

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, FISICO-
QUIMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEPTIMO - FASC. 2-3



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1947

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

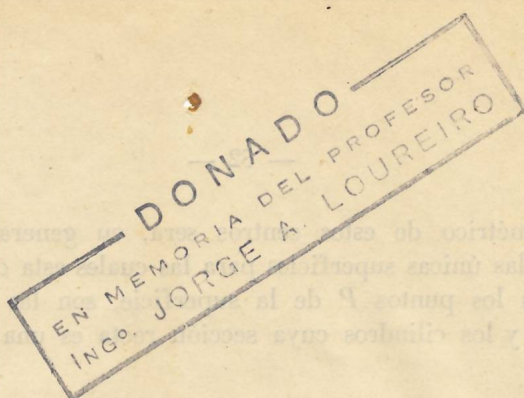
Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

INDICE

	PÁG.
Una propiedad característica de las cuádricas de revolución y de los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica (L. A. SANTALÓ)	81
Estudio en grande de una ecuación diferencial del segundo orden (BEPPO LEVI y JOSÉ L. MASSERA)	91
Resultado del concurso entre solucionistas de problemas propuestos en el año sexto (1946)	155
Notas sobre la teoría matemática de los circuitos lineales. Un método para la síntesis de impedancias (ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ) ..	156
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	162
Ejercicios y Problemas (Resueltos)	163
Bibliografía	175



UNA PROPIEDAD CARACTERISTICA DE LAS CUADRICAS DE REVOLUCION Y DE LOS CILINDROS CUYA SECCION RECTA ES UNA ESPIRAL LOGARITMICA

por L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* Se llaman curvas- D de una superficie aquellas que en cada uno de sus puntos tienen la esfera osculatriz tangente a la superficie ⁽¹⁾.

Se sabe que la ecuación diferencial de estas curvas- D es de segundo orden, de manera que por cada punto de una superficie pasan infinitas, una para cada dirección considerada sobre la superficie.

El teorema que vamos a demostrar en esta nota es el siguiente:

Las únicas superficies tales que en cualquier punto de la superficie, el lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas- D que pasan por él es una curva plana, son las cuádricas de revolución y los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica.

Deben excluirse, y ello haremos en todo el trabajo, las esferas y, como caso límite, los planos, para los cuales todas las curvas son curvas- D .

En realidad las curvas- D intervienen en el teorema únicamente para dar una mayor simplicidad al enunciado. Como sólo se utiliza de ellas la propiedad local que las caracteriza en cada punto, podría prescindirse de las mismas y decir:

Consideremos en un punto P de una superficie todas las esferas tangentes y los centros de los círculos osculadores en P a las curvas de intersección de estas esferas con la superficie. El

⁽¹⁾ Bibliografía sobre estas curvas se puede ver en la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, III, D 3, págs. 181-182.

lugar geométrico de estos centros será, en general, una curva alabeada; las únicas superficies para las cuales esta curva es plana para todos los puntos P de la superficie, son las cuádricas de revolución y los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica.

2. *Fórmulas necesarias.* Consideremos un punto de una superficie y un sistema de ejes coordenados ortogonales x_1, x_2, x_3 tales que el plano $x_1 x_2$ sea el plano tangente y los ejes x_1, x_2 coincidan con las direcciones principales de curvatura de la superficie en dicho punto. Supondremos siempre que se trata de un punto regular, es decir, un punto en el cual las curvaturas principales son finitas y derivables.

Entonces se sabe que la ecuación de la superficie en un entorno del origen (que es el punto considerado) se expresa por el desarrollo en serie

$$x_3 = \frac{1}{2}(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) + \frac{1}{6}(k_{11} x_1^3 + 3k_{12} x_1^2 x_2 + 3k_{21} x_1 x_2^2 + k_{22} x_2^3) + \dots \quad (2.1)$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales en el origen y además se ha puesto

$$k_{ij} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.2)$$

Tanto las curvaturas k_1, k_2 como sus derivadas parciales se toman en el origen.

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva D que pasa por el origen y es tangente en él a la dirección que forma un ángulo φ con el eje x_1 , podemos proceder por coeficientes indeterminados de la manera siguiente.

Llamando s al arco de la curva, en un entorno del origen, estas ecuaciones paramétricas deben ser de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \varphi + \alpha_1 s^2 + \beta_1 s^3 + \dots \\ x_2 &= s \sin \varphi + \alpha_2 s^2 + \beta_2 s^3 + \dots \\ x_3 &= \alpha_3 s^2 + \beta_3 s^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Siendo s el arco, debe ser $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$ (indicando los acentos derivadas respecto s), de donde, sustituyendo los valores (2.3) e igualando a cero el coeficiente de s se tiene la primera relación

$$\alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \sin \varphi = 0. \quad (2.4)$$

Además, para que la curva (2.3) esté contenida en la superficie (1.1) debe verificarse idénticamente

$$\begin{aligned} \alpha_3 s^2 + \beta_3 s^3 + \dots = & \frac{1}{2} (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi) s^2 + \\ & \frac{1}{6} (k_{11} \cos^3 \varphi + 3k_{12} \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3k_{21} \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ & + k_{22} \sin^3 \varphi + 6k_1 \alpha_1 \cos \varphi + 6k_2 \alpha_2 \sin \varphi) s^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

de donde se deduce, igualando los coeficientes de las potencias s^2 y s^3 de ambos miembros,

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & \frac{1}{2} (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi) \\ \beta_3 = & \frac{1}{6} (k_{11} \cos^3 \varphi + 3k_{12} \cos^2 \varphi \sin \varphi + \\ & 3k_{21} \cos \varphi \sin^2 \varphi + k_{22} \sin^3 \varphi) \\ & + k_1 \alpha_1 \cos \varphi + k_2 \alpha_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por otra parte, para que (2.3) sea una curva- D la ecuación de su esfera osculatriz en el origen debe ser de la forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2Rx_3 = 0 \quad (2.7)$$

siendo R el radio de la misma. Por tanto, al sustituir en esta ecuación los valores (2.3), deben ser nulos los coeficientes de s^2 y s^3 , lo cual, teniendo en cuenta (2.4), da las condiciones

$$1 - 2\alpha_3 R = 0, \quad \beta_3 = 0. \quad (2.8)$$

De (2.4) y de la segunda ecuación (2.6), teniendo en cuenta (2.8), se deducen los valores de α_1 y α_2 , a saber

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} h \operatorname{sen} \varphi, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} h \cos \varphi$$

habiendo puesto, para abreviar,

$$h = \frac{k_{11} \cos^3 \varphi + 3k_{12} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + 3k_{21} \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + k_{22} \operatorname{sen}^3 \varphi}{3(k_1 - k_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} \quad (2.9)$$

Resulta, en definitiva, que las ecuaciones de la curva- D de la superficie (2.1) que pasa por el origen y cuya tangente en este punto forma un ángulo φ con el eje x_1 , en un entorno del origen, son

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \varphi - \frac{s^2}{2} h \operatorname{sen} \varphi + \dots \\ x_2 &= s \operatorname{sen} \varphi + \frac{s^2}{2} h \cos \varphi + \dots \\ x_3 &= \frac{1}{2} s^2 (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde los puntos indican términos que contienen potencias de s superiores a s^2 ⁽²⁾.

3. *Demostración del teorema.* La dirección de la normal principal en el origen ($s=0$) a la curva- D cuyas ecuaciones son las (2.10) tiene sus cosenos directores proporcionales a

$$x''_1 = -h \operatorname{sen} \varphi, \quad x''_2 = h \cos \varphi, \quad x''_3 = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi \quad (3.1)$$

y el radio de curvatura r vale

$$r = \frac{1}{\sqrt{x''_1{}^2 + x''_2{}^2 + x''_3{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}}. \quad (3.2)$$

⁽²⁾ Estas ecuaciones para las curvas D se encuentran ya en W. BLASCHKE, *Bestimmung der Flächen deren D-Linien gleichzeitig Böschungslinien sind*, Mathematische Zeitschrift, vol. 27, 1928, pág. 150.

Por tanto las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por los centros de curvatura de las curvas- D que pasan por el origen son

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{-h \operatorname{sen} \varphi}{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \\ \eta &= \frac{h \cos \varphi}{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \\ \zeta &= \frac{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

en las cuales el parámetro variable es el ángulo φ .

Para que esta curva sea plana deben existir las constantes A, B, C, D tales que sea, idénticamente para todo valor de φ ,

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0 \quad (3.4)$$

o sea,

$$\begin{aligned}-Ah \operatorname{sen} \varphi + Bh \cos \varphi + C(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \\ + D[h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2] = 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde h tiene el valor (2.9).

Observemos que para nuestro objeto podemos suponer $k_1 \neq k_2$, puesto que el caso de ser $k_1 = k_2$ en todo punto de la superficie significa que la misma es esférica, caso que hemos excluido por ser entonces curvas- D todas las de la superficie.

Sustituyendo en (3.5) el valor (2.9) de h y quitando denominadores se observa que el coeficiente de D contiene potencias de $\cos \varphi$ y $\operatorname{sen} \varphi$ superiores a las de los demás coeficientes; por tanto, para que (3.5) sea una identidad respecto de φ , debe ser $D=0$. Resulta por tanto: *si el lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas- D de una superficie que pasan por un punto es una curva plana, el plano que la contiene pasa por este punto.*

Después de hacer $D=0$, el primer miembro de (3.5) queda un polinomio en $\operatorname{sen}^4 \varphi$, $\operatorname{sen}^3 \varphi \cos \varphi$, $\operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi$, $\operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi$ y $\cos^4 \varphi$, el cual, para que se anule para todo valor de φ debe

tener iguales a cero todos sus coeficientes. Resulta así el sistema

$$\begin{aligned} -Ak_{11} + 3Bk_{12} + 3Ck_1(k_1 - k_2) &= 0 \\ -3Ak_{21} + Bk_{22} + 3Ck_2(k_1 - k_2) &= 0 \\ -Ak_{12} + Bk_{21} &= 0 \\ Ak_{22} &= 0 \\ Bk_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hay que ver en qué casos este sistema puede tener soluciones A, B, C que sean constantes, no todas iguales a cero.

Los casos posibles son los siguientes:

I. k_1 y k_2 son distintos de cero. En este caso caben las posibilidades siguientes:

a) $A=0, B=0$. En este caso resulta $k_1=k_2$ y por tanto la superficie es una esfera o un plano, caso que ya hemos dicho debe excluirse.

b) $A=0, B \neq 0$. Las últimas ecuaciones (3.6) dan en este caso las condiciones

$$k_{11}=0, \quad k_{21}=0. \quad (3.7)$$

Las dos primeras ecuaciones (3.6), si $C=0$, dan $k_{12}=k_{22}=0$, que junto con las (3.7) exigen que k_1 y k_2 sean constantes; resulta de nuevo el caso de la esfera. Si $C \neq 0$, eliminando en las dos primeras ecuaciones (3.6) B y el producto $C(k_1 - k_2)$, resulta la condición

$$k_1 k_{22} - 3k_2 k_{12} = 0. \quad (3.8)$$

La condición (3.8) se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k_2}{k_1^3} \right) = 0 \quad (3.9)$$

y de (3.7) se deduce también

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k_1}{k_2^3} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Estas condiciones (3.9) y (3.10) bastan para asegurar que la superficie es una cuádrica⁽³⁾.

Una demostración directa de este hecho es la siguiente:

Las condiciones (3.7) indican que se trata de una superficie de revolución⁽⁴⁾. Tomemos un sistema de ejes coordenados x, y, z tal que el eje de revolución coincida con el eje x . Vamos a hallar la ecuación $z=z(x)$ de la sección meridiana por el plano x, z . El radio de curvatura de la sección normal tangente a un paralelo, es igual a la longitud de la normal a la curva $z=z(x)$ comprendida entre el punto considerado y el eje x de revolución, o sea,

$$\frac{1}{k_1} = z(1+z'^2)^{1/2}.$$

Además, la curvatura de la sección meridiana vale

$$k_2 = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}.$$

Con estos valores, la condición (3.9), se escribe,

$$z^3 z'' = -a^2$$

siendo a una constante. Esta ecuación se integra inmediatamente escribiéndola en la forma

$$z^3 \frac{dz'}{dz} z' = -a^2 \quad \text{o sea} \quad z' dz' = -\frac{a^2}{z^3} dz$$

de donde

$$z'^2 = \frac{a^2}{z^2} + b \quad \text{o sea} \quad \frac{zz'}{\sqrt{a^2 + bz^2}} = 1$$

⁽³⁾ Ver G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, vol. II, pág. 415 (nº 513).

⁽⁴⁾ Ver. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*, pág. 142 (Berlin, 1930).

y finalmente

$$\sqrt{a^2 + bz^2} = bx + c$$

siendo c otra constante. Esta ecuación, elevando al cuadrado ambos miembros, es la ecuación de una cónica.

c) $A \neq 0$, $B = 0$. Es el caso simétrico del anterior, del cual se deduce permutando los ejes x_1 y x_2 . Se llega, por tanto, a la misma conclusión que en b).

d) $A \neq 0$, $B \neq 0$. Si $C = 0$, se deduce que deben ser constantes k_1 y k_2 , o sea, se cae de nuevo en el caso de la esfera.

Si $C \neq 0$, como suponemos que k_1 , k_2 y $k_1 - k_2$ son distintos de cero, el sistema (3.6) da las condiciones

$$k_{11} = 0, \quad k_{22} = 0, \quad k_2 k_{12}^2 + k_1 k_{21}^2 = 0. \quad (3.11)$$

Las dos primeras condiciones caracterizan a las cíclicas de Dupin ⁽⁵⁾. Como estas cíclicas dependen de un número finito de parámetros, la necesidad de cumplir la tercera relación prueba que las tres condiciones juntas solamente se pueden cumplir en un número finito de puntos o sobre una curva de la superficie, pero no para todos los puntos de la misma.

II. Una de las curvaturas k_1 o k_2 es igual a cero. Si las dos curvaturas son nulas a la vez, estamos en el caso del plano que excluimos. Basta, pues, considerar únicamente el caso en que una sola de las curvaturas es igual a cero. Por simetría bastará considerar el caso $k_2 = 0$. De esta condición se deduce

$$k_{21} = 0, \quad k_{22} = 0 \quad (3.12)$$

y el sistema (3.6) queda

$$\begin{aligned} -Ak_{11} + 3Bk_{12} + 3Ck_1^2 &= 0 \\ Ak_{12} &= 0, \quad Bk_{11} = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por ser $k_2 = 0$, la superficie es un cilindro, cuya sección

⁽⁵⁾ Ver W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* I, pág. 140.

recta es la curva plana definida por la ecuación intrínseca $k_1 = k_1(s)$. Siendo un cilindro, todas las secciones rectas son iguales y por tanto $k_{12} = 0$, con lo cual el sistema (3.6) se reduce a la ecuación

$$\frac{k_{11}}{k_1^2} = \frac{3C}{A} = -a \quad (3.14)$$

siendo a una constante que puede ser nula. k_{11} es la derivada de k_1 respecto de x_1 , pero como la línea de curvatura $x_2 = \text{cte.}$ es tangente al eje x_1 , llamando s a su arco, es $dx_1/ds = 1$. Por tanto, integrando (3.14) resulta

$$\frac{1}{k_1} = as + b$$

que es la ecuación intrínseca de la espiral logarítmica⁽⁶⁾.

Si $a = 0$ resulta un cilindro de revolución, que cae dentro de las cuádricas de revolución.

Reuniendo todos los casos considerados se tiene demostrado el teorema enunciado en la Introducción.

4. *Observación.* E. D. Camier en una nota titulada *A property characteristic of quadrics of revolution and general cylinders* (Mathematical Gazette, vol. XXX, 1946, pág. 141) estudia el problema de hallar las superficies tales que en todos sus puntos el lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas que pasan por ellos es una curva plana.

Tomando los mismos ejes coordenados y con las mismas notaciones del n.º 2 anterior, el lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas de la superficie (2.1) que pasan por el origen, resulta ser la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\xi_1 = \frac{-3h \operatorname{sen} \varphi}{(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}$$

(⁶) Ver, por ejemplo, E. CESARO, *Lezioni di Geometria Intrinseca*, Napoli 1896, pág. 15.

recta es la curva plana definida por la ecuación intrínseca $k_1 = k_1(s)$. Siendo un cilindro, todas las secciones rectas son iguales y por tanto $k_{12} = 0$, con lo cual el sistema (3.6) se reduce a la ecuación

$$\frac{k_{11}}{k_1^2} = \frac{3C}{A} = -a \quad (3.14)$$

siendo a una constante que puede ser nula. k_{11} es la derivada de k_1 respecto de x_1 , pero como la línea de curvatura $x_2 = \text{cte.}$ es tangente al eje x_1 , llamando s a su arco, es $dx_1/ds = 1$. Por tanto, integrando (3.14) resulta

$$\frac{1}{k_1} = as + b$$

que es la ecuación intrínseca de la espiral logarítmica⁽⁶⁾.

Si $a = 0$ resulta un cilindro de revolución, que cae dentro de las cuádricas de revolución.

Reuniendo todos los casos considerados se tiene demostrado el teorema enunciado en la Introducción.

4. *Observación.* E. D. Camier en una nota titulada *A property characteristic of quadrics of revolution and general cylinders* (Mathematical Gazette, vol. XXX, 1946, pág. 141) estudia el problema de hallar las superficies tales que en todos sus puntos el lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas que pasan por ellos es una curva plana.

Tomando los mismos ejes coordenados y con las mismas notaciones del n.º 2 anterior, el lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas de la superficie (2.1) que pasan por el origen, resulta ser la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\xi_1 = \frac{-3h \operatorname{sen} \varphi}{(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}$$

(⁶) Ver, por ejemplo, E. CESARO, *Lezioni di Geometria Intrinseca*, Napoli 1896, pág. 15.

$$\eta_1 = \frac{3h \cos \varphi}{(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi)^2} \quad (4.1)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}$$

Comparando estas ecuaciones con las (3.3) resulta

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}, \quad (4.2)$$

es decir: *la dirección del radio de la esfera oscultriz a una geodésica de una superficie en un punto, coincide con la dirección de la normal principal a la curva-D tangente a la geodésica en dicho punto.*

En consecuencia, cuando la curva lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas-D que pasan por un punto O sea una curva plana, como hemos visto que el plano que la contiene pasa por el punto O , resulta que también será plana la curva lugar de los centros de las esferas oscultrices de las geodésicas que pasan por O .

De aquí que el resultado del problema considerado en esta nota coincida con el de Camier. Sin embargo, Camier afirma que la condición se cumple para cualquier cilindro, mientras que, según hemos visto, es necesario que el cilindro, o bien sea circular, o bien tenga por sección recta una espiral logarítmica.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

ESTUDIO EN GRANDE DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DEL SEGUNDO ORDEN

POR

BEPPPO LEVI y JOSÉ L. MASSERA

El estudio que sigue no tiene otro fin que dar un ejemplo de los fenómenos que pueden presentarse cuando, para entrar en conocimiento de las soluciones de una ecuación diferencial, se quiere salir de los entornos *suficientemente restringidos de puntos suficientemente regulares* para los cuales se verifican las hipótesis de continuidad y de limitación que están a fundamento de los teoremas clásicos de existencia, unicidad, etc., de las soluciones; un problema enunciado por Poincaré desde sus primeros trabajos⁽¹⁾ y que por otra parte ha atraído repetidamente la atención de los autores.

La ecuación elegida no tiene en sí un interés particular, habiéndose formado casi casualmente en una conversación de clase, con el propósito de introducir determinada singularidad; pero la discusión detallada nos ha parecido de algún interés por los distintos arreglos mediante los cuales se pudieron superar las dificultades⁽²⁾.

(¹) Así en el *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (Journal de Liouville, 1881) que tendremos que citar más adelante con las palabras siguientes, que reproduce mucho más tarde en 1921, presentando en *Acta mathematica* (t. 38) la exposición resumida de su obra científica: "Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples..."

(²) La colaboración de los autores tiene igual explicación, habiéndose la conversación de clase desarrollado primeramente en Rosario y transportado luego verbalmente por las amistosas relaciones personales del director del Instituto y de su primer colaborador, el Dr. Luis A. Santaló con los colegas del Instituto de matemática y estadística de Montevideo.

I - Estudio analítico elemental de la ecuación

1. — Consideremos la ecuación del 2º. orden

$$y y'' = x. \quad (1)$$

Poniéndola en la forma

$$y'' = \frac{x}{y}$$

se ve en seguida que en torno de cualquier punto (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ se verifican las condiciones por las cuales el teorema fundamental de Cauchy y Lipschitz ⁽³⁾ asegura la existencia y unicidad de la solución por la cual

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p \quad (2)$$

donde p es un número finito asignado arbitrariamente.

El cálculo efectivo de esta solución y la determinación de los límites dentro de los cuales este cálculo tiene validez se enfrenta prontamente con dificultades materiales de cálculo. De cualquier manera la teoría nos dice todavía que la solución se prolonga unívoca, continua y con derivada continua hasta tanto que el punto (x, y) no alcance — si esto es posible — el valor 0 para y .

Observando que la ecuación es analítica, se puede añadir que lo será también la solución así determinada y que por lo tanto en un entorno conveniente del punto (x_0, y_0) puede representarse por un desarrollo de Taylor que se puede calcular por el método de los coeficientes indeterminados, poniendo

$$x = x_0 + h$$

$$y = y_0 + p h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots$$

e igualando luego los coeficientes homólogos de la ecuación que se obtiene sustituyendo en (1) estas expresiones, es decir

⁽³⁾ El aludido teorema general de existencia puede verse en cantidad de tratados. Para servir de referencia citamos el *Traité d'Analyse*, de E. PICARD.

$$x_0 + h = y y'' = 2a_2 y_0 + (3.2a_3 y_0 + 2a_2 p) h + \dots$$

$$\dots + [n(n-1) a_n y_0 + (n-1)(n-2) a_{n-1} p + (n-2)(n-3) a_{n-2} a_2 + \dots] h^{n-2} + \dots$$

Resultan las ecuaciones

$$2a_2 y_0 = x_0$$

$$3.2a_3 y_0 + 2a_2 p = 1$$

$$\dots + n(n-1) a_n y_0 + (n-1)(n-2) a_{n-1} p + (n-2)(n-3) a_{n-2} a_2 + \dots = 0$$

que permiten calcular los a_n en modo recurrente.

