

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEGUNDO - FASC. 4



DONADO
EN MEMORIA DEL PROFESOR
Go. JORGE A. LOUREIRO

ROSARIO

REPUBLICA ARGENTINA

1942

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

INDICE

—Sobre el concepto de curvatura de superficies (LUIS A. SANTALÓ)	pág. 165
—Apostilla (B. LEVI)	» 184
—Ejercicios y Problemas. Soluciones	» 188
—Solución de la cuestión nº 2 (EDUARDO GASPAR)	» 202
—Ejercicios y Problemas. Propuestos	» 205
—Cuestiones	» 206
—Correspondencia	» 207

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPPO LEVI

AÑO SEGUNDO



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1942

SOBRE EL CONCEPTO DE CURVATURA DE SUPERFICIES

La palabra « curvatura » de una superficie en un punto encierra una idea intuitiva que es de dominio común. Para dar un sentido preciso y hacer utilizable en matemáticas esta idea intuitiva se han señalado diversas maneras de *medir* la curvatura de una superficie en un punto, es decir, diversas maneras de asignar a cada punto de una superficie un valor numérico que sirva para indicar el mayor o menor grado con que se presenta esta idea intuitiva y en un principio vaga de « curvatura ».

Nos proponemos hacer una recopilación de los diversos modos cómo dicha curvatura puede ser medida.

Un resumen histórico sobre el origen de muchos conceptos que mencionaremos, se encuentra en las conferencias dadas en esta Facultad de C. Matemáticas de Rosario por el Prof. A. TERRACINI en septiembre de 1941, publicadas bajo el título « Orígenes de algunos conceptos geométricos » en el Vol. III, n° 6 de las *Publicaciones del Instituto de Matemáticas*.

NOCIONES PRELIMINARES

1. *Fórmulas de Meusnier, Euler y Olinde Rodrigues*. — Para no tener que hacer referencia a tratados diversos, haremos en este primer apartado un resumen de los principales resultados de la teoría de superficies que supondremos conocidos

Respecto un sistema de ejes rectangulares x_1, x_2, x_3 , una superficie está definida por 3 ecuaciones paramétricas

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad x_3 = x_3(u, v) \quad [1]$$

o bien, más brevemente, por una sola ecuación simbólica

$$x = x(u, v). \quad [2]$$

Si se supone que v se mantiene constante y que u varía, las ecuaciones [1] o [2] representan una línea contenida en la superficie; para cada valor constante de v habrá una de estas líneas, que formarán, por tanto, un haz. Si es u el parámetro que se mantiene constante y v el que varía se tiene un nuevo haz de curvas sobre la superficie. Estos dos haces forman lo que se llama un *sistema de coordenadas curvilíneas* sobre la superficie.

Consideremos un punto P de la superficie. Supondremos siempre que se trata de un *punto ordinario*, es decir, un punto tal que en un entorno del mismo las funciones [1] admiten las derivadas parciales hasta el segundo orden, las cuales son además continuas.

Entonces, todas las curvas de las superficies que pasan por P y tienen en él el mismo plano osculador, tienen además la misma curvatura. Supongamos una curva de la superficie que pase por P y cuyo plano osculador en este punto sea normal a la superficie; sea R su radio de curvatura en P . Para otra curva de la superficie que tenga la misma tangente y cuyo plano osculador forme un ángulo θ con el plano normal anterior, el radio de curvatura ρ vale

$$\rho = R \cos \theta. \quad [3]$$

Esta es la *fórmula de MEUSNIER* (1776) que permite determinar la curvatura de cualquier curva que pase por el punto P de la superficie dada, conocidas las curvaturas de las secciones planas normales ⁽¹⁾.

Consideremos ahora todas las secciones de la superficie por planos normales que pasen por P . El radio de curvatura R de una cualquiera de ellas está dado por la *fórmula de EULER* (1760)

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2} \quad [4]$$

siendo R_1 , R_2 los radios de curvatura de 2 particulares secciones normales, perpendiculares entre sí y llamadas *secciones principales*;

⁽¹⁾ La memoria de MEUSNIER, titulada *Memoire sur la courbure des surfaces*, fué leída en la Academia de Ciencias de París en 1776 y publicada en 1785 en la colección de *Mémoires des Savants étrangers*, tomo X. La demostración de la fórmula [3] se puede ver, por ejemplo, en P. APPELL, *Elements d'Analyse Mathématique* (deuxieme édition), París, 1905, pág. 411, o también S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, tomo II, pág. 261.

φ es el ángulo que forma la dirección de la sección normal considerada, cuyo radio de curvatura es R , con la dirección principal cuyo radio de curvatura es R_1 . Los radios R_1, R_2 se llaman los radios principales de curvatura de la superficie en el punto P ⁽²⁾.

Las líneas de la superficie que en cada punto son tangentes a las direcciones principales se llaman *líneas de curvatura*. Por ser perpendiculares entre sí, como hemos dicho, las dos direcciones principales en cada punto, las líneas de curvatura formarán dos haces de curvas ortogonales. Para simplificar los cálculos es útil muchas veces elegir los parámetros u, v de la superficie, de manera que las curvas $u = \text{cte.}$, $v = \text{cte.}$ sean precisamente las líneas de curvatura.

Consideremos el vector $\xi = \xi(u, v)$ de módulo 1 normal a la superficie, es decir, el vector cuyas componentes son los cosenos directores de la recta normal a la superficie en cada punto u, v . Por x_u, x_v indicaremos los *vectores* cuyas componentes son las derivadas parciales respectivas de las ecuaciones paramétricas de la superficie [1]. Si las líneas $u = \text{cte.}$, $v = \text{cte.}$ son las de curvatura de la superficie, se verifican las igualdades vectoriales

$$\xi_u = -\frac{1}{R_1} x_u, \quad \xi_v = -\frac{1}{R_2} x_v. \quad [5]$$

Estas son las llamadas *fórmulas de OLINDE RODRIGUES* (1816). Si se quieren escribir explícitamente, llamando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a los cosenos directores de la normal, en lugar de las igualdades vectoriales [5] tendremos

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u} = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial x_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} = -\frac{1}{R_2} \frac{\partial x_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3)$$

siendo $x_i = x_i(u, v)$ las ecuaciones paramétricas [1] ⁽³⁾.

⁽²⁾ La memoria de EULER, titulada *Recherches sur la courbure des surfaces*, apareció en los volúmenes de la *Histoire de l'Académie des sciences et belles lettres* de Berlín, 1760. La demostración de la fórmula [4] puede verse, por ejemplo, en APPELL, loc. cit., pág. 419, o también en PINCHERLE, loc. cit., pág. 255.

⁽³⁾ Las fórmulas de OLINDE RODRIGUES fueron publicadas por su autor en la memoria titulada *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces*, publicada en la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, tomo III, 1816. La demostración de dichas fórmulas se puede ver en E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tomo 1, pág. 616.

3. *Angulo de una curva con las líneas coordenadas.* — Una curva sobre la superficie [1] estará determinada dando u, v como funciones $u(t), v(t)$ de un parámetro t . El elemento de arco ds de esta curva estará dado entonces por

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv \right)^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad [6]$$

donde, como es costumbre, se ha puesto

$$E = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2, \quad F = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right), \quad G = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2. \quad [7]$$

Estas expresiones E, F, G en forma vectorial se escriben

$$E = x_u^2, \quad F = x_u \cdot x_v, \quad G = x_v^2 \quad [8]$$

donde los productos de los segundos miembros son productos escalares de vectores.

Vectorialmente, ds es el módulo del vector $dx = x_u du + x_v dv$. Por tanto el ángulo φ que forma la curva considerada con la $v = \text{cte.}$ cuya tangente es el vector x_u , podrá deducirse, según la definición misma de producto escalar de vectores, de

$$(x_u du + x_v dv) \cdot x_u = |x_u| \cdot ds \cdot \cos \varphi,$$

o bien, según [8]

$$E du + F dv = \sqrt{E} ds \cos \varphi. \quad [9]$$

Análogamente, el ángulo ψ que la misma curva forma con la $u = \text{cte.}$ cuya tangente es x_v , se deducirá de

$$F du + G dv = \sqrt{G} ds \cos \psi. \quad [10]$$

4. *Area de una superficie.* — El área de una porción de superficie, a partir de los coeficientes E, F, G dados por [7] u [8], se calcula por la integral

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv \quad [11]$$

extendida a la región considerada de superficie ⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Esta expresión del área se puede ver en GOURSAT, loc. cit., pág. 323.

5. *Desarrollo de las ecuaciones paramétricas de una curva alabeada en el entorno de uno de sus puntos.* — En lo sucesivo, además de las nociones anteriores pertenecientes a la teoría de superficies, necesitaremos también el siguiente desarrollo de las ecuaciones paramétricas de una curva alabeada en el entorno de un punto.

Sea una curva del espacio y un punto P de la misma. Tomemos el sistema de ejes coordenados rectangulares de origen P formado por la tangente como eje x_1 , la normal principal como eje x_2 y la perpendicular a ambas o binormal como eje x_3 ; es decir, el plano x_1, x_2 es el plano osculador.

Siendo s el arco de la curva, en un entorno del origen, las ecuaciones paramétricas de la misma tendrán la forma

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + O(s^3) \\x_2 &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^3) \\x_3 &= c_3 s^3 + O(s^3),\end{aligned}\tag{12}$$

donde los coeficientes son las derivadas sucesivas, de orden igual al subíndice respectivo, en el punto $s = 0$ y con $O(s^3)$ se indican los términos complementarios, que son infinitésimos de orden superior a s^3 . En general indicamos con $O(s^n)$, como es costumbre, un infinitésimo de orden superior a s^n , es decir, una expresión tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{O(s^n)}{s^n} = 0.$$

En efecto, por ser x_1, x_2 el plano osculador, tiene con la curva un contacto de tercer orden (3 puntos confundidos) y por tanto el desarrollo de x_3 empieza con el término en s^3 . Por otra parte, como los cosenos directores de la tangente son x'_1, x'_2, x'_3 , si la tangente en el origen es el eje x_1 , estas derivadas primeras para $s = 0$ deben valer 1, 0, 0 y por tanto el desarrollo de x_2 empieza con el término de segundo grado en s y además es $a_1 = 1$.

Siendo s el arco, para todo valor de s debe ser

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1,$$

o sea, sustituyendo los valores deducidos de [12], poniendo ya $a_1 = 1$,

$$1 + 4 a_2 s + (4 a_2 + 6 a_3 + 4 b_2^2) s^2 + s^3 (\dots) = 1$$

y por tanto

$$a_2 = 0 \quad , \quad 6 a_3 + 4 b_2^2 = 0. \quad [13]$$

Necesitaremos también conocer el valor de b_2 . Para encontrarlo recordemos que la curvatura de la curva está dada por ⁽⁵⁾

$$\kappa^2 = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$$

y sustituyendo las derivadas segundas por sus valores deducidos de [12] y haciendo $s = 0$, resulta $\kappa^2 = 4 b_2^2$ o sea

$$b_2 = \frac{1}{2} \kappa$$

siendo κ la curvatura de la curva en el punto P . De aquí, la segunda igualdad [13] nos da $a_3 = -\frac{1}{6} \kappa^2$.

En definitiva, el desarrollo [12] se escribe

$$\begin{aligned} x_1 &= s + a_3 s^3 + O(s^5) \\ x_2 &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^4) \\ x_3 &= c_3 s^3 + O(s^4), \end{aligned} \quad [14]$$

siendo

$$b_2 = \frac{1}{2} \kappa \quad , \quad a_3 = -\frac{1}{6} \kappa^2. \quad [15]$$

PRIMER PROCEDIMIENTO

Consideremos un punto P de una esfera de radio R . Sin salir de la superficie de la esfera, una manera de medir la curvatura de la misma sería la siguiente: tomar a partir de P y sobre todos los círculos máximos que pasan por él, un arco de longitud constante s ; los extremos de estos arcos forman un círculo menor de área $A = 2 \pi \left(1 - \cos \frac{s}{R}\right) R^2$. Para s muy pequeño esta área se puede escribir, desarrollando en serie el coseno,

$$A = 2 \pi \left(\frac{s^2}{2 R^2} - \frac{s^4}{4! R^4} + \dots \right) R^2 = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12 R^2} + \dots$$

⁽⁵⁾ Ver PINCHERLE, loc. cit., pág.

