

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Conjunto

Reales no negativos

Volumen

1º Año

Matemática

Cód. 1101-19

Prof. Ma. Del Luján Martínez
Prof. Verónica Filotti



Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS



CONJUNTOS - Revisión

A continuación, encontrarás un listado de símbolos, que te será útil para el desarrollo de este y otros temas

SÍMBOLO	SE LEE
\in	pertenece a
\notin	no pertenece a
\subset	incluido en
$\not\subset$	no incluido en
\cap	intersección
\cup	unión
\emptyset	conjunto vacío
\forall	para todo
\exists	existe por lo menos
\nexists	no existe ningún
\Rightarrow	implica
\Leftrightarrow	si y sólo si
$/$	tal que
\wedge	y
\vee	o
\neq	no igual, distinto
$<$	menor
\leq	menor o igual
$>$	mayor
\geq	mayor o igual
\therefore	por lo tanto

Matemática

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si $A = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \text{ es impar} \wedge x \in D_{30}\}$

a) Escribe A por extensión

.....

b) Completa: \in, \notin, \subset o $\not\subset$

$3 \dots A$ $\{3\} \dots A$ $\{2;3\} \dots A$ $A \dots \mathbb{N}$ $1 \dots A$

2. Sean $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \in D_{45}\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \in M_3 \wedge x < 31\}$

Escribe por extensión los conjuntos:

$A = \dots$

$B = \dots$

Obtiene:

a) $A \cap B = \dots$

b) $(A \cap \emptyset) \cup B = \dots$

c) $(B \cup \emptyset) \cap A = \dots$

3. Si $F = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es primo} \wedge x \in D_{120}\}$ y $H = \{p/p = 3x + 2 \wedge x \in F\}$.

Escribe por extensión

$F = \dots$

$H = \dots$

4. Justifica si son verdaderas o no las siguientes afirmaciones.

a) Si $M = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es dígito}\}$ y $P = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \in M_2\}$ entonces $M \subset P$

.....

b) $\forall B$ resulta $B \subset B \wedge \emptyset \subset B$

.....



CAPÍTULO I: NÚMEROS REALES NO NEGATIVOS

LA AMPLIACIÓN DE LOS DISTINTOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

¿Qué conocemos hasta ahora acerca de los números?

Hagamos un poco de historia para recordar cuáles fueron las razones que llevaron a los matemáticos a ampliar los conjuntos numéricos.

Como ya sabes nuestro trabajo con los números comenzó, como sucedió en la historia, intentando resolver problemas ayudados por los dedos, las piedritas,... es decir, comenzó contando.

Así conocimos a los **números naturales** cuyo conjunto simbolizamos:
N

$$\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$$

La introducción del sistema de numeración posicional para escribir estos números motivó la aparición del cero surgiendo entonces el conjunto:

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{es decir} \quad \mathbf{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

En este conjunto, como recordarás, no siempre es posible resolver cuestiones relativas a la idea de "*repartir en partes iguales*" o sea, no siempre es posible realizar la cuenta

$$\mathbf{p : q}$$

que, como sabemos, equivale a encontrar un número x de N_0 tal que

$$\mathbf{q \cdot x = p}$$

Para poder resolver dichas cuestiones surge, el conjunto de los **números racionales no negativos** que simbolizamos con \mathbf{Q}_0^+

Q del inglés *quotient* que significa *cociente*

¿Qué números están en \mathbf{Q}_0^+ ?

En \mathbf{Q}_0^+ están todos los números que pueden escribirse en forma de fracción, o sea los números de la forma $\frac{p}{q}$, con $p \in N_0$ y $q \in N$. Es decir:

$$\mathbf{Q}_0^+ = \left\{ \frac{p}{q}; p \in N_0 \text{ y } q \in N \right\}$$

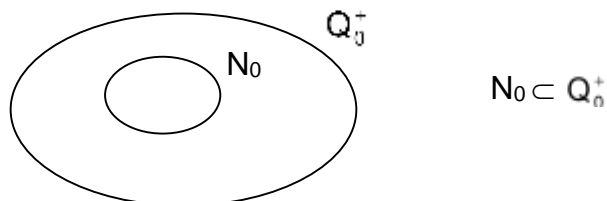
Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

Para recordar:

Existen infinitos representantes de **cada** elemento de \mathbb{Q}_0^+ a los que llamamos racionales equivalentes.
Por ejemplo:
 $\frac{4}{10}$; $\frac{16}{40}$ y $\frac{2}{5}$ son representantes de un mismo número

Como ya sabes, cualquier número $a \in \mathbb{N}_0$, puede expresarse como la fracción $\frac{a}{1}$, por lo que \mathbb{N}_0 es, efectivamente, un subconjunto de \mathbb{Q}_0^+ . Más aún, las operaciones definidas entre elementos de \mathbb{Q}_0^+ extienden las definidas en \mathbb{N}_0 y la relación de orden entre los elementos también.



Sin embargo, \mathbb{Q}_0^+ también resulta insuficiente para resolver cuestiones como la siguiente:

Calcula x tal que $x^2 = 2$

Intentar encontrar un número racional que verifique la ecuación anterior se ve frustrado pues:

¡No existe un número racional cuyo cuadrado sea 2!

Sin embargo, existe al menos un número que verifica dicha igualdad y se simboliza

$$\sqrt{2}$$

Es posible probar que no puede escribirse en forma de fracción.

$\sqrt{2}$ no es racional

Este no es el único número con esas características. Hay infinitos números que no pueden escribirse en forma de fracción por ejemplo: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; π ;...

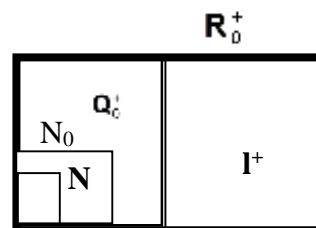
A estos números los llamamos números **irracionales positivos** y al conjunto formado por ellos lo simbolizamos \mathbb{I}^+ .



Al conjunto formado por todos los racionales no negativos y los irracionales positivos lo denominamos: **conjunto de los números reales no negativos** que simbolizamos:

\mathbf{R}_0^+ y leemos “erre cero más”

Es decir: $\mathbf{R}_0^+ = \mathbf{Q}_0^+ \cup \mathbf{I}^+$



Observemos que: $\mathbf{Q}_0^+ \cap \mathbf{I}^+ = \emptyset$

Actividades

1. Completa el cuadro con **SI** o con **NO** según corresponda

El número	¿es natural?	¿es racional?	¿es irracional?
$\frac{2}{5}$			
7			
π			
$\sqrt{3}$			
$\frac{20}{4}$			
$\frac{5}{7}$			
2,5			
3,127			
0			

2. Escribe por extensión

$$A = \left\{ x/x = \frac{a}{b}; a \in M_3; a < 7 \wedge b \text{ es un dígito primo} \right\}$$

$$B = \left\{ x/x = \frac{m}{p}; m \in D_{12}; \wedge p \text{ es dígito par} \wedge x < 1 \right\}$$

Matemática

FORMA DECIMAL DE UN NÚMERO REAL NO NEGATIVO

Cuando nos planteamos expresar la forma decimal de un número real no negativos, nos encontramos con las siguientes situaciones:

- $\frac{3}{4} = 0,75 = 0,75000\dots = 0,75\widehat{0}$ Expresión decimal de período cero.
- $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\widehat{3}$ Expresión decimal periódica de período 3
- $\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$ Expresión decimal con infinitas cifras decimales no periódicas

Observamos que:

- A todo número real no negativo (\mathbb{R}_0^+) le corresponde una expresión decimal
- A todo número racional no negativo (\mathbb{Q}_0^+) le corresponde una expresión decimal periódica

Ahora nos planteamos la siguiente pregunta:

A cada expresión decimal periódica,

¿le corresponderá un número racional no negativo?

Resolveremos esta cuestión aplicando una estrategia que a continuación te mostramos a partir de los siguientes ejemplos.