No vamos a detenernos sobre este cálculo porque otro análogo sigue a continuación. Notamos todavía que, para que el cálculo teóricamente proyectado pueda considerarse completo, sería necesario — como en efecto haremos en el otro caso, más interesante para nosotros — determinar un dominio de convergencia de esta serie. Se podrá entonces, al menos teóricamente, seguir calculando la prolongación analítica, para alcanzar todos los valores de la solución.

Sin embargo este procedimiento, además que trabajoso, no da ninguna información acerca de las propiedades de la función y definida por la ecuación (1) y las condiciones (2), ni sobre el modo como ella depende de estas condiciones iniciales. Debe notarse también que, aparte un caso que veremos en el n. 4, ninguna función elemental o combinación simple de ellas cumple con la ecuación (1).

Para dirigir diversamente nuestro estudio — como es nuestro propósito actual — añadimos todavía, como observación preliminar, que, si en la ecuación (1) se reemplaza y por $-y$, ella se reproduce invariada; podemos luego afirmar que la familia de las curvas integrales corre simétricamente en los dos semiplanos separados por el eje x . Podemos por lo tanto limitarnos, en general, a considerar uno solo de estos semiplanos. Supondremos entonces ordinariamente sea el semiplano $y \geq 0$.

2. — Las condiciones de regularidad por las cuales pueden aplicarse los teoremas generales dejan de realizarse si se supone $y_0=0$.

Pero, si también $x_0=0$, pero $p \neq 0$, el mismo cálculo de coeficientes indeterminados permite todavía calcular un desarrollo de Taylor el cual representará una solución si podremos verificar que ese desarrollo tenga radio de convergencia finito; en seguida debe notarse que la solución que, para x bastante próximo a 0 será representada por ese desarrollo, se prolongará luego según se dijo en el n.º. anterior, por cuanto se habrá alcanzado valores de x e y distintos de 0 que podrán, conjuntamente con el valor correspondiente de $y'(x)$, considerarse como nuevos valores iniciales. Prácticamente será equivalente y más cómodo efectuar la prolongación analítica de la serie que vamos a calcular.

Pongamos, para este fin, indicando con $a_2, a_3, \dots$ coeficientes indeterminados, análogamente a lo dicho en el n. anterior,

$$y = px + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (4)$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \dots ;$$

sustituyendo en (1) se tendrá la ecuación

$$x = 2a_2 p x + \sum_{n \geq 2} [n(n+1) a_{n+1} p + \sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) a_{n-k} a_{k+2}] x^n, \quad (5)$$

para cuya realización deberá ponerse

$$2a_2 p - 1 = 0, \dots a_2 = \frac{1}{2p}$$

y seguir igualando a 0 cada uno de los coeficientes de x^n , para $n=2, 3, \dots$, de donde se obtendrán en modo recurrente los coeficientes $a_3, a_4, \dots$.

Para simplificar este cálculo, y también para conclusiones sucesivas, conviene aplicar la sustitución

$$a_n = b_n p^{-2n+3} \quad (6)$$

a consecuencia de la cual resulta

$$b_2 = \frac{1}{2} \quad (7)$$

y en cada uno de los corchetes del segundo miembro de (5) sale en factor $p^{-2(n-2)}$, resultando las condiciones

$$n(n+1) b_{n+1} = - \sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) b_{n-k} b_{k+2}. \quad (8)$$

Dando a n los valores sucesivos 2, 3, 4, ... se obtiene

$$b_3 = -\frac{1}{3.4}, \quad b_4 = \frac{1}{3^2.4}, \quad b_5 = -\frac{17}{5.288}, \dots \quad (9)$$

En seguida se nota que estos coeficientes tienen signo alternado y precisamente b_n tiene el signo de $(-1)^n$; la ley reconocida para los primeros valores de n , se confirma por inducción para n cualquiera. Si en efecto suponemos que ella sea verificada por todos los b_{n-k} ($k=0, 1, \dots, n-2$), resulta que en el segundo miembro de (8) cada uno de los productos $b_{n-k} b_{k+2}$ tiene el mismo signo $(-1)^n$ de b_n ; por lo tanto todos los términos de la suma en el segundo miembro de (8) tienen el mismo signo, y la (8) misma puede escribirse en forma más explícita

$$n(n+1) b_{n+1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) |b_{n-k}| |b_{k+2}|. \quad (8')$$

Comparando (7) y (9) se observa también que para los primeros valores de n se verifica

$$|b_n| \leq \frac{1}{n(n-1)}; \quad (10)$$

todavía por inducción la relación (8') permite afirmar que esta relación se verifica para todos los n . Si en efecto suponemos nuevamente que ella sea realizada por todos los b_{n-k} ($k=0, 1, \dots, n-2$) (8') nos da

$$n(n+1) |b_{n+1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |b_{k+2}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(k+2)(k+1)};$$

siendo

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n},$$

resulta

$$|b_{n+1}| < \frac{n-1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{(n+1)n}.$$

Si, conjuntamente con (6), hacemos todavía la posición

$$x = p^2 \xi, \quad (11)$$

la (4) se escribe

$$y = p^3 (\xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + \dots) \quad (12)$$

y la acotación (10) demuestra que la serie en paréntesis tiene radio de convergencia ≥ 1 ; luego, por (11) el radio de convergencia de (4) será $\geq p^2$.

3. — Una más precisa determinación de este radio de convergencia tiene poco interés con respecto a nuestro estudio. La (8') permite sin embargo algunas reflexiones sobre una acotación por exceso; esa (8') puede en efecto escribirse

$$b_{n+1} = (-1)^{n+1} \left[\frac{n-1}{n+1} |b_n| b_2 + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-2} (n-k)(n-k-1) |b_{n-k}| |b_{k+2}| \right]; \quad (13)$$

por lo tanto

$$|b_{n+1}| \geq \frac{n-1}{n+1} |b_n| b_2 = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n+1} |b_n|;$$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \geq \frac{1}{2} \frac{n-1}{n+1}. \quad (14)$$

Observando que por $n \rightarrow \infty$ el segundo miembro tiende a $1/2$, resulta que el radio de convergencia de la serie en el segundo miembro de (12) será ciertamente ≤ 2 .

Refiriéndonos a los valores (9), se tiene en efecto

$$\left| \frac{b_3}{b_2} \right| = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{b_4}{b_3} \right| = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\left| \frac{b_5}{b_4} \right| = \frac{17}{40} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{20} > \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}.$$

La acotación (14) puede todavía ser mejorada teniendo en cuenta el término anteriormente despreciado en (13); por medio de la misma (14), se deduce en efecto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-2} (n-k)(n-k-1) |b_{n-k}| |b_{k+2}| &= \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} (n-k)(n-k-1) |b_{n-k}| |b_{k+1}| \left| \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{k+2} (n-k)(n-k-1) |b_{n-k}| |b_{k+1}| \\ &\geq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-2} (n-k)(n-k-1) |b_{n-k}| |b_{k+1}| = \frac{n(n-1)}{6} |b_n|. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (13), para $n \geq 3$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \geq \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3} \frac{n-1}{n+1}. \quad (15)$$

El radio de convergencia de la serie (12) está luego comprendido entre los valores 1 y 1,5. El extremo superior es ciertamente excesivo y podría mejorarse todavía con razonamiento análogo al anterior.

Resulta de todos modos para el radio de convergencia de la serie (4) la limitación $\rho < 1,5 p^2$; luego $\rho \rightarrow 0$ con $p \rightarrow 0$. Esto demuestra que la hipótesis $p \neq 0$ puesta al principio del n. 2. es verdaderamente esencial; *si existe una solución de la ecuación (1) para las condiciones iniciales*

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

ella tiene que ser irregular y no admitir desarrollo de Taylor en el origen.

4. — Tal solución irregular existe en efecto como se obtiene con el razonamiento siguiente:

Poniendo en (1)

$$y = x^\alpha z$$

resulta

$$\alpha(\alpha-1)x^{2(\alpha-1)}z^2 + 2\alpha x^{2\alpha-1}z' + x^{2\alpha}z'' = x$$

y esta ecuación se realiza por $z = \text{constante}$ si

$$2(\alpha-1)=1, \quad \alpha(\alpha-1)z^2=1$$

es decir

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Se obtiene así la solución

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2} \quad (16)$$

que se comprueba por cálculo directo que verifica las condiciones iniciales

$$y(0)=0, \quad y'(0) = (\pm \sqrt{3} x^{1/2})_{x=0} = 0.$$

La ecuación (16) se escribe, en forma racional,

$$3y^2 - 4x^3 = 0,$$

donde se ve que se trata de una parábola cúbica con punto de retroceso en el origen.

Para $x > 0$ ella tiene dos ramas reales tangentes al eje x y simétricas respecto de él. No tiene por opuesto puntos reales (que son los que interesan en nuestro problema) para $x < 0$.

5. — *La solución encontrada en el n. 3 es la única que satisface a la ecuación (1) con las condiciones iniciales*

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = p \neq 0.$$

Para demostrarlo razonaremos por absurdo. Notamos primero que, a raíz de la simetría de la ecuación respecto del eje x , se puede suponer $p > 0$. Supongamos que hubieran dos soluciones $f(x)$, $g(x)$ tales que

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f'(0) = g'(0) = p > 0;$$

elegido arbitrariamente un q , tal que

$$0 < q < p,$$

existe un intervalo $-a^+ + a$ dentro el cual

$$|f(x)| > q \cdot |x|, \quad |g(x)| > q \cdot |x|.$$

Podemos suponer $a < 1$. Por cuanto las funciones $f'(x)$, $g'(x)$ son continuas y $f'(0) - g'(0) = 0$, existe dentro del intervalo $-a^+ + a$ un intervalo de la forma $-b^+ + b$ en el cual $|f'(x) - g'(x)| < 1$; luego

$$|f(x) - g(x)| < |x|.$$

Por fin de

$$f'' = \frac{x}{f}, \quad g'' = \frac{x}{g}$$

sigue

$$f'' - g'' = x \frac{g-f}{fg}, \quad |f'' - g''| = |x| \frac{|f-g|}{|f||g|} \quad (17)$$

A consecuencia de las desigualdades precedentes, será luego, en el intervalo $-b-b$

$$|f'' - g''| < \frac{1}{q^2}$$

y por tanto, integrando dos veces,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{1}{2q^2} |x|^2.$$

Sustituyendo esta nueva limitación en (17) se obtiene

$$|f'' - g''| < \frac{1}{2q^4} |x|$$

y, por una nueva integración,

$$|f - g| < \frac{1}{12q^4} |x|^3;$$

sustituyendo nuevamente en (17) resulta todavía

$$|f'' - g''| < \frac{1}{12q^6} |x|^2, \quad |f - g| < \frac{1}{144q^6} |x|^4.$$

Repitiendo ν veces el procedimiento resulta así

$$|f - g| < \frac{|x|^{\nu+1}}{\nu!^2(\nu+1)q^{2\nu}}. \quad (18)$$

Supongamos ahora que no fuera idénticamente $f(x) = g(x)$ y que por lo tanto, para algún $\bar{x}$ realizando las dos condiciones $|\bar{x}| < b$, $|\bar{x}| < q^2$ sea $|f(\bar{x}) - g(\bar{x})| = A > 0$; al crecer ν , los dos números

$$\left(\frac{|\bar{x}|}{q^2}\right)^\nu, \quad \frac{1}{\nu!^2(\nu+1)}$$

decrecen tendiendo a 0; por lo tanto, para $x = \bar{x}$ y ν bastante

grande el segundo miembro de (18) resulta $< A$, en contradicción con la hipótesis. Queda así establecido el absurdo.

La demostración pierde validez para $p=0$, de conformidad con el hecho que la solución encontrada en el n. 4 es irregular. Un examen mucho más delicado, que saldrá únicamente del conjunto de la discusión siguiente, nos mostrará que efectivamente tampoco en el caso $p=0$ no existe otra solución que la (16).

6. — La observación siguiente encontrará varias aplicaciones en lo sucesivo.

Si indicamos con λ un parámetro y hacemos el cambio de variables

$$x = \lambda^2 X, \quad y = \lambda^3 Y \quad (19)$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \frac{dY}{dX}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^{-1} \frac{d^2Y}{dX^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene pues

$$y'' y = \lambda^2 \frac{d^2Y}{dX^2} Y = x = \lambda^2 X,$$

es decir

$$Y \frac{d^2Y}{dX^2} = X;$$

con otras palabras vemos que si, después de efectuar la sustitución (19), consideramos la Y como función de X , esta función verifica todavía la ecuación propuesta; o también, si

$$y = f(x)$$

es solución de la ecuación (1), será todavía solución de (1)

$$y = \lambda^{-3} f(\lambda^2 x) \quad (20)$$

para cualquier valor fijo del parámetro λ .

Al variar λ la sustitución (19) define un *grupo continuo de transformaciones*; se dice que la ecuación (1) *admite ese grupo o es invariante por él*.

Nótese todavía que las relaciones (11), (12) entran como caso particular en la actual observación; ellas dicen en efecto que, conociendo la solución por el origen, correspondiente a la pendiente $p=1$, se deduce de ella la que corresponde a otra pendiente p , cualquiera $\neq 0$, aplicando la transformación (19) con $\lambda=p$.

Si al contrario se aplica la transformación (19) a una solución para la cual sea

$$y(0)=y'(0)=0,$$

se obtendrá una transformada que verifica las mismas condiciones iniciales; en particular se ve en seguida que la parábola cúbica (16) se transforma en si misma. Ella es también la única solución de (1) que la transformación (19) deja inalterada: propongámonos en efecto determinar todas las funciones $f(x)$ tales que sean equivalentes entre si las ecuaciones

$$y-f(x)=0, \quad \lambda^3 y-f(\lambda^2 x)=0; \quad (21)$$

para simplificar un poco el problema, introduzcamos dos nuevas variables ξ, η poniendo

$$y=\eta^3, \quad x=\xi^2;$$

la condición (21) se expresa entonces diciendo que si en la función

$$F(\xi, \eta)=\eta^3-f(\xi^2)$$

se multiplican las dos variables por un mismo factor λ , la función se reproduce salvo un factor independiente de las variables. $F(\xi, \eta)$ es por lo tanto función homogénea; aplicando el teorema de Euler se obtiene luego:

$$3(\eta^3-f(\xi^2))=\eta \cdot 3\eta^2-\xi \cdot 2\xi f'(\xi^2)$$

$$\frac{f'(\xi^2)}{f(\xi^2)}=\frac{3}{2}\xi^{-2}$$

o, volviendo a la variable x ,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{x}, \quad \log f(x) = \frac{3}{2} (\log x + c)$$

$$f(x) = C x^{3/2}. \quad (22)$$

Todas las funciones que la transformación (19), (20) transforma en sí están expresadas por la fórmula (22) donde C es constante arbitraria; como se vió en el n. 4, para que esta función satisfaga a (1) debe ser $C = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$; sin embargo la consideración del haz de parábolas cúbicas

$$y = c x^{3/2} \quad (23)$$

o, en forma racional

$$y^2 - c x^3 = 0,$$

tendrá todavía en lo sucesivo importancia fundamental.

7. — De la última deducción resulta que, si la transformación (19) se aplica a una solución de (1) que no sea la (15), se obtiene otra solución de (1) y, variando λ , se obtiene así una familia de soluciones de (1) dependiente de un parámetro.

Incidentalmente resulta que, si a la pregunta acerca de la unicidad de la solución que sea cero conjuntamente con su derivada en el origen tuviera que contestarse negativamente, deberían estas soluciones ser infinitas.

En el orden general, teniendo en cuenta que la solución general de una ecuación diferencial del segundo orden depende de dos parámetros arbitrarios, es lógico pensar que, por el conocimiento de la transformación (19), la determinación de todas las soluciones de (1) deba poderse reducir a la determinación de una familia de funciones dependiente de un solo parámetro, independiente de λ , y por lo tanto soluciones de una ecuación diferencial de primer orden. Una teoría general para realizar esta reducción es debida a S. Lie⁽⁴⁾. En nuestro caso especial

(4) SOPHUS LIE, *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x y y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten*. Math. Ann. 32 (1888), pág. 213.

observemos que si, en cambio de la ecuación de segundo orden (1) que tiene por soluciones las funciones $f(x)$, consideramos otra cuyas soluciones sean las funciones

$$\varphi(x) = x^{-3/2} f(x),$$

la simple sustitución de $\lambda^2 x$ a x debe cambiar cada solución en otra. Más simplemente, por cuanto λ es arbitrario, podemos cambiar x en μx ; y si a la variable x sustituimos otra v poniendo $x = e^v$, la transformación de las soluciones una en otras se realizará por alterar simplemente esta v por una constante aditiva. Pongamos, para más claridad, $u = \varphi(x)$. La ecuación diferencial transformada define entre las variables u y v una correspondencia que, con respecto a v es indeterminada por una constante aditiva arbitraria. Esto es lo mismo como decir que $\frac{dv}{du}$ (o igualmente $1: \frac{dv}{du} = \frac{du}{dv}$) es una misma función determinada de v , correspondientemente a cada familia de soluciones de (1) dependientes del parámetro λ .

Se infiere de este análisis que, efectuando en la ecuación propuesta la sustitución

$$y = x^{3/2} u, \quad x = e^v \quad (24)$$

deberá ella transformarse en otra que, respecto de la función $\frac{du}{dv}$ tomada como nueva incógnita, se reduzca al primer orden.

De (24) se obtiene en efecto

$$dx = e^v dv, \quad dy = \frac{3}{2} x^{1/2} u dx + x^{3/2} du;$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\frac{1}{2}v} \left(\frac{3}{2} u + \frac{du}{dv} \right) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{-\frac{1}{2}v} \left(\frac{3}{4} u + 2 \frac{du}{dv} + \frac{d^2u}{dv^2} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

y, después de sustituir en (1) y dividir ambos miembros por e^v ,

$$1 = u \left(\frac{3}{4} u + 2u' + u'' \right), \quad (26)$$

En esta ecuación ha desaparecido la variable v ; conviene entonces considerar u' como función de u , con tal que esta u sea variable. La reserva es necesaria porque si la sustitución (24) se efectúa sobre la solución (16) (la parábola cúbica), resulta simplemente

$$u = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \text{luego} \quad u' = u'' = 0;$$

con esta posición, (26) resulta efectivamente realizada; recíprocamente es esta la única solución de (26) que corresponde a $u = \text{constante}$.

Excluyendo este caso, pondremos pues

$$u' = w(u) \quad u'' = \frac{dw}{du} u' = w \frac{dw}{du};$$

la (26) se transforma en

$$w \frac{dw}{du} + 2w + \frac{3}{4} u - \frac{1}{u} = 0 \quad (27)$$

que es la ecuación de primer orden que se quería hallar.

A cada familia de soluciones de (1) dependiente del parámetro λ corresponde una solución de esta ecuación, salvo la excepción encontrada respecto de la parábola (16) que no pertenece a ninguna familia.

Recíprocamente a cada solución de (27) corresponde una familia de soluciones de (1) que se obtiene eliminando las variables u, v entre las ecuaciones (24) y la

$$v + c = \int \frac{du}{w(u)}.$$

Por cuanto en nuestro estudio presente queremos mantenernos en el dominio de las funciones reales de variable real, es necesario tener presente que, para que la transformación (24) sea real (lo que además es necesario para que ella tenga significado unívocamente determinado) debe suponerse $x > 0$. Las deducciones que en lo sucesivo se fundaran en la consideración de la ecuación (27) se referirán luego esencialmente al semiplano $x > 0$, y en particular, por la convención hecha en el n. 1, en general al cuadrante $x > 0, y > 0$.

Se podrá sin embargo ocurriendo aplicar el mismo orden de consideraciones al semiplano $x < 0$ efectuando previamente una sustitución de la forma

$$x = -\bar{x};$$

la ecuación (1) se transforma entonces en

$$\bar{y}'' y = -\bar{x},$$

siendo

$$\bar{y}'' = \frac{d^2 y}{d\bar{x}^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'';$$

efectuando luego la sustitución análoga a (24)

$$y = \bar{x}^{3/2} u, \quad \bar{x} = e^v, \quad (24')$$

se obtendrá, en cambio de (27), la

$$w \frac{dw}{du} + 2w + \frac{3}{4} + u \frac{1}{u} = 0. \quad (27')$$

Se notará que, a raíz de que en la ecuación análoga a (26) el primer miembro será ahora -1 , no existe más, en el dominio real, una solución constante, lo que corresponde al hecho observado en el n. 4 de que la solución (16) no tiene prolongación del lado de las x negativas.

II. - Primer examen gráfico de la familia de las soluciones de la ecuación (1).

8. — Remitiendo a más adelante una mayor utilización de las generalidades de los párrafos anteriores, vamos ahora a examinar la forma general de las curvas que representan en el plano xy las soluciones de la ecuación (1). De este examen resultaran algunas primeras conclusiones respecto de la determinación efectiva de dichas soluciones.

Inmediatamente notamos que, suponiendo, como se ha convenido, de fijar únicamente la atención sobre el semiplano $y > 0$, resulta de (2) que será siempre $y'' > 0$ para $x > 0$, $y'' < 0$ para $x < 0$; para $x = 0$ es evidentemente $y'' = 0$, salvo en el origen donde y'' resulta indeterminado; por lo tanto *para cualquier curva integral la pendiente es función creciente de x en el primer cuadrante, decreciente en el segundo; si una curva integral corta el eje y en un punto distinto del origen, este punto es punto de inflexión.*

Con respecto a las curvas integrales que pasan por el origen con pendiente $\neq 0$, el desarrollo (12) nos dice que las del primer cuadrante pasan al tercero, las del segundo pasan al cuarto, siendo en todos los casos también la derivada segunda, expresada por p , positiva al pasar del primero al tercer cuadrante, negativa del segundo al cuarto y por tanto siguiendo monótona la variación de la pendiente.

