecha y a izquierda, que surgen a partir del hecho de que todos los operadores son integrales. Las primeras definiciones, de la integral fraccionaria de Riemann–Liouville por derecha y por izquierda son necesarias para luego definir los operadores fraccionarios. Esto se debe a que no es inmediato generalizar el concepto de derivada, pero sí es intuitivo generalizar a $n \in \mathbb{R}$ el concepto de función integral n -ésima. Para ello, simplemente se reemplaza en la fórmula de la n -ésima integral de una función el factorial de dicha fórmula por la función Gamma. Se tienen las siguientes definiciones.

Definición 1.27. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La integral fraccionaria de Riemann–Liouville por derecha de orden α a partir del punto a , que se denota ${}_a I_s^\alpha$, está definida sobre $L^1([a, b])$ como

$${}_a I_s^\alpha f(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s (s - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Definición 1.28. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La integral fraccionaria de Riemann–Liouville por izquierda de orden α hasta el punto b , que se denota ${}_s I_b^\alpha$, está definida sobre $L^1([a, b])$ como

$${}_s I_b^\alpha f(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_s^b (\tau - s)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Con esto podemos ahora definir los operadores de derivación fraccionarios. Los de Riemann–Liouville integran primero una función con un orden no entero para luego aplicarle la derivada, mientras que los de Caputo derivan primero y luego integran con un orden no entero. En ambos casos, el orden total de derivación es el mismo.

Definición 1.29. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. La derivada fraccionaria de Riemann–Liouville por derecha de orden α a partir del punto a , que se denota ${}^R L D_s^\alpha$ está definida sobre $W^{n,1}([a, b])$ como

$${}^R L D_s^\alpha f(s) = \begin{cases} \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^s f(\tau) (s - \tau)^{n-\alpha-1} d\tau \right] & \text{si } n - 1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(s) & \text{si } \alpha = n \end{cases}$$

1. INTRODUCCIÓN

Definición 1.30. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. La derivada fraccionaria de Riemann–Liouville por izquierda de orden α hasta el punto b , que se denota ${}^RLD_b^\alpha$ está definida sobre $W^{n,1}([a, b])$ como

$${}^RLD_b^\alpha f(s) = \begin{cases} \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_s^b f(\tau)(\tau-s)^{n-\alpha-1} d\tau \right] & \text{si } n-1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(s) & \text{si } \alpha = n \end{cases}$$

Definición 1.31. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. La derivada fraccionaria de Caputo por derecha de orden α a partir del punto a , que se denota ${}^CD_s^\alpha$ está definida sobre $W^{n,1}([a, b])$ como

$${}^CD_s^\alpha f(s) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^s f^{(n)}(\tau)(s-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \right] & \text{si } n-1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(s) & \text{si } \alpha = n \end{cases}$$

Definición 1.32. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. La derivada fraccionaria de Caputo por izquierda de orden α hasta el punto b , que se denota ${}^CD_b^\alpha$ está definida sobre $W^{n,1}([a, b])$ como

$${}^CD_b^\alpha f(s) = \begin{cases} \left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_s^b f^{(n)}(\tau)(\tau-s)^{n-\alpha-1} d\tau \right] & \text{si } n-1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(s) & \text{si } \alpha = n \end{cases}$$

El operador principal con el que trabajaremos es la derivada fraccionaria de Caputo por derecha a partir de 0. De no especificar claramente lo contrario, siempre que trabajemos con un operador diferencial fraccionario, se tratará de éste.

Nota 1.33. Tanto la derivada fraccionaria de Caputo por derecha como la derivada fraccionaria de Caputo por izquierda tienen cada una un grupo de funciones que son fáciles de derivar, a saber

$${}^CD_s^\alpha (s-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (s-a)^{\beta-\alpha},$$

$${}^CD_b^\alpha (b-s)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (b-s)^{\beta-\alpha}.$$

Este resultado se obtiene al realizar un cambio de variable en la integral y utilizando propiedades de la función Beta.

Luego, este resultado puede ser utilizado de manera inmediata para calcular la derivada fraccionaria de series de potencias término a término.

Nota 1.34. *Se puede ver fácilmente que ambos operadores, la derivada fraccionaria de Caputo y de Riemann–Liouville, están fuertemente relacionados mediante la siguiente relación.*

$$\begin{aligned} {}^C D_s^\alpha f(s) &= {}^{RL} D_s^\alpha f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{d^k}{ds^k} f(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (s - a)^{k-\alpha}, \\ {}^C D_b^\alpha f(s) &= {}^{RL} D_b^\alpha f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{d^k}{ds^k} f(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - s)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Observamos que si $\alpha \in (0, 1)$ y $f(a) = 0$, ambas derivadas por derecha coinciden, mientras que si $f(b) = 0$ coinciden las derivadas por izquierda.

Lamentablemente, hay diferentes propiedades cruciales de las derivadas clásicas que se pierden al considerar derivadas fraccionarias. Entre ellas, se destacan la regla del producto, la regla de la cadena y la fórmula de integración por partes. A continuación veremos las versiones fraccionarias que se tiene de esos teoremas.

Teorema 1.35. *Sea $\alpha \in (0, 1)$ y f y g dos funciones analíticas en un entorno de a . Entonces la regla del producto viene dada por*

$$\begin{aligned} {}^C D_s^\alpha [fg](s) &= \frac{(s - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} g(a)(f(s) - f(a)) + ({}^C D_s^\alpha g(s))f(s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_a I_s^{k-\alpha} g(s)) {}^C D_s^k f(s). \end{aligned}$$

Teorema 1.36. *Sea $\alpha \in (0, 1)$ y f y g dos funciones continuas en $[a, b]$. Entonces la fórmula de integración por partes viene dada por*

$$\int_a^b g(x) {}^C D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}^{RL} D_b^\alpha g(x) dx.$$

No incluiremos la fórmula para la regla de la cadena debido a que es sumamente extensa y por ende no posee aplicabilidad alguna. Puede ser consultada en [15]. De una forma u otra, estos teoremas resultan ser poco útiles. Mientras que la regla del producto contiene una serie de productos entre derivadas fraccionarias de Caputo e integrales fraccionarias de Riemann–Liouville, en la fórmula de la integración por partes intervienen dos derivadas diferentes,

1. INTRODUCCIÓN

la de Caputo y la de Riemann–Liouville, una a derecha y la otra a izquierda. Estas son herramientas valiosas que se pierden al pasar de derivadas de orden entero a derivadas de orden real positivo. A lo largo de este tesis podremos observar en diferentes ocasiones los inconvenientes que esto genera.

A continuación definiremos diferentes familias de funciones que son esenciales en el análisis fraccionario, a saber las funciones de Mittag–Leffler, las funciones de Wright y las funciones de Mainardi. Presentaremos diferentes propiedades útiles que han sido fundamentales en este trabajo.

Definición 1.37. *La función de Mittag–Leffler $E_{\alpha,\beta}$ de parámetros $\alpha, \beta > 0$ está definida para $s \in \mathbb{C}$ como*

$$E_{\alpha,\beta}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Si $\beta = 1$, simplemente notamos $E_{\alpha,1} = E_{\alpha}$ y la llamamos función de Mittag–Leffler de un parámetro.

Ha sido probado que $\forall \alpha, \beta > 0$ la función de Mittag–Leffler $E_{\alpha,\beta}$ es entera (ver [22]), sin embargo aquí utilizaremos principalmente el dominio real. En el análisis fraccionario, es considerada la generalización de la función exponencial debido a diferentes propiedades que verifica, tales como $E_1(s) = e^s$, y el hecho que $E_{\alpha}(c(s-a)^{\alpha})$ es una autofunción del operador diferencial fraccionario

$${}_a^C D_s^{\alpha} f(s) = c f(s).$$

Definición 1.38. *La función de Wright de parámetros $\alpha > -1$ y $\beta \in \mathbb{R}$ está definida para $s \in \mathbb{C}$ como*

$$\mathcal{W}(s; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

También en este caso se ha probado que la función de Wright es entera $\forall \alpha > -1$ (ver [23]), $\beta \in \mathbb{R}$ y su derivada viene dada por

$$\frac{d}{ds} \mathcal{W}(s; \alpha, \beta) = \mathcal{W}(s; \alpha, \beta + \alpha)$$

Definición 1.39. *La función de Mainardi \mathcal{M}_{ν} de parámetro $\nu \in (0, 1)$ está definido para $s \in \mathbb{C}$ como*

$$\mathcal{M}_{\nu}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k! \Gamma(-\nu k + 1 - \nu)}.$$

Teniendo en cuenta que la función de Mainardi es un caso particular de la función de Wright, a saber

$$\mathcal{M}_\nu(s) = \mathcal{W}(-s; -\nu, 1 - \nu),$$

ésta hereda todas las propiedades de la función de Wright. De este modo podemos concluir que también las funciones de Mainardi son enteras. Tal como en el caso de la función de Mittag-Leffler, en este caso trabajaremos principalmente en el dominio real. Teniendo la siguiente proposición,

Proposición 1.40.

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{s^2}{4}}$$

(ver [42]), la función de Mainardi puede ser considerada una generalización fraccionaria de la función Gaussiana. El rol que cumple la función de Mainardi como núcleo del calor fraccionario que observaremos en las siguientes secciones también apoya esta idea.

Para la función de Mainardi, la siguiente propiedad para sus momentos en \mathbb{R}^+ ha sido probada.

$$\int_0^\infty s^n \mathcal{M}_\nu(s) ds = \frac{n!}{\Gamma(\nu n + 1)}. \quad (1.5)$$

De hecho, una propiedad más general se obtuvo en [40], reemplazando la función de Mainardi con la función de Wright:

$$\int_0^\infty s^n \mathcal{W}(-s; \alpha, \beta) ds = \frac{n!}{\Gamma(-\alpha n + \beta - \alpha)}. \quad (1.6)$$

Utilizando esta propiedad se puede probar que

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |s^m \mathcal{M}_\nu^{(n)}(|s|)| < \infty$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ y $\forall \nu \in (0, 1)$, lo cual muestra que la función de Mainardi $\mathcal{M}_\nu(|s|)$ tiene un comportamiento similar al de una función de Schwartz. Notemos que esto también tiene sentido si consideramos a la función de Mainardi una generalización de la función de Gauss, el ejemplo más común de una función de Schwartz no trivial. Sin embargo $\mathcal{M}_\nu(|s|) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para $\nu \neq \frac{1}{2}$, ya que en $s = 0$ sus derivadas no son continuas. También se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.41. $\mathcal{M}_\nu(|s|) \in L^p(\mathbb{R}), \forall 1 \leq p \leq \infty, \forall \nu \in (0, 1)$.

1. INTRODUCCIÓN

Prueba. Es una consecuencia inmediata de

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left| s^m \mathcal{M}_\nu^{(n)}(|s|) \right| < \infty \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$

□

De esta forma, la función de Mainardi puede ser considerada una distribución temperada. La función de Mainardi y la función de Mittag-Leffler están fuertemente relacionadas mediante la transformada de Fourier (ver [40]).

$$\mathcal{M}_\nu(|s|) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2E_{2\nu}(-\xi^2). \quad (1.7)$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}_\nu(|s|) \in L^2(\mathbb{R}) \forall \nu \in (0, 1)$, obtenemos que $E_\nu(-\xi^2) \in L^2(\mathbb{R}) \forall \nu \in (0, 2)$. Otra consecuencia es que la familia de funciones $\{E_{2\nu}(-\xi^2)\}_{\nu \in (0, 1)}$ está uniformemente acotada, ya que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} E_{2\nu}(-\xi^2) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_\nu(|s|) ds = 2.$$

Gracias a otras propiedades de las funciones de Mainardi podemos tener una idea de la representación gráfica de esta familia de funciones (ver figura 1). Tenemos por ejemplo que $\mathcal{M}_\nu > 0 \forall \nu \in (0, 1)$, de (1.5) sabemos que $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{M}_\nu(s) = 0$ y que $\int_0^{\infty} \mathcal{M}_\nu(s) ds = 1 \forall \nu \in (0, 1)$, y ha sido probado para $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ que \mathcal{M}_ν es una función decreciente (ver [21]), mientras que para $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ \mathcal{M}_ν tiene exactamente un máximo local (ver [42]).

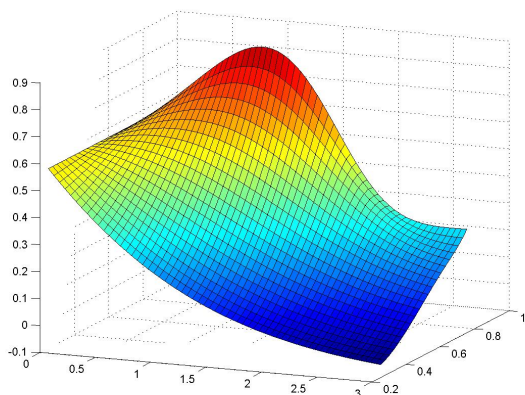


FIGURA 1. Función de Mainardi de parámetro $\alpha \in (0.25, 0.75)$ en el dominio $[0, 3]$

2. Un problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre \mathbb{R}

Los resultados de esta sección fueron publicados en [19], [20] y presentados en los congresos (12), (13) y (14). Se puede consultar la siguiente bibliografía para este capítulo: [10], [22], [23], [25], [26], [27], [28], [35], [37], [39], [40], [41], [42].

El análisis fraccionario ha mostrado ser aplicable a una gran cantidad de fenómenos físicos, químicos y biológicos, entre otros. Entre ellos se destaca el comportamiento de medios viscoelásticos, que presentan un comportamiento intermedio entre el de un fluido viscoso y un sólido elástico. Teniendo en cuenta que estos dos casos son modelados matemáticamente con la ecuación de difusión y la ecuación de ondas, resulta intuitivo modelar el comportamiento intermedio de un medio viscoelástico mediante una ecuación interpolante con derivadas fraccionarias. Dicha ecuación diferencial fraccionaria se denomina ecuación de difusión fraccionaria y viene dada por

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) \quad \alpha \in (0, 2),$$

donde consideraremos la derivada fraccionaria de Caputo por derecha de orden α a partir del punto 0 con respecto a la variable temporal t . El punto inicial 0 se corresponde al momento inicial $t = 0$. Tanto en este capítulo como en los dos que siguen estudiaremos esta ecuación y su naturaleza intrínseca. Esta ecuación se ha tratado en una gran cantidad de publicaciones científicas (ver por ejemplo [30], [38], [45], [51] y [59]).

Comenzaremos estudiando un problema de Cauchy unidimensional para la ecuación de difusión fraccionaria sobre todo el eje real. Al comienzo mostraremos una forma para obtener la solución al problema basada en el método de separación de variables. La parte clave sin embargo será que de esta forma obtendremos una expresión alternativa de la solución al problema que será de suma utilidad durante este capítulo y el que sigue. Luego de utilizar esa expresión para probar que la función obtenida efectivamente es la solución al

problema planteado, veremos cómo utilizar esta expresión para probar propiedades de las soluciones obtenidas.

2.1. El problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria

Para $\alpha \in (0, 2)$ consideramos el problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u_\alpha \text{ acotada.} \end{cases} \quad (2.1)$$

y queremos mostrar mediante el método de separación de variables que la función

$$u_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} |x - \xi| \right) \varphi(\xi) d\xi$$

es solución de la misma, donde $\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}$ es la función de Mainardi de parámetro $\frac{\alpha}{2}$. Esta expresión de la solución fue hallada por Mainardi en [41] utilizando la transformada de Laplace en la variable temporal y la transformada de Fourier en la variable espacial. Consideremos ahora una solución del tipo $u(x, t) = X(x)T(t)$. Una función de estas características será una solución de (2.1) si y sólo si:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T^{(\alpha)}(t)}{\lambda T(t)} = -c,$$

donde c es una constante real. Obtenemos las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

$$T^{(\alpha)}(t) = -c\lambda T(t) \quad (2.2)$$

$$X''(x) = -cX(x) \quad (2.3)$$

La solución de (2.2) viene dada por

$$E_\alpha(-c\lambda t^\alpha),$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

donde E_α es la función uniparamétrica de Mittag-Leffler de parámetro α , y la solución de (2.3) viene dada por:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-c}x} + Be^{-\sqrt{-c}x}.$$

Para obtener una solución acotada, $\sqrt{-c}$ debe ser un número imaginario puro, lo que implica que $c > 0$. Es por eso que podemos poner $c = \xi^2$, con $\xi \in \mathbb{R}$. Para todo ξ obtenemos una solución de la ecuación diferencial dada por

$$u(x, t; \xi) = (a(\xi) e^{i\xi x} + b(\xi) e^{-i\xi x}) E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha).$$

Proponemos como candidato a la solución

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t; \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) e^{-i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $f(\xi) = a(\xi) + b(-\xi)$ es una función a determinar. Para eso, consideramos la condición inicial

$$u_\alpha(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \mathcal{F}\{f\}(x) = \varphi(x)$$

donde $\mathcal{F}\{f\}$ es la transformada de Fourier de f . Gracias a propiedades de la transformada de Fourier podemos establecer que $f(\xi) = \overline{\mathcal{F}\{\varphi\}}(\xi)$ y utilizar esto junto a

$$\frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x| \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} E_\alpha(-\lambda \xi^2 t^\alpha)$$

(que se obtiene del par (1.7) utilizando la propiedad de cambio de escala) en (2.4):

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\{\varphi\}}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\{\varphi\}}(\xi) e^{i\xi x} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |\cdot| \right) \right\}(\xi) d\xi = \end{aligned}$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}}|\cdot - x|\right)\right\}(\xi) d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}\}(\xi) \frac{1}{2}\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}}|\xi - x|\right) d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2}\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}}|x - \xi|\right) d\xi. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Y así obtenemos como solución al problema (2.1),

$$u_{\alpha}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}}|x - \xi|\right) \varphi(\xi) d\xi.$$

Notemos que esta expresión es idéntica a la función obtenida en [41], [42], de modo que aquí hemos deducido la misma solución deseada de manera alternativa. Sin embargo, como veremos a continuación el razonamiento no garantiza indiscutiblemente que la solución obtenida efectivamente es la solución al problema. Probaremos esto ahora para un cierto tipo de condiciones iniciales.

Teorema 2.1. *Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ de modo que $\mathcal{F}\{\varphi\}(x)x^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Una solución del problema de Cauchy (2.1) con $\alpha \in (0, 2)$ viene dada por*

$$u_{\alpha}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\lambda t^{\alpha-1}}|x - \xi|\right) \varphi(\xi) d\xi. \tag{2.6}$$

Prueba.

Caso 1: $0 < \alpha < 1$.

Para probar que la función verifica la ecuación de difusión fraccionaria, consideramos las igualdades que nos llevaron a (2.5). Dado que $\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ teniendo en cuenta la hipótesis que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, esas igualdades son válidas. Tenemos entonces

$$u_{\alpha}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda t^{\alpha}) d\xi. \tag{2.7}$$

La derivada fraccionaria de Caputo de orden α con $0 < \alpha < 1$ de u_{α} viene dada por

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u_{\alpha}(x, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) d\xi \right] d\tau.$$

**2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}**

Para poder intercambiar la derivada y la integral, notemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) \right| = \\ & = |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha})| = g(\xi). \end{aligned}$$

Como consecuencia del comportamiento asintótico de la función de Mittag-Leffler dada en [26], se puede ver fácilmente que $E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ como función de ξ . Combinando esto con $\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2 \in L^1(\mathbb{R})$ y utilizando la desigualdad de Hölder obtenemos $g \in L^1(\mathbb{R})$, y así

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u_{\alpha}(x, t) = \\ & = - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Para poder intercambiar estas dos integrales usamos el teorema de Fubini, para lo cual probaremos que se cumplen las hipótesis del teorema de Tonelli (ver [10], capítulo 4). Ya probamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} (-\xi^2 \lambda) \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) \right| d\xi$$

es finito. Para probar que toda la integral doble es finita, usamos nuevamente el hecho que $E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) (-\xi^2) e^{i\xi x} \lambda \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha}) \right| d\xi d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| \lambda \tau^{\alpha-1} |E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha})| d\xi d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| \lambda \tau^{\alpha-1} \|E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^{\alpha})\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} d\xi d\tau = \\ & = \frac{\lambda \|E_{\alpha, \alpha}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \tau^{\alpha-1} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| d\xi \\ & = \frac{\lambda \|E_{\alpha, \alpha}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 r^{(1-\alpha)-1} (1-r)^{\alpha-1} dr \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| d\xi \end{aligned}$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

donde el último término es finito ya que la primera integral es la función Beta con $x = \alpha > 0$, $y = 1 - \alpha > 0$ y la segunda integral es finita por hipótesis. Gracias al teorema de Tonelli estamos en condiciones de utilizar el teorema de Fubini y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) \right] d\xi = \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi. \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que se puede pasar la segunda derivada con respecto a la variable espacial x dentro de la integral, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{i\xi x} \right] E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba de que u_α satisface la ecuación diferencial. Para probar que u_α satisface la condición inicial, simplemente notamos que

$$u_\alpha(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(0) d\xi = \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}\}(x) = \varphi(x).$$

Caso 2: $1 < \alpha < 2$.