Ejemplo 1

Consideremos el número:

$$x = 1,333\dots = 1,\overline{3}$$

Trabajamos, para que sea más fácil, en una tabla de dos columnas. En la primera columna describimos los pasos de la estrategia en forma coloquial y en la segunda, aplicamos dicha estrategia en forma simbólica

<i>Pasos en Forma coloquial</i>	<i>Pasos en forma simbólica</i>
1. Multiplicamos la expresión periódica por una potencia de 10 elegida convenientemente de modo que un período completo integre la parte entera del nuevo número.	$10x = 13,333\dots$
2. Restamos las expresiones obtenidas en 1 con el número dado	$\begin{array}{r} 10x = 13,333\dots \\ - \quad x = 1,333\dots \\ \hline 9x = 12 \\ \\ x = \frac{12}{9} \end{array}$

Así, $\frac{12}{9}$ es la fracción que representa a la expresión decimal dada.

$$\text{Entonces: } 1,\overline{3} = \frac{12}{9}$$

Ejemplo 2

Ahora consideramos el número:

$$x = 2,4555\dots = 2,4\overline{5}$$

Trabajamos de la misma forma que en el ejemplo 1

Matemática

<i>Pasos en Forma coloquial</i>	<i>Pasos en forma simbólica</i>
1. Multiplicamos la expresión periódica por una potencia de 10 elegida convenientemente de modo que un período completo integre la parte entera del nuevo número .	$100x = 245,555\dots$
2. Multiplicamos la expresión inicial por una potencia conveniente de 10 de modo que el período quede después de la coma decimal	$10x = 24,5555\dots$
3. Restamos las expresiones obtenidas en 1 y en 2	$\begin{array}{r} 100x = 245,555\dots \\ - 10x = 24,555\dots \\ \hline 90x = 221 \\ x = \frac{221}{90} \end{array}$

Así, $\frac{221}{90}$ es la fracción que representa a la expresión decimal dada.

$$\text{Entonces: } 2,4\bar{5} = \frac{221}{90}$$

Ejemplo 3

Consideremos:

$$x = 4,18000\dots = 4,18\bar{0}$$

Siguiendo la estrategia dada tenemos:

$$\begin{array}{r} 1000x = 4180,\bar{0} \\ - 100x = 418,\bar{0} \\ \hline 900x = 3762 \end{array}$$

de donde:

$$x = \frac{3762}{900} = \frac{418}{100}$$

Como puedes comprobarlo, la estrategia corrobora el mecanismo que ya conocías para expresiones periódicas de período cero, comúnmente llamadas **expresiones decimales exactas**.



Concluimos:

Toda expresión decimal periódica representa un número racional

A todo número de \mathbb{Q}_0^+ le corresponde una expresión decimal periódica.

Por lo tanto:

Toda expresión decimal periódica representa un número racional y recíprocamente, todo número racional tiene como representante una expresión decimal periódica.

Hemos dado otra **caracterización** de los números racionales ya que, con lo anterior podemos decidir si un número dado en forma decimal es racional o no (basta saber si la expresión es periódica o no)

Actividades

3. ¿Se puede escribir una fracción equivalente a...

i) ... $\frac{2}{3}$ con denominador 12?

ii) ... $\frac{5}{4}$ con denominador 7?

iii) ... $\frac{3}{7}$ con denominador impar?

Si es posible, da un ejemplo. Si no lo es, explica por qué

4. ¿Cuál es la fracción decimal de menor denominador posible equivalente a:

a) $\frac{2}{5}$?

c) $\frac{7}{20}$?

b) $\frac{7}{4}$?

d) $\frac{2}{25}$?

¿Qué estrategia has empleado para lograrlas?

Para recordar:

Llamamos **fracción decimal** a todo número racional que tiene por denominador una potencia natural de 10

Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

5. Indica en forma decimal cada una de las siguientes expresiones, ¿qué período obtienes en cada caso?

a) $\frac{23}{8}$

d) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{35}{27}$

e) $1\frac{7}{30}$

c) $\frac{3}{7}$

f) $2\frac{9}{22}$

6. Indica una fracción equivalente a la expresión decimal de $0,\overline{9}$. Prueba ahora con $2,\overline{39}$; $0,\overline{29}$; $3,\overline{9}$ ¿Qué puedes conjeturar?

7. Dados $0,\overline{4}$, $2,\overline{25}$, $0,\overline{9}$, $0,\overline{43}$, $0,\overline{146}$, $1,\overline{23}$, $3,\overline{25}$

a) Exprésalos como fracción.

b) ¿Cuál es la fracción de menor denominador posible equivalente a los números dados?

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado a) podemos enunciar una **regla práctica** para transformar una expresión decimal periódica a fracción

- **El numerador** es la diferencia entre el número formado por la parte entera del número seguida de la parte no periódica (si la tuviese) seguida del período y la parte entera seguida de la parte no periódica (si la tuviese)
- **En el denominador** el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica (si la tuviese)

8. Observa los siguientes números :

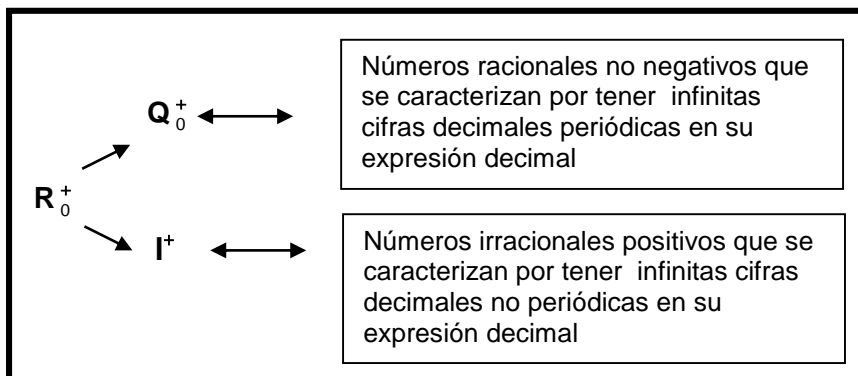
- 0,12345...
- 2,101001000...
- 3,2468101214...
- 12,323322333222.....
- 0.13579111315.....

a) ¿Qué puedes decir respecto de la expresión decimal de cada uno de ellos?

b) ¿Pertencen al conjunto de los números racionales no negativos?

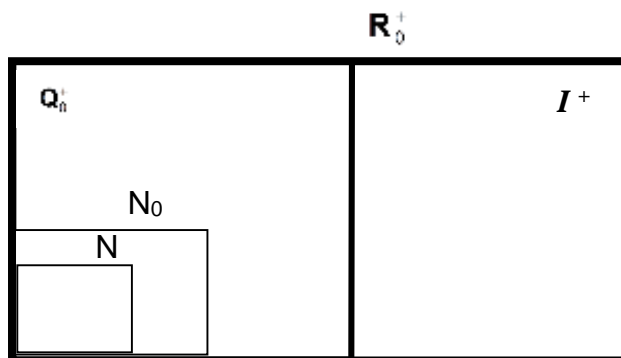


Sinteticemos en un diagrama nuestras conclusiones:



9. Ubica cada uno de los números del conjunto

$B = \left\{ 3; 0; \frac{1}{3}; \pi; \sqrt{2}; 1,5; \frac{7}{5}; 2543; \sqrt{3}; 0,434343 \dots \right\}$ en el siguiente diagrama



10. ¿Cuáles de cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas? Justifica tu respuesta.

- Todo número irracional tiene infinitas cifras decimales.
- Todo número que tenga infinitas cifras decimales es irracional.
- El número irracional π es igual a 3,14
- Un número racional no negativo es también un número real no negativo.
- Un número irracional positivo es también un número real no negativo.

Matemática

OPERACIONES CON REALES NO NEGATIVOS

¿Cómo operamos en \mathbb{R}_0^+ ?

Has trabajado resolviendo operaciones en \mathbb{Q}_0^+ .

Te contamos que las operaciones en \mathbb{R}_0^+ , del que \mathbb{Q}_0^+ es un subconjunto, gozan de las siguientes **propiedades**.

