Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Oscilaciones Mecánicas

5º Año

Cód- 7501-19

Carlos Silva
Juan Farina

Física

fisica.ips.edu.ar
www.ips.edu.ar

Dpto. de Física

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

OSCILACIONES MECÁNICAS

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza se presentan con frecuencia movimientos que se repiten en iguales intervalos de tiempo, llamados **movimientos periódicos**, como por ejemplo el movimiento de un resorte, el de la Luna alrededor de la Tierra, la oscilación de un péndulo, la vibración de la cuerda de un violín, el latido del corazón, las moléculas de aire cuando pasa una onda de sonido, la oscilación de campos electromagnéticos generando ondas de radio o de televisión, la vibración de los átomos en un material, la oscilación rápida de los electrones en una antena emisora o receptora.

Si el movimiento descripto es periódico y se desarrolla de ida y de vuelta, a ambos lados de una posición de equilibrio, sobre una misma trayectoria decimos que es **oscilatorio o vibratorio**.

Para Pensar:

¿Cuáles de los ejemplos dados anteriormente son movimientos oscilatorios o vibratorios?

En general, cuando se produce un movimiento oscilatorio, sus límites no son fijos porque las fuerzas de rozamiento disipan energía. A estos movimientos se los llama **oscilatorios amortiguados**. En la práctica se pueden lograr movimientos oscilatorios no amortiguados entregando energía del exterior que compense las pérdidas por fricción, un ejemplo es el de un reloj de péndulo al que se le compensa la energía disipada con una pesa.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el **movimiento armónico simple (M.A.S.)**. Constituye un modelo descriptivo de muchas oscilaciones que se observan en la naturaleza, a pesar de que no todos los movimientos oscilatorios son armónicos.

Para Pensar:

¿Por qué decimos que el Movimiento Armónico Simple constituye un modelo?

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico, oscilatorio, sin rozamiento, producido por una **fuerza recuperadora** que varía en forma directamente proporcional al desplazamiento de la partícula en vibración. Las fuerzas recuperadoras se caracterizan por dos características: en primer lugar siempre se oponen al desplazamiento del cuerpo, en segundo lugar, su módulo crece linealmente con el desplazamiento del cuerpo. Matemáticamente, estas dos características se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\vec{F}_{recuperadora} = -k\,\vec{x}$$

donde $\vec{x}$ es el desplazamiento del cuerpo. El ejemplo típico de este fenómeno lo tenemos cuando se estira o comprime un resorte. Cuanto mayor sea el desplazamiento de un extremo del mismo, mayor es la fuerza que hará, y esta será en sentido contrario al desplazamiento.

Se llama armónico porque las ecuaciones que describen el movimiento de la partícula que oscila se pueden escribir mediante funciones armónicas, como son el seno y el coseno, de una sola variable.

Durante los cursos de Física dados en años anteriores, nos hemos dedicado a estudiar movimientos rectilíneos, parabólicos y circulares con el desarrollo y análisis de las ecuaciones que los describen.

En este capítulo nos dedicaremos a un movimiento de características diferentes, el movimiento armónico simple.

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Para analizar las características dinámicas del movimiento armónico simple, consideremos un sistema masa – resorte como el representado en la Figura 1. En este caso el cuerpo de masa *m* se puede mover sobre una superficie horizontal sin rozamiento y tiene una posición de equilibrio cuando el resorte no está deformado.

Si se efectúa un desplazamiento del bloque, el resorte hace una fuerza sobre el mismo en sentido opuesto al desplazamiento. Aplicando las leyes de Newton podemos encontrar las ecuaciones de movimiento de este sistema

$$\sum F = ma$$

donde la fuerza aplicada es $F = -kx$. Recordando que la aceleración es la derivada segunda de la

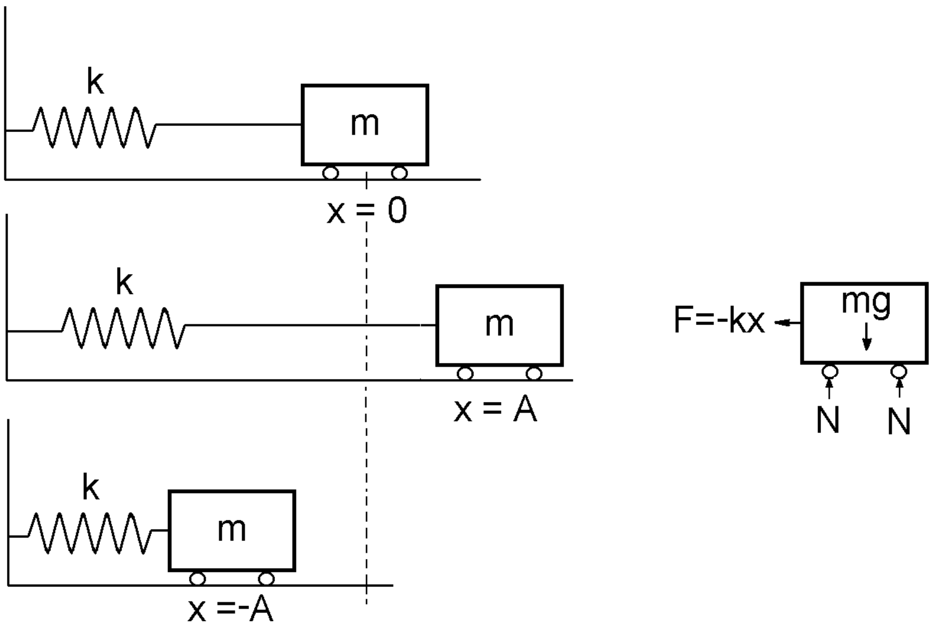


Figura 1: Descomposición de fuerzas en el MAS.

posición respecto del tiempo $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ se puede escribir la ecuación

$$m\frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} = -kx_{(t)} \quad \text{o bien,} \quad \frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} + \frac{k}{m} x_{(t)} = 0 \qquad (1)$$

La ecuación (1) es una ecuación de un tipo especial, llamado *ecuación diferencial.* Lo característico de esta ecuación es que relaciona una función del tiempo (la posición $x_{(t)}$) con su derivada segunda.

Así como cuando se resuelve una ecuación algebraica se encuentran el o los valores de x que la satisfacen, cuando se resuelve una ecuación diferencial se deben hallar la o las funciones que la satisfacen. Aunque hay diversos métodos para resolver las ecuaciones diferenciales en este caso aplicaremos el camino inverso, se propondrá una solución y se verificará que satisface la ecuación.

La función propuesta es

$$x_{(t)}=A\cos(\omega t+\theta_0) \tag{2}$$

Antes de determinar lo que significan A, ω y θ_0, demostraremos que la función (2) satisface la ecuación (1).

Para verificar que satisface la ecuación diferencial debemos hallar la derivada segunda de x y reemplazarla en la ecuación. La derivada primera es

$$\frac{dx_{(t)}}{dt}=-\omega A\operatorname{sen}(\omega t+\theta_0)\ ,$$

y la derivada segunda es

$$\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\theta_0)=-\omega^2 x_{(t)} \tag{3}$$

Si se comparan las expresiones (1) y (3) se ve que ambas son iguales, estableciendo que:

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

Ésta es una ecuación que relaciona la aceleración y el desplazamiento y cuyas soluciones son las funciones seno y coseno de ωt .

Se ve así que $x_{(t)}=A\cos(\omega t+\theta_0)$ satisface esta ecuación independientemente de los valores de A y θ_0, y por lo tanto es la solución general de esta ecuación diferencial que tiene dos constantes arbitrarias, la amplitud A y la fase inicial θ_0, que habrá que establecer en cada problema particular.

De manera análoga, con el mismo procedimiento, se puede ver que $x=A\operatorname{sen}(\omega t+\theta_0)$ y $x=A\operatorname{sen}(\omega t+\theta_0)+\cos(\omega t+\theta_0)$ también son soluciones generales de la ecuación diferencial. En nuestro desarrollo será $x_{(t)}=A\cos(\omega t+\theta_0)$ la ecuación básica del movimiento armónico simple.

La ecuación $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$ aparece en muchas situaciones físicas. Cada vez que aparece dicha ecuación, podemos estar seguros de que se trata de un fenómeno con características oscilatorias.

Además, también podemos asegurar que la función $x_{(t)}=A\cos(\omega t+\theta_0)$ es una solución adecuada para esa ecuación. Por supuesto, x no tiene por qué ser siempre la posición de un móvil, sino que puede describir distintos tipos de magnitudes físicas, como ser, la corriente alterna en un circuito eléctrico, la concentración de iones en un plasma, la temperatura de un cuerpo o la tensión de una viga estructural.

La resolución de esta ecuación nos permite determinar la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo del móvil que describe un movimiento armónico simple. Por el momento, consideraremos $\theta_0 = 0$. Si la posición del móvil en el tiempo se expresa por:

$$x_{(t)} = A\cos(\omega t)$$

Como la velocidad es la derivada de la posición en el tiempo,

$$v_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t) \ ,$$

y la aceleración es la derivada de la velocidad, obtenemos:

$$a_{(t)} = \frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t)$$

Si se grafican estas tres funciones, tal como se ve en la Figura 2, se puede observar que cuando el desplazamiento del móvil es cero la velocidad es máxima y la aceleración es cero, a medida que aumenta el desplazamiento en forma positiva la velocidad decrece y la aceleración va creciendo negativamente. Al llegar al máximo de la elongación, el móvil se detiene, en consecuencia la velocidad es cero y como el resorte está en su máximo estiramiento realiza la mayor fuerza recuperadora, la aceleración se encuentra en su punto más negativo.

Dejamos al alumno analizar el resto del ciclo para las variaciones de posición, velocidad y aceleración.