En este caso la derivada fraccionaria de orden α con $1 < \alpha < 2$ viene dada por

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) d\xi \right] d\tau.$$

Ya hemos probado en el caso 1 que podemos pasar la primera derivada dentro de la integral. Para la segunda derivada vemos que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) \right| = \\ &= \left| \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) \right| = \tilde{g}(\xi). \end{aligned}$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

También aquí se puede probar que $E_{\alpha, \alpha-1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) \xi \in L^\infty(\mathbb{R})$ como función de ξ , y así finalmente $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Tenemos

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) d\xi d\tau.$$

Nuevamente utilizamos el teorema de Tonelli y, como en el caso 1, ya hemos probado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (t-\tau)^{1-\alpha} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) \right| d\xi < \infty$$

y para la integral doble obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) \right| d\xi d\tau \leq \\ & \leq \frac{\lambda \|E_{\alpha, \alpha-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 r^{(2-\alpha)-1} (1-r)^{(\alpha-1)-1} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| d\xi \end{aligned}$$

donde la primera integral es la función Beta con $x = \alpha - 1 > 0$, $y = 2 - \alpha > 0$ y la segunda integral es finita ya que $\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Nuevamente estamos en condiciones de utilizar el teorema de Fubini y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) \right] d\xi = \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t). \end{aligned}$$

Para ver que u_α satisface la condición inicial, nuevamente observamos que

$$u_\alpha(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(0) d\xi = \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}\}(x) = \varphi(x).$$

□

Nota 2.2. Para probar este teorema una expresión alternativa de la solución (2.7) resultó ser más útil que la versión clásica (2.6) debido a diferentes propiedades que posee. Por un lado, el cálculo de las diferentes derivadas resulta ser más fácil debido a que en esta expresión las variables están separadas en diferentes partes de la expresión.

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Por el otro lado, en la expresión clásica no se puede calcular la derivada fraccionaria, ya que en esa expresión la variable temporal t sólo se manifiesta en potencias negativas. Pero la derivada fraccionaria de Caputo no está definida para potencias negativas, por lo que no se podría recurrir a una derivación término a término en la expansión en series de potencias de la función de Mainardi. Este es el motivo principal por el cual no se puede probar este teorema con la expresión clásica.

En (2.7), la variable temporal t se manifiesta únicamente en potencias positivas, de modo que esa dificultad no se presenta aquí y se puede derivar término a término. El motivo por el cual este cambio es posible se encuentra en la propiedad de cambio de escala de la transformada de Fourier, en la cual constantes se invierten con un cambio de escala.

Nota 2.3. Para $\alpha \in (0, 1)$, la unicidad de la solución ha sido probada en [37] utilizando un principio del máximo. Allí, se considera una condición inicial continua, que en el caso del teorema (2.1) no es necesario.

Para $\alpha \in (1, 2)$ una condición inicial de flujo debe ser agregada al problema de Cauchy para garantizar unicidad de la solución. La solución (2.6) verifica para $\alpha \in (1, 2)$ la condición inicial de flujo $u_t(x, 0) = 0$.

Nota 2.4. Notemos que las hipótesis del teorema (2.1) se satisfacen si consideramos como condición inicial $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.2. Cotas para las normas L^p de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria

En esta sección presentaremos diferentes cotas para las normas L^p de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u_\alpha \text{ acotada,} \end{cases} \quad (2.8)$$

donde se consideran los espacios L^p con respecto a la variable espacial y las cotas quedarán en función de la variable temporal.

Para obtener estos resultados, utilizaremos ambas expresiones de la solución,

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

(2.6) y (2.7), y la expresión de su transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\{u_\alpha\}(\xi, t) = E_\alpha(-\lambda\xi^2 t^\alpha) \mathcal{F}\{\varphi\}(\xi).$$

Esta expresión es inmediata a partir de la integral de convolución $u_\alpha(x, t) = K_\alpha(x, t) * \varphi(x)$, donde el núcleo del calor fraccionario $K_\alpha(x, t)$ está definido como

$$K_\alpha(x, t) := \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x|\right). \quad (2.9)$$

En esta sección consideraremos condiciones iniciales φ que satisfacen las hipótesis del teorema 2.1.

Teorema 2.5. *Para $\alpha \in (0, 2)$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$, la solución del problema de Cauchy (2.8) verifica*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_\alpha(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Prueba. Tenemos inmediatamente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x - \xi, t) dx \varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi.$$

□

De manera similar se puede probar que

$$\|u_\alpha(x, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

donde la igualdad es válida para funciones φ tales que $\varphi \geq 0$ o $\varphi \leq 0$.

Teorema 2.6. *Para $\alpha \in (0, 2)$ la norma L^∞ de la solución del problema de Cauchy (2.8) verifica la desigualdad*

$$\|u_\alpha(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t^{\frac{\alpha}{4}}}.$$

Prueba. Por propiedades de la transformada de Fourier tenemos

$$\|u_\alpha(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\mathcal{F}\{u_\alpha\}(\xi, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|E_\alpha(-\lambda\xi^2 t^\alpha) \mathcal{F}\{\varphi\}(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_\alpha(-\lambda\xi^2 t^\alpha) \mathcal{F}\{\varphi\}(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |E_\alpha(-\lambda\xi^2 t^\alpha)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{F}\{\varphi\}\|_{L^2(\mathbb{R})} =$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda t^\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} |E_\alpha(-s^2)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{F}\{\varphi\}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{t^{\frac{\alpha}{4}}}$$

donde realizamos la sustitución $\sqrt{\lambda t^\alpha} \xi = s$ y utilizamos la desigualdad de Hölder con $E_\alpha(-s^2)$, $\mathcal{F}\{\varphi\}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. \square

Notemos que para pequeños valores de t la cota

$$\|u_\alpha(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi)| d\xi \leq \|\varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

es más precisa que la cota del teorema 2.6.

Teorema 2.7. *Sea $1 < p < \infty$, $\alpha \in (0, 2)$. Entonces el decaimiento de la norma L^p de la solución del problema de Cauchy (2.8) viene dado por*

$$\|u_\alpha(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t^{\frac{\alpha}{4}(1-\frac{1}{p})}}.$$

Prueba. Por desigualdad de interpolación tenemos

$$\|u_\alpha(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_\alpha(x, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \|u_\alpha(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}}.$$

El resultado sigue del teorema previo, dado que la norma L^1 de u_α es acotada por la norma L^1 de la condición inicial. \square

2.3. Continuidad de la solución del problema de Cauchy con respecto al orden de diferenciación

En el análisis fraccionario es de suma importancia verificar que los resultados obtenidos para el caso general $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sean consistentes con los casos enteros, $\alpha \in \mathbb{N}$, que representan derivadas en el sentido clásico. Esto se logra principalmente estudiando la continuidad de los resultados obtenidos con respecto al parámetro de derivación α .

Primero probaremos la continuidad con respecto al parámetro α de la función de Mainardi.

Lema 2.8. *Sea $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in (0, 2)$. Entonces*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(x) = \mathcal{M}_{\frac{\alpha_0}{2}}(x).$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Prueba. La función de Mainardi viene definida por

$$\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k! \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}k + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Tomamos $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \subset (0, 2)$ y k suficientemente grande como para que $\frac{\alpha_0 - \varepsilon}{2}(k+1)$ sea más grande que $\frac{3}{2}$. Teniendo en cuenta que en $(\frac{3}{2}, \infty)$ la función Gamma es creciente, utilizando la identidad $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ y considerando la cota

$$\Gamma(x+s) \leq x^s \Gamma(x),$$

(válida para $x \geq 0$ y $0 \leq s \leq 1$) con $x = \frac{\alpha}{2}k$ y $0 \leq s = \frac{\alpha}{2} \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-x)^k}{k! \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}k + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \right| &= \left| \frac{(-x)^k \sin\left(\pi\left(-\frac{\alpha}{2}k + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k + \frac{\alpha}{2}\right)}{k! \pi} \right| \leq \\ &\leq \frac{|x|^k}{k! \pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k + \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{|x|^k}{k! \pi} \left(\frac{\alpha}{2}k\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k\right) \leq \\ &\leq \frac{|x|^k}{k! \pi} \left(\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}k\right)^{\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}k\right) := a_k. \end{aligned}$$

Para ver que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente, es suficiente probar que $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \frac{|x|}{k+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}k + \frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}k\right)} \leq \\ &\leq \frac{|x|}{k+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}} \left(\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}k\right)^{\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}} = \\ &= \frac{|x|}{(k+1)^{1 - \frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}}} \left(\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}\right)^{\frac{\alpha_0 + \varepsilon}{2}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ya que $\alpha_0 + \varepsilon < 2$. □

Nota 2.9. *En particular, para $\alpha_0 = 1$ se tiene*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(x) = \mathcal{M}_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}$$

Teorema 2.10. *Sea $u_\alpha(x, t)$ la solución al problema de Cauchy (2.8) para $\alpha \in (0, 2)$. Entonces, fijando $\alpha_0 \in (0, 2)$ tenemos*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} u_\alpha(x, t) = u_{\alpha_0}(x, t)$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Prueba. Consideremos la solución del problema de Cauchy (2.8) para $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) = U_\varepsilon$. Entonces

$$u_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Sea $M = \max_{\alpha \in U_\varepsilon} \|K_\alpha(\xi, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ y obtenemos

$$|K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi)| \leq \|K_\alpha(\xi, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |\varphi(\xi)| \leq M |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Tomando ahora el límite de esta función cuando $\alpha \rightarrow \alpha_0$, obtenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha_0}(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

que es lo que queríamos probar. \square

Nota 2.11. Nuevamente, tomando $\alpha_0 = 1$, obtenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha(x, t) = u_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda t}} \varphi(\xi) d\xi,$$

que es la solución clásica al problema de Cauchy para la ecuación de difusión,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u_\alpha \text{ acotada.} \end{cases}$$

Hasta aquí, hemos probado la continuidad de la solución del problema de Cauchy con respecto al parámetro $\alpha \in (0, 2)$. Sin embargo, es de sumo interés analizar el caso $\alpha \rightarrow 2$, ya que este caso representa el problema de Cauchy para la ecuación de ondas. Para abordar este caso particular, debemos presentar primero unos resultados previos.

Teorema 2.12. La siguiente convergencia puntual es válida, donde la convergencia es uniforme sobre compactos.

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} E_{2\nu}(-\xi^2) = \cos(\xi).$$

Prueba. Sea $0 < \varepsilon < 1$, ν de modo que $2\nu > \varepsilon$ y $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que

$$\frac{1}{\Gamma(2\nu k + 1)} < \frac{1}{\Gamma(\varepsilon k + 1)}.$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Obtenemos

$$\left| \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{\Gamma(2\nu k + 1)} \right| \leq \frac{|\xi|^{2k}}{\Gamma(\varepsilon k + 1)} := a_k.$$

Para ver que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente, es suficiente probar que $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Utilizando la propiedad

$$\Gamma(x + s) \leq \Gamma(x)x^s$$

con $s \in (0, 1)$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= |\xi|^2 \frac{\Gamma(\varepsilon k + 1)}{\Gamma(\varepsilon k + \varepsilon + 1)} \leq \\ &\leq |\xi|^2 \frac{(\varepsilon k + \varepsilon)^{1-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon k + \varepsilon)}{(\varepsilon k + \varepsilon) \Gamma(\varepsilon k + \varepsilon)} = \frac{|\xi|^2}{(\varepsilon k + \varepsilon)^\varepsilon} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba, ya que ahora tenemos

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} E_{2\nu}(-\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\nu \rightarrow 1} \frac{(-\xi^2)^k}{\Gamma(2\nu k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} = \cos(\xi).$$

□

Para simplificar la notación, notaremos en el siguiente teorema

$$\mathcal{M}_\nu := \mathcal{M}_\nu(| \cdot |)$$

y obtenemos el siguiente resultado, que nos mostrará por qué en el caso $\alpha = 2$ debemos trabajar con distribuciones para operar de manera matemáticamente rigurosa.

Teorema 2.13. *Consideremos $\mathcal{M}_\nu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ una distribución temperada. Entonces*

$$\mathcal{M}_\nu \rightarrow \delta_1 + \delta_{-1} \text{ cuando } \nu \rightarrow 1 \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Prueba. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Se tiene

$$\langle \mathcal{M}_\nu, \psi \rangle = \langle \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}}\{\mathcal{M}_\nu\}\}, \psi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}\{\mathcal{M}_\nu\}, \mathcal{F}\{\psi\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2E_{2\nu}(-\xi^2) \mathcal{F}\{\psi\}(\xi) d\xi.$$

Pero teniendo en cuenta ahora que la familia de funciones de Mittag–Leffler está uniformemente acotada, se tiene $|2E_{2\nu}(-\xi^2) \mathcal{F}\{\psi\}(\xi)| \leq |2\mathcal{F}\{\psi\}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$, y con esto junto al resultado del teorema 2.12 tenemos

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \langle \mathcal{M}_\nu, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cos(\xi) \mathcal{F}\{\psi\}(\xi) d\xi =$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi} \mathcal{F}\{\psi\}(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi} \mathcal{F}\{\psi\}(\xi) d\xi = \\
 &= \langle e^{i\xi}, \mathcal{F}\{\psi\} \rangle + \langle e^{-i\xi}, \mathcal{F}\{\psi\} \rangle = \\
 &= \langle \delta_1, \psi \rangle + \langle \delta_{-1}, \psi \rangle = \langle \delta_1 + \delta_{-1}, \psi \rangle
 \end{aligned}$$

□

Con este resultado podemos estudiar ahora la continuidad de la solución del problema de Cauchy cuando $\alpha \rightarrow 2$. Para eso, nuevamente simplificaremos notación, fijando $K_{\alpha,t} := K_{\alpha}(\cdot, t)$.

Teorema 2.14. *Consideremos $K_{\alpha,t} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ una distribución temperada. Entonces*

$$K_{\alpha,t} * \varphi \rightarrow \varphi_{\lambda,t} \text{ cuando } \alpha \rightarrow 2 \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

donde $\varphi_{\lambda,t}$ viene definido por

$$\varphi_{\lambda,t}(x) := \frac{\varphi(x + \sqrt{\lambda}t) + \varphi(x - \sqrt{\lambda}t)}{2}.$$

Prueba. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \langle K_{\alpha,t} * \varphi, \psi \rangle &= \langle \overline{\mathcal{F}}\{\mathcal{F}\{K_{\alpha,t} * \varphi\}\}, \psi \rangle = \langle \mathcal{F}\{K_{\alpha,t}\} \mathcal{F}\{\varphi\}, \overline{\mathcal{F}}\{\psi\} \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(-(\sqrt{\lambda}t\xi)^2) \mathcal{F}\{\varphi\}(\xi) \overline{\mathcal{F}}\{\psi\}(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Nuevamente tenemos la cota

$$|E_{\alpha}(-(\sqrt{\lambda}t\xi)^2) \mathcal{F}\{\varphi\}(\xi) \overline{\mathcal{F}}\{\psi\}(\xi)| = |\mathcal{F}\{\varphi\}(\xi) \overline{\mathcal{F}}\{\psi\}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

que nos permite obtener

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 2} \langle K_{\alpha,t} * \varphi, \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda}t\xi) \mathcal{F}\{\varphi\}(\xi) \overline{\mathcal{F}}\{\psi\}(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\langle e^{-i\sqrt{\lambda}t\xi} \mathcal{F}\{\varphi\}, \overline{\mathcal{F}}\{\psi\} \rangle + \langle e^{i\sqrt{\lambda}t\xi} \mathcal{F}\{\varphi\}, \overline{\mathcal{F}}\{\psi\} \rangle \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\langle \mathcal{F}\{T_{\sqrt{\lambda}t}\varphi\}, \overline{\mathcal{F}}\{\psi\} \rangle + \langle \mathcal{F}\{T_{-\sqrt{\lambda}t}\varphi\}, \overline{\mathcal{F}}\{\psi\} \rangle \right] =
 \end{aligned}$$

donde $T_{x_0}\varphi(x) = \varphi(x + x_0)$. Así, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 2} \langle K_{\alpha,t} * \varphi, \psi \rangle &= \frac{\langle \mathcal{F}\{T_{\sqrt{\lambda}t}\varphi\} + \mathcal{F}\{T_{-\sqrt{\lambda}t}\varphi\}, \overline{\mathcal{F}}\{\psi\} \rangle}{2} = \\
 &= \frac{\langle T_{\sqrt{\lambda}t}\varphi + T_{-\sqrt{\lambda}t}\varphi, \psi \rangle}{2},
 \end{aligned}$$

donde

$$\frac{T_{\sqrt{\lambda}t}\varphi + T_{-\sqrt{\lambda}t}\varphi}{2} = \varphi_{\lambda,t}(x) = \frac{\varphi(x + \sqrt{\lambda}t) + \varphi(x - \sqrt{\lambda}t)}{2},$$

que es la solución clásica al problema de Cauchy para la ecuación de ondas,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_2(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial t} u_2(x, 0) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u_2 \text{ acotada.} \end{cases}$$

□

2.4. La solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria con condiciones iniciales explícitas.

En esta sección calculamos la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria con condiciones iniciales explícitas, que no necesariamente verifican las hipótesis de teorema presentado en este capítulo. Primero desarrollamos una expresión alternativa a la solución del problema de Cauchy que resultará ser más práctica para tales fines. Fijando $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ obtenemos

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x - \xi| \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} (x - \xi) \right) \varphi(\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_x^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} (\xi - x) \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \varphi(x - r\sqrt{\lambda t^\alpha}) dr + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \varphi(x + r\sqrt{\lambda t^\alpha}) dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \left[\varphi(x - r\sqrt{\lambda t^\alpha}) + \varphi(x + r\sqrt{\lambda t^\alpha}) \right] dr \end{aligned} \tag{2.10}$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

donde se realizaron las sustituciones $\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1}(x - \xi) = r$ y $\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1}(\xi - x) = r$ respectivamente.

Ahora podemos estudiar fácilmente el siguiente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \cos(cx) & \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quizás no sea difícil constatar que efectivamente $u_\alpha(x, t) = \cos(cx) E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha)$ verifica las condiciones dadas, ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) &= \cos(cx) \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha) = \\ &= -c^2 \lambda \cos(cx) E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \end{aligned}$$

Sin embargo, la idea es mostrar cómo obtener esta solución utilizando la nueva expresión general de la solución y reemplazando $\varphi(x) = \cos(cx)$. Utilizamos la representación en serie de potencias de $\cos(x)$ en (2.10)

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \left[\cos\left(c\left(x - r\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)\right) + \cos\left(c\left(x + r\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)\right) \right] dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} \left[\left(x - r\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)^{2k} + \left(x + r\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)^{2k} \right] dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} \left[2 \sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^{2k} \binom{2k}{i} x^{2k-i} \left(r\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)^i \right] dr = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \left[\sum_{i=0}^k \binom{2k}{2i} x^{2k-2i} \left(r\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)^{2i} \right] dr = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} \left[\sum_{i=0}^k \binom{2k}{2i} x^{2(k-i)} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}\right)^{2i} \int_0^\infty \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) r^{2i} dr \right] = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} \left[\sum_{i=0}^k \frac{(2k)!}{(2(k-i))! \Gamma(\alpha i + 1)} (\lambda t^\alpha)^i x^{2(k-i)} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left[\sum_{i=0}^k \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2(k-i))! \Gamma(\alpha i + 1)} (\lambda t^\alpha)^i x^{2(k-i)} \right]. \end{aligned}$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Reagrupando los coeficientes de misma potencia, obtenemos

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j c^{2j}}{(2k)!} \frac{(\lambda t^\alpha)^{j-k}}{\Gamma(\alpha(j-k)+1)} \right] x^{2k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+i} c^{2k+2i}}{(2k)!} \frac{(\lambda t^\alpha)^i}{\Gamma(\alpha i + 1)} \right] x^{2k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-c^2 \lambda t^\alpha)^i}{\Gamma(\alpha i + 1)} \right] \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha) \frac{(-1)^k}{(2k)!} (cx)^{2k} = \cos(cx) E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha).
 \end{aligned}$$

Obtenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.15. *La solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \cos(cx) & \text{si } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.11)$$

con $c \in \mathbb{R}$ constante, viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = \cos(cx) E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha).$$

De manera similar se obtienen los siguientes resultados

Proposición 2.16. *La solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \sin(cx) & \text{si } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.12)$$

con $c \in \mathbb{R}$ constante, viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = \sin(cx) E_\alpha(-c^2 \lambda t^\alpha).$$

Proposición 2.17. *La solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = e^{cx} & \text{si } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.13)$$

con $c \in \mathbb{R}$ constante, viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = e^{cx} E_\alpha(c^2 \lambda t^\alpha).$$

2. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Proposición 2.18. *La solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \sum_{k=0}^n a_k x^k & \text{si } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.14)$$

con $n \in \mathbb{N}$ viene dada por:

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^k \frac{k!}{(k-i)!} \frac{x^{k-i} (\sqrt{\lambda t^\alpha})^i}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}i + 1)}.$$

Vemos que es de suma utilidad disponer de diferentes expresiones de una función y que en diferentes contextos podemos usar la formulación que mejor se adapte a las necesidades del problema en cuestión. En particular, vimos que la expresión (2.7) ha resultado ser fundamental en este capítulo. Cabe entonces preguntarnos si la podremos utilizar para generalizar resultados que, hasta ahora con la expresión (2.5), no eran posible generalizar.