Cualesquiera sean los números a , b y c en \mathbb{R}_0^+

SUMA

MULTIPLICACIÓN

$$a+b \in \mathbb{R}_0^+ \longleftarrow \text{Ley de cierre} \longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}_0^+$$

$$a+b = b+a \longleftarrow \text{Conmutativa} \longrightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

$$a+(b+c) = (a+b)+c \longleftarrow \text{Asociativa} \longrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a+0 = 0+a = a \longleftarrow \text{Elemento neutro} \longrightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Elemento Inverso

Recíproco

$$\forall a \neq 0; \exists \frac{1}{a} / a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma



$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Transforma la multiplicación en una suma

(FACTOREO) Transforma la suma en una multiplicación



Actividades

11. ¿Cuáles son las propiedades de la multiplicación o de la suma indicadas con (1),(2),(3),(4) y (5)?

$$8. \left(p + \frac{1}{8}m \right) \underset{(1)}{=} 8p + 8 \left(\frac{1}{8}m \right) \underset{(2)}{=} 8p + \left(8 \cdot \frac{1}{8} \right) m \underset{(3)}{=} 8p + 1m \underset{(4)}{=} 8p + m \underset{(5)}{=} m + 8p$$

12. ¿Cuál es el recíproco de cada uno de los siguientes números?

- a) $\frac{2}{3}$
- b) 0,5
- c) $1 + \frac{3}{2}$
- d) 3
- e) $2, \bar{3}$

13. Calcula el valor de x en cada caso aplicando propiedades

- a) $\frac{3}{2} \cdot x = 1$
- b) $5 \cdot x = 1$
- c) $0,2 \cdot x = 1$
- d) $5,4 \cdot 2 \cdot x = 1$
- e) $\sqrt{2} \cdot x = 1$
- f) $x \cdot 0, \bar{3} = 1$
- g) $\frac{3}{5} \cdot x = 0$
- h) $\left(\frac{3}{7} + \frac{5}{8} + \frac{2}{11} \right) \cdot x = 0$

RESTA

Dados a y $b \in \mathbb{R}_0^+$ con $b \geq a$, definimos:

$$b - a = x \Leftrightarrow x + a = b$$

DIVISIÓN

Dados p y $q \in \mathbb{R}_0^+$ con $q \neq 0$, definimos:

$$p : q = r \Leftrightarrow p = q \cdot r$$

POTENCIACIÓN

Dados $a \in \mathbb{R}_0^+$, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores}} = a^n$ $n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$

Convenimos que:

$$\text{si } n = 1 ; a^1 = a$$

$$\text{si } n = 0 ; a^0 = 1 \text{ siendo } a \neq 0$$

RADICACIÓN

$$a \in \mathbb{R}_0^+ ; \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ con } n \in \mathbb{N}, n > 1$$

Llamamos $n \rightarrow$ índice

$a \rightarrow$ radicando

$b \rightarrow$ raíz



Actividades

14. Escribe como fracción irreducible el resultado de:

a) $\frac{2 - 1,\bar{9} + 1}{3,\bar{1}}$

b) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0,3 + 1,12}{\sqrt{\frac{4}{9}}}$

c) $\frac{2^2 \cdot \left(\frac{1}{5} + 3\right) + 0,2 : 3}{2 - \frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{5}{4}}$

15. ¿Cuáles son los valores de “a” que cumplen las siguientes condiciones simultáneamente?

➤ $a < \frac{4 - \frac{1}{2} + 3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} - 1$

➤ $a > 8 : 2 - \frac{1}{20}$

➤ $a \in \mathbb{N}_0$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En Matemática una misma idea puede expresarse empleando diversas formas del lenguaje.

Por ejemplo, en lenguaje coloquial la siguiente situación:

“la suma de un número y tres cuartos del mismo”

se expresa en el lenguaje simbólico

$$x + \frac{3}{4}x$$

Lo que escribiste es una **expresión algebraica en x**, donde la letra x, llamada **variable** de la expresión, indica **un número cualquiera**.

LENGUAJE DE LA
MATEMÁTICA

- COLOQUIAL
- SIMBÓLICO o ALGEBRAICO
- GRÁFICO

Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

Observemos, en la tabla, que el valor de $x + \frac{3}{4}x$ depende del valor de x .

Valor numérico de x	Valor numérico de la expresión algebraica $x + \frac{3}{4}x$
0	$0 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$
1	$1 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$
.....

Como podrás observar, esto no es nuevo, en muchos de tus trabajos en Matemática empleaste expresiones algebraicas. Lo único que hemos agregado son, tal vez, nuevos nombres a lo ya conocido.

Actividades

16. Escribe la expresión algebraica que corresponde en cada caso:

- a) El área de un cuadrado cuyo lado mide x .
- b) El área de un rectángulo cuyos lados miden x e y .

$x \cdot x = x^2$ Por definición de potencia

17. Completa el cuadro:

	$2a + b$	$3 \cdot (a + 1) + \frac{1}{2}b$
$a = 1$ y $b = 2$		
$a = \frac{1}{5}$ y $b = 0$		



18. Efectúa las siguientes multiplicaciones .Justifica aplicando propiedades

a) $(3x)(0,5y) =$ c) $\left(\frac{1}{3}x\right)(3z) =$ e) $\left(\frac{2}{5}a\right)(5b) =$

b) $(0,4a)(9m) =$ d) $\left(\frac{3}{7}x\right)(5x) =$ f) $(0,5k)(5p) =$

19. Transforma en suma los siguientes productos

a) $3 \cdot (x + y) =$
b) $2,1 \cdot (5 + b) =$
c) $3a \cdot (2x + y) =$
d) $5b \cdot (5a + 3c) =$
e) $x \cdot (x + 2y) =$

20. Si $(a + b) \cdot 7 = 0,2\bar{3}$ expresa en forma de fracción el resultado de

a) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + 4$

b) $6a + \frac{2}{5} + 6b$

c) $\sqrt{\frac{6}{5}a + \frac{6}{5}b}$

21. Reduce términos si es posible:

a) $2x + 6 + 13x + 5x =$

b) $2a + 3b + 5a + 6b =$

c) $8\alpha + 6\beta + 5\alpha + 6\beta =$

d) $3a + 4b + 5b + 1 =$

Los sumandos que poseen LA MISMA PARTE LITERAL RECIBEN EL NOMBRE DE *TÉRMINOS SEMEJANTES*
Como OBSERVAMOS, LA SUMA DE TÉRMINOS SEMEJANTES SE PUEDE REDUCIR a un ÚNICO TÉRMINO

22. Resuelve hasta obtener la mínima expresión:

a) $\frac{5}{4}(x + 4) + 2x$

b) $\frac{7}{3}(a + 3) + \frac{1}{2}a$

c) $\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot 0,5 + 3x$

Matemática

d) $\frac{12}{5}m + 3(m + 4)$

e) $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}x + 4\right) + \frac{1}{2}(x + 5)$

f) $\left(a + \frac{1}{5}\right) \cdot 0,2 + 2a$

g) $2xy + \frac{3}{5}y \cdot (x + 5y)$

h) $2x \cdot \left(x + \frac{1}{2}y\right) + 0,3x^2$

i) $\frac{5}{2}x \cdot (2y + 1) + \frac{1}{4}y \cdot (3x + 8)$

23. Si $(p + q) \cdot 3 = 12$. ¿Cuál es el resultado de cada operación?

a) $3 \cdot (p + q) + \frac{1}{2} : (p + q) - \frac{3}{5}$

b) $(p + q)(p + q) - (p + q)$

c) $4p + 4q + 5p + 5q$

d) $\sqrt{\frac{p+q}{81}} + \left(\frac{1}{2}\right)^0$

24. Expresa en símbolos las siguientes preposiciones:

a) al cuadrado de la suma entre **a** y **b**, sumar el recíproco de $2/3$

b) a la séptima parte de la diferencia entre el cuadrado de **a** y la raíz cúbica de $1/8$, sumarle el recíproco de **c**

c) a las dos quintas partes de la raíz cuadrada de 25, sumarle la tercera parte del cuadrado de **b**



25. Averigua la medida de los lados de un triángulo isósceles de perímetro 231,73 m sabiendo que su base es la tercera parte de uno de los lados congruentes.
26. La tercera parte de un número más el 20% del mismo da por resultado $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es el número?
27. Juan Pablo compra un libro que por pago de contado le descuentan 15%. Si el libro cuesta \$224,50. ¿Cuánto pagó Juan Pablo?.
28. Un tren recorre un trayecto en tres etapas. En la primera recorre los $\frac{3}{5}$ del camino total y en la segunda etapa el 36% del resto. ¿Qué porcentaje recorre en la tercera etapa?
29. En una fiesta se sirvieron 200 platos de comida. Del total de los platos, 100 fueron de pizzetas, 27 de empanadas y 15 de saladitos. El resto fue de masas finas y torta.
- a) ¿Qué porcentaje de los platos servidos fue de empanadas?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de empanadas servidas respecto de los saladitos servidos?

