Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática
Profesorado en Matemática
Proyectos Innovadores en Educación Matemática

Proyecto
Beneficios del empleo de GeoGebra para la enseñanza de la definición formal de límite en Análisis Matemático I al inicio de carreras de Ciencias Exactas y Naturales

Lara Valeri

Diciembre 2021

Beneficios del empleo de GeoGebra para la enseñanza de la definición formal de límite en Análisis Matemático I al inicio de carreras de Ciencias Exactas y Naturales

Benefits of GeoGebra for the teaching of the formal definition of limit in Mathematical Analysis I at the beginning of the careers of Exact and Natural Sciences

Lara Valeri
laravaleri15@gmail.com

Resumen

Esta investigación surge de inquietudes sobre la enseñanza de límites en la materia Análisis Matemático I al inicio de las carreras de Ciencias Exactas y Naturales. La definición del concepto mencionado suele ser un tema que tiene cierta dificultad por la formalidad y simbología propia de la misma. En este marco, el propósito del presente estudio es analizar cómo la utilización de distintas representaciones contribuye a facilitar la enseñanza de la definición formal de límite, y analizar cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra. La información ha sido obtenida a partir de la observación de clases, donde se dictó el tema en cuestión y material audiovisual que surgió de las mismas. Los hallazgos parecen indicar que la utilización de diferentes registros de representación junto con el software GeoGebra contribuyen a potenciar la enseñanza del concepto mencionado.

Palabras clave

Límite. GeoGebra. Teoría de representaciones.

Abstract

This research arises from concerns about the teaching of limits in the subject Mathematical Analysis I at the beginning of the careers of Exact and Natural Sciences. The definition of the aforementioned concept is usually a difficult topic due to its formality and symbology. In this framework, the purpose of this study is to analyze how the use of different representations contributes to facilitate the teaching of the formal definition of limits, and to analyze the benefits of using GeoGebra. The information has been obtained from the observation of classes where this topic was taught and audiovisual material which emerged from the lessons. The findings seem to indicate that the use of different representation registers together with the GeoGebra software contribute to enhance the teaching of the concept in question.

Keywords

Limit. GeoGebra. Theory of representations.

1. Presentación

En la presente sección del trabajo se aborda cuál es el campo de estudio del Proyecto Innovador en Educación Matemática. La misma se compone de cuatro apartados, en el primero de ellos se presenta la problemática, seguidamente los interrogantes que surgen a partir de ella, en tercer lugar, los objetivos de la investigación y, por último, se realiza un recorrido sobre cuál es el estado del arte en torno al tema en estudio.

1.1. Problemática

Esta línea de trabajo surgió a partir de analizar distintas problemáticas que se dan en la enseñanza de la matemática en los primeros años del nivel universitario, donde se ha mencionado que una posible línea en la cual indagar abarca las dificultades y errores habituales en el aprendizaje de la Matemática. Se puede observar que comprende una temática muy amplia, ya que probablemente en muchos temas del área en cuestión haya errores o dificultades en mayor o menor medida. Entonces, cabe preguntarse, a partir de una mirada retrospectiva sobre experiencias previas, si hay algún tema en el que los estudiantes presentan mayor inconveniente. La respuesta a esta pregunta fue la dificultad que se da al momento de enseñar y aprender la definición formal de límite. Esto ha surgido a partir de experiencias previas como estudiante de una materia llamada Residencia de cuarto año del Profesorado en Matemática, donde se realizaron mis prácticas en la materia Análisis Matemático I del Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.

La experiencia de prácticas se desarrolló de manera virtual; los docentes, en general, subían videos con explicaciones de los distintos temas que los estudiantes tenían que ver y se realizaban algunos encuentros sincrónicos. A partir de estos videos, lo que llamó particularmente la atención fue la manera en que los docentes abordan el tema, mediante la utilización del Software GeoGebra, ya que les aportaba mucho dinamismo a las explicaciones. Se puede observar que la definición formal de límite es un tema que tiene cierta complejidad, ya que involucra mucha simbología específica y quizás un tanto abstracta para estudiantes que, en este caso, es la primera materia con la que se encuentran en el ámbito del Cálculo Matemático, pues la materia mencionada se encuentra en el primer cuatrimestre de primer año.

Por otro lado, al corregir producciones de los estudiantes donde realizaban ejercicios del presente tema se ha podido evidenciar, en general, buenos resultados, que quizás se deban a esta forma de abordar las explicaciones. A partir de la propia biografía escolar en la presencialidad, este tema no se explicaba utilizando GeoGebra, y quizás, si esto es realmente beneficioso para los estudiantes, podría ser tenido en cuenta en un futuro al volver a la presencialidad.

En las correcciones mencionadas de este tema en particular, es decir, de ejercicios donde los estudiantes tenían que aplicar la definición formal de límite, se han observado ciertas dificultades. De hecho, al dialogar con los otros docentes que también corregían estos trabajos, notaban ciertos inconvenientes en los ejercicios mencionados.

Se considera, entonces, que el tema o la problemática a tratar es: ¿Cómo la utilización del Software GeoGebra contribuye a facilitar la enseñanza de la definición formal de límite? La respuesta a esta pregunta puede estar relacionada con abordar el desarrollo del tema en cuestión a través de distintas representaciones del mismo, es decir, mediante representaciones gráficas, coloquiales y simbólicas.

En cuanto al nivel o contexto en el cual se enfoca la investigación, este trabajo se realiza en el mismo ámbito donde ha surgido, es decir, en la materia Análisis Matemático I de primer año de la FCEIA que corresponde a los distintos Profesorados y Licenciaturas que en ella se dictan.

Por último, este trabajo está mayormente basado en la enseñanza, pero también tiene la intención de atender a las dificultades que se dan en el aprendizaje.

1.2. Interrogantes

El objetivo de esta investigación es poder analizar los beneficios de implementar ciertos recursos en la enseñanza de la definición formal de límite en la materia Análisis Matemático I de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales. A partir de la problemática en cuestión surgen algunos interrogantes a los que se busca dar respuesta a través de este estudio:

¿Cómo la utilización de distintas representaciones contribuye a facilitar y potenciar la enseñanza de la definición formal de límite? Y en este marco, ¿cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra?

1.3. Objetivos

Objetivo general

- Estudiar cuáles son los beneficios de distintas propuestas para abordar la enseñanza de la definición formal de límite.

Objetivos específicos

- Analizar la contribución de diversidad de representaciones para la enseñanza de la definición formal de límite.
- Reconocer los beneficios que al respecto otorga el uso del software GeoGebra.

1.4. Antecedentes

En el presente apartado del trabajo se investiga acerca de los antecedentes que hay sobre el tema en estudio. En primer lugar, una serie de autores han realizado una investigación acerca del estado de arte del concepto de límite, retomando muchos otros autores. En segundo lugar, se describen brevemente algunos trabajos donde se llevaron a cabo propuestas del aprendizaje del concepto en cuestión mediante la utilización de GeoGebra y, por último, se comenta una propuesta para la mejora del aprendizaje.

Límite de una función

Trujillo et al (2017) abordan una investigación que se enfoca en la descripción de los estudios realizados sobre del tema en cuestión, mediante la recopilación de información enfocada en el estado y los avances que el concepto ha tenido en un período de tiempo comprendido entre el 2000-2017.

Los autores mencionan que el cálculo diferencial es una de las asignaturas de matemáticas con un nivel de dificultad muy alto, ya que implica procesos mentales superiores y requiere el dominio de los pre-saberes que le anteceden. Por otro lado, valoran la importancia de estudiar en profundidad este tema puesto que, si los estudiantes no formalizan su saber cognitivo, difícilmente van a comprender los temas que le siguen, tales como continuidad, derivada e integral.

Para comenzar, identifican cuáles son las dificultades con respecto a este tema y mencionan, primero, que la mayoría de los docentes no tiene en cuenta las diferentes representaciones, en las que se puede mostrar el límite de una función. En segundo lugar, consideran que la dificultad en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto se debe a las diferentes concepciones históricas que han surgido a través del tiempo, donde las concepciones erróneas son el resultado de obstáculos epistemológicos presentes en cada época, y que la comunidad científica ha intentado resolver. Por último, en cuanto al conocimiento pedagógico del contenido del concepto, remarcan que para enseñar no basta con saber contenidos y tener un saber pedagógico general, sino que indican la necesidad de un conocimiento pedagógico específico acerca de dicho contenido por parte del docente, con el objetivo de disminuir las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Para este estudio, los investigadores tienen en cuenta diferentes bases de datos, de los cuales se eligen los documentos relacionados con el concepto del límite y en segunda instancia se analizan para formular sugerencias sobre la orientación pedagógica de las investigaciones.

