Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Triángulos Circunferencias Congruencia

1º Año

Cód. 1105-19

Prof. Verónica Filotti
Prof. María del Luján Martínez

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

TRIÁNGULO

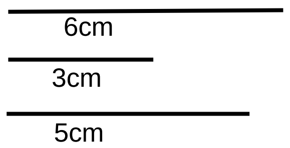
1. DESIGUALDAD TRIANGULAR

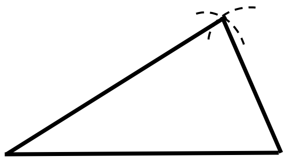
1.1 Propiedad de los lados de un triángulo

Actividad Nº 1:

Consideramos tres segmentos cualesquiera, cuyas longitudes se muestran en cada uno de los siguientes apartados ¿siempre podemos construir un triángulo cuyos lados sean respectivamente congruentes a dichos segmentos?
Veamos algunos ejemplos:

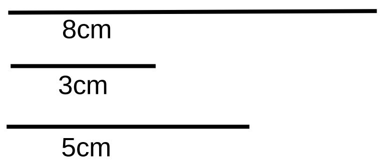
a) Datos Construcción

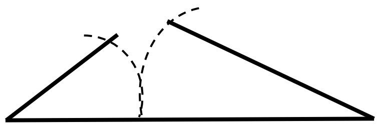




Es posible

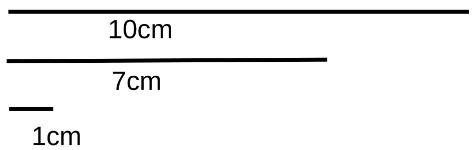
b) Datos Construcción

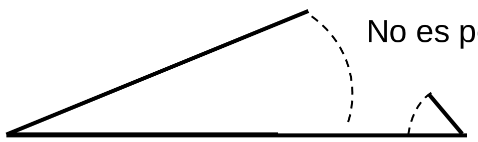




No es posible

c) Datos Construcción





No es posible

En algunas de las situaciones anteriores hemos podido construir un triángulo ¿Qué características observas, en ese caso, con respecto a las longitudes de los lados que permitieron construir el triángulo?.

Lo que has observado se puede enunciar en la siguiente **propiedad:**

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado.	(1)

Actividad Nº 2:

Dadas las medidas 2 ; 6 ; 10 ; 5 ; 8 elegir dos ternas que puedan ser medidas de lados de un triángulo. Gráfica esos triángulos. Realiza la diferencia entre las medidas de dos lados del triángulo en cada caso, y compárala con la medida del tercer lado. ¿Qué puedes conjeturar?

Lo que has observado se puede enunciar en la siguiente propiedad:

En todo triángulo la medida de cada lado es mayor que la diferencia entre las medidas de los otros dos lados.

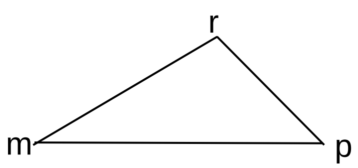
(2)

De (1) y (2) podemos enunciar la siguiente propiedad:

En todo triángulo la medida de cada lado es mayor que la diferencia entre las medidas de los otros dos lados y menor que la suma de los mismos.

Simbólicamente

En el $\overset{\Delta}{mrp}$, siendo m r, r p y m p las medidas de los lados de dicho triángulo podemos expresar:



$mp - rp < mr < mp + rp$

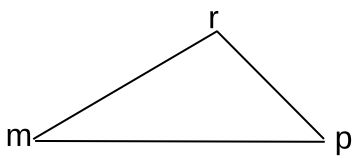
$mp - mr < rp < mp + mr$

$mr - rp < mp < mr + rp$

1.2 Propiedad entre lados y ángulos de un triángulo

Admitiremos sin demostrar que :

En todo triángulo, la medida de los lados están en la misma relación de orden que la medida de sus ángulos opuestos y recíprocamente.



Simbólicamente

Si $mp > mr > rp \Leftrightarrow \hat{r}$ (opuesto a $\overline{mp}$) $>$ $\hat{p}$ (opuesto a $\overline{mr}$) $>$ $\hat{m}$ (opuesto a $\overline{rp}$)

Experimenta construyendo varios triángulos y verifica esta afirmación.

PROBLEMAS:

1) Completa el siguiente cuadro

mr	rp	mp	¿Se forma triángulo?	¿Qué clase de triángulo es?
3	8	7		
4	1	5		
	5	3	si	
a	2a	2a		
a	a	2a		

2) Cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles es de 10 cm. ¿Entre que valores varía el tercer lado?.

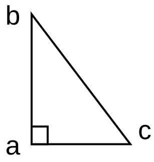
3) En un triángulo $\overset{\Delta}{mnp}$ sus lados están en la siguiente relación mn > np > pm. Ordena las medidas de los ángulos en forma decreciente.

4) En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{cab}$ es $\hat{a} > \hat{b} > \hat{c}$. ¿Qué par de ángulos resultan complementarios?

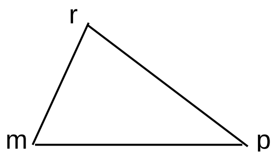
5) Si la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que 130º ¿entre qué valores puede variar el tercer ángulo?

6) ¿Cuál es el lado de mayor medida en un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

7) En los siguientes triángulos nombra los lados ordenándolos de menor a mayor de acuerdo a su medida

a) 

$\hat{c} = 57º$

b) 

$\hat{m} = 63º$

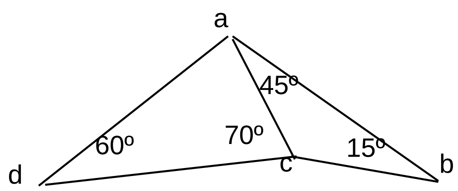
$\hat{p} = 37º$

8) Dado el $\overset{\Delta}{mnp}$ ordena la medida de sus ángulos de mayor a menor de acuerdo a lo indicado en cada apartado (la medida de los lados se dan respecto a una misma unidad):

a) mn = 17, np = 21, mp = 18

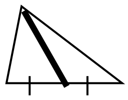
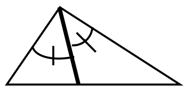
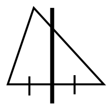
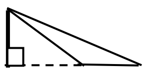
b) mn = 15, np = 16, mp = 17

9) ¿Cuál es el menor lado en el cuadrilátero abcd? Justifica



2. PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

En todo triángulo pueden trazarse tres medianas, tres bisectrices, tres mediatrices y tres alturas, que están contenidas respectivamente en rectas que se intersecan en un mismo punto, conocido en cada caso, como ***punto notable del triángulo.*** En el siguiente cuadro damos las definiciones de mediana, bisectriz, mediatriz y altura de un triángulo y los nombres de cada uno de los puntos notables**.**