3. Generalizaciones del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre \mathbb{R}

Los resultados de esta sección fueron presentados en los congresos (1), (9) y (11). Se puede consultar la siguiente bibliografía para este capítulo: [10], [22], [23], [25], [26], [27], [28], [35], [37], [39], [40], [41], [42].

En el capítulo 2 hemos estudiado el problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional con $\alpha \in (0, 2]$ dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u_\alpha \text{ acotada,} \end{cases} \quad (3.1)$$

cuyos resultados principales pueden reunirse en el siguiente teorema

Teorema 3.1. *Sea $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ de modo que $\mathcal{F}\{\varphi\}(x)x^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces una solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha \in (0, 2]$ viene dada por*

$$u_\alpha(x, t) = K_\alpha(x, t) * \varphi(x), \quad (3.2)$$

con

$$K_\alpha(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x| \right).$$

Para la prueba utilizamos la expresión alternativa de la solución utilizando propiedades de la transformada de Fourier,

$$u_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\{\varphi\}}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi. \quad (3.3)$$

El teorema 3.1 evidencia que esta nueva expresión de la solución del problema de Cauchy posee un cierto potencial para probar nuevos resultados de manera rigurosa. En este capítulo nos proponemos entonces estudiar la utilidad de ambas expresiones, (3.2) y (3.3) y veremos que en diferentes pruebas cada una de las expresiones tiene ventajas y beneficios. Para eso, generalizaremos

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

los resultados obtenidos en el teorema 3.1. Por un lado obtendremos un teorema similar para el respectivo problema multidimensional y para órdenes de derivación mayores a 2. Por el otro lado probaremos el teorema para otra clase de funciones iniciales. También aquí obtendremos propiedades de las funciones obtenidas.

3.1. Generalización a operadores diferenciales fraccionarios de mayor orden y a problemas multidimensionales

Mostraremos primero utilizando esta expresión nueva que se pueden generalizar los resultados obtenidos a problemas con mayor orden de diferenciación y problemas multidimensionales. Observaremos que las herramientas utilizadas y el razonamiento que se sigue es idéntico al del caso original unidimensional con $\alpha \in (1, 2)$.

Teorema 3.2. *Sea $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}\{\varphi\}(x)x^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces la solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha > 0$ viene dada por (3.3).*

Prueba. Sea $n = \lceil \alpha \rceil$. La derivada fraccionaria de Caputo de orden α de la función $u_\alpha(x, t)$ viene dada por

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) d\xi \right] d\tau. \quad (3.4)$$

Notemos aquí que se puede probar inductivamente que para $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} E_\alpha(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) = -\xi^2 \lambda \tau^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha).$$

Así, para pasar en (3.4) la derivada n -ésima dentro del signo integral, debemos probar que para $k = 1, \dots, n$, se tiene

$$|\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha)| \leq g(\xi) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Pero teniendo en cuenta que $E_{\alpha, \alpha-k+1}$ es acotada en su dominio negativo (ver el comportamiento asintótico de la función de Mittag-Leffler presentada en [26]), esta expresión puede ser acotada por $g(\xi) = c|\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2|$, con c constante, la cual es integrable por hipótesis. Así obtenemos

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) =$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

$$= - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-n} E_{\alpha, \alpha-n+1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) d\xi d\tau.$$

Para intercambiar estos dos símbolos integrales usaremos el teorema de Fubini, para lo cual debemos probar que nos encontramos bajo las hipótesis del mismo. Ya hemos probado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-n} E_{\alpha, \alpha-n+1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) d\xi$$

es finito. Para probar que toda la integral doble también es finita, utilizaremos nuevamente que $E_{\alpha, \alpha-n+1} \in L^\infty(\mathbb{R})$ en el dominio deseado. Obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 \lambda \tau^{\alpha-n} E_{\alpha, \alpha-n+1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha) \right| d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| \lambda \tau^{\alpha-n} |E_{\alpha, \alpha-n+1}(-\xi^2 \lambda \tau^\alpha)| d\xi d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| \lambda \tau^{\alpha-n} \|E_{\alpha, \alpha-n+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} d\xi d\tau = \\ &= \frac{\lambda \|E_{\alpha, \alpha-n+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\alpha-n} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| d\xi = \\ &= \frac{\lambda \|E_{\alpha, \alpha-n+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 r^{n-\alpha-1} (1-r)^{\alpha-n} dr \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \xi^2| d\xi \end{aligned}$$

donde la última expresión es finita puesto que la primera integral es la función Beta con $x = 1 + \alpha - n > 0$ y $y = n - \alpha > 0$ y la segunda integral es finita por hipótesis. El teorema de Tonelli finalmente nos permite utilizar el teorema de Fubini para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) \right] d\xi = \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi. \end{aligned}$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

De manera similar se prueba que se puede pasar la derivada segunda con respecto a la variable x dentro de la integral, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{i\xi x} \right] E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} \xi^2 E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi, \end{aligned}$$

con lo que completamos la prueba de que la función u_α verifica la ecuación diferencial. Para probar que u_α satisface la condición inicial, vemos que

$$u_\alpha(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(0) d\xi = \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}\}(x) = \varphi(x)$$

□

Presentamos ahora la generalización del teorema 3.1 a mayores dimensiones.

Teorema 3.3. *Sea $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{F}\{\varphi\}(x)|x|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Sea $\alpha > 0$. Una solución al problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \Delta u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}^d; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \\ u_\alpha \text{ acotada} \end{cases}$$

viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi \cdot x} E_\alpha(-|\xi|^2 \lambda t^\alpha) d\xi.$$

Omitimos la prueba de este resultado ya que la prueba es análoga a la del teorema 3.2. En esta subsección se manifiesta la importancia de la expresión (3.3) ya que los resultados obtenidos aquí no podrían haber sido hallados y probados utilizando la expresión clásica (3.2).

3.2. Generalización de la condición inicial

Teniendo en cuenta que la ecuación de difusión fraccionaria representa un modelo matemático para diferentes fenómenos físicos, sería de gran utilidad que las condiciones que imponen los teoremas relacionados a esta ecuación no sean artificiales, tal como sucede en el teorema 3.1, donde las propiedades que se le impone a la condición inicial del problema de Cauchy están más bien forzadas por la demostración del teorema.

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

En esta sección construiremos un teorema similar a dicho teorema cuyos requerimientos sobre la condición inicial del problema de Cauchy sean diferente. Dividiremos la sección en dos partes, determinando primero condiciones para que la función (3.2) sea solución de la ecuación de difusión fraccionaria y probando luego bajo qué circunstancias la misma verifica la condición inicial. Primero determinaremos condiciones bajo las cuales se satisface la ecuación diferencial en (3.1).

Teorema 3.4. *Sea φ una función en $L^p(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ de modo que exista una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones que verifican las hipótesis del teorema 3.1 y que convergen tanto en $L^p(\mathbb{R})$ como en $L^\infty(\mathbb{R})$ a φ . Entonces (3.3) es una solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha \in (0, 2]$.*

Prueba. Notemos que, teniendo en cuenta el teorema 4.9 en [10], se puede elegir la sucesión $\{\varphi_n\}$ de modo que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ puntualmente y satisfaciendo

$$|\varphi_n(\xi)| \leq h(\xi), \text{ con } h \in L^p(\mathbb{R}),$$

donde la convergencia puntual se garantiza por la continuidad de las funciones φ_n y φ .

Considerando que $K_\alpha(x, t) \in L^q(\mathbb{R})$ (ver proposición 1.41) con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtenemos que $K_\alpha(x - \xi, t) \varphi_n(\xi)$, $K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi)$ y $K_\alpha(x - \xi, t) h(\xi)$ son funciones integrables.

También tenemos que

$$K_\alpha(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) \rightarrow K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi)$$

puntualmente, y que

$$|K_\alpha(x - \xi, t) \varphi_n(\xi)| \leq K_\alpha(x - \xi, t) h(\xi).$$

Por el teorema de Lebesgue concluimos entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad (3.5)$$

Notemos que la convergencia uniforme de $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en (3.5) implica también la convergencia uniforme como funciones de x y t respectivamente. En efecto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \right| \leq$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) |\varphi_n(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_{L^{\infty}} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) d\xi = \|\varphi_n - \varphi\|_{L^{\infty}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Esto nos permite establecer las siguientes igualdades.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (3.7)$$

Teniendo ahora en cuenta que $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, con el teorema 3.1 establecemos para todo $n \in \mathbb{N}$ la siguiente igualdad

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (3.8)$$

Combinando las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) concluimos

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} K_{\alpha}(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

verifica la ecuación de difusión fraccionaria.

□

Nota 3.5. Notemos que las hipótesis del teorema 3.4 son razonables. Teniendo que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^p(\mathbb{R})$, la existencia de una sucesión $\{\varphi_n\} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ que converja a φ en $L^p(\mathbb{R})$ está garantizada.

Para ver que en el teorema 3.4 se está generalizando el resultado del teorema 3.1, se puede considerar la función

$$\varphi(x) = e^{-|x|}.$$

Claramente no verifica las hipótesis del teorema 3.1, ya que

$$\mathcal{F}\{\varphi\}(x)x^2 = \sqrt{2\pi} \frac{2x^2}{1+x^2} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Sin embargo, $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ y considerando una sucesión de funciones $\{c_n\}$ infinitamente diferenciables con imagen $Im_{c_n} = [0, 1]$ de modo que

$$c_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -n-1] \cup [n+1, \infty), \end{cases}$$

entonces $\varphi_n := \varphi c_n$ converge tanto en $L^1(\mathbb{R})$ como en $L^\infty(\mathbb{R})$ a φ , de modo que φ verifica las hipótesis del teorema 3.4.

El siguiente teorema finalmente prueba que (3.3) verifica la condición inicial del problema de Cauchy (3.1) cuando el dato inicial es continuo y acotado.

Teorema 3.6. *Sea $\varphi \in C(\mathbb{R})$ acotada y $\alpha \in (0, 2)$. Entonces, para u_α dada por (3.2) se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_\alpha(x, t) = \varphi(x),$$

donde la convergencia es uniforme sobre compactos.

Prueba. Sea $M > 0$. Queremos probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$ de modo que

$$0 < t < \eta \Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-M, M].$$

Teniendo en cuenta que $\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) d\xi = 1$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) [\varphi(\xi) - \varphi(x)] d\xi,$$

y así obtenemos que para todo $R > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi = \\ &= \int_{|x-\xi| < R} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi + \\ &+ \int_{|x-\xi| \geq R} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por un lado, tenemos que $x \in [-M, M]$ y gracias a la continuidad de φ , podemos garantizar su continuidad uniforme sobre $[-2M, 2M]$. Es decir que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta \leq M$ y

$$x, \xi \in [-2M, 2M], |x - \xi| < \delta \Rightarrow |\varphi(\xi) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

De este modo, si tomamos $R = \delta$, obtenemos $|x - \xi| < \delta \Rightarrow |\xi| \leq |x| + |\xi - x| < M + \delta < 2M$. Considerando esto y el hecho de que $K_\alpha > 0$ y que $\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) d\xi = 1$ obtenemos

$$\int_{|x-\xi|<\delta} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x-\xi|<\delta} K_\alpha(x - \xi, t) d\xi < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.10)$$

Por otro lado, al ser φ acotada existe $C > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} \int_{|x-\xi|\geq\delta} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi &\leq 2C \int_{|x-\xi|\geq\delta} K_\alpha(x - \xi, t) d\xi = \\ &= 2C \int_{|x-\xi|\geq\delta} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x - \xi| \right) d\xi = \\ &= 2C \int_{|z|\geq\delta} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |z| \right) dz = \\ &= 2C \int_{z\geq\delta} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} z \right) dz = 2C \int_{s>\frac{\delta}{\sqrt{\lambda t^\alpha}}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(s) ds. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} 2C \int_{s>\frac{\delta}{\sqrt{\lambda t^\alpha}}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(s) ds = 0$$

obtenemos que $\exists \eta > 0$, que depende únicamente de δ y ε , tal que

$$0 < t < \eta \Rightarrow \int_{|x-\xi|\geq\delta} K_\alpha(x - \xi, t) |\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.11)$$

Considerando (3.10) y (3.11) y volviendo a (3.9), concluimos que $\exists \eta > 0$ tal que $0 < t < \eta$ implica

$$\left| \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x) \right| < \varepsilon,$$

lo que significa que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x - \xi| \right) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

□

Combinando los resultados de los teoremas 3.4 y 3.6 obtenemos el siguiente teorema.

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Teorema 3.7. *Sea φ una función en $L^p(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ acotada de modo que exista una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones que verifican las hipótesis del teorema 3.1 y que convergan tanto en $L^p(\mathbb{R})$ como en $L^\infty(\mathbb{R})$ a φ . Entonces una solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha \in (0, 2]$ viene dada por (3.2).*

De este modo hemos obtenido un teorema acerca de una solución del problema de Cauchy con condiciones iniciales más familiares y usuales que en el primer resultado (teorema 3.1) en el cual no se requieren propiedades de la transformada de Fourier del dato inicial del problema.

Notemos que en esta subsección hemos utilizado únicamente la expresión (3.2) de manera explícita. En particular, se han utilizado diferentes propiedades de la función de Mainardi en las pruebas de los teoremas 3.4 y 3.6. A saber, su pertenencia a los espacios $L^p(\mathbb{R})$, que su integral sobre la recta real es constantemente igual a 1 para todo $\alpha \in (0, 2)$ y que es una función positiva en el dominio considerado.

Sin embargo cabe destacar que el teorema 3.1, en el cual la expresión (3.3) es fundamental, fue utilizada para obtener estos resultados. Es decir que la nueva expresión de la solución al problema de Cauchy fue utilizada implícitamente en esta sección.

3.3. Continuidad de la solución del problema de Cauchy con respecto al orden de diferenciación.

También aquí es de interés recuperar las soluciones clásicas a los problemas de Cauchy para la ecuación de difusión ($\alpha = 1$), la ecuación de ondas ($\alpha = 2$) y más general para cada problema de orden entero ($\alpha \in \mathbb{N}$) a partir de la solución del problema fraccionario. Ya hemos presentado el resultado para $\alpha \in (0, 2]$. Sin embargo, en ese caso utilizamos la función de Mainardi, la cual no está definida para parámetros $\alpha > 2$. Es por esto que aquí utilizaremos la expresión alternativa en función de la función de Mittag-Leffler, la cual sí está definida para todo parámetro positivo, para generalizar dicho resultado.

Lema 3.8. *Sea $\alpha_0 > 0$. Entonces*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} E_\alpha(x^\alpha) = E_{\alpha_0}(x^{\alpha_0}).$$

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ de modo que $0 < \varepsilon < \min\{1, \alpha_0\}$, y sean $n_0 = \lceil \alpha_0 \rceil + 1$ y $\varepsilon < \alpha < n_0$. Para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $\frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} < \frac{1}{\Gamma(\varepsilon k + 1)}$ es válido.

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Obtenemos

$$\left| \frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right| \leq \frac{|x|^{n_0 k}}{\Gamma(\varepsilon k + 1)} := a_k$$

Para ver que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente es suficiente mostrar que $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ converge a 0 cuando $k \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x|^{n_0} \frac{\Gamma(\varepsilon k + 1)}{\Gamma(\varepsilon k + \varepsilon + 1)} \leq |x|^{n_0} \frac{(\varepsilon k + \varepsilon)^{1-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon k + \varepsilon)}{(\varepsilon k + \varepsilon) \Gamma(\varepsilon k + \varepsilon)} = \frac{|x|^{n_0}}{(\varepsilon k + \varepsilon)^\varepsilon} \rightarrow 0$$

Aquí utilizamos la propiedad

$$\Gamma(x + s) \leq x^s \Gamma(x),$$

válida para $x > 0$ y $0 \leq s \leq 1$. Esto finalmente completa la prueba, ya que ahora tenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} E_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha_0}(x^{\alpha_0}).$$

□

Enunciamos entonces ahora el teorema central de esta subsección

Teorema 3.9. *Sea $u_\alpha(x, t)$ una solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha > 0$ y cuya condición inicial φ tenga transformada de Fourier integrable. Fijando $\alpha_0 > 0$, obtenemos*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} u_\alpha(x, t) = u_{\alpha_0}(x, t).$$

Prueba. Utilizaremos la expresión (3.3) de la solución del problema de Cauchy (3.1). Queremos calcular

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} u_\alpha(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi.$$

Podemos utilizar ahora el teorema de Lebesgue para ver que podemos pasar el límite dentro del integral, ya que

$$|\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha)| \leq |\overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Notemos que aquí usamos

$$\|E_\alpha(-x^2)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} \|\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(|x|)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1.$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Y así

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} u_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi = u_{\alpha_0}(x, t).$$

□

Una consecuencia particular de este teorema son estos dos resultados.

Teorema 3.10. *Sea $u_\alpha(x, t)$ una solución al problema de Cauchy (3.1). Entonces tenemos*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\lambda\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda t}} \varphi(\xi) d\xi,$$

la cual es la solución clásica del problema de Cauchy para la ecuación de calor,

$$(PC_1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u \text{ acotada.} \end{cases}$$

Teorema 3.11. *Sea $u_\alpha(x, t)$ una solución del problema de Cauchy (3.1). Entonces tenemos*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} u_\alpha(x, t) = \frac{\varphi(x + \lambda t) + \varphi(x - \lambda t)}{2},$$

la cual es la solución clásica del problema de Cauchy para la ecuación de ondas,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u \text{ acotada.} \end{cases}$$

3.4. La solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria como un proceso estocástico

En esta sección estudiaremos una serie de propiedades básicas de la solución del problema de Cauchy (3.1) relacionadas a procesos estocásticos. Realizaremos primero una serie de observaciones preliminares que justifican este enfoque.

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

Lema 3.12. Sea $u_\alpha(x, t)$ la solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha \in (0, 2)$. Entonces

$$\varphi \geq 0 \Rightarrow u_\alpha \geq 0.$$

Como ya hemos probado en el capítulo anterior, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.13. Sea $u_\alpha(x, t)$ la solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha \in (0, 2)$. Para todo $t \in \mathbb{R}^+$ fijo tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_\alpha(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

El lema 3.12 y el teorema 3.13 muestran que si consideramos a φ una función densidad de probabilidad, entonces para todo $\alpha \in (0, 2)$, $u_\alpha(x, t)$ puede ser considerado un proceso estocástico $\{X_{\alpha, t}\}$ de parámetros α, t . Primero calcularemos los momentos de la función u_α para α y t fijos.

Teorema 3.14. Sea $u_\alpha(x, t)$ la solución al problema de Cauchy (3.1) con $\alpha \in (0, 2)$. Para todo $\alpha \in (0, 2)$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$ fijos se tiene la fórmula de los momentos de u_α dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m u_\alpha(x, t) dx = \sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^m \frac{m!}{(m-i)!} \frac{\sqrt{\lambda t^\alpha}^i}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}i + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-i} \varphi(x) dx.$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^m u_\alpha(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x - \xi| \right) \varphi(\xi) d\xi dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} x^m \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} |x - \xi| \right) dx d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi(\xi) \int_0^{\infty} (\xi - x)^m \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} x) dx d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi(\xi) \int_0^{\infty} (\xi + x)^m \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} x) dx d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \int_0^{\infty} \left[\sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^m \binom{m}{i} \xi^{m-i} x^i \sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{\lambda t^\alpha}^{-1} x) \right] dx d\xi = \end{aligned}$$

**3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA
ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}**

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left[\sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^m \binom{m}{i} \xi^{m-i} \sqrt{\lambda t}^i \int_0^{\infty} x^i \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(x) dx \right] d\xi$$

Aquí haremos uso de la fórmula de los momentos de la función de Mainardi dada por

$$\int_0^{\infty} x^i \mathcal{M}_{\nu}(x) dx = \frac{i!}{\Gamma(\nu i + 1)}.$$

De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^m u_{\alpha}(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left[\sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^m \frac{m!}{(m-i)!} \xi^{m-i} \frac{\sqrt{\lambda t}^i}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} i + 1)} \right] d\xi = \\ &= \sum_{\substack{i=0, \\ i \text{ par}}}^m \frac{m!}{(m-i)!} \frac{\sqrt{\lambda t}^i}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} i + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{m-i} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

□

De este modo, los momentos de u_{α} pueden ser expresados como una combinación lineal de los momentos de la condición inicial de misma paridad.