Luego del análisis de distintos documentos, Prada-Núñez et al (2017) concluyen que la mayoría de las investigaciones referentes al tema de límites tienen en cuenta la aplicación de secuencias didácticas en base a diferentes teorías como la de Duval (teoría de representaciones semióticas), Brousseau (teoría de los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemática), Sierpinska (teoría de los actos de comprensión), Thompson (concepción de estructura mental), Weierstrass (conceptualización métrica de límite) y Blázquez (conceptualización como aproximación óptima de límite). No obstante, los autores mencionan que, en el momento de abordar el tema, lo hacen desde una perspectiva abstracta, presentan el contenido de forma algebraica y gráfica, y no aplicada en un contexto. A partir de esto proponen para futuras investigaciones que se enfoquen más en el carácter significativo del tema, ya que consideran que este factor incide en la formalización del concepto y en la actitud del estudiante por aprender el tema.

Además, también se puede observar que las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, es decir, se enfocan más en el aprendizaje que en la enseñanza, y proponen un equilibrio en estos dos aspectos ya que van de la mano.

GeoGebra y límites

Por un lado, Rodríguez et al (2020), proponen el tratamiento de las formas indeterminadas del límite a partir de la utilización del GeoGebra con fines heurísticos y de experimentación, en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería Industrial.

Los autores mencionan que en Análisis Matemático el límite es su principal concepto, y que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del mismo los conflictos y las dificultades en la comprensión se hacen presentes desde su definición. Tales dificultades van desde la relación entre infinito potencial e infinito actual, hasta las propias de su enseñanza y aprendizaje.

La investigación se centra en las formas indeterminadas del límite (FIL) y el uso de GeoGebra, como recurso heurístico en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se sustenta en la representación gráfica de funciones y las operaciones (aritméticas y exponenciales) que entre estas generan las llamadas formas indeterminadas. Graficar funciones en la mayoría de los casos ocupa tiempo, espacio y complejiza el proceso de análisis relacionado con funciones en algunos casos, no siendo así con el uso de asistentes matemáticos. Los autores aluden que los beneficios de GeoGebra son producir inmediatez en las representaciones gráficas, al mismo tiempo que permitir realizar operaciones entre las representaciones algebraicas de dichas funciones. Es por ello que con la aplicación de la propuesta GeoGebra buscan, a través de las tareas elaboradas, la apropiación por parte de los estudiantes del concepto de indeterminación relacionado con las FIL.

Antes de comenzar la investigación, los docentes detectaron dificultades en el aprendizaje de los límites en general y particularmente las FIL. Los estudiantes, por lo general, no comprenden el significado de “indeterminación” y tienen tendencia a operar algebraicamente según las propiedades de los límites. La metodología implementada consiste en un pre-test, una encuesta, ejercicios de carácter heurístico con GeoGebra, ejercicios independientes a lápiz y papel con GeoGebra para su comprobación y post-test.

En cuanto a los resultados, en la actividad que se realiza en el aula con GeoGebra como medio de enseñanza se observa una buena participación de los estudiantes, quienes aportan ideas y mejoran dificultades relacionadas con el cálculo de límites anteriores a la introducción de las formas indeterminadas. Por otro lado, la comparación de los resultados docentes, de pruebas pedagógicas realizadas antes y después de aplicada la propuesta, constata una mejora en la comprensión de las formas indeterminadas del límite y en el cálculo de límites en general.

Como conclusión los autores mencionan que el uso de representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de los mismos. Consideran que la aplicación de los asistentes matemáticos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje resulta fundamental en el trabajo con las representaciones por su inmediatez y diferentes usos didácticos que sustentan.

El asistente matemático GeoGebra se utiliza en la propuesta como medio de enseñanza en el proceso heurístico que ayuda a la comprensión de las formas indeterminadas del límite y como herramienta de comprobación en ejercicios de cálculo de límites donde dichas formas pueden estar presentes.

Otros autores que abordan un estudio con respecto al concepto de límite son Gazzola et al (2011), quienes presentan resultados parciales, de un estudio realizado con alumnos del último año de una escuela secundaria pública argentina, en el ámbito del cálculo. El objetivo es analizar sus producciones en el estudio del límite funcional, con la implementación de netbooks y el uso del software GeoGebra. Los autores consideran que la utilización de este tipo de herramientas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, entre otros aspectos, permite acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones y posibilita a los estudiantes a trabajar individualmente, comprobando sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas.

En cuanto a resultados, los investigadores evidencian que, luego de realizar actividades con GeoGebra los estudiantes podrían institucionalizar los conceptos, como la definición de límite, los límites laterales, y que para que el límite exista estos últimos tienen que ser iguales.

Como conclusión, se considera que esta propuesta permite a los estudiantes participar en forma activa en la construcción del conocimiento, a partir de explorar diferentes ejemplos y corroborar los resultados obtenidos mediante resoluciones de lápiz y papel. Por otro lado, los autores creen que, a pesar de que los estudiantes cuentan con el software GeoGebra a partir de la disponibilidad de un ordenador para cada alumno en el marco del Plan Conectar-Igualdad, el estudio requirió de un gran esfuerzo por parte del investigador, para que se familiarizaran y aprovecharan las potencialidades de dicha herramienta. El investigador tuvo que lidiar con la constante demanda de los estudiantes de no aceptar momentos de incertidumbre y ser ellos mismos los que construyan los conocimientos a institucionalizar.

Por otro lado, proponen investigaciones futuras que se orienten a modificar la secuencia didáctica propuesta, a la luz de los resultados obtenidos en esta primera implementación, para ser desarrollado en otros contextos áulicos y lograr una profundización en el estudio de los límites.

Otras propuestas

Romiti et al (2014) realizan una propuesta de mejora para la enseñanza de este concepto. El trabajo diario y sus resultados han llevado a las autoras a reflexionar sobre lo complejo que resulta, por una parte, enseñar y, por otra, comprender y apropiarse del concepto de límite, que se desarrolla en la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería.

Las autoras, junto con otros docentes, identifican algunas dificultades a partir de sus experiencias; entre ellas mencionan desconocimiento de ciertos símbolos matemáticos, dificultades para justificar el valor de verdad de las proposiciones matemáticas, preferencia por actividades rutinarias. Antes de comenzar con el tema en estudio, las investigadoras observan que el registro gráfico es en el que mejor se desenvuelven los alumnos, mientras que el desempeño en el registro simbólico no fue bueno, y aún en menor medida el coloquial.

A partir de estas dificultades realizan una propuesta de mejora para la práctica de ejercitación para alumnos de la asignatura Análisis Matemático I. La misma incluye actividades que involucran los tres tipos de registros mencionados anteriormente y el pasaje de uno a otro.

Como conclusión de este estudio consideran propicio incorporar a la cartilla existente otras actividades para confeccionar una propuesta de práctica que atienda a los tres registros y a las conversiones entre pares de registros de una manera que sea lo más equitativa posible.

Otra propuesta que va más allá del uso de GeoGebra para la enseñanza del concepto de límite es la que realiza Gómez (2018). En su trabajo diseña una secuencia didáctica que tiene como objetivo favorecer la comprensión del concepto de límite de estudiantes universitarios mediante la geometría de fractales lineales.

El autor considera que las dificultades en torno al concepto de límite se justifican desde dos ámbitos esenciales, el primero tiene que ver con su importancia al introducir conceptos como continuidad, derivada e integral y, en segunda medida, que para los estudiantes es un concepto demasiado abstracto y que olvidan con facilidad.

Las actividades que Gómez (2018) propone fueron diseñadas con la intención de posibilitar en el aula las diversas concepciones asociadas al concepto del límite, que tienen que ver con el obstáculo epistemológico "tiende al infinito". Las actividades se enfocan en desarrollar por medio de las estructuras fractales el conjunto de obstáculos epistemológicos "tiende al infinito" con un breve recorrido histórico-epistemológico del concepto en cuestión.

Por otro lado, el autor resalta la importancia de incluir como pretexto las estructuras fractales, particularmente el uso de algunos fractales lineales que sean conocidos, ya que dentro de la geometría de los fractales se encuentra explícito el proceso al infinito.

Como conclusión de este trabajo, Gómez (2018) reflexiona acerca de que las estructuras fractales y las actividades planteadas permiten desarrollar con los estudiantes diversas confrontaciones en torno a la idea de infinito por medio de procesos geométricos intuitivos y por ende al concepto de límite. La estrategia didáctica posibilita ambientar en el aula las diferentes concepciones que se dieron a lo largo de la historia con relación al concepto de límite, a través de la vivencia y abordaje de las principales características del obstáculo epistemológico "tiende al infinito".

A modo de síntesis, en estos antecedentes, se puede observar que por lo general las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, es decir, se enfocan más en el aprendizaje que en la enseñanza. Entonces la innovación de este estudio radica en proponer un abordaje del tema desde el lado de la enseñanza procurando analizar cuáles son los beneficios de incorporar los tres distintos registros de representación: gráfico, simbólico y coloquial, equitativamente, y con el complemento de utilización de GeoGebra.

Algunos autores mencionan que el uso de representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de los mismos. Esto da lugar a preguntar: ¿cuáles son los beneficios de implementar las distintas representaciones en la enseñanza de la definición formal de límite?

Se puede concluir que la aplicación de los asistentes matemáticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es fundamental en el trabajo con las representaciones por su inmediatez y diferentes usos didácticos que sustentan. En particular, algunos estudios afirman que la utilización de GeoGebra permite que los estudiantes participen en forma activa en la construcción del conocimiento. La intención de esta investigación está centrada en analizar cuáles son los aspectos favorables de realizar las representaciones mencionadas mediante el empleo de GeoGebra.