NOMBRE	GRÁFICA	DEFINICIÓN	PUNTO NOTABLE
MEDIANA		Es el segmento determinado por el vértice y el punto medio del lado opuesto	Las tres medianas se intersecan en un punto llamado **BARICENTRO**
BISECTRIZ		Es el segmento que está incluido en la bisectriz del ángulo interior de un triángulo	Las tres bisectrices se intersecan en un punto llamado **INCENTRO**
MEDIATRIZ		Es la recta mediatriz de cada lado	Las tres mediatrices se intersecan en un punto llamado **CIRCUNCENTRO**
ALTURA		Es el segmento perpendicular desde el vértice a la recta que contiene al lado opuesto	Las tres rectas que contienen a las alturas se intersecan en un punto llamado **ORTOCENTRO**

PROBLEMAS

10) Dibuja tres triángulos escalenos, uno acutángulo, otro rectángulo y el tercero obtusángulo.

a) Encuentra en ellos el baricentro.
b) Investiga qué propiedad tiene el baricentro desde el punto de vista de la Física.
c) Comprueba en los triángulos dibujados que el baricentro tiene la propiedad de estar ubicado a 2/3 de cada mediana, a partir del vértice

11) Dibuja para cada apartado, tres triángulos escalenos de iguales características que en el problema anterior y halla en cada uno de ellos

a) el incentro.
b) el circuncentro
c) el ortocentro

12) Dibuja

a) un triángulo isósceles no equilátero, halla en él los puntos notables.¿Cómo resultan esos puntos?
b) un triángulo equilátero, halla en él los puntos notables.¿Cómo resultan esos puntos?

13) Considera un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 5cm y cuya base mide 6cm. Calcula la distancia del baricentro del triángulo a la base.

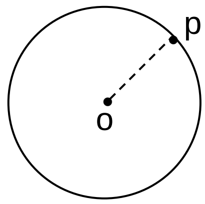
3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3.1 Definición de circunferencia:

Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo de ese plano, llamado centro.

Lugar geométrico: conjunto de puntos que verifican ciertas propiedades

La distancia de un punto de la circunferencia al centro de la misma, se llama ***radio*** .



En el gráfico: $\overline{op}$ es un radio cuya medida es ***r***

A la circunferencia de centro ***o*** y radio de medida ***r*** la notaremos:

$$C_{(o;r)}$$

Observación : llamaremos radio indistintamente, al segmento y a su medida

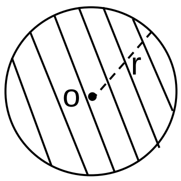
Luego, la definición en símbolos es:

$$\forall p \in C_{(o;r)} \Leftrightarrow d(p\,;o) = r$$

3.2 Definición de círculo:

Llamaremos círculo de centro o y radio r al lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro sea menor o igual que r.

Notación: $C_{\mathbf{r}}\ (o\,;r)$



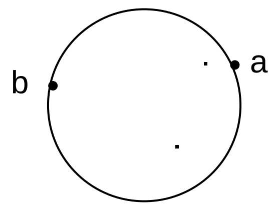
La definición en símbolos será:

$$\forall p \in C_r(o;r) \Leftrightarrow d(p\,;o) \le r$$

Un punto cuya distancia al centro es menor que el radio, recibe el nombre de ***punto interior*** del círculo.

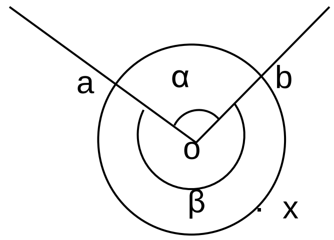
3.3 Arcos y ángulos centrales

Dos puntos de la circunferencia determinan en ella dos subconjuntos llamados ***arcos de circunferencia***



Así los puntos a y b determinan los arcos :
$\overset{\frown}{ab}$ y $\overset{\frown}{axb}$ (como verás, agregamos un punto en uno de ellos para poder distinguirlos, puesto que ambos tienen los mismos extremos)

Cada arco tiene un ***ángulo central*** correspondiente, que es aquél cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco.
En el gráfico



$\hat{\alpha} = \widehat{aob}$ es el ángulo central correspondiente

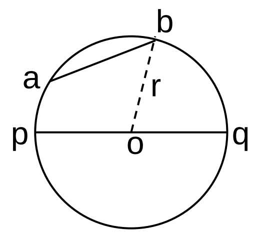
al arco $\overset{\frown}{ab}$ y $\hat{\beta} = \widehat{aob}$ (cóncavo) el ángulo central

correspondiente a $\overset{\frown}{axb}$.

<u>**Nota**</u>: Convenimos que cuando nombramos un ángulo éste es convexo, en caso de ser cóncavo se especificará.

3.4 Cuerda – Diámetro

Al segmento que tiene por extremos dos puntos cualesquiera de la circunferencia, lo llamaremos ***cuerda*** de la $C_{(o,r)}$



En símbolos:

$\overline{ab}$ cuerda $\Leftrightarrow$ $a \in C_{(o;r)}$ y $b \in C_{(o;r)}$

Toda cuerda que pase por el centro de la circunferencia recibe el nombre de ***diámetro****.*
En el gráfico $\overline{pq}$ es un diámetro.
Si llamamos ***d*** a la medida del diámetro, es inmediato que:

Observación: llamaremos diámetro indistintamente, al segmento y a su medida

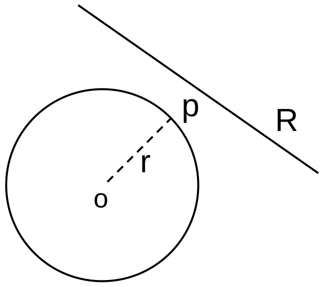
$$\boldsymbol{d = 2r}$$

Los extremos de un diámetro determinan en la circunferencia dos arcos llamados *semicircunferencias*.

En el gráfico $\overset{\frown}{pq}$ y $\overset{\frown}{paq}$ son semicircunferencias.

3.5 Posiciones relativas de rectas y circunferencias

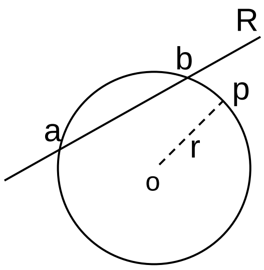
Dadas en el plano, una recta y una circunferencia, pueden darse solo tres casos:



a) Que la recta y la circunferencia no tengan ningún punto en común.
En este caso diremos que la recta es ***exterior*** a dicha circunferencia

En símbolos:

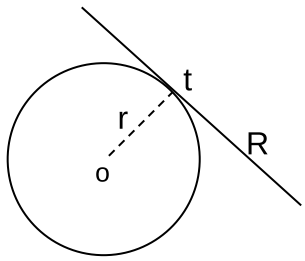
$$R \text{ es exterior a la } C_{(o;r)} \Leftrightarrow R \cap C_{(o;r)} = \varnothing$$



b) Que la recta contenga a una cuerda de la circunferencia, es decir, tenga dos puntos en común con ella.
En este caso diremos que la recta es ***secante*** a la circunferencia.