Por consiguiente, la diferencia entre el área πs^2 del círculo que se obtendría si se hiciera la operación sobre el plano, y el área A obtenida, depende de R , y por tanto puede servir para calcular el valor de este radio.

Si en lugar de un punto de una superficie esférica consideramos un punto regular de otra superficie cualquiera, parece natural que la misma idea debe servir para « medir » en cierto modo el grado de curvatura de la superficie.

El camino a seguir puede ser el de tomar a partir de P y en todas direcciones arcos de longitud constante s y ver en cuánto difiere el área de la superficie así limitada del área del círculo πs^2 .

Hay que establecer primero qué líneas se toman a partir de P . Vamos a tomar un haz de líneas cualesquiera de vértice P , con la única condición de que *todas ellas tengan, en P , el plano osculador normal a la superficie*. Pueden ser, por ejemplo, las curvas del haz de todas las secciones normales, o bien el haz de las líneas geodésicas que salen de P .

Tomemos un sistema de ejes ortogonales x, y, z cuyo plano x, y sea el tangente a la superficie en P y por tanto el eje z la normal.

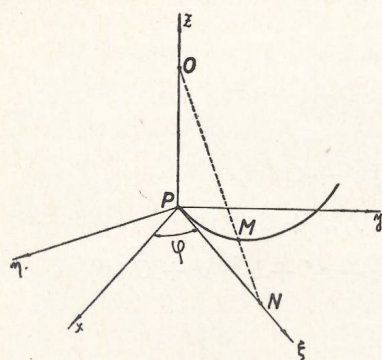


FIG. 2

Consideremos la curva del haz considerado cuya tangente forma un ángulo φ con el eje x . En un entorno de P , respecto al sistema de ejes formado por la tangente ξ , la normal principal z y la binormal η , las ecuaciones de esta curva según [14], son

$$\begin{aligned}\xi &= s + a_3 s^3 + O(s^3) \\ z &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^3) \\ \eta &= c_3 s^3 + O(s^3)\end{aligned}\quad [16]$$

y por tanto respecto al sistema dado x, y, z las ecuaciones de la curva serán

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi = \cos \varphi \cdot s + (a_3 \cos \varphi - c_3 \sin \varphi) s^3 + O(s^3) \\ y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi = \sin \varphi \cdot s + (a_3 \sin \varphi + c_3 \cos \varphi) s^3 + O(s^3) \\ z &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^3).\end{aligned}\quad [17]$$

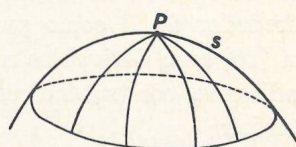


FIG. 1

Considerando s y φ como parámetros, estas ecuaciones [17] serán las ecuaciones paramétricas de la superficie dada en el entorno de P : los parámetros u, v de antes son ahora s, φ . Obsérvese que los coeficientes a_i, b_i, c_i son funciones de φ , pues dependen de la curva del haz, pero en cambio no son funciones de s , puesto que para cada curva representan valores tomados en el punto P ($s = 0$).

Para aplicar la fórmula [11] del área necesitamos calcular los coeficientes E, F, G . Suponemos la superficie suficientemente regular alrededor de P como para que las expresiones $O(s^3)$ que figuran en [16] sean derivables respecto s , con derivadas de la forma $O(s^2)$; indicando con subíndices derivadas parciales, podremos entonces escribir

$$\begin{aligned}x_s &= \cos \varphi + 3(a_3 \cos \varphi - c_3 \sin \varphi) s^2 + O(s^2) \\y_s &= \sin \varphi + 3(a_3 \sin \varphi + c_3 \cos \varphi) s^2 + O(s^2) \\z_s &= 2b_2 s + 3b_3 s^2 + O(s^2),\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}x_\varphi &= -\sin \varphi \cdot s + (a'_3 \cos \varphi - a_3 \sin \varphi - c'_3 \sin \varphi - c_3 \cos \varphi) s^3 + \\&\quad + O(s^3) \\y_\varphi &= \cos \varphi \cdot s + (a'_3 \sin \varphi + a_3 \cos \varphi + c'_3 \cos \varphi - c_3 \sin \varphi) s^3 + O(s^3) \\z_\varphi &= b'_2 s^2 + b'_3 s^3 + O(s^3).\end{aligned}$$

De aquí, según [7] y recordando [13]

$$\begin{aligned}E &= x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1 + (\dots) s^3 + O(s^3) \\F &= x_s x_\varphi + y_s y_\varphi + z_s z_\varphi = (\dots) s^3 + O(s^3) \\G &= x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = s^2 + (2a_3 + c_3' + b_2'^2) s^4 + O(s^4),\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} &= s [1 + (2a_3 + c_3' + b_2'^2) s^2 + O(s^2)]^{\frac{1}{2}} \\&= s + \frac{1}{2} (2a_3 + c_3' + b_2'^2) s^3 + O(s^3).\end{aligned}$$

Si se considera el casquete de superficie obtenido tomando sobre cada una de las líneas del haz considerado un arco de longitud cons-

tante s , su área valdrá, suponiendo s suficientemente pequeño y limitándonos a los primeros términos del desarrollo,

$$\begin{aligned} A &= \iint \sqrt{EG - F^2} \, ds \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^s \sqrt{EG - F^2} \, ds = \\ &= \pi s^2 + \frac{s^4}{8} \int_0^{2\pi} (2a_3 + b_2'^2) \, d\varphi + O(s^4), \end{aligned} \quad [18]$$

puesto que $\int_0^{2\pi} c_3' \, d\varphi = 0$ por indicar el acento la derivada respecto φ y tomar c_3 el mismo valor para $\varphi = 0$ que para $\varphi = 2\pi$.

La integral que aparece como coeficiente de s^4 , teniendo en cuenta los valores [15] de a_3 y b_2 se puede calcular. En efecto, de la fórmula de EULER [4] se deduce

$$\kappa = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}, \quad \kappa' = 2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \varphi \cos \varphi$$

y por tanto

$$a_3 = -\frac{1}{6} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2} \right)^2, \quad b_2'^2 = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Con estos valores y teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \frac{3}{4} \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \pi \quad [19]$$

se calcula fácilmente que

$$\int_0^{2\pi} (2a_3 + b_2'^2) \, d\varphi = -\frac{2\pi}{3} \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Por tanto [18] nos da

$$A = \pi s^2 - \frac{\pi}{12} \frac{1}{R_1 R_2} s^4 + O(s^4). \quad [20]$$

Salvo un factor constante, el coeficiente del término principal del desarrollo de la diferencia $\pi s^2 - A$ vemos que es $\frac{1}{R_1 R_2}$. Este

producto puede, por tanto, tomarse como « medida » de la curvatura de la superficie en el punto P . Es la *curvatura de GAUSS*.

Para eliminar los términos sucesivos en el desarrollo [20] se puede observar que de él se deduce

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12}{\pi} \frac{\pi s^2 - A}{s^4}. \quad [21]$$

Obsérvese que esta fórmula límite es válida, según la demostración, para cualquier haz de líneas que salgan de P con tal de que cubran todo el casquete de superficie y que tengan, en P , el plano osculador normal a la superficie.

En particular BERTRAND y DIGUET ⁽⁶⁾ en 1848 observaron que la fórmula [21] podía servir para demostrar que la curvatura de GAUSS era invariante por flexiones de la superficie, es decir, por deformaciones inextensibles ⁽⁷⁾. En efecto, si como haz de líneas que salen de P se toma el haz de líneas geodésicas, las cuales, como se sabe, tienen el plano osculador normal a la superficie como habíamos exigido, por la propiedad de estas líneas de ser el camino más corto que une dos puntos de la superficie, al deformar la superficie los extremos de los arcos s se conservarán, el área A no variará y por tanto el límite [21] tampoco.

De las fórmulas [20] o [21] se deduce, además, que la curvatura de GAUSS será positiva o negativa según que el área A considerada sea menor o mayor que la del círculo correspondiente.

APLICACIÓN

El desarrollo [20] del elemento de área de una superficie alrededor de un punto se presta a obtener la generalización a las superficies de un resultado que obtuvimos en otro lugar para las curvas planas ⁽⁸⁾.

Supongamos que P sea un punto elíptico de la superficie, es decir, un punto tal que en un entorno suyo la superficie quede de

⁽⁶⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Liouville). Tomo XIII, 1848, pág. 80-83.

⁽⁷⁾ Se llaman deformaciones inextensibles aquellas que conservan las longitudes de las líneas de la superficie.

⁽⁸⁾ L. A. SANTALÓ. — *Algunas propiedades infinitesimales de las curvas planas. Mathematicae Notae*, año primero, pág. 129.

un mismo lado del plano tangente. Queremos determinar sobre la normal a la superficie en P un punto O tal que al proyectar desde él un entorno de P de la superficie sobre el plano tangente, el área obtenida en la proyección difiera lo menos posible del área correspondiente de la superficie.

Para ello consideremos las curvas de la superficie obtenidas como secciones de los planos normales por el punto P . En un entorno de P las ecuaciones de la curva obtenida por sección del plano normal que forma un ángulo φ con el eje x (fig. 2) serán las dos primeras ecuaciones [16], siendo ahora la tercera $\eta = 0$.

Tomando sobre la curva un arco $PM = s$ y sobre la normal un punto O tal que $OP = \beta$ sea la distancia incógnita buscada, al proyectar desde O el punto M sobre el plano tangente se obtiene una distancia $PN = \rho$ cuyo valor se calcula fácilmente por semejanza de triángulos y es

$$\rho = \frac{\xi \beta}{\beta - z} = \xi \left(1 + \frac{z}{\beta} + \frac{z^2}{\beta^2} + \dots \right)$$

suponiendo $z < \beta$, como podemos hacer siempre tomando s suficientemente pequeño.

Sustituyendo ξ y z por los valores [16] queda

$$\rho = s + \left(a_3 + \frac{b_2}{\beta} \right) s^3 + O(s^5).$$

Haciendo lo mismo con todas las secciones normales que pasan por P , se obtendrá sobre el plano tangente, alrededor de P , un área de valor

$$A^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[s^2 + 2 \left(a_3 + \frac{b_2}{\beta} \right) s^4 + O(s^6) \right] d\varphi.$$

Sustituyendo a_3 y b_2 por sus valores [15] e integrando teniendo en cuenta [4] y [18], resulta

$$A^* = \pi s^2 - \pi \left[\frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) - \frac{1}{12} \frac{1}{R_1 R_2} \right] s^4 + O(s^6). \quad [22]$$

Comparando este desarrollo con [20] vemos que la diferencia es en general infinitésima de 4° orden respecto s . Para que sea de orden superior los coeficientes de s^4 deben ser los mismos en [20] y en [22].

Por tanto:

$$\beta = \frac{4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}. \quad [23]$$

Este valor nos da, pues, la distancia de P al punto O desde el cual, proyectando la superficie sobre el plano tangente, se obtiene una mejor aproximación en cuanto al área.

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

1. — Sea P un punto elíptico de la superficie. Un plano paralelo al tangente en P a distancia h del mismo determinará un casquete

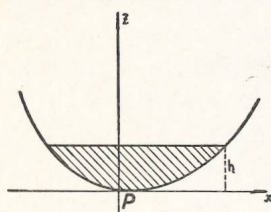


FIG. 3

de superficie cuyo volumen representaremos por V . Evidentemente este volumen dependerá en primer lugar de h y además, para un mismo h , será menor o mayor según que la superficie está más o menos « curvada » en el punto P . La relación entre V y h puede servir, por tanto, para medir la curvatura de la superficie en P .