Notemos que tomando $m = 0$ en el teorema 3.14 se obtiene nuevamente el resultado de 3.13. Además, tomando $m = 1$ y $m = 2$ se obtienen los siguientes casos particulares.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x u_{\alpha}(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u_{\alpha}(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx + 2 \frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

De este modo obtenemos la esperanza y la varianza de $X_{\alpha,t}$ para todo $\alpha \in (0, 2)$ y para todo $t > 0$, que viene dada por

$$\begin{aligned} E[X_{\alpha,t}] &= E[\varphi] \\ V[X_{\alpha,t}] &= V[\varphi] + \frac{2\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Este resultado para la varianza de $X_{\alpha,t}$ va en consonancia con la cota obtenida en el capítulo anterior para la norma $L^{\infty}(\mathbb{R})$ de u_{α} dada por

$$\|u_{\alpha}(x, t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t^{\frac{\alpha}{4}}}$$

3. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}

y con el teorema 3.13, ya que si en todo momento t el área delimitada por u_α y el eje x es constante pero al mismo tiempo el valor máximo de u_α disminuye cuando $t \rightarrow \infty$, necesariamente la función u_α debe dispersarse sobre el eje real a medida que $t \rightarrow \infty$. Esta observación también tiene su interpretación natural en el contexto de medios viscoelásticos. En [40] ya se ha constatado que el proceso estocástico $\{X_{\alpha,t}\}$ es no Markoviano. Esta afirmación es intuitiva en el sentido que la derivada fraccionaria de Caputo es un operador integro-diferencial y por lo tanto no local. Cuando la derivada de Caputo se aplica sobre la variable temporal se asocia el problema en estudio con un problema que posee memoria en el tiempo.

A continuación provereemos una prueba para esta propiedad del proceso $\{X_{\alpha,t}\}$, utilizando precisamente ambas expresiones de la solución al problema de Cauchy (3.1) analizadas en este trabajo. Notemos aquí también que la no Markovianidad se verifica para $\alpha \neq 1$, mientras que el caso $\alpha = 1$ sí es Markoviano, ya que en ese caso nuestra ecuación se reduce a la ecuación de difusión.

Teorema 3.15. *Sea $\alpha \in (0, 2)$, $\alpha \neq 1$, y sea $u_\alpha(x, t)$ la solución al problema de Cauchy (3.1) con condición inicial φ . Sea $t_0 > 0$ fijo y sea $\bar{u}_\alpha(x, t)$ la solución al problema de Cauchy (3.1) con condición inicial $u_\alpha(x, t_0)$. Entonces la igualdad*

$$\bar{u}_\alpha(x, t) = u_\alpha(x, t + t_0)$$

no es válida.

Prueba. Supongamos que $\{X_{\alpha,t}\}$ sí verifica la propiedad Markoviana

$$\bar{u}_\alpha(x, t) = u_\alpha(x, t + t_0)$$

para concluir que entonces necesariamente debe ser $\alpha = 1$. Tenemos

$$\bar{u}_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathcal{F}}\{u_\alpha(x, t_0)\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi.$$

Pero

$$\bar{\mathcal{F}}\{u_\alpha(x, t_0)\}(\xi) = \bar{\mathcal{F}}\{K_\alpha(x, t_0) * \varphi(x)\}(\xi) = E_\alpha(-\xi^2 \lambda t_0^\alpha) \bar{\mathcal{F}}\{\varphi(x)\}(\xi).$$

De ese modo

$$\bar{u}_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t_0^\alpha) \bar{\mathcal{F}}\{\varphi(x)\}(\xi) e^{i\xi x} E_\alpha(-\xi^2 \lambda t^\alpha) d\xi =$$

3. **GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}**

$$= u(x, t + t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi(x)\}(\xi) e^{i\xi x} E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda(t + t_0)^{\alpha}) d\xi.$$

Esto implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}\{\varphi(x)\}(\xi) [E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda t^{\alpha}) E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda t_0^{\alpha}) - E_{\alpha}(-\xi^2 \lambda(t + t_0)^{\alpha})] d\xi = 0$$

y teniendo en cuenta la arbitrariedad de φ deducimos que

$$E_{\alpha}(-t^{\alpha}) E_{\alpha}(-t_0^{\alpha}) = E_{\alpha}(-(t + t_0)^{\alpha}),$$

pero esta última igualdad únicamente se verifica si $E_{\alpha}(x) = e^x$, lo que es el caso cuando $\alpha = 1$. \square

Vimos en este capítulo que efectivamente la nueva expresión para la solución al problema de Cauchy resultó ser de suma utilidad y nos ha posibilitado generalizar los resultados previos de diferentes maneras. Sin embargo, resaltamos que más productivo aún ha sido combinar las diferentes expresiones que poseemos.

4. Un problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre \mathbb{R}^+

Los resultados de esta sección fueron publicados en [21]. Se puede consultar la siguiente bibliografía para este capítulo: [12], [17], [22], [23], [26], [35], [37], [39], [40], [41], [42], [52], [56].

Hasta ahora hemos analizado la ecuación de difusión fraccionaria considerando la variable espacial x definida sobre todo el eje real. En este capítulo estudiaremos un problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional sobre el semieje real positivo con condición de frontera, a saber

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+; \quad t \in (0, T) \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(0, t) = \psi(x) & \text{si } t \in (0, T), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde consideraremos φ, ψ funciones continuas en su dominio. En este capítulo trabajaremos con $\alpha \in (0, 1)$. El objetivo será hallar la solución a este problema. Para eso, simplificaremos primero el problema y lo dividiremos en subproblemas, presentando en cada caso los candidatos a solución. Luego probaremos que el candidato a solución verifica la ecuación diferencial y que satisface las condiciones de contorno.

4.1. El candidato a solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria sobre el semieje real positivo

Por la linealidad del operador diferencial fraccionario de Caputo, el problema (4.1) puede ser dividido en dos subproblemas,

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_{1,\alpha}(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{1,\alpha}(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+; \quad t \in (0, T) \\ u_{1,\alpha}(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_{1,\alpha}(0, t) = 0 & \text{si } t \in (0, T) \end{cases} \quad (4.2)$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

y

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_{2,\alpha}(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{2,\alpha}(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+; \quad t \in (0, T) \\ u_{2,\alpha}(x, 0) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_{2,\alpha}(0, t) = \psi(x) & \text{si } t \in (0, T), \end{cases} \quad (4.3)$$

de modo que la solución al problema original resulte de sumar las soluciones de ambos subproblemas.

$$u_\alpha = u_{1,\alpha} + u_{2,\alpha}$$

El problema (4.2) fue resuelto en [33] y su solución viene dada por

$$u_{1,\alpha}(x, t) = \int_0^\infty \frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{|x - \xi|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) - \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{|x + \xi|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Para garantizar que $u_{1,\alpha}$ realmente es solución basta con que φ sea continua y acotada en \mathbb{R}_0^+ (ver [17]).

Para deducir ahora un candidato a solución del problema (4.3), utilizaremos un resultado presentado en [56], donde se presenta tanto un problema similar al nuestro como también su solución, a saber

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} v_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+; \quad t \in (0, T) \\ v_\alpha(x, 0) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ v_\alpha(0, t) = 1 & \text{si } t \in (0, T), \end{cases} \quad (4.4)$$

cuya solución viene dada por

$$v(x, t) = \mathcal{W} \left(-\frac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right),$$

donde \mathcal{W} es la función de Wright,

$$\mathcal{W}(z, a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(ak + b)}.$$

Observamos que el problema (4.4) difiere de nuestro problema (4.3) únicamente en la condición de contorno sobre el segmento $\{(0, t) : t \in (0, T)\}$. Reformularemos entonces la solución a este problema auxiliar de manera que nos induzca a proponer un candidato apropiado para nuestro problema de interés.

$$v(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{W} \left(-\frac{x}{\lambda \tau^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right) d\tau = \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda \tau^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda \tau^{\frac{\alpha}{2}+1}} d\tau.$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

Si notamos

$$L(x, t) = \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}+1}},$$

y

$$\mathbf{f}_{[t_0, t_1]} \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0, t_1], \end{cases}$$

entonces obtenemos

$$v(x, t) = L(x, t) * \mathbf{1}_{[0, t]},$$

donde $\mathbf{1}$ representa la función constante. Proponemos entonces a partir de esta expresión el candidato a solución a nuestro problema (4.3) a la función

$$u_{2,\alpha}(x, t) = L(x, t) * \psi_{[0, t]} = \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

4.2. El candidato a solución verifica la ecuación de difusión fraccionaria

En esta subsección probaremos que el candidato a solución (4.5) verifica la ecuación de difusión fraccionaria. Para eso, utilizaremos un lema auxiliar presentado en [21].

Lema 4.1. *Sea $\mathcal{K}(t-\tau)f(\tau)$ una función que verifica las siguientes 4 condiciones*

1. $\mathcal{K}(t-\tau)f(\tau)$ es τ -integrable en $[0, t]$,
2. $|\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}(t-\tau)f(\tau)| \leq j(\tau) \in L^1[0, t]$,
3. $|\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{K}(\eta-\tau)f(\tau)(t-\eta)^{-\alpha}| \in L^1(\Omega)$,
donde $\Omega = \{(\eta, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \eta \in (0, t), \tau \in (0, \eta)\}$,
4. $\lim_{\tau \rightarrow \eta} \mathcal{K}(\eta-\tau)f(\tau) = h(\eta) \in L^1[0, t]$.

Entonces

$${}_0^C D_t^\alpha \left(\int_0^t \mathcal{K}(t-\tau)f(\tau) d\tau \right) = \int_0^t ({}_0^C D_t^\alpha \mathcal{K}(t-\tau)) f(\tau) d\tau + {}_0 I_t^{1-\alpha}(h)(t),$$

donde ${}_0 I_t^{1-\alpha}$ es la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $1-\alpha$.

Probaremos ahora que nuestro candidato a solución

$$\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) \quad (4.6)$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

verifica las hipótesis de este lema.

Hipótesis 1. Si consideramos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left| \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) \right| d\tau = \\ & = \int_{\frac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}}^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(y) \left| \psi \left(t - \left(\frac{x}{\lambda y} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \right| dy \leq M \int_{\frac{x}{\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}}^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(y) dy \leq M, \end{aligned}$$

donde utilizamos que $|\psi| \leq M$ en $[0, t]$ por ser continua y que

$$\int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(y) dy = 1.$$

La convergencia de la integral planteada asegura la τ -integrabilidad en $[0, t]$ de (4.6).

Hipótesis 2. Consideramos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right] \psi(\tau) = \\ & = \mathcal{W} \left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha \right) \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right)^2 \psi(\tau) - \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{(\frac{\alpha}{2}+1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+2}} \psi(\tau) \quad (4.8)$$

Para probar que el primer término puede ser acotado por una función integrable, utilizaremos un corolario presentado en [21].

Corolario 4.2. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces existe $R > 0$ de modo que

$$\left| \mathcal{W} \left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha \right) \right| < P \left(bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-bx^{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}}}$$

para todo $x > R$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo uno y $b = (1 - \frac{\alpha}{2}) (\frac{\alpha}{2})^{\frac{2}{2-\alpha}} > 0$

Aplicando este corolario, existe $\delta > 0$ de modo que, para todo $\tau \in (t - \delta, t)$,

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{W} \left(-\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha \right) \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right)^2 \psi(\tau) \right| \leq \\ & \leq \left(c + d \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-b \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\frac{2}{2-\alpha}}} \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right)^2 |\psi(\tau)|, \end{aligned}$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

donde $b > 0$, c y d son constantes. Para probar que esta es una función integrable, observemos que realizando el cambio de variable $\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} = r$, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{t-\delta}^t \left(c + d \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-b \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\frac{2}{2-\alpha}}} \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right)^2 |\psi(\tau)| d\tau = \\ & = \int_{\frac{x}{\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}}}}^{\infty} (c + dr) e^{-br^{\frac{2}{2-\alpha}}} \frac{\alpha}{2} r \left(\frac{r\lambda}{x} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left| \psi \left(t - \left(\frac{x}{\lambda r} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \right| dr \leq \\ & \leq C_{x,\lambda,\alpha} M \int_{\frac{x}{\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}}}}^{\infty} (c + dr) r^{1+\frac{2}{\alpha}} e^{-br^{\frac{2}{2-\alpha}}} dr \leq \\ & C_{x,\lambda,\alpha} M \int_{\frac{x}{\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}}}}^{\infty} \frac{(c + dr) r^{1+\frac{2}{\alpha}}}{b^n r^{\frac{2n}{2-\alpha}}} n! dr, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde utilizamos la cota $e^{-x} \leq \frac{n!}{x^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora es fácil ver que en (4.9) para todo $\alpha \in (0, 1)$ existe un $n \in \mathbb{N}$ de modo que dicha integral sea convergente. De este modo hemos probado la integrabilidad de (4.7). Para probar la integrabilidad de (4.8), llevamos a cabo nuevamente el cambio de variables $\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} = r$.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left| \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{(\frac{\alpha}{2} + 1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+2}} \psi(\tau) \right| d\tau \leq \\ & \leq M \int_{x/\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) \left(\frac{\lambda r}{x} \right)^{\frac{2}{\alpha}} dr \leq MC_{x,\lambda,\alpha} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) r^{\frac{2}{\alpha}} dr, \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que $\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}$ es una función positiva para todo $\alpha \in (0, 1)$ y nuevamente que $|\psi| \leq M$. Consideremos ahora $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{2}{\alpha} \leq k$ y teniendo en cuenta la fórmula para los momentos de la función de Mainardi,

$$\int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) r^k dr = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k+1\right)}$$

se tiene

$$\begin{aligned} MC_{x,\lambda,\alpha} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) r^{\frac{2}{\alpha}} dr & \leq MC_{x,\lambda,\alpha} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r) r^k dr = \\ & = MC_{x,\lambda,\alpha} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}k+1\right)}, \end{aligned}$$

con lo que completamos la prueba de la integrabilidad de (4.7) y de que la hipótesis 2 se verifica.

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

Hipótesis 3. Debemos probar que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right] \frac{\psi(\tau)}{(t - \eta)^\alpha} \in L^1(\Omega),$$

donde $\Omega = \{(\eta, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \eta \in (0, t), 0 \leq \tau \leq \eta\}$. Esto equivale a probar que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] \left(\frac{\alpha x}{2\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right) \frac{\psi(\tau)}{(t - \eta)^\alpha} - \\ & - \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{(\frac{\alpha}{2} + 1)\alpha x}{2\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}+2}} \frac{\psi(\tau)}{(t - \eta)^\alpha} = I + II \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Haciendo un razonamiento similar al de la prueba de que se verifica la hipótesis 2, podemos concluir que

$$\int_0^\eta |I + II| d\tau$$

es finita para todo $\eta \in (0, t)$. Queremos probar entonces que

$$\int_0^t \int_0^\eta |I + II| d\tau d\eta = \int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |I + II| d\tau d\eta + \int_0^t \int_{\eta-\delta}^\eta |I + II| d\tau$$

es finita, donde consideramos δ suficientemente chico. Tengamos ahora en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right]$$

y que la monotonía negativa de $\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}$ implica que

$$- \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) > 0.$$

Estas dos observaciones nos permiten acotar $\int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |I| d\tau d\eta$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |I| d\tau d\eta \leq \int_0^t \frac{MC}{(t - \eta)^\alpha \delta^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^{\eta-\delta} - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) d\tau d\eta = \\ & = \int_0^t \frac{MC}{(t - \eta)^\alpha \delta^{\frac{\alpha}{2}+1}} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda\eta^{\frac{\alpha}{2}}} \right) - \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] d\eta \leq \\ & \leq \frac{2MC}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2}) \delta^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^t \frac{1}{(t - \eta)^\alpha} d\eta < \infty. \end{aligned}$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

En la última desigualdad tuvimos en cuenta el lema 4.2 de [56]. De este modo

$$\int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |I| d\tau d\eta \leq \infty. \quad (4.10)$$

Para $\int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |II| d\tau d\eta$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |II| d\tau d\eta = \\ &= \int_0^t \int_0^{\eta-\delta} \left| \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{(\frac{\alpha}{2}+1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+2}} \frac{\psi(\tau)}{(t-\eta)^\alpha} \right| d\tau d\eta = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^\alpha} \int_0^{\eta-\delta} \left| \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{(\frac{\alpha}{2}+1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+2}} \psi(\tau) \right| d\tau d\eta. \end{aligned}$$

Notemos que en la prueba de la hipótesis 2, ya probamos que

$$\int_0^{\eta-\delta} \left| \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{(\frac{\alpha}{2}+1)\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+2}} \psi(\tau) \right| d\tau \leq \infty,$$

lo que significa que

$$\int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |II| d\tau d\eta \leq \infty. \quad (4.11)$$

Con (4.10) y (4.11) podemos afirmar ahora que

$$\int_0^t \int_0^{\eta-\delta} |I + II| d\tau d\eta \leq \infty. \quad (4.12)$$

Un razonamiento similar al de la prueba de la hipótesis 2 nos permite asegurar que

$$\int_0^t \int_{\eta-\delta}^{\eta} |I + II| d\tau d\eta \leq \infty, \quad (4.13)$$

y combinando (4.12) y (4.13), estamos en condiciones de utilizar el teorema de Tonelli y concluir que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right] \frac{\psi(\tau)}{(t-\eta)^\alpha} \in L^1(\Omega).$$

Hipótesis 4. Probaremos a continuación que

$$\lim_{\tau \rightarrow \eta} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(\eta-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) = 0. \quad (4.14)$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

Utilizando ahora la fórmula de los momentos de la función de Mainardi y $|\psi| \leq M$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \eta} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(\eta - \tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) &= \\ &= \lim_{s \rightarrow +0} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda s^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\eta - s) = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda} y^{\frac{\alpha}{2}} \right) \frac{\alpha x y^{\frac{\alpha}{2}+1}}{2\lambda} \psi \left(\eta - \frac{1}{y^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Hemos probado verificar las hipótesis del lema 4.1, lo que significa que

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u_{2,\alpha}(x,t) &= {}_0^C D_t^\alpha \left[\int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) d\tau \right] = \\ &= \int_0^t {}_0^C D_t^\alpha \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) \right] d\tau + {}_0 I_t^{1-\alpha}(0) = \\ &= \int_0^t {}_0^C D_t^\alpha \left[-\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W} \left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right) \right] \psi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la derivada fraccionaria de Caputo conmuta con la derivada en el sentido clásico, obtenemos

$${}_0^C D_t^\alpha u_{2,\alpha}(x,t) = \int_0^t -\frac{\partial}{\partial t} {}_0^C D_t^\alpha \left[\mathcal{W} \left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right) \right] \psi(\tau) d\tau.$$

Recordando ahora que $\mathcal{W} \left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right)$ es solución de la ecuación de difusión fraccionaria, concluimos que

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u_{2,\alpha}(x,t) &= \int_0^t -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\mathcal{W} \left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right) \right] \psi(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W} \left(\frac{-x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1 \right) \right] \psi(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) d\tau \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{2,\alpha}(x,t), \end{aligned}$$

con lo que completamos la prueba de que $u_{2,\alpha}(x,t)$ verifica la ecuación de difusión fraccionaria.

4.3. El candidato a solución verifica las condiciones de contorno

Finalmente resta probar que $u_{2,\alpha}(x, t)$ verifica las condiciones de contorno

$$u_{2,\alpha}(x, 0) = \lim_{t \searrow 0} u_{2,\alpha}(x, t) = 0,$$

$$u_{2,\alpha}(0, t) = \lim_{x \searrow 0} u_{2,\alpha}(x, t) = \psi(t).$$

Para eso probaremos la siguiente proposición que fue probada en [21].

Proposición 4.3. *Los siguientes límites son válidos*

$$\lim_{x \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} d\tau = 1,$$

$$\lim_{t \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} d\tau = 0.$$

Probaremos primero que $u_{2,\alpha}(x, 0) = 0$. Teniendo en cuenta la proposición 4.3 y que $|\psi| \leq M$, obtenemos

$$0 \leq \lim_{t \searrow 0} \left| \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \lim_{t \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} |\psi(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \lim_{t \searrow 0} M \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} d\tau = 0,$$

con lo que queda probada la primera condición. Para probar que $u_{2,\alpha}(0, t) = \psi(t)$, notemos que

$$\int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{\alpha}{2} \psi(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} [\psi(\tau) - \psi(t) + \psi(t)] d\tau =$$

$$= \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau +$$

$$+ \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(t) d\tau = I + II.$$

Aplicando la proposición 4.3 a II, obtenemos

$$\lim_{x \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(t) d\tau = \psi(t),$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE
DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

con lo que resta probar que en I , el límite cuando $x \searrow 0$ es igual a cero. Fijamos para eso $\delta > 0$ Y consideramos

$$I = \int_0^{t-\delta} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau + \\ + \int_{t-\delta}^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau = I_1 + I_2.$$

Teniendo nuevamente en cuenta la cota $\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$, en I_1 concluimos

$$|I_1| = \left| \int_0^{t-\delta} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau \right| \leq \\ \leq \int_0^{t-\delta} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} |\psi(\tau) - \psi(t)| d\tau \leq \\ \leq \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\alpha x}{2\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^{t-\delta} |\psi(\tau) - \psi(t)| d\tau \\ \leq \left(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\alpha}{2\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^t |\psi(\tau) - \psi(t)| d\tau \right) x = C_{t,\delta,\alpha} x < \frac{\epsilon}{2}, \quad (4.15)$$

cuando $x < \frac{\epsilon}{2C_{t,\delta,\alpha}}$. Para acotar ahora $|I_2|$, notemos que la continuidad de ψ nos garantiza que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que $|\psi(\tau) - \psi(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $|\tau - t| < \delta$. Teniendo esto presente y realizando la sustitución $\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}$ obtenemos

$$|I_2| \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{t-\delta}^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{\alpha}{2} d\tau = \frac{\epsilon}{2} \int_{x/\lambda\delta^{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(u) du < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.16)$$

De (4.15) y (4.16) podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$, $|I| < \epsilon$. Esto implica que

$$\lim_{x \searrow 0} \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau = 0,$$

es decir que

$$u_{2,\alpha}(0, t) = \psi(t).$$

Resumimos entonces los resultados de este capítulo en el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *La solución del problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_\alpha(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+; \quad t \in (0, T) \\ u_\alpha(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ u_\alpha(0, t) = \psi(t) & \text{si } t \in (0, T) \end{cases}$$

4. UN PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA SOBRE \mathbb{R}^+

viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = \int_0^\infty \frac{1}{2\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{|x - \xi|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) - \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{|x + \xi|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] \varphi(\xi) d\xi + \\ + \int_0^t \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda(t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \frac{\alpha x}{2\lambda(t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \psi(\tau) d\tau.$$

En este capítulo logramos obtener la solución a un problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria en una región diferente. Observamos que los métodos utilizados y las herramientas necesarias para probar el resultado difieren fuertemente de la teoría utilizada en los primeros dos capítulos.