En símbolos:

$$R \text{ es secante a la } C_{(o;r)} \Leftrightarrow R \cap C_{(o;r)} = \{a\ ;\ b\}$$



c) Que la recta y la circunferencia tengan un solo punto en común.
En tal caso la recta recibe el nombre de ***tangente*** a la circunferencia

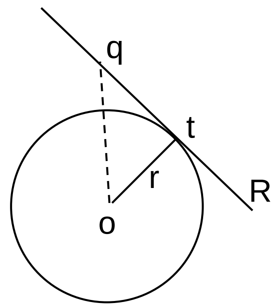
En símbolos:

$$R \text{ es tangente a la } C_{(o;r)} \Leftrightarrow R \cap C_{(o;r)} = \{t\}$$

El punto **t** recibe el nombre de ***punto de tangencia***.

Propiedad de la recta tangente

Si una recta es perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia entonces la recta es tangente a la misma.



H) $t \in C(o;r)$

$\overline{ot} \perp R$

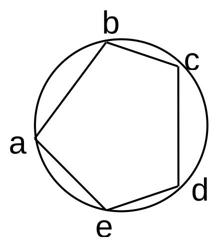
T) R tangente a $C(o;r)$

No efectuaremos la demostración de este teorema en el presente año.
Admitiremos también sin demostrar ***la Propiedad Recíproca***: "la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente en el punto de tangencia".

3.6 Polígonos inscriptos y circunscriptos

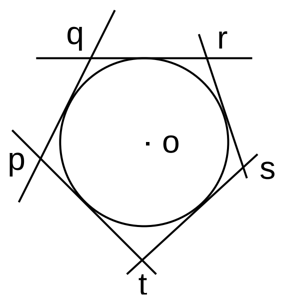
Definiciones

> Un polígono convexo se llama ***inscripto*** en una circunferencia si todos sus vértices son puntos de la circunferencia. La circunferencia se dice *circunscripta* al polígono.



El polígono abcde está inscripto en la circunferencia

> Un polígono convexo está ***circunscripto*** en una circunferencia si todos sus lados están incluidos en rectas tangentes a la circunferencia. La circunferencia se dice *inscripta* en el polígono.



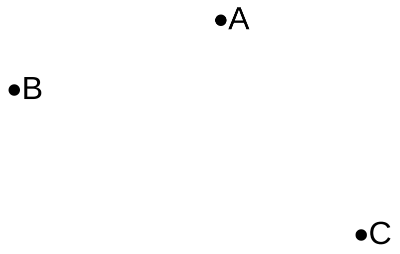
El polígono pqrst está circunscripto en la circunferencia.

PROBLEMAS

14) Construye la circunferencia inscripta a un triángulo. Justifica la construcción.

15) Construye la circunferencia circunscripta a un triángulo. Justifica la construcción.

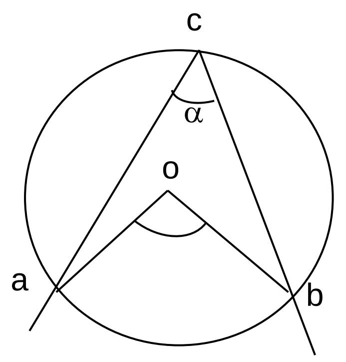
16) Se desea construir una Estación de Servicios que equidiste de tres pueblos **A**lmafuerte, **B**lanco y **C**enteno ubicados como indica el gráfico. ¿Cómo puede localizarse el punto donde se puede construir esa estación?



3.7 Ángulos inscriptos en arcos de circunferencia

Definición:

Un ángulo se llama inscripto en un arco de circunferencia, cuando su vértice es un punto de dicho arco y sus lados pasan por sus puntos extremos.



$c \in \overset{\frown}{acb}$

$\hat{\alpha}$ inscripto en $\overset{\frown}{acb}$

$\hat{\alpha}$ abarca el arco $\overset{\frown}{ab}$ ya que $\overset{\frown}{ab} \subset \hat{\alpha}$

El $\widehat{aob}$ que tiene su vértice en o es el ángulo central correspondiente a $\hat{\alpha}$, ya que abarca el mismo arco que $\hat{\alpha}$

TEOREMA

Todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia, es congruente con la mitad del central correspondiente.

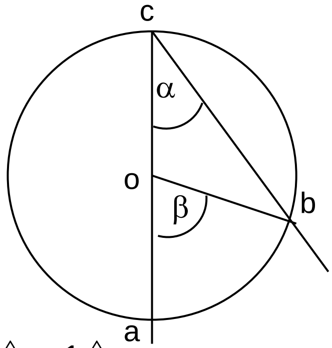
Hipótesis: $\hat{\alpha}$ inscripto en $\overset{\frown}{acb}$

$\hat{\beta}$ ángulo central correspondiente a $\hat{\alpha}$

o centro de la circunferencia

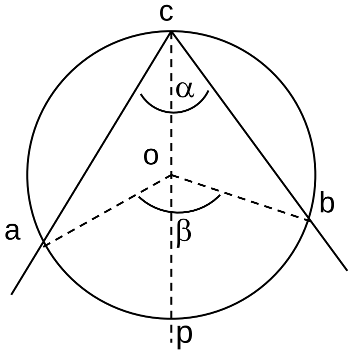
Tesis: $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\hat{\beta}$

Demostración:

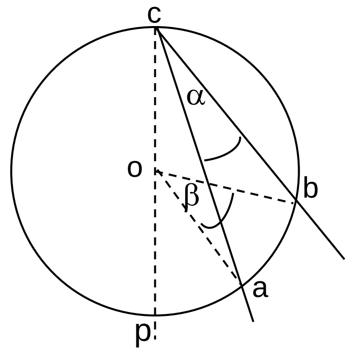


1º caso : el centro de la circunferencia pertenece a uno de sus lados

$$\left.\begin{array}{l} \overline{co} = \overline{ob}\ (1) \Rightarrow \overset{\Delta}{ocb} \text{ isósceles} \Rightarrow \hat{\alpha} = o\hat{b}c \\ (1) \text{Radios de la circunferencia} \\ \hat{\beta} \text{ exterior del } \overset{\Delta}{ocb} \Rightarrow \hat{\beta} = \hat{\alpha} + o\hat{b}c\ (2) \\ (2) \text{Prop. del áng. ext. de un triángulo} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\beta} = \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\beta} = 2\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{2}\hat{\beta}$$



2º caso : el centro de la circunferencia es un punto interior de $\hat{\alpha}$



3º caso : el centro de la circunferencia no pertenece a $\hat{\alpha}$.