En los antecedentes se menciona que, en general, al abordar el concepto en estudio, muchas veces se realiza desde una perspectiva abstracta, es decir, se presenta el contenido de forma algebraica y gráfica y no aplicada en un contexto. Esta propuesta tiene, entonces, como innovación enfocarse en el carácter significativo del tema ya que este influye en la actitud del estudiante para aprender el tema.

2. Marco teórico referencial

En esta sección del trabajo se exponen las bases teóricas en las que se enmarca esta investigación. Se compone de cuatro partes que desarrollan los conceptos fundamentales del presente estudio: Matemática Universitaria, Límite de una función, Recursos Educativos Abiertos y Teoría de Representaciones Semióticas de Reaymond Duval.

2.1. Matemática universitaria

Como ya se ha mencionado, este estudio se basa en la enseñanza del concepto de límite, contenido que se desarrolla en la asignatura Análisis Matemático I desarrollada en la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - UNR.

Según el programa de la asignatura, en este curso se trabaja con funciones de variable real, se definen rigurosamente los conceptos de límite funcional y de sucesiones, continuidad de funciones de variable real, y se completa con los elementos clásicos del Cálculo Diferencial.

Por otro lado, se menciona que el estudio de los temas se realiza con atención a toda la riqueza encerrada en los teoremas y en sus demostraciones, a partir de las cuales surgen diversos procedimientos de cálculo, con atención a las aplicaciones, mayormente en el área de la Física y de las Ciencias de la Computación. En el abordaje de las distintas unidades se realiza un repaso de los conocimientos adquiridos previamente y se incorporan nuevos contenidos, de manera alternada entre clases teóricas y prácticas.

La asignatura tiene como objetivo general familiarizar al estudiante con los conceptos y métodos básicos del cálculo diferencial de funciones de una variable. Para ello los objetivos principales son:

- Proveer al estudiante de un conjunto de técnicas del Análisis Matemático para ser utilizadas en la resolución de problemas.
- Capacitar al estudiante para resolver problemas de índole geométrico, físico u otros, con la selección del modelo diferencial adecuado y aplicación de los procedimientos de cálculo correspondientes al mismo.
- Desarrollar en el estudiante una capacidad que le permita afrontar nuevos problemas con cierto grado de autonomía.

- Desarrollar un espíritu crítico cuyo manejo será necesario en su posterior formación universitaria y profesional.

También, la asignatura, busca promover ciertas capacidades en los estudiantes, entre ellas: que los estudiantes manejan hábilmente las técnicas del Cálculo Diferencial de funciones de una variable, desarrollen capacidades de razonamiento lógico, desplieguen estrategias para interpretar, plantear y resolver problemas, con cierta autonomía, mediante la aplicación de los conceptos de función, límite, derivada y primitiva; que utilicen la herramienta computacional como recurso facilitador del cálculo y la representación gráfica, entre otras.

Por otro lado, en el programa se menciona que se utilizan distintas modalidades de enseñanza y de aprendizaje:

> Una modalidad con mayor protagonismo del docente quien, sobre la base del material bibliográfico establecido y en permanente interacción con los estudiantes, destaca la relevancia de los distintos contenidos, presenta definiciones, enuncia y/o prueba propiedades y analiza ejemplos que faciliten la comprensión y conceptualización. Otra modalidad con mayor protagonismo de los estudiantes, quienes trabajan de manera individual o grupal en la resolución de problemas y ejercicios propuestos.
>
> (…) Se pretende fomentar una lectura crítica de los estudiantes alimentando su intervención y su participación mediante la realización de trabajos prácticos que deberán ser entregados. Se fomentará la consulta de diferentes bibliografías y la utilización de distintos tipos de softwares para promover la utilización de las herramientas tecnológicas en el aula (computadoras personales, smartphones, etc.). En este contexto el docente adopta el rol de facilitador para la resolución de problemas; pero también actúa de observador y evaluador, detectando y ayudando a superar dificultades (p.4).

2.2. Límite de una función

En concordancia con lo que mencionan Trujillo et al (2017), el cálculo diferencial es una de las asignaturas de matemáticas con un nivel de dificultad muy alto. Estos autores consideran que esto se debe a que los conceptos que se desarrollan dentro de esta materia implican procesos mentales superiores que forman parte del análisis matemático; todo esto parece confirmarse en su objeto de estudio que consiste en saber cómo cambian las funciones cuando sus variables cambian.

Uno de los pre-saberes fundamentales es el concepto de límite y aquí radica la importancia de estudiar en profundidad este tema. Trujillo et al (2017) consideran que, si los estudiantes no formalizan su saber cognitivo, difícilmente van a comprender los temas que le siguen, tales como continuidad, derivada e integral.

El límite de una función tiene infinitas aplicaciones en muchas áreas; por ejemplo, los límites surgen cuando queremos encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto. La definición de este concepto que podemos encontrar en Stewart (2012), que es un libro muy utilizado en la enseñanza universitaria, es la siguiente:

> Supongamos que *f(x)* está definida cuando *x* está cerca del número *a*, entonces escribimos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, y decimos que "el límite de *f(x)*, cuando *x* tiende a *a* es igual a *L*", si podemos hacer que los valores de *f(x)* estén arbitrariamente cercanos a *L* (tan cercanos a *L* como queramos), tomando valores de *x* suficientemente cerca de *a* (por ambos lados de *a*), pero no iguales a *a*.

Esta definición se considera que es una definición no rigurosa; además, este mismo libro contiene lo que se llama "la definición formal de límite":

> Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a es L, y lo expresamos como
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que
>
> si $|x - a| \leqslant \delta$entonces $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

En la bibliografía menciona estas definiciones, que se encuentran acompañadas de tres gráficos como se puede observar en la Figura 1.

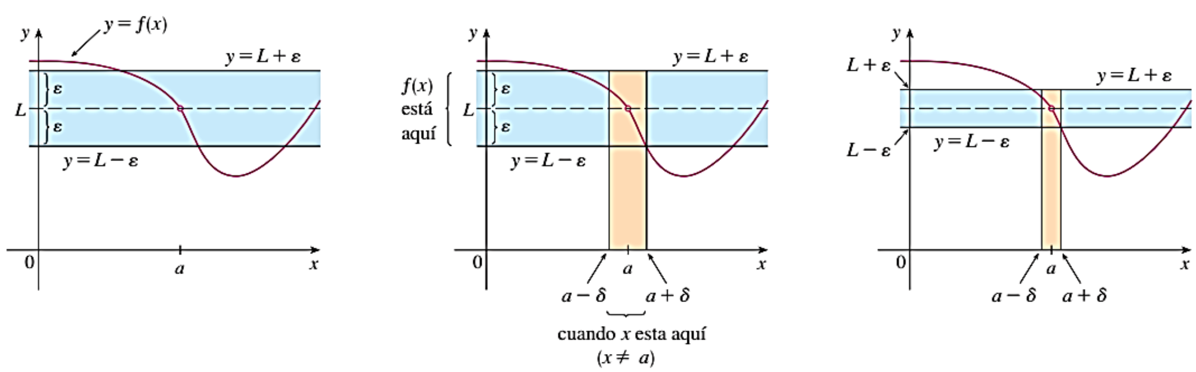

Figura 1. Gráficos que acompañan la definición de límite de una función en el libro Stewart (2012)

2.3. Recursos Educativos abiertos, objetos de aprendizaje y GeoGebra

La UNESCO (2013) define los recursos educativos abiertos (REA) como materiales didácticos, de aprendizaje o investigación que se encuentran en el dominio público o que se

publican con licencias de propiedad intelectual que facilitan su uso, adaptación y distribución gratuitos. Por otro lado, Wiley (2008) define los objetos de aprendizaje (OA) como cualquier recurso digital que puede ser utilizado para apoyar el aprendizaje. El uso de REA y OA presenta un potencial a explorar cuando se incorporan en el aula en busca de mejorar la práctica educativa en las diferentes áreas del saber dentro de la educación básica.
Trujillo et al (2015) mencionan que es necesaria la búsqueda de nuevas formas de mejoramiento de los procesos de enseñanza, donde la inclusión de las TIC y en especial la aplicación de REA presenta una oportunidad de progreso para el aprendizaje de los estudiantes.

¿Qué es GeoGebra?[1]

GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo, de código abierto libre y disponible para usos no comerciales. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan, así como también comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio, armoniza lo experimental y lo conceptual para plasmarlo en una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Por lo mencionado, se puede considerar a este software como un REA, ya que es de dominio público y gratuito. Además, al ser utilizado en la enseñanza y aprendizaje de distintos contenidos matemáticos, se encasilla dentro de la definición de objeto de aprendizaje. Es por esto que GeoGebra puede contribuir a favorecer la enseñanza del concepto de límite.