5. Una ecuación de Schrödinger fraccionaria

Los resultados de esta sección fueron publicados en [18] y presentados en los congresos (2), (3), (4), (5) y (6). Se puede consultar la siguiente bibliografía para este capítulo: [4], [22], [24], [25], [26], [29], [31], [46], [53], [55], [58].

En esta sección presentaremos una ecuación de Schrödinger fraccionaria construida a partir de una serie de generalizaciones de nociones básicas de la mecánica cuántica. Tal como la ecuación del calor, la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial parcial parabólica. Durante el capítulo presentaremos primero la derivación de dicha ecuación y luego estudiaremos diferentes problemas simples para estudiar su comportamiento y sus características.

Antes de comenzar, recapitularemos una serie de definiciones y propiedades fundamentales. Comenzamos con las dos versiones de la derivada de Caputo, ya que, a diferencia de los capítulos anteriores, en este capítulo utilizaremos ambas.

Definición 5.1. Sea $\alpha \in (0, 1)$ una constante real positiva y sea $n = \lceil \alpha \rceil = 1$. La derivada fraccionaria de Caputo por derecha de orden α a partir del punto a está definida como

$${}^C D_s^\alpha f(s) = {}_a I_s^{1-\alpha} f'(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^s (s-z)^{-\alpha} f'(z) dz$$

y la derivada fraccionaria de Caputo por izquierda de orden α hasta el punto b está definida como

$${}^C D_b^\alpha f(s) = -{}_s I_b^{1-\alpha} f'(s) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^b (z-s)^{-\alpha} f'(z) dz$$

Para $\alpha = 1$, definimos

$${}^C D_s^\alpha f(s) = {}^C D_b^\alpha f(s) = f'(s).$$

Notemos que hay una diferencia muy sutil entre las definiciones de las derivadas fraccionarias de Caputo por izquierda y derecha. Sin embargo, las

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

implicancias matemáticas son significativas, puesto que a cada una de ellas le corresponde un grupo de funciones cuyas respectivas derivadas fraccionarias de Caputo son inmediatas de calcular.

$${}_a^C D_s^\alpha (s-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (s-a)^{\gamma-\alpha}$$

y

$${}_s^C D_b^\alpha (b-s)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (b-s)^{\gamma-\alpha}.$$

La diferencia fundamental aquí se encuentra en el dominio de las funciones analizadas, ya que las funciones que poseen derivada de Caputo por derecha suelen tener como dominio (a, ∞) , donde a es el punto de inicio de la derivada, y las funciones que poseen derivada de Caputo por izquierda suelen tener como dominio $(-\infty, b)$. Observamos que existe una clara simetría entre ambos grupos de funciones, que será fundamental en el transcurso del capítulo, ya que en general la mecánica cuántica como modelo físico precisa ser simétrico en el espacio.

Además, precisaremos que el operador de derivación fraccionario con respecto a la variable espacial x esté definido sobre todo el eje real, propiedad que ninguna derivada fraccionaria considerada en este trabajo posee. Es por eso que recurriremos a una combinación de operadores fraccionarios para la variable espacial que satisfaga esta propiedad.

Recordemos que para constantes positivas α y β , la función de Mittag-Leffler de parámetros α y β está definida por

$$E_{\alpha,\beta}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

La función de Mittag-Leffler de un parámetro, cuando $\beta = 1$, verifica la ecuación diferencial

$${}_a^C D_s^\alpha E_\alpha(k(s-a)^\alpha) = k E_\alpha(k(s-a)^\alpha)$$

$${}_s^C D_b^\alpha E_\alpha(k(b-s)^\alpha) = k E_\alpha(k(b-s)^\alpha).$$

Ahora, tal como la función exponencial puede ser generalizada mediante la función de Mittag-Leffler, existen versiones generalizadas de las funciones seno y coseno que como veremos a continuación verifican una serie de propiedades y relaciones interesantes que son similares al caso clásico (ver figuras 2 y 3). Notemos también que las funciones seno y coseno fraccionario son casos particulares de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros.

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

Definición 5.2. Las funciones seno y coseno fraccionario de parámetros $\alpha, \beta > 0$, denotadas $\sin_{\alpha, \beta}$ y $\cos_{\alpha, \beta}$, están definidas para $s \in \mathbb{C}$ como

$$\sin_{\alpha, \beta}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^{2n+1}}{\Gamma(\alpha(2n+1) + \beta)} = s E_{2\alpha, \alpha+\beta}(-s^2),$$

$$\cos_{\alpha, \beta}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^{2n}}{\Gamma(\alpha 2n + \beta)} = E_{2\alpha, \beta}(-s^2).$$

Si $\beta = 1$, simplemente notamos \sin_{α} y \cos_{α} y las llamamos función seno y coseno fraccionario respectivamente.

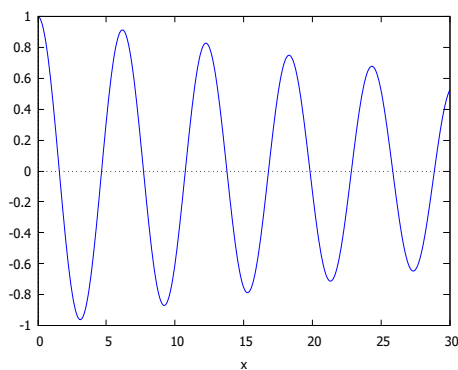


FIGURA 2. Función coseno fraccionario de parámetro $\alpha = 0.99$ en el dominio $[0, 30]$

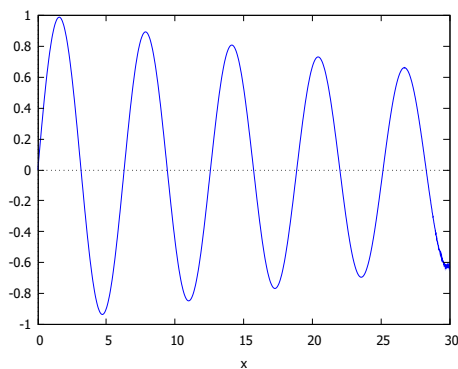


FIGURA 3. Función seno fraccionario de parámetro $\alpha = 0.99$ en el dominio $[0, 30]$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

Naturalmente tenemos

$$\sin_{1,1}(s) = \sin(s), \quad \cos_{1,1}(s) = \cos(s),$$

También las siguientes identidades son válidas,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(is) &= \cos_{\alpha,\beta}(s) + i \sin_{\alpha,\beta}(s), \\ \sin_{\alpha,\beta}(s) &= \frac{E_{\alpha,\beta}(is) - E_{\alpha,\beta}(-is)}{2i}, \quad \cos_{\alpha,\beta}(s) = \frac{E_{\alpha,\beta}(is) + E_{\alpha,\beta}(-is)}{2}, \\ {}_a^C D_s^\alpha \sin_\alpha(c(s-a)^\alpha) &= c \cos_\alpha(c(s-a)^\alpha), \\ {}_a^C D_s^\alpha \cos_\alpha(c(s-a)^\alpha) &= -c \sin_\alpha(c(s-a)^\alpha). \end{aligned}$$

Ya hemos probado el siguiente lema.

Lema 5.3. *Sea $\alpha_0 > 0$. Entonces*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} E_\alpha(s^\alpha) = E_{\alpha_0}(s^{\alpha_0}),$$

siendo la convergencia uniforme sobre compactos.

De manera similar se prueba que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \sin_\alpha(s^\alpha) = \sin_{\alpha_0}(s^{\alpha_0}), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \cos_\alpha(s^\alpha) = \cos_{\alpha_0}(s^{\alpha_0}). \quad (5.1)$$

Notemos aquí también que mientras que e^{is} , con $s \in \mathbb{R}$, tiene módulo constante igual a uno, esto no es válido para el caso fraccionario con la función de Mittag-Leffler. Se tiene que

$$|E_\alpha(is^\alpha)| = \cos_\alpha^2(s^\alpha) + \sin_\alpha^2(s^\alpha),$$

y se puede ver fácilmente que $E_\alpha(is^\alpha)$ no tiene módulo constante, ya que derivando se obtiene

$$\frac{d}{ds} |E_\alpha(is^\alpha)| = 2s^{\alpha-1} [\sin_\alpha(s^\alpha) \cos_{\alpha,\alpha}(s^\alpha) - \cos_\alpha(s^\alpha) \sin_{\alpha,\alpha}(s^\alpha)],$$

que no es igual a cero.

Para finalizar la introducción a este capítulo, haremos un breve comentario relacionado a los ceros de las funciones que definimos hasta entonces, particularmente el seno y el coseno fraccionario. La importancia de esto se encuentra en el hecho de que en los problemas que consideraremos en este capítulo, deberemos utilizar los ceros de estas funciones para construir soluciones de nuestra ecuación de Schrödinger que sean continuas. Es entonces imperativo poseer un conocimiento certero acerca de estos ceros y cómo se comportan.

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

Para esto, teniendo en cuenta que $\sin_{\alpha,\beta}(s) = sE_{2\alpha,\alpha+\beta}(-s^2)$ y $\cos_{\alpha,\beta}(s) = E_{2\alpha,\beta}(-s^2)$, la observación fundamental surge a partir del comportamiento asintótico de la función de Mittag-Leffler en el dominio negativo presentada en [26] para $\alpha \in (0, 1)$,

$$E_{\alpha,\beta}(s) = - \sum_{r=1}^{N^*} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha r)} \frac{1}{s^r} + \left[\frac{1}{s^{N^*+1}} \right],$$

cuando $s \rightarrow -\infty$ y donde $N^* \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Esto nos permite concluir que las funciones \sin_{α} y \cos_{α} poseen una cantidad finita de ceros. Esta es una diferencia fundamental entre el modelo fraccionario que presentaremos aquí y el modelo clásico con derivadas usuales, ya que implica que en procesos en los cuales el modelo clásico predice una cantidad infinita de estados de energía, el modelo fraccionario proveerá solamente una cantidad finita de estados. Sin embargo, teniendo en cuenta (5.1), concluimos que el seno y el coseno fraccionario poseerán más ceros cuando $\alpha \rightarrow 1$.

La siguiente gráfica (figura 4) visualiza para $\alpha \in (0.7, 1)$ dónde se encuentran los ceros de \cos_{α} . Observamos que los ceros del seno fraccionario se aproxima considerablemente bien al cero del seno clásico, incluso para α considerablemente lejanos a 1.

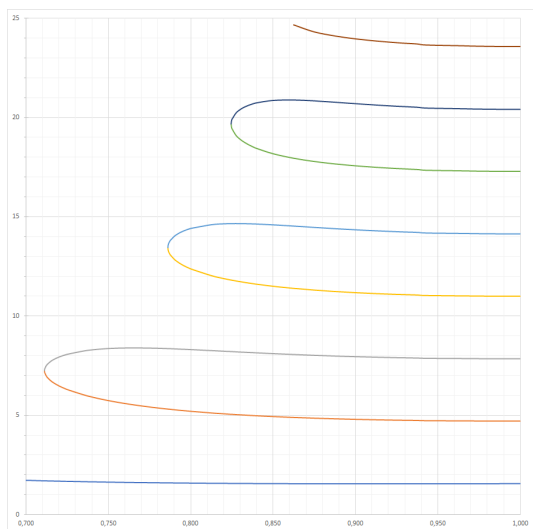


FIGURA 4. Ceros de la función coseno fraccionario de parámetro $\alpha \in [0.7, 1]$ en el dominio $[0, 30]$

5.1. Construcción de la ecuación de Schrödinger fraccionaria

En mecánica cuántica, todo observable de un sistema en estudio es interpretado como un operador lineal que actúa sobre un espacio de Hilbert. En los modelos clásicos con derivadas enteras, los operadores fundamentales, el operador de posición en representación coordenada, el operador de energía y el operador de momento, vienen dados por

$$\hat{x} = x, \quad \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

con $x \in \mathbb{R}$, donde \hbar es la constante reducida de Planck e i es la unidad imaginaria. La onda plana

$$\Psi^*(x, t) = e^{i(kx - \omega t)},$$

es una función propia de los últimos dos operadores, donde k representa el vector de onda y ω la frecuencia angular. En efecto

$$\hat{E}\Psi^* = \omega\hbar\Psi^* \quad \hat{p}\Psi^* = k\hbar\Psi^*.$$

Para construir una versión fraccionaria de la ecuación de Schrödinger, generalizaremos esta relación como sigue. Consideremos entonces $\alpha \in (0, 1]$. Una forma inmediata de generalizar el operador de posición en un contexto fraccionario puede venir dada por la siguiente definición,

$$\hat{x}_\alpha = \text{signo}(x) |x|^\alpha.$$

Notemos que $x \in \mathbb{R}$ también asumirá valores negativos, por lo que una forma de definir este operador de manera consistente viene dada por nuestra definición, como será evidente en las aplicaciones. Ahora consideraremos una versión fraccionaria de la función Ψ^* , que tenga un comportamiento similar a la onda plana, pero en términos de nuestros operadores fraccionarios de posición y tiempo. Teniendo en cuenta que la función de Mittag-Leffler es la versión fraccionaria de la función exponencial, surge natural considerar

$$\Psi_\alpha(x, t) = E_\alpha^*(ik^\alpha x^\alpha) E_\alpha(-i\omega^\alpha t^\alpha),$$

con

$$E_\alpha^*(ik^\alpha x^\alpha) = \begin{cases} E_\alpha(ik^\alpha x^\alpha) & \text{si } x \geq 0 \\ E_\alpha(-ik^\alpha (-x)^\alpha) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

y $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Claramente esta función no es una onda plana en el sentido original, ya que tiene amplitud decreciente cuando $|x| \rightarrow \infty$. Sin embargo, se comporta similar a una onda plana, ya que se mueve a la derecha cuando pasa el tiempo (ver figura 5).

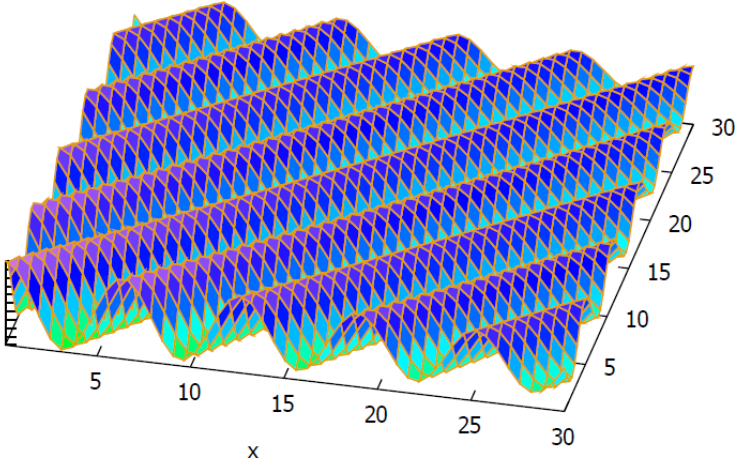


FIGURA 5. Onda plana fraccionaria de parámetro $\alpha = 0.99$ en el dominio $[0, 30]$ en $t \in [0, 30]$

Ahora queremos que Ψ_α sea una función propia de dos operadores que representarán nuestras versiones fraccionarias del operador energía y el operador momento. Inmediatamente resulta que estos operadores deben estar basados en operadores fraccionarios de Caputo. Para Ψ_α , se tienen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha \Psi_\alpha &= -i\omega^\alpha \Psi_\alpha = -i \frac{E^\alpha}{\hbar^\alpha} \Psi_\alpha, \\ {}^*_0 D_x^\alpha \Psi_\alpha &= ik^\alpha \Psi_\alpha = i \frac{p^\alpha}{\hbar^\alpha} \Psi_\alpha, \end{aligned}$$

donde definimos el operador ${}^*_0 D_x^\alpha$ de la siguiente forma

$${}^*_a D_x^\alpha = \begin{cases} {}^C_a D_x^\alpha & x > a \\ -{}_x^C D_a^\alpha & x < a, \end{cases}$$

y donde hicimos uso de las relaciones de *de Broglie*, $E = \hbar\omega$ y $p = \hbar k$. Notemos que ${}^*_a D_x^\alpha$ es un operador diferencial fraccionario de Caputo definido sobre toda la recta real. Estas igualdades obtenidas sugieren definir los siguientes

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

operadores.

$$\begin{aligned}\hat{p}_\alpha &= -i\hbar^{*\alpha} D_x^\alpha, \\ \hat{E}_\alpha &= i\hbar^{\alpha C} D_t^\alpha.\end{aligned}$$

Podemos combinar ahora nuestros operadores de energía y de momento recién definidos de la siguiente forma,

$$i\hbar^{\alpha C} D_t^\alpha = \hat{E}_\alpha = \left[\frac{\hat{p}_\alpha^2}{(2\mu)^\alpha} + V(x) \right] = \left[-\frac{\hbar^{2\alpha}}{(2\mu)^\alpha} {}^*D_x^\alpha {}^*D_x^\alpha + V(x) \right], \quad (5.2)$$

donde μ representa la masa de la partícula estudiada, \hat{p}_α^2 simboliza la aplicación reiterada del operador \hat{p} y V es una función de x que interpretaremos en el marco físico como el potencial. Con esta ecuación hemos construido una ecuación de Schrödinger fraccionaria dependiente del tiempo para una partícula no relativista basada en los operadores de derivación de Caputo.

$$i\hbar^{\alpha C} D_t^\alpha \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^{2\alpha}}{(2\mu)^\alpha} {}^*D_x^\alpha {}^*D_x^\alpha + V(x) \right] \Psi(x, t). \quad (5.3)$$

Definición 5.4. *La ecuación (5.3) será llamada ecuación de Schrödinger fraccionaria de orden $\alpha \in (0, 1)$ con respecto al tiempo y con respecto al espacio y de centro de derivación a .*

Empezaremos trabajando considerando $a = 0$. Es importante notar que la construcción de esta ecuación siguió un argumento heurístico, no estrictamente riguroso, pero sí inspirado en el desarrollo de la ecuación de Schrödinger clásica.

Vale la pena mencionar entonces también que para $\alpha = 1$ tenemos ${}^*D_x^\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$, ${}^C D_t^\alpha = \frac{\partial}{\partial t}$ y recuperamos los operadores clásicos de energía y momento. De mismo modo, si tomamos $\alpha = 1$ en (5.3), recuperamos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x, t),$$

la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para una partícula no relativista.

Cabe destacar que usualmente cuando se pretende generalizar al Laplaciano en términos fraccionarios, comunmente se utiliza la derivada fraccionaria de Riesz (ver [63]), llamada Laplaciano fraccionario.

Al mismo tiempo, se tiene la siguiente observación en este contexto.

Nota 5.5. *Cuando se pretende representar una segunda derivada con una derivada de Caputo, usualmente se considera ${}^C D_s^{\gamma_1}$ con $\gamma_1 \in (1, 2)$. Aquí hemos optado por otra variante, recurriendo a ${}^C D_s^{\gamma_2} {}^C D_s^{\gamma_2}$ con $\gamma_2 \in (0, 1)$. Notemos*

entonces que ${}_0^C D_s^{\gamma_1} \neq {}_0^C D_s^{\gamma_2} {}_0^C D_s^{\gamma_2}$ incluso cuando $\gamma_1 = 2\gamma_2$, basta considerar la función identidad para constatar este hecho, lo que implica que las últimas dos alternativas tienen una naturaleza diferente, por más similares que parezcan. Optamos aquí por la segunda alternativa debido a que se obtiene generalizando los operadores clásicos y combinando las identidades conocidas. También resulta ser más fiel al enfoque tradicional en mecánica cuántica.

En las siguientes tres subsecciones consideraremos tres problemas diferentes con potenciales diferentes que representan problemas básicos y clásicos. Servirán para constatar la validez de la ecuación planteada. El primero es el estudio de una partícula libre, luego una partícula en un pozo infinito y finalmente el problema del pozo finito.