No existen otros puntos de inflexión de las curvas integrales además de los $x = 0$, $y \neq 0$.

9. — Sigue de estas observaciones que si en un punto (x_0, y_0) de una curva integral en el primer cuadrante la pendiente es $y'_0 \geq 0$, a la derecha de este punto la ordenada y la pendiente irán creciendo ambas indefinidamente. Pero, si $y'_0 < 0$, en el entorno a derecha de ese punto la ordenada y decrece, mientras la pendiente, por valores negativos, decrece en valor absoluto, y si la curva no encuentra antes el eje x , abandonando luego en este punto el primer cuadrante, por un valor finito de x dicha pendiente se cambia en positiva. En efecto hasta que y sigue decreciendo será

$$y'' = \frac{x}{y} > \frac{x}{y_0}$$

$$y'(x) = y'_0 + \int_{x_0}^x y'' dx > y'_0 + \frac{1}{y_0} \int_{x_0}^x x dx = y'_0 + \frac{x^2 - x_0^2}{2y_0};$$

no podrá luego ser $y'(x) < 0$ para

$$x^2 > x_0^2 - 2y_0 y'_0.$$

Por lo tanto, antes de alcanzar la abscisa $\sqrt{x_0^2 + 2y_0 |y'_0|}$ debe presentarse uno de estos casos: 1º. con un valor positivo de y , la derivada y' toma el valor 0; 2º. la curva corta el eje x . Vamos a mostrar que este segundo caso es imposible; sea en efecto, por absurdo, en el punto $x_1 > x_0$

$$y(x_1) = 0, \quad y'(x_1) \leq 0;$$

consideremos la función

$$z(x) = \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = \frac{y(x)}{x - x_1}$$

Por el teorema del valor medio, a cada valor de x en el intervalo $x_0 - x_1$ corresponde algún valor de ξ , interior al intervalo $x - x_1$ tal que

$$z(x) = y'(\xi) < 0, \quad |y'(\xi)| < |y'_0|;$$

por otra parte, de $y(x) = z(x)(x - x_1)$ sigue

$$y''(x) = \frac{x}{z(x)(x - x_1)} > \frac{x_0}{|y'_0|(x_1 - x)}$$

$$y'(x) = y'_0 + \int_{x_0}^x y''(x) dx$$

$$> y'_0 + \frac{x_0}{|y'_0|} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x_1 - x} = y'_0 + \frac{x_0}{|y'_0|} \log \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x}.$$

Esta relación contradice a la hipótesis $y'(x) < 0$ para todos los valores de x tales que

$$x_1 > x > x_1 - (x_1 - x_0) e^{-\frac{y_0^2}{x_0}} = x_0 + (x_1 - x_0) (1 - e^{-\frac{y_0^2}{x_0}})$$

Queda así demostrado que solo la primera eventualidad es posible es decir que *cualquiera curva integral que en un punto (x_0, y_0) del primer cuadrante tenga derivada negativa, se aproxima, para x creciente, al eje x hasta alcanzar la y un mínimo positivo en el cual la tangente es paralela al eje x . Después de este punto, por lo dicho anteriormente, la curva se aleja monotonamente del eje x , creciendo ilimitadamente la ordenada y la pendiente.*

Los mismos razonamientos pueden repetirse por x decreciente (positivo) con solo cambiar entre sí las hipótesis de y'_0 positivo e y'_0 negativo. Concluimos pues que *ninguna curva integral en el primer cuadrante puede alcanzar el eje x . Si una curva integral entra en el primer cuadrante por un punto $(0, y_0)$ con pendiente positiva o cero, esta pendiente sigue positiva, creciendo con x y la ordenada y crece indefinidamente. Si una curva integral entra en el primer cuadrante con pendiente negativa, su ordenada decrece monotonamente hasta alcanzar, por un valor finito de x , un mínimo positivo (> 0) después del cual cae en el caso anterior subiendo monotonamente.*

Las conclusiones se aplican al cuadrante $x \geq 0, y < 0$ con solo cambiar el signo de la y ; se sigue que *ninguna curva integral puede tener puntos comunes con el eje x , salvo que por $x=0$.*

El semieje de las $x > 0$ resulta por tanto efectivamente singular para nuestra ecuación, en el sentido que no existen soluciones correspondientes a valores iniciales $x_0 > 0, y_0 = 0$.

10. — De lo que antecede se infiere que a lo largo de una curva integral, a partir de un cierto valor de x , la y crece monotonamente; se sigue que o bien la y tiende a ∞ mientras x se acerca a un valor finito l , o bien la x crece ilimitadamente.

La primera eventualidad es imposible; en efecto, indicando con (x_0, y_0) un punto cualquiera al finito de la curva, se tiene, para $x_0 < x \leq l$

$$y'(x) = y'_0 + \int_{x_0}^x \frac{x}{y} dx < y'_0 + \int_{x_0}^x \frac{l}{y_0} dx = y'_0 + \frac{l}{y_0} (x - x_0)$$

$$y(x) < y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{l}{y_0} (x - x_0)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow l} y(x) < +\infty.$$

Haciendo ahora crecer ilimitadamente la x , vemos también que debe ser

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \infty;$$

si en efecto, para todos los valores de x fuere $y : x < c < \infty$, resultaría

$$y''(x) = \frac{x}{y} > \frac{1}{c}$$

$$y'(x) > y'_0 + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x dx = y'_0 + \frac{x - x_0}{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = \infty.$$

Por cuanto, para x_0 bastante grandes $y'_0 > 0$, y para $x > x_0$ $y' > y'_0$ se tiene también

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y'_0 + \int_{x_0}^x y' dx \right) \\ &\geq \lim_{x \rightarrow \infty} (y'_0 + y'_0(x - x_0)) = \infty. \end{aligned}$$

Por la regla de l'Hospital se sigue ahora que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = \infty$$

resultando absurda la hipótesis que fuera siempre $y : x < c$.

Resumiendo, a lo largo de una curva integral en el primer cuadrante crecen ilimitadamente la x , y la y y la pendiente. La curva no puede tener asíntota rectilínea.

11. — El mismo punto de partida constituido por la observación inicial del n. 7 va a llevarnos a conclusiones muy diferentes con respecto al segundo cuadrante. En efecto el hecho de que la derivada primera es decreciente equivale a decir que una rama de curva integral en el segundo cuadrante queda siempre por debajo de todas sus tangentes; luego si una tangente a la curva en un punto del segundo cuadrante corta al eje x , dicha rama queda contenida dentro del ángulo agudo formado por la tangente y el eje.

Por consecuencia, si la rama es definida por condiciones iniciales de la forma

$$x_0 = -\bar{x}_0 < 0, \quad y_0 > 0, \quad y'_0 = p > 0, \quad (28)$$

termina necesariamente, de la parte de las x decrecientes en un punto del eje x , cuya abscisa $x_1 = -\bar{x}_1$ verifica

$$\bar{x}_0 + \frac{y_0}{p} > \bar{x}_1 > \bar{x}_0. \quad (29)$$

Análogamente una rama definida por condiciones iniciales de la forma

$$x_0 = -\bar{x}_0 < 0, \quad y_0 > 0, \quad y'_0 = -\bar{p}, \quad \bar{p} > \frac{y_0}{\bar{x}_0},$$

termina sobre el eje x , en la dirección de las x crecientes en un punto $x_2 = -\bar{x}_2$ tal que

$$\bar{x}_0 > \bar{x}_2 > \bar{x}_0 - \frac{y_0}{\bar{p}}. \quad (30)$$

Vamos a mostrar que la primera conclusión, esto es terminación de la rama, en la dirección de las x decrecientes, en un punto del eje x se verifica en cada caso. Supongamos en efecto que la rama sea definida por las condiciones

$$x_0 = -\bar{x}_0 < 0, \quad y_0 > 0, \quad y'_0 = -\bar{p}, \quad \bar{p} \geq 0;$$

si fuera precisamente $\bar{p} = 0$, para cualquier $\bar{x} > \bar{x}_0$ sería $y'(-\bar{x}) > 0$ y el punto $(-\bar{x}, y(-\bar{x}))$ se encontraría en las condiciones (28).

Supongamos $\bar{p} > 0$; para cualquier $x = -\bar{x}$ a la izquierda de x_0 tendremos

$$-y'(x) = \bar{p} - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{x} d\bar{x}}{y};$$

en el entorno izquierdo de x_0 , $-y'(x)$ sigue positivo y luego y crece, siendo

$$y_0 < y < y_0 + \bar{p}(\bar{x} - \bar{x}_0); \quad (31)$$

hasta tanto que estas condiciones se mantienen se tendrá luego

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{x} d\bar{x}}{y_0} > \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{x} d\bar{x}}{y} > \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{x} d\bar{x}}{y_0 + \bar{p}(\bar{x} - \bar{x}_0)}$$

es decir

$$\begin{aligned} \bar{p} - \frac{\bar{x}^2 - \bar{x}_0^2}{2y_0} &< \bar{p} - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{x} d\bar{x}}{y} = -y'(x) \\ &< \bar{p} - \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\bar{p}} - \frac{\bar{p}\bar{x}_0 - y_0}{\bar{p}^2} \log \left(1 + \frac{\bar{p}(\bar{x} - \bar{x}_0)}{y_0} \right). \end{aligned}$$

Si $\bar{p}\bar{x}_0 - y_0 \geq 0$ el último miembro es

$$\leq \bar{p} - \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\bar{p}}$$

y es negativo si $\bar{x} - \bar{x}_0 \geq \bar{p}^2$; si $\bar{p}\bar{x}_0 - y_0 < 0$ el mismo último miembro es

$$< \bar{p} - \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\bar{p}} \left(1 - \frac{y_0 - \bar{p}\bar{x}_0}{y_0} \right) = \bar{p} - \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)\bar{x}_0}{y_0}$$

y es negativo si $\bar{x} - \bar{x}_0 > \bar{p} y_0 : \bar{x}_0$. En todos los casos resulta que la desigualdad (31) no puede mantenerse para valores de $\bar{x}$ realizando una u otra de las condiciones

$$\bar{x} \geq \bar{x}_0 + \bar{p}^2, \quad \bar{x} \geq \bar{x}_0 \left(1 + \frac{\bar{p} y_0}{\bar{x}_0^2}\right)$$

por cuanto antes de llegar a tales valores $y'(x)$ cambia necesariamente de signo.

Con más precisión, existe un número $m(x_0 y_0 y'_0) > \bar{x}_0$ en el intervalo

$$\bar{x}_0 \sqrt{1 + \frac{2p y_0}{x_0^2}} < m < \begin{cases} \bar{x}_0 + \bar{p}^2 & \text{si } \bar{p} \geq y_0 : \bar{x}_0 \\ \bar{x}_0 \left(1 + \frac{\bar{p} y_0}{x_0^2}\right) & \text{si } \bar{p} < y_0 : \bar{x}_0 \end{cases} \quad (32)$$

en el cual $y'(-m) = 0$ e $y(-m)$ es máximo. Para valores de $-x > m$, y disminuye hasta reducirse a 0 en un punto x_1 correspondiente a las condiciones (29) donde para $x_0 y_0 p$ se pongan valores relativos a uno cualquiera de esos x .

Supongamos además $\bar{p} \geq \frac{y_0}{\bar{x}_0}$ de manera de poder asegurar la existencia de otro punto x_2 con $y(x_2) = 0$, en conformidad con la (30); el punto $-m$ está en el intervalo $x_2 - x_1$, más próximo al segundo punto que al primero, porque en el intervalo $-m - x_1$ la y toma sucesivamente, en sentido inverso, los mismos valores que en el intervalo $x_2 - m$, pero con mayores valores absolutos de x y luego de y'' .

De (30), (32) se obtiene, en la hipótesis actual,

$$m - \bar{x}_2 < \bar{p}^2 + \frac{y_0}{\bar{p}};$$

el segundo miembro alcanza un valor mínimo para $\bar{p} = (y_0 : 2)^{1/3}$; deducimos así que, *fijado el valor de y_0 siempre puede elegirse la pendiente $\bar{p}$ de manera que la distancia entre los dos puntos sobre el eje x , x_1 y x_2 sea $< 3 \cdot 2^{-2/3} y_0^{2/3}$, con la sola condición que sea $\bar{x}_0 > 2^{1/3} y_0^{2/3}$. Por otra parte es evidente que la efectiva mínima distancia entre los puntos $x_1 x_2$ disminuye al crecer x_0 . Del resultado obtenido se infiere que, al tender $y_0 \rightarrow 0$,*

tienden a 0 también esta mínima distancia y el límite inferior encontrado para los valores útiles de $\bar{x}_0$.

12. — Dos curvas integrales por el mismo punto del segundo cuadrante no se cortan ulteriormente dentro de este cuadrante. Consideremos en efecto dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, definidas por las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0, \quad y'_1(x_0) = p_1, \quad y'_2(x_0) = p_2$$

$$x_0 = -\bar{x}_0 < 0, \quad p_1 > p_2;$$

poniendo

$$h(x) = y_1(x) - y_2(x),$$

será

$$h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = p_1 - p_2 = q > 0. \quad (33)$$

Por razón de comodidad pondremos, como anteriormente

$$x = -\bar{x}, \quad \bar{x} > 0;$$

será

$$h''(x) = \frac{x(y_2 - y_1)}{y_1 y_2} = -\frac{xh(x)}{y_1 y_2} = \frac{\bar{x}h(x)}{y_1 y_2}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{x_0}^x (x-t) h''(t) dt + q(x-x_0) \\ &= \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{(\bar{x}-t)th(t)}{y_1(t)y_2(t)} dt - q(\bar{x}_0 - \bar{x}_0). \end{aligned} \quad (34)$$

A raíz de (33), $h(x)$, en cierta proximidad de x_0 es función creciente y por tanto positiva a derecha de x_0 ($\bar{x} < t < \bar{x}_0$) y negativa a izquierda ($\bar{x} > t > \bar{x}_0$); lo opuesto ocurre por $\bar{x} - t$ que será negativa en el primer caso y positiva en el segundo; la función integrando en (34) es luego negativa en cada caso, y la integral resulta positiva en el primer caso y negativa

en el segundo. Lo mismo ocurre para el término $-q(\bar{x} - \bar{x}_0)$ y por lo tanto para la suma $h(x)$ la cual resulta así del mismo signo que $h(t)$. Si ahora imaginamos de hacer alejarse con continuidad $\bar{x}$ de $\bar{x}_0$, estas condiciones se mantienen constantemente por pasar gradualmente a actuar como valores de $h(t)$ bajo el signo de integral los valores de $h(x)$ generados en un estadio anterior. Concluimos que la función $h(x)$ crece monotonamente en valor absoluto de ambos lados de x_0 , siendo constantemente positiva a la derecha y negativa a la izquierda. Queda así demostrado que $h(x)$ no puede volver al valor 0.

Supongamos ahora de hacer crecer ilimitadamente el valor de q , por tender $p_1 \rightarrow \infty$, o $p_2 \rightarrow -\infty$, o ambos casos conjuntamente; siendo siempre, por lo visto, los dos términos de (34) de igual signo, para cualquier valor fijo de $x \neq x_0$ $h(x)$ crecerá en valor absoluto ilimitadamente, con tal únicamente que y_1 o y_2 no alcancen el valor 0.

Notemos todavía, mirando al primer miembro de (32), que al crecer ilimitadamente $\bar{p}$ el valor de $m \rightarrow \infty$, y por consecuencia también ese punto en el cual una $y(x)$ alcanza el valor 0 se aleja hacia $-\infty$.

Por otra parte observemos que el razonamiento del n. 10 que nos ha conducido a la fórmula (32) queda completamente válido al cambiar el signo de p cambiando al mismo tiempo la izquierda de x_0 por la derecha, salvo algunos evidentes cambios de signos y salvo la observación que cuando el valor que el razonamiento proporcionaría para el número análogo de m resultara < 0 (es decir la abscisa $-m$ resultara positiva), el máximo indicado no sería efectivamente alcanzado por la rama, la cual llegaría antes a un punto del eje y , por el cual entraría en el primer cuadrante. Por cuanto rige todavía la observación de que, al crecer p , el valor de este análogo de m tiende a ∞ , resulta que, para cualquier punto (x_0, y_0) del segundo cuadrante pasan ramas que, hacia la derecha terminan sobre el eje y ; ya sabemos, por otra parte, por la fórmula (30), que pasan también ramas que no alcanzan este eje por terminar, hacia la derecha, sobre el eje x .

Añadiendo algunas evidentes consideraciones de continuidad, del conjunto de estas varias observaciones resulta por fin que *fijado arbitrariamente un punto (x_0, y_0) ($x_0 \leq 0, y_0 > 0$) al variar la pendiente inicial p de $-\infty$ a $+\infty$, se determina*

un haz de soluciones de la ecuación (1) que barre completa y simplemente todo el cuadrante $y > 0$, $x < 0$.

De las últimas observaciones nos conviene todavía poner en evidencia, para una aplicación futura, que *mientras, por p creciente positivamente las ramas a la derecha de x_0 llegan al eje y con valores crecientes hacia $+\infty$, también crece monótonamente hacia $+\infty$ la pendiente de la rama en el punto de encuentro con el eje y .*

13. — Los puntos en los cuales la curva integral se apoya sobre el eje x son evidentemente, por lo anteriormente visto, puntos de máximo y de mínimo para la derivada primera; vamos a probar, con más precisión, que *en ellos esta derivada vale $+\infty$ o $-\infty$ según el extremo considerado es izquierdo o derecho respecto de la rama en examen.* En efecto el signo ya está determinado por el n. 10; para determinar el valor absoluto imitaremos esencialmente el razonamiento del n. 8: llamemos x_1 el extremo considerado y consideremos la función

$$z(x) = \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = \frac{y(x)}{x - x_1} = y'(\xi)$$

ξ punto intermedio entre x y x_1 ;

sea (x_0, y_0) un punto fijado arbitrariamente sobre la rama con la condición que sea $y_0 \neq 0$ e y'_0 del mismo signo de la derivada en x_1 ; suponiendo x entre x_0 y x_1 , también ξ cae en el mismo intervalo y es

$$|y'_0| < |y'(\xi)| < |y'(x_1)|;$$

luego

$$|z(x)| < |y'(x_1)|.$$

Por otra parte de

$$y''(x) = \frac{x}{z(x)(x - x_1)}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 |y'(x)| &= \left| |y'_0| \pm \left| \int_{x_0}^x \frac{x \, dx}{z(x)(x-x_1)} \right| \right| \\
 &> \left| |y'_0| \pm \frac{\mu}{|y'(x_1)|} \left| \int_{x_0}^x \frac{dx}{x-x_1} \right| \right| \\
 &= \left| |y'_0| \pm \frac{\mu}{|y'(x_1)|} \log \frac{x_0-x_1}{x-x_1} \right|
 \end{aligned}$$

donde μ representa el menor de los valores $|x_0|$, $|x_1|$. Si ahora suponemos $|y'(x_1)|$ finito y hacemos tender $x \rightarrow x_1$ el primer miembro tiende a ese valor finito, mientras el último miembro tiende a ∞ con el factor logaritmo.

La hipótesis es por lo tanto absurda.

Las soluciones que pasan por un determinado punto del semieje x negativo son infinitas, pues pasa una por cada otro punto del segundo cuadrante; hemos mostrado ahora que para todas el valor de la derivada en dicho punto puede ser únicamente $+\infty$ o $-\infty$; los puntos de ese semieje son por lo tanto excepcionales con respecto a la determinación de soluciones por condiciones iniciales.

14. Todo lo dicho en los últimos párrafos lleva fácilmente a las siguientes observaciones acerca del *efectivo cálculo numérico de las soluciones*:

Elegido un punto (x_0, y_0) en el segundo cuadrante (con $y_0 > 0$), para cualquier valor de $y'_0 = p$ se puede calcular una tabla de valores de la solución que resulta así definida, sea acudiendo al desarrollo en serie de potencias de x , sea por otros métodos de aproximación y ese cálculo se prolonga sin dificultad hasta cualquier vecindad del eje x (puesto que a este eje llegue la solución considerada).

Atribuyendo a p un conveniente sistema discontinuo de valores podrá construirse de este modo una división del 2º cuadrante en sectores más o menos delgados separados por las distintas soluciones. Cada solución por el punto (x_0, y_0) , para un valor cualquiera de p , si no es una de las calculadas, corre, de un

lado y del otro de dicho punto, enteramente dentro de uno de estos sectores y podrá luego calcularse por aproximación mediante interpolación partiendo de las soluciones próximas.

Del haz que así se obtiene se deduce fácilmente el haz análogo relativo a otro punto (x_1, y_1) por medio de la transformación (19); bastará considerar la cúbica $x_1^3 y^2 = y_1^2 x^3$ y los puntos de intersección de ella con las curvas del haz anteriormente construido; a cada uno de estos puntos corresponde un valor de λ tal que $\lambda^3 y = y_1$, $\lambda^2 x = x_1$; aplicando la correspondiente transformación (19) a la curva del haz (x_0, y_0) que pasa por dicho (x, y) se obtiene una solución por (x_1, y_1) .

En particular, y con mayor simplicidad, la construcción podrá servir para formar el haz de las soluciones que pasan por un punto $(x_1, 0)$ ($x_1 < 0$) del eje x ; la cúbica se reduce entonces al mismo eje x y a cada solución del haz (x_0, y_0) caracterizada por encontrar al eje x en un punto de abscisa determinada x corresponderá una por el punto x_1 mediante la transformación definida por $\lambda = (x_1 : x)^{1/2}$.