Los números de R_0^+ y la recta numérica

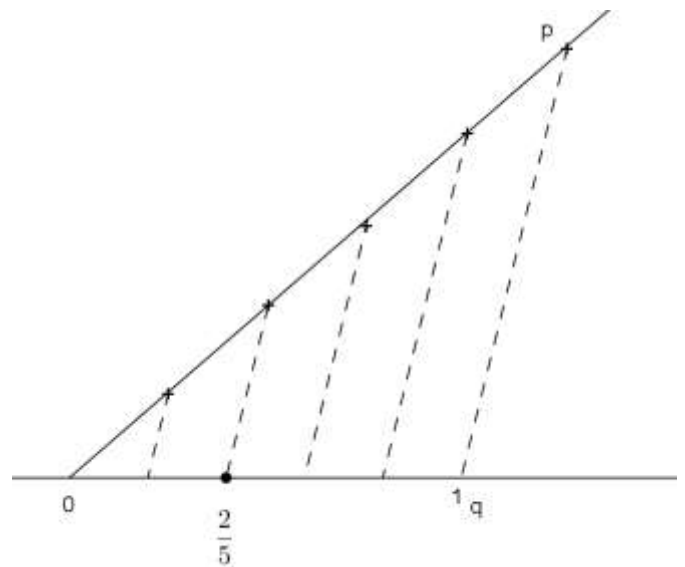
Para representar a los números de R_0^+ , consideremos dos puntos sobre una recta. Le asignamos el número 0 al punto de la izquierda y el número 1 al punto de la derecha.

Los dos puntos marcados definen un segmento que tomamos como unidad de medida.

Ya haz representado los números naturales y el cero, pero ¿donde ubicarías el punto representativo de un número racional no negativo que no sea natural o cero?. Por ejemplo, $\frac{2}{5}$

Este problema estará resuelto cuando sepamos dividir un segmento unidad en cinco segmentos congruentes.

- Trazamos una semirrecta con origen en el punto que le asignamos el número cero.
- Marcamos en la misma, puntos equidistantes que determinan segmentos congruentes (en este caso 5 segmentos).
- Unimos el último punto marcado “p” con el correspondiente al número 1, “q” en la recta numérica.
- Trazamos segmentos paralelos al segmento \overline{pq} por cada uno de los puntos marcados en la semirrecta.
- El segmento unidad queda dividido en 5 segmentos congruentes



Este procedimiento práctico se basa en la siguiente propiedad: “Si tres o más rectas paralelas son cortadas por rectas transversales, a segmentos congruentes en una de ellas corresponden segmentos congruentes en las otras”; esta propiedad está basada en el Teorema de Tales.



Ahora, te proponemos encontrar los puntos representativos en la recta numérica de algunos números irracionales positivos, como por ejemplo:

$$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}; \dots \sqrt{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

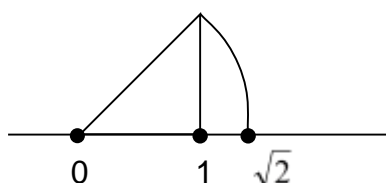
Por supuesto, algunos de estos números como, por ejemplo, $\sqrt{4}$, son naturales y tienen una representación que ya sabes encontrar. No sucede lo mismo con los números irracionales $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; \dots$ entre otros. De los cuales no sabes encontrar, por ahora, el punto que los representa.

El Teorema de Pitágoras sugiere un método posible que comenzamos a estudiar.

Basta observar que en el triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1 la hipotenusa tiene longitud:

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Este simple resultado nos permite obtener, con la ayuda de un compás, el punto que representa a $\sqrt{2}$ como te mostramos en el gráfico.



Haciendo centro en 0 y con radio la hipotenusa obtenemos el punto que representa a $\sqrt{2}$

Cada uno de los números de la forma antes mencionada, es decir de la forma \sqrt{n} con $n \in \mathbb{N}$, puede representarse en la recta numérica con un procedimiento análogo al realizado para $\sqrt{2}$. Para ello deberás encontrar un triángulo rectángulo adecuado, es decir, deberás encontrar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga por longitud el número que se desea representar y que un vértice sea el origen de coordenadas.

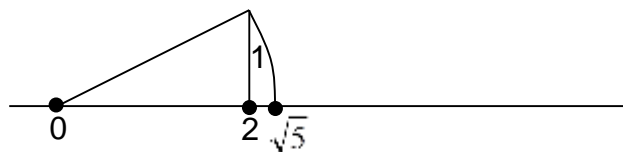
Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

Así, si deseamos representar el número $\sqrt{5}$ podemos recurrir al triángulo rectángulo de catetos de longitudes 2 y 1 ya que, en este caso, la hipotenusa posee longitud:

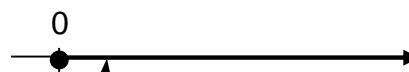
$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Gráficamente:



Los números de R_0^+ “completa” la semirrecta a la derecha del cero ya que los números irracionales positivos llenaron todos los huecos dejados en ella por los números de Q_0^+ .

Notemos que:



A cada punto de esta semirrecta le corresponde un número de R_0^+ y recíprocamente, a cada número de R_0^+ le corresponde un punto de la semirrecta

Actividades

30. Representa en una recta numérica los números dados en cada uno de los siguientes apartados

a) $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{5}{4}$; 2,5; $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{17}$

d) $1 + \sqrt{2}$

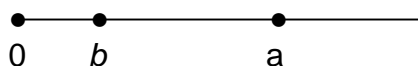


Igualdades y desigualdades en R_0^+

Las relaciones de orden: menor, mayor e igual

Dados dos números a y b de R_0^+ , decimos que:

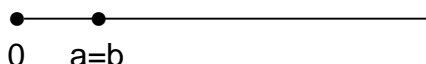
\Rightarrow El número **a es mayor que b** y escribimos **$a > b$** , si en la recta numérica el punto representativo de a está a la derecha del punto que representa a b



También en este caso puede expresarse que b es menor que a y se indicará:

$$b < a$$

\Rightarrow **a es igual a b** y escribimos **$a = b$** si en la recta numérica el punto representativo de a coincide con el punto representativo de b .



A partir de las relaciones menor ($<$), mayor ($>$) e igual ($=$) se definen dos nuevas relaciones: “menor o igual” (\leq) y “mayor o igual” (\geq), en símbolos:

<ul style="list-style-type: none"> $a; b \in R_0^+$ $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$ $a; b \in R_0^+$ $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$
--

Así, por ejemplo:

- $\frac{3}{2} \leq 5$ pues $\frac{3}{2} < 5$
- $8,52 \geq 4$ pues $8,52 > 4$
- $8 \geq 8$ pues $8 = 8$
- $a \geq a \quad \forall a \in R_0^+$ pues $a = a$

Matemática

La relación **menor o igual** verifica las siguientes propiedades:

Cualesquiera sean a, b y c en R_0^+

- $a \leq a$ propiedad reflexiva
- Si $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ propiedad transitiva
- Si $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$ propiedad antisimétrica

Actividades

31. Completa con $<$, $>$ o $=$ según corresponde

a) $x < 3$ y $3 < 5$ entonces $x \dots\dots 5$

b) $a < b$, $a > 10 \Rightarrow 10 \dots\dots b$

c) $\left. \begin{array}{l} a \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow a \dots\dots b$

d) $\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow \frac{y}{x} \dots\dots 1$

e) $\frac{x}{3} < \frac{z}{3} \Rightarrow x \dots\dots z$

f) $\frac{3}{x} > \frac{3}{y} \Rightarrow x \dots\dots y$

32. Indica qué condiciones deben cumplir: a ; b y c para que: $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$; $a \neq 0$ y $b \neq 0$

33. ¿Cuál de estos signos : $<$, $>$ ó $=$ debe colocarse entre:

a) $\frac{2}{3}$ y $0,66$?

b) $4,2$ y $4,\bar{2}$?

c) $\frac{3}{7}$ y $0,42\bar{8}$?

d) $1,\bar{6}$ y $\frac{5}{3}$?

e) $1,0\bar{1}$ y $1,0\bar{1}$?