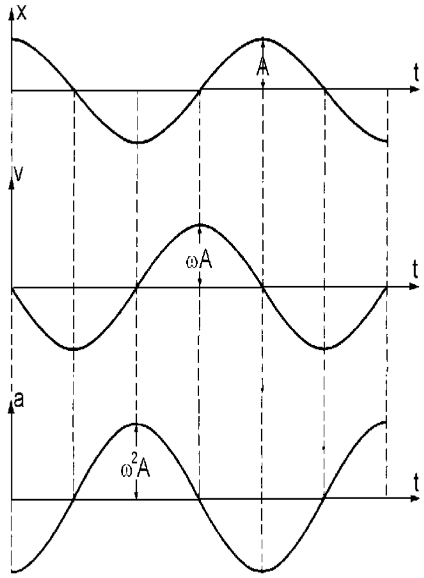


Figura 2: Gráficas de posición, velocidad y aceleración.

REPRESENTACIÓN FASORIAL

Con frecuencia resulta complicado analizar el comportamiento de las funciones armónicas realizando sus gráficos, por tal motivo existe otra representación que resulta más fácil de realizar. Para ello se aprovecha que las funciones armónicas tienen una frecuencia o velocidad angular (ω) constante.

En la Figura 3 se puede observar un vector de módulo A que rota alrededor de un punto fijo O con velocidad angular constante ω llamado **fasor** (a todo vector rotante se lo denomina fasor). Sobre la derecha se encuentra su proyección sobre el eje vertical A sen ωt y hacia abajo su proyección sobre el eje horizontal A cos ωt. La representación fasorial facilita la visualización de las funciones armónicas.

Utilizando este método también pueden ser representadas la velocidad y aceleración, en este caso los fasores tienen módulos igual a ωA y $\omega^2 A$ respectivamente.

Ejercicio 1: Realiza la Figura 3 para el caso en que θ_0 sea distinto de cero.

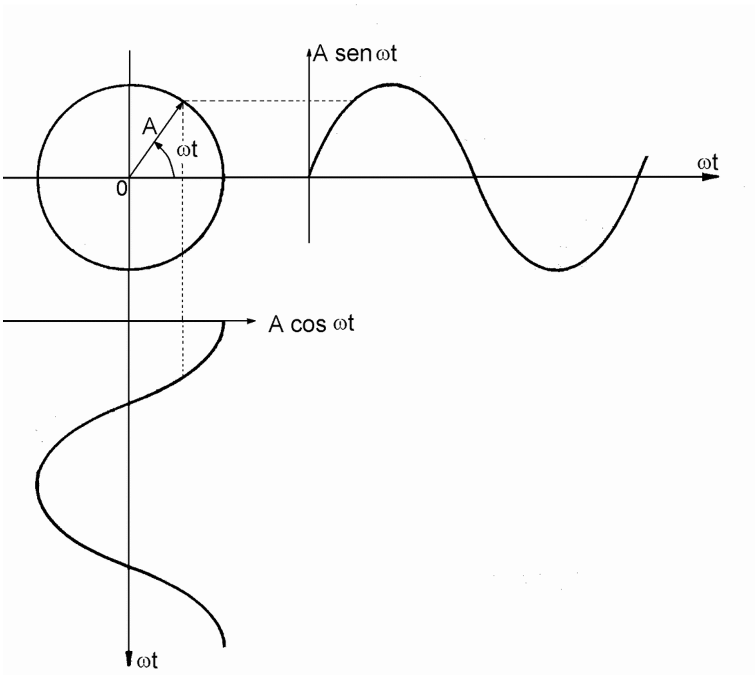


Figura 3: Representación fasorial.

RELACIÓN ENTRE EL M.A.S. Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

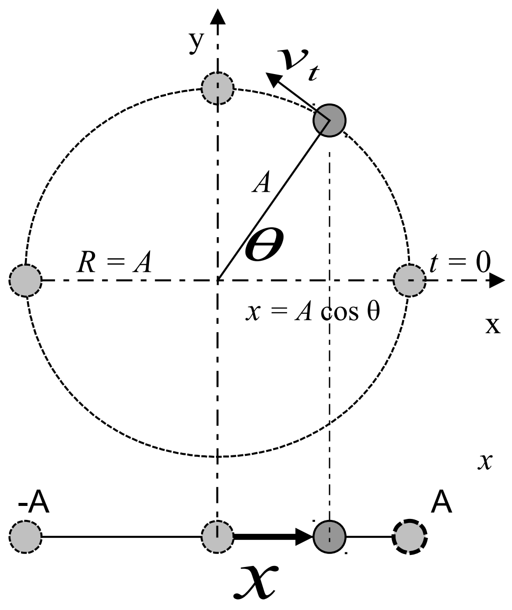


Figura 4: Relación MAS y MCU

Como surge de la representación fasorial hay una estrecha relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme, como veremos de inmediato.

Posición en función del tiempo:

Consideremos una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme y analicemos la proyección de su vector posición sobre el eje de abscisas.

El desplazamiento angular de la partícula viene dado por $\theta=\omega t+\theta_0$ donde θ_0 es el desplazamiento angular para $t = 0$ y $\omega=\frac{v}{A}$ es la velocidad angular de la partícula.

La componente x del vector está dada por

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad (4)$$

Donde:

- ***x***: Posición de la partícula respecto del origen del sistema de referencia, también se llama elongación.
- ***A***: Amplitud o elongación máxima.
- ***θ***: Posición angular o "fase del movimiento"
- ***θ_0***: Fase inicial o posición angular inicial, su valor determina la posición en x para t= 0
- **ω**: Pulsación o frecuencia angular.

Para Pensar:

¿Bajo qué condiciones es correcto decir que $\boldsymbol{\theta_0}$ = 0? ¿Qué tipo de condiciones impone $\boldsymbol{\theta_0}$ al movimiento armónico simple?

Una representación más sencilla del movimiento puede lograrse si en lugar de representar $x = f(t)$ se representa $x = f(\omega t)$. Esta representación es la indicada en la Figura 5, donde la función coseno se repite cada vez que ωt aumenta en 2π. Así, el desplazamiento de la partícula se repite después de un intervalo $\frac{2\pi}{\omega}$. Esto nos indica que el período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La frecuencia f de un movimiento armónico simple es el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo, $f = \frac{1}{T}$.

Que la ecuación del movimiento sea $\cos(\omega t + \theta_0)$ o $\text{sen}(\omega t + \theta_0)$ depende de en qué posición de la partícula tomemos $t = 0$.

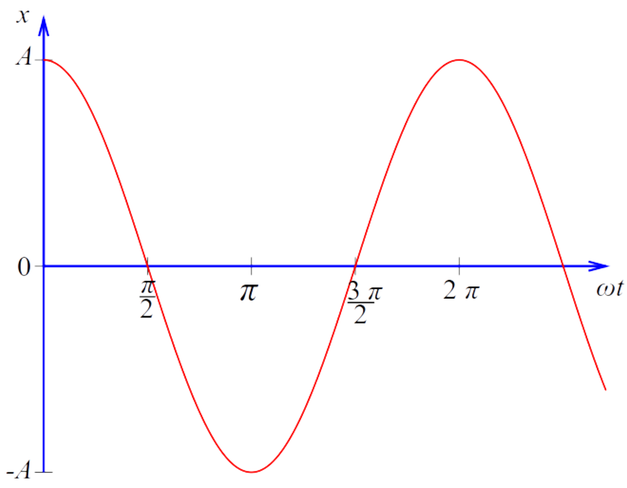


Figura 5: Gráfica de x(ωt)

Ejercicio 2

Una partícula inicia un movimiento armónico simple en el extremo de su trayectoria y tarda 0,1 s en ir al centro de la misma. Si la distancia entre ambas posiciones es de 20 cm. Calcula:

a- El período del movimiento.
b- La pulsación.
c- La posición de la partícula 1 s después de iniciar el movimiento.

Velocidad en función del tiempo:

Como se ha visto anteriormente, la velocidad instantánea se calcula como $v_x = \frac{dx}{dt}$ **.** Entonces, derivando la expresión (4), se obtiene:

$$v_x = -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad (5)$$

Si $\theta_0 = 0$,

$$v_x = -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

La velocidad v_x será máxima en módulo cuando el seno alcance su valor máximo. Esto ocurrirá cuando $\mathrm{sen}(\omega t) = \pm 1$, con lo cual:

$$\boxed{v_{x\,\text{máx}} = \pm \omega A}$$

En las Figuras 6 y 7 se representa la velocidad en tres instantes diferentes. Se observa que la velocidad de la partícula en vibración en cualquier instante es la componente horizontal de la velocidad tangencial de la trayectoria circular.

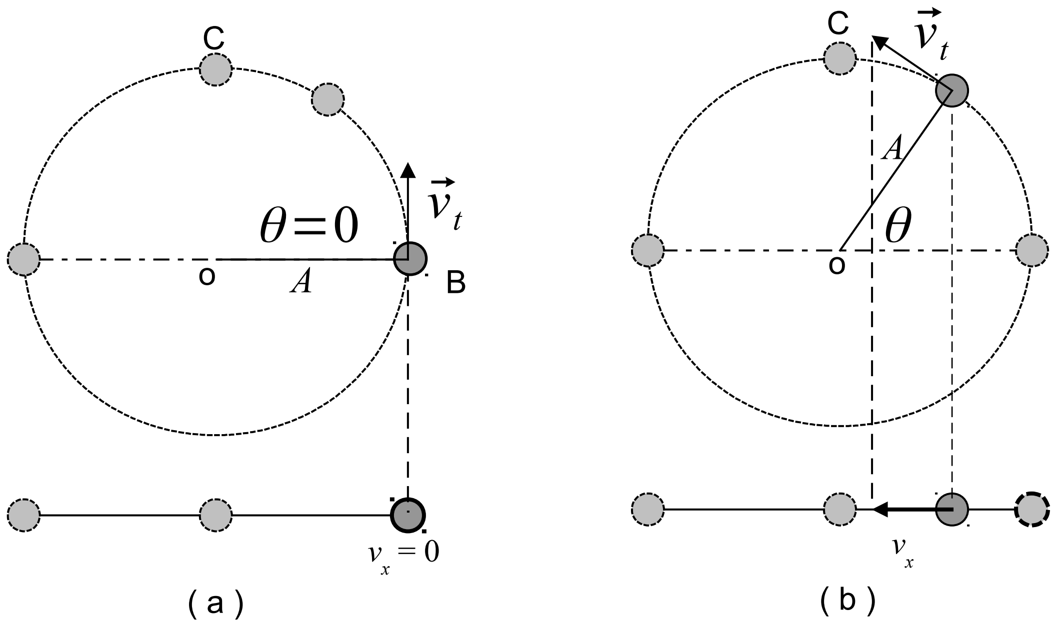


Figura 6: Velocidad en el MAS y en el MCU

En el punto B la velocidad no tiene componente horizontal, este punto corresponde a la velocidad cero de la partícula en vibración cuando alcanza su amplitud A.