5.2. El problema de la partícula libre

Antes de considerar el problema de la partícula libre, encararemos la ecuación (5.3) para resolver unos pasos previos. Observemos que al depender V , la función que interpretaremos como el potencial y que cambiará de problema en problema, únicamente de x , esperamos que la parte de la solución dependiente de la variable temporal sea siempre la misma, sin importar el potencial en cuestión. Tal como en el caso clásico entonces, para obtener la solución de la ecuación realizaremos una separación de variables. Consideramos

$$\Psi(x, t) = \varphi(t)\psi(x),$$

obteniendo las siguientes dos ecuaciones, una en términos de la variable temporal y la otra en función de la variable espacial,

$$i\hbar^\alpha {}_0^C D_t^\alpha \varphi(t) = \varepsilon^\alpha \varphi(t), \tag{5.4}$$

$$\varepsilon^\alpha \psi(x) = \left[-\frac{\hbar^{2\alpha}}{(2\mu)^\alpha} {}_0^* D_x^\alpha {}_0^* D_x^\alpha + V(x) \right] \psi(x). \tag{5.5}$$

(5.4) resulta ser independiente del problema particular, ya que el potencial que varía de problema en problema lo consideramos únicamente dependiente del espacio. Obtenemos inmediatamente la solución

$$\varphi(t) = E_\alpha \left(-i \frac{\varepsilon^\alpha}{\hbar^\alpha} t^\alpha \right)$$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

Notemos que esto implica que si $\alpha \neq 1$, las soluciones que obtendremos serán no estacionarias, ya que

$$|\Psi^* \Psi| = |\psi^* \psi| \left| E_\alpha \left(-i \frac{\varepsilon^\alpha}{\hbar^\alpha} t^\alpha \right)^* \right| \left| E_\alpha \left(-i \frac{\varepsilon^\alpha}{\hbar^\alpha} t^\alpha \right) \right|.$$

Obtenemos que el módulo $|\Psi^* \Psi|$ depende del tiempo, algo que no ocurre en el modelo clásico y que implica que la función densidad de probabilidad dependerá del tiempo cuando $\alpha \neq 1$.

Ahora, para la resolución de la segunda ecuación diferencial, necesitamos conocer el potencial con el que estamos trabajando y dependiendo del mismo obtendremos diferentes soluciones a nuestro problema. Al ser la ecuación eje de este estudio, tal como su versión clásica llevará su propio nombre.

Definición 5.6. *La ecuación (5.5) será llamada ecuación de Schrödinger fraccionaria independiente del tiempo de orden $\alpha \in (0, 1)$ con respecto al espacio.*

Notemos además que siempre que sea posible y siguiendo la convención usual del caso clásico, pediremos que la solución a esta ecuación sea continua con derivada clásica de primer orden continua.

Volviendo al problema de esta sección, para una partícula libre con momento angular igual a cero, la ecuación de Schrödinger fraccionaria independiente de tiempo viene dada por

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{(2\mu)^\alpha} {}_0^*D_x^\alpha ({}_0^*D_x^\alpha \psi)(x) + \varepsilon^\alpha \psi(x) = 0 \quad (5.6)$$

Introduciendo el número de onda k definido por

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (5.7)$$

obtenemos

$${}_0^*D_x^\alpha ({}_0^*D_x^\alpha \psi)(x) + k^{2\alpha} \psi(x) = 0$$

cuya solución puede ser expresada de dos maneras diferentes,

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 E_\alpha(ik^\alpha x^\alpha) + B_1 E_\alpha(-ik^\alpha x^\alpha) & \text{si } x \geq 0 \\ A_2 E_\alpha(ik^\alpha (-x)^\alpha) + B_2 E_\alpha(-ik^\alpha (-x)^\alpha) & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 \cos_\alpha(k^\alpha x^\alpha) + B_1 \sin_\alpha(k^\alpha x^\alpha) & \text{si } x \geq 0 \\ A_2 \cos_\alpha(k^\alpha (-x)^\alpha) + B_2 \sin_\alpha(k^\alpha (-x)^\alpha) & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Notemos que imponiendo continuidad sobre ψ , obtenemos $A_1 = A_2$ e imponiendo en (5.9) continuidad de la derivada clásica de primer orden obtenemos

$$B_1 = -B_2.$$

Para el caso límite $\alpha \rightarrow 1$ obtenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx),$$

que es la solución clásica a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula libre.

5.3. El problema de la partícula en un pozo infinito

Para una partícula en un pozo infinito la ecuación de Schrödinger fraccionaria independiente del tiempo viene dada por

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} {}^*D_x^\alpha ({}^*D_x^\alpha \psi)(x) + [\varepsilon^\alpha - V_1(x)] \psi(x) = 0 \quad (5.10)$$

con $\varepsilon > 0$ y donde el potencial está definido como

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-a, a] \\ \infty & \text{si } x \notin [-a, a]. \end{cases} \quad (5.11)$$

Separamos entonces la solución en dos regiones del plano:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) & \text{si } x \in I = [-a, a] \\ \psi_{II}(x) & \text{si } x \in II = CI. \end{cases}$$

Introduciendo nuevamente el número de onda k dado por $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ en la región I , la ecuación diferencial (5.10) puede ser expresada nuevamente como

$${}^*D_x^\alpha ({}^*D_x^\alpha \psi)(x) + k^{2\alpha} \psi(x) = 0, \quad (5.12)$$

y como hemos visto, la solución general de esta ecuación puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\psi_I(x) = \begin{cases} A \cos_\alpha(k^\alpha(-x)^\alpha) - B \sin_\alpha(k^\alpha(-x)^\alpha) & \text{si } x \in [-a, 0] \\ A \cos_\alpha(k^\alpha x^\alpha) + B \sin_\alpha(k^\alpha x^\alpha) & \text{si } x \in [0, a]. \end{cases} \quad (5.13)$$

En la región II , donde el potencial asume el valor infinito, seguiremos la convención usual de definir la solución como

$$\psi_{II}(x) = 0.$$

Puesto que la solución debe ser continua, precisamos que $\psi(-a) = \psi(a) = 0$, lo que implica

$$A \cos_\alpha(k^\alpha a^\alpha) - B \sin_\alpha(k^\alpha a^\alpha) = 0$$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

$$A \cos_\alpha(k^\alpha a^\alpha) + B \sin_\alpha(k^\alpha a^\alpha) = 0.$$

Combinando estos dos resultados se obtiene

$$A \cos_\alpha(k^\alpha a^\alpha) = B \sin_\alpha(k^\alpha a^\alpha) = 0,$$

y teniendo en cuenta que \cos_α y \sin_α no se anulan simultáneamente, concluimos que o A o B debe ser igual a 0. Consideremos aquí el caso $A = 0$ y $B \neq 0$. Entonces la condición

$$\psi(a) = 0 = B \sin_\alpha(k^\alpha a^\alpha)$$

obliga a k a que asuma valores de modo que $\sin_\alpha(k^\alpha a^\alpha) = 0$. Esto implica que los estados de energía son cuánticos, es decir que pueden asumir únicamente valores de un conjunto discreto. De hecho, en el caso fraccionario el espectro de energía no sólo será discreto, sino más aún finito, ya que el seno fraccionario (y también el coseno fraccionario cuando $B = 0$) tiene sólo una cantidad finita de ceros. Esta es una diferencia fundamental en comparación al caso clásico, donde se obtiene una cantidad infinita de estados de energía debido a que el seno y el coseno poseen infinitos ceros.

Notemos además que se puede elegir el orden de diferenciación α de manera tal que el modelo fraccionario disponga de tantos estados de energía como sea necesario.

Notemos que en este caso no forzaremos a nuestra solución que posea derivada continua, ya que en dicho caso la única solución factible sería la trivial, $\psi(x) = 0$.

Finalmente, se determinará la constante B para que satisfaga la condición de normalización,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2 \int_0^a |B \sin_\alpha(k^\alpha x^\alpha)|^2 dx = 1.$$

De esta manera, la función densidad de probabilidad de hallar la partícula en el sistema es 1. Con esto terminamos el problema (ver figura 6).

Notemos que en principio pretendemos que nuestro modelo sea invariante por traslaciones y simetrías. Es decir que si consideramos dos potenciales de manera que uno es simplemente la traslación del otro, entonces pretendemos que también las soluciones sean idénticas salvo por traslaciones. Lo mismo ocurre con simetría de dos potenciales con respecto a un eje paralelo al eje y . Sin embargo, si solucionamos la ecuación de Schrödinger fraccionaria (5.10)

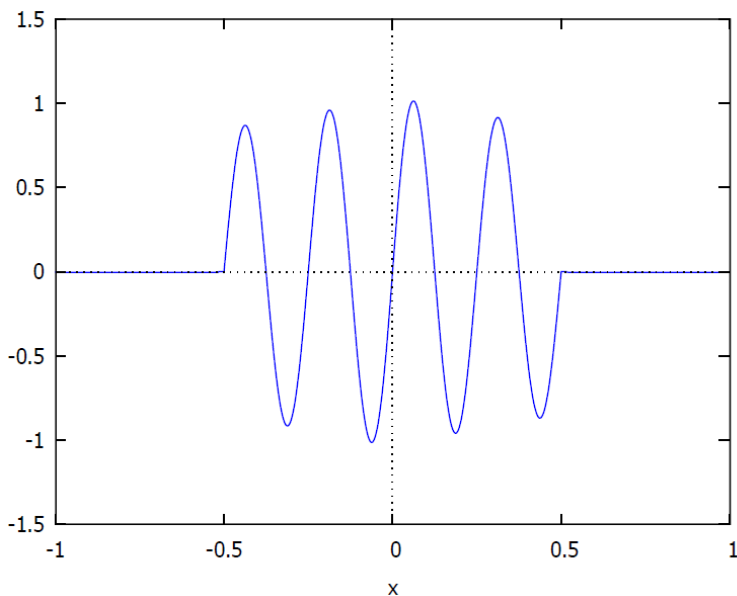


FIGURA 6. Solución de la ecuación de Schrödinger fraccionaria de parámetro $\alpha = 0.99$ y centro de derivación 0 para el pozo infinito con $a = 0.5$ en el dominio $[-1, 1]$

con el potencial

$$V_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2a] \\ \infty & \text{si } x \notin [0, 2a] \end{cases} \quad (5.14)$$

obtenemos la solución (ver figura 7)

$$\psi(x) = \begin{cases} B \sin_\alpha(k^\alpha x^\alpha) & \text{si } x \in [0, 2a] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2a] \end{cases} \quad (5.15)$$

que claramente no es la misma solución que la primera que obtuvimos.

Esto representaría una gran inconsistencia del modelo fraccionario en el momento de darle una interpretación física a los resultados obtenidos. El comportamiento de una partícula no puede depender de un sistema de referencia. Observemos entonces a partir de un tercer ejemplo de una partícula en un pozo infinito cómo se puede resolver esta inconsistencia. La clave se encuentra en la definición del operador ${}_0^*D_x^\alpha$.

Observemos que esta derivada fraccionaria a diferencia de la derivada clásica es un operador no local. La derivada fraccionaria de Caputo ${}_a^*D_x^\alpha$ de una función dada depende del punto central a , por lo que no sorprende que un

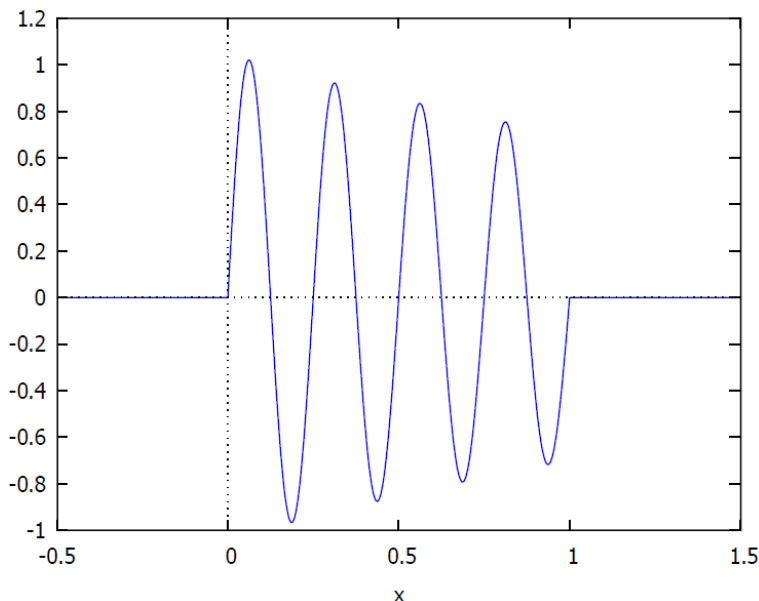


FIGURA 7. Solución de la ecuación de Schrödinger fraccionaria de parámetro $\alpha = 0.99$ y centro de derivación 0 para el pozo infinito con $a = 0.5$ en el dominio $[-0.5, 1.5]$

potencial trasladado nos provee de una solución diferente. Pero si ahora observamos que el centro de derivación de ${}_0^*D_x^\alpha$ coincide con el centro del intervalo en el que el potencial (5.11) no se anula, podemos inferir que si consideramos para el pozo (5.14) el operador ${}_a^*D_x^\alpha$ con centro en a , deberíamos obtener nuevamente el resultado original. Y efectivamente, si consideramos la ecuación de Schrödinger fraccionaria

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} {}_a^*D_x^\alpha ({}_a^*D_x^\alpha \psi)(x) + [\varepsilon^\alpha - V_2(x)] \psi(x) = 0 \quad (5.16)$$

con el potencial

$$V_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2a] \\ \infty & \text{si } x \notin [0, 2a], \end{cases}$$

obtenemos la solución

$$\psi(x) = \begin{cases} -B \sin_\alpha(k^\alpha(-x+a)^\alpha) & \text{si } x \in [0, a] \\ B \sin_\alpha(k^\alpha(x-a)^\alpha) & \text{si } x \in [a, 2a] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2a], \end{cases} \quad (5.17)$$

que es exactamente la misma solución que la del problema de ecuación (5.10)

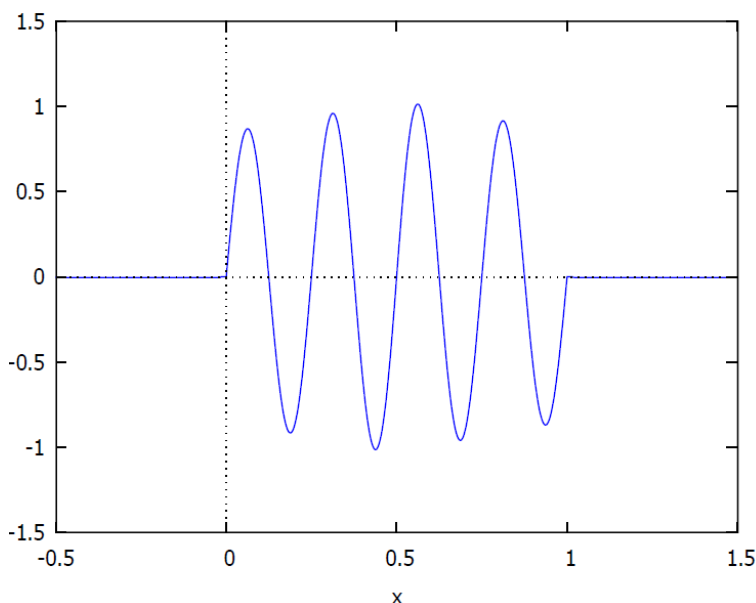


FIGURA 8. Solución de la ecuación de Schrödinger fraccionaria de parámetro $\alpha = 0.99$ y centro de derivación 0.5 para el pozo infinito con $a = 0.5$ en el dominio $[-0.5, 1.5]$

con potencial (5.11), trasladada a unidades (ver figura 8).

Hacemos dos importantes observaciones. Por un lado notamos que teniendo que el centro de derivación a interfiere en la solución del problema y que dependiendo de dónde este se encuentra la solución será otra, será necesario darle una interpretación física a a . Por el otro lado, sabemos ahora que la traslación del potencial (5.11) y del centro de derivación 0 a (5.14) y a respectivamente nos provee soluciones idénticas salvo por la traslación. El siguiente teorema generalizará esta observación a traslaciones arbitrarias y potenciales genéricos.

Teorema 5.7. Sean ψ_1 y ψ_2 las soluciones a la ecuaciones de Schrödinger fraccionarias I y II dadas por

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} {}_{a_i}^* D_x^\alpha ({}_{a_i}^* D_x^\alpha \psi_i)(x) + [\varepsilon^\alpha - W_i(x)] \psi_i(x) = 0,$$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

con $i = 1, 2$ respectivamente, donde a_i son dos centros arbitrarios de derivación y

$$W_1(x) = W_2(x - c),$$

donde $c = a_1 - a_2$. Entonces

$$\psi_1(x + c) = \psi_2(x).$$

Prueba. Sabemos que $\psi_1(x)$ en el dominio $[a_1, \infty)$ verifica la ecuación I,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_1}^x (x-\xi)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_{a_1}^{\xi} (\xi-s)^{-\alpha} \psi'(s) ds \right] d\xi \\ + [\varepsilon^\alpha - W_1(x)] \psi(x) = 0, \end{aligned}$$

que con la fórmula de Leibniz se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_1}^x (x-\xi)^{-\alpha} \int_{a_1}^{\xi} (\xi-s)^{-\alpha-1} \psi'(s) ds d\xi \\ + [\varepsilon^\alpha - W_1(x)] \psi(x) = 0. \end{aligned}$$

Con el cambio de variables $s = r + c$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_1}^x (x-\xi)^{-\alpha} \int_{a_2}^{\xi-c} (\xi-c-r)^{-\alpha-1} \psi'(r+c) dr d\xi + \\ + [\varepsilon^\alpha - W_2(x-c)] \psi(x) = 0, \end{aligned}$$

y con el cambio $\xi = \tau + c$,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_2}^{x-c} ((x-c)-\tau)^{-\alpha} \int_{a_2}^{\tau} (\tau-r)^{-\alpha-1} \psi'(r+c) dr d\tau + \\ + [\varepsilon^\alpha - W_2(x-c)] \psi(x) = 0, \end{aligned}$$

y finalmente con $x - c = y$,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_2}^y (y-\tau)^{-\alpha} \int_{a_2}^{\tau} (\tau-r)^{-\alpha-1} \psi'(r+c) dr d\tau + \\ + [\varepsilon^\alpha - W_2(y)] \psi(y+c) = 0. \end{aligned}$$

Es decir que $\psi_1(x+c)$ verifica en el dominio $[a_2, \infty)$ la ecuación II. De manera análoga se prueba que $\psi_1(x+c)$ verifica en el dominio $(-\infty, a_2]$ la ecuación II. Entonces $\psi_1(x+c)$ y $\psi_2(x)$ verifican las mismas ecuaciones diferenciales, con lo que queda probado el resultado. \square

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

Luego de haber probado entonces que las soluciones no se alteran por traslaciones, haremos ahora lo mismo con simetrías con respecto a un eje paralelo al eje y .