34. Si $F = \{ 3,8; 3,18; 3,808080 \dots; 3,8\overline{34}; 3,7\overline{9}; 3,7\overline{9} \}$, ¿qué números de F verifican cada una de las desigualdades siguientes?

a) $x < 3,8$

b) $x \geq 3,8$

35. Matías pensó una fracción. Dice que si le suma un mismo número natural al denominador y al numerador, obtiene siempre una fracción menor. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

36. Aldo y Julia escribieron cada uno una fracción. Aldo escribió una fracción que tiene el denominador 4 unidades mayor que el numerador. Julia escribió una fracción con numerador igual al de la fracción de Aldo y denominador 5 unidades mayor que el denominador de la fracción de Aldo. La fracción de Aldo es equivalente a $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción que escribió Aldo?. ¿Cuál es la fracción que escribió Julia?

37. a) ¿Cuál es el mayor número de una sola cifra decimal menor que $\sqrt{2}$? ¿y de dos cifras decimales?

b) ¿Cuál es el menor número de una cifra decimal mayor que $\sqrt{2}$? ¿y de dos cifras decimales?

La condición “entre”

¿Qué significa que un número c está “entre” los números a y b ?

A partir de la relación “menor” podemos definir la condición “entre”

Dados $a < b$ decimos que el número c está **entre** a y b ,

$$\text{si } a < c \quad \wedge \quad c < b$$

Simbolizamos:

$$a < c < b$$

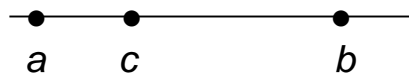
Leemos:

c es mayor que a y menor que b o c está entre a y b .

Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

Geoméricamente, que c esté entre a y b establece que el punto que representa a c está a la derecha del que representa a a y a la izquierda del que representa a b



Así, por ejemplo, la expresión

3 está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{10}{3}$,

indica que : $\frac{1}{2} < 3$ y $3 < \frac{10}{3}$

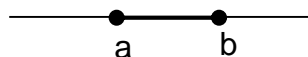
Se simboliza: $\frac{1}{2} < 3 < \frac{10}{3}$

y, geoméricamente, nos muestra que: el punto que representa a 3 está a la derecha del que representa a $\frac{1}{2}$ y a la izquierda del que representa a $\frac{10}{3}$



Algunos convenios de gráficas para representar conjuntos numéricos en la recta numérica

- a) El conjunto de números reales menores o iguales que b y mayores o iguales que a tienen como representación gráfica el segmento ab como muestra la figura



En símbolos: $\{x / a \leq x \leq b\}$

- b) El conjunto de números reales comprendido entre a y b se representa





En símbolos: $\{x / a < x < b\}$

- c) El conjunto de números reales mayores o iguales que a y menores que b se representa:



En símbolos: $\{x / a \leq x < b\}$

- d) En el caso que el conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b, se representa:



En símbolos: $\{x / a < x \leq b\}$

- e) Este convenio se extiende para conjuntos de números reales menores o iguales que a o para conjuntos de números mayores que a, tales como:



En símbolos: $\{x / x \leq a\}$



En símbolos: $\{x / x > a\}$

Actividades

38. ¿Qué números son elementos del conjunto?

$$\{x / x \text{ es una fracción de denominador } 5 \wedge 2 < x \leq 4\}$$

39. Intercala dos números racionales entre

- | | |
|----------------|----------------------------|
| a) 0,1 y 0,2 | c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ |
| b) 0,03 y 0,04 | d) 1,41 y $\sqrt{2}$ |

Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

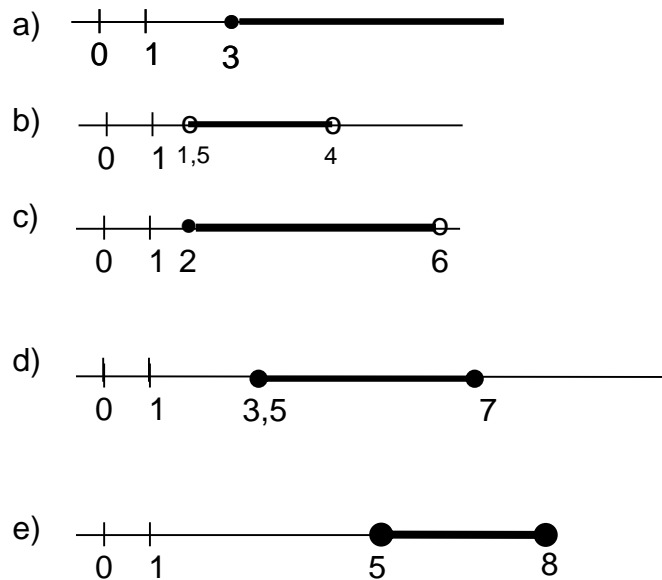
Matemática

40. ¿Es posible encontrar dos expresiones decimales de período no nulo, comprendidas entre

- a) 5 y 6?
- b) 1 y 1,5?
- c) 2,3 y 2,4?
- d) $\frac{5}{6}$ y $\frac{38}{45}$?

En caso afirmativo escribe los ejemplos que pensaste

41. Escribe simbólicamente los números representados en cada gráfico



42. Representa en la recta numérica

- a) todos los números no menores que 2
- b) $x \neq 5$
- c) $z/3 < z \leq \frac{11}{2} \wedge z \in \mathbb{N}$
- d) $t/\sqrt{2} \leq t \leq 3,5$
- e) $v/2\sqrt{5} \leq v < \frac{25}{4}$
- f) $w/ w > 0,5$
- g) $j/ \frac{7}{3} < j \leq 5 \wedge j \neq 3$



CAPÍTULO II: VOLUMEN y CAPACIDAD DE LOS CUERPOS – SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

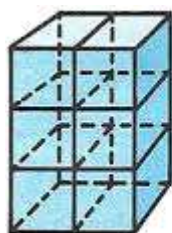


Figura 1

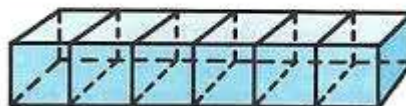


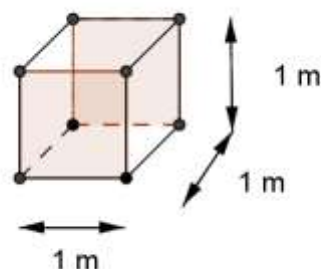
Figura 2

Estas figuras están formadas por la misma cantidad de cubitos entonces decimos que son **equicompuestas**.

El espacio que ocupa cada sólido es el mismo. **Ese espacio que ocupan es su volumen.**

Si se toma como unidad un cubito para medir el volumen de los cuerpos de las figuras 1 y 2, podemos decir entonces que el volumen V es igual a 6 cubitos. En forma análoga a lo que sucede para medir superficies, también existe una unidad universal para medir el volumen: **El metro cúbico** (1 m^3)

Es un cubo de 1 m de arista



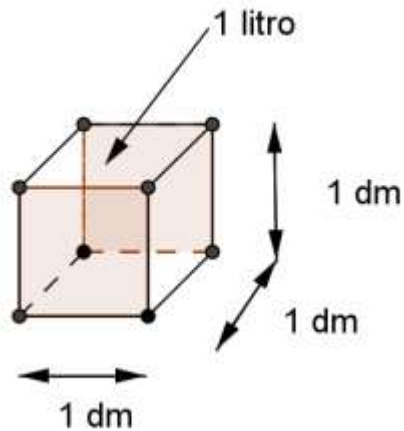
Como en los casos de las unidades de longitud y superficie, existen múltiplos y submúltiplos del metro cúbico: el kilómetro (km^3), el hectómetro (hm^3) y el decámetro (dam^3) cúbicos entre los múltiplos, y el decímetro (dm^3), el centímetro (cm^3) y el milímetro (mm^3) cúbicos, entre los submúltiplos. La relación entre ellos se muestra en la siguiente tabla:

	MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMÚLTIPLOS		
Símbolo	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
Cantidad en m^3	1000000000	1000000	1000	1	0,001	0,000001	0,000000001

Una unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inmediato inferior y 1000 veces más pequeña que la del orden inmediato superior. Mientras el volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo, la **capacidad** es lo que cabe dentro de ese cuerpo.