Nota: admitiremos la validez de la propiedad en el 2° y 3° caso sin efectuar su demostración.

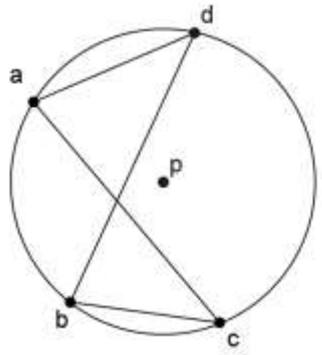
PROBLEMAS

17) p centro de la circunferencia

$\hat{b} = 35º27'40''$

a) Halla : $\widehat{dac}$ y $\widehat{dpc}$

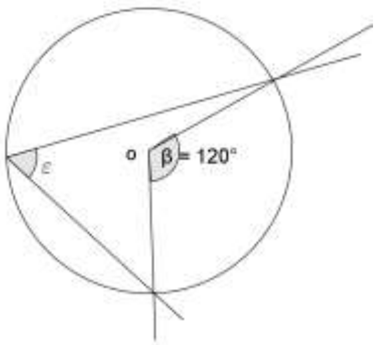
b) Dibuja otro ángulo cualquiera, inscripto en $\overset{\frown}{cad}$
¿cuánto mide ese ángulo?¿Por qué?



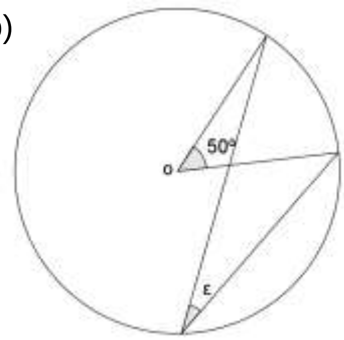
Conclusión: Los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia son congruentes

18) Calcula $\hat{\varepsilon}$ en cada apartado. Justifica

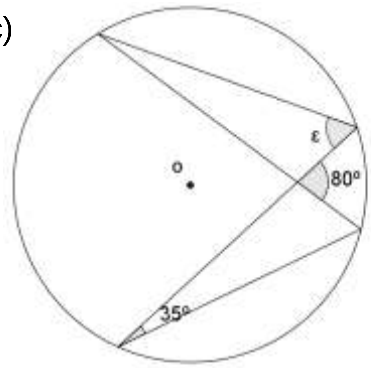
a)



b)



c)

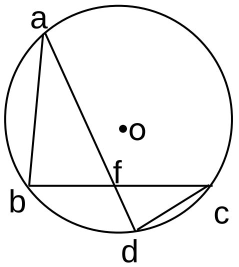


19) En una circunferencia de centro 0, el ángulo inscripto en un arco $\overset{\frown}{ab}$ es de 45º. Demuestra que los radios $\overline{oa}$ y $\overline{ob}$ son perpendiculares

20) a) ¿Cuánto mide un ángulo inscripto en una semicircunferencia?
b) ¿Qué tipo de triángulos son los inscriptos en una semicircunferencia tal que un lado es la mayor de las cuerdas?¿Dónde se halla el centro de la misma?

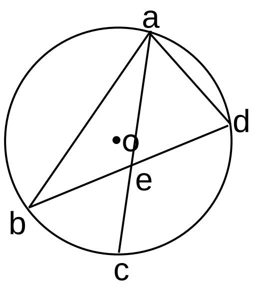
21) Demuestra que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscripto en una circunferencia son suplementarios.

22)



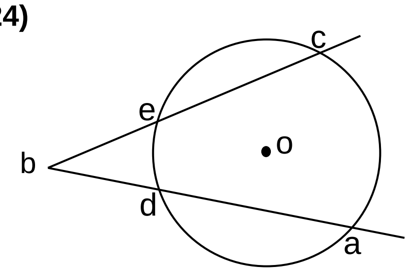
Sabiendo que la medida de los ángulos centrales de $\overset{\frown}{ac}$, $\overset{\frown}{ab}$ y $\overset{\frown}{cd}$ son respectivamente 160º, 75º y 45º halla la medida de todos los ángulos del $\overset{\triangle}{abf}$ y $\overset{\triangle}{cdf}$ en radianes.

23)



Si $\overrightarrow{ac}$ es la bisectriz del ángulo $\widehat{bad}$ y las medidas de los ángulos centrales de los arcos $\overset{\frown}{cd}$ y $\overset{\frown}{ad}$ son respectivamente 80º17' y 160º24', halla la medida de los ángulos del $\overset{\triangle}{abd}$.

24)



o centro de la circunferencia

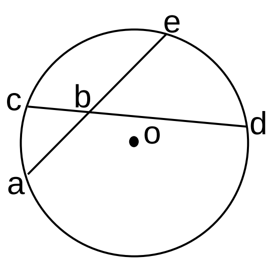
$\widehat{aoc}$ = 62º 25' 37'', 7

$\widehat{doe}$ = 21º 47' 53'', 8

Calcula la medida de $\hat{b}$

Sugerencia: traza la cuerda $\overline{dc}$

25)



o centro de la circunferencia

$\widehat{aoc}$ = 32º 27' 12'', 8

$\widehat{doe}$ = 67º 12''

calcula la medida de $\widehat{abc}$

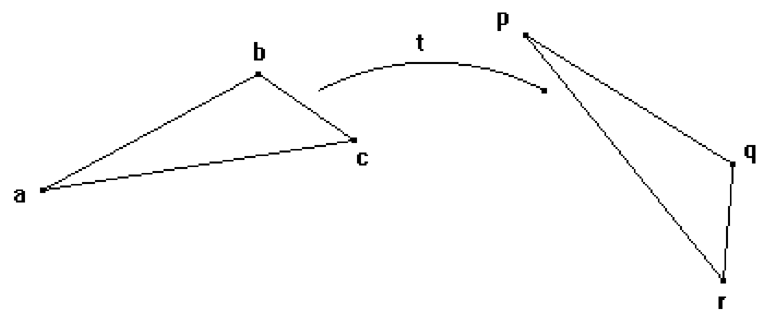
Sugerencia: traza $\overline{ce}$

4. TRIÁNGULOS CONGRUENTES

¿Cuándo dos triángulos son congruentes?

Dos triángulos son congruentes si uno es la imagen del otro, por la aplicación de una transformación rígida.

t: transformación rígida



Además sabemos que: si dos triángulos son congruentes sus ***elementos homólogos*** (lados y ángulos) son congruentes.