15. Terminaremos este análisis de las soluciones en el segundo cuadrante observando que *no existen soluciones, por valores negativos de x , que pasen por el origen con derivada 0*. En efecto, pues no es solución $y=0$, si tal solución existiera debería, en cualquier proximidad del origen, pertenecerle un punto (x_1, y_1) con $x_1 < 0$, $y_1 > 0$. Por el teorema del valor medio, existiría entonces en el intervalo $0-x_1$ un punto x_2 en el cual

$$y'(x_2) = \frac{y_1}{x_1} < 0.$$

Para valores de x en el intervalo $0-x_2$ debería entonces $y'(x)$ mantenerse < 0 , con valores absolutos crecientes al acercarse a $x=0$, lo que contradice a la hipótesis que $y'(0)=0$.

16. Volvamos ahora al primer cuadrante. El razonamiento del n. 12 para estudiar las relaciones entre dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que pasan por un mismo punto x_0 puede evidentemente extenderse a este caso; sin embargo se presenta entonces con lo dicho en el n. 12 la diferencia esencial que en la fórmula (34) los dos términos del segundo miembro adquieren signos opuestos.

Si, en cambio de llegar directamente al cálculo de $h(x)$, nos preguntamos también sobre el valor de $h'(x)$, obtenemos

$$h'(x) = q - \int_{x_0}^x \frac{xh(x)}{y_1 y_2} dx,$$

donde este hecho se demuestra en modo aun más evidente, pues, por lo menos en proximidad del punto x_0 , la función $h'(x)$ resulta decreciente, y seguirá ciertamente decreciendo hasta tanto no cambie el signo de $h(x)$, es decir las dos curvas integrales no se corten nuevamente en un punto distinto de (x_0, y_0) ; pero se presenta difícil un juicio directo sobre la cantidad de este decrecimiento por el hecho que siempre, a partir de cierto valor de x , el producto $y_1 y_2$ crece rápidamente dejando presumir que la función integrando tiende a 0 para $x \rightarrow \infty$. Obtendremos conclusiones más adelante mediante consideraciones de otra naturaleza (n. 26).

Un resultado interesante podemos sin embargo obtener en un caso especial: Si la ecuación (1) tuviese dos soluciones en el primer cuadrante que ambas llegaran al origen con derivada 0, ellas deberían entrecruzarse infinitas veces en toda proximidad del punto $(0, 0)$. Sean en efecto $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tales soluciones; consideremos la correspondiente función

$$h(x) = y_1(x) - y_2(x);$$

por la hipótesis será

$$h(0) = h'(0) = 0.$$

Supongamos que en cierto punto x_1 sea $y_1(x_1) > y_2(x_1)$, $h(x_1) > 0$; por el teorema del valor medio existirá en el intervalo $0-x_1$ un punto ξ_1 tal que

$$\frac{h(x_1)}{x_1} = h'(\xi_1) > 0;$$

existirá luego en el intervalo $0-\xi_1$ un punto x_2 tal que

$$\frac{h'(\xi_1)}{\xi_1} = h''(x_2) > 0;$$

Si, en cambio de llegar directamente al cálculo de $h(x)$, nos preguntamos también sobre el valor de $h'(x)$, obtenemos

$$h'(x) = q - \int_{x_0}^x \frac{xh(x)}{y_1 y_2} dx,$$

donde este hecho se demuestra en modo aun más evidente, pues, por lo menos en proximidad del punto x_0 , la función $h'(x)$ resulta decreciente, y seguirá ciertamente decreciendo hasta tanto no cambie el signo de $h(x)$, es decir las dos curvas integrales no se corten nuevamente en un punto distinto de (x_0, y_0) ; pero se presenta difícil un juicio directo sobre la cantidad de este decrecimiento por el hecho que siempre, a partir de cierto valor de x , el producto $y_1 y_2$ crece rápidamente dejando presumir que la función integrando tiende a 0 para $x \rightarrow \infty$. Obtendremos conclusiones más adelante mediante consideraciones de otra naturaleza (n. 26).

Un resultado interesante podemos sin embargo obtener en un caso especial: Si la ecuación (1) tuviese dos soluciones en el primer cuadrante que ambas llegaran al origen con derivada 0, ellas deberían entrecruzarse infinitas veces en toda proximidad del punto $(0, 0)$. Sean en efecto $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tales soluciones; consideremos la correspondiente función

$$h(x) = y_1(x) - y_2(x);$$

por la hipótesis será

$$h(0) = h'(0) = 0.$$

Supongamos que en cierto punto x_1 sea $y_1(x_1) > y_2(x_1)$, $h(x_1) > 0$; por el teorema del valor medio existirá en el intervalo $0-x_1$ un punto ξ_1 tal que

$$\frac{h(x_1)}{x_1} = h'(\xi_1) > 0;$$

existirá luego en el intervalo $0-\xi_1$ un punto x_2 tal que

$$\frac{h'(\xi_1)}{\xi_1} = h''(x_2) > 0;$$

pero, por cuanto sabemos que

$$h''(x) = -x h(x)/y_1 y_2$$

tiene siempre en el primer cuadrante signo contrario de $h(x)$, resulta así que $h(x_2) < 0$. Las conclusiones rigen igualmente cambiando todos los signos; puede luego afirmarse que si en un punto cualquiera $x_1 > 0$ la función $h(x)$ tiene un determinado signo, existe un punto en el intervalo entre ese punto y el origen en el cual $h(x)$ tiene signo contrario; la función $h(x)$ cambia por tanto el signo infinitas veces en el intervalo $0-x_1$. Con lo cual queda demostrada la tesis.

III - Investigaciones sobre la transformada de primer orden.

17. Para obtener mayores informaciones sobre los puntos que la investigación anterior ha dejado en suspenso, principalmente en cuanto al primer cuadrante se refiere, vamos a considerar la ecuación transformada (27) que escribiremos nuevamente:

$$uw \frac{dw}{du} + 2uw + \frac{3}{4} u^2 - 1 = 0. \quad (35)$$

Recordamos las fórmulas de transformación:

$$\begin{aligned} y &= x^{3/2} u, & x &= e^v \\ v &= \log x, & u &= x^{-3/2} y \\ w &= \frac{du}{dv} = x^{-1/2} \frac{dy}{dx} - \frac{3}{2} x^{-3/2} y = x^{-1/2} y' - \frac{3}{2} u. \end{aligned} \quad (36)$$

La correspondencia que estas fórmulas ponen entre el plano xy y el plano uw no es puntual ni unívoca; en efecto, ya notamos (n. 6) que a una solución de (35) corresponde en el plano xy toda una familia de soluciones de (1) equivalentes respecto de la transformación (19). Más generalmente a una curva del plano uw definida por la ecuación $u = \varphi(w)$ corresponden en el plano xy todas las curvas que representan las soluciones de la ecuación diferencial

$$x^{-\frac{3}{2}} \varphi(x^{-\frac{1}{2}} y') - \frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} y - y = 0;$$

y se ve en seguida que, por una φ arbitrariamente fijada, si se conoce una solución de esta ecuación, la familia total de las soluciones está constituida por las transformadas de ella por la transformación (19). Esa familia degenera en una curva única, es decir a la curva $u=\varphi(w)$ corresponderá en el plano xy una curva unívocamente determinada, siempre y solamente cuando la curva considerada sea transformada en sí por (19), es decir (n. 6) sea una de las cúbricas (23)

$$y = cx^{3/2}. \quad (37)$$

Por (36) es entonces

$$u = c = \varphi(w). \quad (38)$$

Las curvas del plano uw que en el plano xy tienen representación unívoca son las rectas $u = \text{constante}$. Esta observación tendrá importante aplicación en el análisis siguiente; débese notar que, por contrario, no queda determinada una correspondencia entre los puntos de la recta y de la cúbrica, por cuanto a un punto cualquiera asignado sobre la recta (38), por un conveniente valor de $w = \gamma$, corresponde cualquier punto (xy) de la cúbrica (37), con tal que se llegue a él con la pendiente correspondiente

$$p = \left(\gamma + \frac{3}{2}c \right) x^{1/2}.$$

18. La ecuación (35) es regular con respecto a todos los puntos (uw) con

$$u \neq 0, \infty \quad \text{y} \quad w \neq 0, \infty;$$

es decir qué para cada uno de estos puntos pasa una y una sola solución que se puede prolongar y calcular con cualquier aproximación requerida hasta cualquier proximidad de las rectas $u=0$, $w=0$ o hasta valores de u y w aunque grandes.

Por cuanto a la recta $u=0$ corresponde $y=0$ (caso particular de (37) para $c=0$) y por cuanto sabemos que por puntos (xy) con $x>0$, $y=0$ no pasan soluciones de (1), inferimos en seguida que ninguna solución de (35) pasa por puntos de la recta $u=0$, salvo —eventualmente— las que fueran transformadas de las soluciones de (1) por el origen $x=0$, $y=0$, que fueron estudiadas en el n. 2, o las que lleguen a este punto con pendiente 0 (n. 3 y 16).

En cuanto a las primeras, de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = p \neq 0$$

sigue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} u &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1/2} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1/2} p = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{w}{u} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy'}{y} - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\lim w = \infty.$$

Las curvas correspondientes a las soluciones de (1) que salen del origen con pendiente $\neq 0$ tienden por lo tanto, para $x \rightarrow 0$, a un punto (uw) en el infinito, no sobre la recta $u=0$.

El último cálculo de límites cae en defecto en el caso de $p=0$, porque $\lim u$ se presenta entonces como indeterminado. Pero ocurren algunas observaciones importantes. Hemos notado en el n. 7 que a la única solución que conocemos de la ecuación (1) respondiendo a esta condición no corresponde ninguna solución para (35); en efecto, esa solución está caracterizada por

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}, \quad y' = \sqrt{3} x^{1/2}; \quad (40)$$

sustituyendo en (36) se obtiene

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad w = 0, \quad (41)$$

punto único y no curva.

Respecto de la posibilidad de otras soluciones de (1) correspondientes a la condición $x=0$, $y=0$, $p=0$, que hasta el momento hemos dejado sin decidir, hemos demostrado en el n. 16 que, en el caso de existir, cada una de estas soluciones debería cortar la (40) infinitas veces en cualquier proximidad del punto $(0,0)$; por consiguiente existe, para cualquiera de estas soluciones, una sucesión de puntos tendiendo al $(0,0)$ en los cuales la derivada tiende a 0; considerando, por otra parte, que la derivada es constantemente creciente, se concluye que ella es continua, tendiendo a 0 por $x \rightarrow 0$, sin limitaciones; puede entonces aplicarse

la regla de L'Hospital ⁽⁵⁾, obteniendo en todos los casos por (36):

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^{3/2}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{x^{1/2}} \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''}{\frac{1}{2} x^{-1/2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2}}{y} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 0} u};$$

por lo tanto, comparando las dos igualdades,

$$(\lim_{x \rightarrow 0} u)^2 = \frac{4}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (43)$$

Resulta así que, en el caso de existir soluciones de (1) tangentes al eje x en el origen, distintas de (40), a ellas deberían corresponder en el plano uw soluciones de (35) que, por $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ tenderían al punto (41).

Observemos ahora que, siempre en aplicación de la regla de L'Hospital, el cálculo contenido en (42), (43) se repite idéntico al cambiar $x \rightarrow 0$ por $x \rightarrow \infty$, por cuanto ya se ha demostrado que en este caso $y \rightarrow \infty$, $y' \rightarrow \infty$ cualquiera sea la solución de (1) que se quiera considerar. Se obtiene por lo tanto la siguiente conclusión que será esencial en nuestra deducción sucesiva: *Al tender x a ∞ a lo largo de una solución cualquiera de (1) el punto correspondiente del plano uw tiende al punto (41) recorriendo una solución de (35) (solución que podrá luego ser ella misma una cualquiera). Al mismo punto debería igualmente tender un punto corriente sobre una solución de (35) correspondiente de una de (1) tangente en el origen al eje x — si tal solución existiera distinta de (40) — mientras $x \rightarrow 0$. Esta conclusión, que implicaría que tales soluciones de (35) volvieran a aproxi-*

⁽⁵⁾ Cfr. p. ej. LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'analyse infinitésimale*, T. 1, (8ª ed., p. 95); LEVI, *Analisi matematica algebrica ed infinitesimale*, p. 181.

marse al mismo punto al ser recorridas en los dos sentidos opuestos se verá pronto como absurda, resultando pues absurda la hipótesis de existir tales soluciones.

19. El punto (41) es excepcional respecto de la ecuación (35) por pertenecer a la recta $w=0$; debe notarse que, si se exceptúa este punto y el simétrico $u=-2/\sqrt{3}$, $w=0$ — que dejamos de considerar por la convención de restringirnos a los valores $x>0$, $y>0$, $u>0$ — la singularidad de los demás puntos de dicha recta consiste exclusivamente en que para ellos la (35) impone que $dw/du=\infty$. Si, en efecto, en la última (36) ponemos $w=0$, deducimos

$$y' = \frac{3}{2} ux^{1/2} = \frac{d}{dx}(ux^{3/2}); \quad (44)$$

resulta entonces que, elegido arbitrariamente sobre la cúbica $y=ux^{3/2}$ un punto (xy) , la solución de (1) que pasa por este punto con la misma pendiente de la cúbica tiene por correspondiente en el plano uw una solución de (35) por el punto $(u0)$; y por otra parte esta solución es única, pues, al variar el punto (xy) , la solución de (1) así definida varía solamente dentro de una determinada familia de transformadas por la transformación (19). Se obtiene por tanto que los puntos $w=0$, $u=c/\pm 2/\sqrt{3}$ representan en el plano uw los puntos (xy) donde una solución cualquiera de (1) es tangente a una parábola cúbica del haz (23)

$$y^2 = cx^3.$$

20. Nos queda todavía por estudiar la ecuación (35) en el entorno del punto (41), lo que nos dará otras indicaciones preciosas para los fines que nos hemos propuesto. Nos conviene aplicar a las variables un cambio que lleve el punto considerado en el origen. Pondremos, pues

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} (1+t); \quad (45)$$

la ecuación (35) se escribe así

$$(1+t) w dw + \left[\frac{4}{\sqrt{3}} (1+t)w + 2t + t^2 \right] dt = 0; \quad (46)$$

será cómodo acortar un poco la expresión en la forma

$$\frac{dw}{2t + \frac{4}{\sqrt{3}} w + \varphi_2} = \frac{dt}{-w + \psi_2} \quad (47)$$

donde φ_2 y ψ_2 representan formas (polinomios homogéneos) de 2º grado en t, w .

Se ve así que nuestra ecuación entra en un tipo estudiado ya por H. Poincaré en su tesis doctoral, luego en el *Journal de Mathématique* 1881-1882, luego tratado detalladamente por E. Picard en su *Traité d'Analyse* ⁽⁶⁾. Vamos a seguir a estos autores, aun alejándonos un poco en los detalles; como se observa por ellos, mediante una sustitución lineal como

$$\xi = \lambda_1 w + 2t, \quad \eta = \lambda_2 w + 2t, \quad (48)$$

donde λ_1, λ_2 son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (49)$$

se pasa a nuevas variables ξ, η , respecto de las cuales (47) toma la forma

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi + F_2} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta + G_2} \quad (50)$$

donde F_2, G_2 son nuevamente formas de segundo grado en ξ, η . Se calculan en seguida los valores de λ_1, λ_2 :

⁽⁶⁾ T. III, cap. II y IX; particularmente este último. Ver también: C. I. LUBIN. *Transformation of Differential Equations in the neighborhood of singular points*. Duke Mathematical Journal. Vol. 3. 1937.

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \pm i \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad (51)$$

como se ve, la transformación nos lleva a tratar con números imaginarios, aunque nuestro propósito, con respecto a las variables x, y, u, v, w sea el de quedarnos en el dominio real; aceptaremos provisionalmente la extensión, reservándonos de tener en cuenta esta condición de realidad en lugar apropiado.

Por razón de brevedad pondremos

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib. \quad (52)$$

Para valores absolutos pequeños de w, t , los valores absolutos de ξ, η quedan pequeños y recíprocamente; los valores de F_2, G_2 quedan despreciables en comparación de $\lambda_1 \xi, \lambda_2 \eta$, de manera que a la ecuación (50) podemos sustituir, *en primera aproximación*, la más simple

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}, \quad (53)$$

cuya solución general se calcula elementalmente y puede expresarse por

$$\frac{\xi^{\lambda_2}}{\eta^{\lambda_1}} = c = \text{constante arbitraria (compleja)},$$

es decir, por (52),

$$\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^a (\xi\eta)^{-ib} = c. \quad (54)$$

De (48) se obtiene

$$w = \frac{\xi - \eta}{2ib}, \quad t = \frac{\lambda_1 \eta - \lambda_2 \xi}{4ib}; \quad (55)$$

la condición que w y t sean reales equivale luego a decir que cada uno de los pares de números complejos ξ, η y $\lambda_2 \xi, \lambda_1 \eta$ deben tener la misma parte real; un breve cálculo muestra que condición necesaria y suficiente para esto es que λ y η sean complejos conjugados; luego

$$\left| \frac{\xi}{\eta} \right| = 1, \quad \xi \eta = |\xi|^2 = |\eta|^2; \quad (56)$$

podemos luego poner

$$\frac{\xi}{\eta} = e^{i\tau}, \quad \xi \eta = e^\sigma, \quad (57)$$

donde τ y σ son variables reales que todavía están vinculadas a realizar la condición (54); por cuanto de (57) resulta

$$\xi = e^{\frac{\sigma + i\tau}{2}}, \quad \eta = e^{\frac{\sigma - i\tau}{2}},$$

se constata que la condición de ser ξ, η números conjugados está realizada.

Por (57), la (54) se escribe

$$e^{i(a\tau - b\sigma)} = c,$$

lo que muestra que la constante c debe elegirse en modo que $|c| = 1$; podemos poner

$$c = e^{i\gamma}, \quad \gamma = \text{constante arbitraria real},$$

y obtenemos por fin

$$\begin{aligned} a\tau - b\sigma &= \gamma, & \sigma &= \frac{a\tau - \gamma}{b} \\ \xi &= e^{\frac{\lambda_1 \tau - \gamma}{2b}}, & \eta &= e^{\frac{\lambda_2 \tau - \gamma}{2b}}. \end{aligned} \quad (58)$$

Para pasar de esta primera aproximación a una solución de-

finitiva de la ecuación (50), la cual deberá todavía satisfacer a las condiciones (56), bastará poner, en lugar de (58),

$$\begin{aligned}\xi &= e^{\frac{\lambda_1 \tau - \gamma}{2b}} (1 + \zeta_1 + i\zeta_2) = e^{\frac{\sigma}{2} + i\frac{\tau}{2}} (1 + \zeta_1 + i\zeta_2) \\ \eta &= e^{\frac{\sigma}{2} - i\frac{\tau}{2}} (1 + \zeta_1 - i\zeta_2)\end{aligned}\quad (59)$$

donde ζ_1 y ζ_2 sean desarrollos en series de potencias de

$$e^{\frac{\sigma}{2}} = s$$

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= a_1 s + a_2 s^2 + \dots \\ \zeta_2 &= b_1 s + b_2 s^2 + \dots\end{aligned}\quad (60)$$

Sustituyendo en (50) e igualando los términos reales y los términos imaginarios se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para la determinación recurrente de los coeficientes indeterminados.

Finalmente sustituyendo las expresiones (59) (o en forma aproximada las (58)) en las fórmulas (55) se podrán obtener expresiones explícitas (dependientes del parámetro γ) para las soluciones de (46), (47) alrededor del punto singular (41). Para obtener una visión intuitiva del resultado será útil pasar a coordenadas polares poniendo

$$t + iw = \rho e^{i\varphi}$$

$$\rho^2 = t^2 + w^2, \quad \varphi = \arctg \frac{w}{t};$$

se ve en seguida que ρ tiene en factor $e^{\frac{\sigma}{2}}$ que tiende a 0 cuando $\tau \rightarrow -\infty$, sin que este valor 0 sea alcanzado para ningún valor de τ ; conjuntamente

$$\frac{w}{t} = \frac{2}{\lambda_2} \frac{\xi : \eta - 1}{\lambda_1 : \lambda_2 - \xi : \eta} = \frac{2}{\lambda_2} \left(-1 + \frac{\lambda_1 : \lambda_2 - 1}{\lambda_1 : \lambda_2 - \xi : \eta} \right)$$

oscila indefinidamente entre $-\infty$ y $+\infty$ mientras, al variar τ , $\xi:\eta$, constantemente de módulo 1, pasa repetidamente por el valor $\lambda_1:\lambda_2$; el vector $\rho e^{i\varphi}$ gira así en una infinidad de vueltas alrededor del origen; por lo tanto la solución considerada de (35) se envuelve en espiral infinita en torno del punto singular (41), aproximándose a él indefinidamente, pero sin alcanzarlo.

Para dar a estas conclusiones una determinación numérica necesitaría un estudio detenido de las series (60); algo en este sentido vamos a agregar por otro camino en los párrafos siguientes; notamos por el momento que, por cuanto sabemos que cualquier solución de (1) en el primer cuadrante llega a valores de x, y, y' grandes como se quiera, toda curva integral de (35), considerada en su completo recorrido, llegará a suficiente proximidad del punto singular para poder aplicar los resultados actuales y aún simplemente la aproximación (58). Llegamos por lo tanto al resultado: *ninguna curva integral de la ecuación (35) pasa por el punto (41); pero todas terminan por envolverse en espiral infinita en torno de este punto, aproximándose a él sin límite, pero sin alcanzarlo.* En estas infinitas vueltas cada solución cortará luego infinitas veces cada una de las rectas $w=0$, $t=0$ ($u=2/\sqrt{3}$).

21. Las conclusiones obtenidas por vía analítica en el párrafo anterior van a adquirir confirmación y mayor claridad por las siguientes consideraciones gráficas.