Matemática

En el SIMELA se toma como **unidad patrón de capacidad el litro (l)**



*Un litro (l) es la capacidad de una caja cúbica de 1 dm de lado.
 $1 l = 1 dm^3$*

Relaciones entre unidades de volumen y capacidad

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
↓			↓			↓
$1 m^3$			$1 dm^3$			$1 cm^3$

Nota: Una unidad de capacidad es 10 veces mayor que la del orden inmediato inferior y 10 veces más pequeña que la del orden inmediato superior.

Ejemplo: $1 l = 10 dl = 100 cl = 1000 ml$

$1 l = 0,1 dal = 0,01 hl$

Actividades

1. Completa:

$1 m^3 = \dots\dots\dots dm^3$

$1 dm^3 = \dots\dots\dots cm^3$

$1 cm^3 = \dots\dots\dots dm^3$

$1 mm^3 = \dots\dots\dots cm^3$

$1 m^3 = \dots\dots\dots mm^3$

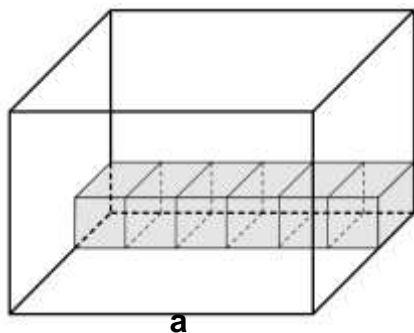
$1 dl = \dots\dots\dots l$

$1 dal = \dots\dots\dots dm^3$

$1 cl = \dots\dots\dots cm^3$

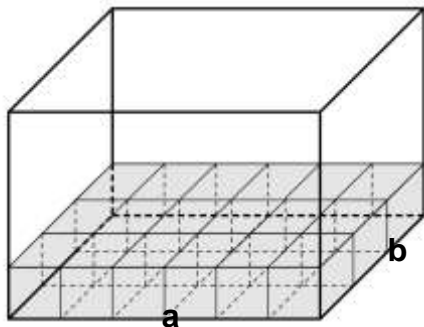


Cálculo de volumen de un prisma recto

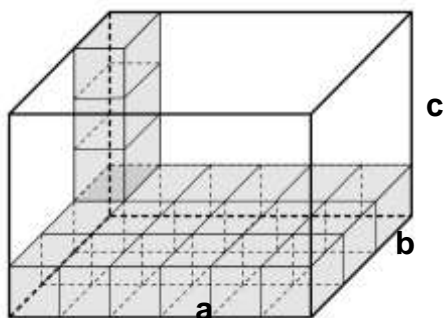


Analizamos el prisma de base rectangular. Este prisma tiene a cm de largo, b cm de ancho y c cm de altura.

Ubicamos una fila de a cubos de 1 cm de arista.



Cubrimos la superficie de la base con $a \cdot b$ cubos de 1 cm de arista



Completamos con c planchas de cubos de $a \cdot b$ cubos.

Resulta, entonces, que el número de cubos que necesitamos para llenarlo es $a \cdot b \cdot c$

Volumen de un prisma recto de base rectangular = largo . ancho . altura

Superficie de la base

En cualquier prisma recto puede medirse el volumen utilizando el mismo procedimiento mostrado en el de base rectangular.

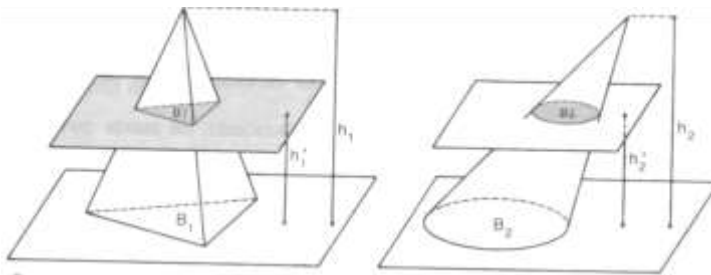
Volumen de un prisma recto = Superficie base . Altura

POSTULADO DE CAVALIERI

Dos cuerpos son equivalentes en volumen si satisfacen las siguientes condiciones:

1. las bases son de superficies equivalentes
2. tienen la misma altura
3. las secciones planas a la misma distancia de las bases son de superficies equivalentes

Ejemplo:



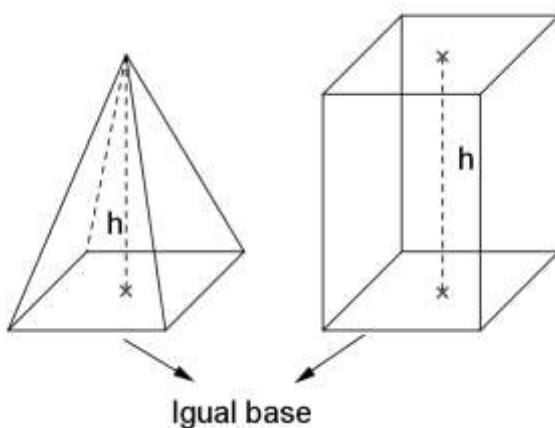
$$\text{Sup } B_1 = \text{Sup } B_2$$

$$h_1 = h_2$$

$$h'_1 = h'_2$$

$$\text{Sup } B'_1 = \text{Sup } B'_2$$

Cálculo del volumen de una pirámide recta



El volumen del prisma es el triple del volumen de la pirámide de igual base e igual altura.

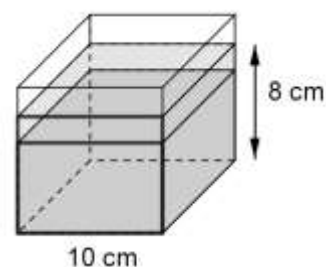
$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{1}{3} \text{ Superficie base} \cdot \text{Altura}$$



Actividades

- El volumen de un prisma triangular es 1440 cm^3 . La base es un triángulo rectángulo de catetos de 12 cm y 10 cm . Calcula la superficie lateral del prisma.
- El volumen de una pirámide de base cuadrada es de 48 cm^3 , siendo la altura de la misma 4 cm .
 - ¿Cuál es el perímetro de la base?
 - Calcula la superficie lateral de la pirámide.
- Se desea determinar el volumen de un objeto de forma irregular, por ejemplo el de una piedra o el de un trozo de plastilina, para ello se utiliza un recipiente graduado en ml; ¿cómo procederías para obtenerlo? Explica.

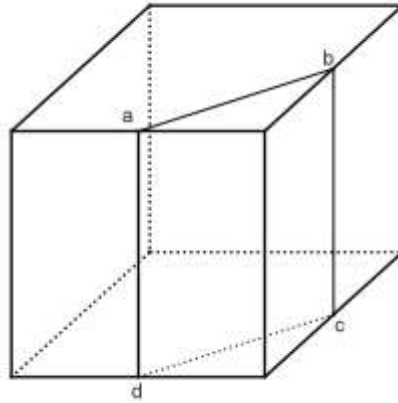
- Se tiene un recipiente cúbico de 10 cm de arista. Se encuentra lleno hasta un 75% de su capacidad con una solución aceitosa. Se introduce una llave dentro del recipiente generando que la solución se desplace hasta llegar a una altura de 8 cm . ¿Qué volumen posee la llave?



- ¿Para cuántas dosis de 5 ml alcanza un frasco de 200 cm^3 de jarabe? Si Luisa debe tomar dos dosis diarias, ¿para cuántos días le alcanza?
- El volumen de una pirámide recta cuya base es un triángulo equilátero de 30 cm de perímetro es 245 cm^3 . Calcula la medida de la altura de la pirámide.
- El volumen de una pirámide es 235 cm^3 . La base es un hexágono regular de 24 cm de perímetro. Obtiene la superficie lateral de la pirámide.