Así :

$t(\overline{ab}) = \overline{pq} \Rightarrow \overline{ab} = \overline{pq}$ $\qquad t(\hat{a}) = \hat{p} \Rightarrow \hat{a} = \hat{p}$

$t(\overline{bc}) = \overline{qr} \Rightarrow \overline{bc} = \overline{qr}$ $\qquad t(\hat{b}) = \hat{q} \Rightarrow \hat{b} = \hat{q}$

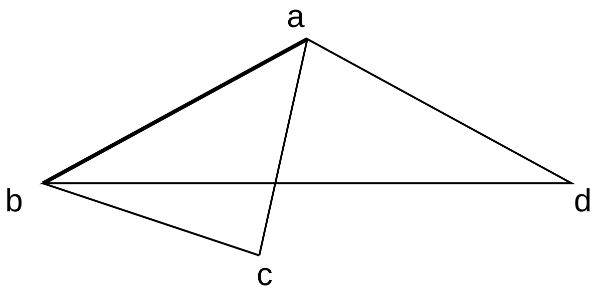
$t(\overline{ac}) = \overline{pr} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{pr}$ $\qquad t(\hat{c}) = \hat{r} \Rightarrow \hat{c} = \hat{r}$

Llamamos ***elementos homólogos*** a aquellos que se corresponden en una transformación. Es decir: un elemento y su imagen

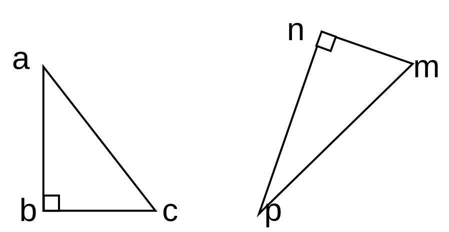
¿Será verdad que dos triángulos que tienen sus lados y ángulos respectivamente congruentes, son congruentes?
Es evidente que lo son, pero la intuición nos dice que no es necesario conocer la congruencia de los seis pares de elementos respectivos.

Analicemos la cantidad de elementos que se necesitan conocer.

- Probemos primero con **un elemento:**

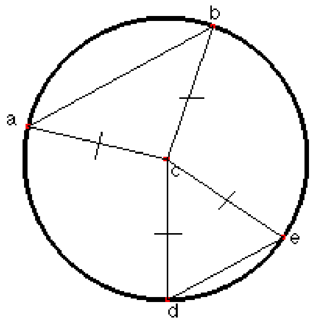


Los $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{abd}$ tienen un lado en común y no son congruentes



$\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{pnm}$ tienen un par de ángulos congruentes ($\hat{b} = \hat{n} = 90º$) y no son congruentes

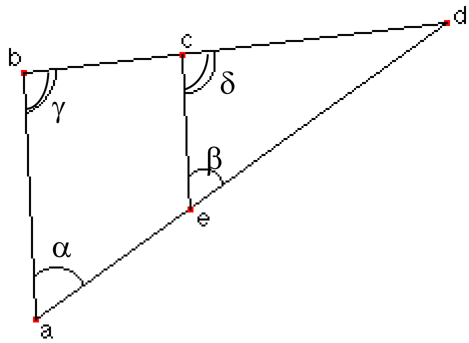
- Probemos primero con **dos elementos:**



$\overline{ac} = \overline{ce}$ por radios

$\overline{bc} = \overline{cd}$ por radios

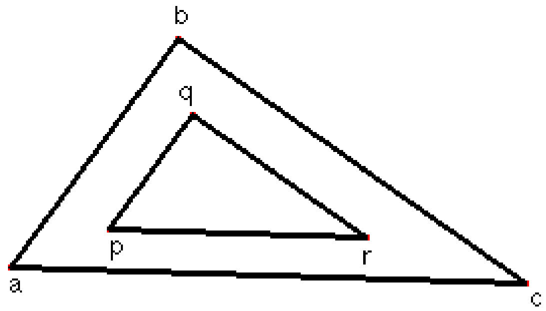
Y los triángulos $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{dec}$ no son congruentes



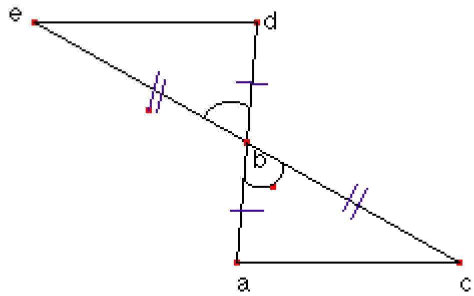
$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \qquad \hat{\gamma} = \hat{\delta}$

y sin embargo $\overset{\Delta}{abd} \neq \overset{\Delta}{ced}$

- Probemos con **tres elementos :**



$$\left.\begin{array}{l} \hat{a} = \hat{p} \\ \hat{b} = \hat{q} \\ \hat{c} = \hat{r} \end{array}\right\} \text{sin embargo } \overset{\Delta}{abc} \neq \overset{\Delta}{pqr}$$



$\overline{db} = \overline{ab}$

$\overline{be} = \overline{bc}$

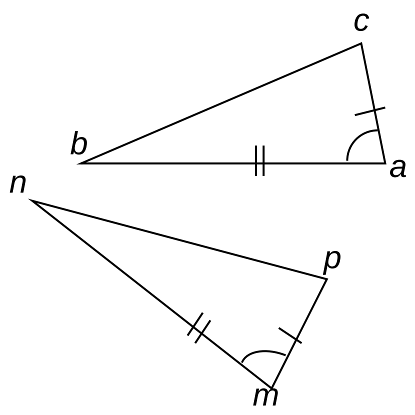
$e\hat{b}d = a\hat{b}c$

¿Te parece que $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{ebd}$ son congruentes?

Tu respuesta, surgida de un análisis puramente intuitivo será seguramente, que estos triángulos son congruentes.