En el punto C la componente horizontal coincide con la velocidad tangencial, en esta posición la partícula posee su velocidad máxima.

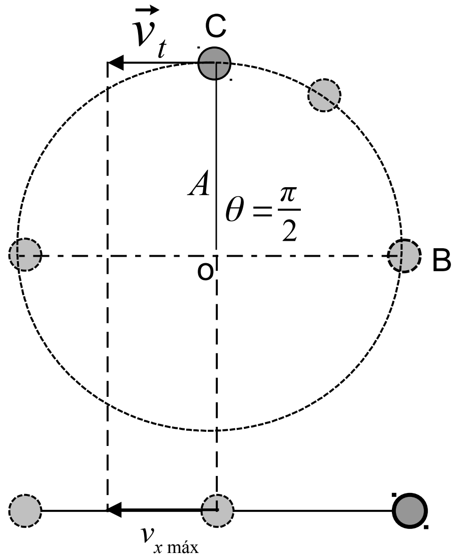


Figura 7: Velocidad en el MAS y en el MCU (cont.)

Ejercicio 3

Representa la gráfica de $v_x = f(\omega t)$ e indica sus características.

Aceleración en función del tiempo:

Como la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, derivando la expresión (2), se obtiene:

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta_0) \qquad (6)$$

Si $\theta_0 = 0$, queda:

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

y la aceleración máxima, cuando $\cos(\omega t) = \pm 1$, es $\boxed{a_{x\,máx} = \pm \omega^2 A}$

En las Figuras 9 y 8 se representa la aceleración en tres instantes de tiempo diferentes.

Obsérvese que la aceleración de la partícula en movimiento armónico simple es la componente horizontal de la aceleración centrípeta para el movimiento circular equivalente.

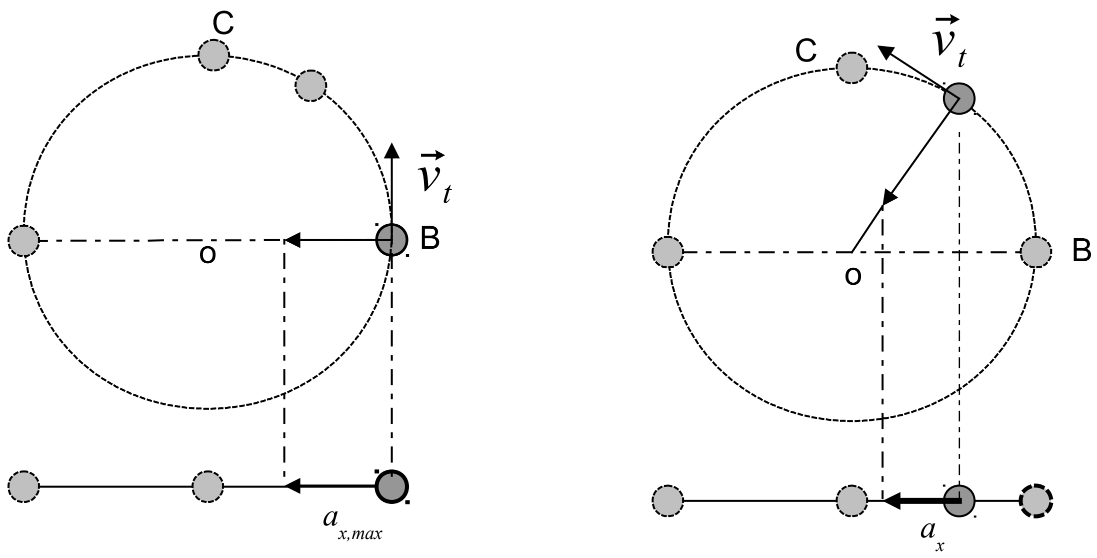


Figura 8: Aceleración en el MAS y en el MCU

Ejercicio 4

Representa la gráfica de $a_x = f(\omega t)$ y compárala con la de v_x .

Características de la gráfica de aceleración-tiempo:

1. La aceleración también es periódica.
2. Su valor depende de la posición de la partícula, es nula en el centro y máxima en los extremos.
3. Es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario. Comparando la ecuación (3) con la (1), resulta:

$$a_x = -\omega^2 x$$

Ejercicio 5

Una partícula vibra con una velocidad máxima de 20 m/s y una amplitud de 10 cm. Calcula:

- a- La frecuencia del movimiento.
- b- La aceleración máxima.
- c- La velocidad de la partícula cuando se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio.

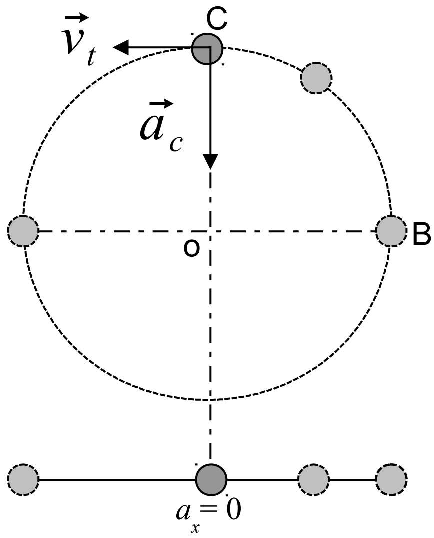


Figura 9: Aceleración en el MAS y en el MCU (cont.)

Ejercicio 6

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote viene dado por $y=(1{,}2\,m)\cos\left(\frac{1}{2\mathrm{s}}t+\frac{\pi}{6}\right)$

- a) Determina la amplitud, frecuencia angular, fase inicial, frecuencia y período del movimiento
- b) ¿Dónde se encuentra el bote cuando t=1s?
- c) Determina la velocidad y la aceleración en cualquier instante t
- d) Calcula la posición inicial, la velocidad y la aceleración del bote.

ENERGÍA EN EL M.A.S.

Consideremos nuevamente una partícula que oscila con Movimiento Armónico Simple. En ausencia de rozamiento esta está sometida a una fuerza recuperadora elástica, que es conservativa, por lo tanto la energía mecánica de la partícula permanece constante.

Analicemos la energía de la partícula en distintas posiciones. En la Figura 10 vemos que cuando se encuentra en la posición A (máxima elongación) está en reposo, siendo la fuerza máxima, y la energía que posee puramente potencial elástica

$$E_A=E_{pe}=\frac{1}{2}k\,A^2$$

Ahora analicemos una posición B intermedia, entre el equilibrio y la máxima elongación, la partícula tiene velocidad, entonces posee energía cinética y potencial elástica, luego

$$E_B=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}kx_B^2.$$

Y cuando pase por la posición de equilibrio, punto C, su energía será

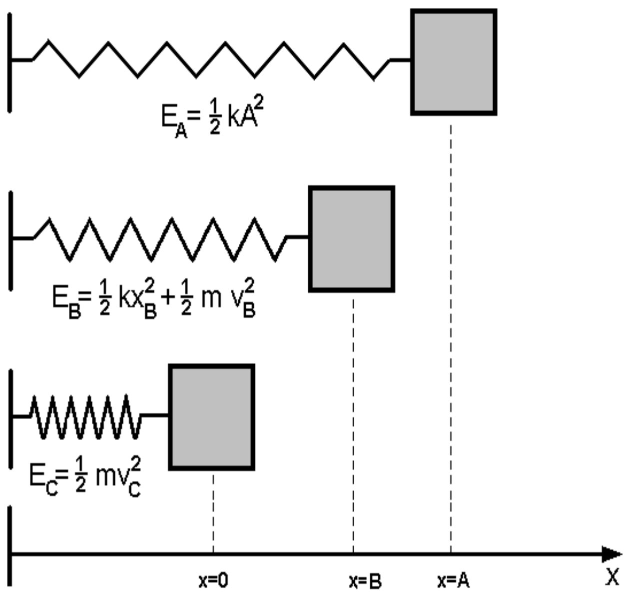


Figura 10: Energía en el MAS.

netamente cinética puesto que la elongación es nula $E_C = \frac{1}{2} m v_C^2$ siendo v_C la máxima velocidad que puede adquirir la partícula. Siendo

$$E_A = E_B = E_C = \text{constante}.$$

Es interesante encontrar una expresión que relacione la energía de una partícula que oscila en función de la elongación x.

Como la energía cinética en cada punto es

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

y la velocidad se puede reemplazar por $v = -\omega A \operatorname{sen} \omega t$,

$$E_k = \frac{1}{2} m(-\omega A \operatorname{sen} \omega t)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 [1 - \cos^2(\omega t)]$$

Distribuyendo solamente A^2 , y teniendo en cuenta que $x = A \cos(\omega t)$,

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 [A^2 - (A \cos \omega t)^2] = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

Pero $\omega^2 = \frac{k}{m}$, por lo que $m \omega^2 = k$, con lo cual

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)}$$

Recordando que la energía total E es la suma de la energía cinética E_k más la energía potencial, en este caso sólo elástica E_{pe} ,

$$E = E_k + E_{pe}$$

$$\therefore \boldsymbol{E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2}$$

Finalmente, la energía mecánica total de la partícula será

$$E = E_k + E_{pe} = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Esta ecuación nos muestra una propiedad general del Movimiento Armónico Simple.