Consideremos una sección plana normal, por ejemplo la representada en la fig. 3. La ecuación de la línea sección en un entorno de P es de la forma

$$z = \frac{1}{2R} x^2 + O(x^2), \quad [24]$$

siendo R su radio de curvatura en el punto P . De [24] se deduce, por inversión,

$$x = \sqrt{2Rz} + O(\sqrt{z}). \quad [25]$$

Haciendo girar la sección normal obtendremos siempre curvas secciones para las cuales valen ecuaciones análogas a [24] y [25],

con sólo tener en cuenta que R varía de una a otra, es decir, es la función de φ dada por la fórmula de EULER [4].

Proyectando la curva sección de la superficie por el plano paralelo al plano tangente a distancia h , sobre el mismo plano tangente, se obtiene un cilindro cuya área de la base vale (teniendo en cuenta [25]):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x^2 d\varphi = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} 2 R d\varphi + O(h)$$

y como de [4] se deduce ⁽⁹⁾

$$\int_0^{2\pi} R d\varphi = 2\pi \sqrt{R_1 R_2} \quad [26]$$

queda

$$A = 2\pi \sqrt{R_1 R_2} h + O(h). \quad [27]$$

El volumen del cilindro considerado vale, pues

$$V_1 = A \cdot h = 2\pi \sqrt{R_1 R_2} h^2 + O(h^2),$$

y el volumen interior a este cilindro y comprendido entre la superficie y el plano tangente, según [24] y [25], valdrá

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2Rh} + O(\sqrt{h})} zx dx d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8R} x^4 + O(x^4) \right]_0^{\sqrt{2Rh} + O(\sqrt{h})} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} h^2 \int_0^{2\pi} R d\varphi + O(h^2) = \pi \sqrt{R_1 R_2} h^2 + O(h^2). \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ El cálculo de $\int_0^{2\pi} R d\varphi$ se puede hacer directamente a partir de la fórmula de EULER, recordando la integral indefinida

$$\int \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \arctg \left[\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \operatorname{tg} \varphi \right] + C.$$

Sin embargo es más fácil aplicar una observación debida a E. BELTRAMI, *Opere Matematiche*, T. 1, p. 430. Se observa, en efecto, que $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R d\varphi$ no es otra cosa que el área de la *indicatriz de Dupin*, o sea de la curva obtenida llevando a partir de un origen y en la dirección φ correspondiente, varios vectores iguales a $\sqrt{R}$. Se sabe, según la fórmula de EULER [4], que esta indicatriz es una elipse de semi-ejes $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$. Por tanto el área de esta elipse es $\pi \sqrt{R_1 R_2}$, y de aquí se deduce el valor de la integral buscada.

Por consiguiente el volumen del casquete que limitan la superficie y el plano considerado a distancia h del plano tangente vale

$$V = V_1 - V_2 = \pi \sqrt{R_1 R_2} h^2 + O(h^2). \quad [28]$$

Como coeficiente del término principal de este desarrollo de V aparece $\pi \sqrt{R_1 R_2}$, es decir, una función de la curvatura de GAUSS $\frac{1}{R_1 R_2}$. Este procedimiento conduce, por tanto, a la misma curvatura que el caso anterior.

De [26] se deduce la fórmula conocida ⁽¹⁰⁾

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\pi h^2}{V} \right)^2$$

2. — También conduce a la curvatura de GAUSS la idea de medir la curvatura de la superficie teniendo en cuenta el área de la sección plana que se obtiene al cortar la misma por un plano paralelo al tangente a distancia h . Se comprende de antemano que esta área debe disminuir al crecer la curvatura y, en efecto, de la expresión [27] se deduce

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2 \pi h}{A} \right)^2.$$

TERCER PROCEDIMIENTO

1. — Consideremos el plano tangente a la superficie en P . Sobre este plano y con centro en P tracemos una circunferencia de radio x .

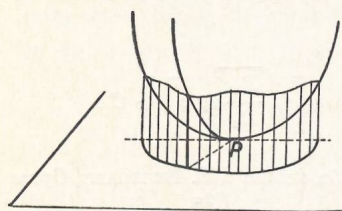


FIG. 4.

Por los puntos de esta circunferencia consideremos las normales al plano tangente hasta que cortan a la superficie. Ellas formarán una porción de superficie cilíndrica. Parece natural que el área de esta superficie cilíndrica pueda servir para dar una idea de la mayor o menor rapidez co-

⁽¹⁰⁾ W. BLASCHKE. — *Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver.*, Bd. 27, 1919, pág. 149. También *Differentialgeometrie I*, p. 120.

mo la superficie se aparta del plano tangente y, por tanto, para medir la curvatura de la misma en P .

Para calcular el área de la superficie cilíndrica considerada, basta recordar la ecuación [24] de las curvas obtenidas cortando la superficie por planos normales que pasan por P . El área de la superficie cilíndrica mencionada será

$$A = \int_0^{2\pi} z x d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2R} x^3 d\varphi + O(x^5) \quad [29]$$

y sustituyendo $\frac{1}{R}$ por su valor [4] e integrando:

$$A = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^3 + O(x^5). \quad [30]$$

Se obtiene de esta manera, como coeficiente del término principal en el desarrollo de A para valores pequeños de x , salvo un factor constante, la expresión

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad [31]$$

que es la llamada curvatura de SOPHIA GERMAIN ⁽¹¹⁾ o *curvatura media*.

La [30] se puede también escribir

$$H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2A}{\pi x^3}.$$

2. — Si en lugar del área A se considera el volumen V limitado por la superficie cilíndrica considerada y comprendido entre la superficie y el plano tangente, se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^x zx dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8R} x^4 + O(x^6) \right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^4 + O(x^6), \end{aligned} \quad [32]$$

⁽¹¹⁾ *Mémoire sur la courbure des surfaces. Journal für Math.* Band 7, 1831. Sobre esta definición de curvatura y los sucesivos de BACALOGLO y CASORATI, ver el interesante trabajo ya citado al principio de A. TERRACINI.

o bien

$$H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 V}{\pi x^4}.$$

3.— En los cálculos anteriores, lo mismo para el área A que para el volumen V , hay que tener en cuenta que para cada elemento superficial o de volumen la altura z viene afectada del signo correspondiente, distinto según que la sección normal de la superficie quede a uno u otro lado del plano tangente. Se comprende, por tanto, que puede haber puntos alrededor de los cuales el área A o el volumen V sean cero o negativos, sin que la superficie coincida con su plano tangente. En estos puntos será $H = 0$ y la interpretación geométrica es que el área A y el volumen V quedan divididos en partes iguales por el plano tangente.

Si no se quiere tener en cuenta el signo de la distancia z de los puntos de la superficie al plano tangente, se puede pensar de sustituir en [29] y [32] en lugar de z su cuadrado z^2 . Los resultados ya no serán ni áreas ni volúmenes, pero también darán una idea del comportamiento de la superficie alrededor de P . Se tiene, según [29],

$$A^* = \int_0^{2\pi} z^2 x d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4R^2} x^4 + O(x^4) \right) x d\varphi = \frac{x^5}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} d\varphi + O(x^5)$$

y bien, según [4] y [19],

$$A^* = \frac{\pi}{4} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{1}{2 R_1 R_2} \right] x^5 + O(x^5). \quad [33]$$

También

$$V^* = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^x z^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{24 R^2} x^6 d\varphi + O(x^6),$$

o sea

$$V^* = \frac{\pi}{24} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{1}{2 R_1 R_2} \right] x^6 + O(x^6). \quad [34]$$

La expresión que figura entre paréntesis en [33] y [34] se puede

escribir, añadiendo el factor $\frac{1}{2}$, en la forma

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{1}{2 R_1 R_2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2, \end{aligned} \quad [35]$$

y se llama curvatura de BACALOGLO ⁽¹²⁾.

De [33] y [34] se deduce, por tanto,

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 A^*}{\pi x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 V^*}{\pi x^6}.$$

CUARTO PROCEDIMIENTO

1. — Consideremos, lo mismo que para el primer procedimiento las secciones normales por el punto P y sobre cada una de ellas llevemos un arco de longitud constante ρ . Tendremos así sobre la superficie una curva cerrada alrededor de P .

Por cada punto M interior a esta curva cerrada consideremos la normal ξ_M a la superficie. Lo que se ha « curvado » la superficie al pasar de P a M puede medirse por el ángulo θ que forman la normal ξ en P y la normal ξ_M en M . Para prescindir del signo, en lugar de este ángulo podemos tomar su cuadrado. Vamos, pues, a calcular θ^2 .

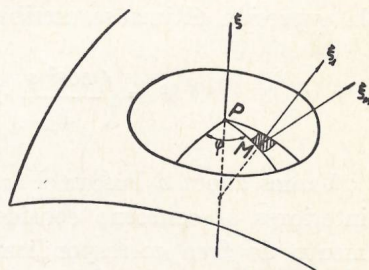


FIG. 5.

Suponiendo que sobre la superficie se eligen como líneas coordenadas $u = \text{cte.}$, $v = \text{cte.}$ las líneas de curvatura, según [5], es

$$d\xi = \xi_u du + \xi_v dv = -\frac{x_u}{R_1} du - \frac{x_v}{R_2} dv. \quad [36]$$

⁽¹²⁾ Ueber die Krümmung der Flächen. Zeitschrift für Math. und Phys., Bd. 4' 1859.

Llamando s al arco PM , para ρ suficientemente pequeño y puesto que $s \leq \rho$, será

$$\xi_M = \xi + \frac{d\xi}{ds} s + O(s). \quad [37]$$

Se observa que el vector $\xi_M - \xi$ es igual, en módulo, a la base del triángulo isósceles formado por ξ_M y ξ y como estos vectores normales tienen ambos el módulo 1, tomando la cuerda por el arco (lo cual se puede hacer salvo infinitésimos de 3er orden respecto s) será $\theta = |\xi_M - \xi|$ y por tanto, según [36] y [37],

$$\theta^2 = |\xi_M - \xi|^2 = \left| \frac{x_u}{R_1} \frac{du}{ds} + \frac{x_v}{R_2} \frac{dv}{ds} \right|^2 s^2 + O(s^2). \quad [38]$$

Teniendo en cuenta [8], al elevar al cuadrado el coeficiente de s^2 y recordando que por ser las líneas de curvatura perpendiculares entre sí es $x_u \cdot x_v = F = 0$, resulta

$$\theta^2 = \left[\frac{E}{R_1^2} \frac{du^2}{ds^2} + \frac{G}{R_2^2} \frac{dv^2}{ds^2} \right] s^2 + O(s^2).$$

Aplicando las fórmulas [9] y [10] y siendo ahora $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, la expresión última se escribe

$$\theta^2 = \left(\frac{\cos^2 \varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2^2} \right) s^2 + O(s^2). \quad [39]$$

Vamos ahora a buscar el *valor medio* de θ^2 para todos los puntos interiores al contorno considerado alrededor de P . Como el elemento de área correspondiente a un punto M , según [18], vale

$$d\sigma = s \, ds \, d\varphi + O(s^2) \, ds \, d\varphi, \quad [40]$$

el valor medio buscado se obtendrá dividiendo la expresión

$$\begin{aligned} \iint \theta^2 \, d\sigma &= \int_0^\rho s^3 \, ds \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2^2} \right) d\varphi + O(\rho^4) = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \rho^4 + O(\rho^4), \end{aligned}$$

por el área total, que según [20] vale $\pi \varrho^2 + O(\varrho^3)$. Es, pues,

$$\overline{\theta^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \varrho^2 + O(\varrho^2). \quad [41]$$

Aparece de esta manera el significado geométrico que tiene el tomar como medida de la curvatura de una superficie en un punto P la expresión

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right), \quad [42]$$

que es la llamada *curvatura de CASORATI* [13]. En lugar de [41] se puede escribir

$$C = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{2 \overline{\theta^2}}{\varrho^2}. \quad [43]$$

2. — Partiendo de la misma fig. 5 se puede repetir un razonamiento análogo pero tomando en el punto M , en lugar de la normal ξ_M a la superficie, la normal ξ_1 a la curva sección plana normal que pasa por P y M . Entonces el ángulo θ_1 que forman ξ y ξ_1 se expresa inmediatamente en la forma $\theta_1 = \frac{s}{R} + O(s)$ por ser igual al ángulo que forman dos normales próximas de una curva plana: R es el radio de curvatura de esta curva plana, sección normal de la superficie. Por tanto, como antes, el valor medio de θ_1^2 se obtendrá dividiendo por $\pi \varrho^2 + O(\varrho^3)$ la expresión

$$\iint \theta_1^2 d\sigma = \int_0^\varrho s^3 ds \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R^2} + (\varrho^4).$$

Teniendo en cuenta [35] resulta

$$\overline{\theta_1^2} = \frac{1}{4} B \varrho^2 + O(\varrho^2),$$

lo cual nos da una nueva interpretación de la *curvatura de BACALOGLO*.