2.4. Teoría de representaciones semióticas

Se puede observar que la definición de límite de una función contiene diferentes representaciones. Un autor que habla de esto es Duval (2004; citado en Oviedo et al, 2012) quien considera que el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para

[1] ¿Qué es GeoGebra? https://www.geogebra.org/about.

el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Es por eso que enseñar matemáticas lleva a que estas actividades cognitivas requieran, además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

En forma general es posible dividir las representaciones en internas (privadas) y externas (visibles y observables públicamente), y considerar que estas últimas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos. En referencia al aprendizaje de la matemática, se establece que la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos y, recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas.

Oviedo et al (2012) mencionan que en matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótica utilizado.

Los registros de representación semiótica se clasifican según cuatro categorías que Duval (2004; citado en Cruzado y Flores, 2017) define del siguiente modo:

- *Registro en lengua natural o coloquial*: esta representación se da cuando se define un fenómeno o situación y se puede realizar de manera oral o escrita.
- *Registro figural*: este registro involucra esquemas, bosquejos, líneas y figuras geométricas.
- *Registro algebraico*: en este registro un objeto matemático se puede representar por medio de expresiones algebraicas.
- *Registro gráfico*: se usa para representar un objeto matemático con base en un sistema de coordenadas cartesianas.

Como se puede observar en la Figura 2, se dan tres tipos de representaciones: en forma coloquial, tiene una gran cantidad de simbología (registro algebraico) y están acompañadas de presentaciones gráficas.

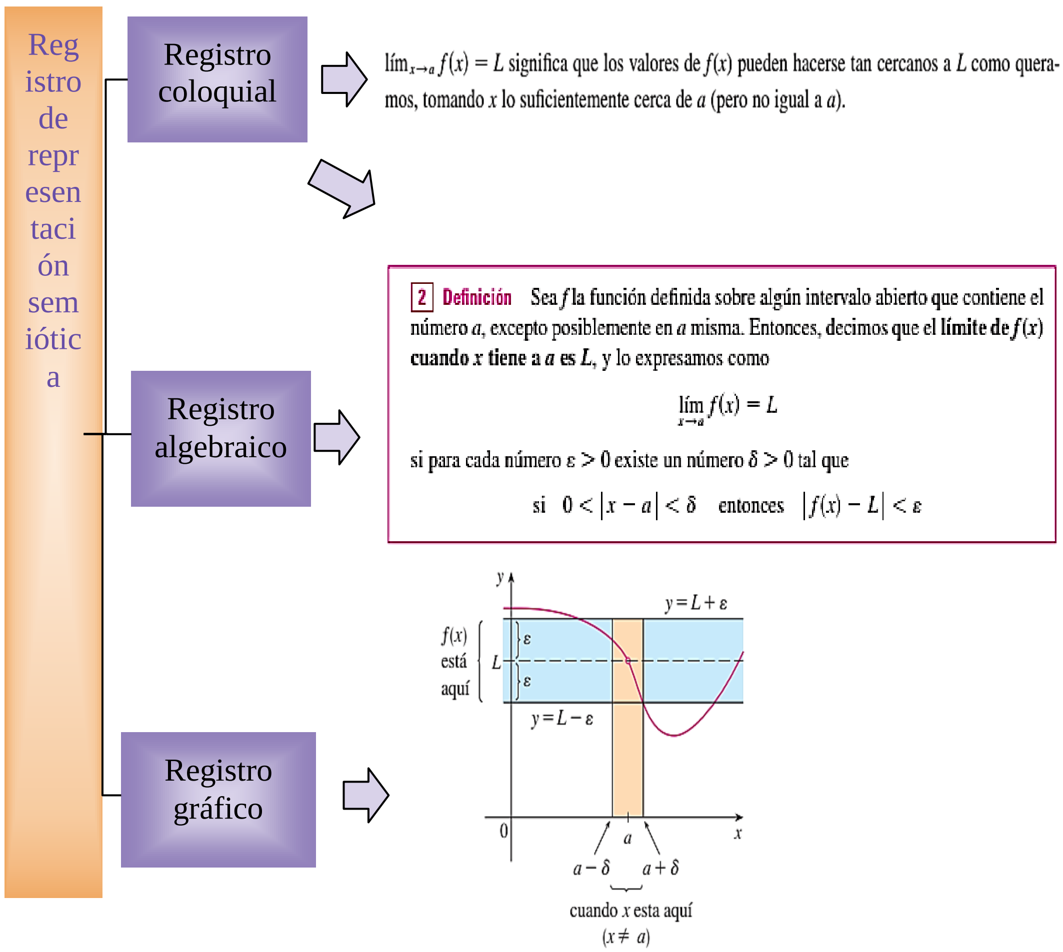

Figura 2. Definición precisa de límite en sus diferentes registros de representación semiótica (basado en Stewart, 2012)

Por otro lado, según Trujillo et al (2015), es el docente quien tiene la tarea de innovar en el campo educativo al orientar y afianzar el desarrollo de las habilidades matemáticas, mediante el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Por lo tanto, el objetivo de la investigación es determinar el efecto que tiene el uso didáctico del software matemático GeoGebra en la enseñanza del concepto de límite y cómo favorece las distintas representaciones mencionadas por Duval.

3. Aspectos metodológicos del estudio

A continuación, se delimita el marco metodológico de la investigación. En él se desarrolla cuál es el enfoque metodológico del estudio, su alcance, quiénes son los sujetos del mismo, cómo se ha recolectado la información, cuáles son las categorías de análisis y cómo se realizó el procesamiento de los datos.

3.1. Sujetos

Los *sujetos* de esta investigación son algunos profesores que se encuentran enseñando el concepto de límite en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, particularmente en la materia Análisis Matemático I, dictada por docentes de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, la cual corresponde al primer cuatrimestre de primer año de las carreras de Profesorado en Matemática, Licenciatura en Matemática, Profesorado en Física, Licenciatura en Física y Licenciatura en Ciencias de la Computación.

3.2. Enfoque, alcance y tipo de investigación

Esta investigación emplea un *enfoque metodológico cualitativo* para analizar cuáles son los beneficios de la enseñanza del concepto de límite a través de la utilización del software GeoGebra. Se considera que el estudio tiene este tipo de enfoque ya que el objetivo del mismo es estudiar ciertas situaciones particulares de enseñanzas, sin mediciones numéricas. Además, según Hernández Sampieri et al (2014), los métodos cualitativos suelen resultar más apropiados para el campo educativo en general.

El *alcance del estudio* es *descriptivo-interpretativo*. La intención es caracterizar las contribuciones que tiene la enseñanza de límites de una función con apoyo en la incorporación de GeoGebra como un RAE y OA, y cómo ayuda a superar las dificultades en torno a este concepto.

Se realizó a partir de la observación de clases grabadas y/o clases en vivo, por lo que esta investigación se clasifica como un *estudio de casos*, ya que se analizan situaciones específicas donde se desarrolla del concepto de límite y se estudia cómo la utilización del software GeoGebra puede beneficiar y potenciar la enseñanza del mismo. El estudio de casos, se trata de un método muy útil para el análisis de problemas prácticos, situaciones o acontecimientos que surgen en la cotidianidad, como lo es el tema de esta investigación.

3.3. Técnicas de recolección y procesamiento de la información

Para la *recolección de la información*, la técnica que se ha implementado es la observación de clases grabadas o clases en vivo. En efecto, se han tomado notas de campo acerca de lo acontecido durante las clases, para facilitar un posterior estudio y reflexión sobre los acontecimientos sucedidos.

El *procesamiento de los datos* se realizó a partir de la información obtenida a través de la observación de clases. Se realizó mediante un *análisis del contenido* a partir del estudio de las categorías que se desarrollan a continuación y la información obtenida a través de la técnica mencionada.

3.4. Categorías de análisis

Tabla 1. Categorías de análisis

Categorías de análisis	Datos obtenidos a partir del material audiovisual
Representaciones gráficas	
Representaciones simbólicas	
Representaciones coloquiales	
Transición entre las distintas formas de representación	
GeoGebra	

Las *categorías de análisis* (Tabla 1) han quedado determinadas por los distintos tipos de representaciones: simbólicas, gráficas y coloquiales. En la recolección de información se prestó especial atención a cuáles de estas representaciones se desarrollan a través de la enseñanza con GeoGebra.

4. Resultados

En la presente sección del trabajo se detallan los resultados del mismo; esta se divide en apartados donde se presentan, a través ejemplos, qué tipos de representaciones han sido utilizadas y de qué forma.

4.1. Representaciones

A continuación, se detallan ejemplos donde se ha podido evidenciar cada una de las representaciones y cómo han sido las transiciones de unas a otras.

En primer lugar, se menciona de qué forma se dan los distintos tipos de registros en el apunte que utilizan estudiantes y docentes de la cátedra de Análisis Matemático I (AM I), y luego cómo se realizaron durante la clase.