“La energía total del Movimiento Armónico Simple es constante y proporcional al cuadrado de la amplitud”

Resumiendo, para una partícula en su desplazamiento máximo, la energía total es toda energía potencial elástica. Cuando la partícula se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía cinética del sistema crece y la energía potencial disminuye. Cuando pasa por la posición de equilibrio, la velocidad es máxima, la energía potencial es cero y la energía total es igual a la cinética. Cuando sobrepasa la posición de equilibrio, su energía cinética comienza a decrecer y la

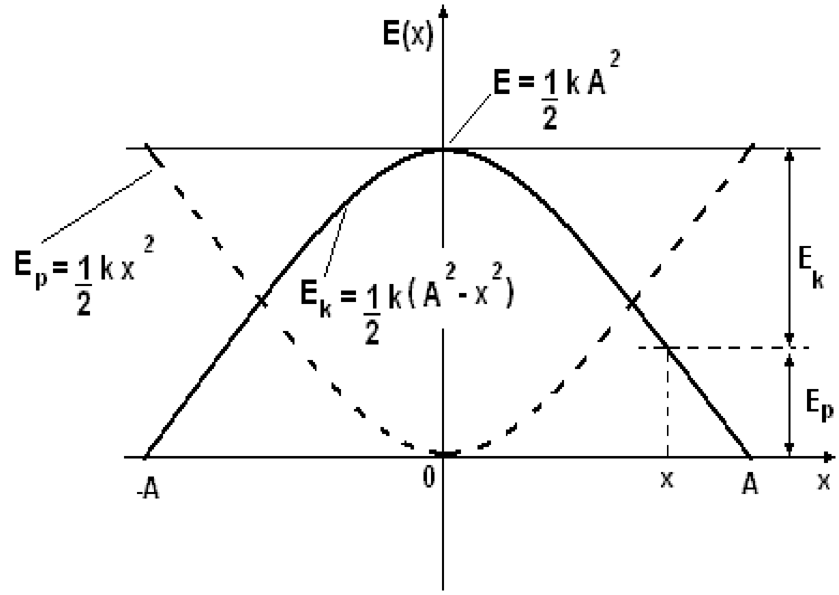


Figura 11: Energía en función de la elongación para el MAS horizontal

energía potencial elástica del sistema crece hasta que la partícula nuevamente se detiene momentáneamente. En todo momento, la suma de las energías potencial y cinética es constante.

La Figura 11 muestra los gráficos de energía potencial elástica y energía cinética en función de la elongación.

La energía mecánica total al ser constante está representada por una línea horizontal. Esta línea corta a la curva de energía potencial en $x = A$ y $x = -A$, llamados **puntos de retorno**, ya que son los puntos en los cuales los "objetos" oscilantes invierten su sentido de movimiento y vuelven hacia la posición de equilibrio.

Otra representación interesante es la de las energías cinética y potencial en función del tiempo, la cual es periódica. La misma se puede observar en la Figura 12.

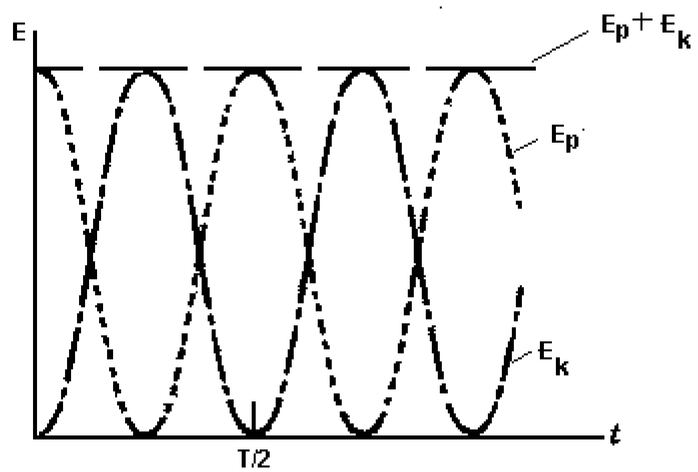


Figura 12: Energía en función del tiempo para el MAS horizontal.

Ejercicio 7

Un cuerpo vibra con movimiento armónico simple. Cuando se encuentra en la mitad de la amplitud, ¿qué porcentaje de energía es cinética y qué porcentaje es potencial? ¿En qué punto las dos energías son iguales?

RESORTE VERTICAL

Cuando una masa cuelga de un resorte vertical, además de actuar la fuerza elástica *–ky* se encuentra aplicada la fuerza Peso dirigida hacia abajo. Si se observa el diagrama de cuerpo libre de la Figura 13, y se toma el eje *y* medido desde la posición sin deformar del resorte, El movimiento de la masa se puede describir por la ecuación:

$$\sum F = ma = m\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + mg$$

Esta ecuación difiere en el término *mg* respecto de la ecuación (1), analizada al principio del capítulo, por lo que no podemos afirmar que admite una solución del tipo $y = A\cos(\omega t + \theta_0)$. Sin embargo, es posible cambiar la posición del sistema de referencia de manera que la ecuación de movimiento de este problema sea idéntica a la del resorte horizontal.

Cuando la masa cuelga del resorte y está en equilibrio, este se deforma una longitud y_0, siendo

$$ky_0 = mg. \qquad (7)$$

Cuando se alarga el resorte, podemos medir ese alargamiento desde la posición de equilibrio. Llamaremos y' a dicha elongación. De la Figura 13, podemos ver que $y' = y - y_0$. Las derivadas de y e y' son idénticas:

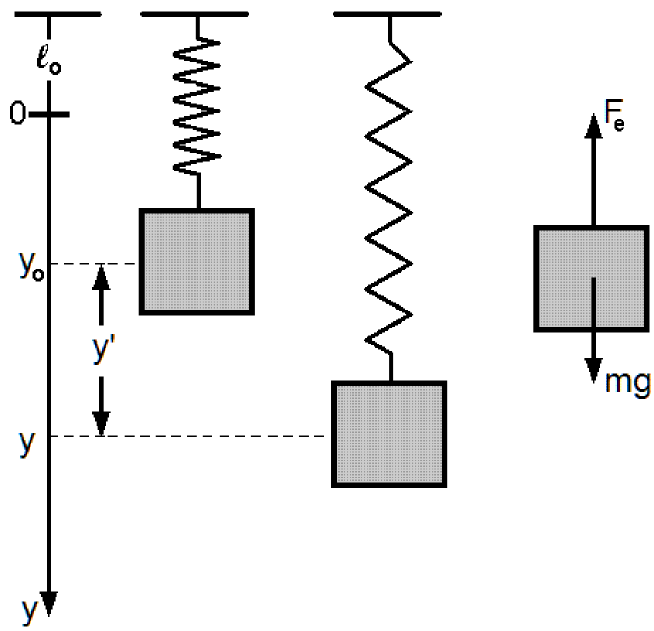


Figura 13: Diagrama de cuerpo libre para la partícula suspendida de un resorte vertical.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Multiplicando y' por k, tenemos: $ky' = k(y - y_0) = ky - ky_0$. De acuerdo con la condición de equilibrio dada por (7), $ky' = ky - mg$, y por lo tanto,

$$ky = ky' + mg$$

De esta manera, la ecuación diferencial se transforma en:

$$m\frac{d^2 y'}{dt^2} = -ky' \quad (8)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (1), por lo que podemos asegurar que admite la conocida solución $y' = A\cos(\omega t + \theta_0)$ con $\omega^2 = k/m$. Esto nos indica que la masa oscila con Movimiento Armónico Simple, alrededor del punto de equilibrio, en el cual la fuerza resultante aplicada sobre ella es cero.

ENERGÍA DEL RESORTE VERTICAL

Analicemos ahora la energía de este oscilador vertical. La energía potencial del resorte, que hemos llamado E_{pe}, no es $\frac{1}{2}ky'^2$ sino $\frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}k(y' + y_0)^2$, ya que el resorte está estirado desde su longitud natural. Esto es problemático, puesto que cada vez que queramos calcular la energía potencial elástica, necesitaremos medir la elongación completa del resorte. Para ello necesitaríamos conocer y' e y_0, dato que suele ser desconocido. Sin embargo es posible expresar todas las energías en función de *y'*, como se verá a continuación.

Con un análisis idéntico al que se realizó para el resorte horizontal, es posible expresar la energía cinética en función de y' como

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - y'^2)} \quad (9)$$

La energía cinética es máxima cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando $y' = 0$. Si se toma ese punto arbitrariamente como nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria y para la potencial elástica, la energía mecánica total será igual a la cinética en dicho instante. Esto significa que

$$\boldsymbol{E = E_k|_{(y'=0)} = \frac{1}{2}kA^2}$$

La energía potencial gravitatoria medida desde $y' = 0$ debe ser positiva por encima de dicha altura y negativa por debajo. Como el eje y' se tomó positivo hacia abajo, debemos remarcar que

$$\boldsymbol{E_{pg} = -mgy'} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que $E = E_k + E_{pg} + E_{pe}$, es fácil ver que

$$E_{pe} = E - E_k - E_{pg} = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}k(A^2 - y'^2) - (-mgy').$$

Simplificando, se obtiene la expresión final para la energía potencial del resorte:

$$\boldsymbol{E_{pe} = \frac{1}{2}ky'^2 + mgy'}. \quad (11)$$

Debe notarse que la expresión (11) *no representa* la energía potencial total, sino que es una expresión de la energía potencial elástica *alternativa* a la original, en la que se utilizaba *y* en lugar de *y'*. Como se ha advertido al comenzar la sección, para que $\frac{1}{2}ky'^2$ sea la potencial elástica, es necesario tener en cuenta el aporte de y_0. Dicho aporte es, *casualmente*, igual a *mgy'*.

La suma de las energías potencial elástica y gravitatoria, dan como resultado la energía potencial total:

$$E_p = E_{pg} + E_{pe} = \frac{1}{2} k y'^2 \qquad (12)$$

De las expresiones (9) y (12), se hace evidente que la gráfica de la Figura 11 sigue valiendo, pero en este caso debemos reemplazar la energía potencial elástica por la potencial total que es la que ahora crece o decrece a expensas de la energía cinética.