(13) *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Acta Mathematica*, vol. XIV, 1890-91.

3. — Hemos calculado los valores medios de los cuadrados de los ángulos θ y θ_1 . También se puede calcular el valor medio del cuadrado del ángulo θ_2 que forman las dos normales ξ_M y ξ_1 en el punto M (fig. 6). Este valor medio nos medirá, en cierto modo, la *torsión* de la superficie alrededor de P .

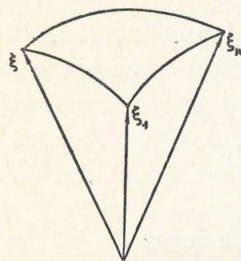


FIG. 6.

Consideremos las 3 normales ξ , ξ_M , ξ_1 llevadas a partir de un mismo origen O . Por ser ξ_M y ξ_1 normales a la curva plana PM , el triángulo esférico formado por los 3 extremos de ξ , ξ_M , ξ_1 será rectángulo en el extremo de ξ_1 . Como los lados de este triángulo infinitesimal valen θ , θ_1 , θ_2 será

$$\theta_2^2 = \theta^2 - \theta_1^2 + O(s^2),$$

y por tanto

$$\overline{\theta_2^2} = \overline{\theta^2} - \overline{\theta_1^2} = \frac{1}{4}(C - B)\rho^2 + O(\rho^2),$$

o sea, según los valores [35] y [42] de B y C ,

$$\overline{\theta_2^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + O(\rho^2).$$

LUIS A. SANTALÓ

APOSTILLA

La fórmula [20] de la Nota anterior nos ofrece la oportunidad para desarrollar algunas ideas de carácter más bien filosófico, pero que creemos de interés.

Supongamos que sobre una superficie física cierto agrimensor estuviera en condición de medir distancias (a lo largo de curvas trazadas sobre la superficie) y de medir áreas. Midiendo distancias estaría en condición de juzgar trayectos mayores y menores entre los mismos puntos y por lo tanto de determinar geodésicas; podría entonces describir dos círculos geodésicos concéntricos y medir sus áreas. Suponiendo que nuestro agrimensor hubiera elegido los

radios de los dos círculos bastante pequeños para que se pudieran despreciar sus potencias superiores a la cuarta, las dos áreas tendrían, según nuestra fórmula, que ser expresables con una fórmula del tipo

$$A = \alpha s^2 + \beta s^4 \quad [1]$$

donde s es el radio del círculo; y de las medidas que suponemos hechas podríanse, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, obtener los valores de las constantes α , β . Suponemos por un momento que nuestro agrimensor no conociera de antemano el número π , porque de esta manera él vendría a determinarlo en un modo que no difiere del todo de su definición elemental, la cual, después de haberse demostrado que las áreas de los círculos en el plano son proporcionales a los cuadrados de los radios, llama π a la razón constante de tal proporcionalidad.

Si nuestro agrimensor hubiera operado en un plano, se habría entonces podido dar cuenta de la cosa al ver que el coeficiente β resultaba 0, es decir al averiguar la proporcionalidad de las áreas de los círculos a los cuadrados de los radios. En caso contrario habría podido concluir que su superficie era *curva*, y, conociendo el coeficiente β , habría determinado la *curvatura* de la superficie.

Nótese que si, por una abstracción, supusiéramos sobre una línea un agrimensor capaz de hacer la única medida que puede hacerse, es decir, medir la longitud, nunca éste tendría elementos para juzgar de una curvatura de la línea. *La curvatura de una línea es un concepto estrictamente vinculado al hecho de estar la línea sumergida en un espacio de mayores dimensiones*, al contrario la *curvatura de una superficie puede pensarse y definirse en modo intrínseco, sin que nuestro agrimensor tenga la más mínima idea de un espacio ambiente*. Merece la observación de ser subrayada porque muchas veces se oye por personas cultas, pero sin especial cultura matemática, al hablar de una curvatura del espacio, como se hace tratando de geometrías no-euclidianas o de espacios einstenianos, oponer que estos espacios, por ser curvos, tendrán necesariamente que estar contenidos dentro de un espacio plano capaz para la gibosidad. Es así ciertamente si al concepto de *curvo* se atribuye el significado intuitivo de una *forma*, pero no en el sentido simplemente métrico anteriormente expresado.

En la formación de los conceptos ocurre frecuentemente que a su primer presentarse ellos aparecen como extremadamente simples

considerándose distintas modalidades que intuitivamente son incluídas en ellos como estrechamente vinculadas y entre ellas inseparables. Sólo lentamente el uso y el análisis demuestran que lo que había parecido un concepto simple se descompone en intuiciones esencialmente independientes entre sí. Así es del concepto de curvatura. Como se ha explicado en el resumen histórico de A. TERRACINI y en el artículo anterior de L. A. SANTALO, el concepto de curvatura de una superficie nació ciertamente del problema de representar mediante un número un carácter de forma, relacionado con el espacio ambiente; pero el cálculo muestra a la sazón que hay en este mismo concepto una parte independiente. Si, después de esto, tuviéramos que ordenar los conceptos según el complejo de ideas que contienen, ya no tendríamos que hablar más de curvaturas de curvas sobre la superficie y de la curvatura de la superficie como derivada de ellas, sino que debería presentarse antes la curvatura como resultado de medidas intrínsecas sobre la superficie, y, a continuación, como relacionada al espacio ambiente, cierta curvatura lineal, por ej. la máxima o la mínima curvatura de las secciones normales (preferible ciertamente la última por lo menos en el caso de la curvatura positiva) para caracterizar la forma, lo mismo como ocurre para las líneas.

Sin embargo tenemos que presentar aquí una reflexión un poco más escondida: ¿es verdaderamente cierto que la noción de curvatura de una superficie, según la hemos explicado como derivante de la comparación de longitudes y áreas, es independiente de las hipótesis de inmersión? Un momento de reflexión nos hace ver que no es así completamente. El cálculo que nos ha conducido a expresar el área del círculo como combinación lineal de la segunda y cuarta potencia del radio se funda completamente sobre la expresión de la diferencial del arco en la forma

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

y ésta es consecuencia de ser el arco (y sucesivamente lo mismo para el área) precisamente un arco medido en un espacio euclidiano (o por lo menos euclidiano en el infinitésimo). En el caso de un agrimensor verdaderamente desvinculado de las hipótesis euclidianas dentro de las cuales estamos acostumbrados a movernos, nada podemos prever sobre el modo como relacionaría medidas de longitud y de área.

Esta observación no dice nada en contra de la descomposición del concepto de curvatura de la cual hemos hablado, considerada como hecho lógico; al contrario nos aconseja de ser muy cuidadosos en juzgar el aporte que puede esperarse de la directa experiencia para la formación de nuestras teorías geométricas y mecánicas. Puede decirse que el admirable orden lógico que forma el esqueleto de nuestra ciencia positiva deriva del valor que han tenido unos sabios griegos en afirmar como verdades incontrovertibles ciertas plausibles hipótesis geométricas. Antes y después de los griegos hubo medidas geométricas con aplicaciones técnicas; sin embargo no hubo desarrollo científico ni en las antiguas civilizaciones ni en la edad media, precisamente porque las medidas por sí mismas no permiten ninguna conclusión al intelecto. Si, para decidir sobre la verdad de un postulado geométrico, un agrimensor o astrónomo proyecta un sistema de medidas, lo hace sobre la base de teorías geométricas las cuales han influído no solamente sobre la formación del programa, sino también sobre la elección de los instrumentos y sobre la lectura e interpretación de los datos experimentales. Si el resultado de las medidas resultara en contradicción con lo que la geometría hacía esperar, la sola conclusión posible, al querer creer en modo absoluto al resultado, podría ser que la geometría física no corresponde a la teórica; pero no podría concluirse que la geometría física es aquella que resulta al sustituir simplemente el resultado experimental al postulado que se quería comprobar, porque, aparte otras dificultades, después de esa sustitución, por haber cambiado la geometría habría que rehacer la teoría instrumental y la lectura del resultado sería probablemente diferente de la anterior. Es por eso que la resolución más económica y la sola prácticamente posible es de remitir a hipótesis físicas inherentes directamente a la experiencia particular efectuada las explicaciones de las eventuales divergencias.

El hecho que la mecánica einsteiniana difiere muy poco de la galileana sobre la cual está fundada toda la teoría física anterior, no es sólo un afortunado accidente, es la razón misma de su posibilidad; precisamente porque al ser diferentes las cosas, la modificación de la mecánica haría no más interpretables los resultados que se quieren explicar.

B. LEVI

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

Nº 18 — Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve una cónica dada bajo un ángulo constante φ . Considerar el caso particular

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUCIÓN. — 1º *Elipse*. — Sea $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ la ecuación de la elipse. Si X, Y es un punto cualquiera del plano, la ecuación de una recta que pasa por él, será:

$$y = mx + (Y - mX) \quad [1]$$

y las abscisas de los puntos de intersección de esta recta con la elipse dada se obtendrán resolviendo la ecuación

$$b^2 x^2 + a^2 [mx + (Y - mX)]^2 - a^2 b^2 = 0. \quad [2]$$

Para expresar que la recta [1] es tangente a la elipse, habrá que escribir que la ecuación [2] en la incógnita x tiene las dos raíces iguales, o sea, anular el discriminante

$$m^2 a^2 (Y - mX)^2 - (b^2 + a^2 m^2) [(Y - mX) - b^2] = 0.$$

Esta ecuación, en la incógnita m , que se reduce a 2º grado, nos da los coeficientes angulares m_1, m_2 de las tangentes a la elipse trazadas por el punto X, Y , que serán

$$m = \frac{-XY \pm \sqrt{a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2}}{a^2 - X^2}.$$

El ángulo φ que forman las dos tangentes estará dado por

$$\operatorname{tg} \varphi = K = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 \sqrt{a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2}}{a^2 + b^2 - X^2 - Y^2}.$$

de la cual se llega a

$$\frac{K^2}{4} (a^2 + b^2 - X^2 - Y^2)^2 = a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2$$

que es la ecuación de la curva lugar geométrico buscado. Se ve que es una curva de cuarto grado.

Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, es decir, para $k = \infty$, se obtiene

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2,$$

que es la ecuación de la circunferencia que pasa por los vértices del rectángulo circunscrito a la elipse. Para formar la cuártica del caso general habría que contar esta circunferencia dos veces.

2° *Hipérbola*. — De manera análoga, para la hipérbola, se encuentra que el lugar geométrico buscado es también una cuártica de ecuación

$$\frac{K^2}{4} (a^2 - b^2 - X^2 - Y^2)^2 = a^2 Y^2 - b^2 X^2 + a^2 b^2$$

que para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, o sea, $k = \infty$, se reduce a la circunferencia

$$X^2 + Y^2 = a^2 - b^2.$$

Esta circunferencia es imaginaria si $b > a$, es decir cuando el ángulo entre las asíntotas es mayor del recto; en el caso de $b = a$ (hipérbola equilátera) se reduce a un punto (el centro de la hipérbola).