Definición. Dada una función real f y un número real a, de manera que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que un valor ℓ es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a, y notamos con el símbolo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ ,$$

si, para cualquier valor $\varepsilon > 0$, prefijado, existe un número positivo δ, tal que,

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

En términos de entornos, si

$$x \in E'(a, \delta) \ \Rightarrow \ f(x) \in E(\ell, \varepsilon) \ .$$

Figura 3. Definición de límite

Con respecto a las representaciones coloquiales, estas se han podido evidenciar mayoritariamente en el apunte de clase que utilizan los estudiantes y que el docente usa como guía. Al comienzo en el apunte se realizan algunas definiciones de conceptos que serán utilizados en la definición de límite, como el concepto de entorno y distancia, los cuales se dan de forma coloquial y simbólica. Por otro lado, en la definición de límite se utilizan tanto registros simbólicos como coloquiales, como se puede ver en la Figura 3. Además, esta definición se encuentra acompañada de la imagen que se muestra en la Figura 4.

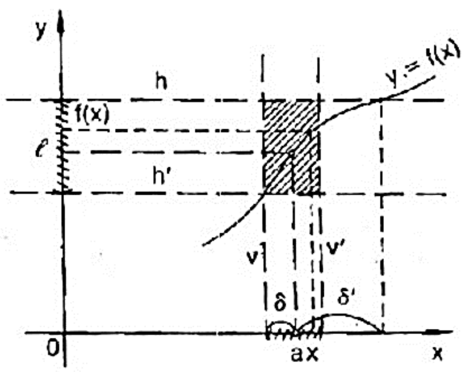

Figura 4. Imagen que se encuentra junto con la definición de límite

En esta imagen se ilustran los elementos que se mencionan en la definición de límite. Se puede observar que el mismo apunte pasa de un registro a otro, es decir, en la definición intervienen tres tipos de registros: simbólico, coloquial y gráfico. Luego de la definición se profundiza aún más en la forma simbólica de la misma, como se puede analizar en el extracto del apunte mencionado que se presenta en la Figura 5.

En forma proposicional,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \ : \ \ (\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon) \ .$$

Figura 5. Registro simbólico de la definición de límite (Apunte de la cátedra)

La simbología en este tema se encuentra tan presente que además se identifican notaciones equivalentes (Figura 6).

Nota. Las siguientes simbologías son equivalentes.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell\ ,\qquad \lim_{x\to 0} f(x+a)=\ell\ ,\qquad \lim_{x\to a} f(x)-\ell=0\ .$$

Figura 6. Registro simbólico de la definición de límite (Apunte de la cátedra)

Representaciones coloquiales, gráficas y simbólicas durante el desarrollo de la clase

A continuación, se menciona cómo se desarrollan los registros durante las clases, con hincapié en las diferencias y similitudes que se dan con el apunte.

Con respecto a las definiciones de entorno y distancia, a diferencia del apunte que solo utiliza registros gráficos y simbólicos, el docente utiliza registros gráficos (Figura 7).

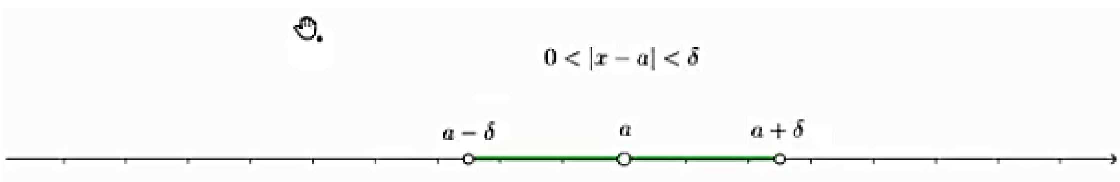

Figura 7. Registros gráficos en las definiciones de entorno y distancia (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

En esta presentación se puede observar la noción de entorno con cierto dinamismo que aporta GeoGebra, ya que los valores de δ iban disminuyendo y aumentando.

Por otro lado, para adentrarse a la definición de límite, el docente comenzó con un ejemplo, que es el mismo que se encuentra en el apunte, y lo explicó sobre un gráfico de GeoGebra, como se puede ver en la Figura 8.

Dada la función *f(x)=2x-1*, el docente analizó que los valores de *f(x)* se acercan a un número cuando los valores de la variable *x* se acercan cada vez más a *a=2*, sin llegar a ser *2*. En el gráfico había puntos cercanos a *2* marcados en el *eje x* y, con línea de puntos, sus respectivas imágenes. El profesor mostró que tales imágenes se acercaban a *3*. Y luego mostró una pestaña de GeoGebra con el mismo gráfico, donde los valores de *x* varían dentro del entorno reducido de *x=2* y se podía observar cómo varían las imágenes dentro del entorno reducido de centro *3*, acercándose cada vez más a *y=3*. Para esto utilizó una herramienta que provee GeoGebra denominada *"Deslizadores"*.

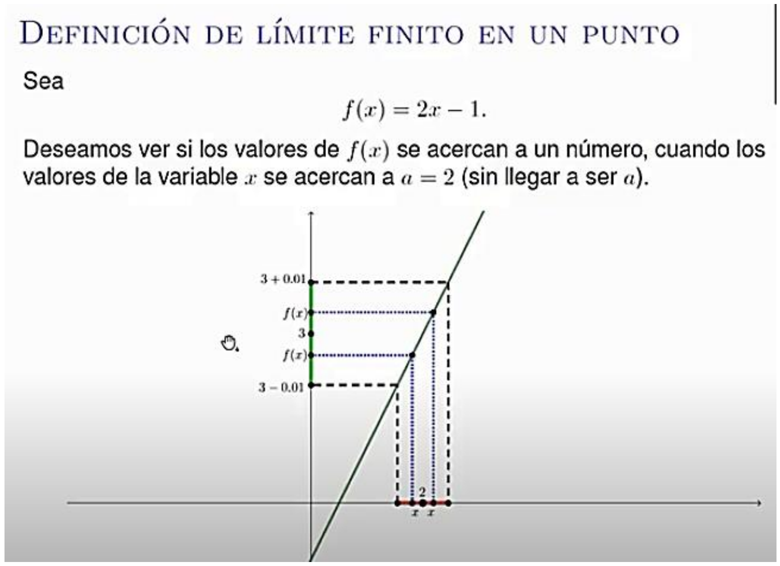

Figura 8. Registro gráfico para explicar definición de límite finito en un punto (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

Junto con este ejemplo, el docente comenzó a introducir la simbología que posteriormente utilizaría en la definición de límite (Figura 9).

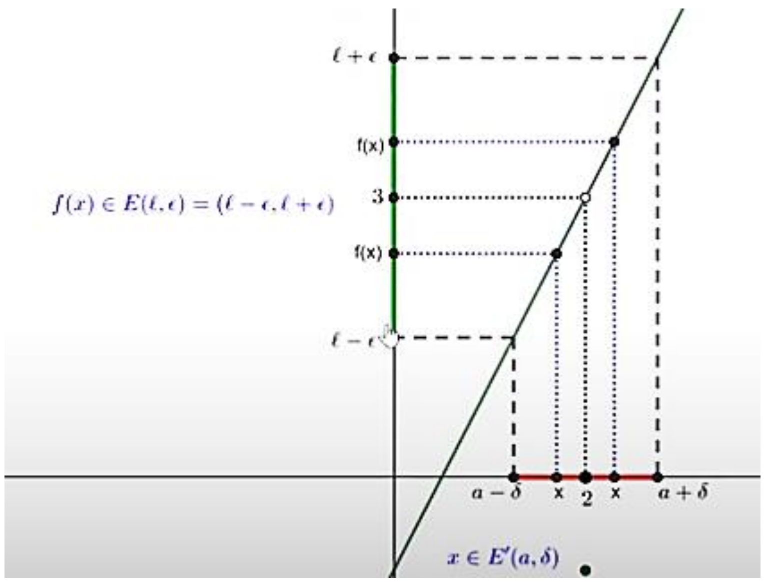

Figura 9. Representaciones gráficas y simbólicas del ejemplo mencionado en la presentación del docente (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

En la Figura 9 se puede observar cómo el docente, mediante la herramienta antes mencionada, encontró un modo de explicar lo que luego formalizó en la definición precisa de límite. La herramienta utilizada permitía a los estudiantes visualizar que, a medida que los valores de x se acercan más y más a cierto valor, las imágenes de la función se encuentran cercanas a cierto valor. En el apunte, donde se desarrolla este tema, también hay un gráfico de la misma función (Figura 10).

El gráfico de la función f se muestra en la Figura 1. En él podemos observar que los valores de la función f se acercan al número 5, cuando los valores de x se acercan a 3.

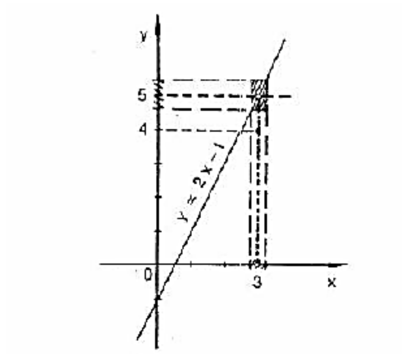

Figura 10. Imagen del mismo ejemplo que se encuentra en la Figura 9 (apunte de cátedra)

La diferencia entre las dos formas de desarrollar este ejemplo radica en que, mediante el ejemplo de GeoGebra, los estudiantes pueden observar cómo los valores de *f(x)* se van acercando a 3 a partir del dinamismo que aporta la herramienta deslizadores.