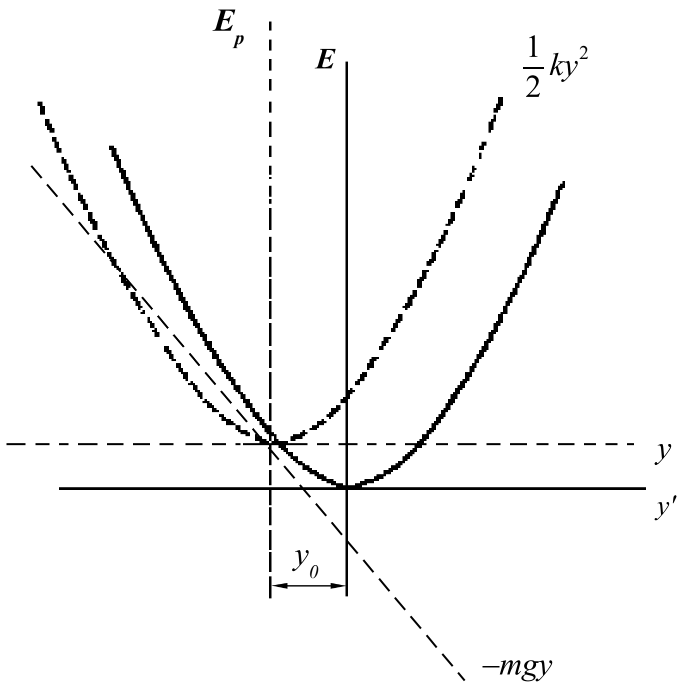


Figura 14: Energías potencial elástica, gravitatoria y potencial total para el problema de resorte vertical.

En la Figura 14 se representa la función energía potencial elástica y gravitatoria en la curva de líneas a trazos. Su suma es la curva de trazo continuo. Se ha tomado el eje y positivo hacia abajo.

Cuestiones

1- De dos resortes con idéntica constante k se cuelga la misma masa. Uno de los resortes tiene doble longitud que el otro. ¿El cuerpo vibrará con la misma frecuencia? Justifica.

2- ¿El período de un objeto que oscila sobre un resorte es el mismo, independientemente de que el resorte se oriente vertical u horizontalmente?

3- ¿La velocidad máxima de un objeto que oscila con amplitud A sobre un determinado resorte es la misma, independientemente de que el resorte esté orientado horizontal o vertical?¿La velocidad máxima de un objeto que oscila con amplitud A sobre un determinado resorte es la misma, independientemente de que el resorte esté orientado horizontal o vertical?

4- Halla de una manera aproximada la constante elástica de los amortiguadores de un automóvil estimando su carga y su período de oscilación cuando los amortiguadores se comprimen y se relajan.

OSCILACIONES NO ARMÓNICAS

El movimiento armónico simple es generado por una fuerza proporcional al desplazamiento $F=-kx$. La energía potencial es proporcional al cuadrado del desplazamiento, $E_p=½kx^2$. Generalmente, para la fuerza y para la energía potencial, el desplazamiento se mide a partir de la posición $x=0$, pero cuando la posición de equilibrio está en x_0 en lugar de en el origen de coordenadas, podemos escribir:

$$F=-k(x-x_0) \qquad \text{y} \qquad E_p=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

La gráfica de E_p y E en función de x se muestra en la Figura 15.

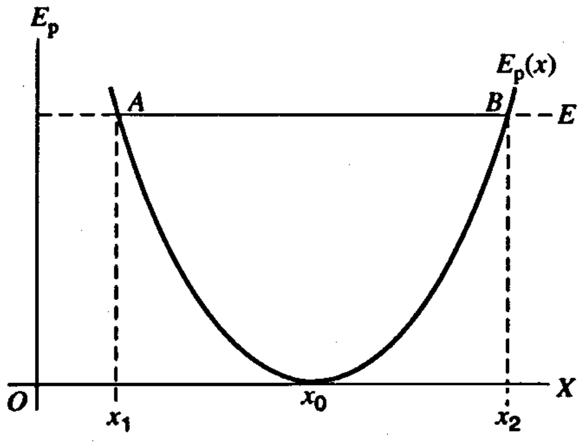


Figura 15: Energía potencial de un cuerpo que oscila alrededor de la posición x_0.

Si la energía total es E, representada por la recta horizontal que intersecta a E_p en A y B, la partícula oscila con MAS entre x_1 y x_2, estos puntos se encuentran simétricos a x_0.

Consideremos una curva de E_p que no sea una parábola pero que tenga un punto mínimo bien definido en x_0, que es la posición de equilibrio. Un ejemplo puede verse en la Figura 16.

Esta situación es la más común que encontramos en la práctica, en este caso estamos frente a un **movimiento oscilatorio no armónico.** Si la energía total es E_2, la partícula oscilará entre x_1 y x_2, que en general son no simétricas de x_0. La frecuencia de oscilación depende ahora de la energía y por lo tanto la ecuación $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ no tiene validez. Un ejemplo de este movimiento es el de un péndulo con una amplitud de oscilación muy grande.

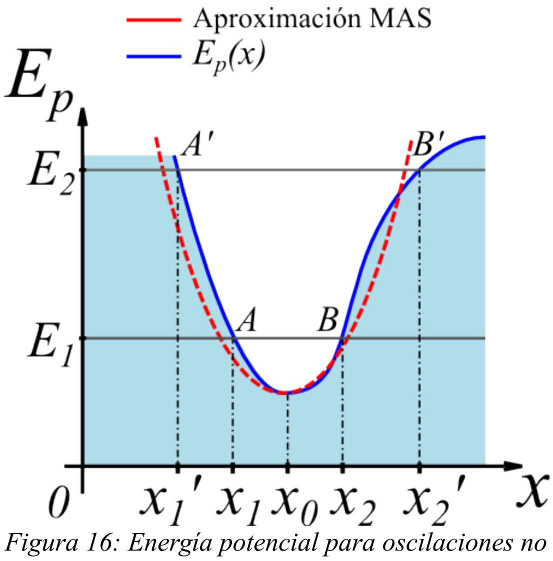


Figura 16: Energía potencial para oscilaciones no armónicas

Otro ejemplo que responde a la gráfica es el de la energía potencial de dos átomos de una molécula diatómica, los dos átomos están en movimiento oscilatorio relativo, que puede considerarse movimiento armónico simple sólo si la energía es muy baja, de modo que a bajas energías podemos aproximar la curva de energía potencial a una parábola tal como lo es la del movimiento oscilatorio armónico. En otras palabras, a bajas energías los movimientos vibratorios atómicos se pueden aproximar a un movimiento oscilatorio armónico. A medida que la energía de vibración aumenta, el movimiento se hace menos armónico y la frecuencia de las vibraciones cambia, además la energía de vibración aumenta la separación interatómica media.

La falta de armonía en las vibraciones se aplica también a los átomos de los sólidos y explica porqué un sólido se expande a medida que aumenta su temperatura como se vio en el curso de termodinámica.

OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

En el movimiento oscilatorio armónico la amplitud es constante, al igual que la energía del cuerpo que oscila. Sin embargo, si realizáramos el experimento de dejar un resorte o un péndulo oscilar libremente, observaríamos que, al cabo de cierto tiempo, dejará de oscilar, lo que indica una pérdida de energía por parte del cuerpo oscilante. Esta energía se disipa por fuerzas de rozamiento y será absorbida por el medio que rodea al cuerpo. En este caso decimos que el movimiento oscilatorio es amortiguado. Si el amortiguamiento es pequeño, el sistema oscila con una amplitud que decrece lentamente en el tiempo, como observamos en la Figura 17.

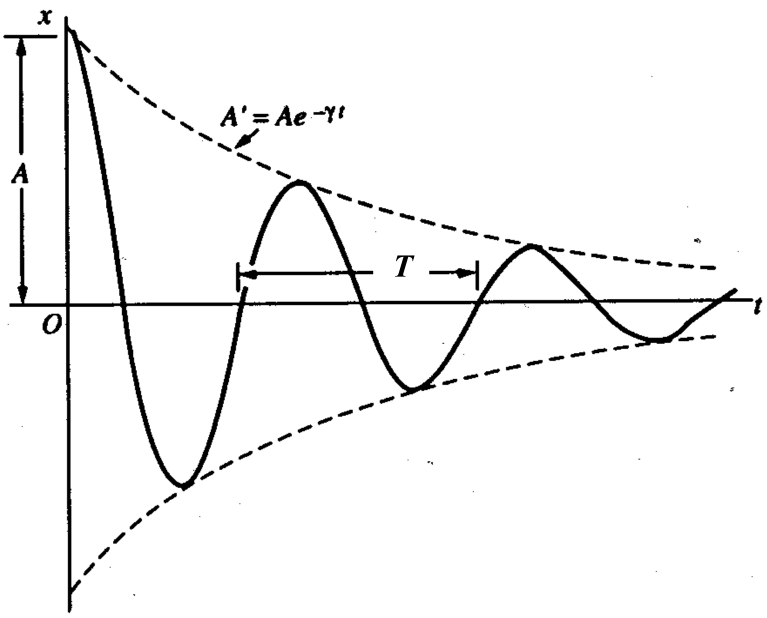


Figura 17: Desplazamiento en función del tiempo en oscilaciones amortiguadas

Veremos ahora cómo se justifica formalmente este comportamiento. La segunda ley de Newton se puede expresar como

$$\sum F = F_e + F_a = ma \ ,$$

donde F_e es la fuerza elástica ya conocida, y F_a es la fuerza de rozamiento viscoso. En nuestro modelo, consideraremos al rozamiento como una fuerza proporcional a la velocidad. La constante de proporcionalidad depende de muchos factores, como la forma del cuerpo y la viscosidad del aire, y aquí la representaremos con η [1]. Así, la ecuación de movimiento será:

[1]En la mayoría de los textos, se representa a la fuerza de rozamiento viscoso como el coeficiente de viscosidad del fluido, η , multiplicado por un factor de la superficie del cuerpo y por la velocidad. En nuestro modelo, sin embargo, tomaremos la menor cantidad de constantes necesarias sin alterar cualitativamente el resultado final.

$$\sum F = -kx - \eta v = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\eta}{m}\frac{dx}{dt}$$

La ecuación diferencial que obtuvimos no es la del MAS, ya que tiene un término adicional, que implica a la derivada primera de la posición. Una solución particular de esta ecuación es

$$x(t) = A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t) \qquad (13)$$

Donde γ es una constante dependiente del rozamiento. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que esta función satisface la ecuación de movimiento hallada.