3° *Parábola*. — Procediendo como en el caso de la elipse, se obtiene que si la ecuación de la parábola es $y^2 = 2 p x$, los valores del coeficiente angular m de la recta [1] para que ella sea tangente a la parábola, deben verificar a la ecuación

$$2 p X m^2 - 2 p Y m + p^2 = 0$$

o sea

$$m = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 2 p X}}{2 X}$$

y por tanto el ángulo φ que forman entre sí las dos tangentes vale

$$\operatorname{tg} \varphi = K = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 \sqrt{Y^2 - 2 p X}}{2 X + p}.$$

La ecuación del lugar geométrico pedido será, por tanto,

$$\frac{K^2}{4} (2 X + p)^2 = Y^2 - 2 p X$$

que es una hipérbola cuyas asíntotas forman el ángulo $\pm \varphi$ con el eje de la parábola.

Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se cumple

$$2 X + p = 0, \quad X = -\frac{p}{2},$$

es decir, en este caso particular, el lugar geométrico es la directriz de la parábola.

Esta solución es debida, salvo ligeras modificaciones en la redacción, al Sr. MODESTO GONZÁLEZ, de San Luis.

Nº 19. — Siendo A y B dos puntos fijos y X un punto variable e indicando r' , r'' , las distancias AX , BX , calcular la integral

$$\int \frac{e^{-K(r' + r'')}}{r' r''} d\omega$$

donde $d\omega$ es el diferencial de volumen cuando el punto X recorre todo el espacio.

1º SOLUCIÓN. — Se elige el sistema $OXYZ$ de coordenadas de tal manera que el eje OZ pase por los focos A_1 , A_2 y el origen O sea punto medio del segmento $A_1 A_2 = 2c$, siendo c semidistancia focal.

Se introducen coordenadas elipsoidales: s — semieje mayor de un elipsoide de rotación con los focos A_1 y A_2 , φ — longitud geográfica, ψ — anomalía excéntrica. Fórmulas de paso serán

$$\begin{cases} x = b \cos \psi \cos \varphi, \\ y = b \cos \psi \sin \varphi, \\ z = s \sin \psi, \end{cases}$$

siendo

$$b = \sqrt{s^2 - c^2}$$

longitud de los semiejes menores.

Los radios-vectores de un punto $U(x, y, z)$ se expresarán por las fórmulas

$$r_1 = s - c \operatorname{sen} \psi, \quad r_2 = s + c \operatorname{sen} \psi,$$

de manera que la función subintegral se convierte en

$$\frac{e^{-2ks}}{s^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 \psi}.$$

El determinante funcional de Jacobi

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi}$$

será igual a

$$\begin{vmatrix} \frac{s}{b} \cos \psi \cos \varphi, & -b \cos \psi \operatorname{sen} \varphi, & -b \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \\ \frac{s}{b} \cos \psi \operatorname{sen} \varphi, & b \cos \psi \cos \varphi, & -b \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \psi, & 0, & s \cos \psi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \psi \cdot \begin{vmatrix} s \cos \psi \cos \varphi, & -\operatorname{sen} \varphi, & -b \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \\ s \cos \psi \operatorname{sen} \varphi, & \cos \varphi, & -b \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi \\ b \operatorname{sen} \psi, & 0, & s \cos \psi \end{vmatrix} =$$

$$= (s^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 \psi) \cdot \cos \psi.$$

Para el volumen elemental se tendrá

$$dV = dx dy dz = J \cdot ds d\varphi d\psi = (s^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 \psi) \cos \psi \cdot ds d\varphi d\psi.$$

Reemplazando en la integral propuesta la función subintegral y el elemento del volumen por sus expresiones halladas y simplifi-

cando por $s^2 = c^2 \sin^2 \psi$, vamos a tener

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{2\pi} \int_c^\infty e^{-2ks} \cos \psi \cdot ds d\varphi d\psi,$$

en donde los límites están elegidos de conformidad al enunciado del problema.

Finalmente

$$\int_c^\infty e^{-2ks} ds \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \psi d\psi = \frac{2\pi}{k} e^{-2kc}.$$

Esta solución es debida al Prof. SERGIO SISPÁNOV de Asunción (Paraguay).

2° SOLUCIÓN. — Consideremos un plano que pase por la recta AB . Un punto cualquiera del mismo puede determinarse por las distancias r', r'' . Queremos expresar el elemento de área en este sistema de coordenadas. Para ello tomemos unos ejes rectangulares cuyo origen sea el punto medio del segmento AB , el eje x la recta AB y el eje y la normal a él por su punto medio. Llamando $2a$ a la longitud del segmento AB las fórmulas de transformación que permiten pasar del sistema de coordenadas cartesiano x, y al r', r'' son

$$r'^2 = (a + x)^2 + y^2$$

$$r''^2 = (a - x)^2 + y^2.$$

De aquí

$$r' \frac{\partial r'}{\partial x} = a + x, \quad r' \frac{\partial r'}{\partial y} = y, \quad r'' \frac{\partial r''}{\partial x} = x - a, \quad r'' \frac{\partial r''}{\partial y} = y.$$

Por tanto, el jacobiano $\frac{\partial (r', r'')}{\partial (x, y)}$ vale

$$\frac{\partial (r', r'')}{\partial (x, y)} = \frac{1}{r' r''} \begin{vmatrix} a + x & y \\ x - a & y \end{vmatrix} = \frac{2ay}{r' r''}$$

y el elemento de área $dx dy$ se expresará

$$dx dy = \frac{\partial (x, y)}{\partial (r', r'')} dr' dr'' = \frac{r' r''}{2ay} dr' dr''. \quad [1]$$

Sentado esto, observemos que un punto cualquiera X del espacio puede determinarse por las coordenadas r' , r'' más el ángulo θ que el plano que pasa por X y por A , B forma con otro plano origen que pase también por la recta AB . Veamos de expresar el elemento de volumen $d\omega$ mediante estas coordenadas r' , r'' , θ . Fijado el plano θ el elemento de área está expresado por [1]; al incrementar θ , este elemento de área describirá un cilindro elemental de altura $y d\theta$ (pues y es la distancia de X al eje de giro AB) y por tanto

$$d\omega = y dx dy d\theta = \frac{r' r''}{2a} dr' dr'' d\theta. \quad [2]$$

Ahora estamos ya en condición de calcular la integral del enunciado.

Sustituyendo en ella $d\omega$ por su valor [2] resulta

$$I = \int \frac{e^{-K(r' + r'')}}{r' r''} d\omega = \frac{1}{2a} \int e^{-K(r' + r'')} dr' dr'' d\theta. \quad [3]$$

Fijados r' , r'' el ángulo θ puede variar de 0 a 2π y por tanto

$$I = \frac{\pi}{a} \int e^{-K(r' + r'')} dr' dr''. \quad [4]$$

Como hemos integrado θ de 0 a 2π , ahora debemos integrar r' , r'' para todos los puntos X de un semiplano que pase por A , B .

Para ello introduzcamos las nuevas variables s , t definidas por

$$r' + r'' = s, \quad r' - r'' = t$$

con las cuales es $dr' dr'' = \frac{1}{2} ds dt$. Como r' , r'' , $2a$ deben formar triángulo, s puede variar entre $2a$ e ∞ , y t puede variar entre $-2a$ y $+2a$. Por tanto

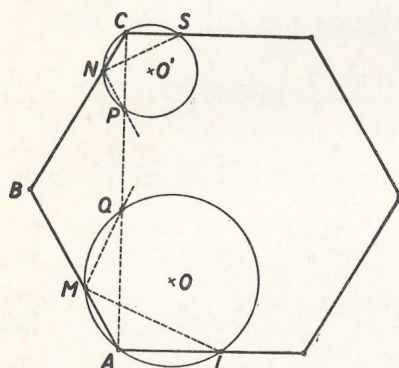
$$I = \frac{\pi}{2a} \iint e^{-Ks} ds dt = \frac{\pi}{2a} \int_{-2a}^{2a} dt \int_{2a}^{\infty} e^{-Ks} ds = \frac{\pi}{2a} \cdot 4a \cdot \frac{1}{k} e^{-2Ka}.$$

El resultado es, por tanto,

$$I = \frac{2\pi}{k} e^{-2Ka}.$$

Nº 20. — Construir un hexágono regular que tenga cuatro lados consecutivos pasando respectivamente por cuatro puntos fijados del plano.

SOLUCIÓN. — Sean L, M, N, S los 4 puntos por los cuales deben pasar respectivamente cuatro lados consecutivos del hexágono. Desde A se ve a LM bajo un ángulo de 120° ; por lo tanto A se encuentra sobre el arco capaz de 120° tendido sobre LM , cuyo centro es O . Análogamente el punto C se encuentra sobre el arco capaz de 120° tendido sobre NS ; sea O' su centro.



La recta AC corta a la circunferencia O en un punto Q tal que MQ se ve desde A bajo un ángulo de 30° . La misma recta corta a la circunferencia de centro O' en P de modo que NP se ve desde C bajo un ángulo también de 30° . De acuerdo a todo esto se puede efectuar la siguiente construcción:

Se trazan los arcos capaces de 120° para los segmentos LM y NS obteniéndose las circunferencias O y O' . Por M se traza una recta que forme con la tangente un ángulo de 30° . Esta recta cortará a la circunferencia en Q . Igualmente se traza por N una recta que forme con la tangente un ángulo de 30° y que cortará a la circunferencia O' en P . Uniendo P y Q con una recta, obtendremos A y C en la intersección de ésta con las circunferencias O y O' . Se une A con M , y L, C , respectivamente, con N, S y se completa luego la construcción de todo el hexágono.

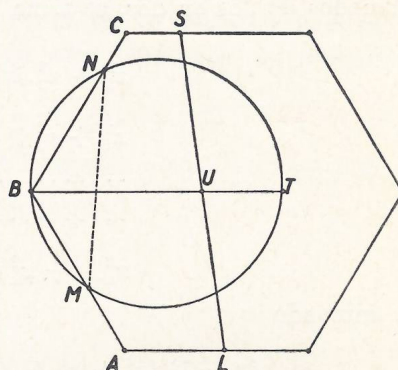
Esta solución es debida al Sr. S. FREIBERG, de Tucumán. Otra solución ha sido enviada por el Sr. ABRAHAM H. BENDER, de la Fac. de C. Matemáticas de Rosario, pero en ella se utiliza una curva construída por puntos y por consiguiente no resuelve el problema con sólo regla y compás, condición que implícitamente se exige a todos los problemas de construcciones geométricas.

N. DE LA R. — Una solución más simple es la siguiente: sobre el segmento MN que une el segundo y tercer punto se traza el arco capaz de 120° ; sea T el punto medio del arco que completa la circunferencia. Sea además U el punto medio del segmento LS que une el primero y el cuarto de los puntos dados; la recta TU corta nuevamente la circunferencia en un punto, que es el vértice B . Los

lados del hexágono por L , S son las paralelas por estos puntos a la recta TU .

La demostración es evidente, notando que el punto B debe de encontrarse sobre el arco capaz de 120° que tiene por extremos M , N y que la bisectriz del ángulo B pasa por el punto medio del arco que completa la circunferencia y es paralela al primero y cuarto lado.

De esta construcción se deduce que el problema tiene dos soluciones, correspondientes a los dos arcos capaces de 120° que se pueden construir sobre el segmento MN ; nótese que si la misma observación se hiciera para la construcción enviada, podría dudarse ha-



ber 4 soluciones, porque a cada uno de los segmentos LM , NS corresponden dos arcos capaces de 120° . Se muestra así que alguna advertencia habría que indicar para la elección de los arcos convenientes. Pero se muestra más: ¿serán todas las soluciones obtenidas propias para el problema propuesto? Ya se ve en la última construcción que se supuso implícitamente que la recta TU corte nuevamente la circunferencia en un punto del arco MN que no contiene a T ; pero podría ocurrir lo contrario; se ve entonces fácilmente que se obtiene en este caso todavía una solución del problema, con tal que se entienda la demanda en el sentido que los puntos dados estén sobre *las rectas de los lados*; si se quisiera tomar el problema en el sentido restringido, que los puntos pertenezcan propiamente a los lados del polígono, saldría una discusión que dejamos al cuidado del lector (ver la cuestión N° 6 en la pág. 206).

