

SECRETARIA DE EDUCACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, FISICO-
QUIMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO OCTAVO - FASC. 1-2



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1948

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	PÁG.
Sobre las relaciones entre las mutuas distancias de cuatro puntos de una puntual (ALEJANDRO TERRACINI)	1
Ensayo histórico y crítico sobre la aritmética de los conjuntos y el problema del continuo (B. LEVI)	6
Una extensión del teorema de Rolle para transformaciones continuos del plano (MISCHA COTLAR)	79
Ejercicios y problemas (Propuestos)	85
Bibliografía	87

SOBRE LAS RELACIONES ENTRE LAS MUTUAS DISTANCIAS DE CUATRO PUNTOS DE UNA PUNTUAL

por

ALEJANDRO TERRACINI

1. - La llamada fórmula de Euler

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0 \quad (1)$$

que vincula las mutuas distancias de cuatro puntos arbitrarios de una recta se presenta bajo la forma de una relación del tipo

$$\sum f(BC, AD) = 0 \quad (2)$$

siendo f una función de dos variables x, y , y precisamente $f(x, y) = xy$; la sumatoria se extiende, aquí y a continuación, a los términos que se deducen permutando circularmente A, B, C y dejando fijo D . También la fórmula de Chasles relativa a A, B, C

$$\sum BC = 0 \quad (3)$$

tiene la estructura (2), siendo ahora $f(x, y) = x$.

Más generalmente, si s es un entero positivo, rige una ecuación de tipo (2) con $f(x, y) = f^{(s)}(x, y)$, si se pone

$$f^{(s)}(x, y) = (x+y)^s + (-1)^{s-1} (x-y)^s \quad (4)$$

debido a que $BC - AD = -(AB + CD)$, $CA - BD = -(BC + AD)$, $AB - CD = -(CA + BD)$. En otras palabras,

$$\sum [(BC + AD)^s + (-1)^{s-1} (BC - AD)^s] = 0 \quad (\gamma_s)$$

Las (γ_1) , (γ_2) se reducen respectivamente a las (3), (1).

2. - Cabe preguntarse cuál es el más general polinomio $f(x, y)$ de grado s en el par de variables x, y , tal que para cuatro puntos arbitrarios de una recta rija la (2). Pues bien, necesariamente

$$f(x, y) = \sum_{h=1}^s c_h f^{(h)}(x, y), \quad (5)$$

siendo las c_h constantes arbitrarias.

Sean en efecto $0, x_1, x_2, x_3$ las abscisas de A, B, C, D , de modo pues que la (2) se traduce en la

$$f(x_2 - x_1, x_3) + f(-x_2, x_3 - x_1) + f(x_1, x_3 - x_2) = 0, \quad (6)$$

la cual debe subsistir idénticamente respecto de las variables x_1, x_2, x_3 . Derivando con respecto a x_3 , se deduce que si f satisface a las condiciones requeridas, lo mismo sucede de $\partial f / \partial y$. Luego en primer término, para $s=1$ la f no depende de y , y rige la (5). Supongamos ahora que lo enunciado esté comprobado para el grado $s-1$, y pongamos

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^s a_i \varphi^{(i)}(x, y)$$

siendo $\varphi^{(i)}$ un polinomio homogéneo de grado i en x, y ($a_0, a_1, \dots, a_s$ constantes). La derivada de cada $\varphi^{(i)}$ respecto de y debe ser igual, a menos de un factor constante, al polinomio $\varphi^{(i-1)}$, y por ser $\partial \varphi^{(i)} / \partial y = i \varphi^{(i-1)}$ se sigue que

$$f(x, y) = \sum_{h=1}^s c_h f^{(h)}(x, y) + \sum b_k x^k,$$

($b_0, b_1, \dots, b_s$ constantes). Puesto que debe ser

$$\sum_{k=0}^s b_k [(x_2 - x_1)^k + (-1)^k x_2^k + x_1^k] = 0$$

idénticamente respecto de x_1, x_2 , dichas constantes son todas nulas para $k \neq 1$; por otra parte puede suponerse $b_1 = 0$ por ser $x = f^{(1)}/2$. El teorema queda así demostrado.