Luego de realizar el ejemplo de forma gráfica e ir introduciendo junto con él la simbología propia del concepto, el docente escribió el resultado del límite. Finalizó esta clase con la formalización del concepto de límite, con la misma definición del apunte, desde una diapositiva.

En la clase siguiente, la cual fue dictada por otro docente, él mismo comenzó realizando un repaso. Para esto utilizó también gráficos en GeoGebra (Figura 11).

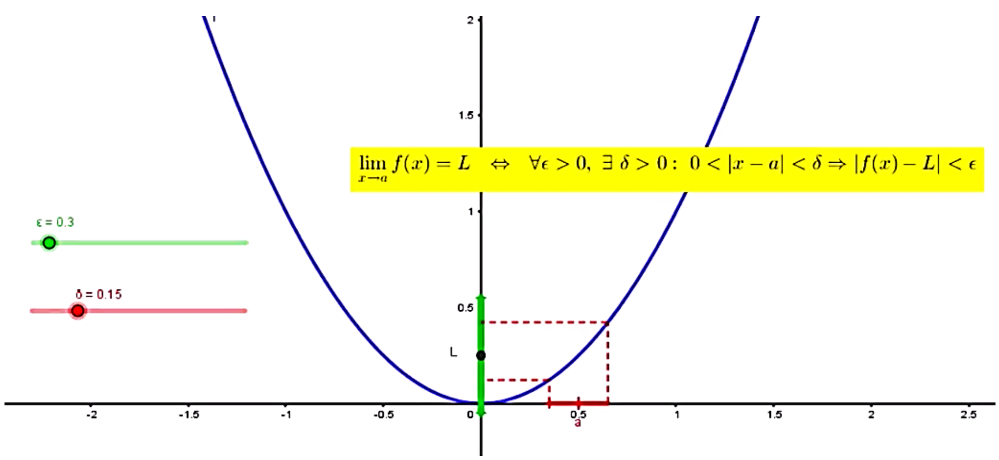

Figura 11. Gráficos en GeoGebra a modo de repaso (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

En este gráfico, a diferencia del que utilizó el otro docente, se pueden distinguir los tres registros juntos, coloquial, simbólico y gráfico.

Junto con dicho gráfico utilizó la definición precisa de límite e iba moviendo los deslizadores, para hacer el δ más pequeño y mostrar que, a medida que ε varía, δ también lo hace.

También se apoyó en este recurso para explicar y mostrar que el límite a veces no existe y para ello utilizó el gráfico de la *función signo*, lo que también invitó a recordar el concepto de límites laterales (Figura 12).

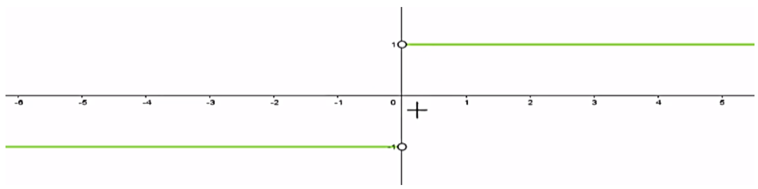

Figura 12. Gráfico de la función signo con GeoGebra (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

Mostró que en este caso los límites laterales existen, pero que eso no siempre pasa, y para esto presentó la función: $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. "¿Existe el límite cuando x tiende a cero?" (Figura 13).

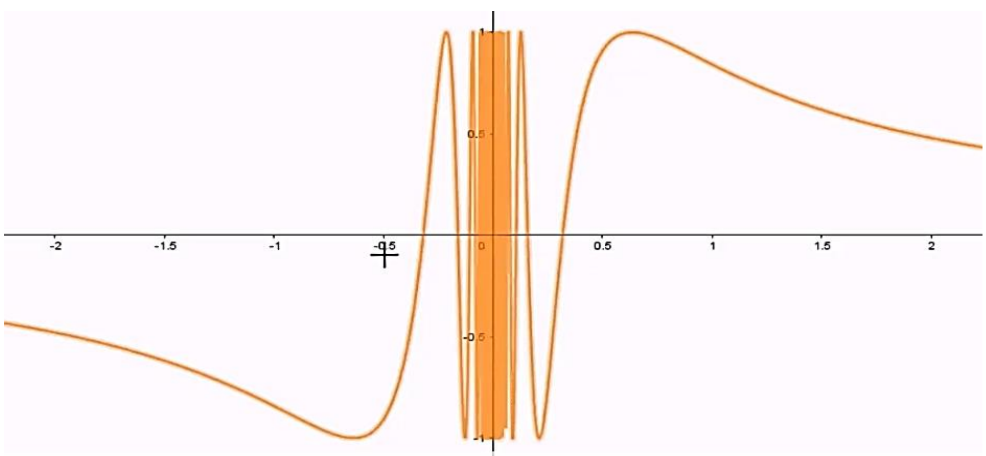

Figura 13. Registro gráfico de $f(x) = sen(\frac{1}{x})$ con GeoGebra (captura de pantalla de clase mediante videollamada)

Y agregó que el comportamiento de esta función cerca del cero es "oscilar" (haciéndole zoom a la imagen) y, por tal motivo, no se puede asegurar la existencia de un valor al cual las imágenes se acercan cuando los valores de x se acercan a 0.

La utilización de estos gráficos posibilitó hacer un repaso rápido y recordar los conceptos mediante la observación y visualización de distintas funciones.

Al utilizar GeoGebra, se pudo realizar el gráfico de la función $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, el cual no es sencillo realizar a mano; además, el profesor le hizo zoom al mismo para que los estudiantes comprendan qué pasaba cerca del cero y la idea de oscilación que mencionó después.

4.2. GeoGebra

En esta parte se analiza en qué situaciones y cómo se utiliza GeoGebra durante las clases.

Como se puede observar, durante la clase donde se formalizó la definición de límite, las distintas explicaciones fueron acompañadas por gráficos para complementar lo que decía el apunte, se considera que de este modo se facilita la comprensión de nuevos conceptos, ya que se permite la visualización de los mismos, y aporta dinamismo y movilidad al esquema, lo que hace que una gráfica manual no pueda cumplir la misma función.

A través de GeoGebra no solo se implementó el registro gráfico, si no que este iba acompañado de los otros registros, simbología propia de la definición y lenguaje coloquial que en su mayoría fue oral por parte de los docentes (Figuras 8 y 11).

En la Tabla 2 se sintetizan los hallazgos.

Tabla 2. Resumen de resultados obtenidos

Categorías de análisis	Datos obtenidos a partir del material audiovisual
Representaciones gráficas	Figuras 6.8, 6.9, 6.11, 6.12 y 6.13
Representaciones simbólicas	Figuras 6.8, 6.9 y 6.11
Representaciones coloquiales	Se dieron de forma oral durante las explicaciones donde se mostraban las gráficas con GeoGebra
Transiciones entre las distintas formas de representación	Figuras 6.9 y 6.11. Se conjugan representaciones gráficas y simbólicas, además del lenguaje coloquial que se realizaba de forma oral por parte de los docentes

Por otro lado, GeoGebra ayudó a realizar gráficos que no sería tan sencillo realizar en un pizarrón y a poder hacerle el zoom necesario para interpretar lo que pasaba con esta función, como se puede analizar en la Figura 13.

Un ejemplo de un Applet similar al que han utilizado los docentes se encuentra en el siguiente link de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/dj3wkstk[2]. GeoGebra ofrece una gran variedad de recursos abiertos a la comunidad que son realizados por estudiantes, docentes, etc. Este Applet, en particular, muestra los tres registros (Figura 14).

Se puede ver el registro gráfico; en este caso se encuentra graficada la función $f(x) = x^2$ pero permite cambiar la función e insertar la que uno desee. Así como también permite variar el valor del *a*. Por otro lado, se muestra la definición de límite en lenguaje coloquial y simbólico, y la simbología también se encuentra presente en la gráfica.

[2] Autora: Sofía Rodríguez.

Los “deslizadores” de δ y ε permiten ir haciendo estos valores tan chicos como se desee y visualizar qué pasa en el gráfico de $f(x)$.