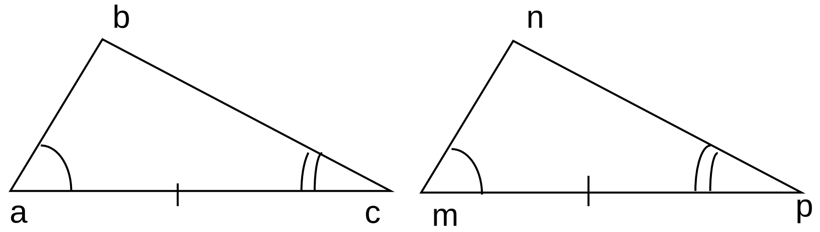
Se ha observado, entonces que es **suficiente** saber que los triángulos teniendo **algunos** de sus elementos correspondientes congruentes, se puede demostrar que estos triángulos son congruentes. Estas condiciones se conocen como ***Criterios de Congruencia de Triángulos, los mismos son:***

a) **Dos triángulos que posean dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, respectivamente congruentes, son congruentes.**



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} = \overline{mn}\\ \overline{ac} = \overline{mp}\\ \hat{a} = \hat{m}\end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{\Delta}{b}c = m\overset{\Delta}{n}p$$

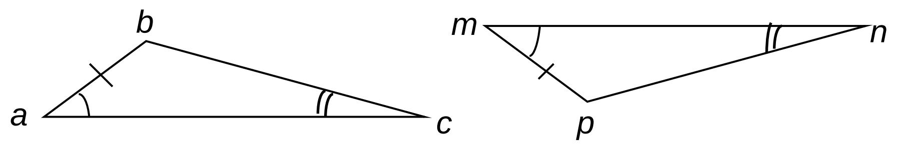
b) **Dos triángulos que tienen dos ángulos y el lado común a ellos respectivamente congruentes, son congruentes.**



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ac} = \overline{mp}\\ \hat{a} = \hat{m}\\ \hat{c} = \hat{p}\end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{\Delta}{b}c = m\overset{\Delta}{n}p$$

NOTA:

Observa los dos triángulos en los que se han marcado elementos congruentes con el mismo tipo de marca



¿Están estos triángulos en las condiciones que establece el criterio demostrado?........

Sin embargo, como

$$\hat{a} = \hat{m}$$
$$\hat{c} = \hat{n}$$

resulta $\hat{b} = 180º - \left(\hat{a} + \hat{c}\right) = 180º - \left(\hat{m} + \hat{n}\right) = \hat{p}$ (*)

luego comparando dichos triángulos resulta:

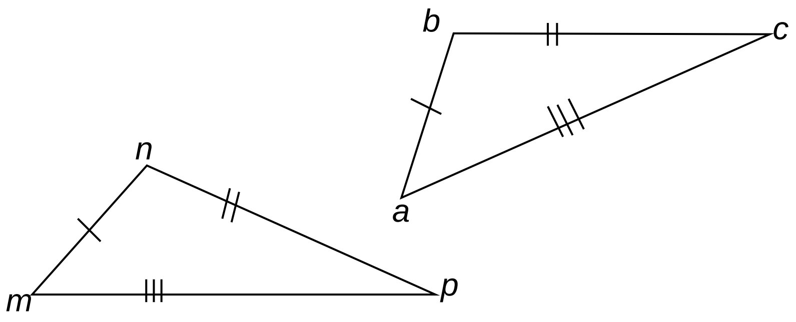
$$\left.\begin{array}{c} \overset{\Delta}{abc} \\ y \\ \overset{\Delta}{mpn} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \hat{a} = \hat{m} \\ \hat{b} = \hat{p} \text{ (*)} \\ \overline{ab} = \overline{mp} \end{array}\right.\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{abc} = \overset{\Delta}{mnp}$$

(1) por criterio anterior

Hemos demostrado que aunque los ángulos congruentes no sean adyacentes al lado congruente, los triángulos resultan congruentes si este par de ángulos están igualmente dispuestos.
Por lo expuesto ***puede generalizarse este criterio de congruencia*** enunciándolo:

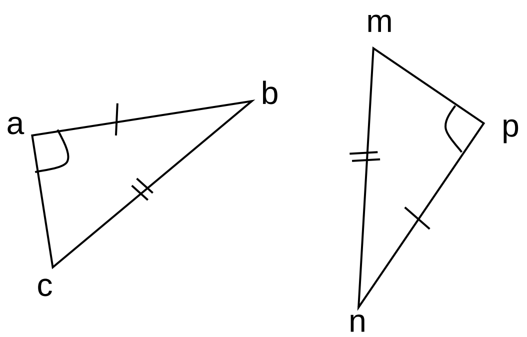
Dos triángulos que poseen dos ángulos y el lado igualmente dispuestos, respectivamente congruentes son congruentes.

c) **Dos triángulos que poseen sus tres lados respectivamente congruentes son congruentes**



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ac}=\overline{mp}\\ \overline{ab}=\overline{mn}\\ \overline{bc}=\overline{np}\end{array}\right\}\Rightarrow a\overset{\triangle}{b}c=m\overset{\triangle}{n}p$$

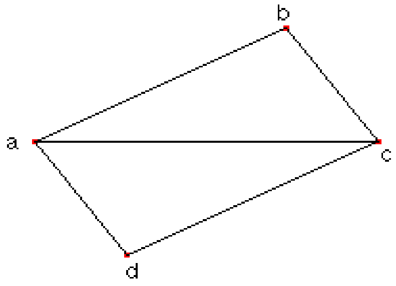
d) **Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de esos lados, respectivamente congruentes**



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab}=\overline{np}\\ \overline{cb}=\overline{mn}\\ \hat{a}=\hat{p}\end{array}\right\}\Rightarrow a\overset{\triangle}{b}c=m\overset{\triangle}{n}p$$

La aplicación de los criterios de congruencia es una poderosa herramienta para demostrar propiedades. Para que lo compruebes te proponemos los siguientes problemas:

PROBLEMA Nº 1



Datos

$\overline{ab} \underset{=}{\parallel} \overline{cd}$

Demuestra que:

$\overset{\Delta}{abc} = \overset{\Delta}{acd}$

Demostración

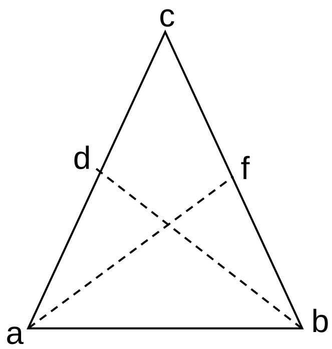
Comparemos los triángulos $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{acd}$

$$\begin{array}{l} \overset{\Delta}{abc} \\ \overset{\Delta}{acd} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \overline{ab} = \overline{cd} & \text{por.................} \\ b\hat{a}c = a\hat{c}d & \text{por...} \\ \overline{ac} = \overline{ac} & \text{por...............................} \end{array} \right\} \overset{\otimes}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{abc} = \overset{\Delta}{acd}$$

$\otimes$ por tener dos .... y el............................respectivamente..........................

PROBLEMA Nº 2

Demostrar que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles, son congruentes y forman con la base ángulos congruentes.



- **Completa:**

H) $\overline{ac} = \overline{bc}$

d punto medio de $\overline{ac}$

f punto ....

T) $\overline{af} =$ ....

$f\hat{a}b =$ ....