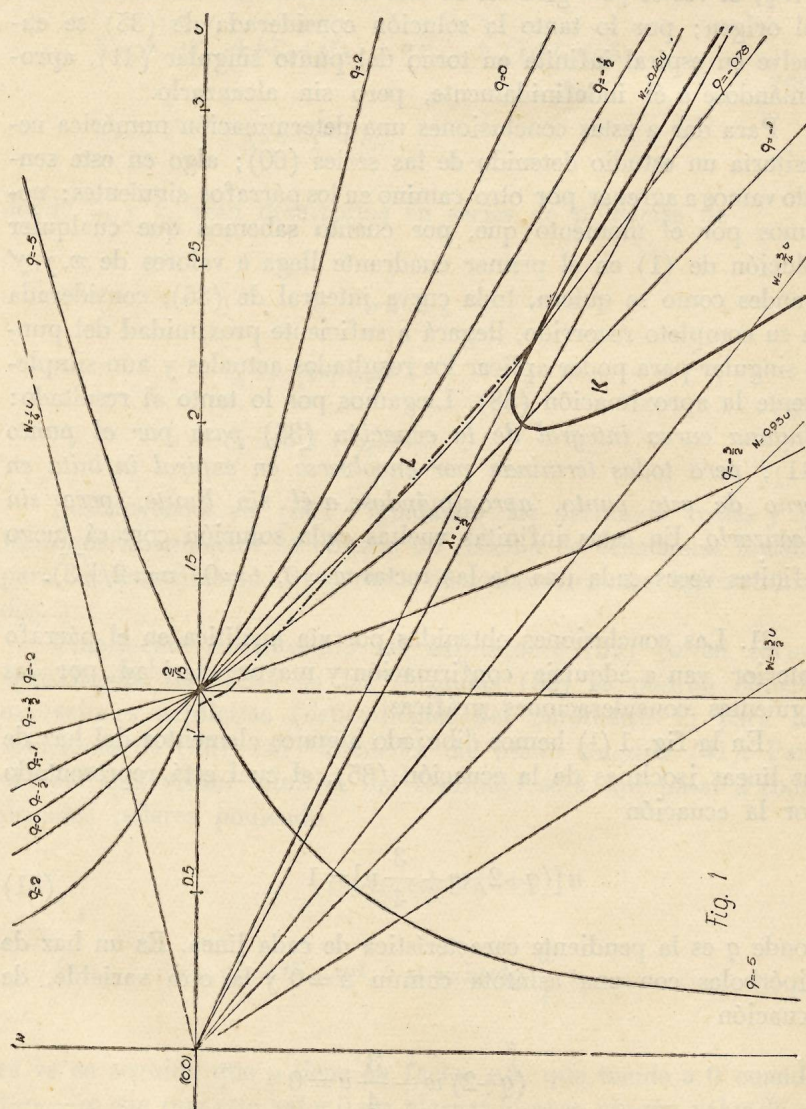
En la fig. 1⁽¹⁾ hemos dibujado algunos elementos del haz de las líneas isoclinas de la ecuación (35), el cual está representado por la ecuación

$$u[(q+2)w + \frac{3}{4}u] = 1 \quad (61)$$

donde q es la pendiente característica de cada línea. Es un haz de hipérbolas con una asíntota común $u=0$ y la otra variable, de ecuación

$$(q+2)w + \frac{3}{4}u = 0$$

⁽¹⁾ La fig. 1 contiene, además de algunas isoclinas, la curva K de la cual se habla a continuación, y finalmente, dibujada en puntos y rayas, la poligonal aproximante por exceso la solución excepcional (v. la última parte del párrafo).



y con puntos bases el punto del infinito de la recta $u=0$, doble, y los dos puntos $w=0$, $u=\pm 2/\sqrt{3}$; se confirma así que estos puntos son singulares para la ecuación no correspondiéndole una pendiente determinada. Las hipérbolas degeneradas del haz son

$$\text{el par de rectas } \frac{3}{4}u^2 - 1 = 0 \text{ correspondiente a } q = -2$$

y el par de rectas $u=0$, $w=0$ correspondiente a $q=\infty$.

Consideremos también el lugar de los puntos de inflexión de las curvas integrales, caracterizado por la condición que $d^2w/du^2=0$ o por la equivalente que en esos puntos la pendiente de la isoclina es su misma pendiente característica. Se obtiene la ecuación de este lugar eliminando la variable q entre (61) y la ecuación

$$(q+2)w + q(q+2)u + \frac{3}{2}u = 0 \quad (62)$$

que se obtiene derivando (61) respecto de u y poniendo en esta derivada q por dw/du . Se encuentra, efectuando esta eliminación, una curva de 4º orden con tres puntos dobles en los puntos bases del haz (61); sin embargo se trata de puntos aislados, que no son alcanzados por ramas reales de la curva. Observando que las ecuaciones (61), (62) se transforman en sí mismas al cambiar el signo de u y w contemporáneamente, se ve que la curva es simétrica respecto del origen.

Llamaremos por brevedad K a la rama real en el semiplano $u > 0$, de la cual nos interesa examinar la forma; para eso será más conveniente referirse a una representación paramétrica. Pongamos en (61), (62) $w=\lambda u$; resulta

$$\lambda = -\frac{q^2+2q+\frac{3}{2}}{q+2}, \quad u^2 = \frac{1}{\lambda(q+2)+\frac{3}{4}} = \frac{-1}{q^2+2q+\frac{3}{4}}; \quad (63)$$

para que sea u real deberá ser

$$-\frac{3}{2} < q < -\frac{1}{2}; \quad (64)$$

por otra parte se calcula en seguida que los extremos de λ ocurren por

$$q = -2 + \sqrt{\frac{3}{2}} = -0,78$$

y

$$q = -2 - \sqrt{\frac{3}{2}} = -3,22;$$

a raíz de la limitación (64) sólo el primero puede ser considerado; el valor correspondiente de λ es

$$\lambda = 2 - \sqrt{6} = -0,459;$$

se sigue que toda la curva K está contenida dentro del ángulo de lados

$$\frac{w}{u} = -0,459, \quad \frac{w}{u} = -\frac{3}{2} \quad (65)$$

A cada valor de q satisfaciendo a la limitación (64) corresponde una isoclina que corta a esa rama K en un solo punto, determinando un único valor de λ , donde

$$-\frac{3}{2} \leq \lambda \leq -0,459.$$

Inversamente, a cada valor de λ del intervalo

$$-\frac{3}{2} \leq \lambda < -\frac{1}{2}$$

corresponde, sobre K , un solo punto; por contrario para

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda < 2 - \sqrt{6} = -0,459$$

se tiene sobre dicha rama dos puntos, que corresponden a dos valores de q respectivamente en los intervalos

$$-1 \leq q < -0,78, \quad -0,78 < q \leq -\frac{1}{2}.$$

La recta $\lambda = 2 - \sqrt{6}$ es tangente a K en el punto

$$\begin{cases} u = \frac{2\sqrt{135+60\sqrt{6}}}{15} = 2,239 \\ w = \lambda u = -1,028 \end{cases} \quad (66)$$

con

$$q = -0,78.$$

A los valores extremos

$$q = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{3}{2} \quad (67)$$

corresponde

$$u = \pm \infty, \quad w = \mp \infty;$$

Por fin el mínimo de u^2 corresponde a $q = -1$, que por la primera (63) da todavía $\lambda = -1/2$; por lo tanto la recta

$$\lambda = \frac{w}{u} = -\frac{1}{2} \quad (68)$$

atraviesa la curva K en el punto

$$u = 2 \quad w = -1$$

en el cual la curva es tangente a la ordenada $u = 2$. Se nota por tanto que la rama K queda por completo a la derecha de esta ordenada y luego, con más razón, a la derecha de la recta $u = 2/\sqrt{3}$ que pasa por el polo de las espirales que forman las soluciones.

En cada punto de la región del plano interior a la curva K (la región que no contiene el origen) la pendiente de la curva integral que pasa por él es menor que la pendiente de la isoclina; en efecto, la diferencia entre las dos pendientes tiene en esta región el mismo signo que la diferencia de la primera menos la inclinación de la asíntota a la isoclina:

$$q + \frac{3}{4} \frac{1}{q+2} = \left(q^2 + 2q + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{q+2};$$

por las (63), (64) esta expresión es negativa; teniendo en cuenta que estas pendientes son negativas, sigue que, por u creciente las curvas integrales atraviesan las isoclinas de adentro hacia afuera, es decir, hacia las pendientes decrecientes (crecientes en valor absoluto). Por lo tanto, al atravesar una curva integral a la curva K (con pendiente comprendida entre $-0,5$ y $-1,5$), esta pendiente irá alejándose del primer extremo y acercándose al segundo.

Pero las fórmulas (36) nos dan una información más precisa; ya hemos visto en efecto que $u \rightarrow \infty$ por $x \rightarrow 0$, y de (36)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{w}{u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy'}{y} - \frac{3}{2};$$

si ahora

$$\lim_{x \rightarrow 0} y \neq 0,$$

resulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{w}{u} = -\frac{3}{2};$$

si, al contrario $\lim y = 0$, ya vimos en la (39) que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{w}{u} = -\frac{1}{2}.$$

Vimos además que este caso se verifica para la única curva integral de (35) que corresponde a las integrales de (1) que pasan por el origen con pendiente $p \neq 0$. Obtenemos luego el resultado siguiente:

Todas las curvas integrales de (35), salvo la última recordada, mientras $u \rightarrow \infty$, convergen hacia el punto en el infinito de K

$$u = \infty, \quad w = -\infty, \quad \lim \frac{w}{u} = -\frac{3}{2}. \quad (69)$$

La integral excepcional correspondiente a las integrales de (1) por el origen tiende, por opuesto, mientras $u \rightarrow \infty$, al otro punto de K en el infinito

$$u = \infty, \quad w = -\infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{w}{u} = -\frac{1}{2}. \quad (70)$$

Más precisamente todavía esta última curva es asíntota a la recta (68), pues se tiene, sobre ella

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(w + \frac{1}{2} u \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy' - y}{x^{3/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy''}{\frac{3}{2} x^{1/2}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2}}{y} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} u^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Si, en cambio, consideramos las integrales que convergen al punto (69), tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(w + \frac{3}{2} u \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1/2} y' = \pm \infty, \quad (71)$$

si, respectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y' = \pm p, \quad p > 0 \quad (72)$$

pero, si este lím es 0 será todavía

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^{1/2} y'' = 2 \lim_{x \rightarrow 0} u^{-1} = 0;$$

por lo tanto tiene por asíntota la recta

$$\lambda = \frac{w}{u} = -\frac{3}{2} \quad (73)$$

la única integral de (35) que corresponde a las integrales de (1) que llegan al eje y con tangente paralela al eje x (equivalentes

entre sí respecto de la transformación (19)); las demás curvas integrales no tienen asíntota; por (71), (72) se ve que penetran en la región interior a la curva K las de estas curvas que corresponden a soluciones de (1) que cortan al eje y con pendiente positiva (soluciones que en el primer cuadrante se alejan constantemente del eje x); no penetran en dicha región las curvas integrales que corresponden a soluciones de (1) que cortan al eje y con pendiente negativa (las que alcanzan un mínimo al interior del primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$)). En el plano uw estas últimas curvas cortan siempre la recta (73) en un punto que corresponde, en el plano x y a dicho mínimo, como está demostrado por la última (36).

Por lo dicho anteriormente, la integral excepcional que llega al punto (70) no puede penetrar en la región interior a K ; debe por tanto, en su recorrido en el semiplano $w < 0$, por valores decrecientes de u , cortar sucesivamente líneas isoclinas cuyo parámetro característico sea siempre negativo y de valores absolutos crecientes; por valores de $u \geq 2$, ella corre luego en la estrecha banda comprendida entre la rama de la curva K y la hipérbola isoclina de parámetro $-1/2$, imitando la curvatura de esta última.

Esta observación permite también calcular con muy buena aproximación la abscisa u_0 del punto en que esta rama de la solución excepcional alcanza el eje $w = 0$. Resulta en efecto de lo dicho que ella envuelve al conjunto de las ramas infinitas de todas las demás soluciones, quedando por arriba y a la derecha de todas ellas; el punto u_0 será luego el límite superior de los puntos en que cada una de estas ramas llegan al eje $w = 0$ — quedando por otra parte a la izquierda del polo $u = 2/\sqrt{3}$. En particular, lo dicho anteriormente nos asegura que, en la parte de ordenadas comprendidas entre $w = -1$ y $w = 0$ una buena aproximación de la solución excepcional puede considerarse representada por la solución que atraviesa la curva K en el punto (66); por cuanto sabemos que ésta, después de este punto, es convexa hacia abajo, resulta también que ella, en la región que consideramos, queda contenida en el ángulo formado por la tangente a ella en dicho punto (66), cuya ecuación se calcula fácilmente ser

$$w + 0,78 u = 0,718 \quad (*)$$

y el eje $w = 0$; el punto de encuentro de las dos rectas es

$$u = \frac{0,718}{0,78} = 0,92$$

se tiene por lo tanto la primera acotación

$$0,92 < u_0 < 1,1547;$$

pero otra mucho mejor se obtiene en seguida observando que por las mismas razones anteriores la solución considerada queda dentro del ángulo agudo formado por la recta $w=0$ y la recta de pendiente -2 por el punto de intersección de la (*) con la recta $u=2/\sqrt{3}$; este punto está determinado por

$$u - 1,1547 = \frac{0,718 - 0,78 \cdot 1,1547}{2}$$

$$u = 1,0634;$$

luego

$$1,0634 < u_0 < 1,1547 \dots \quad (74)$$

Los signos $<$ deben entenderse en sentido estricto; el extremo izquierdo podría perfeccionarse fácilmente, sustituyéndolo con otro mayor, repitiendo un razonamiento análogo al anterior, teniendo en cuenta otras líneas isoclinas (por ej. considerando la intersección de la recta de pendiente -2 considerada arriba con una isoclina correspondiente a una pendiente $-p$ ($p > 2$)); para nuestros fines estos perfeccionamientos no tendrían interés. Concluimos pues:

La curva representativa de la solución excepcional alcanza por primera vez (v. n. 20, y aun más adelante) el eje $w=0$ en un punto u_0 con

$$1,0634 < u_0 < \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547. \quad (75)$$

Esta observación tiene en el plano x y una interpretación sobre la cual vamos a volver, pero que vale la pena señalar en seguida. Ya notamos que a un punto en el cual una solución de (35) corta al eje $w=0$ corresponden en el plano x y puntos en

los cuales una solución correspondiente de (1) es tangente a una parábola del haz $y = cx^{3/2}$, para la cual el coeficiente c tiene el valor de la abscisa de aquel punto; tenemos por tanto que las soluciones de (1) que pasan por el origen con pendiente $\neq 0$, tienen como envolvente de mínimas ordenadas a una parábola

$$y = u_0 x^{3/2} \quad (76)$$

donde el coeficiente u_0 obedece a la limitación (75). Por el hecho de que esas soluciones son todas las transformadas de una de ellas por las transformaciones (19), cada punto de la parábola (76) es punto de contacto de una de ellas.

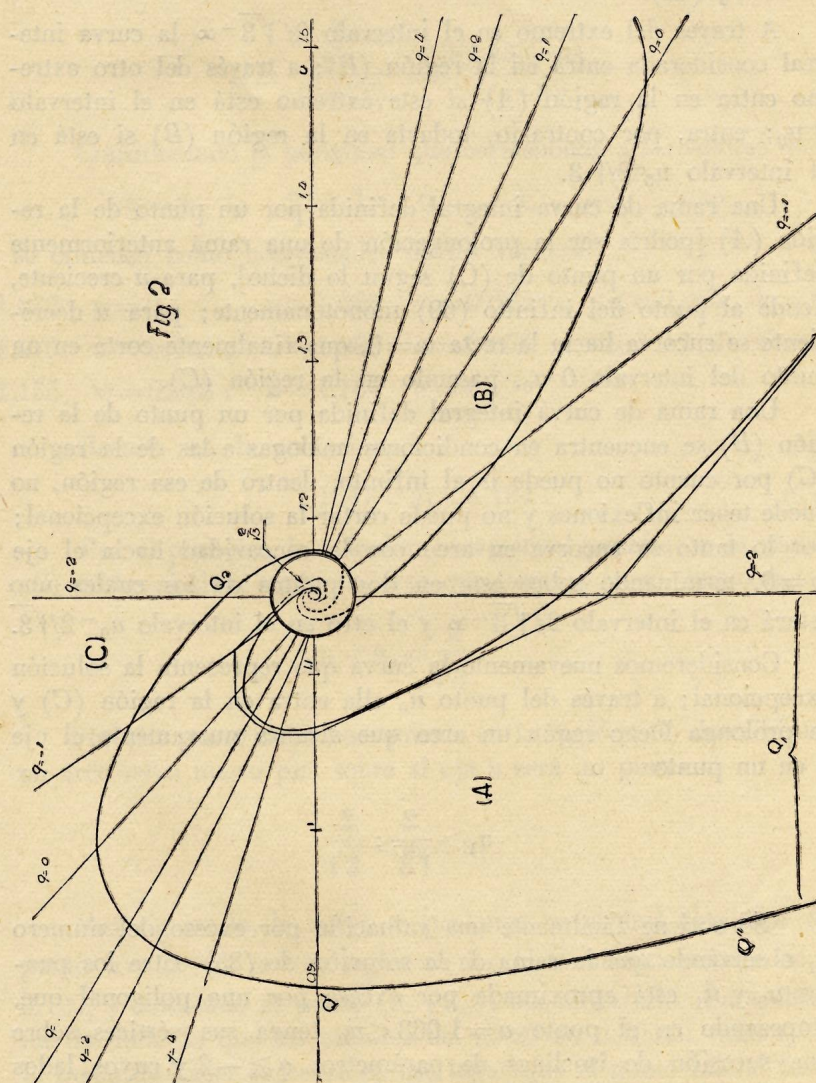
22. Después de esta preparación estamos en condiciones para describir el recorrido de las curvas integrales de la ecuación (35) en el plano uw y luego de completar nuestro estudio de las soluciones de la ecuación (1) en el plano xy .

Dividiremos el semiplano $u > 0$ en tres regiones características (v. fig. 2 (1)) que llamaremos: (A) la parte del cuadrante $u > 0$, $w < 0$ a la izquierda de la rama de la solución excepcional últimamente estudiada; (B) la parte del mismo cuadrante a la derecha de dicha curva; (C) el cuadrante $u > 0$, $w > 0$.

Teniendo en cuenta que (C) es completamente exterior a la curva K y que por lo tanto las curvas integrales no pueden, en esta región, tener puntos de inflexión, sino que su pendiente debe decrecer continuamente al crecer u ; que además una curva integral no puede tener puntos en el infinito de la región (C); se infiere que una rama de curva integral definida por un punto de (C) se presenta como un arco cóncavo hacia abajo que termina en dos puntos del eje u , con tangentes perpendiculares al mismo (pendientes $-\infty$ y $+\infty$); estos dos puntos deben estar de partes opuesta de la recta $u = 2/\sqrt{3}$, isoclina de parámetro -2 ; por

(1) La fig. 2 representa en escala mayor que la fig. 1, la parte del plano uw más próxima al punto $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $w = 0$; está representada nuevamente la poligonal aproximante la solución excepcional, y su prolongación en la región (C); e igualmente la solución excepcional misma; además ramas de dos otras soluciones.

Entre éstas, la de izquierda, con la indicación de los puntos Q_1 , Q_2 , Q' , Q'' , puede servir para aclarar el razonamiento del n. 24, suponiendo que los puntos Q_1 , Q_2 se alejen suficientemente respectivamente hacia $-\infty$ y $+\infty$ y la rama se amplíe por consecuencia desplazándose Q' hacia la izquierda.



lo tanto estarán uno en el intervalo $0-2/\sqrt{3}$, el otro en el intervalo $2/\sqrt{3}-\infty$. El primer intervalo contiene en particular el punto u_0 (75).

A través del extremo en el intervalo $2/\sqrt{3}-\infty$ la curva integral considerada entra en la región (B); a través del otro extremo entra en la región (A) si este extremo está en el intervalo $0-u_0$; entra, por contrario, todavía en la región (B) si está en el intervalo $u_0-2/\sqrt{3}$.

Una rama de curva integral definida por un punto de la región (A) [podría ser la prolongación de una rama anteriormente definida por un punto de (C) según lo dicho], para u creciente, tiende al punto del infinito (69) monótonamente; para u decreciente se encorva hacia la recta $w=0$, que finalmente corta en un punto del intervalo $0-u_0$, pasando en la región (C).

Una rama de curva integral definida por un punto de la región (B) se encuentra en condiciones análogas a las de la región (C) por cuanto no puede ir al infinito, dentro de esa región, no puede tener inflexiones y no puede cortar la solución excepcional; por lo tanto se encorva en arco con la concavidad hacia el eje $w=0$, terminando sobre este en dos puntos de los cuales uno estará en el intervalo $2/\sqrt{3}-\infty$ y el otro en el intervalo $u_0-2/\sqrt{3}$.