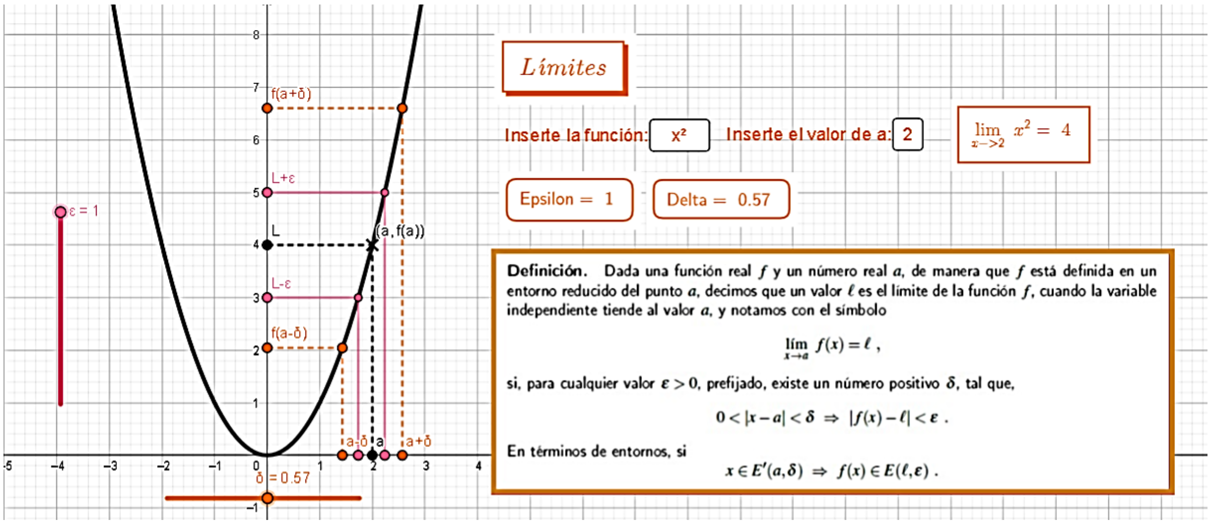

Figura 14. Applet de GeoGebra sobre la definición formal de límite
(https://www.geogebra.org/m/dj3wkstk)

5. Conclusiones

En la presente sección del trabajo se busca dar respuesta a los distintos interrogantes realizados al comienzo de la investigación. Además, se relacionan los hallazgos con los estudios que han sido desarrollados en el estado del arte y, por último, se detalla cuál se considera que es la innovación y posibles líneas de trabajo que se desprenden para futuras investigaciones.

5.1. Respuesta a los interrogantes

En este apartado se busca dar respuesta a los interrogantes planteados al inicio de la investigación. Esto se realiza a partir de los resultados obtenidos, que han sido desarrollados en la sección anterior.

Los interrogantes planteados al comienzo del trabajo son:

¿Cómo la utilización de distintas representaciones contribuye a facilitar y potenciar la enseñanza de la definición formal de límite? Y en este marco, ¿cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra?

En las Figuras 9 y 10 se puede observar cómo se realizan, de distinto modo, un mismo ejemplo donde se utiliza la definición formal de límite. La diferencia entre estas dos formas de desarrollar este ejemplo radica en que, mediante GeoGebra, los estudiantes pueden observar cómo los valores de *f(x)* se van acercando a 3 a partir del dinamismo que aporta la herramienta deslizadores que proporciona GeoGebra. Además, los conceptos no se encuentran de manera estática como en el apunte, si no que el docente experimenta con ellos. Si bien en ambos ejemplos se utiliza el registro gráfico junto con el simbólico, GeoGebra contribuye a potenciarlos.

Otro beneficio de GeoGebra se puede evidenciar en la Figura 13, donde fue utilizada la gráfica de una función para complementar la idea de que los límites no siempre existen. en este caso el docente quería mostrar que cuando una función oscila cerca de un punto allí el límite no existe y para esto utilizó la gráfica de la función $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. Este gráfico tiene la particularidad de que si se grafica en la escala inicial que proporciona GeoGebra, se observa "una franja" del color del gráfico y no se puede analizar lo deseado, pero si se le hace zoom, y/o se cambia la escala del eje x, es posible examinar lo que sucede cerca del valor $x = 0$. Graficar funciones, como mencionan Rodriguez et al (2020), muchas veces ocupa tiempo, espacio y complejiza el proceso de análisis, en este caso GeoGebra proporciona inmediatez para el docente para desarrollar el concepto o la idea esperada.

Como mencionan Oviedo et al (2012), la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos las representaciones y, recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las docentes exteriorizan las imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas (los estudiantes). Como se puede observar en la Tabla 2, los docentes han utilizado tres de las cuatro representaciones definidas por Duval (2004; citado en Oviedo et al, 2012): gráfica, coloquial y simbólica.

Las representaciones gráficas se dieron a través de GeoGebra (Figuras 8, 9, 11, 12 y 13), lo que ha permitido la visualización de los conceptos, con uso del registro gráfico combinado con otros registros. La opción deslizadores, utilizada por los docentes, aporta dinamismo y movilidad al esquema, lo que hace que una gráfica manual no pueda cumplir la misma función.

La utilización de GeoGebra permite de la exploración y visualización, y a partir de esto se busca que los estudiantes establezcan relaciones entre los distintos objetos que contiene la definición formal de límite y que se familiaricen con las propiedades que ellos cumplen, de modo tangible y manual en lugar de abstracto.

El docente, durante las explicaciones, iba manipulando los objetos y no solo se centraba en la visualización de la gráfica de una función. Esto permite entender de manera dinámica cómo los aspectos algebraicos generan transformaciones al objeto gráfico asociado y así entender de manera más precisa dichas transformaciones.

¿Cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra?

Los conceptos matemáticos, muchas veces, no son objetos reales y por consiguiente es necesario recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que ayudan a su comprensión.

Romiti et al (2014) consideran que una persona comprende efectivamente un cierto contenido cuando logra desempeñarse satisfactoriamente tanto en el tratamiento por separado de los distintos registros como en la articulación entre los mismos. Mencionan que el estudiante comprende parcialmente un cierto contenido si logra tal desempeño en dos de los tres registros propuestos. En caso contrario logra lo que se encuadra como comprensión frágil.

La utilización del software GeoGebra desarrolla principalmente el registro gráfico, pero los docentes lo han complementado con registros simbólicos y coloquiales.

Las representaciones semióticas resultan favorables y permiten a los docentes no mecanizar el aprendizaje con rutinas carentes de significado, sino que buscan la comprensión conceptual y procedimental de los objetos matemáticos involucrados en el cálculo diferencial, por parte de los estudiantes.

El uso de GeoGebra, como un REA para la visualización de las representaciones gráficas combinada con otros registros, se incorpora en el aula en busca de mejorar y potenciar la práctica educativa. Sin embargo, la manipulación de este es solo realizada por el docente.

El programa de la asignatura menciona que una de las capacidades que busca lograr en los estudiantes es que utilicen la herramienta computacional como recurso facilitador del cálculo y la representación gráfica, entre otras. Entonces, cabe mencionar que una forma de potenciar aún más el aprendizaje y el uso de GeoGebra, es que los estudiantes hagan uso del mismo. Que sean ellos, con el docente como facilitador, los que interactúen con el programa e intenten encontrar relaciones entre los distintos objetos matemáticos que se encuentran en la definición del concepto de límite.

A modo de ejemplo, luego de que el docente explique la definición de límite y utilice para ello GeoGebra, podría ir explicando cómo se realiza la utilización del Applet de modo que, luego de esto, sean los estudiantes quienes exploren el concepto y los distintos elementos que en ella se ponen en juego. A continuación, se describe brevemente una propuesta que utiliza el Applet de la Figura 14.

Actividad 1

a) Realizar en el Applet los siguientes pasos para cada una de las funcione y luego completar la tabla:

- Insertar la función de la casilla de entrada:

(1) $f(x) = x^2$

(2) $f(x) = x^3$

- Ingresar un valor para a.
- Seleccionar un valor de Epsilon (ε) con el deslizador.
- Hallar un valor de Delta (δ) que verifique la Definición Formal de Límite y otro valor que no.

$f(x)$	$\lim_{x \to a} f(x) = L$	ε	$\delta \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	$\delta \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

b) Para los valores de δ que pertenezcan al entorno de ε, escribir la definición de límite con los valores correspondientes.

Esta actividad tiene como propósito familiarizar a los estudiantes con la utilización del Applet, ya que, probablemente para algunos estudiantes sea la primera vez que utilicen GeoGebra. Por otro lado, encontrar los alumnos tienen que encontrar un δ que verifique la definición de límite y, por último, relacionar el registro simbólico con el coloquial que se encuentra en la definición.

Actividad 2

Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que:

si $|x - 1| < \delta$ entonces $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$

Luego escriba cómo quedaría la definición escrita de forma simbólica en este caso.

En esta actividad se busca involucrar el registro gráfico y simbólico en primer lugar y, luego, el registro coloquial al transcribir lo observado en la definición propiamente dicha.

Actividad 3

Graficar en el Applet la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

¿Qué sucede con $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?

La intención de estas actividades propuestas es que los estudiantes se familiaricen con los conceptos que se ponen en juego en la definición de límite y realicen el ejercicio de pasar de un registro a otro y encontrar las relaciones entre ellos.

La actividad 3, por su parte, busca comenzar a introducir a los estudiantes en la idea de que el límite no siempre existe; esto podría ir acompañado de una posterior formalización, junto con el docente.

Por otro lado, como dicen Trujillo et al (2017), al momento de abordar el concepto de límite se suele hacer desde una perspectiva abstracta, donde el contenido se presenta de forma algebraica o gráfica y no aplicada en un contexto. En esta línea, algunas actividades que se podría proponer a los estudiantes que realicen son las que se presentan en la Figura 15.