3.-Lo dicho en el n. 1 puede expresarse en la forma siguiente: si l, m, n, p, q, r son seis variables, la ecuación

$$f^{(s)}(l, p) + f^{(s)}(m, q) + f^{(s)}(n, r) = 0 \quad (\delta_s)$$

con s entero positivo arbitrario se cumple si

$$l = BC, m = CA, n = AB, p = AD, q = BD, r = CD. \quad (7)$$

Viceversa ¿el conjunto de las relaciones (δ_s) es *suficiente* para que existan cuatro puntos A, B, C, D de una recta, tales que l, m, n, p, q, r puedan interpretarse de acuerdo con las (7)? La contestación es negativa, porque, si ponemos

$$l = -BC, m = -CA, n = -AB, p = AD, q = BD, r = CD, \quad (8)$$

siguen subsistiendo las (δ_s) , ya que cada $f^{(s)}(x, y)$ es función impar de x .

Sin embargo, si l, m, n, p, q, r satisfacen a todas las (δ_s) , y para ello es suficiente que satisfagan las $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$, como se desprende de lo que decimos a continuación, y l, m, n son todas distintas de cero, siempre existen cuatro puntos A, B, C, D de una puntual tales que rigen o las (7) o las (8). En efecto, si se toman A, B, C, D de manera que $AD = p, BD = q, CD = r$, las $(\delta_1), (\delta_2)$ muestran que existe un número ρ tal que ⁽¹⁾

$$l = \rho BC, m = \rho CA, n = \rho AB. \quad (9)$$

Reemplazando en la (δ_3) se obtiene, si $\rho \neq 0$, es decir, si l, m, n no son todas nulas:

$$\rho^2 \sum BC^3 + 3 \sum BC \cdot AD^2 = 0,$$

y comparando con la (γ_3) se concluye que $\rho = \pm 1$, es decir, que rigen o las (7) o las (8), a menos que sea $l^3 + m^3 + n^3 = 0$, y por consiguiente $lmn = 0$.

Si $l = m = n = 0$, las (δ_s) dejan indeterminados los valores

⁽¹⁾ Habría excepción tan sólo para $p = q = r = 0$; pero en tal caso de las $(\delta_1), (\delta_2)$ se deduciría $lmn = 0$, contrariamente a la hipótesis.

de p, q, r , y por consiguiente no rige necesariamente la disyuntiva anterior. Lo mismo si uno solo de los números l, m, n es nulo: si p. e. $n=0$, las $(\delta_1), (\delta_2)$ expresan que $l=-m$ y que $p=q$, con lo cual ya se cumplen las demás (δ_s) .

Volviendo al caso $lmn \neq 0$, lo mismo da decir que existen sobre una puntual g cuatro puntos A, B, C, D tales que rigen las (7) o las

$$l=B'C', m=C'A', n=A'B', p=AD, q=BD, r=CD \quad (8')$$

siendo A', B', C' los simétricos de A, B, C respecto de un mismo punto de la g .

Todo esto subsiste igualmente si en lugar de las (γ_s) se consideran las (3), (1) y la llamada fórmula de Stewart

$$\Sigma BC \cdot AD^2 + BC \cdot CA \cdot AD = 0.$$

4. - Lo dicho puede ilustrarse mediante las siguientes consideraciones hiperespaciales. En un espacio de seis dimensiones S_6 , en el cual l, m, n, p, q, r actúan como coordenadas no homogéneas de punto, consideremos los seis S_3 :

$F_3)$ $l+m+n=0, l+r-q=0, m+p-r=0, n+q-p=0$
(una ecuación es consecuencia de las demás),

$$F'_3) \quad l+m+n=0, l-r+q=0, m-p+r=0, n-q+p=0$$

$$\Pi_3) \quad l=m=n=0$$

$$L_3) \quad l=m+n=q-r=0$$

$$M_3) \quad m=n+l=r-p=0$$

$$N_3) \quad n=l+m=p-q=0.$$

Los espacios F_3, F'_3 son los lugares de los puntos de S_6 que proceden de las cuaternas de puntos de una puntual, de acuerdo con las (7) o respectivamente las (8).

Pues bien, todas las hipersuperficies algebraicas de S_6 que pasan por F_3 y son representables por una ecuación del tipo

$$f(l, p) + f(m, q) + f(n, r) = 0 \quad .$$

(f polinomio), pasan necesariamente por $F'_3, \Pi_3, L_3, M_3, N_3$, es decir, pasan por los seis S_3 que integran la completa intersección del hiperplano, de la cuádrica y de la hipersuperficie cúbica de ecuaciones respectivas

$$l + m + n = 0 \quad (10)$$

$$lp + mq + nr = 0 \quad (11)$$

$$l^3 + m^3 + n^3 + 3(lp^2 + mq^2 + nr^2) = 0. \quad (13)$$

La V_5^2 y la V_5^3 son conos con vértice en el origen, y la cuádrica no es ulteriormente especializada: de los seis S_3 considerados tres (F_3, F'_3, Π_3) pertenecen a uno y los tres restantes al otro de los dos sistemas de $\infty^3 S_3$ de la V_5^2 . Además los seis S_3 tienen en común la recta $l = m = n = 0, p = q = r$ que, considerada en el espacio F_3 es el lugar de los puntos cuyas cuaternas imágenes sobre la puntual, de acuerdo con las (7), están integradas por tres puntos A, B, C que coinciden entre sí y un cuarto punto arbitrario.