Para un problema análogo, donde en lugar de hexágono se habla de cuadrado, esta discusión se encuentra hecha en la Nota del Dr. ARMANDO CHIELLINI: *Intorno alla questione di costruire un quadrato circoscritto a un quadrilatero*. — Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. — Anno XI (1932).

N° 21. — Siendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ números positivos con la condición $\sum x_i = k$, demostrar las desigualdades

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{k^2}{n} \quad , \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{k} .$$

1° SOLUCIÓN. — I. Siendo $(a - b)^2 \geq 0$, se deduce

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

y aplicando esta desigualdad a todos los términos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ tomados de dos en dos, se tiene

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_3^2 \geq 2x_1x_3$$

.....

$$x_{n-1}^2 + x_n^2 \geq 2x_{n-1}x_n$$

y sumando

$$(n - 1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq 2 \sum x_i x_j,$$

extendida la suma del segundo miembro a todas las combinaciones de los índices i, j .

Sumando a cada miembro de la desigualdad la suma $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, tendremos

$$n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2 \sum x_i x_j.$$

Pero el segundo miembro es precisamente el desarrollo de $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 = k^2$, y por tanto, pasando n al segundo miembro, se obtiene

$$\sum_1^n x_i^2 \geq \frac{k^2}{n}.$$

II. Para demostrar la segunda desigualdad desarrollemos

$$\begin{aligned} k \sum_1^n \frac{1}{x_i} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \\ &= \frac{x_1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_1} + \dots + \frac{x_n}{x_n}. \end{aligned}$$

y agrupando las fracciones de igual numerador y denominador y también los pares de fracciones recíprocas, tendremos

$$k \sum_1^n \frac{1}{x_i} = \sum_1^n \frac{x_i}{x_i} + \sum_{i,j} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right), \quad [1]$$

donde la segunda sumatoria está extendida a todas las combinaciones entre los subíndices i, j ; por tanto el número de sumandos es $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Dividiendo los dos miembros de la desigualdad $x_i^2 + x_j^2 \geq 2x_i x_j$ por $x_i x_j$ se obtiene

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2,$$

por consiguiente de [1] se deduce

$$k \sum_1^n \frac{1}{x_i} \geq n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

de donde

$$\sum_1^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{k}.$$

Esta solución es debida al Sr. ABRAHAM H. BENDER, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

2° SOLUCIÓN. — I. En un sistema de ejes coordenados se determinan los puntos $x_i, y_i = x_i^2$ que se encontrarán sobre la parábola $y = x^2$. Suponiendo aplicadas en dichos puntos masas unitarias, las coordenadas del centro de gravedad serán

$$X_g = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{k}{n}, \quad Y_g = \frac{\sum x_i^2}{n}.$$

Este centro de gravedad debe ser interior a la parábola; luego la horizontal $y = Y_g$ corta a la curva $y = x^2$ en un punto de abscisa $X' \geq X_g$. Por tanto

$$Y_g = X'^2 \geq X_g^2,$$

de donde

$$\sum_1^n x_i^2 \geq \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot n = \frac{k^2}{n}.$$

II. Análogamente, los puntos $x_i, y_i = \frac{1}{x_i}$ están en la hipérbola $y = \frac{1}{x}$.

Las coordenadas del baricentro serán

$$X_g = \frac{k}{n}, \quad Y_g = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{x_i} = \frac{1}{X'}.$$

Dada la forma de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, es $X' \leq X_g$ y por tanto

$$\sum_1^n \frac{1}{x_i} \geq n \cdot \frac{1}{X_g} = \frac{n^2}{k}.$$

GENERALIZACIÓN. — El método anterior permite establecer desigualdades del mismo tipo donde los términos de las sumas sean los valores de una función $f(n)$ monótona cuya curvatura tenga signo constante (función convexa o cóncava).

En efecto, si $f(x_i)$ vuelve su convexidad hacia las y positivas, la horizontal $y = Y_g$ cortará la curva en el punto de abscisa $X' \leq X_g$ y se tendrá

$$X_g = \frac{k}{n}, \quad Y_g = \frac{1}{n} \sum_1^n f(x_i) = f(X') \leq f(X_g)$$

y por tanto

$$\sum_1^n f(x_i) \leq n f\left(\frac{k}{n}\right). \quad [1]$$

Si $f(x_i)$ vuelve su convexidad hacia las x positivas, se tendrá análogamente $X' \geq X_g$ y por tanto

$$Y_g = \frac{1}{n} \sum_1^n f(x_i) = f(X') \geq f(X_g)$$

de donde

$$\sum_1^n f(x_i) \geq n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Aplicando este método podemos, por ejemplo, determinar una acotación superior para el producto $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ con $\sum_1^n x_i = k$. En efecto, tomando logaritmos se tiene

$$\log x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \sum_1^n \log x_i$$

La curva $y = \log x$ es creciente y vuelve su convexidad hacia las y positivas y por tanto, según [1],

$$\sum_1^n \log x_i \leq n \log \frac{k}{n} = \log \left(\frac{k}{n} \right)^n.$$

Tomando antilogaritmos tendremos

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \leq \left(\frac{k}{n} \right)^n.$$

Por ejemplo, siendo

$$n! = 2.3.4 \dots n \text{ y } 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

aplicando la última desigualdad se obtiene la acotación

$$n! \leq \left[\frac{(n+2)(n-1)}{2(n-1)} \right]^{n-1} = \left(\frac{n+2}{2} \right)^{n-1}.$$

la que, por otra parte, se puede averiguar fácilmente también por razonamiento directo.

Esta solución y generalización son debidas al Ing. ERNESTO M. SALEME, de Tucumán.

Nº 22. — Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices de un polígono regular de n lados a cualquier recta trazada por el centro es constante. Hallar el valor de esta constante y vincular la proposición con un conocido teorema de mecánica.

1º SOLUCIÓN. — Sea φ el ángulo que forma la recta trazada por el centro con el más próximo de los radios que unen el centro del

polígono con los vértices y pongamos $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ siendo n el número de lados del polígono.

Los cuadrados de las distancias de los vértices a dicha recta serán

$$d_k^2 = r^2 \sin^2 (\varphi + k \alpha) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

de donde, sumando y teniendo en cuenta que

$$\sin^2 (\varphi + k \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2 (\varphi + k \alpha)}{2}$$

resulta

$$\sum_0^{n-1} d_k^2 = \frac{n r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \sum_0^{n-1} \cos 2 (\varphi + k \alpha).$$

La suma del segundo miembro es igual a cero, puesto que es igual a la suma de las proyecciones sobre una recta de los lados de una línea poligonal cerrada que se obtiene uniendo de 2 en 2 los vértices de un polígono regular de n lados. Por consiguiente

$$\sum_0^{n-1} d_k^2 = \frac{1}{2} n r^2.$$

Esto nos dice que, efectivamente, la suma de los cuadrados de las distancias está dada en función de constantes y por tanto para cualquier posición de la recta se tiene el mismo valor.

Esta solución es debida al Sr. GUIDO O. G. LISERRA, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario. Soluciones análogas han enviado los Sres. RAIMUNDO FAJARDO y ABRAHAM H. BENDER, de la misma Facultad.

2° SOLUCIÓN. — La suma de cuadrados del enunciado es, por definición, igual al momento de inercia respecto la recta considerada, de un sistema de masas unitarias colocadas en los vértices del polígono. Siendo el polígono regular, por simetría, se deduce que la elipse central de inercia debe ser un círculo y por tanto que el momento de inercia tiene el mismo valor respecto de cualquier recta que pase por el centro, que es lo que se trataba de demostrar. Ya sabiendo que este valor es constante, se determina inmediatamente observando que la suma de los momentos de inercia de

un sistema plano respecto dos rectas perpendiculares del mismo plano es igual al momento de segundo grado respecto el punto de intersección, y como éste vale $n r^2$, será

$$I = \frac{1}{2} n r^2.$$

Esta solución ha sido enviada por el Ing. ERNESTO M. SALEME, de Tucumán.

Nº 24. — Hallar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \operatorname{arctg} x}.$$

SOLUCIÓN. — El límite es $\frac{1}{3}$.

Han enviado soluciones el Sr. OSCAR J. ABRAMOVICH, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario, utilizando la regla de L'HOSPITAL, y los Sres. ABRAHAM H. BENDER, GUIDO O. LISERRA, de la misma Facultad, e Ing. ERNESTO M. SALEME, de Tucumán, desarrollando en serie el $\operatorname{arctg} x$. La primera solución es un poco más larga, pero tiene la ventaja de no pedir el conocimiento preliminar de aquel desarrollo en serie. Se puede abreviar con el cálculo siguiente:

Por la regla de L'HOSPITAL

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}}.$$

El segundo miembro se calcula directamente observando que

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}} &= \frac{x^2}{2x(1+x^2) \operatorname{arctg} x + x^2} = \\ &= \frac{1}{2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + 1 + 2x \operatorname{arctg} x}, \end{aligned}$$

y sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

SOLUCION DE LA CUESTION N° 2

El enunciado de la cuestión era el siguiente:

Se llama resto cuadrático de un número entero a con respecto a un entero positivo m (módulo) al resto de la división $a^2:m$. Aplicar estas nociones para demostrar alguna proposición como las siguientes: 1º, si tres números x, y, z realizan la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ hay entre ellos siempre uno par, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5 (nótese que podría el mismo número realizar dos de estas condiciones o las tres); 2º, si dos enteros x, y realizan la relación $24x^2 + 1 = y^2$, uno de ellos es múltiplo de 5.

SOLUCIÓN. — Recordemos previamente un conocido teorema relativo a los restos cuadráticos. Sea a un entero cualquiera; si

$$a \equiv \alpha \pmod{m}, \quad [1]$$

sigue que

$$a^2 \equiv \alpha^2 \pmod{m}. \quad [2]$$

A cada entero a corresponde otro que le es congruente respecto del módulo m en cualquier intervalo numérico de amplitud m , por ej. en el intervalo $-\frac{m}{2} < x \leq \frac{m}{2}$; por lo tanto se puede convenir de dar a α en la [1] solamente valores de la forma $\pm \beta$, $0 \leq \beta \leq \frac{m}{2}$; y se puede también excluir el 0 si no se quiere considerar los múltiplos de m ; pero a valores opuestos de β corresponde el mismo valor para β^2 ; por lo tanto la [2] demuestra que los restos cuadráticos distintos respecto de un determinado módulo m son en número $\leq \frac{m}{2}$, pudiendo este número ser aun $< \frac{m}{2}$, sea por el hecho que el intervalo $0 < x \leq \frac{m}{2}$ contenga menos de $\frac{m}{2}$ enteros (m impar), sea porque dos enteros de este intervalo tengan cuadrados congruentes respecto de m .

Se tiene luego la siguiente tabla de restos cuadráticos:

mod 2	1
» 3	1
» 4	1
» 5	1 - 1
» 6	1 - 2 3
» 7	1 2 - 3
.....	

Pasaremos ahora a la demostración de las cuestiones planteadas.

1º — Si tres números x, y, z realizan la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ hay entre ellos siempre uno par, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5.

Escribamos la ecuación en la forma

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad [3]$$

El resto del primer miembro respecto a un número m cualquiera tiene que ser cero. Si $m = 2$ ó 3, basta notar que a no ser par o múltiplo de 3 alguno de los números x, y, z , el resto del primer miembro sería

$$1 + 1 - 1 = 1 \neq 0.$$

Para $m = 5$, siempre cuando ninguno de los números x, y, z sea múltiplo de 5, el resto del primer miembro respecto al mod. 5 sería

$$\pm (1 + 1 - 1) = \pm 1 \neq 0 \quad \text{ó} \quad \pm (1 + 1 + 1) = \pm 3 \neq 0.$$

Se concluye que si tres números x, y, z realizan la ecuación uno por lo menos de ellos debe ser múltiplo de 2, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5; por otra parte se puede excluir que dos de ellos sean múltiplos del mismo número, porque en este caso también el tercero debería ser múltiplo de este número y, después de suprimir el factor común se tendrían números realizando la ecuación. Al contrario pueden dos o también los tres de los factores nombrados pertenecer al mismo término, en cuyo caso, por lo di-

cho, no pertenecerán a los restantes. Como ejemplos he aquí unas soluciones que presentan los diferentes casos posibles:

$$\begin{array}{ccc} x = 3 & , & y = 4 & , & z = 5 \\ 12 & & 5 & & 13 \\ 20 & & 99 & & 101 \\ 15 & & 8 & & 17 \\ 60 & & 11 & & 61 \end{array}$$

Si hubiéramos considerado la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

poniendo 1 en lugar de cada término habríamos obtenido $1 + 1 + 1 - 1 = 2$ de donde habríamos podido concluir que una a lo menos de las incógnitas debe ser divisible por 3. Con respecto a los factores 2 y 5 se concluye análogamente que podrán no ser divisibles por ellos ninguno de los términos; pero si uno es múltiplo de 2 ó de 5 debe serlo también otro.