Consideremos nuevamente la curva que representa la solución excepcional; a través del punto u_0 ella entra en la región (C) y se prolonga luego según un arco que alcanza nuevamente el eje u en un punto

$$u_1 > \frac{2}{\sqrt{3}};$$

Se obtiene fácilmente una valuación por exceso del número u_1 observando que la rama de la solución de (35) entre los puntos u_0 y u_1 está aproximada por exceso por una poligonal que, empezando en el punto $u=1,063 < u_0$ tenga sus vértices sobre una sucesión de isoclinas de parámetros $q \geq -2$ y cuyos lados tengan cada uno la pendiente definida por el valor de q en su primer extremo y cuyo último lado, de pendiente -2 , tenga sus extremos sobre la isoclina $u=2/\sqrt{3}$ y sobre el eje u . Se simplifica todavía el cálculo observando que, para este cálculo se puede sustituir a las propias isoclinas sus tangentes en el punto

base $(2/\sqrt{3}, 0)$ pues el error resultante por esta sustitución resulta del orden de 10^{-3} o menor; la ecuación de estas tangentes es

$$w = \frac{3(\frac{2}{\sqrt{3}} - u)}{2(q+2)} = \frac{3(1,155 - u)}{2(q+2)}.$$

Considerando la polygonal que corresponde a los valores de q

$$q = \infty, 4, 2, 1, 0, -1, -2, -\infty$$

se obtienen como coordenadas de los vértices

$$\begin{aligned} u=1,063 \quad w=0 & \quad ; \quad u=1,063 \quad w=0,023 & ; \quad u=0,066 \quad w=0,034; \\ u=1,070 \quad w=0,042 & ; \quad u=1,082 \quad w=0,055 & ; \quad u=0,118 \quad w=0,055; \\ u=1,155 \quad w=0,018 & ; \quad u=1,164 \quad w=0. \end{aligned}$$

Resulta así la acotación

$$1,1547 < u_1 < 1,164 \quad (77)$$

Por el punto u_1 la solución excepcional penetra en la región (B) prolongándose según un arco que termina en un punto u_2 :

$$u_0 < u_2 < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Por este punto entra nuevamente en la región (C) describiendo un arco cuyo nuevo pie, sobre el eje u será un punto u_3

$$\frac{2}{\sqrt{3}} < u_3 < u_1.$$

Así siguiendo, la curva se prolonga en espiral alrededor del punto $u=2/\sqrt{3}$, $w=0$, según se ha visto analíticamente en el n. 20, y tendiendo al punto $(2/\sqrt{3}, 0)$ sin alcanzarlo. Para eliminar la duda de que los cálculos del n. 20 no tuvieran validez por la razón de haber supuesto en ese lugar que el punto inicial fuera *suficientemente próximo* a dicho punto, basta observar, como ya se notó que, eventualmente después de algunas vueltas, se llegará necesariamente a tal proximidad, puesto que la curva correspondiente en el plano x y tiende al infinito.

Consideremos, en cambio, la prolongación de una integral pro-

veniente de la región (A); ésta entra en la región (C) por un punto a la izquierda de u_0 , y, no pudiendo cortar la prolongación de la integral excepcional, llegará nuevamente al eje u en un punto

$$u' > u_1,$$

por el cual entra en la región (B), prolongándose mediante un arco que llegará nuevamente al eje u en un punto comprendido entre u_0 y $2/\sqrt{3}$; se repite entonces lo dicho anteriormente, obteniéndose una curva que se envuelve en torno del punto $(2/\sqrt{3}, 0)$ dentro de la espiral generada por la solución excepcional.

Por fin, si consideramos la prolongación de una curva integral proveniente de la región (B), ya sabemos que uno de los extremos de este arco está en el intervalo $u_0 - 2/\sqrt{3}$ y luego se prolonga en la espiral de la cual hemos dicho; el otro extremo puede estar a la derecha o a la izquierda del punto u_1 ; en el primer caso pertenece a un arco integral de la región (C) que se apoya nuevamente sobre el eje u en un punto del intervalo $0 - u_0$; por este punto entra en la región (A) prolongándose monótonamente hacia el punto (69). En el segundo caso pertenece a un arco integral de la región (C) que se apoya nuevamente sobre el eje u en un punto u del intervalo $u_0 - 2/\sqrt{3}$, por el cual entra en la región (B). El punto u estará comprendido entre dos puntos sucesivos de la sucesión numerable $u_0, u_2, u_4, \dots$ (o coincidirá con uno de ellos), porque esta sucesión tiende a $2/\sqrt{3}$ como límite; por consecuencia la integral considerada se prolonga en una serie de espiras comprendidas entre las espiras de la solución excepcional (o coincidentes con ellas) llegando, después de un número finito de vueltas, a un punto del eje u a la izquierda de u_0 (o al punto u_0 mismo). Por este punto la curva entra en la región (A), tendiendo luego al punto (69).

Resumiendo: *todas las curvas integrales de la ecuación (35), consideradas en su totalidad, se enrollan por un lado en una espiral de infinitas vueltas alrededor del punto $(2/\sqrt{3}, 0)$ y por el otro lado terminan en una rama infinita que, en caso de no coincidir con aquella de la integral excepcional (en cuyo caso la integral considerada es esta excepcional, precisamente) se desenvuelve en la región (A), tendiendo al punto (69).*

23. - Para traducir estas conclusiones en propiedades correspondientes de las soluciones de (1), en el primer cuadrante debemos recordar todavía las relaciones entre los planos uw y xy a las cuales hemos acudido al final del n. 21. A cada recta $u=c$ del primer plano corresponde en el segundo una parábola (23); una curva integral de (1) cortará una de estas parábolas siempre y solamente cuando la curva correspondiente en el plano uw corta a la recta correspondiente; le será tangente cuando la curva será tangente a esa recta, lo que no puede ocurrir sino sobre la recta $w=0$. Si dos soluciones de (1) pasan por un mismo punto, este punto determina una parábola y luego una recta correspondiente en el plano uw , la cual será cortada por las curvas correspondientes a las dos soluciones consideradas en puntos distintos, los que corresponden a las pendientes de las dos soluciones en el punto común por medio de la última relación (36). Puesto que siempre $x > 0$, la ordenada w y la pendiente y' varían en el mismo sentido.

Observando entonces que en las infinitas vueltas que cualquier integral de (35) da alrededor del punto $(2/\sqrt{3}, 0)$, ella corta infinitas veces cada una de las rectas

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad w = 0;$$

pero corta un número finito (eventualmente cero) de veces cada otra recta $u=c$, podemos enunciar:

I - Cada solución de la ecuación $yy'' = x$ en el primer cuadrante, que no sea la parábola semicúbica (16) corta a esta parábola en una sucesión infinita de puntos, de abscisas crecientes, que tiene como único punto límite el punto en el infinito de la cúbica.

II - Entre las cúbicas del haz (23) existe una, correspondiente a $c=u_0$ que tiene la propiedad de envolver por abajo el sistema de las soluciones que pasan por el origen, diferentes de la parábola (16); todas las parábolas del haz correspondientes a $c > u_0$ están cortadas por cada una de las soluciones de la ecuación, por lo menos una vez. Las parábolas correspondientes a $c < u_0$ pueden ser cortadas únicamente por soluciones que no pasan por el origen. Fijando la atención sobre las soluciones que pasan por un mismo punto P , el valor mínimo de los coeficientes c a los

cuales corresponden parábolas cortadas por una determinada solución tiende a 0, mientras la pendiente de dicha solución tiende a $\pm \infty$ ⁽⁹⁾.

III - A cada solución corresponden dos sucesiones infinitas de números, respectivamente creciente y decreciente, convergentes ambas al valor $2/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} 0 < c_0 \leq u_0 < c_2 < \dots < \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \infty > c_1 \geq u_1 > c_3 > \dots > \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (78)$$

con la propiedad que los términos de cada una de estas sucesiones separan (y están separados por) los términos de la sucesión homóloga correspondiente a cualquier otra solución, salvo el caso que dos sucesiones tuvieran un elemento común en el cual las sucesiones coincidirían por completo; esto ocurre siempre y sólo cuando se consideran dos soluciones relacionadas entre sí por una transformación (19). Se realiza $c_0 = u_0$, $c_1 = u_1$ para las soluciones que pasan por el origen, distintas de la parábola (16).

Los términos de las sucesiones (78) son los coeficientes de cúbicas del haz (23) entre las cuales oscila la solución considerada (y sus transformadas por (19)) viniendo alternativa y sucesivamente en contacto con ellas. Dichas cúbicas determinan por lo tanto en el haz (23) sectores decrecientes, cada uno conteniendo todos los siguientes y tendiendo a la cúbica (16), cuyas cúbicas están cortadas por la solución considerada un número de veces creciente en dos unidades al pasar de un sector al siguiente.

24. - Es interesante estudiar la distribución de los sucesivos puntos de intersección de una solución con la cúbica (16); los llamaremos $P_1, P_2, \dots$ según el orden de los x crecientes; en

(9) En efecto a la solución considerada corresponde en el plano uw una curva, solución de la ecuación (35), que corta a la recta que representa la cúbica por P en un punto cuya ordenada w tiende a ∞ sea positivamente, sea negativamente. La paradoja aparente en el hecho de que, al crecer la pendiente en el punto P , sea positivamente, sea negativamente, la solución de (1) llegue en todos los casos a alcanzar parábolas de coeficiente c tendiente a 0, se explica por que la misma tiende entonces a replegarse en dos ramas infinitamente próximas, descendiente y ascendiente (cfr. n. 24).

el plano uw ellos tienen por correspondientes los puntos de intersección de la correspondiente solución de (35) con la recta

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

indicaremos estos otros puntos con $Q_1, Q_2, \dots$. En todos los casos Q_1 tiene la ordenada w negativa y Q_2 positiva y, al variar la solución considerada, estas dos ordenadas tienden conjuntamente en valor absoluto, al infinito. Por contrario las ordenadas de los puntos siguientes $Q_3, Q_4, \dots$ quedan acotadas por las que corresponden a los puntos de análoga definición para la solución excepcional que viene del punto al infinito $w : u = -1/2$.

Las abscisas y ordenadas de los puntos P_i dependen de las coordenadas de los correspondientes puntos Q_i por medio de las relaciones (36); indicando con los mismos índices i los valores relativos a estos puntos se tiene luego en particular

$$x_i : x_{i-1} = e^{v_i - v_{i-1}}$$

$$v_i - v_{i-1} = \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} \frac{du}{w}. \quad (79)$$

Las observaciones que anteceden nos permiten prever que esta integral (79) y por lo tanto la razón $x_i : x_{i-1}$ tendrá acotaciones por defecto y por exceso para los valores de $i > 2$; vamos a mostrar que, por contrario, para $i=2$, el valor de esta integral se puede aproximar como se quiere a 0.

Notemos ante todo que para el cálculo de (79) será cómodo considerar por separado los dos tramos del arco $Q_{i-1} Q_i$ en los cuales w es respectivamente negativo y positivo; observando que a lo largo del primero u va decreciendo ($du < 0$) y a lo largo del segundo u va creciendo ($du > 0$), sigue que las dos integrales parciales son ambas positivas. Llamando, para fijar las ideas, Q' al punto $w=0$ sobre el arco $Q_1 Q_2$, podremos luego escribir

$$v_2 - v_1 = \int_{Q_1}^{Q'} \frac{du}{w} + \int_{Q'}^{Q_2} \frac{du}{w} \quad (80)$$

y calcular por separado las dos integrales del segundo miembro, considerando únicamente valores absolutos.

Sea por lo tanto de evaluar un extremo inferior para la primera integral; consideremos una solución de la ecuación (35) determinada por la condición de pasar por el punto Q''

$$u = \frac{1}{k^2}, \quad w = -k \quad (k > 0)$$

donde k es un parámetro del cual entendemos disponer todavía; tenemos

$$\int_{Q_1}^{Q'} \frac{du}{w} = \left(\int_{Q_1}^{Q''} + \int_{Q''}^{Q'} \right) \frac{du}{w};$$

eligiendo u como variable y teniendo en cuenta que sobre el arco $Q_1 Q''$ es $|w| > k$, resulta

$$\int_{Q_1}^{Q''} \frac{du}{w} < \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} du = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{k^2}}{k} < \frac{2}{k\sqrt{3}};$$

para calcular el segundo término, observemos primero que sobre el arco $Q'' Q'$ es siempre

$$u \leq \frac{1}{k^2}, \quad |w| \leq k, \quad |uw| \leq \frac{1}{k};$$

se puede elegir k tan grande que $|uw|$ sea, en todo el intervalo de integración, tan pequeño como se quiera. Suponiendo $\frac{1}{k} < \varepsilon$, la ecuación diferencial (35) da

$$\left| \frac{du}{w} \right| < \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \varepsilon} |u dw| < h |u dw|$$

donde h es un número > 1 , que puede suponerse tan próximo a

1 como se quiere con tomar ε suficientemente pequeño; obtenemos así

$$\int_{q''}^{q'} \frac{du}{w} < h \int_0^k u dw < h \cdot \frac{1}{k^2} \cdot k = \frac{h}{k}.$$

Concluimos finalmente

$$\int_{q_1}^{q'} \frac{du}{w} < \frac{1}{k} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + h \right)$$

Idéntica limitación se obtiene para la segunda integral en el segundo miembro de (80); se nota además que el parámetro k tiende a ∞ conjuntamente para las dos integrales; luego finalmente, como se había afirmado,

$$\liminf. v_2 - v_1 = 0, \quad \liminf. x_2 : x_1 = 1.$$

Esta conclusión coincide confirmándola, con la observación final de la nota (9) al n. 23. Ella nos dice en efecto que al crecer suficientemente en valor absoluto la pendiente de la solución en el primer punto en que ella corta a la solución singular (16), el segundo punto de intersección podrá resultar tan próximo como se quiera a este primero, aunque la pendiente resultará en el mismo de signo contrario (positiva) y muy grande.

25. - Para estudiar ahora la distribución de los puntos P_i , con $i > 2$, será conveniente referirnos a la ecuación (26), que escribiremos

$$\frac{d^2u}{dv^2} + 2 \frac{du}{dv} + \frac{\frac{3}{4}u^2 - 1}{u} = 0;$$

poniendo

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} + z \quad \left(z > -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \quad (81)$$

ella se escribe

$$\frac{d^2z}{dv^2} + 2 \frac{dz}{dv} + \frac{3}{2} z = \frac{3}{4} \frac{z^2}{\frac{2}{v^3} + z}, \quad (82)$$

correspondiendo los puntos P_i a $z=0$. Si por un momento suponemos conocida una determinada solución

$$z = z(v)$$

y sustituimos en el segundo miembro, obtenemos una cierta función positiva $f(v)$ y la función $z(v)$ realizará la ecuación

$$\frac{d^2z}{dv^2} + 2 \frac{dz}{dv} + \frac{3}{2} z = f(v) \quad (83)$$

de la cual podemos expresar la solución general en modo conocido resolviendo antes la ecuación homogénea

$$\frac{d^2z}{dv^2} + 2 \frac{dz}{dv} + \frac{3}{2} z = 0;$$

suponiendo que para $v=v_0$ sea

$$z(v_0) = 0, \quad z'(v_0) = \gamma,$$

obtendremos para z la expresión

$$z = \gamma \sqrt{2} e^{v_0 - v} \operatorname{sen} \frac{v - v_0}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \int_{v_0}^v f(t) e^{t - v} \operatorname{sen} \frac{v - t}{\sqrt{2}} dt. \quad (84)$$

Se nota en seguida que el primer término del segundo miembro se anula para $v=v_0$, luego, para v creciente, una segunda vez para $v=v_0 + \pi \sqrt{2}$ manteniéndose el signo de γ en todo el intervalo

$$v_0 < v < v_0 + \pi \sqrt{2} \quad (85)$$

y cambiando luego de signo. En cuanto al segundo término ello es siempre positivo y creciente en este mismo intervalo. Además en la primera mitad de dicho intervalo, esto es por

$$v_0 < v < v_0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad (86)$$

el factor

$$\text{sen } \frac{v-t}{\sqrt{2}}$$

es decreciente; se puede luego, en el intervalo (86), aplicar el segundo teorema de la media poniendo

$$\int_{v_0}^v f(t) e^{t-v} \text{sen } \frac{v-t}{\sqrt{2}} dt = \text{sen } \frac{v-v_0}{\sqrt{2}} \int_{v_0}^{\xi} f(t) e^{t-v} dt$$

donde

$$v_0 < \xi < v.$$

Si v y luego ξ es bastante próximo a v_0 la integral en el segundo miembro se podrá suponer menor, en valor absoluto, que γe^{v_0-v} .

Resulta por tanto que la expresión z , nula para $v=v_0$, se mantiene del mismo signo de γ para los valores de v bastante próximos a v_0 , pero llega siempre al segundo extremo del intervalo (85) con signo positivo. En caso de ser $\gamma > 0$, ella se mantiene siempre positiva; mientras en caso de ser $\gamma < 0$ ella debe anularse en un punto interior al intervalo (85).

Aplicando a γ el índice i por cuanto se supone que $v=v_0$, $z=0$ corresponda al punto P_i , recordemos ahora que será

$$\gamma_i = \left(\frac{du}{dv} \right)_i = w_i \quad (87)$$

y por lo tanto, según las anteriores convenciones $\gamma_i < 0$, o $\gamma_i > 0$ según sea i impar o bien par. Obtenemos luego como primera conclusión: la razón $x_{i+1} : x_i$ de las abscisas de dos puntos sucesivos de intersección de una solución cualquiera con la cúbica (16) es $< e^{\pi/\sqrt{2}}$ si el índice i es impar, $> e^{\pi/\sqrt{2}}$ si el índice i es par.

Más precisamente, en ambos casos,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{\pi \sqrt{2}}; \quad (88)$$

en efecto, la función

$$\frac{z^2}{\frac{2}{\sqrt{3}} + z},$$

nula para $z=0$, es creciente con $|z|$ mientras $z > 0$ o bien $0 > z > -\frac{2}{\sqrt{3}}$; entre los puntos P_i, P_{i+1} , ella alcanza luego su máximo valor cuando $w=0$; llamando $\bar{z}_i$ el valor correspondiente de $|z|$ hemos observado que

$$\bar{z}_i < \frac{|w_i|}{2}.$$

Por tanto, para todos los valores de z , mientras el punto corriente pasa de P_i a P_{i+1} ,

$$f(v) = \frac{3}{4 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + z \right)} \cdot z^2 < c w_i^2$$

donde, para i suficientemente grande, se puede tomar c tan próximo como se quiere a $3\sqrt{3}/8$ y en cualquier caso

$$c \leq \frac{3}{4 \cdot 0,074} < 11.$$

Indicando con d un número tal que

$$0 < d < c \int_v^v e^{t-v} \operatorname{sen} \frac{t-v}{\sqrt{2}} dt < c (1 + e^{-\pi \sqrt{2}}),$$

la fórmula (84) puede luego escribirse

$$\frac{z}{\gamma} = \frac{z}{w_i} = \sqrt{2} e^{v_0 - v} \operatorname{sen} \frac{v - h_0}{\sqrt{2}} + dw_i$$

y, a causa de $\lim w_i = 0$, el primer valor de $v > v_0$ por el cual $z: w_i = 0$ tiende a $v_0 + \pi\sqrt{2}$ por $i \rightarrow \infty$.

Es importante poner de relieve el hecho que en el teorema demostrado aparece la relación $x_{i+1}:x_i$ y no las abscisas x_{i+1} y x_i por separado; esta relación es invariante cuando a la solución considerada se aplica la transformación (19); esto podía ser previsto por el hecho que por (19) la cúbica (16) se transforma en sí misma; pero la observación demuestra que la propiedad encontrada pertenece en verdad al par de variables u, w , ligadas por la ecuación diferencial de primer orden (35) aunque haya sido conveniente referirse a la ecuación (26) equivalente a (1).

26. - Consideremos ahora el comportamiento relativo de dos soluciones cualesquiera que indicaremos con $\gamma'(x)$ e $\gamma''(x)$; ellas determinan sobre la solución singular (16) dos sucesiones de puntos análogos a los P_i , que representaremos respectivamente con

$$\begin{array}{cccc} P'_1 & P'_2 & P'_3 & \dots \\ P''_1 & P''_2 & P''_3 & \dots \end{array} \quad (89)$$

tendiendo ambas hacia el infinito. Igualmente distinguiremos con uno y dos acentos todas las magnitudes que se refieren respectivamente a las dos soluciones.

Supongamos en primer lugar que dos puntos P'_i, P''_j de las dos sucesiones coincidan; si los índices tienen distinta paridad, sea, para fijar las ideas, i par; será

$$\gamma'_i > 0 > \gamma''_j,$$

$$\frac{x'_{i+1}}{x'_i} > \pi\sqrt{2} > \frac{x''_{j+1}}{x''_j} = \frac{x''_{j+1}}{x'_i};$$

luego

$$x'_{i+1} > x''_{j+1}.$$

Si los índices tienen la misma paridad, sea $i < j$; será

$$|\gamma'_i| > |\gamma''_j|;$$

si $i = j$ podrá suponerse la misma desigualdad, pues no es posible la igualdad de los γ que tendría por consecuencia la coincidencia de las dos soluciones; en ambos casos la razón $x''_{j+1} : x''_j$ será más próxima a $\pi\sqrt{2}$ que la $x'_{i+1} : x'_i$. Se sigue que en todos los casos la desigualdad $\gamma'_i > \gamma''_j$ tiene por consecuencia $x'_{i+1} > x''_{j+1}$: *pares de puntos sucesivos de las dos sucesiones no pueden coincidir*; en otros términos: *una solución no singular de la ecuación (1) está determinada por dos puntos de intersección sucesivos cualesquiera de ella con la solución singular. Se encuentran necesariamente en esta condición de puntos de intersección sucesivos dos puntos de la solución singular cuyas abscisas tuvieren razón $< \pi\sqrt{2}$ (1). Por dos puntos de la solución singular cuyas abscisas tengan entre sí exactamente la razón $\pi\sqrt{2}$ no pasa otra solución de la ecuación.*

En cada una de las sucesiones (89) existen pares de puntos sucesivos entre los cuales caen puntos de la otra sucesión (siempre en número finito); se puede afirmar más que, para valores suficientemente elevados de los índices, tres puntos sucesivos determinan por lo menos uno de esos pares y el número de puntos de la otra sucesión comprendidos entre este par no pasa de dos.