TORINO (ITALIA), UNIVERSITÀ
(Corso Francia 19 bis)

ENSAYO HISTORICO Y CRITICO SOBRE LA ARITMETICA DE LOS CONJUNTOS Y EL PROBLEMA DEL CONTINUO

por

BEPPPO LEVI

Llamamos «aritmética de los conjuntos» a una teoría cuyo nacimiento puede datarse no más allá de tres cuartos de siglo, por la obra de Georg Cantor y que durante este tiempo ha sido objeto de investigaciones y aun de discusiones y derivaciones de orden lógico y filosófico por gran número de matemáticos de los más prominentes, sin que pueda decirse que los problemas verdaderos que esas discusiones han originado sean encaminados a una solución satisfactoria o a un acuerdo universalmente aceptado. Para precisar, decimos en seguida que el ángulo bajo el cual entendemos considerar el argumento prescinde de la derivación lógico-formal, que entiende resolver las dificultades del tema mediante varias formas de definición axiomática de la noción misma de «conjunto» (ensemble, aggregato, set. Menge) ⁽¹⁾; las razones de esta exclusión, que aparecerán más claramente en la parte final de nuestra exposición, se fundan sobre el hecho que la dirección aludida tiende preferentemente a considerar la axiomática como un análisis de las afirmaciones elementales que conviene admitir para que la deducción lógica lleve a determinados resultados auspiciados, aun en el caso de que esta condición obligue a poner en segunda fila las aplicaciones intuitivas que las palabras han tenido en su origen. Nos invita, por contrario, a dar primera importancia a este sentido intuitivo, que en particular nos presenta como ejemplos primitivos de con-

(1) Al contrario aceptamos la axiomática para conjuntos definidos como números naturales, números ordinales, etc.

juntos la noción de la sucesión de los números naturales, la idea geométrica de espacio y su representante analítico, el continuo de los números reales, además de nuestro sentimiento personal, también el hecho que las contribuciones en esta otra dirección siguen siendo numerosas; y aun recientemente varias muy autorizadas han salido a la luz⁽²⁾.

La exposición que sigue es, como dice el título, en parte histórica, en parte crítica, pero también lleva, sin explícita distinción, resultados originales que, para esta parte crítica tienen importancia fundamental. Para los fines de esta misma crítica, y para el uso de los lectores que no tuvieran familiaridad con el argumento, hemos creído conveniente a veces detallar las demostraciones de algunos resultados conocidos, más de lo que el lector experto puede considerar necesario; y de ésto le pedimos disculpas. En el enunciado de algunos teoremas hemos expresado a veces explícitamente condiciones que la costumbre considera ordinariamente como implícitamente realizadas, para mantener al razonamiento el máximo del rigor de la deducción matemática. Solamente en el párrafo final pasaremos a consideraciones de carácter más filosófico, que son necesarias para que el problema matemático sea entendido en su justo valor y para justificar nuestra personal posición al respecto.

1. - *La potencia de los conjuntos.* — Según hemos dicho, establecemos como punto de partida de la aritmética de los conjuntos una memoria publicada por G. Cantor el año 1874 en el *Journal für die reine und angewandten Mathematik und Physik* (Crelle) con el título: *Sobre una propiedad de la totalidad de los números reales*⁽³⁾. En ella el autor, con el fin de sentar sobre una base nueva y de extrema simplicidad el teorema demostrado

(²) Véase por ej. un artículo de puesta al día por KURT GOEDEL, aparecido con el título *What is Cantor's Continuum-problem?* en el fascículo de noviembre de 1947 de *The American Mathematical Monthly*, algunas comunicaciones, que serán señaladas más precisamente en lo sucesivo, presentadas a la Académie de France por A. DENJOY y E. BOREL en abril y julio 1947, así como otros artículos que citaremos oportunamente más adelante.