Teorema 5.8. Sean ψ_1 y ψ_2 las soluciones a la ecuaciones de Schrödinger fraccionarias I y II dadas por

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} {}^*D_x^\alpha ({}^*D_x^\alpha \psi_i) (x) + [\varepsilon^\alpha - W_i(x)] \psi_i(x) = 0,$$

con $i = 1, 2$ respectivamente, donde a_i son dos centros arbitrarios de derivación y

$$W_1(x) = W_2(c - x),$$

donde $c = a_1 + a_2$. Entonces

$$\psi_1(c - x) = \psi_2(x).$$

Prueba. Sabemos que $\psi_1(x)$ en el dominio $[a_1, \infty)$ verifica la ecuación I,

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_1}^x (x-\xi)^{-\alpha} \int_{a_1}^\xi (\xi-s)^{-\alpha-1} \psi'(s) ds d\xi + [\varepsilon^\alpha - W_1(x)] \psi(x) = 0.$$

Llevando a cabo el cambio de variable $s = c - r$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{a_1}^x (x-\xi)^{-\alpha} \int_{c-\xi}^{a_2} (\xi+r-c)^{-\alpha-1} \psi'(c-r) dr d\xi \\ + [\varepsilon^\alpha - W_1(x)] \psi(x) = 0, \end{aligned}$$

y con $\xi = c - \tau$,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_{c-x}^{a_2} (\tau - (c-x))^{-\alpha} \int_{\tau}^{a_2} (r-\tau)^{-\alpha-1} \psi'(c-r) dr d\tau \\ + [\varepsilon^\alpha - W_1(x)] \psi(x) = 0, \end{aligned}$$

y finalmente con el cambio $c - x = y$,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_y^{a_2} (\tau - y)^{-\alpha} \int_{\tau}^{a_2} (r-\tau)^{-\alpha-1} \psi'(c-r) dr d\tau \\ + [\varepsilon^\alpha - W_2(y)] \psi(a-y) = 0. \end{aligned}$$

Es decir que $\psi_1(c-x)$ verifica en el dominio $[a_2, \infty)$ la ecuación II. De manera análoga se prueba que $\psi_1(c-x)$ verifica en el dominio $[a_2, \infty)$ la ecuación II. Entonces $\psi_1(c-x)$ y $\psi_2(x)$ verifican las mismas ecuaciones diferenciales,

con lo que queda probado el resultado. \square

5.4. El problema de la partícula en un pozo finito

Para una partícula en un pozo finito la ecuación de Schrödinger fraccionaria independiente del tiempo viene dada por

$$\frac{\hbar^{2\alpha}}{2\mu^\alpha} {}^*D_x^\alpha ({}^*D_x^\alpha \psi)(x) + [\varepsilon^\alpha - V_3(x)] \psi(x) = 0 \quad (5.18)$$

donde el potencial viene dado por

$$V_3(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{si } x \notin [-a, a] \end{cases},$$

y consideramos $-V_0 < \varepsilon^\alpha < 0$. Separamos la solución en tres regiones,

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) & \text{si } x \in I = [-a, a] \\ \psi_{II}(x) & \text{si } x \in II = (-\infty, -a] \\ \psi_{III}(x) & \text{si } x \in III = [a, \infty). \end{cases}$$

Introduciendo el número de onda k dado por $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ y $v_0 = \frac{2\mu^\alpha}{\hbar^{2\alpha}} V_0$ en la región I podemos expresar la ecuación diferencial como

$${}^*D_x^\alpha ({}^*D_x^\alpha \psi)(x) + [k^{2\alpha} + v_0] \psi(x) = 0, \quad (5.19)$$

con $k^2 + v_0 > 0$. De esa forma, la solución puede ser escrita como

$$\psi_I(x) = \begin{cases} A_I \cos_\alpha(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}(-x)^\alpha) \\ \quad - B_I \sin_\alpha(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}(-x)^\alpha) & \text{si } x \in [-a, 0] \\ A_I \cos_\alpha(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}x^\alpha) \\ \quad + B_I \sin_\alpha(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}x^\alpha) & \text{si } x \in [0, a]. \end{cases} \quad (5.20)$$

En las regiones II y III , puesto que tenemos $k^{2\alpha} < 0$, tomando $k^{2\alpha} = -\kappa^{2\alpha}$ con $\kappa \in \mathbb{R}^+$, obtenemos

$${}^*D_x^\alpha ({}^*D_x^\alpha \psi)(x) - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = 0. \quad (5.21)$$

A simple vista pareciera que podemos expresar la solución a esta ecuación diferencial de manera inmediata como combinación lineal de funciones de Mittag-Leffler. Sin embargo observamos que la derivada fraccionaria de la ecuación diferencial tiene su punto inicial en 0 y que la ecuación misma es válida en $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, lo que conlleva una complicación fácil de pasar

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

por alto. Para visualizarlo, nos concentraremos en la región *III*, donde la ecuación diferencial viene dada por

$${}_0^C D_x^\alpha ({}_0^C D_x^\alpha \psi)(x) - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = 0,$$

lo que equivale a

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_0^\xi (\xi-s)^{-\alpha} \psi'(s) ds \right] d\xi - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = 0. \quad (5.22)$$

Notamos que en (5.22) la función ψ en parte es evaluada en el intervalo $[0, a]$ y a diferencia de un problema usual, en este caso ya sabemos cómo viene definida la función ψ en este intervalo. De hecho, viene dada por (5.20). Esto implica que en una parte de la integral en (5.22) ψ es dato y en otra parte es incógnita. Si separamos dicha integral doble según este criterio entre la parte en la cual ψ es dato y la parte en la que no, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_a^\xi (\xi-s)^{-\alpha} \psi'(s) ds \right] d\xi \\ + G\psi(x) + H\psi(x) - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = 0, \end{aligned}$$

donde los operadores G y H están definidos como

$$\begin{aligned} Gf(x) &= \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_0^a (x-\xi)^{-\alpha} \int_0^\xi (\xi-s)^{-\alpha-1} f'(s) ds d\xi, \\ Hf(x) &= \frac{(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)^2} \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha} \int_0^a (\xi-s)^{-\alpha-1} f'(s) ds d\xi. \end{aligned}$$

Ahora, las integrales restantes no son otra cosa que la derivada fraccionaria de Caputo de orden α a partir del punto a , con lo que la ecuación de Schrödinger en la región *III* finalmente queda

$${}_a^C D_x^\alpha ({}_a^C D_x^\alpha \psi)(x) + (G + H)\psi(x) - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = 0.$$

Observamos que los operadores G y H actúan sobre ψ de manera tal que esta función es únicamente evaluada en el intervalo $[0, a]$ por estos dos operadores. Esto implica que los términos $G\psi(x)$ y $H\psi(x)$ son datos y consecuentemente la ecuación obtenida para la región *III* a diferencia de su expresión general sobre todo \mathbb{R} resulta no ser lineal. Teniendo en cuenta precisamente los valores

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

que asume ψ en I , (5.20), obtenemos

$$\begin{aligned} & {}_a^C D_x^\alpha ({}_a^C D_x^\alpha \psi)(x) - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = \\ & -A_I(G+H) \cos_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 x^\alpha} \right) - B_I(G+H) \sin_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 x^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, consideraremos tres ecuaciones auxiliares,

$${}_a^C D_x^\alpha ({}_a^C D_x^\alpha A_1)(x) - \kappa^{2\alpha} A_1(x) = -(G+H) \cos_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 x^\alpha} \right), \quad (5.24)$$

$${}_a^C D_x^\alpha ({}_a^C D_x^\alpha B_1)(x) - \kappa^{2\alpha} B_1(x) = -(G+H) \sin_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 x^\alpha} \right) \quad (5.25)$$

y

$${}_a^C D_x^\alpha ({}_a^C D_x^\alpha C_1)(x) - \kappa^{2\alpha} C_1(x) = 0. \quad (5.26)$$

Entonces debido a la linealidad de los operadores fraccionarios, la solución ψ_{III} a (5.23) viene dada por

$$\psi_{III} = -A_I A_1(x) - B_I B_1(x) + C_1(x).$$

Los signos que le asignamos a cada sumando no influyen en el resultado final y fueron fijados de tal forma para simplificar los cálculos que siguen. De manera análoga, en la región II la ecuación de Schrödinger se puede expresar como

$$\begin{aligned} & {}_x^C D_a^\alpha ({}_x^C D_a^\alpha \psi)(x) - \kappa^{2\alpha} \psi(x) = \\ & -A_I(G+H) \cos_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 (-x)^\alpha} \right) + B_I(G+H) \sin_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 (-x)^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, consideraremos tres ecuaciones auxiliares,

$${}_x^C D_a^\alpha ({}_x^C D_a^\alpha A_2)(x) - \kappa^{2\alpha} A_2(x) = -(G+H) \cos_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 (-x)^\alpha} \right), \quad (5.28)$$

$${}_x^C D_a^\alpha ({}_x^C D_a^\alpha B_2)(x) - \kappa^{2\alpha} B_2(x) = +(G+H) \sin_\alpha \left(\sqrt{k^{2\alpha} + v_0 (-x)^\alpha} \right) \quad (5.29)$$

y

$${}_x^C D_a^\alpha ({}_x^C D_a^\alpha C_2)(x) - \kappa^{2\alpha} C_2(x) = 0. \quad (5.30)$$

También aquí debido a la linealidad de los operadores fraccionarios la solución ψ_{II} a (5.27) viene dada por

$$\psi_{II} = -A_I A_2(x) + B_I B_2(x) + C_2(x).$$

Donde nuevamente los signos que le asignamos a cada sumando no influyen en el resultado final y fueron fijados de tal forma para simplificar los cálculos que siguen. Para C_1 y C_2 ahora sí tenemos expresiones simples e intuitivas

de sus respectivas soluciones.

$$C_1(x) = A_{III}E_\alpha(\kappa^\alpha(x-a)^\alpha) + B_{III}E_\alpha(-\kappa^\alpha(x-a)^\alpha) \quad \text{si } x \in (a, \infty) \quad (5.31)$$

$$C_2(x) = A_{II}E_\alpha(\kappa^\alpha(a-x)^\alpha) + B_{II}E_\alpha(-\kappa^\alpha(a-x)^\alpha) \quad \text{si } x \in (-\infty, -a). \quad (5.32)$$

Teniendo en cuenta que para que nuestra solución sea normalizable la función debe ser acotada, concluimos $A_{II} = A_{III} = 0$.

También observemos que el teorema 5.8 de la sección anterior nos permite asegurar que

$$\begin{aligned} A_1(x) &= A_2(-x), \\ B_1(x) &= B_2(-x). \end{aligned}$$

Ahora debemos fijar las condiciones de continuidad de la solución y su derivada en $-a$ y a . Teniendo en cuenta que $\psi_{II} = -A_I A_2(x) + B_I B_1(-x) + C_2(x)$ que $\psi_{III} = -A_I A_2(-x) - B_I B_1(x) + C_1(x)$ y notando $\kappa'^\alpha = \sqrt{-\kappa^{2\alpha} + v_0} > 0$, se tiene

$$A_I \cos_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) - B_I \sin_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) = -A_I A_2(-a) + B_I B_1(a) + B_{II}, \quad (5.33)$$

y

$$A_I \cos_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) + B_I \sin_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) = -A_I A_2(-a) - B_I B_1(a) + B_{III}, \quad (5.34)$$

en $-a$ y a respectivamente. Las condiciones de continuidad para la primera derivada en $-a$ y a implican

$$\kappa'^\alpha A_I \sin_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) + \kappa'^\alpha B_I \cos_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) = -A_I A_2'(-a) - B_I B_1'(a) + \kappa^\alpha \frac{B_{II}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (5.35)$$

y

$$-\kappa'^\alpha A_I \sin_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) + \kappa'^\alpha B_I \cos_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) = A_I A_2'(-a) - B_I B_1'(a) - \kappa^\alpha \frac{B_{III}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (5.36)$$

Combinando ahora las ecuaciones (5.33) y (5.35) y las ecuaciones (5.34) y (5.36) se obtienen las siguientes dos igualdades.

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^\alpha}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{A_I [\kappa'^\alpha \sin_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2'(-a)] + B_I [\kappa'^\alpha \cos_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) + B_1'(a)]}{A_I [\cos_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2(-a)] + B_I [-\sin_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) - B_1(a)]}, \\ \frac{\kappa^\alpha}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{A_I [\kappa'^\alpha \sin_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2'(-a)] + B_I [-\kappa'^\alpha \cos_{\alpha,\alpha}(\kappa'^\alpha a^\alpha) - B_1'(a)]}{A_I [\cos_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2(-a)] + B_I [\sin_\alpha(\kappa'^\alpha a^\alpha) + B_1(a)]}. \end{aligned}$$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

y combinando finalmente estas dos igualdades, se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{A_I [\kappa'^\alpha \sin_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A'_2(-a)] + B_I [\kappa'^\alpha \cos_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + B'_1(a)]}{A_I [\cos_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2(-a)] + B_I [-\sin_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) - B_1(a)]} = \\ & = \frac{A_I [\kappa'^\alpha \sin_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A'_2(-a)] + B_I [-\kappa'^\alpha \cos_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) - B'_1(a)]}{A_I [\cos_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2(-a)] + B_I [\sin_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + B_1(a)]}. \end{aligned}$$

Expresando ambas fracciones con un mismo denominador se obtiene una igualdad con 32 términos, de los cuales 16 se cancelan mutuamente. Para los restantes, queda la igualdad

$$\begin{aligned} & A_I B_I [(\cos_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2(-a))(\kappa'^\alpha \cos_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + B'_1(a))] + \\ & + A_I B_I [(\sin_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + B_1(a))(\kappa'^\alpha \sin_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A'_2(-a))] = \\ & = -A_I B_I [(\cos_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A_2(-a))(\kappa'^\alpha \cos_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + B'_1(a))] + \\ & - A_I B_I [(\sin_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + B_1(a))(\kappa'^\alpha \sin_{\alpha,\alpha} (\kappa'^\alpha a^\alpha) + A'_2(-a))], \end{aligned}$$

lo cual simplificando nos brinda la valiosa identidad

$$A_I B_I = -A_I B_I. \quad (5.37)$$

Esto implica que o A_I o B_I es igual a cero y de este modo podemos concluir que la solución al problema será simétrico, tal como debería ser para un problema con un potencial simétrico. Tomemos aquí a modo ilustrativo $A_I = 0$. Entonces la solución al problema viene dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} -B_I B_2(-x) + B_{II} E_\alpha (-\kappa^\alpha (a-x)^\alpha) & \text{si } x \in (-\infty, -a) \\ -B_I \sin_\alpha (\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}(-x)^\alpha) & \text{si } x \in [-a, 0] \\ B_I \sin_\alpha (\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}x^\alpha) & \text{si } x \in [0, a] \\ B_I B_2(x) + B_{III} E_\alpha (-\kappa^\alpha (x-a)^\alpha) & \text{si } x \in (a, \infty), \end{cases} \quad (5.38)$$

donde B_2 es la solución al problema auxiliar (5.29),

$$\begin{cases} {}^C D_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha B_2)(x) - \kappa^{2\alpha} B_2(x) = (G + H) \sin_\alpha (\sqrt{k^{2\alpha} + v_0}(-x)^\alpha) \\ \hspace{15em} \text{si } x \in (a, \infty) \\ B_2(a) = 1, \end{cases} \quad (5.39)$$

donde la condición inicial $B_2(a) = 1$ puede ser elegida arbitrariamente. En (5.38), las constantes B_{II} y B_{III} pueden ser obtenidas de (5.33) y (5.34) respectivamente, que ahora se pueden expresar como

$$B_{II} = B_I [\sin_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) - 1],$$

5. UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER FRACCIONARIA

$$B_{III} = B_I [\sin_\alpha (\kappa'^\alpha a^\alpha) + 1],$$

y la restante constante a determinar, B_I , se fija considerando la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

En este capítulo hemos construido una ecuación de Schrödinger fraccionaria y hemos logrado exitosamente resolver los tres problemas planteados para esta ecuación: la partícula libre, la partícula en el pozo infinito y la partícula en el pozo finito.

Siendo la partícula libre el más simple entre todos, nos ha servido para encarar la ecuación construida y obtener primeros resultados acerca de su solución y la interpretación física que conllevan. El problema de la partícula en el pozo infinito nos ha ayudado a percatarnos de que el centro de derivación $a \in \mathbb{R}$ en la ecuación diferencial necesariamente debe tener una interpretación física, ya que diferentes centros de derivación afectarán las soluciones de una misma ecuación. Esto también nos motivó a probar dos teoremas relacionados a la relación entre las propiedades simétricas que posee el potencial de un problema y las propiedades simétricas que posee su solución.

Finalmente, el problema de la partícula en el pozo finito ha sido crucial para observar cuán rápido se incrementa el nivel de dificultad de un problema al pasar de derivadas clásicas a derivadas de orden fraccionario. La deducción de la identidad (5.37) en el caso clásico es simple e inmediata, mientras que aquí presupuso un trabajo laborioso en el cual es fácil cometer errores. En el caso entero, no se presenta una ecuación auxiliar que se debe resolver para obtener la solución definitiva como la que tenemos aquí con (5.39). Además, esta ecuación no posee una solución con una simple expresión analítica, por lo que será necesario recurrir a métodos numéricos para resolverla.

6. Limitaciones de la derivada fraccionaria de Caputo

Los resultados de esta sección fueron presentados en los congresos (2), (7), (8) y (10). Se puede consultar la siguiente bibliografía para este capítulo: [3], [6], [15], [24], [29], [31], [46], [43], [53].

En esta sección haremos dos comentarios acerca de las principales limitaciones que posee la derivada fraccionaria de Caputo que pudimos observar en el transcurso de esta tesis.

6.1. La derivada fraccionaria de Caputo no es un operador autoadjunto

Comenzaremos con una observación clave que surge a partir del capítulo anterior, en el cual construimos una ecuación de Schrödinger fraccionaria tanto en el tiempo como en el espacio. Dicha construcción estuvo inspirada por un pensamiento análogo del caso no fraccionario que se basa en considerar los operadores de momento y de energía,

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

y diferentes relaciones que los conectan. Estos operadores son autoadjuntos en $L^2(\mathbb{R})$, propiedad que tiene dos consecuencias fundamentales en la interpretación física de los operadores en cuestión, ya que cada uno de estos representa un observable mecánico cuántico. Por un lado, los autovalores de cada uno de estos operadores representa una medición real, por lo que estos valores no pueden asumir valores complejos. Pero al ser estos operadores autoadjuntos, necesariamente todo autovalor de ellos será real, tal como es deseado. Por el otro lado, el espacio sobre el cual actúan los operadores representa el espacio de todos los estados observables. Entonces, sabiendo que los operadores son autoadjuntos, el conjunto de autofunciones constituye una base ortogonal de dicho espacio, con lo que fácilmente puede construirse todo estado observable en función de las autofunciones.

Ahora observamos que en particular, ningún operador definido aquí en términos derivadas fraccionarias de Caputo es autoadjunto.

Más precisamente, para la fórmula de integración por partes con $\alpha \in (0, 1)$ se tiene

$$\int_a^b g(x) {}_a^C D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x^{RL} D_b^\alpha g(x) dx. \quad (6.1)$$

Es decir que para lograr la igualdad en una fórmula semejante, no sólo pasamos de una derivada fraccionaria de Caputo a una de Riemann–Liouville, sino que también pasamos de una derivada por derecha a una por izquierda. Teniendo en cuenta lo fundamental que resulta ser la propiedad autoadjunta para los operadores en mecánica cuántica, podríamos intentar redefinir de alguna forma los operadores fraccionarios para que sí sean autoadjuntos. En este sentido, claramente el cambio de derivada por derecha a derivada por izquierda es más crítico que el cambio de derivada de Caputo a derivada de Riemann–Liouville. De hecho, teniendo en cuenta que para $\alpha \in (0, 1)$

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a^{RL} D_x^\alpha f(x) - \frac{f'(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x^{RL} D_b^\alpha f(x) - \frac{f'(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha},$$

y si considerásemos funciones $f, g \in C_0([a, b])$, se tiene

$$\int_a^b g(x) {}_a^C D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x^C D_b^\alpha g(x) dx.$$

De esta forma estaría resuelto el problema con el cambio de derivada fraccionaria.

Con respecto al cambio de derivada de Caputo por derecha a derivada de Caputo por izquierda, no hay otra forma de esquivar esta complicación más que por definir un operador sobre $L^2([a, b])$ como

$${}_{[a,b]}^G D_x^\alpha := \frac{{}_a^C D_x^\alpha + {}_x^C D_b^\alpha}{2}.$$

Este operador así definido efectivamente es autoadjunto si actúa sobre funciones que se anulan en los extremos del intervalo $[a, b]$, pero lamentablemente afronta dos dificultades mayores. Por un lado, restringe la definición de derivada fraccionaria autoadjunta sobre espacios definidos en intervalos acotados. Por el otro lado, este operador así definido carece de funcionalidad y utilidad

a los fines prácticos. Sin ir más lejos, resulta sumamente difícil hallar las autofunciones de este operador.

6.2. La derivada fraccionaria de Caputo no verifica la fórmula de derivación del producto

En la mecánica cuántica, el conmutador entre dos operadores lineales \hat{A} y \hat{B} puede brindar información importante acerca de la relación entre los operadores en cuestión. Dicho conmutador, notado $[\hat{A}, \hat{B}]$ es un nuevo operador definido por

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Naturalmente, se dice que dos operadores conmutan cuando su conmutador es igual a 0. Sin embargo, ese no es siempre el caso. Por ejemplo, si consideramos los operadores clásicos de posición y momento, $\hat{x} = x$ y $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, se tiene

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] \varphi &= \hat{x}(\hat{p}\varphi) - \hat{p}(\hat{x}\varphi) = x \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi \right) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\varphi) = \\ &= -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\varphi + i\hbar\varphi + i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\varphi = i\hbar\varphi. \end{aligned} \quad (6.2)$$

La importancia de esta identidad,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

reside en su interpretación física, ya que es una formulación analítica del principio de incertidumbre de Heisenberg. Este principio representa una de las más conocidas diferencias entre la mecánica clásica de Newton y la mecánica cuántica y establece que es imposible que se puedan conocer al mismo tiempo y con precisión arbitraria ciertos pares de observables físicos. En términos analíticos se dice que dos observables físicos pueden ser conocidos con precisión arbitraria cuando sus respectivos operadores conmutan. Observando que \hat{x} y \hat{p} no conmutan, se concluye que en la mecánica cuántica no se pueden conocer al mismo tiempo la posición y el momento de una partícula con exactitud arbitraria.

Surge ahora en el modelo fraccionario para la ecuación de Schrödinger aquí presentado una pregunta similar. ¿Verifican los operadores aquí construidos

las mismas propiedades? En particular, nos interesa estudiar el comportamiento del conmutador de los operadores de posición y momento fraccionarios,

$$\hat{x}_\alpha = \text{signo}(x) |x|^\alpha$$

y

$$\hat{p}_\alpha = -i\hbar^\alpha {}_0^C D_x^\alpha.$$

Para simplificar la notación, nos concentraremos en $x \in \mathbb{R}^+$. Los resultados para $x \in \mathbb{R}^-$ son análogos. Se tiene

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha] \varphi = \hat{x}_\alpha (\hat{p}_\alpha \varphi) - \hat{p}_\alpha (\hat{x}_\alpha \varphi) = x^\alpha (-i\hbar^\alpha {}_0^C D_x^\alpha \varphi) + i\hbar^\alpha {}_0^C D_x^\alpha (x^\alpha \varphi).$$

Recordando ahora la versión fraccionaria de la regla de la derivada del producto,

$$\begin{aligned} {}_a^C D_s^\alpha [fg](s) &= \frac{(s-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(a)(f(s) - f(a)) + ({}_a^C D_s^\alpha g(s))f(s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_a I_s^{k-\alpha} g(s)) {}_a^C D_s^\alpha f(s), \end{aligned}$$

con $\alpha \in (0, 1)$ y poniendo $f(x) = x^\alpha$ y $g(x) = \varphi(x)$, obtenemos

$${}_0^C D_x^\alpha (x\varphi) = \frac{\varphi(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + x^\alpha {}_0^C D_x^\alpha \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_0 I_x^{k-\alpha} \varphi(x)) {}_0^C D_x^k x^\alpha.$$

Para el conmutador $[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha]$ obtenemos

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha] \varphi = \frac{i\hbar^\alpha \varphi(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + i\hbar^\alpha {}_0^C D_x^k x^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_0 I_x^{k-\alpha} \varphi(x)),$$

o en forma general

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha] = \frac{i\hbar^\alpha \delta}{\Gamma(1-\alpha)} + i\hbar^\alpha {}_0^C D_x^k x^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_0 I_x^{k-\alpha}),$$

donde nuevamente δ es la distribución δ de Dirac centrada en 0. Observamos que el resultado claramente no es una constante no nula, que era el resultado deseado.