Sean P'_i, P'_{i+1} dos puntos de la primera sucesión entre los cuales esté comprendido el punto P''_{j+1} . Consideremos también el punto P''_{j-1} . Los pares $P'_i P'_{i+1}, P''_{j-1} P''_j$ evidentemente se separan; pueden suponerse dos casos principales:

a) Los índices i y $j-1$ tienen la misma paridad; los arcos $P'_i P'_{i+1}, P''_{j-1} P''_j$ de las dos sucesiones consideradas quedan del mismo lado de la solución singular; ellos deben por lo tanto cortarse.

b) Los índices i y j tienen la misma paridad; si entonces el punto P''_{j+1} no es interior al intervalo $P'_i P'_{i+1}$ se realizan para los arcos $P'_i P'_{i+1}, P''_j P''_{j+1}$ las condiciones mismas realizadas

(1) Este límite es ciertamente inferior al valor máximo para el cual la proposición es válida; pero la determinación de uno más elevado implicaría un estudio más detallado.

en el caso a) por $P''_{j-1} P''_j$ y $P'_i P'_{i+1}$. Concluimos luego todavía que los dos arcos se cortan.

c) Los índices i y j tienen la misma paridad y el intervalo $P''_j P''_{j+1}$ es interior a $P'_i P'_{i+1}$. Será entonces

$$\gamma'_i = \omega'_i > \gamma''_j = \omega''_j.$$

Si i y j son impares (γ'_i, γ''_j negativos) será $|\gamma'_i| < |\gamma''_j|$; los arcos $P'_i P'_{i+1}$, $P''_j P''_{j+1}$ de las dos soluciones corren luego respectivamente en los espacios comprendidos entre la cúbica (16) y dos cúbicas del haz (23) de las cuales la primera es más próxima a la (16) que la segunda. El segundo arco corta luego al primero en dos puntos ⁽¹⁾.

Si i y j son pares (γ'_i, γ''_j positivos), bastará considerar los arcos $P'_{i+1} P'_{i+2}$, $P''_{j+1} P''_{j+2}$; si P''_{j+2} está comprendido entre P'_{i+1} y P'_{i+2} , ellos estarán entre sí en las mismas relaciones encontradas en los casos a), b); si por contrario P'_{i+2} está comprendido entre P''_{j+1} , P''_{j+2} , se repiten las mismas condiciones que en el aparte anterior.

En todos los casos hemos determinado puntos comunes a las dos soluciones consideradas. Concluimos que *dos soluciones cualesquiera de la ecuación (1) en el primer cuadrante se intersecan infinitas veces en puntos de abscisas ilimitadamente crecientes* ⁽²⁾.

27. - Resumimos los resultados de nuestro análisis en el modo siguiente:

Las soluciones de la ecuación (1) pueden distinguirse en dos

⁽¹⁾ Un pequeño croquis que el lector quiera hacer de la posición relativa de las líneas consideradas puede ayudarle en la intuición del texto.

⁽²⁾ Debe notar el lector que este continuo entrecruzarse de las soluciones de nuestra ecuación mientras ellas se alejan hacia el infinito ocurre sin que en las mismas se produzca inflexión ninguna; todo al contrario ellas se encorvan continuamente todas en la misma dirección, solo alternándose entre ellas la mayor y menor rapidez de este encorvamiento.

El hecho que la razón de las abscisas de los puntos sucesivos de intersección tiende a $\pi\sqrt{2}$ al tender esas abscisas hacia ∞ , y que por lo tanto la distancia de esos puntos sucesivos tiende ella misma a ∞ , explica las dificultades de intuición y de ofrecer un dibujo que represente en modo fiel este comportamiento.

clases, según tengan puntos en el primer cuadrante o en el 4º; las dos clases tienen idénticas propiedades, salvo el cambio de signo de la función por los mismos valores de la variable x .

Considerando luego solamente soluciones caracterizadas por puntos en el primer cuadrante, una cualquiera de ellas corta infinitas veces la cúbica

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2} \quad (16)$$

en puntos de abscisas crecientes ilimitadamente; la pendiente de la solución, al tender $x \rightarrow \infty$, se aproxima ilimitadamente a la pendiente de (16) en los puntos de igual abscisa.

Para valores decrecientes de x la solución llega siempre a cortar al eje y en un punto de ordenada positiva o nula. En el primer caso la solución entra en el segundo cuadrante, presentando siempre en este punto una inflexión, y alcanzando después siempre para un valor finito (negativo) de la abscisa, el valor 0, con derivada ∞ . En el segundo caso la solución pasa por el punto $(0,0)$ al tercer cuadrante, en el cual se prolonga, por valores negativos de x , sin cambiar la variación monótona de la curvatura, hasta alcanzar nuevamente el valor 0 en un punto de abscisa finita (negativa) con derivada $-\infty$.

Una vez alcanzado dicho punto ($x < 0$, $y = 0$) la solución no tiene prolongación determinada, sino que empalma con continuidad, con infinitas prolongaciones posibles, pasando del segundo cuadrante en el tercero o del tercero en el segundo. Estas prolongaciones son siempre representadas por arcos de curvas con la concavidad dirigida hacia el eje x , alcanzando nuevamente el eje x en un punto que, en razón de la aludida indeterminación de la prolongación, puede hacerse caer en un punto cualquiera del semieje de las x negativas. En este punto se repiten luego los mismos fenómenos.

Dos soluciones cualesquiera se intersecan infinitas veces en el primer cuadrante e igualmente en el segundo en cuanto se considere oportunamente su prolongación por valores de $x \rightarrow -\infty$, pero no pueden tener más que un punto común entre dos puntos sobre el eje x .

Por dos puntos asignados de la misma parte del eje x pasan

en general dos o más soluciones con tangentes divergentes⁽¹⁾; deben exceptuarse los pares de puntos de la cúbica (16) cuyas abscisas tienen por razón $\pi\sqrt{2}$ (y probablemente los múltiplos enteros de $\pi\sqrt{2}$) por los cuales pasa únicamente esta cúbica.

ROSARIO — INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE LA FACULTAD DE C. M. DE LA
UNIVERSIDAD DEL LITORAL.

MONTEVIDEO — INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA DE LA FACULTAD
DE INGENIERÍA.

⁽¹⁾ Esta afirmación, que contradice aparentemente al hecho, que la teoría general parece hacer suponer (cfr. p. ej. PICARD, *Traité d'analyse*, Vol. 3, Ch. VIII), de que dos puntos determinan una solución, con tal que sean suficientemente próximos, se explica por el hecho que de las soluciones consideradas una sola se desarrolla, entre los dos puntos, en un entorno de ellos suficientemente pequeño para que se cumplan las hipótesis de la teoría.

RESULTADO DEL CONCURSO ENTRE SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL AÑO SEXTO (1946)

En aplicación de lo dispuesto en el art. 4º de la ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemática *Mathematicae Notae*, el director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta el 1º de julio de 1947, haciendo al señor Delegado Interventor las propuestas correspondientes, que fueron aprobadas (esp. 1348-1.47) en la forma siguiente:

1º Adjudicar al estudiante señor Carlos Krüger del 6º año de ingeniería el premio correspondiente al año 1946.

2º Declarar desierto el concurso entre solucionistas no pertenecientes a la Facultad.

3º Encargar al Director del Instituto la elección de uno o más libros de matemática o de física para entregarlos como premio al señor Carlos Krüger.

NOTAS SOBRE LA TEORIA MATEMATICA DE LOS CIRCUITOS LINEALES

I. UN METODO PARA LA SINTESIS DE IMPEDANCIAS ⁽¹⁾

POR

ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

I. — Brune ha dado, en su clásica tesis ⁽²⁾, un método general para realizar la síntesis de todo dipolo cuya impedancia $I(p)$ ($p = t + i\omega$) sea una función racional prefijada (con número finito de polos) de la frecuencia compleja p .

Es objeto de esta nota formular un teorema (Teorema 5) cuya aplicación permite efectuar la síntesis, por el método de Brune, de todo dipolo físico de cuya impedancia se conozca la resistencia $R(i\omega)$ (parte real de la impedancia $I(p)$ en el eje imaginario), o de la reactancia $S(i\omega)$ (parte imaginaria de la impedancia en el eje imaginario). Así se plantea en la práctica el problema de la síntesis; con el agregado de que $R(i\omega)$ o $S(i\omega)$ no vendrán dadas por una fórmula explícita, sino meramente en forma gráfica o numérica.

Nuestro método consiste esencialmente en obtener, a partir del dato ($R(i\omega)$ o $S(i\omega)$), una impedancia *racional* cuya parte real o imaginaria difiera en el eje imaginario tan poco como se quiere de la función de partida.

La impedancia así creada se sintetiza luego por el método de Brune.

⁽¹⁾ Comunicación presentada en la 6ª Reunión de la Asociación Física Argentina, realizada en el Observatorio Astronómico de Córdoba, el 22 de septiembre de 1946.

⁽²⁾ OTTO BRUNE, *Synthesis of a finite two-terminal network whose driving point impedance is a prescribed function of frequency*; Journal of Mathematics and Physics, vol. X (1931), pp. 190-236.

II. — La posibilidad de la aproximación uniforme de impedancias por medio de impedancias racionales, se basa en ciertos teoremas que para mayor claridad demostramos a continuación sin hacer referencia a su interpretación física, que dejamos para los párrafos siguientes.

Teorema I. — *Toda función $f(z)$, holomorfa y de parte real positiva en el interior del círculo unidad, y continua en $|z| \leq 1$ puede aproximarse uniformemente en el recinto completo por medio de polinomios de parte real positiva en $|z| < 1$.*

Demostración. — Observemos que los coeficientes de la serie de Taylor de $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad [1]$$

convergente en $|z| \leq 1$, vienen dados, para todo n , por la expresión

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{-in\vartheta} g(\vartheta) d\vartheta, \quad [2]$$

donde $g(\vartheta)$ es la parte real de $f(z)$ en el contorno. Esto es consecuencia inmediata de un conocido teorema de Herglotz⁽³⁾, y de la supuesta continuidad de $f(z)$ en la circunferencia.

Formemos las sumas Cesàro de orden n de la serie (1):

$$c_n(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{v=1}^n \frac{n+1-v}{n+1} c_v z^v. \quad [3]$$

Un clásico teorema de Fejér⁽⁴⁾ nos permite afirmar, en virtud de la admitida continuidad de $f(z)$ en el recinto completo,

(³) G. HERGLOTZ, *Ueber Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis*; *Berichte der Saechsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 63 (1911), pp. 501-511. Cfr. especialmente las fórmulas 54, 56 y 58.

(⁴) L. FEJÉR, *Fourier Reihe und Potenzreihe*; *Monatshefte fuer Mathematik und Physik*, XXVIII (1917), pág. 67.

que los polinomios (3) convergen uniformemente, para $z \leq 1$, hacia $f(z)$.

Pero hay más: los polinomios (3) tienen parte real positiva en $|z| < 1$. Esta propiedad de los polinomios (3), que es la clave de nuestro método de síntesis, es consecuencia de un teorema de Schur⁽⁵⁾. El teorema 1 queda pues demostrado.

Nota. En el caso de que $f(z)$ tome valores reales para z real, la función $g(z)$ será par; los coeficientes c_n serán pues todos reales, y vendrán dados por la expresión

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta. \quad [4]$$

Del teorema I se deduce con fáciles consideraciones, por medio del cambio de variable

$$z = \frac{1-p}{1+p} \quad [5], \quad p = \frac{1-z}{1+z} \quad [5']$$

$$w = -\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \quad [5''],$$

que transforma el círculo unidad en el semiplano de la derecha, el siguiente

Teorema II. — Toda función $F(p)$, holomorfa y de parte real positiva en el interior del semiplano de la derecha,

$$Rf(p) > 0 \text{ para } R(p) > 0 \quad [p = t + iw], \quad [6]$$

y cuya función límite $F(i\omega) = R(\omega) + iS(\omega)$ sea continua (incluso para $\omega = \infty$) puede aproximarse uniformemente en el semi-

(5) J. SCHUR, Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind; Journal fuer die reine und angewandte Mathematik, 148 (1918), p. 128. Véase también F. HAUSDORFF, Momentprobleme für ein endliches Intervall, Math. Zeitschrift (1923), pp. 247-248.

plano completo por medio de funciones racionales de parte real positiva en el interior. Las funciones de aproximación tienen la forma siguiente:

$$R_n(p) = \frac{c_0}{2} + \sum_{v=1}^n \frac{n+1-v}{n+1} a_v \left(\frac{1-p}{1+p} \right)^v \quad [7]$$

$$c_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\vartheta} R \left(-\operatorname{tg} \frac{2}{\vartheta} \right) d\vartheta. \quad [7']$$

Para el caso de que $F(p)$ sea real para p real, la función $R(i\omega)$ es par y los coeficientes, que son reales, tienen por expresión la siguiente (análoga a la (4)):

$$c_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} R \left(-\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \cos v\vartheta d\vartheta. \quad [8]$$

III. — El teorema anterior admite interpretación inmediata en términos de impedancias. Es sabido, en efecto⁽⁶⁾, que toda impedancia dipólica $I(p)$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el semiplano de la derecha, real para p real. En virtud de estas propiedades de las impedancias dipólicas, del teorema II se deduce el corolario siguiente, que enunciaremos como

Teorema III. — *Toda impedancia continua y acotada en el eje imaginario (incluso por $\omega = \infty$) puede aproximarse uniformemente en el semiplano completo por medio de impedancias racionales. Estas impedancias tienen la forma (7), y los coeficientes a_v vienen dados por la fórmula (8).*

IV. — En los problemas de la práctica, lo usual es que de la impedancia a sintetizar se conozca una sola de las componentes en el eje imaginario.

(6) Cfr. BRUNE, *loc. cit.*, pp. 194-197.

Supondremos en lo que sigue que el dato es la parte real $R(i\omega)$ (resistencia del dipolo). Consideraciones completamente similares se aplican al caso de que el dato sea la reactancia.

Para efectuar la síntesis, aplicaremos el teorema III, creando una impedancia racional cuya parte real en el eje imaginario difiera en valor absoluto de $R(\omega)$ tan poco como se quiera.

Ello plantea la cuestión de saber qué condiciones es menester imponer a nuestro dato $R(\omega)$ para que se cumplan las hipótesis del teorema III; es decir, para que $R(\omega)$ sea la parte real de una impedancia continua y acotada en todo el eje imaginario incluso en el infinito. Para ello no es suficiente postular la continuidad y acotación de $R(\omega)$; sí lo es en cambio, el admitir que $R(\omega)$ satisface, además, a una condición de Lipschitz, uniformemente para todo ω , según se deduce, por ejemplo, de un teorema de Titchmarsh⁽⁷⁾. Llegamos así al teorema siguiente, que es el principal resultado de esta nota.

Teorema IV. — Sea $R(\omega)$ una función par, no negativa, definida y continua en el intervalo $[-\infty, \infty]$, que satisfaga uniformemente a una condición de Lipschitz de orden $\alpha < 1$ en todo el intervalo; dado un ε arbitrario, existe un entero n tal que la impedancia racional

$$R_n(p) = \frac{c_0}{2} + \sum_{v=1}^n \frac{n+1-v}{n+1} c_v \left[\frac{1-p}{1+p} \right]^v \quad [9]$$

donde c_v tiene el valor

$$c_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos v\vartheta \cdot R\left(-\operatorname{tg} \frac{2}{\vartheta}\right) d\vartheta, \quad [10]$$

tiene en el eje imaginario una parte real que difiere en valor absoluto menos de ε de la función dada $R(\omega)$.

V. — Nuestro problema ha quedado, pues, reducido a sintetizar la impedancia (9); lo cual puede hacerse en todos los casos

(7) E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford, 1937, p. 145.

por el método de Brune, ya que se trata de una impedancia racional.

Cabe observar que las impedancias (9) tienen todos sus polos en el punto $p = -1$, lo cual facilita la aplicación del método de Brune.

Cabe también observar que la única labor requerida para poder escribir la fórmula a partir de $R(\infty)$ es el cálculo de un número suficiente de coeficientes c_n ; lo cual se logra sin mayor esfuerzo si se dispone de un analizador armónico.

Puede decirse, en resumen, que la fórmula (9) suministra un procedimiento sistemático y poco laborioso, para sintetizar por el método de Brune un dipolo cualquiera de resistencia o reactancia prefijadas.

En el segundo caso, es decir, si el dato es la rectancia $S(\infty)$, la impedancia de aproximación tiene la misma forma que la indicada en (9), con la única diferencia de que los coeficientes c_v vendrán dados en el presente caso, para todo v , por la fórmula

$$c_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} S \left[-\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right] \operatorname{sen} v\vartheta \, d\vartheta.$$

BUENOS AIRES, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

137. — Determinar la solución en números enteros y positivos de la ecuación indeterminada

$$5x + 7y - 3z = 0,$$

en la cual z tiene el valor mínimo.

138. — Demostrar que cualquiera sea el número entero positivo impar N , la sucesión representada por la fórmula

$$\frac{N^{2^n} + 1}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

está constituida por números enteros impares y dos a dos primos entre sí.

Lo mismo para la sucesión

$$N^{2^n} + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

si N es par.

139. — Un par de rectas formando ángulo constante se desplaza de manera que una de las rectas se mantiene tangente a una parábola dada y el punto común corre sobre una tangente fija de ésta. Determinar la envolvente de las posiciones sucesivas de la otra recta.

140. — Determinar el lugar geométrico de los puntos de contacto de los círculos de un haz, con las rectas de otro haz, dados.

El mismo problema para los puntos de contacto de los círculos de dos haces dados.

Casos especiales.

141. — Es sabido que se llama cuadrángulo completo al sistema de 4 puntos del plano (de los cuales nunca tres son alineados) y de las 6 rectas que los unen (lados del cuadrángulo).

Se ve en seguida que, conociendo los valores de cuatro ángulos independientes formados por cinco de estas rectas, quedan determinados todos los 10 ángulos que ellas forman entre sí. Quedan también determinados los ángulos del lado restante con las precedentes; se pide una fórmula para calcularlos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

N.º 112 — Demostrar la siguiente fórmula para la diferencia de un producto

$$\Delta^n uv = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \Delta^{n-\alpha} u \Delta^{n-\beta} v$$

SOLUCIÓN. — La diferencia primera del producto uv

$$\Delta uv = u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v$$

puede representarse simbólicamente introduciendo un símbolo Δ_0 para significar «multiplicación por 1» y entendiendo que cuando un par de símbolos como $\Delta_0 \Delta$, $\Delta \Delta_0$, $\Delta \Delta$ se antepone a un producto binario, ellos se aplican a los factores ordenadamente; así la fórmula se escribe:

$$\Delta uv = (\Delta_0 \Delta + \Delta \Delta_0 + \Delta \Delta) uv.$$

Puede entonces aplicarse simbólicamente la fórmula de Leibnitz para la potencia de un polinomio:

$$\begin{aligned} \Delta^n uv &= (\Delta_0 \Delta + \Delta \Delta_0 + \Delta \Delta)^n uv \\ &= \left[\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} (\Delta_0 \Delta)^\alpha (\Delta \Delta_0)^\beta (\Delta \Delta)^\gamma \right] uv \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \Delta^{\beta+\gamma} \cdot \Delta^{\alpha+\gamma} \cdot uv \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!(n-\alpha-\beta)!} \Delta^{n-\alpha} u \cdot \Delta^{n-\beta} v. \end{aligned}$$

El procedimiento y la fórmula correspondiente se puede apli-

car para calcular las diferencias sucesivas de un producto de un número cualquiera de factores, con el inconveniente de crecer rápidamente el número de términos del polinomio simbólico al cual se aplica la fórmula de Leibnitz. Si el número de factores es m , el número de estos términos será en efecto $2^m - 1$; para $m=3$ habrá que desarrollar

$$(\Delta_0 \Delta_0 \Delta + \Delta_0 \Delta \Delta_0 + \Delta \Delta_0 \Delta_0 + \Delta_0 \Delta \Delta + \Delta \Delta_0 \Delta + \Delta \Delta \Delta_0 + \Delta \Delta \Delta)^n uvw \\ = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_7!} \Delta^{\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7} u \cdot \Delta^{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7} v \cdot \Delta^{\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7} w.$$

N.º 113 — Representar la función

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \left(1 - \frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \right)$$

y demostrar:

- Que los máximos y mínimos están alineados sobre una recta r
- Que esta recta corta además a la curva en puntos de abscisas x_n doble de los valores que anulan a la función.
- Que el trapezoide limitado por la ordenada correspondiente a x_n y por la ordenada máxima más próxima, está dividido por r en dos figuras cuyas áreas tienen diferencia constante e igual a 1.

SOLUCIÓN. — Desarrollando cálculos la función propuesta se escribe

$$y = \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x \cos 2x}{2 \operatorname{sen}^2 x}. \quad (1)$$

Será luego $y=0$, siempre que sea

$$\operatorname{sen} 2x - 2x \cos 2x = 0 \quad (2)$$

sin anularse el denominador; se ve en seguida que $\operatorname{sen} x=0$ implica $\operatorname{sen} 2x=0$, $\cos 2x=1$; por lo tanto esta condición es contradictoria con (2) salvo el caso de $x=0$. En este caso se calcula el valor de (1) por la regla de L'Hospital y se encuentra

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0.$$

Se concluye que será $y=0$ siempre y solamente cuando se realiza (2), es decir

$$2x = \operatorname{tg} 2x. \quad (3)$$

De lo dicho se ve también que será $y=\pm\infty$ para los valores de x de la forma

$$x = k\pi \quad (k \text{ entero } \neq 0) \quad (4)$$

y que el signo $\pm$ será entonces siempre el opuesto de x .

Si se hace variar x entre dos valores sucesivos satisfaciendo a (4), $2x$ recorre todo un intervalo de anchura 2π ; luego $\operatorname{tg} 2x$ recorre dos veces toda la recta $-\infty, +\infty$; se sigue que también la igualdad (3) será realizada dos veces y precisamente, si $x > 0$, una primera vez en el intervalo $k\pi - k\pi + \frac{\pi}{4}$ y una segunda en el intervalo $k\pi + \frac{\pi}{2} - k\pi + \frac{3\pi}{4}$. Si al contrario $x < 0$, los valores de x estarán en los intervalos $k\pi + \frac{\pi}{4} - k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi + \frac{3\pi}{4} - (k+1)\pi$.

Observemos además que

$$y' = \frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^3 x} \cos x$$

y se sabe que es $2x - \operatorname{sen} 2x = 0$ únicamente para $x=0$.