(³) *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen Zahlen.* Ver también GEORG. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalt, mit erläuternden Anmerkungen ... herausgegeben von ERNST ZERMELO* — Berlin, Springer, 1932, p. 115-118.

por Liouville 30 años antes, según el cual en cada intervalo numérico existen números no algebraicos, demuestra que, mientras es posible establecer una correspondencia biunívoca entre la totalidad de los números algebraicos reales y la sucesión de los números naturales (lo que enunciamos ahora brevemente diciendo que el conjunto de los números algebraicos es numerable), no es posible tal correspondencia en el caso de la totalidad de los números reales.

Quedaba así establecida, entre los dos conjuntos, el de los números reales y el de los números algebraicos, una diferencia característica, que escapaba al sistema de pensamientos que hasta entonces había dominado en el análisis, y por la cual la proposición que afirma: *existen números trascendentes*, ya no dependía más de un estudio detallado de las propiedades intrínsecas de los distintos números a consecuencia de su definición particular, sino que simplemente hacía absurda la hipótesis de la identidad de ambos conjuntos, por una simple razón de cantidad: *los números reales, considerados como cosas en sí, eran más numerosos que los números algebraicos*.

Cantor fué llevado así a introducir en la matemática una idea nueva, esto es que es posible tratar matemáticamente con un *infinito actual*, extendiendo en cierta medida a los conjuntos infinitos la posibilidad de una comparación según el *número de los elementos que los componen*; un *número* que, por cierto, no se puede expresar por cifras ni por aproximaciones en cifras, pero que se presenta como generalización inmediata de la llamada teoría cardinal de los números enteros, la cual define como igualmente numerosos dos grupos finitos de objetos cuando entre sus elementos puede establecerse una correspondencia biunívoca.

En los años sucesivos el pensamiento de Cantor fué casi exclusivamente dirigido a descubrir en sus detalles el nuevo dominio y en valorizarlo ante la oposición y el excepticismo de la matemática oficial; excepticismo por otro lado justificado en buena parte por elementos de tipo trascendente, metafísico y a veces también medio religiosos que se mezclaban en su exposición.

El primer trabajo en el cual el concepto de *conjunto* está presentado por Cantor en su forma abstracta, esto es como un sistema de elementos que no tienen por sí mismos ninguna propiedad específica, salvo la de una individualidad que permite distinguirlos uno del otro, y a tales conjuntos se apli-

ca el concepto de comparabilidad numérica independiente de finalidades analíticas contingentes, fué enviado por Cantor al *Journal* de Crelle en junio de 1877 y publicado en el vol. 84 (1878) con el título⁽⁴⁾: *Una contribución a la teoría de los conjuntos*; en ésta introduce Cantor el término que seguimos usando de *igual potencia* como análogo para los conjuntos infinitos de *igual número* para los finitos: *se dicen de igual potencia dos conjuntos cuando entre sus elementos puede establecerse una correspondencia biunívoca*; según la memoria de 1874 existen por lo menos dos potencias diferentes, la del conjunto de los números naturales y la potencia del conjunto de los números reales, que, conforme a la costumbre, llamamos *el continuo*.

2. - Veremos en seguida que hay infinitas potencias diferentes. Sin embargo, una diferencia esencial se presenta entre el número cardinal de los grupos finitos y su actual generalización; es que, mientras de un grupo finito de objetos no es posible separar una parte propia que tenga todavía el mismo número, (es decir que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el grupo completo), no es lo mismo respecto de la potencia de conjuntos infinitos. Considerando en efecto el conjunto de los números naturales, una correspondencia biunívoca entre la totalidad y una parte propia queda definida cuando a cada entero positivo x se hace corresponder el número $y = x + n$, siendo n un entero positivo fijado arbitrariamente; e igualmente cuando a x se hace corresponder $y = nx$, con $n > 1$; los ejemplos análogos se pueden multiplicar. Análogamente, en el campo de los números reales, fórmulas como $y = e^x$, $y = \operatorname{arctg} x$ hacen corresponder a la totalidad de los números respectivamente la semirecta positiva o el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Pero ¿es posible afirmar lo mismo para *cualquier conjunto que no sea un grupo finito de objetos*? Con este interrogante caemos desde ya en uno de los puntos débiles de la teoría que estamos considerando. Cantor, a principios de la memoria de

⁽⁴⁾ *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Ver: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 119-133 y también, en traducción francesa: *Acta Mathematica*, T. II, p. 311.