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm^2 de área.
a) ¿Qué radio produce tal disco?
b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso a) debe el tornero mantener el radio?
c) En términos de la definición ε-δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales, se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.
a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?
b) Si se permite una variación de temperatura de 200°C ± 1°C, ¿qué intervalo se potencia en watts se permite para la potencia de entrada?
c) De acuerdo con la definición ε-δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

Figura 15. Posibles actividades para implementar en el aula (Stewart, 2012)

En estas actividades se ponen en juego nuevamente los elementos que se encuentran en la definición de límite y tal definición. La diferencia con las actividades anteriores es que estas no se dan en abstracto, sino que ambas son problemas en contexto y se pide a los estudiantes que relacionen los conceptos con la definición de límite. Por su parte, en la segunda actividad se podría realizar el gráfico de la función para comenzar la actividad con un registro gráfico de lo que sucede y para ello utilizar GeoGebra.

5.2. Relación de los hallazgos con otros estudios similares

A continuación, se desarrollan las similitudes y diferencias entre los resultados obtenidos en el presente trabajo y los que se han reportado en el estado de conocimiento sobre el tema.

A diferencia de lo que mencionan Prada-Núñez et al (2017), quienes remarcan que la mayoría de las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, el presente estudio se centra en mayor medida en cómo los docentes abordan la enseñanza del concepto de límite. De todos modos, los procesos de enseñanza y de aprendizaje están profundamente relacionados, y muy probablemente, una mejora en la enseñanza tendrá como resultado una mejora en el aprendizaje. Como mencionan Trujillo et al (2017), el docente tiene que tener como objetivo disminuir las dificultades que se presentan en la enseñanza para así facilitar el aprendizaje.

Por otro lado, estos autores mencionan que al momento de abordar el tema se suele hacer desde una perspectiva abstracta, el contenido se presenta de forma algebraica o gráfica y no aplicada en un contexto. En concordancia con esto, en las clases observadas para esta investigación se ha podido evidenciar lo mismo que estos investigadores remarcan.

Rodriguez et al (2020) analizan cuáles son los beneficios de la utilización de GeoGebra para que los estudiantes comprendan las formas indeterminadas de los límites. Al igual que ellos, en este estudio se ha podido dar cuenta que graficar funciones ocupa tiempo y espacio, y puede llegar a complejizar el proceso y que uno de los beneficios de GeoGebra es la agilidad a la hora de realizar estas gráficas.

Esta investigación aborda las representaciones de un modo similar a como lo hacen Romiti et al (2014), quienes toman como referente a la Teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval; de nuevo aquí la diferencia radica en que ellas realizan una propuesta para la enseñanza del concepto en cuestión y es allí donde a partir de las representaciones consideran que es beneficioso para la enseñanza y el aprendizaje.

Al igual que remarcan Prada-Núñez et al (2017), Gazzola et al (2011) se centran en una propuesta para los estudiantes con respecto al concepto de límite y concluyen que GeoGebra, como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, permite a los estudiantes acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones y les posibilita comprobar sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas. En este estudio, si bien está mayormente centrado en la mirada de cómo utilizan el software los docentes, se puede concluir que el modo en que los profesores lo abordan también acerca a los estudiantes a comprender el concepto a través del uso de las distintas representaciones.

Tanto en las investigaciones consultadas como en este estudio se ha podido evidenciar la dificultad que tiene el concepto de límite, y que esta radica en su simbología y abstracción.

5.3. Innovación del estudio y posibles líneas de trabajo que se desprenden

La innovación de este estudio radica en potenciar la enseñanza de un concepto tan abstracto y difícil de comprender, como lo es la definición formal de límite. También se realiza una propuesta para que la utilización del software GeoGebra no solo quede del lado del docente, sino que también pueda ser experimentado por parte de los estudiantes.

La propuesta realizada es un ejercicio para utilizar antes de la formalización del concepto. En relación con esto una posible línea de trabajo es estudiar cómo beneficia el aprendizaje del concepto esta actividad, implementado en el aula. También se puede complementar con actividades posteriores a la formalización del concepto.

Por otro lado, en los antecedentes de esta investigación se ha citado a Prada-Núñez et al (2017), quienes mencionan que al momento de abordar el tema se suele hacer desde una perspectiva abstracta, donde el contenido no se presenta aplicado en un contexto. Entonces, otra posible línea para futuras investigaciones es realizar una propuesta, donde algunas actividades no sean solo ejercicios de calcular o demostrar el resultado de algún límite, si no sean un problema contexto.

5.4. A modo de cierre

En relación con el compromiso social de esta investigación, la Declaración de la Conferencia Regional de Educación Superior (CRES 2008; citado en Cecchi et al, 2013) menciona que, en las instituciones de Educación Superior, que es en el contexto donde ha surgido este proyecto como una propuesta en una materia del Profesorado en Matemática, se ha de fomentar en sus estudiantes una labor de investigación basada en la indagación de los problemas en su contexto. Ello con un rol científico, tecnológico, humanístico y artístico, fundado en la definición explícita de los problemas a atender y dar una solución a los mismos. Además de estar acompañada de una posterior divulgación con el fin de tener una relación de compromiso y más activa con la sociedad.

En esta línea se considera que lo que aporta el presente estudio a la sociedad educativa es analizar una *alternativa de enseñanza del concepto de límite*, con el fin de *potenciar el aprendizaje* de los estudiantes, a partir de repensar los modos de enseñanza y examinar el material del cual se valen los docentes para sus clases.

Por otro lado, se analiza la utilización de GeoGebra con un sentido, no simplemente la utilización de las TIC, si no con el fin de beneficiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se pone el foco en cómo la utilización del registro gráfico a través de este software y otros registros pueden contribuir a la comprensión de los conceptos que se ponen en juego.

En rasgos más generales, este proyecto busca desarrollar una capacidad de razonamiento lógico en los estudiantes, que tengan la capacidad de interpretar, plantear y resolver problemas, con cierta autonomía, capacidades que son fundamentales en el todo el trayecto universitario así también como fuera de este.

A modo de reflexión final, considero que es fundamental como estudiante y futura docente en matemática, cuestionar y reflexionar sobre las prácticas de enseñanza actuales con el fin de potenciarlas o modificarlas para una mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Este proyecto ha surgido de comenzar a indagar sobre problemáticas que cada una de las alumnas de este seminario había evidenciado durante su trayecto en la facultad, mediante una mirada retrospectiva sobre lo recorrido. Nos hemos involucrado con el contexto en donde hemos desarrollado nuestro aprendizaje de los últimos años e indagado acerca de qué dificultades habíamos encontrado, qué cuestiones ameritan seguir indagando o qué áreas de vacancia habíamos podido evidenciar.

Por último, estos trabajos y otros que sigan estas líneas, es deseable que se compartan con la comunidad ya sea para seguir indagando o tomar ideas que lleven a una mejora de las prácticas en el aula. Por último, tener en cuenta que el trabajo del docente no solo se centra en el aula sino también señalar la importancia de la labor científica de las grandes contribuciones que puede tener.

Referencias bibliográficas

Cecchi, N.H., Pérez, D.A. y Sanllorenti, P. (2013). *Compromiso Social Universitario: De la Universidad posible a la Universidad necesaria.* Instituto de Estudios y Capacitación, CONADU. http://beu.extension.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/170.pdf.

Cruzado Quispe, E. y Flores, J. (2017). Coordinación de registros de representación semiótica: un estudio de caso con problemas de optimización. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *2*(1), 39-50. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/issue/view/6/4.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (2018). *Programa de Análisis Matemático I*. UNR.

Gazzola, M. P., Corica, A. y Elichiribehety, I. (2011). Enseñanza del límite funcional con GeoGebra. En A. Corica, M. Bilbao, M. Paz y M.P. Gazzola (Eds.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp.509-515). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. http://funes.uniandes.edu.co/20883/.

Gómez, J. (2018). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante fractales lineales. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *3*(1), 77-79. http://www.ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/279.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). McGraw Hill.

Oviedo, L.M., Kanashiro, A.M., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, *1*(13), 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112.

Pazos Trujillo, L.A., Tenorio Sepúlveda, G.C. y Ramírez Montoya, M.S. (2015). Atributos de la innovación en el marco del movimiento educativo abierto para desarrollar competencias matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, *15*(3), 1-24. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/20653/21068.

Rodríguez, N., Bravo, J.L., Pérez, A. y Rodríguez, L. (2020). El GeoGebra como recurso didáctico para la comprensión de las formas indeterminadas del límite. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 751-762. https://www.clame.org.mx/actas.html.

Romiti, M., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2014). Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real. En D.C. Veiga (Ed.). *Actas de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp.314-322). SOAREM. http://funes.uniandes.edu.co/18796/.

Stewart, J. (2012). *Cálculo, Trascendentes Tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning.

Trujillo, J., Vera, C. y Prada-Núñez, R. (2017). Estado del arte sobre el concepto de límite. En R. Prada-Núñez, P. Ramírez, C. Hernández, H. Gallardo y S. Mendoza (Eds.). *Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp.165-172). Universidad Francisco de Paula Santander. http://funes.uniandes.edu.co/12798/.