Matemática

9. En un taller de carpintería, el Señor Aparicio construyó un cubo de madera de 864 cm^2 de superficie total. Luego lo seccionó con un plano perpendicular a la base, obteniendo dos prismas rectos, como muestra la figura.



a; b; c y d son puntos medios de las aristas

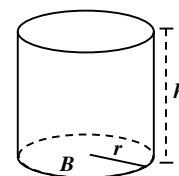
- a) ¿Cuál es la superficie lateral del prisma de base triangular?
- b) ¿Qué porcentaje del volumen del cubo representa el volumen del prisma de base pentagonal?
10. La superficie lateral de un prisma de base cuadrada equivale a los $\frac{7}{5}$ de la superficie de la base. Si la medida del lado de la base es 5 cm. Obtiene el volumen del prisma.
11. ¿Cuál es el volumen de una pirámide recta de base cuadrada si su superficie lateral es de 96 cm^2 y su apotema 8 cm? ¿Cuál es la medida de cada una de las aristas laterales de la pirámide?
12. ¿Cuántos baldes de 180 dl se necesitan para llenar un recipiente cúbico de 600 mm de arista?



Cálculo del volumen de un Cilindro

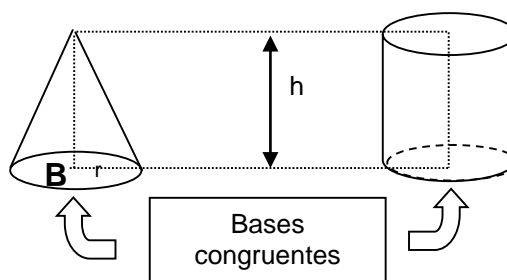
El volumen de cualquier cilindro de base B y altura h es :

$$V_{\text{cilindro}} = \text{Superficie de } B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Cálculo del volumen del cono

Podemos comprobar que el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro de bases congruentes y la misma altura



Además utilizando la propiedad enunciada anteriormente resulta

El volumen de un cono de base B y altura h es :

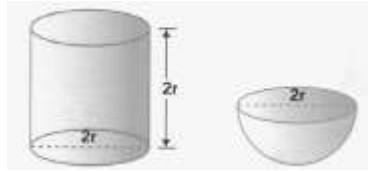
$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \text{superficie de } B \cdot h$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

siendo r el radio de la base

Matemática

Cálculo del volumen de la Esfera



Consideramos una semiesfera de radio r y un cilindro de radio r y altura el doble del radio $2r$, es empíricamente demostrable que si se vuelca tres veces el contenido de la semiesfera en el cilindro se observa que:

$$\text{Volumen de la semiesfera} = \frac{1}{3} \text{ Volumen del cilindro}$$

$$\text{Volumen de la Semiesfera} = \frac{1}{3} \text{ Sup. de la base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Volumen de la Semiesfera} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$$

Además:

$$\text{Volumen de la Esfera} = 2 \text{ Volumen de la semiesfera}$$

Luego:

$$\text{Vol. Esfera} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\text{Vol. Esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El volumen de una esfera de radio r

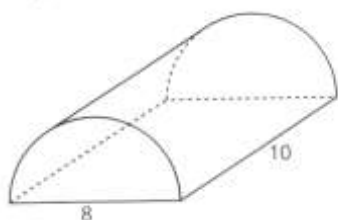
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$



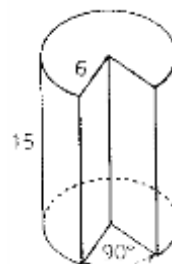
Actividades

13. Calcula el volumen de cada cuerpo. Las medidas están dadas en cm. redondea las respuestas con dos decimales en dm^3 .

a) Cilindro semicircular



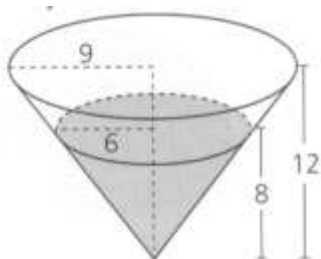
b) Cilindro sin un sector de 90°



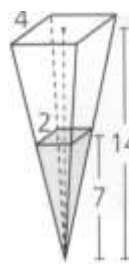
14. El volumen de un cilindro es de 3815100 dm^3 . Calcula en metros el radio de la base, si el cilindro tiene 15 m de altura.

15. Encuentra el volumen que queda vacío. Las medidas están dadas en metros. Redondea la respuesta con dos decimales en dm^3 .

a) el cono es recto



b) la pirámide es de base cuadrada



16. Encuentra la altura de un cono con un volumen de $138\pi \text{ m}^3$ y base $46\pi \text{ m}^2$ de superficie.

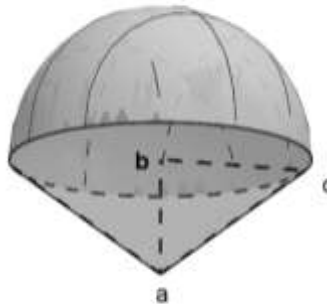
17. En un cono recto, la longitud de la generatriz del cono es de 25 cm. El radio de la base es de 15 cm. ¿Cuál es el volumen del cono?.

Matemática

18. Calcula el volumen del siguiente cuerpo. Redondea las respuestas con dos decimales en cm^3 .

$$bc = 3\text{cm}$$

$$ba = 5\text{cm}$$

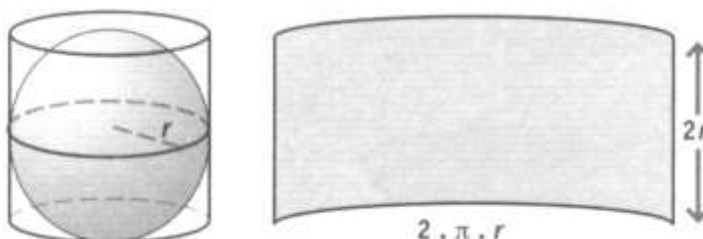


19. La base de una semiesfera tiene $256\pi \text{ cm}^2$ de superficie. Calcula el volumen de la semiesfera.
20. Una esfera y un cono tiene 8 cm de diámetro. La altura del cono es de 12 cm. ¿Cuál tiene mayor volumen?
21. Un vaso cilíndrico de 12 cm de alto y 8 cm de diámetro se llena con agua hasta 1 cm del borde. Si se coloca en el vaso una pelota de golf de 4 cm de diámetro, ¿el agua se derramará? Justifica tu respuesta.



SUPERFICIE DE LA ESFERA

La **esfera** es el cuerpo que se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.



Puede comprobarse experimentalmente que su superficie es igual a la superficie lateral del cilindro que lo envuelve:

Superficie de la esfera de radio $r = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r$

Superficie de una esfera de radio r

$$S_{\text{esfera}} = 4 \pi \cdot r^2$$

Actividades

22. El radio y la altura de un cilindro tienen la misma medida. Calcula el volumen del cilindro, sabiendo que su superficie total es de $113,04 \text{ cm}^2$.

23. Encuentra, en cada apartado, la superficie de cada esfera, sabiendo que:

- El volumen es de $288 \pi \text{ cm}^3$.
- El área de un círculo máximo es de $40 \pi \text{ cm}^2$.

Superficie Total

Cilindro:

$$2\pi r^2 + 2\pi r h$$

r : radio base

h : altura cilindro

24. Una esfera y un cubo poseen igual volumen que es de 27 cm^3 . ¿Cuál es la razón entre sus superficies en ese orden?

25. La superficie de una esfera es de $64 \pi \text{ cm}^2$. ¿Cuál es su volumen?

26. Calcula la superficie total de un cilindro, sabiendo que su volumen es de 785 cm^3 y el radio es el doble de la altura.