2º — Si dos enteros x, y realizan la relación $24x^2 + 1 = y^2$, uno de ellos es múltiplo de 5.

Se tiene en efecto que

$$24x^2 = 25x^2 - x^2 \equiv -x^2 \pmod{5};$$

tiene luego que ser $1 \equiv x^2 + y^2 \pmod{5}$ y mirando todavía a la tabla de restos cuadráticos se ve que esto sólo ocurre si $x \equiv 0$, ó $y \equiv 0 \pmod{5}$. En consecuencia, uno de los números x, y debe ser necesariamente múltiplo de 5. Además el otro número deberá ser tal que su cuadrado sea $\equiv 1 \pmod{5}$ y por lo tanto deberá terminar en una de las cifras 1 ó 4.

Un razonamiento análogo se aplica en general a la ecuación

$$(5a \pm 1)x^2 + (5b \pm 1)y^2 = y^2$$

donde a, b son enteros cualesquiera.

EDUARDO GASPÁR.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

39. — Demostrar que cualquiera que sea el número entero n , el número

$$N = 11n(n+2) + 1$$

no puede terminar en ninguna de las cifras 2, 3, 7, 8.

40. — Sean n números positivos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ligados por la relación

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1.$$

Demostrar que el valor mínimo del producto

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_n)$$

es 2^n .

41. — Calcular el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ y los planos $y = 1$, $z = 0$.

42. — Demostrar que para un círculo de radio R el límite de la razón entre el cuadrado del área de un segmento y el cubo de la flecha correspondiente, cuando ésta tiende a cero, es $\frac{32}{9}R$. Generalizar este resultado al caso de una curva plana cualquiera.

43. — Una curva corta al eje x en un punto $x = a$. La razón del área contenida entre la curva, el eje x y la ordenada de un punto variable al área del cuadrado de esa ordenada es igual a la razón entre esa misma ordenada y la abscisa. Determinar la ecuación de la curva.

44. — Encontrar las fórmulas resolutivas de las ecuaciones de quinto grado de la forma

$$x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + 2b = 0.$$

Este problema nos fué señalado por el señor Prof. SERGIO SÍSPANOV, de la Universidad de Asunción (Paraguay).

CUESTIONES

6. — Extender la solución del problema N° 20 al caso en que, en lugar de un hexágono, se pidiera un n -gono regular (para n cualquiera) del cual cuatro lados consecutivos pasan por cuatro puntos dados, desarrollando la discusión aludida en la N. de la Red. (p. 194 de este mismo fascículo) para algún valor de $n \neq 4$.

7. — Es conocido el aparato de Mariotte que sirve para mostrar la transmisión del impulso en una fila de bolas. La explicación del fenómeno como se da en los tratados de física, fundada únicamente sobre los teoremas de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento es exacta en el caso de dos bolas, no lo es completamente en el caso de más. Se pide un estudio crítico y mecánico.

CORRESPONDENCIA

Damos principio en este fascículo a una sección que había sido prevista en el programa institucional de nuestra revista, pero que habíamos atrasado hasta el momento en consideración de ser el Boletín del Instituto dirigido principalmente hacia argumentos de interés didáctico para nuestros alumnos.

Desde la primera aparición de « Mathematicae Notae », al señor Prof. MARIO GONZÁLEZ de la Universidad de la Habana, nos envió una nota « *Sobre el indicador de un producto* » de la cual, por falta de espacio, vamos a dar un resumen consistiendo en la reproducción de las partes esenciales en su forma original, solo suprimiendo las demostraciones que el lector puede reconstruir fácilmente recordando la fórmula conocida

$$\varphi(m) = m \prod \frac{p-1}{p}$$

donde el producto está extendido a todos los factores primos de m . He aquí las palabras del Sr. Mario González:

.....

Al estudiar algunas cuestiones de Teoría de los números se nos ha presentado el problema de calcular el indicador del producto de dos números no primos entre sí. Cuestión es ésta que, omitida por la mayoría de los autores (Bachmann, Cahen, etc.), solamente hemos visto tratada por Lucas (Théorie des nombres, pág. 399). La fórmula que indica Lucas es debida a Prouhet, según Dickson. No adaptándose esta fórmula a nuestro propósito buscamos otra más adecuada y el resultado de nuestra sencilla investigación es lo que a continuación se expone.

1. TEOREMA I. — *Si los números m y n se componen de los mismos factores primos, el indicador del producto mn es igual a m por el indicador de n , o viceversa. Esto es*

$$\varphi(mn) = m \varphi(n) = n \varphi(m) \quad [1.1]$$

COROLARIO I. — *La razón de dos números que contienen únicamente factores comunes, es igual a la razón de sus indicadores, o sea, que los números son proporcionales a sus indicadores respectivos.*

COROLARIO II. — *Generalización de la fórmula que da el indicador de la potencia de un número primo.*

Como es sabido, si p es primo se tiene

$$\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1) = p^{\alpha-1}\varphi(p)$$

Si p es compuesto la fórmula conserva completamente su validez. En efecto, aplicando nuestro teorema resulta

$$\varphi(p^\alpha) = \varphi(p^{\alpha-1} \cdot p) = p^{\alpha-1}\varphi(p)$$

COROLARIO III. — Si es

$$N = A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda$$

siendo $A, B, \dots, L$ números cualesquiera (simples o compuestos) primos entre sí dos a dos, se verifica

$$\varphi(N) = A^{\alpha-1}\varphi(A) B^{\beta-1}\varphi(B) \dots L^{\lambda-1}\varphi(L)$$

TEOREMA II. — Si m sólo contiene factores primos de n , pero la recíproca no es cierta, es decir, hay factores de n que no figuran en m , entonces sólo puede afirmarse que el indicador de mn es igual a m por el indicador de n .

TEOREMA III. — Si el número m se descompone en el producto de m' , que sólo contiene factores de n , por m'' , que es primo con n , el indicador del producto mn es el producto de m' por los indicadores de m'' y n . En símbolos

$$\varphi(mn) = m' \varphi(m'') \varphi(n) \quad [1.2]$$

GENERALIZACIÓN. — La fórmula [1.2] se extiende sin dificultad al caso de más de dos factores; resulta así la expresión general

$$\varphi(\prod a_i) = \prod a_{i1} \cdot \prod \varphi(a_{i2}) \quad a_i = a_{i1} \cdot a_{i2}$$

componiéndose a_{i1} de los factores de a_i que figuran en cada uno de los que siguen y siendo a_{i2} primo con todos los factores a_j ($j > i$).

2. — Extensión a los indicadores de orden k (Jordan). — Se llama indicador de orden k , y se indica $\varphi_k(n)$, al número de grupos de k números, no superiores a n , y tales que dichos números y n sean primos entre sí.

El indicador de orden k goza, entre otras de las propiedades siguientes (*):

$$a) \quad \varphi_k(p) = p^k - 1 \quad (p \text{ primo})$$

$$b) \quad \varphi_k(p^\alpha) = p^{k(\alpha-1)}(p^k - 1) \quad (p \text{ primo})$$

c) Si $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ ($a, b, c, \dots$ primos) se verifica

$$\begin{aligned}\varphi_k(n) &= n^k \left(1 - \frac{1}{a^k}\right) \left(1 - \frac{1}{b^k}\right) \left(1 - \frac{1}{c^k}\right) \dots \\ &= a^{k(\alpha-1)} (a^k-1) b^{k(\beta-1)} (b^k-1) c^{k(\gamma-1)} (c^k-1) \dots\end{aligned}$$

d) Si m y n son primos entre sí

$$\varphi_k(mn) = \varphi_k(m) \cdot \varphi_k(n)$$

Cuando m y n no son primos entre sí, ¿cuál es el indicador de orden k del producto mn ? Este es el problema que resolvemos a continuación. Veremos que nuestras fórmulas se aplican aquí con ligera modificación, y daremos, además, generalizaciones de las fórmulas b) y c).

TEOREMA I. — Si m y n contienen los mismos factores primos se verifica

$$\varphi_k(mn) = m^k \varphi_k(n) = n^k \varphi_k(m)$$

Sea, para fijar ideas,

$$\begin{aligned}m &= a^\alpha b^\beta c^\gamma \\ n &= a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \\ mn &= a^{\alpha+\alpha'} b^{\beta+\beta'} c^{\gamma+\gamma'}\end{aligned}$$

En virtud de la fórmula c) tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_k(mn) &= a^{k(\alpha+\alpha'-1)} (a^k-1) b^{k(\beta+\beta'-1)} (b^k-1) c^{k(\gamma+\gamma'-1)} (c^k-1) \\ &= a^{k\alpha} b^{k\beta} c^{k\gamma} \cdot a^{k(\alpha'-1)} (a^k-1) b^{k(\beta'-1)} (b^k-1) c^{k(\gamma'-1)} (c^k-1) \\ &= a^{k\alpha'} b^{k\beta'} c^{k\gamma'} \cdot a^{k(\alpha-1)} (a^k-1) b^{k(\beta-1)} (b^k-1) c^{k(\gamma-1)} (c^k-1)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\varphi_k(mn) = m^k \varphi_k(n) = n^k \varphi_k(m)$$

(*) Véase, por ejemplo, CAHEN: *Eléments de la théorie des nombres*, págs. 36 y 37.

COROLARIO I. — Existe la proporcionalidad

$$\frac{m^k}{n^k} = \frac{\varphi_k(m)}{\varphi_k(n)}$$

COROLARIO II. — Cualquiera que sea p ,

$$\varphi_k(p^\alpha) = \varphi_k(p^{k(\alpha-1)} \cdot p) = p^{k(\alpha-1)} \varphi_k(p) \quad (2.1)$$

COROLARIO III. — Si $N = A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda$ siendo $A, B, \dots, L$ números simples o compuestos primos entre sí dos a dos, se verifica

$$\varphi_k(N) = A^{k(\alpha-1)} \varphi_k(A) B^{k(\beta-1)} \varphi_k(B) \dots L^{k(\lambda-1)} \varphi_k(L) \quad (2.2)$$

Las fórmulas [2.1] y [2.2] generalizan las b) y c).

TEOREMA II. — Si m sólo contiene factores de n , sin que la recíproca se verifique, entonces

$$\varphi_k(mn) = m^k \varphi_k(n)$$

TEOREMA III. — Si $m = m' m''$ conteniendo m' factores de n únicamente y siendo m'' primo con n , entonces

$$\varphi_k(mn) = m'^k \varphi_k(m'') \varphi_k(n) \quad (2.3)$$

Pues

$$\varphi_k(mn) = \varphi_k(m' m'' n) = \varphi_k(m' n) \varphi_k(m'') = m'^k \varphi_k(m'') \varphi_k(n)$$

De esta fórmula podemos obtener fácilmente una generalización de la de Prouhet, pues llamando δ al producto de la primera potencia de los factores primos de m' y n , tenemos

$$m'^k : \delta^k = \varphi_k(m') : \varphi_k(\delta),$$

de donde

$$m'^k = \varphi_k(m') \frac{\varphi_k(\delta)}{\delta^k}$$

con lo que la fórmula [2.3] puede escribirse

$$\varphi_k(mn) = \varphi_k(m') \varphi_k(m'') \varphi_k(n) \frac{\delta^k}{\varphi_k(\delta)} = \varphi_k(m) \varphi_k(n) \frac{\delta^k}{\varphi_k(\delta)}$$

Para el caso de más de dos factores análogamente a [2.3] resulta

$$\varphi_k(\Pi a_i) = \Pi a_{i_1}^k \cdot \Pi \varphi_k(a_{i_2}) \quad \begin{aligned} a_i &= a_{i_1} \cdot a_{i_2} \\ a_{i_2} &\text{ primo con } a_j \ (j > i) \end{aligned}$$

fórmula que resume todas las estudiadas.