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{afb}\\ \overset{\Delta}{adb}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\overline{fb} = \text{..................por } (1)\\ a\hat{b}f = \text{.............por } (2).\\ \overline{ab} = \overline{ab} \text{ por}(5)\end{array}\right.\right\} \overset{(3)}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{afb} = \text{..............} \overset{(4)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\overline{af} = \text{........}\\ f\hat{a}b = \text{........}\end{array}\right.$$

(1) por dato $\overline{bc} = \overline{ac} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{bc} = \frac{1}{2}\overline{ac} \Rightarrow \overline{fb} = \overline{ad}$

(2) en el triángulo $\overset{\Delta}{acb}$ a lados congruentes se oponen ....

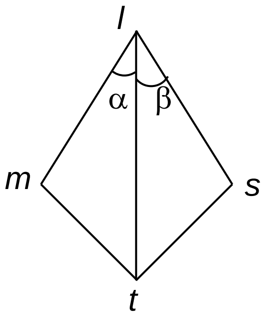
(3) por poseer dos lados y ....

(4) por ser elementos homólogos de triángulos congruentes.

(5) por propiedad reflexiva de la congruencia

PROBLEMAS

26)



Sabiendo que

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ y $\overline{ml} = \overline{ls}$ demuestra que existen otros segmentos y ángulos congruentes en esa figura

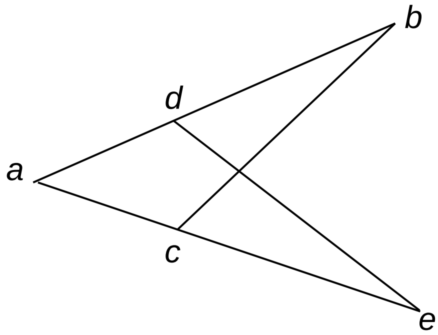
27)

H) $\overline{ad} = \overline{ac}$

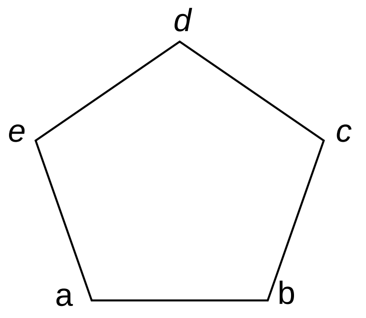
$\overline{ab} = \overline{ae}$

T) $\hat{b} = \hat{e}$

Realiza la demostración

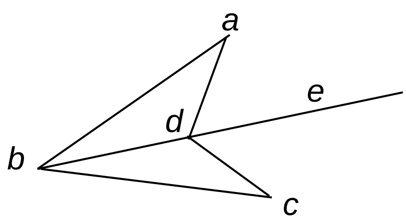


28) Dado el pentágono regular *abcde* de la figura, demuestra que $d\hat{a}b = d\hat{b}a$

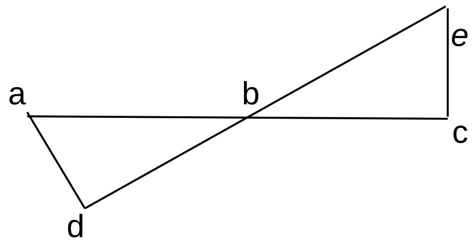


29) Sobre la recta que incluye a la base $\overline{bc}$ de un triángulo isósceles $\overset{\Delta}{abc}$ se consideran dos segmentos $\overline{bp}$ y $\overline{cq}$ congruentes y no incluidos en la base. Demuestra que el triángulo $\overset{\Delta}{apq}$ es isósceles.

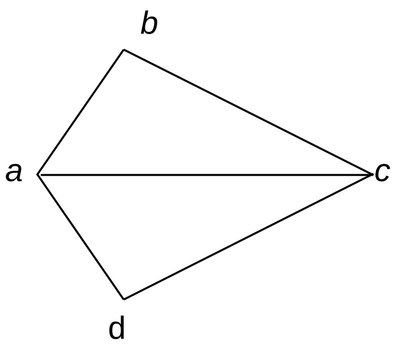
30) Si en la siguiente figura $\overrightarrow{be}$ incluye a la bisectriz de $a\hat{b}c$ y de $a\hat{d}c$, demuestra que $\overset{\Delta}{bad} = \overset{\Delta}{bdc}$



31) Si $\hat{d} = \hat{c} =$ 1 recto y $\overline{db} = \overline{bc}$, demuestra que $\overline{ad} = \overline{ec}$

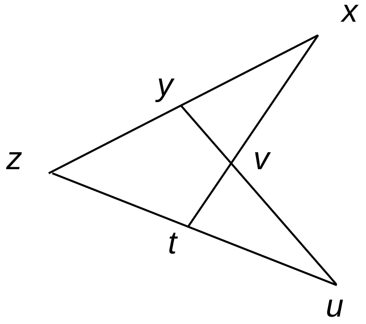


32)



Si $\overline{ab} = \overline{ad}$ y $\overline{bc} = \overline{dc}$ demuestra que $\overrightarrow{ac}$ es bisectriz de $b\hat{a}d$

33)



H) $\overline{zx} = \overline{zu}$

y punto medio de $\overline{zx}$

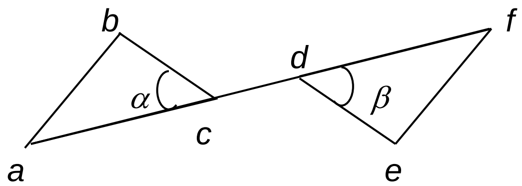
t punto medio de $\overline{zu}$

T) $\overset{\Delta}{zxt} = \overset{\Delta}{yzu}$

$\overset{\Delta}{yxv} = \overset{\Delta}{vtu}$

Realiza la demostración

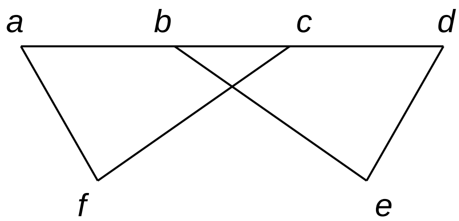
34)



Demuestra que

$\overline{ab} = \overline{ef}$ si $\overline{ad} = \overline{cf}$, $\hat{a} = \hat{f}$ y $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

35) En la figura es $\overline{ac} = \overline{bd}$, $a\hat{c}f = d\hat{b}e$ y $\overline{fc} = \overline{be}$. Demuestra que $\overline{af} = \overline{de}$



36) Demuestra que $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{def}$ son congruentes, si se sabe que los lados $\overline{ab}, \overline{ac}$ y la mediana $\overline{bx}$ son respectivamente congruentes a los lados $\overline{de}, \overline{df}$ y la mediana $\overline{ey}$

37) Demuestra la propiedad de la mediatriz de un segmento

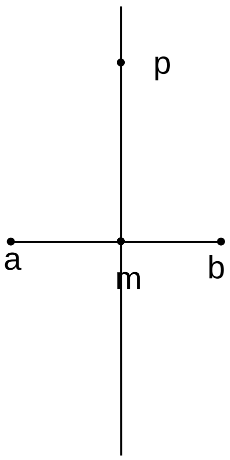
Un punto pertenece a la mediatriz de un segmento sí y sólo si equidista de sus extremos.