El origen de este resultado adverso se halla en la regla fraccionaria de la derivada del producto. En (6.2), la regla de la derivada del producto clásica lleva a la simplificación de la ecuación por la cancelación de los términos no deseados, mientras que en el caso fraccionario, esta regla nos genera una serie infinita de términos adicionales.

Notemos aquí también que si bien en el caso entero la regla de derivada del

producto y la fórmula de integración por partes van de la mano ya que una se obtiene a partir de la otra, esto no es el caso en sus versiones fraccionarias. Esto se debe a que la derivada fraccionaria de Caputo no es un operador inverso a la integral usual, tal como lo es la derivada clásica.

6.3. La derivada fraccionaria de Caputo no verifica la fórmula de integración por partes clásica

En la primera subsección de este capítulo hemos mostrado las graves implicancias que tiene en el contexto teórico de la mecánica cuántica que la derivada de Caputo no sea un operador autoadjunto. Tal como hemos visto, esto surge de la fórmula de integración por partes (6.1) que verifica esta derivada fraccionaria. Sin embargo, las desventajas de esta fórmula no son solamente teóricas, sino también prácticas. Con el fin de visualizar esto, presentaremos a modo ilustrativo un problema variacional fraccionario y su resolución. El mismo es una versión generalizada del problema variacional

$$\begin{cases} J(y) = \int_0^1 [y']^2(x) dx \rightarrow \min \\ I(y) = \int_0^1 [y](x) dx = 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

cuya solución viene dada por $y(x) = -6x^2 + 6x$ y surge de resolver la ecuación de Euler-Lagrange

$$-\lambda + 2y''(x) = 0,$$

con las tres condiciones que impone el problema (6.3). En el caso fraccionario tenemos el siguiente problema análogo, que fue estudiado y resuelto en un trabajo de colaboración con M. Barrios y G. Rejero [7].

Ejemplo 6.1. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} J(y) = \int_0^1 \left[({}_0^C D_x^\alpha y)^2(x) \right] dx \rightarrow \min \\ I(y) = \int_0^1 [y(x)] dx = 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Para resolver este problema, consideramos el teorema presentado en [3].

Teorema 6.2. Consideremos el problema de hallar $y \in {}_a^{\alpha}E_b^{\beta}$ que verifique las siguientes condiciones.

$$\begin{cases} J(y) = \int_a^b L(x, y, {}_a^C D_x^{\alpha} y, {}_x^C D_b^{\beta} y) dx \rightarrow \max/\min \\ I(y) = \int_a^b G(x, y, {}_a^C D_x^{\alpha} y, {}_x^C D_b^{\beta} y) dx = c \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

donde L es un Lagrangiano suficientemente bueno, c constante y

$${}_a^{\alpha}E_b^{\beta} = \left\{ y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : {}_a^C D_x^{\alpha} y, {}_x^C D_b^{\beta} y \in \mathbb{C}([a, b]) \right\}.$$

Si y maximiza o minimiza J sobre ${}_a^{\alpha}E_b^{\beta}$ sujeto a la restricción $I(y) = c$, entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que y satisface la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria dada por

$$\frac{\partial F}{\partial y} + {}_x^{RL} D_b^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial {}_a^C D_x^{\alpha} y} + {}_a^{RL} D_x^{\beta} \frac{\partial F}{\partial {}_x^C D_b^{\beta} y} = 0$$

con $F = L - \lambda G$.

Entonces en el ejemplo 6.1 $F = {}_0^C D_x^{\alpha} y^2(x) - \lambda y(x)$ y la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria para este problema viene dada por

$${}_x^C D_1^{\alpha} [{}_0^C D_x^{\alpha} y] (x) = \frac{\lambda}{2}.$$

Teniendo en cuenta que

$${}_x^C D_1^{\alpha} [(1-x)^{\beta}] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} (1-x)^{\beta-\alpha},$$

concluimos

$${}_0^C D_x^{\alpha} y(x) = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} (1-x)^{\alpha} + c_1,$$

que podemos reformular como

$$\frac{\lambda}{2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} (1-x)^{\alpha} + c_1 = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha-j)}{n!} x^n + c_1.$$

Considerando

$${}_0^C D_x^{\alpha} [x^{\beta}] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha},$$

6. LIMITACIONES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO

obtenemos la solución

$$y(x) = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{n! \Gamma(\alpha-n+1)} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+\alpha)} x^{n+\alpha} + c_1 x^\alpha + c_2$$

$$= \frac{\lambda}{2} \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)^2} {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) + c_1 x^\alpha + c_2,$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de parámetros $1, -\alpha$ y $1+\alpha$. Teniendo en cuenta ahora que $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ y $I(y) = \int_0^1 [y(x)] dx = 1$ obtenemos

$$y(x) = \frac{12x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)^2} {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) - \frac{12\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+1)} x^\alpha,$$

la cual es la solución a nuestro problema. Haciendo el límite cuando $\alpha \rightarrow 1$, se obtiene inmediatamente que puntualmente

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} y(x) = -6x^2 + 6x,$$

que era la solución al problema entero (6.3).

Observamos que un problema de suma simpleza como el del ejemplo aquí presentado, diseñado precisamente para que sea fácil de resolver, posee una cierta complejidad que queda en absoluta desproporción si se la compara con su problema análogo clásico. En lo concreto, esto se debe a la manifestación de las derivadas fraccionarias de Caputo tanto por izquierda como por derecha en la ecuación de Euler-Lagrange.

Cabe destacar aquí también que al elevar la complejidad de los problemas levemente, la factibilidad de obtener soluciones exactas a los problemas disminuye drásticamente. En todo caso, el desarrollo para obtener soluciones a estos problemas suele carecer de un rigor matemático absoluto (ver por ejemplo [6]).

7. Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado diversos problemas de Cauchy para la Ecuación de Difusión Fraccionaria. Primero estudiamos el problema unidimensional de orden $\alpha \in (0, 2)$ con $x \in \mathbb{R}$, para luego generalizarlo a un problema multidimensional a un problema de orden $\alpha > 0$ y a un problema con $x \in \mathbb{R}^+$. En todos los casos probamos que las funciones halladas eran, efectivamente, las soluciones a los problemas planteados y obtuvimos resultados adicionales de las soluciones obtenidas, entre las cuales se destacan las cotas para las normas $L^p(\mathbb{R})$ y la prueba de la continuidad de la solución obtenida con respecto al orden de derivación α .

Luego hemos construido mediante un argumento heurístico una Ecuación de Schrödinger Fraccionaria dependiente del tiempo y hemos estudiado el comportamiento de su solución para tres problemas físicos básicos: la partícula libre, el problema de pozo infinito y el problema del pozo finito.

Finalizamos la tesis con una serie de observaciones acerca de ciertas limitaciones que presenta la derivada fraccionaria de Caputo, haciendo especial énfasis en la falta de una regla de integración por partes útil y en las desventajas que esto trae tanto a nivel teórico como a nivel práctico.

Como comentario final en este contexto, es apropiado mencionar una conversación que tuvimos con Yury Luchko, destacado especialista en el ámbito del análisis fraccionario, acerca de este asunto, en el cual confirma las observaciones acerca de la necesidad de un operador de diferenciación fraccionario que sea autoadjunto: *Of course, you are right and the Caputo derivative is not self adjoint. And the right question is [...] how to define another fractional derivative that is self-adjoint* (Por supuesto es verdad que la derivada de Caputo no es autoadjunta. Y la pregunta correcta aquí es cómo definir otra derivada fraccionaria que si lo sea. Yury Luchko, 15/05/2018).

A partir de esto, presentamos las siguientes sugerencias para trabajos a futuro:

- Estudiar una Ecuación de Difusión Fraccionaria en la cual se considera el operador ${}^C D_t^\alpha {}^C D_t^\alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$ con respecto a la variable temporal en vez de la derivada fraccionaria de Caputo ${}^C D_t^\alpha$ con $\alpha \in (1, 2)$. Comparar resultados.

7. CONCLUSIONES

- Desarrollar métodos numéricos para ecuaciones diferenciales fraccionarias parabólicas y ponerlos a prueba con los resultados exactos obtenidos para la Ecuación de Difusión Fraccionaria. En [9], [14], [34] y [44] pueden encontrarse métodos numéricos para este propósito.
- Profundizar el estudio de la Ecuación de Schrödinger Fraccionaria dependiente del tiempo y sus implicancias físicas. Desarrollar las herramientas necesarias para estudiar problemas más complejos, siendo el oscilador armónico el de mayor interés. Estudiar el comportamiento de las soluciones a esta ecuación en el marco de la teoría de resonancias.
- En el contexto físico, estudiar posibles interpretaciones físicas del centro de derivación a del operador ${}_a^*D_x^\alpha$.
- Analizar qué implicancias tiene que los operadores fraccionarios en el contexto mecánico cuántico no sean autoadjunto. Existen circunstancias en las cuales operadores no autoadjuntos pueden ser utilizados en el marco de la mecánica cuántica, ver [47].
- Desarrollar un nuevo concepto de derivada fraccionaria que interpole la derivada clásica de manera similar a la derivada fraccionaria de Caputo, pero que sí verifique la fórmula de integración por partes para posibilitar que sea un operador autoadjunto. A raíz de la experiencia realizada en el capítulo 5, donde fue considerada una reiterada aplicación de la derivada de Caputo con respecto al espacio y no una aplicación única de orden mayor, se sugiere una definición de derivada fraccionaria de orden α con $\alpha \in (0, 1)$ únicamente.

Finalizamos con una frase que consideramos resume perfectamente el valor actual de la derivada fraccionaria de Caputo y que refleja las observaciones realizadas durante esta tesis.

La derivada de Caputo es la peor definición de derivada fraccionaria que poseemos, excepto por todas las otras formas que han sido definidas hasta ahora.

Referencias

- [1] N. H. Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. *Gesammelte mathematische Werke, Leipzig: Teubner* **1**, pp 11-.27, (1881).
- [2] A. Akkurt, M. E. Yildirim, H. Yildirim, A new Generalized Fractional Derivative and Integral, *Konuralp Journal of Mathematics*, Vol. **5**, No. 2, pp 248–259, (2017).
- [3] R. Almeida, R. A. Ferreira, D. F. M. Torres, Isoperimetric problems of the calculus of variations with fractional derivatives, arXiv:1105.2078v1 [math.OA] 11 May 2011
- [4] V. Ambrosio, On the existence of periodic solutions for a fractional Schrödinger equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol **146**, pp 3767.-3775, (2018).
- [5] E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston (1964).
- [6] D. Baleanu, J. J. Trujillo, On exact solutions of a class of fractional Euler-Lagrange equations, arXiv:0708.1433v1 [math-ph] 10 Aug 2007
- [7] M. Barrios, G. F. Reyero, Ecuaciones de Euler-Lagrange para un Problema Isoperimétrico Fraccionario, *Proceedings of the VI Maci 2017*, ISSN:2314-3282, pp 90-93, (2017).
- [8] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space*, Oxford University Press, (1961).
- [9] M. Blasik, M. Klimek, Numerical solution of the one phase 1D fractional Stefan problem using the front fixing method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, DOI: 10.1002/mma.3292, (2014).
- [10] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Dunod, Paris (2005).
- [11] B. van Brunt, *The Calculus of Variations*, Springer, New York, (2004).
- [12] J. R. Cannon, *The One-Dimensional Heat Equation*, Cambridge University Press, (1984).
- [13] M. Caputo, Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent, *II. Geophys. J.R. Astr. Soc.* Vol. **13**, No. 5, pp 529–539, (1967).

7. CONCLUSIONES

- [14] W. Chen, L. Ye, H. Sun, Fractional diffusion equations by the Kansa method, *Computers and Mathematics with Applications* Vol. **59**, pp 1614–1620, (2010).
- [15] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Heidelberg (2004).
- [16] J.J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Distributions – Theory and Applications*, Birkhäuser (2010).
- [17] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type*, Birkhäuser, (2004).
- [18] D. N. Goos, R. Id Betan, On a Modified Fractional Schrödinger Equation and its Applications to Theory of Resonances, *Proceedings of the VI Maci 2017*, ISSN:2314-3282, pp 90-93, (2017).
- [19] D. N. Goos, G. F. Reyeró, An application of fractional analysis to the behaviour of viscoelastic media, *Proceedings of the V Maci 2015*, ISSN: 2314-3282, pp 65-68, (2015).
- [20] D. N. Goos, G. F. Reyeró, Mathematical analysis of a Cauchy problem for the time-fractional diffusion-wave equation with $\alpha \in (0, 2)$, *J Fourier Anal Appl*, DOI 10.1007/s00041-017-9527-9, (2017).
- [21] D. N. Goos, G. F. Reyeró, S. Roscani, E. Santillan Marcus, On the Initial-Boundary-Value Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation on the Real Positive Semiaxis, *International Journal of Differential Equations*, Vol. **2015**, Article ID 439419, 14 pages, (2015).
- [22] R. Gorenflo, J. Loutchko, Y. Luchko, Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}$ and its derivative, *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. **5**, No. 4, 491–518, (2002).
- [23] R. Gorenflo, Y. Luchko, F. Mainardi, Analytical properties and applications of the Wright function, *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. **2**, No. 4, 383–414, (1999).
- [24] P. Górká, H. Prado, J. Trujillo, The Time Fractional Schrödinger Equation on Hilbert Space, *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. **87**, Issue 1, pp 1–14, (2017).
- [25] J. W. Hanneken, D. M. Vaught, B. N. Narahari Achar, Enumeration of the Real Zeros of the MittagLeffler Function $E_{\alpha}(z)$, $1 < \alpha < 2$, *Advances in Fractional Calculus*, pp 15-26, (2007).

-
- [26] H.J. Haubold, A.M. Mathai, R.K. Saxena, Mittag-Leffler Functions and Their Applications, *J. Appl. Math.* **2011**, 298628, (2011).
- [27] F. Huang, F. Liu, The Space-Time Fractional Diffusion Equation with Caputo Derivatives, *J. Appl. Math. and Computing* Vol. **19**, No. 1-2, pp 179–190, (2005).
- [28] L. Junyi, X. Mingyu, Some exact solutions to Stefan problems with fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **351**, pp 536-542 (2009).
- [29] V. I. Kukulin, V. M. Krasnopolsky, J. Horáček, *Theory of Resonances Principles and Applications*, Kluwer Academic Publishers, (1988).
- [30] R. Rossato, M. K. Lenzi, L. R. Evangelista, E. K. Lenzi, Fractional diffusion equation in a confined region: surface effects and exact solutions, *Phys. Rev.* E76, 032102 (2007).
- [31] A. Liemert, A. Kienle, Fractional Schrödinger Equation in the Presence of the Linear Potential, *Mathematics*, Vol. **4**, No. 31; doi:10.3390/math4020031, (2016).
- [32] J. Liouville, Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, *Journal de l'école Polytechnique* Vol. **13**, pp 71–162, (1832).
- [33] J. Liu, M. Xu, Some exact solutions to Stefan problems with fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. **351**, No. 2, pp. 536542, (2009).
- [34] F. Liu, P. Zhuang, V. Anh, I. Turner, K. Burrage, Stability and convergence of the difference methods for the spacetime fractional advection-diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation* Vol. 191, pp 12-20, (2007).
- [35] Y. Luchko, Asymptotics of Zeros of the Wright Function, *Journal for Analysis and its Applications*, Vol. **19**, No. 1, pp 1-12, (2000).
- [36] Y. Luchko, Fractional Schrödinger equation for a particle moving in a potential well, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **54**, Issue 1, DOI <https://doi.org/10.1063/1.4777472>, (2013).
- [37] Y. Luchko, Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. **14**(1), pp 110-124 (2011).
- [38] Y. Luchko, M. Rivero, J. Trujillo, M. Velasco, Fractional models, non-locality, and complex systems, *Comput. Math. Appl.* Vol. **59**(3), pp 1048-1056, (2010).

7. CONCLUSIONES

- [39] F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*, Imperial Collage Press, London (2010).
- [40] F. Mainardi, A. Mura and G. Pagnini, The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey, *Int. J. Diff. Eq.* **2010**, Article ID 104505, 29 pages, (2010).
- [41] F. Mainardi, G. Pagnini, The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation, *Appl. Math. Comp.* Vol. **141**, No. 1, pp 51–62, (2002).
- [42] F. Mainardi and M. Tomirotti, On a special function arising in the time fractional diffusion-wave equation, *Transform Methods and Special Functions*. Editors: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova, Science Culture Technology, Singapore, pp 171–183, (1995).
- [43] A. B. Malinowska, T. Odziejewicz, D. F. M. Torres, *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations*, Springer, Heidelberg, (2015).
- [44] D. A. Murio, Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations, *Computers and Mathematics with Applications* Vol. **56**, pp 11381145, (2008).
- [45] E. Nane, Fractional Cauchy problems on bounded domains: survey of recent results, *Fract. Dyn. Control*, pp 185-198 (2011).
- [46] B. N. Narahari Achar, B. T. Yale, J. Hanneken, Time Fractional Schrödinger Equation Revisited, *Advances in Mathematical Physics*, Vol. **2013**, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/290216>, 11 pages, (2013).
- [47] R. Novak, *Mathematical analysis of quantum mechanics with non-self-adjoint operators. Functional Analysis*, Université de Nantes; Czech Technical University in Prague, (2018).
- [48] M. D. Ortigueira, F. Coito, From Differences to Derivatives, *Frac. Calc. Appl. Anal.* Vol. **7**, No. 4, pp 459–471,(2004).
- [49] J. Peiffer, A. Dahan-Dalmenico, *Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik*, Birkhäuser, Basel, (1994).
- [50] J. Peng, K. Li, A note on property of the Mittag-Leffler function, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 370, pp 635-638, (2010).
- [51] Y. Povstenko, Fractional heat conduction in a semi-infinite composite body, *Commun. Appl. Ind. Math.*, e-482 (2014).

- [52] Y. Povstenko, Signaling problem for the time-fractional diffusion wave equation in a half-plane, *Frac. Calc. Appl. Anal.* Vol. **11**, No .3, pp 329–352, (2008).
- [53] E. Rebhan, *Theoretische Physik: Quantenmechanik*, Spektrum Akademischer Verlag, (2008). H. P. Schieck, Nuclear Reactions, Springer-Verlag Berlin Heidelber, (2014).
- [54] B. Riemann, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation (1847), *Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, Cambridge Library Collection - Mathematics, pp 331–344, (2013).
- [55] R. K. Saxena, R. Saxena, S. L. Kalla, Solution of space-time fractional Schrödinger equation occurring in quantum mechanics, *Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass* Vol. **13**, No. 2, pp 177–190, (2010).
- [56] S. Roscani, E. Santillan Marcus, Two Equivalent Stefans's Problems for the Time Fractional Diffusion Equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. **16**, No. 4, pp 802–815, (2013).
- [57] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, Prentice Hall, (2010).
- [58] P. Rozmej, B. Bandrowski, On Fractional Schrödinger Equation, *Computational Methods in Science and Technology* Vol.**16** (2), pp 191–194, (2010).
- [59] W. R. Schneider, W. Wyss, Fractional diffusion and wave equations, *J.Math. Phys.* Vol. **134**(30), pp 129139, (1989).
- [60] A. M. A. El-Sayed, M. Gaber, On the Finite Caputo and Finite Riesz Derivatives, *Electronic Journal of Theoretical Physics* Vol. **3**, No. 12, pp 81–95, (2006).
- [61] B. Stankovic, On the function of E. M. Wright, *Publications de l'Institute Mathématique*, Vol. **10**(24), pp 113–124, (1970).
- [62] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: an Introduction*, Princeton University Press (2003).
- [63] V. E. Tarasov, Partial fractional derivatives of Riesz type and nonlinear fractional differential equations, *Nonlinear Dyn* 86:17451759 DOI 10.1007/s11071-016-2991-y, (2016).
- [64] E. Wright, The generalized Bessel Function of order greater than one, *Quart. J. Math. Oxford series* **11**, pp 36–48, (1940).

7. CONCLUSIONES

- [65] M. Yavuz, N. Özdemir, European Vanilla Option Pricing Model of Fractional Order without Singular Kernel, *Fractal Fract.* **2018**, 2, DOI:10.3390/fractalfract2010003, 11 pages, (2018).
- [66] N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1988).