La función $x(t)$ representada por (13), es el producto de un coseno, que representa la oscilación armónica, y una exponencial decreciente. Como resultado de este producto, la amplitud irá decreciendo en forma *exponencial*, mientras que el cuerpo oscilará con un período *T* constante.

Para poder mantener en oscilación un sistema amortiguado debemos ir suministrando energía al sistema; cuando ocurre esto decimos que el oscilador es forzado. Cuando jugamos en una hamaca, para mantenernos oscilando, debemos mover las piernas y el cuerpo hacia delante y hacia atrás o necesitamos que nos impulsen. Este es un clásico ejemplo de un *oscilador forzado*.

Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor que el que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo que se aprecia con un aumento de amplitud de la oscilación. Si la energía se introduce con el mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo.

Una manera de suministrar energía a un sistema formado por un objeto que cuelga de un muelle vertical es mover el punto de soporte hacia arriba y hacia abajo, con un movimiento armónico simple de frecuencia ω. Al principio el movimiento es complicado, pero finalmente alcanzará un estado estacionario. En dicho estado, el sistema oscila con la misma frecuencia de la fuerza externa impulsora y con amplitud constante y, por lo tanto, con energía constante también. En el estado estacionario, la energía introducida en el sistema por la fuerza impulsora durante un ciclo es igual a la disipada en un ciclo debido al amortiguamiento.

La amplitud, y por tanto, la energía de un sistema en estado estacionario, depende no sólo de la amplitud del sistema impulsor sino también de su frecuencia. Se define la *frecuencia natural de un oscilador* como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor. Por ejemplo, la frecuencia angular natural de un resorte es $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Si la frecuencia impulsora es igual (o aproximadamente igual) a la frecuencia natural del sistema, este oscilará con una amplitud mucho mayor que la propia amplitud de la fuerza impulsora. Por ejemplo, si el soporte de la figura oscila con la frecuencia natural del sistema masa-resorte, la masa

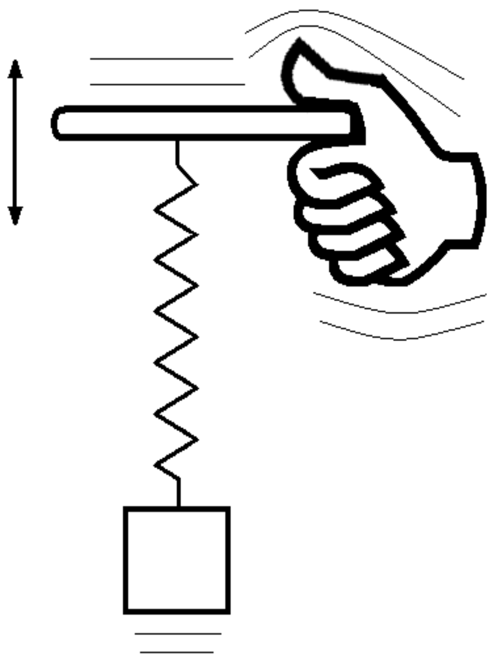


Figura 18: Oscilador forzado. La mano actúa como fuente externa.

oscilará con una amplitud mucho mayor que la del soporte. Este fenómeno se denomina *resonancia*. Cuando la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia natural del oscilador la energía absorbida por este es máxima. Por ello la frecuencia natural del sistema se denomina *frecuencia de resonancia* del mismo.

Volviendo al ejemplo previo, cuando nos sentamos en una hamaca y nos impulsamos, la fuerza impulsora es periódica. Intuitivamente movemos el cuerpo con la misma frecuencia que la natural del columpio, provocando el aumento de amplitud del balanceo. Este no es el único ejemplo familiar para el fenómeno. Es posible romper un vaso mediante una onda sonora intensa cuya frecuencia sea igual o muy próxima a la frecuencia natural de vibración del mismo.

Cuando sintonizamos un receptor de radio o de televisión, también estamos en presencia de este fenómeno. Todas las emisoras producen a la vez oscilaciones electromagnéticas forzadas sobre el circuito del receptor, pero para cada posición del sintonizador existe una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico del receptor. Cuando esta frecuencia coincide con la de una estación emisora, la absorción de energía es máxima y, en consecuencia, ésta es la única estación que se sintoniza.

El concepto de resonancia se puede extender a muchos procesos, como las reacciones nucleares, en los que existen condiciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro, aún cuando no podemos describir el proceso en términos de oscilaciones forzadas.

OSCILADORES ACOPLADOS.

En muchas situaciones físicas, dos o más partículas en oscilación se hallan ligadas por algún tipo de fuerza. Un ejemplo puede ser el de dos sistemas masa-resorte, ligados a su vez entre sí por un tercer resorte, como en el esquema de la Figura 19. En estos casos, estamos en presencia de *osciladores acoplados*.

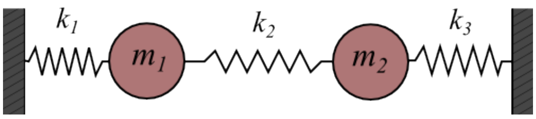


Figura 19: Osciladores acoplados

Cuando se plantea la segunda ley de Newton, se obtienen dos o más ecuaciones diferenciales acopladas. En el ejemplo de la Figura 19, tendremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales en las que las incógnitas serán x_1 y x_2, las posiciones de ambas masas. La resolución de estos sistemas es algo compleja desde el punto de vista matemático, pero se puede probar que existen *modos normales de vibración*, que pueden ser descriptos como movimientos elementales del sistema. Continuando con el ejemplo, un primer modo normal estaría dado por las dos masas moviéndose en fase en cada instante, con la misma frecuencia. Esto quiere decir que las veríamos moverse hacia la derecha al mismo tiempo, luego detenerse al mismo tiempo y moverse hacia la izquierda, siempre juntas. El segundo modo normal estaría dado por las dos partículas permanentemente en oposición de fase. En este caso, cuando veamos a m_1 moverse hacia la derecha, m_2 estará moviéndose hacia la izquierda. En estos modos fundamentales, ambas partículas cambiarán el sentido de su movimiento simultáneamente.

Los modos normales de vibración no son las únicas formas que tiene el sistema de moverse. Habitualmente se obtienen movimientos que no parecen seguir una regla, a menos que se observen en tiempos prolongados. Cualquiera de estos movimientos es una combinación de los modos fundamentales. En la observación de estos movimientos, se podrá notar que las partículas entran y salen de fase periódicamente. Quizás el caso más interesante se da cuando una de las dos partículas, por ejemplo m_1, se encuentra en reposo, en su posición de equilibrio y se hace mover a la otra, m_2 dándole una elongación inicial. Al cabo de un tiempo, m_2, que estaba en movimiento, irá perdiendo amplitud hasta detenerse momentáneamente, mientras que m_1 irá ganando amplitud. Luego, todo el sistema volverá a las condiciones iniciales y se repetirá todo el proceso. En la Figura 20, puede verse una gráfica posible para este movimiento, en la que se aprecia cómo la amplitud del movimiento de una de las partículas crece a expensas de la otra.

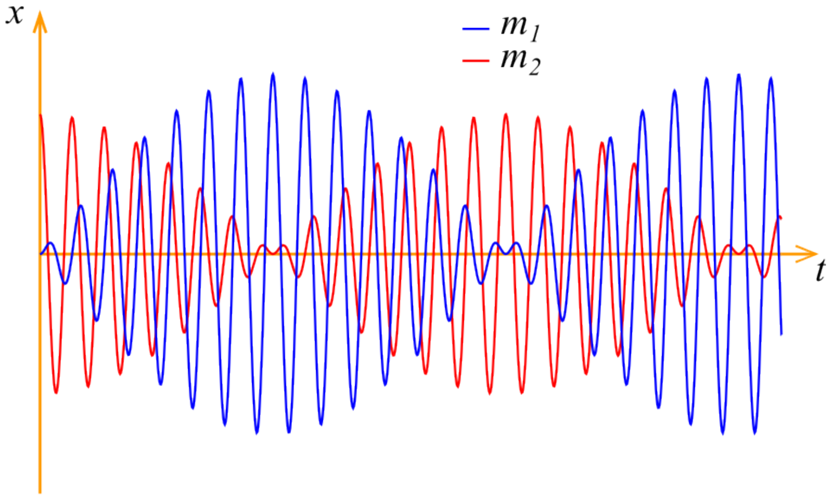


Figura 20: Posición en función del tiempo de osciladores acoplados

Desde el punto de vista energético, se puede ver que la energía de oscilación se transmite de un oscilador al otro a través del acoplamiento. La energía total del sistema, está dada por la energía que tienen los dos osciladores en cada instante y la energía del acoplamiento. Si el acoplamiento es débil (en el ejemplo, si la constante elástica k_2 es despreciable frente a k_1 y k_3), la energía de un oscilador se puede transmitir completamente al otro, siendo la suma de ambas energías siempre constante.

Actividad:
Averigua qué es un *amortiguador de masa* y cómo se emplea en la construcción de obras civiles, como el edificio *Taipei 101* y el puente *Millenium Bridge* de Londres. Relaciónalo con los conceptos de resonancia y de osciladores acoplados.

MOVIMIENTO CAÓTICO.

En la vida cotidiana usamos la palabra caos como sinónimo de desorden. En física, sin embargo, estas dos palabras no tienen el mismo significado.