En este caso

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y' &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{3 \operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{4}{3}; \end{aligned}$$

resulta que será $y'=0$ únicamente para $\cos x=0$, es decir

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Se infiere de todas estas observaciones que la curva represen-

tativa de la función y se compone de una sucesión infinita de ramas infinitas; y precisamente:

1º Una rama que une a los puntos $(-\pi, +\infty)$, $(\pi, -\infty)$ pasando por el origen con pendiente $-\frac{4}{3}$.

2º A la derecha de ésta una infinidad de ramas que unen los pares de puntos sucesivos de la forma

$$(k\pi, -\infty), ((k+1)\pi, -\infty) \quad (k > 0)$$

volviendo la convexidad hacia las y positivas; cada una de estas ramas corta dos veces el eje x en puntos definidos por la igualdad (4), alcanzando entre estos dos puntos un máximo para

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

3º A la izquierda de la primera rama otra infinidad de ramas que unen los puntos de la forma

$$(k\pi, +\infty), ((k-1)\pi, +\infty) \quad (k < 0)$$

con la convexidad hacia las y negativas y alcanzando mínimos negativos para los valores de x de la forma $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Debe notarse también que la función y es impar; por lo tanto la curva que la representa es simétrica respecto del origen de coordenadas. Los dos grupos de ramas 2º y 3º son luego simétricos y simétrica en sí la rama 1º; el origen de coordenadas es por tanto para ella punto de inflexión.

Poniendo en (1) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ resulta

$$y = x,$$

comprobándose así la afirmación a) del problema.

Poniendo, por otra parte, en (1) $y = x$ se obtiene

$$\operatorname{sen} 2x = 2x(\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x) = 2x \cos^2 x$$

es decir, por $\cos x \neq 0$,

$$x = \operatorname{tg} x, \quad (6)$$

resultando así demostrada la afirmación b).

Por fin calculemos la integral

$$\int y \, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} - \int \frac{x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x} + \int 2x \, dx;$$

integrando por partes la segunda integral del segundo miembro, donde se ponga

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

se obtiene

$$\int \frac{x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -x \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x};$$

luego

$$\int y \, dx = x^2 + \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

El área de la curva entre dos ordenadas x_1 y x_2 se compone luego de dos partes, la primera de las cuales es el doble del área del trapecio contenido entre las mismas ordenadas y la recta $y=x$, la otra es el incremento entre las mismas ordenadas de la razón $x : \operatorname{tg} x$. Podemos enunciar esta observación con las palabras de la tercera afirmación del problema: *si del área de la curva entre dos ordenadas se resta el arco del trapecio contenido entre las mismas ordenadas y la recta $y=x$, queda un número que todavía sobrepasa (positivamente o negativamente) a este mismo trapecio en una cantidad igual al incremento de la razón $x : \operatorname{tg} x$.*

Supongamos ahora que las dos ordenadas elegidas corresponden a $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x_1 = \infty$ (cfr. (5)) y a $x_2 = \operatorname{tg} x_2$ (cfr. (6)); la cantidad aludida resulta 1. La afirmación c) está demostrada.

Esta resolución ha sido redactada sobre algunos apuntes enviados por el autor del problema, Prof. Ing. José Babini. Otra solución equivalente fué enviada por el señor ROBERTO WATKINS, Buenos Aires.

N.º 114 — Demostrar que todos los rombos inscriptos a una elipse tienen sus lados tangentes a un mismo círculo.

SOLUCIÓN. — Sea la ecuación de la elipse, referida a un sistema de coordenadas cartesianas,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (1)$$

Tracemos por un punto genérico (xy) de la curva una recta por el origen que tomamos como una diagonal del rombo, luego trazando por el origen la recta perpendicular a la anterior que corta a la elipse en el punto (x_1, y_1) ésta será la otra diagonal del rombo inscripto. Por la condición de ortogonalidad debe ser

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{y}{x}$$

y por pertenecer el punto (x_1, y_1) a la elipse

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2;$$

obtenemos así los valores de x_1 e y_1 en función de x e y

$$x_1 = \frac{-yab}{\sqrt{b^2y^2 + a^2x^2}}; \quad y_1 = \frac{xab}{\sqrt{b^2y^2 + a^2x^2}}.$$

La recta que pasa por los puntos (xy) y (x_1y_1) tiene por ecuación

$$Y - y = \frac{y\sqrt{b^2y^2 + a^2x^2} - abx}{x\sqrt{b^2y^2 + a^2x^2} + aby} (X - x)$$

o

$$X(abx - y\sqrt{b^2y^2 + a^2x^2}) + Y(x\sqrt{b^2y^2 + a^2x^2} + aby) - ab(x^2 + y^2) = 0.$$

Por una fórmula conocida la distancia del origen a esta recta está dada por

$$d = \frac{ab(x^2 + y^2)}{\sqrt{(a^2b^2 + b^2y^2 + a^2x^2)(x^2 + y^2)}};$$

sustituyendo en el denominador a a^2b^2 el valor dado por (1) resulta

$$d = \frac{ab(x^2+y^2)}{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (2)$$

Esta distancia es por tanto independiente del punto de partida xy e igual para todos los rombos inscriptos en la elipse. Queda así demostrado que los lados de estos rombos son todos tangentes al mismo círculo. La expresión (2) del radio de este círculo es evidentemente la altura del triángulo rectángulo cuyos catetos son los semiejes de la elipse.

Una solución sustancialmente equivalente fué enviada por el Sr. Roberto Watkins — Buenos Aires.

N.º 117. — Hallar un polinomio de tercer grado que para los valores 1 y 2 de la variable tome el valor 1, mientras su derivada toma los valores 0 y 1 respectivamente.

SOLUCIÓN. — Sea el polinomio

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Las condiciones del enunciado son

$$a + b + c + d = 1$$

$$8a + 4b + 2c + d = 1$$

$$3a + 2b + c = 0$$

$$12a + 4b + c = 1.$$

Resolviendo este sistema por ejemplo por la regla de Cramer, se obtiene

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 5, \quad d = -1.$$

El polinomio buscado es, por tanto,

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1.$$

Una solución de este problema ha sido enviada por el Sr. DESIDERIO LÓPEZ, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N.º 120 — Un segmento de longitud constante a se desplaza sobre una recta fija tangente a una circunferencia de radio r ; en los extremos del segmento hay dos rectas que se mantienen constantemente tangentes a la misma circunferencia; se desea el lugar geométrico del punto de intersección de estas tangentes y la velocidad de este punto cuando el segmento a se mueve con velocidad constante. Discutir el resultado indicando para los distintos valores de la razón a/r los detalles de forma y posición de la curva.

Sea $x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación de la circunferencia y sea $y = -r$ la tangente fija sobre la cual se desplaza el segmento a . Llamando (XY) al punto corriente sobre la curva de la cual pregunta el problema, la ecuación conjunta de las dos tangentes de (XY) al círculo es:

$$(Xx + Yy - r^2)^2 - (X^2 + Y^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$

es decir:

$$x^2(Y^2 - r^2) + y^2(X^2 - r^2) - 2xyXY + 2r^2(Xx + Yy) - r^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

Este par de tangentes corta a la recta $y = -r$ en puntos cuyas abscisas serán las raíces de la ecuación

$$x^2(Y^2 - r^2) + 2rxX(Y + r) - r^2(r + Y)^2 = 0$$

o

$$x^2(Y - r) + 2rxX - r^2(r + Y) = 0,$$

cuyas soluciones, para cumplir con el enunciado, deberán tener diferencia constante e igual a a con lo cual será

$$4r^2[X^2 + Y^2 - r^2] = a^2(Y - r)^2$$

o

$$Y^2(a^2 - 4r^2) - 2a^2rY - 4r^2X^2 + r^2(a^2 + 4r^2) = 0.$$

Concluimos luego que el lugar buscado es una cónica.

Eligiendo el radio r como unidad de longitud esta ecuación se escribe más simplemente

$$4X^2 - (a^2 - 4)Y^2 + 2a^2Y - (a^2 + 4) = 0 \quad (2)$$

Es fácil ver ahora que si en ésta suponemos $a > 2$; $a = 2$ o $a < 2$ la recta del infinito será secante, tangente o externa a la curva, con lo cual ésta será respectivamente hipérbola, parábola o elipse.

Para hallar la velocidad con la cual el punto recorre la curva tomemos la ecuación (1) en la cual se ha hecho $r = 1$

$$(x^2 - 1)Y + 2xX - (x^2 + 1) = 0; \quad (1')$$

además, por el enunciado, podremos suponer en menos de una constante multiplicativa que el tiempo t sea representado por la misma x y nuestro problema se reducirá a tomar en (2) y (1') la derivada respecto a x

$$4X \frac{dX}{dx} - [(a^2 - 4)Y + a^2] \frac{dY}{dx} = 0$$

$$2x \frac{dX}{dx} + (x^2 - 1) \frac{dY}{dy} = 2(x - Y - X).$$

Por cuanto el cálculo de la velocidad es bastante largo nos limitaremos a indicar que para obtener el valor deseado bastará sustituir en la expresión general de la velocidad

$$V = \sqrt{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}$$

los valores de $\frac{dY}{dx}$ y $\frac{dX}{dx}$ que se obtienen del sistema de ecuaciones anteriores y de las (1') y (2).

Esta solución es debida al Sr. Adolfo Daghetto alumno de la Facultad.

Nota de la R. — El problema propuesto tiene una generalización proyectiva que permite ver la solución bajo un aspecto más sintético e intuitivo.

Notamos en efecto que mientras el segmento a se desplaza sobre la tangente fija a la circunferencia, sus extremos recorren

puntuales iguales, luego proyectivas. Se presenta por tanto natural la generalización siguiente:

Determinar el lugar geométrico de los puntos comunes a los pares de tangentes a una cónica dada F que cortan una tangente fija T de la misma en pares de puntos correspondientes por una proyectividad dada. Si, sin efectuar cálculos, pensamos solamente el problema en la forma de la geometría analítica, comprendemos que la ecuación de la curva buscada se obtendrá como resultado de una conveniente sucesión de eliminaciones entre ecuaciones lineales y cuadráticas; se obtendrá así una ecuación algebraica, de la cual hay que determinar el orden. Este no es más que el número de los puntos de intersección de la curva con una recta genérica del plano. La palabra *genérica* significa aquí que la recta no debe pasar por puntos especiales (singulares) de la curva y no debe ser tangente a ella; se sigue que puede luego ser elegida para este fin una genérica de las tangentes a la cónica dada, por cuanto entre tales tangentes no pueden en ningún caso encontrarse en dichas condiciones excepcionales más que un número finito.

Sea a la tangente a F así elegida y sea A su punto de intersección con la recta T ; según se considere A como perteneciente a la primera o a la segunda de las dos puntuales proyectivas sobrepuestas asignadas sobre T , le corresponderán dos puntos A' y A_1 , por cada uno de los cuales pasa una tangente a F distinta de T ; estas dos rectas encuentran a a en dos puntos, comunes a a y al lugar buscado. Se infiere que este lugar es de orden 2, es decir es una cónica. Podrían sin embargo los puntos A' y A_1 coincidir; ocurre este caso cualquiera que sea la tangente a , es decir, cualquiera que sea el punto A sobre T , solamente si la proyectividad dada es una involución; en este caso el lugar buscado será cortado por cualquier tangente a F en un único punto; es por lo tanto una recta (doble).

Además de este caso los puntos A' y A_1 pueden coincidir excepcionalmente cuando ellos coincidan con el punto A , unido en la proyectividad. En este caso la tangente a T por $A' = A_1 = A$ coincide con la a y no queda por tanto definido un punto de intersección de ella con dicha recta. Se infiere por lo tanto que además de la cónica, para constituir el lugar completo deberá agregársele un par de rectas, tangentes a la cónica F por los dos puntos unidos de la proyectividad. Estas rectas se reducen a

una si la proyectividad es parabólica, que es el caso del problema propuesto.

Notemos todavía que el punto común a dos tangentes distintas a la cónica F no puede estar sobre esta cónica; se deduce que los puntos de intersección de la cónica F con el lugar buscado deben coincidir con los puntos de contacto de F con las dos tangentes ahora consideradas. Por cuanto las dos cónicas deben tener 4 puntos comunes (reales o imaginarios, distintos o coincidentes), concluimos que *el lugar buscado es en general una cónica bitangente a la F en los puntos de contacto de ésta con las tangentes conducidas por los puntos unidos de la proyectividad; será cuadritangente (hiperosculadora) si la proyectividad es parabólica; se reduce a la recta (contada dos veces) que une a los susodichos puntos de contacto si la proyectividad es involutoria.*

Se puede discutir el problema también desde otro punto de vista. Si en lugar de considerar una tangente a F , para determinar sus puntos de intersección con el lugar buscado, se toma una recta genérica del plano, podemos razonar en el modo siguiente: sea m esta recta, P un punto de ella; desde P conducimos las tangentes a F , las que encuentran la recta T en dos puntos p_1, p_2 , que consideraremos como pertenecientes a la primera puntual de la proyectividad. Sobre la segunda puntual a estos puntos corresponderán dos puntos p'_1, p'_2 ; y conduciendo por ellos las tangentes a F , éstas encontrarán la recta m en dos puntos P'_1, P'_2 . El punto P será común a la recta m y al lugar buscado siempre y solamente cuando uno de los puntos P'_1, P'_2 coincide con P , es decir cuando P es punto unido de la correspondencia que la construcción indicada define sobre m . Se ha visto que al punto P , elegido arbitrariamente sobre m , corresponden dos puntos P'_1, P'_2 . Considerando la construcción en sentido inverso, se ve por simetría que a un punto P' corresponden dos P_1, P_2 , es decir que se trata de una correspondencia $(2, 2)$; el principio de correspondencia⁽¹⁾ afirma entonces que estos puntos unidos son en número de 4; dos de ellos son los puntos de intersección de m con las tangentes a T por los puntos unidos de la proyectividad; quedan luego 2 que constituyen la intersección de m con la parte propia del lugar buscado.

(¹) Cfr., por ej., Math. Notae, año IV, pp. 130-131.

Por fin vamos a considerar nuestro problema desde un punto de vista más propio de la geometría proyectiva clásica que resultará acaso más claro tomándolo en la forma dual: *en el haz de rectas que tiene por centro un punto O de una cónica dada γ está dada una proyectividad; se unen los puntos de intersección (distintos de O) de γ con los pares de rayos correspondientes en esta proyectividad; se desea conocer la envolvente de las rectas así determinadas.* En seguida se ve que la proyectividad entre las rectas del haz (O) determina una proyectividad entre puntos de la cónica γ ; *la envolvente de las rectas que unen puntos correspondientes en esta proyectividad es una cónica.* Por cuanto el teorema no se encuentra ordinariamente en los textos daremos de él una demostración:

Sean $ABC\dots, A'B'C'\dots$ puntos correspondientes para la proyectividad que ahora se supone dada sobre γ , y sea s el eje de la proyectividad, S el polo de s respecto γ . Las rectas $AB', A'B$ se cortan en un punto M de s y AA', BB' en un punto M' que pertenece a la polar de M ; esta polar es por lo tanto la recta SM' . Análogamente, considerando los pares de rectas $AC', A'C$ y AA', CC' que se cortan respectivamente en N, N' ; y así siguiendo para otros pares de puntos correspondientes. A raíz de la polaridad respecto γ la puntual $(MN\dots)$ y el haz $S(M'N'\dots)$ son entre sí proyectivos; por lo tanto *las rectas que unen puntos correspondientes $BB', CC', \dots$ en la proyectividad dada sobre γ cortan a una fija de ellas AA' en una puntual proyectiva a la puntual que sobre la recta s cortan las rectas proyectantes desde el punto fijo A a los puntos $B', C', \dots$.* La conclusión se mantiene evidentemente de cualquier modo se elija la recta AA' por dos puntos correspondientes en la proyectividad sobre γ ; por otra parte los haces de rectas que de distintos puntos de γ proyectan los puntos $B' C' \dots$ son proyectivos entre sí; inferimos pues que las rectas que unen puntos correspondientes en la proyectividad dada sobre γ cortan dos cualesquiera de ellas en dos puntuales en correspondencia proyectiva; *ellas envuelven una cónica.*

BIBLIOGRAFIA

J. F. RITT. *Theory of Functions*. Revised edition. King's Crown Press. New York, 1947, p. 181 + X (3 dólares).

Este libro, que reproduce el curso sobre la teoría de las funciones que el profesor Ritt ha dictado periódicamente durante los últimos veinte años de su actuación en la Columbia University, tiene características conceptuales que pueden destacarse repitiendo, para el conjunto, las palabras que el mismo autor ha puesto en el prefacio para explicar el procedimiento adoptado particularmente en los primeros capítulos: "Los decimales tienen la ventaja de no ir en profundidad y no impulsar al alumno hacia una revolución matemática. Los números quedan lo que han sido siempre en vez de hacerse objetos nuevos y bizarros". Creemos poder interpretar, parafraseando: ir directamente hacia el fin, evitando divagaciones ⁽¹⁾.

El fin declarado es, pues, de llevar al alumno, por medio de un estudio de dos semestres, es decir en total 56 clases de 75 minutos cada una, a poder tratar con cualquier libro de matemática; el medio será un conocimiento bastante completo de las teorías generales de las funciones de variables reales y más todavía de las funciones de variables complejas. No es ciertamente el caso de discutir el medio en comparación con los fines; es bien cierto que más propio que "cualquier libro de matemáticas" sería talvez decir "cualquier libro de análisis", y es bien cierto también que, para tratar con cualquier libro de matemática, lo más necesario es voluntad y capacidad de razonamiento, con cuya ayuda la preparación preliminar necesaria puede ser muy pequeña. Y por fin es cierto también que, para ir lo más rápido hacia el fin perseguido podría declararse inútil cualquier definición del número real; al contrario el A. estima conveniente, como el lector puede haber entendido por algunas frases citadas, definir el número real formalmente como una sucesión infinita de cifras tal que, por supresión de cualquier grupo finito de ellas, no se reduzcan a ser todas 9. Es bien conocida la objeción de Brouwer contra tal definición; pero quienquiera podrá conceder que se la olvide como pura divagación abstracta; y es cierto que algunas ventajas iniciales tiene esta definición para introducir las operaciones elementales; no todas ventajas, sin embargo, porque algunas complicaciones ya se notan en la definición de la sustracción y la brevedad aparente está obtenida a menudo aquí remitiendo al cuidado del lector el desarrollo de algunas demostraciones que el concepto intuitivo del número permite pasar por alto.

⁽¹⁾ Posiblemente la presentación del libro, editorialmente un poco nueva, responda al mismo principio: se trata de una reproducción litográfica de un mecanoscrito, como nos muestran, para contrarrestar los precios siempre crecientes de la imprenta, muchos libros y opúsculos norteamericanos e ingleses, pero con un esfuerzo no común con respecto a la claridad.

De todos modos, sobre esta base formal se establecen, en las primeras cincuenta páginas del libro, todas las nociones y teoremas fundamentales de los conjuntos lineales, de la continuidad, series numéricas y funcionales, derivadas e integrales riemannianos. Sigue el estudio de la topología bidimensional en forma estrictamente aritmética y limitada a lo necesario para fundar la teoría de las funciones de una variable compleja. Un notable cuidado está dado a la introducción de la noción de *curva* (probablemente para llevar el acento sobre el programa de aritmetización), acaso también más de lo estrictamente necesario en razón del programa, como lo hemos resumido arriba. En efecto el teorema de Jordan está luego establecido únicamente para recintos triangulares, como es suficiente para la demostración del teorema Cauchy-Goursat, remitiendo a la bibliografía para los casos en que la rigurosa aplicación pediría mayores detalles. Se introducen las funciones e^z , $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cos} z$ por sus desarrollos de Taylor; se define el logaritmo de una función analítica como la integral de la derivada logarítmica; se establecen los teoremas de Weierstrass y de Mittag-Leffler sobre funciones enteras y meromorfas; se proporciona la noción de diramación y de superficie de Kiemann sobre los ejemplos de $\sqrt[n]{z}$ y $\log z$; por fin se concluye con la continuación analítica.

Muchos detalles del libro no pueden faltar de atraer la atención del lector como ocurre siempre delante de un esfuerzo orgánico hacia la realización de un programa; y aquí el programa es, además del de la aritmetización que hemos señalado desde el principio, el otro de hacer caber muchas nociones dentro de un tiempo lectivo relativamente reducido. No podríamos, tal vez, por contrario, declararnos del todo concordes con el autor sobre otras ventajas didácticas a las cuales él parece atribuir cierta énfasis, como la primacia del método en comparación con muchas simples consideraciones topológicas o la introducción más bien ocasional de algunas nociones cuya razón de ser es más amplia que la momentánea oportunidad (así números complejos generales, álgebras, longitud de un arco, el número π , etc.).

B. Levi

FE DE ERRATA. — Por material error de composición, en la pág. 217 del volumen anterior de *Math. Notae* (Año VI, fasc. 4º) el clásico desarrollo de $J_0(x)$ en serie de potencias aparece equivocado, sin influenciar sin embargo los cálculos y razonamientos del texto y de la nota a pie de pág. 217-18; corrija-se

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \\ &= \sum (-1)^j \frac{1}{j!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \end{aligned}$$

- El precio de suscripción a “Mathematicae Notae” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “Mathematicae Notae” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

INDICE DEL FASCÍCULO 1.

	Pág.
Un método para obtener congruencias de números de Bernoulli (MISCHA COTLAR)	1
Sul problema di Neumann-Dini per la stricia piana indefinita (CARLO BIRINDELLI)	30
Ejercicios y problemas (Resueltos)	65
Ejercicios y problemas (Propuestos)	75
Bibliografía	76

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONE" del Instituto de Matemáticas

		m\$.n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babiní	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales ente- ras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inau- guración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías mate- máticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre con- juntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.30
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de des- arrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORÁNZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	2.00
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	4.50
	2 - G. GRIOLI. — Sul comportamento di un vincolo concentrato nel cen- tro di una piastra circolare	2.00