Matemática

Autoevaluación

- 1) Una esfera y un cilindro tienen el mismo volumen. El cilindro tiene una base de 8 cm de diámetro y 18 cm de altura. ¿En qué porcentaje aumenta el volumen de la esfera si su radio se incrementa en 2 cm?
- 2) Un cubo tiene 64 cm^3 de volumen. Si se reducen en 1 cm las aristas de la base y se aumenta en 1 cm la altura del cubo, su volumen ¿aumenta o disminuye? ¿En qué porcentaje?
- 3) Un depósito contiene 20.000 cm^3 de líquido, lo que equivale al 16% de su capacidad. ¿Cuántos litros de líquido habrá que agregarle para que el contenido llegue a ser el 30% de la capacidad del recipiente?
- 4) Un tanque cilíndrico de 400 dm^3 de volumen está completamente lleno de agua. Se consume una cantidad de agua equivalente a $\frac{5}{8}$ de su capacidad y luego se reponen 20 l de agua.
 - a) ¿Qué % del volumen del tanque está vacío?
 - b) Si el radio de la base del tanque es 40 cm, hasta qué altura llega el líquido?
- 5) Con 5 vasos de 250 cm^3 de capacidad cada uno, se llena una jarra. Indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
 - a) Si la capacidad del vaso fuera de $\frac{1}{8} \text{ l}$, se necesitarían 10 vasos para llenar la jarra.
 - b) Si la capacidad del vaso aumentara en un 25% se necesitarían 4 vasos para llenarla.
 - c) Con 2 vasos de $0,250 \text{ dm}^3$ se llena el 40% de la capacidad de la jarra.

BIBLIOGRAFÍA:

- PREM 8 (Buschiazzo, Cattaneo, Gonzalez, Hinrischen, Filipputti, Lagreca) Matemática Activa I (Masco ,Cattaneo, Hinrischen)
- Matemática de Sevezzo, Wykowski, Ferrarini - Editorial Kapelusz
- Aprender haciendo Matemática, PREM – Editorial UNR
- Matemática de Graciela Cortés –Editorial Stella
- Carpeta de matemática 8º de Editorial Aique
- Matemática 4. Editorial Estrada



Respuestas Capítulo I: NÚMEROS REALES NO NEGATIVOS

1.

El número	¿es natural?	¿es racional?	¿es irracional?
$\frac{2}{5}$	NO	SI	NO
7	SI	SI	NO
π	NO	NO	SI
$\sqrt{3}$	NO	NO	SI
$\frac{20}{4}$	SI	SI	NO
$\frac{5}{7}$	NO	SI	NO
2,5	NO	SI	NO
3,127	NO	SI	NO
0	NO	SI	NO

$$2. A = \left\{0; \frac{3}{7}; \frac{3}{5}; \frac{6}{7}; 1; \frac{6}{5}; \frac{3}{2}; 2; 3\right\} \quad B = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{2}{6}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{4}{6}\right\}$$

$$3. \text{ i) Sí, } \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

$$\text{ii) No, } \frac{5}{4} = \frac{p}{q}, \text{ con } p \in \mathbb{N}_0 \text{ y } q = 7 \therefore \exists x/x \cdot 4 = q = 7, \text{ pero } 5 \cdot x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \nexists \frac{p}{7} = \frac{5}{4}$$

$$\text{iii) Si, } \frac{3}{7} = \frac{9}{21}$$

$$4. \text{ a) } \frac{2}{5} = \frac{4}{10} \quad \text{c) } \frac{7}{20} = \frac{35}{100}$$

$$\text{b) } \frac{7}{4} = \frac{175}{100} \quad \text{d) } \frac{2}{25} = \frac{8}{100}$$

5. a) 2,875 período 0

d) $0,1\bar{6}$ período 6

b) $1,2\bar{96}$ período 296

e) $1,2\bar{3}$ período 3

c) $0,4\overline{28571}$ período 428571

f) $2,4\overline{09}$ período 09

6. A cargo del alumno.

7. A cargo del alumno.

8. A cargo del alumno.

9. A cargo del alumno.

Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

10. a) V b) F c) F d) V e) V

11. A cargo del alumno.

12. a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{7}$

13. a) $x = \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{5}{54}$ g) $x = 0$
b) $x = \frac{1}{5}$ e) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $x = 0$
c) $x = 5$ f) $x = 9$

14. a) $\frac{9}{28}$

b) $\frac{531}{200}$

c) $\frac{386}{45}$

d) $\frac{4}{3}$

15. 4, 5 y 6

16. a) $A = x^2$

b) $A = x \cdot y$

17.

	$2a+b$	$3 \cdot (a+1) + \frac{1}{2}b$
$a = 1$ y $b = 2$	4	7
$a = \frac{1}{5}$ y $b = 0$	$\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$

18. a) $\frac{3}{2}xy$

d) $\frac{15}{7}x^2$

b) $4am$

e) $2ab$

c) xz

f) $\frac{5}{2}kp$



19. a) $3x + 3y$ c) $6ax + 3ay$ e) $x^2 + 2xy$
b) $10,5 + 2,1b$ d) $25ab + 15bc$

20. a) $\frac{361}{90}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{5}$

21. a) $20x + 6$ c) $13\alpha + 12\beta$
b) $7a + 9b$ d) $3a + 9b + 1$

22. a) $\frac{13}{4}x + 5$ d) $\frac{27}{5}m + 12$ g) $\frac{13}{5}xy + 3y^2$
b) $\frac{17}{6}a + 7$ e) $\frac{5}{8}x + 4$ h) $\frac{7}{3}x^2 + xy$
c) $\frac{7}{2}x + \frac{1}{6}$ f) $\frac{11}{5}a + \frac{1}{25}$ i) $\frac{23}{4}xy + \frac{5}{2}x + 2y$

23. a) $\frac{461}{40}$ c) 36
b) 12 d) $\frac{11}{9}$

24. a) $(a + b)^2 + \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{7}\left(a^2 - \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right) + \frac{1}{c}$ c) $\frac{2}{5}\sqrt{25} + \frac{1}{3}b^2$

25. $\overline{ab} = \overline{bc} = 99,31$ y $\overline{ac} = 33,11$

26. Es el número $\frac{5}{4}$.

27. \$190,83

28. 25,6%

29. a) 13,5% b) 180%

30. A cargo del alumno

31. a) $x < 5$ b) $10 < b$ c) $a \leq b$ d) $\frac{y}{x} > 1$ e) $x < z$ f) $x < y$

32. $a > b$

33. a) = b) < c) < d) = e) >

34. a) $3,18$ y $3,7\overline{9}$ b) $3,8$; $3,808080\dots$; $3,8\overline{34}$ y $3,7\overline{9}$

35. No

36. Aldo $\frac{4}{8}$ y Julia $\frac{4}{13}$

37. a) $1,4$ y $1,41$ b) $1,5$ y $1,42$

Conjuntos – Reales No Negativos - Volumen

Matemática

38. $\left\{ \frac{11}{5}; \frac{12}{5}; \frac{13}{5}; \frac{14}{5}; \frac{15}{5}; \frac{16}{5}; \frac{17}{5}; \frac{18}{5}; \frac{19}{5}; \frac{20}{5} \right\}$

39. y 40. A cargo del alumno

41.a) $x \geq 3$ b) $1,5 < x < 4$ c) $2 \leq x < 6$ d) $3,5 \leq x \leq 7$ e) $5 \leq x \leq 8$

42. A cargo del alumno

Capítulo II: VOLUMEN Y CAPACIDAD DE LOS CUERPOS – SUPERFICIES

1. A cargo del alumno.

2. $902,88\text{cm}^2$

3. a) 24cm b) 60cm^2

4. A cargo del alumno.

5. 50cm^3

6. 40 dosis y 20 días.

7. $17,97\text{cm}$

8. $207,96\text{cm}^2$

9. a) $245,79\text{cm}^2$ b) $87,5\%$

10. $43,75\text{cm}^3$

11. $88,92\text{cm}^3$ y $8,54\text{cm}$

12. 12 baldes.

13. a) $0,25\text{ dm}^3$ b) $1,27\text{ dm}^3$

14. 9m .

15. a) $209,44\text{cm}^3$ b) $2764,6\text{cm}^3$

16. 9m .

17. $4712,39\text{cm}^3$

18. $94,25\text{cm}^3$

19. $8578,64\text{cm}^3$

20. La esfera tiene mayor volumen.

21. No se derrama agua.

22. $27\pi\text{ cm}^3$

23. a) $144\pi\text{ cm}^2$ b) $160\pi\text{ cm}^2$

24. La razón entre la superficie de la esfera y la del cubo es $0,81$.

25. $\frac{256}{3}\pi\text{ cm}^3$.

26. $594,17\text{cm}$