3. — *Extensión a la función $\Phi(n)$ de Gauss.*

En el campo de Gauss se define la función $\Phi(n)$, correspondiente a la aritmética $\varphi(n)$, del siguiente modo:

Número de primos con n que se encuentran en un sistema cualquiera de N números incongruentes (mód. n). Nn denota la norma de n .

He aquí las propiedades fundamentales de dicha función (*):

a) Si θ es primo, $\Phi(\theta) = N\theta - 1$

b) Si θ es primo, $\Phi(\theta^\alpha) = (N\theta)^{\alpha-1} (N\theta - 1)$

c) Si $\eta = \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \dots \theta_l^\lambda$ siendo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ factores primos distintos,

$$\Phi(\eta) = (N\theta_1)^{\alpha-1} (N\theta_1 - 1) (N\theta_2)^{\beta-1} (N\theta_2 - 1) \dots (N\theta_l)^{\lambda-1} (N\theta_l - 1)$$

d) Si θ_1 y θ_2 son primos entre sí

$$\Phi(\theta_1 \theta_2) = \Phi(\theta_1) \Phi(\theta_2)$$

Para los enteros de Gauss, con el convenio de no considerar a un número distinto de sus tres asociados, vale el algoritmo euclídeo de las divisiones sucesivas, acertadamente considerado por Dirichlet como la llave de todo el edificio de la Teoría de los números, con su secuela de teoremas, fundamento de la Aritmética ordinaria (divisibilidad, descomposición única en factores primos, etc.). Por tanto, siguiendo un procedimiento análogo al empleado precedentemente (**), y que es inútil repetir, podemos dar de las propiedades b), c) y d) las siguientes generalizaciones:

b') Si θ es compuesto, $\Phi(\theta^\alpha) = (N\theta)^{\alpha-1} \Phi(\theta)$

c') Si $\eta = \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \dots \theta_l^\lambda$ siendo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ números cualesquiera primos entre sí dos a dos,

$$\Phi(\eta) = (N\theta_1)^{\alpha-1} \Phi(\theta_1) (N\theta_2)^{\beta-1} \Phi(\theta_2) \dots (N\theta_l)^{\lambda-1} \Phi(\theta_l)$$

d') $\Phi(\theta_1 \theta_2) = N\theta_1' \cdot \Phi(\theta_1'') \cdot \Phi(\theta_2) \quad (\theta_1 = \theta_1' \theta_1'')$

Y en general,

$$\Phi(\pi \theta_i) = \pi N\theta_{i1} \cdot \pi \Phi(\theta_{i2})$$

figurando en θ_{i1} los factores de θ_i que están en θ_j ($j > i$) y siendo θ_{i2} primo con todos los factores los factores θ_j .

(*) Consúltese BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*, págs. 76 y 77.

(**) Deberá, además, tenerse en cuenta la propiedad

$$N(\theta_1 \theta_2 \dots \theta_l) = N\theta_1 \cdot N\theta_2 \dots N\theta_l.$$

*
* *

El Sr. Prof. André Tosello de la Universidad de Campinas (Brasil), en dos cartas fechadas 10 de agosto y 12 de setiembre de 1942 nos envía algunas consideraciones elementales « Sobre el análisis combinatorio ». El Sr. Tosello introduce un símbolo nuevo para representar el número de las combinaciones con repetición de clase m de n objetos, que él representa por $((\frac{n}{m}))$; se sabe que, con los símbolos combinatorios ordinarios, será luego:

$$((\frac{n}{m})) = \binom{n+m-1}{m}.$$

He aquí las cartas del Sr. Tosello:

.....
Propomos determinar no grupo das combinações com repitição de n letras tomadas de m a n os agrupamentos que encerram, pelo menos uma vez, as letras determinadas: $a, b, c, \dots, l$ (α letras).

Para se ter o numero de grupos que contem uma letra a (somente uma), tomamos as combinações com repetição das $n-1$ letras restantes, $m-1$ a $m-1$, temos então: $((\frac{n-1}{m-1}))$. Do mesmo modo, os grupos que encerram 2 letras a (somente 2), são: $((\frac{n-1}{m-2}))$. Os grupos que contem as letras a , exepto uma, são: $((\frac{n-1}{0}))$. Os grupos em que todas as letras a ; são: $((\frac{n-1}{1}))$. Nestas condições, os grupos que contem, pelo menos uma vez a letra a , são:

$$((\frac{n-1}{m-n})) + \dots + ((\frac{n-1}{1})) + 1 = \sum_{p=1}^m ((\frac{n-1}{m-p}))$$

Analogamente, os grupos que contem a letra b , pelo menos uma vez, sem conter a letra a , são:

$$\sum_{p=1}^m ((\frac{n-2}{m-p}))$$

Finalmente, os grupos que contem a letra l (α -esima letra) sem conter as anteriores: $a, b, c, \dots, k$, são

$$\sum_{p=1}^m ((\frac{n-\alpha}{m-p}))$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m ((\frac{n-1}{m-p})) + \sum_{p=1}^m ((\frac{n-2}{m-p})) + \dots + \sum_{p=1}^m ((\frac{n-\alpha}{m-p})) = \\ = \sum_{\substack{p=1 \\ q=1}}^{\substack{q=\alpha \\ p=m}} ((\frac{n-q}{m-p})) \end{aligned}$$

é a expressão que nos dá, nas combinações com repitição de n letras m a m os grupos que encerram pelo menos uma vez as α letras $a, b, c, \dots, l$.

I. — Esta somatoria tem α^m termos.

II. — A expressão $((\frac{n-q}{m-p}))$ nos dá o numero de agrupamentos en que entram p letras das quaes q são diferentes.

III. — Tem-se

$$\sum_{\substack{q=n-1 \\ p=m \\ p=1 \\ q=1}} ((\frac{n-q}{m-p})) + 1 = ((\frac{n}{m}))$$

.....

1) Dentro dos grupos $((\frac{n}{m}))$ — combinações com repitição de n elementos tomados m a m — pode-se calcular os agrupamentos que encerram pelo menos uma vez a letra a . Para isto admitamos que se tira uma letra a de cada um destes grupos; erstan $m-1$ letras de n naturalezas diferentes e que se acham combinadas de todas os $((\frac{n}{m-1}))$ modos possiveis. Nestas condições os grupos que contem pelo menos uma vez a letra a são representados por $((\frac{n}{m-1}))$.

2) Os grupos que contem pelo menos uma vez a letra b , sem conter a letra a ; determina-se de modo anterior com a diferenca que as letras são de $n-1$ naturezas diferentes, visto que não deve entrar mais a letra a . Portanto o numero procurado é: $((\frac{n-1}{m-1}))$.

3 Do mesmo modo, o numero de grupos que contem pelo menos uma vez a letra c sem conter as letras a e b , é: $((\frac{n-2}{m-1}))$.

4) A expressão:

$$\sum_{q=0}^{\alpha-1} ((\frac{n-q}{m-1})) = ((\frac{n}{m-1})) + ((\frac{n-1}{m-1})) + \dots + ((\frac{n-\alpha+1}{m-n}))$$

nos da o numero de grupos que contem pelo menos uma vez as letras $a, b, c, \dots$; expressão esta igual a estabelecida na minha primera carta, que era

$$\sum_{\substack{q=x \\ p=m \\ p=1 \\ q=1}} ((\frac{n-q}{m-p})).$$

Pode-se demonstrar analiticamente a igualdade:

b)

$$\sum_{q=0}^{\alpha-1} \left(\binom{n-q}{m-1} \right) = \sum_{\substack{q=\alpha \\ p=m \\ q=1}}^{\alpha} \left(\binom{n-q}{m-p} \right)$$

Vejamos:

c)

$$\sum_{\substack{q=\alpha \\ p=m \\ p=1 \\ q=1}}^{\alpha} \left(\binom{n-q}{m-1} \right) = \sum_{p=1}^m \left(\binom{n-1}{m-p} \right) + \sum_{p=1}^m \left(\binom{n-2}{m-p} \right) + \dots + \sum_{p=1}^m \left(\binom{n-\alpha}{m-p} \right)$$

Sabemos que:

$$\sum_{p=1}^m \left(\binom{n-\alpha}{m-p} \right) = \left(\binom{n-\alpha}{m-1} \right) + \left(\binom{n-\alpha}{m-2} \right) + \dots + \left(\binom{n-\alpha}{0} \right)$$

$$\sum_{p=1}^m \left(\binom{n-\alpha}{m-p} \right) = \binom{n+m-\alpha-2}{m-1} + \binom{n+m-\alpha-3}{m-2} + \dots + \binom{n-\alpha}{0}$$

De outro lado; sabido que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \dots + \binom{n-p}{1} + \binom{n-p-1}{0}$$

logo:

d)

$$\sum_{p=1}^m \left(\binom{n-\alpha}{m-p} \right) = \binom{n+m-\alpha-1}{m-1} = \left(\binom{n-\alpha+1}{m-1} \right)$$

Substituindo-se (d) em (c), vem:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q=\alpha \\ p=m \\ p=1 \\ q=1}}^{\alpha} \left(\binom{n-q}{m-p} \right) &= \left(\binom{n}{m-1} \right) + \left(\binom{n-1}{m-1} \right) + \\ &+ \left(\binom{n-2}{m-1} \right) + \dots + \left(\binom{n-\alpha+1}{m-1} \right) \\ \sum_{p=1}^m \left(\binom{n-q}{m-p} \right) &= \sum_{q=0}^{\alpha-1} \left(\binom{n-q}{m-1} \right) \end{aligned}$$

e fica assim demonstrada a igualdade (b).

- El precio de suscripción a « Mathematica Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

INDICE DE LOS FASCICULOS 1, 2 Y 3

Fascículo 1.

—Al empezar el segundo año	pág. 1
—Una observación elemental sobre las ecuaciones de la balística externa (G. FUBINI)	» 3
—Definición y condiciones de existencia de la tangente y el círculo osculador en un punto de una curva (B. LEVI)	» 11
—Ejercicios y problemas (Propuestos)	» 35
—Flores y Hojas	» 36
—Recordatorio del tricentenario de Galileo y Newton	» 38
—Ejercicios y Problemas. Soluciones	» 40
—Flores y Hojas. Respuesta	» 48
—Bibliografía	» 52

Fascículo 2.

—Isaac Newton y el binomio (L. A. SANTALÓ)	» 61
—Sobre el problema n° 6. - Estudio acerca del péndulo de Foucault (P. E. ZADUNAIISKY)	» 73
—Ejercicios y problemas (Soluciones)	» 95
—Flores y Hojas (Respuesta)	» 100
—Ejercicios y Problemas (Propuestos)	» 102
—Cuestiones	» 103
—Flores y Hojas	» 104
—Resultado del concurso	» 105
—Bibliografía	» 107

Fascículo 3.

—El postulado de Arquímedes. De Euclides a Galileo: Conceptos modernos (B. LEVI)	pág. 109
—Ejercicios y problemas (Propuestos)	» 141
—Solución de la cuestión N° 4 (L. A. SANTALÓ)	» 143
—Ejercicios y problemas (Soluciones)	» 148
—Tullio Levi-Civita (B. LEVI)	» 155
—Bibliografía	» 159

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS

DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$ ⁿ
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y) ; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Año 1940 - Vol. II.	
1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — La noción de « dominio deductivo » como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas ...	1.50
Año 1941 - Vol. III.	
1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos ...	2.50
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D ...	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota « Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas »	1.00
Año 1942 - Vol. IV.	
1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de 4 dimensiones.	3.00
2 - M. COTLAR. — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo.	2.00