Todos los sistemas físicos evolucionan de alguna forma con el tiempo, y esta evolución depende de las *condiciones iniciales*. En general, las condiciones iniciales de un sistema mecánico están dadas por la posición y la velocidad de cada partícula constituyente. Por ejemplo, una partícula unida a un resorte, apartada una distancia A de su posición de equilibrio e inicialmente en reposo, evolucionará describiendo un MAS con amplitud A.

Para Pensar:

Piensa en dos sistemas físicos distintos. Luego ejemplifica cómo pueden distintas condiciones iniciales para un mismo sistema dar lugar a evoluciones distintas.

En un sistema masa-resorte sencillo, cambiando ligeramente la posición inicial de la partícula, cambiará ligeramente la amplitud del movimiento, pero este seguirá siendo un MAS. Sin embargo, hay sistemas más complejos en los que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producen grandes variaciones en la evolución del sistema. Estos sistemas fuertemente dependientes de las condiciones iniciales se denominan *sistemas caóticos*.

Un ejemplo de sistema caótico es el péndulo doble que, esencialmente, consiste en dos masas acopladas como en la Figura 21. El efecto caótico es más sencillo de observar si las ligaduras L_1 y L_2 son rígidas. Para pequeñas oscilaciones, este péndulo se comportará como un oscilador acoplado sencillo, pero al darle más amplitud el comportamiento ya no será tan fácil de describir.

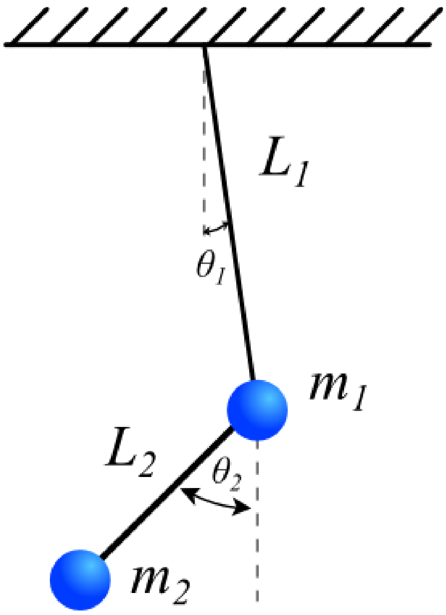


Figura 21: Péndulo doble caótico.

Como sabemos, toda medición tiene una precisión limitada. Si en un experimento se suelta el péndulo desde una condición inicial determinada y luego se repite el experimento, pero cambiando muy levemente los ángulos iniciales una fracción muy pequeña de grado, el movimiento será completamente distinto.

Es importante destacar que si bien estos sistemas no tienen siempre el mismo comportamiento, esto no significa que no sigan leyes físicas. Las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de estos sistemas son no lineales, lo que significa que hallar una solución analítica es muy difícil o, en algunos casos, imposible. Sin embargo, incluso en estos casos, es posible construir simulaciones computacionales a partir de las ecuaciones diferenciales, capaces de predecir muy bien el comportamiento del sistema. La imposibilidad física de conocer con infinita precisión las condiciones iniciales del sistema, hacen que el comportamiento predicho por las simulaciones diverja, al cabo de un tiempo, del comportamiento durante el experimento.

El comportamiento caótico, claro está, no se limita a sistemas puramente mecánicos. De hecho, la mayor cantidad de avances en teoría del caos se han hecho en meteorología. La atmósfera, con sus nubes, el viento y los gradientes térmicos en sus distintas capas, conforma un gran sistema no lineal, donde las condiciones iniciales difícilmente pueden determinarse con una precisión aceptable, y por lo tanto las predicciones a largo plazo tienen un gran margen de incerteza. También hay estudios de teoría del caos en la óptica cuántica, la electrónica, las reacciones químicas y la biología, entre otras áreas.

Actividad:

Investiga cómo se aplican las nuevas tecnologías de control en el campo de la electrónica, a los sistemas mecánicos caóticos.

PÉNDULO SIMPLE

Un péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida de un hilo inextensible relativamente largo y de masa despreciable.

El péndulo, suspendido desde el punto O está en reposo en la posición R, que es el punto más bajo, pues en él se equilibran el peso de la masa *m* con la tensión del hilo. Cuando se desvía de la posición de equilibrio hacia un lado como en la posición A, Figura 22, y se abandona a sí misma, la masa oscila alrededor de la posición R debido a la componente del peso perpendicular al hilo (F_t) mientras que la componente en la dirección del hilo se equilibra con la tensión T.

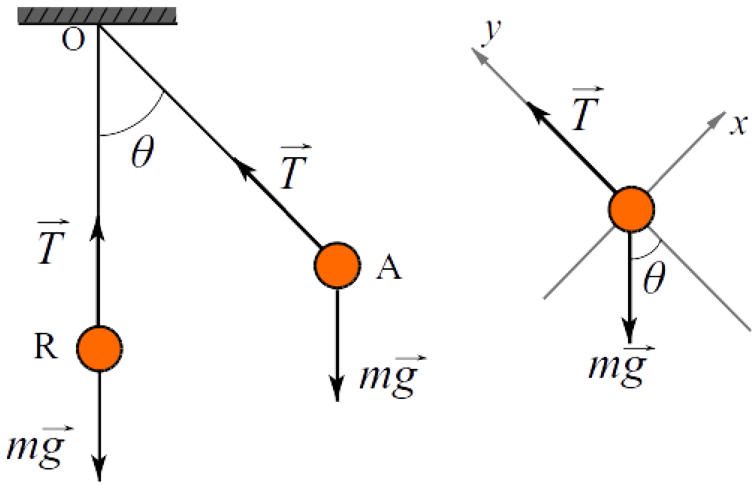


Figura 22: Péndulo simple

Para analizar el tipo de movimiento a que se ve sometido el péndulo se deben aplicar las leyes de Newton nuevamente.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, se tiene

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases}$$

y según el diagrama de cuerpo libre, en este caso queda

$$\begin{cases} \sum F_x = -mg \operatorname{sen} \theta = ma_x = m \dfrac{d^2 x}{dt^2} \\ \sum F_y = T - mg \cos \theta = ma_c \end{cases}$$

En la primera ecuación la fuerza es opuesta al sentido positivo del eje *x*; en la segunda ecuación como se trata de un movimiento circular variado, tiene una aceleración centrípeta igual a a_c.

Para encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial que surge de plantear la sumatoria de las fuerzas en *x*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g \operatorname{sen} \theta = 0$$

se hace la aproximación sen θ ≈ θ que es perfectamente aceptable para valores de θ < 5º (se insiste en que el ángulo debe estar medido en radianes). De este modo la ecuación queda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g\,\theta = 0$$

pero si el ángulo está medido en radianes $\theta = x/l$ y, reemplazando se vuelve a tener la ecuación diferencial en x

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l}\,x = 0 \qquad (14)$$

Esta ecuación es idéntica a la ya conocida $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, excepto que en el sistema masa-resorte, valía la expresión $\omega^2 = k/m$.

En este caso, $\omega^2 = g/l$ por lo que podemos afirmar que, en *pequeñas oscilaciones*, el péndulo simple describe un MAS.

El período de un péndulo será entonces:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\ ,$$

lo que nos permite afirmar, como conclusión, que

"El período de oscilación de un péndulo es, para pequeñas oscilaciones, independiente de la masa, y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del hilo e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad en el lugar."

Cuestión

Resuelve el siguiente problema que se propuso a Galileo: Una cuerda cuelga de una torre alta de modo que el extremo superior es invisible e inaccesible, pero el extremo inferior sí se ve. ¿Cómo averiguarías la longitud de la cuerda?

Ejercicio 9

Un péndulo de período T cuelga del techo de un ascensor. Calcula el período de oscilación del péndulo cuando el ascensor baja con una aceleración igual a la mitad de la gravedad de ese lugar.

PROBLEMAS

1- Una masa de 10g unida a un resorte horizontal describe un M.A.S. de 24cm de amplitud y 4 s de período. La elongación es 24cm para $t = 0$. Calcula:

a) La posición del cuerpo en el instante $t = 0{,}5$s. *(R: 0,17m)*

b) La fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando $t = 0{,}5$s. *(R: $4{,}19.10^{-3}$N)*

c) El tiempo mínimo necesario para que el cuerpo se mueva desde la posición inicial al punto de elongación $x = -\ 12$ cm. *(R: 1,33s)*

d) La velocidad del cuerpo cuando $x = -\ 12$ cm. *(R: 32,65cm/s)*

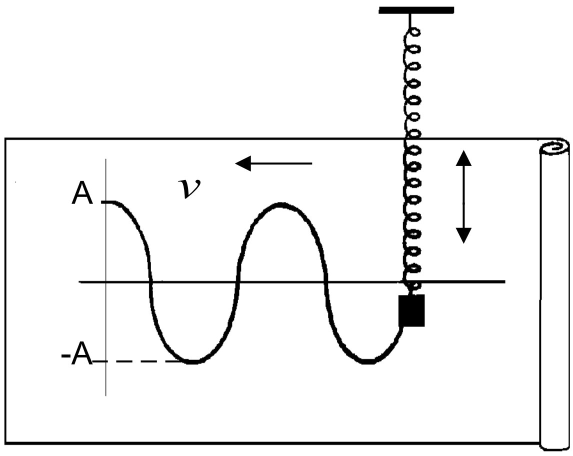
2- La escala de un dinamómetro de resorte que registra de 0 a 150 N tiene 15 cm de amplitud. Se observa que un cuerpo suspendido de la balanza oscila verticalmente y da 1,5 vibraciones por segundo. ¿Cuál es el peso del cuerpo? *(R: 110,3N)*

3- Un cuerpo está vibrando con movimiento armónico simple de amplitud 15cm y frecuencia 4 vibraciones por segundo. Calcula:

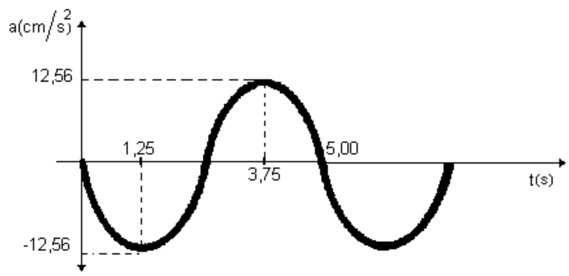
a) Los valores máximos de la aceleración y la velocidad. *(R: 94,65m/s², 3,77m/s)*

b) La aceleración y la velocidad cuando la elongación es 9cm. *(R: $-56{,}58 m/s^2$, $\pm 3\, m/s$)*

c) El tiempo necesario para desplazarse desde la posición de equilibrio a un punto situado a 12 cm de la misma. *(R: 0,037s)*



4- La figura adjunta muestra la representación gráfica de la aceleración en función del tiempo de una partícula que se mueve con M.A.S. Calcula la velocidad de dicha partícula en el instante en que su posición es 5 cm. *(R: 7,78cm/s)*



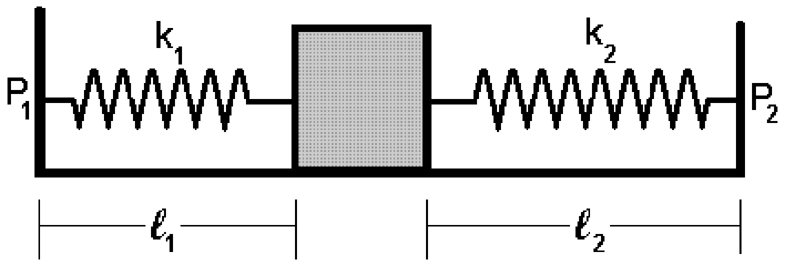
5-Un peso de 19,6 N suspendido de un resorte produce en éste un alargamiento de 20 cm. a) ¿Cuál es la constante del resorte? b) ¿Cuál es el período de vibración del peso de 19,6 N? c) ¿Cuál sería el período de oscilación de una masa de 4 kg pendiendo del mismo resorte? *(R: 98N/m, 0,9s, 1,27s)*

6- Un bote de madera de 300 kg flota en un lago. Cuando sobre él se coloca un hombre de 75 kg se hunde 5 cm. Cuando el hombre salta fuera de él, el bote vibra levemente. Si se desprecia el amortiguamiento: ¿Cuál es la frecuencia de vibración? ¿Cuál es la energía total de vibración? *(R: 1,11Hz, 18,375J)*

7- Un objeto de 3 kg alarga 16 cm un resorte cuando cuelga de éste verticalmente en equilibrio. El resorte se estira 5 cm desde su posición de equilibrio y se deja el objeto en libertad. Determina la energía total y la energía potencial del resorte cuando la masa alcanza su máximo desplazamiento. *(R: 0,23J, 1,7J)*

8- Una masa de 3 kg oscila en un resorte vertical de constante k = 500 N/m. Su energía cinética máxima es 5 J. a) Si se elige una energía potencial total de modo que sea cero en el equilibrio, ¿cuál es la energía potencial máxima de oscilación. b) ¿Cuáles son la amplitud y el período de oscilación. c) ¿Cuál es la deformación máxima del resorte a partir de su longitud natural? *(R: 5J; 0,14m, 0,49s; 0,199m)*

9- Un bloque de masa m puede deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento limitada por dos paredes verticales. Inicialmente el bloque se encuentra en el centro de la superficie y la distancia entre cada una de sus caras y las paredes límites es de 30cm . Se decide unir cada una de las caras del bloque con la pared correspondiente en los puntos P_1 y P_2 mediante dos resortes, cada uno de los cuales tiene una longitud natural de 20cm, y constantes k_1 y k_2 diferentes. Si k_1 = 0,3 N/cm, k_2 = 0,1 N/cm, m = 100 g,



Problema 9

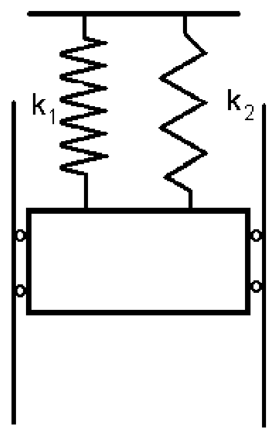
a) Calcula la longitud de cada resorte cuando el bloque se encuentre en la nueva posición de equilibrio, después de sujetar los resortes en P_1 y en P_2 . *(R:25cm y 35cm)*
b) Demuestra que la constante del conjunto es 0,4 N/cm.
c) Calcula el período de vibración del bloque cuando se desplaza ligeramente de su nueva posición de equilibrio y se abandona a sí mismo. *(R: 0,31s)*

10- Una masa está unida a dos resortes en paralelo como indica la figura. Si las constantes de los mismos son k_1 y k_2;

a) Halla el período de oscilación cuando se desplaza de su posición de equilibrio. (La masa se mueve entre dos rieles sin rozamiento)

b) ¿Con qué período oscilará si los resortes se colocan en serie?

11- Un péndulo de reloj que señala tiempo exacto en un lugar en que g = 980cm/s ^{2} , retrasa 10 s por día en un punto situado en una montaña. Calcula el valor de g en dicho lugar. *(R: 9,798m/s²)*



Problema 10

Problemas integradores

1- La energía total de un cuerpo que realiza un MAS es de $3\cdot10^{-4}$ J. La fuerza máxima que actúa sobre él es de $1{,}5\cdot10^{-2}$ N. Si el período de las vibraciones es de 2 s y la fase inicial es de 60º, determinar: a) La ecuación de la posición en función del tiempo con los parámetros reemplazados; b) La velocidad y la aceleración para $t = 0{,}7$ s.

2- Una masa de 2g oscila con un período de $T = 4$ s y amplitud 4 cm. En el instante inicial la fase es de 45º. Cuando su elongación sea de 1 cm , hallar: a) La Energía cinética de la partícula; b) Su energía potencial; c) Comparar la variación de energía potencial gravitatoria, frente a la variación de Energía Potencial elástica o del resorte, si el mismo oscilara en posición vertical.

3- En una prueba de resistencia de equipos de bungee jumping se obtiene un oscilación final con una amplitud de 7 metros. La energía cinética máxima del movimiento es 4998 J. El elástico se estira en total, desde su longitud natural, 10,843 m.

   a) Halla la constante elástica del equipo de salto. *Rta: k = 204 N/m*

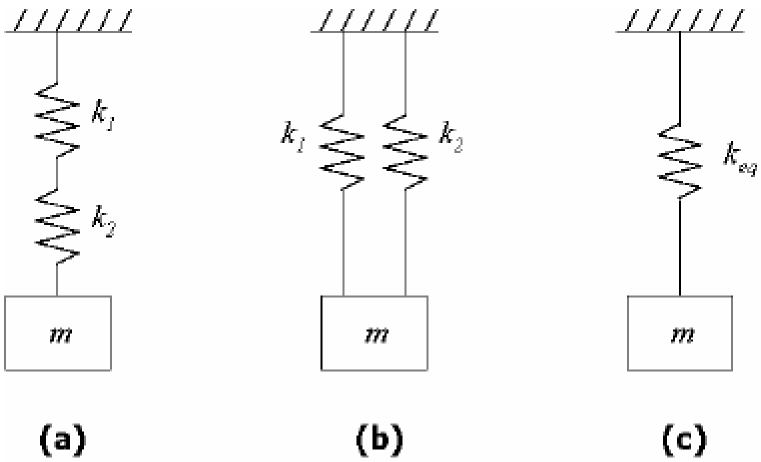
   b) Calcula la masa del hombre que hizo la prueba. *Rta: m= 79,997 kg*

   c) Calcula la energía potencial elástica máxima del salto. *Rta: Epe(máx) = 10485,804 J*

4- La longitud de la cuerda o alambre que soporta un péndulo simple crece suavemente al aumentar la temperatura. ¿Cómo afectará esto a un reloj que funciona por la acción de un péndulo simple?

5- Dos sistemas masa-resorte oscilan con frecuencias f_1 y f_2 . Si $f_1 = 2\,f_2$ y las constantes de los dos resorte son iguales , encontrar la relación entre las masas oscilantes.

6- Analizar las diferentes configuraciones de resortes con masa, determinando una expresión para su período.



7- Una masa m_1 se desliza sobre una superficie horizontal lisa y está atada a un resorte de constante k y oscila con amplitud A. Cuando el resorte está con su mayor deformación y la masa está instantáneamente en reposo, se coloca en la parte superior de m_1 otra masa m_2.

a) ¿Cuál es el menor valor del coeficiente de roce estático que puede existir sin que m_2 se deslice sobre m_1?
b) Explicar como se modifican la energía total E, la amplitud A, la frecuencia angular ω y el período T al situar m_2 sobre m_1. Suponer que el rozamiento es suficientemente grande para que no haya deslizamiento.

8- Una partícula de masa m, unida a un resorte de constante elástica k describe un movimiento armónico simple. ¿Es posible determinar la amplitud del movimiento conociendo solamente la energía mecánica en un instante? ¿Si además se conoce la energía cinética, es posible determinar su posición? Con esos mismo datos, ¿es posible conocer las condiciones iniciales del movimiento?

Bibliografía:

Alonso, M.; Finn, E. J.: *Física*, Ed Addison Wesley Iberoamericana. U.S.A., 1995

Blatt, F.: *Fundamentos de Física*, Prentice Hall – Hispanoamericana. Méjico, 1991.

Giancoli, D.C.: *Física: principios y aplicaciones*, Reverté S.A. España, 1985.

Halliday, D.; Resnick, R.: *Fundamentos de Física* – CECSA. Méjico, 1980.

Peña, A.; García, J.: *Física 2º Bachillerato (Logse)*, Mc Graw-Hill. España, 1996.

Peña Sainz; Garzo Pérez : *Curso de Física - COU*, Mc Graw-Hill. España, 1990.

Sears; Zemansky : *Física*, Aguilar. Madrid, 1981.

Tipler, P.: *Física*, Reverté. Barcelona, 1983.