⇔"sí y sólo si" o "condición necesaria y suficiente"

En símbolos

$$\forall p,\ \ p \in M_{\overline{ab}} \ \Leftrightarrow\ d(p;a) = d(p;b)$$

$\Rightarrow) \underbrace{\forall p,\ p \in M_{\overline{ab}}}_{\text{Hipótesis}} \ \Rightarrow\ \underbrace{d(p;a) = d(p;b)}_{\text{Tesis}}$



Demostración:

…………………………………………………

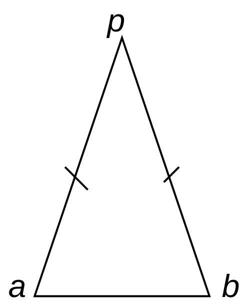
…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

$\Leftarrow) \ \underbrace{\forall p, d(p;a) = d(p;b)}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{p \in M_{\overline{ab}}}_{\text{Tesis}}$

(Sugerencia: Traza el segmento $\overline{po}$ / $\overline{ao} = \overline{ob}$)



Demostración:

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

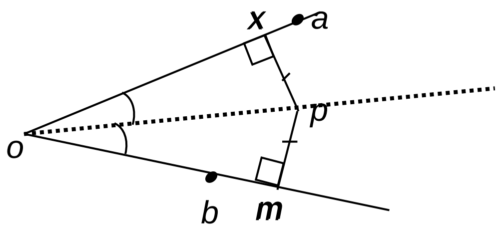
……………………………………………………………

38) Demuestra la propiedad de la bisectriz de un ángulo :

Un punto interior de un ángulo pertenece a la bisectriz del mismo, si y sólo si, equidista de las rectas que incluyen a los lados del ángulo

En símbolos

$\forall p \in \widehat{aob}\ ;\ p \in B_{\widehat{aob}} \Leftrightarrow d(p;\overleftrightarrow{oa}) = d(p;\overleftrightarrow{ob})$



39) Demuestra la siguiente ***teorema*** utilizando congruencia de triángulos:

La bisectriz del ángulo opuesta a la base de un triángulo isósceles coincide con la mediana y la altura y las tres están incluidas en la mediatriz de ese lado.

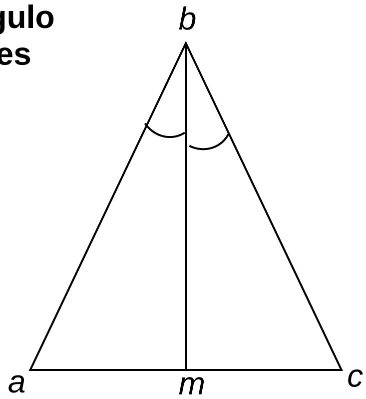
H) $\overset{\Delta}{abc};\ \overline{ab} = \overline{bc}$

$\overline{bm}$ bisectriz del $\overset{\Delta}{abc}$

T) $\overline{bm}$ mediana del $\overset{\Delta}{abc}$

$\overline{bm}$ altura del $\overset{\Delta}{abc}$

$\overline{bm} \subset M_{\overline{ac}}$



➢ Completa para obtener la demostración de este teorema

$$\begin{matrix}\overset{\Delta}{abm} \\ \overset{\Delta}{bmc}\end{matrix}\ \left\{\begin{matrix}\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{abm} = \overset{\Delta}{\ldots\ldots\ldots} \overset{(2)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix}\overline{am} = \overline{mc} & (3) \\ a\hat{m}b = b\hat{m}c & (4)\end{matrix}\right.$$

(1) ....

(2) ....

por (3) $\overline{am} = \overline{mc} \Rightarrow \boxed{\overline{bm} \text{ mediana del } \overset{\Delta}{abc}}$

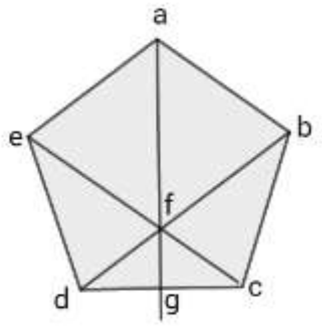
por (4) $a\hat{m}b = b\hat{m}c \overset{(5)}{\Rightarrow} \overline{bm} \perp \overline{ac} \Rightarrow \boxed{\overline{bm} \text{ altura del } \overset{\Delta}{abc}}$

$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{bm} \text{ mediatriz del } \overset{\Delta}{abc}}$

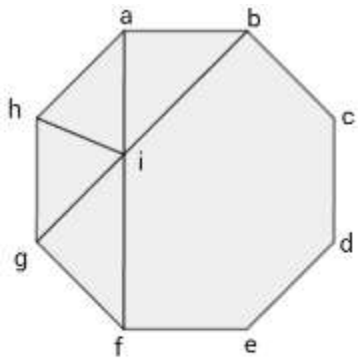
(5) los ángulos son adyacentes y congruentes

40) Demuestra que si una altura de un triángulo coincide con una bisectriz del mismo el triángulo es isósceles.

41) Demuestra que si una altura de un triángulo coincide con una mediana del mismo, el triángulo es isósceles

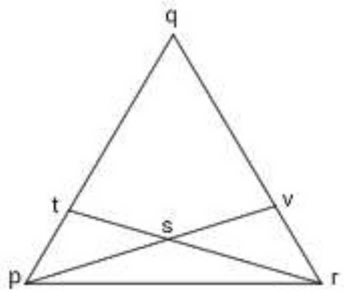


42) Sabiendo que abcde es un pentágono regular, que $\overrightarrow{ag}$ bisectriz del $e\hat{a}b$ y que $\overleftrightarrow{ag} \perp \overleftrightarrow{dc}$, demostrar que $\overset{\Delta}{bcf} = \overset{\Delta}{edf}$



43) Sabiendo que abcdefg es un octógono regular y que $\overline{af} \perp \overline{ab}$; $\overline{bg} \perp \overline{gf}$; $a\hat{b}g = a\hat{f}g$.

Demostrar que $\overset{\Delta}{ahi} = \overset{\Delta}{ghi}$



44) Sabiendo que $t\hat{p}v = v\hat{r}s$; $\overline{pq} = \overline{rq}$; $\overline{pv} = \overline{tr}$

Demostrar que $\overline{qt} = \overline{qv}$

Bibliografía:

- Geometría Métrica – Congruencia de triángulos- Paralelogramos de Hinrichsen – B. de González Beltrán y Liliana L. de Cattáneo
- Geometría de Clemens-O'Daffer- Cooney .Editorial Addison weslwy Longman