1878, considera como intuitivo, sin mayor explicación, que un conjunto infinito tiene siempre alguna parte propia de su misma potencia; más tarde W. Dedekind adopta esta propiedad como definición del infinito⁽⁵⁾; esto es ciertamente posible, pero nada nos asegura que ese *infinito* coincida exactamente con el no finito; queda sin contestación la pregunta de si entre grupos finitos y conjuntos infinitos no haya una tercera posibilidad; la cuestión no interesa de verdad al tema de la investigación de Dedekind, para cuya teoría la distinción del finito del infinito representa nada más que una redundancia, siendo ella más bien teoría ordinal que cardinal; pero, precisamente por esta razón, debemos creer que la pretendida definición no signifique otra cosa que la afirmación intuitiva de Cantor, es decir que, como lo dice el significado intuitivo de las palabras, *infinito* deba identificarse con *no finito*. Para eso sería necesario demostrar que *si un conjunto no es finito, siempre es posible extraer de él una parte que está en correspondencia biunívoca, elemento por elemento, con el conjunto total*. El modo más simple e inmediato de intentar tal demostración consiste evidentemente en quitar un elemento (o un grupo finito de elementos); *parece claro* entonces que, por una operación análoga a la de *contar*, podrá establecerse la requerida correspondencia entre el conjunto total y la parte restante después de esta supresión. Admitir que tal operación pueda hacerse *para cualquier conjunto* equivale en substancia al llamado *postulado de Zermelo*, sobre el cual deberemos hablar más adelante. Pero es sumamente importante notar que la anterior observación nos ha mostrado que *el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales son infinitos según Cantor-Dedekind* sin apelar a este procedimiento de elegir y de contar, luego independientemente de cualquier nuevo postulado, fuera de los que definen esos dos conjuntos, y sobre los cuales igualmente volveremos.

Igualmente podemos demostrar en seguida los teoremas siguientes:

(5) *Was and und was sollen die Zahlen?* — Braunschweig, 1888, p. 17. Puede verse también la traducción italiana de O. ZARISKI, *Essenza e significato dei numeri interi*. Colección: *Per la Storia e la Filosofia delle matematiche*, dirigida por F. Enriques - Roma, 1926.

Teorema 1-*Si un conjunto tiene la misma potencia que otro conjunto infinito según Cantor-Dedekind, es también infinito en el mismo sentido.*

En efecto, llamando A y B los dos conjuntos dados, y suponiendo conocida una parte propia A' de A , la cual por medio de una relación conocida T , está puesta en correspondencia biunívoca con A ; si B tiene la misma potencia de A , es decir, existe una relación S que pone una correspondencia biunívoca entre A y B , esta misma S hace corresponder a A' un B' , parte propia de B , y el producto STS^{-1} pone una correspondencia biunívoca entre B' y B .

Teorema 2-*Si un conjunto C tiene un subconjunto C' infinito según Cantor-Dedekind, es infinito en el mismo sentido.* Si en efecto llamamos C'' una parte propia de C' , en correspondencia biunívoca con él, y D la parte complementaria de C' , respecto de C , será $C = C' + D$ y $C'' + D$ será parte propia de C . Queda entonces definida una correspondencia biunívoca entre los elementos de $C'' + D$ y de C por la convención que a los elementos de C'' corresponden los de C' , según la correspondencia supuesta y los elementos de D son unidos (cada uno corresponde a sí mismo).

En particular, *todo conjunto que contiene una parte numerable es infinito en el sentido de Cantor-Dedekind.* Así el hecho que el continuo es un conjunto infinito según Cantor-Dedekind resulta inmediato sin necesitar demostración adrede, como hemos indicado al principio del párrafo.

3.- Antes de adelantarnos mayormente en el estudio abstracto de los conjuntos no será inútil, a los fines de comparación, volver un momento sobre los antecedentes históricos a los que hemos aludido en el n. 1.

He aquí primero brevemente la demostración de Liouville de la existencia de números no algebraicos⁽⁶⁾. Como se sabe, se dice algebraico todo número que sea raíz de una ecuación

(6) *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à les irrationnelles algébriques* (Journal de Mathématiques, T. 10 (1851), p. 133). La memoria es reproducción de dos comunicaciones a la Academia de Francia publicadas en los Comptes Rendus, T. XVIII (1844).

algebraica a coeficientes enteros (o racionales); sea pues ξ tal número irracional, raíz de la ecuación

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (3.1)$$

donde las a_i son números enteros positivos, negativos o ceros; se puede suponer que esta ecuación no tenga raíces racionales, porque a cada una de ellas correspondería un factor lineal de $f(x)$, que se podría eliminar por división, sin alterar la integridad de los coeficientes. Sea entonces $\frac{p}{q}$ un número racional cualquiera; sera

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{P}{q^m}, \quad P \text{ entero } \neq 0$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi) = \frac{P}{q^m} = a_0 \left(\frac{p}{q} - \xi\right) \left(\frac{p}{q} - \xi_1\right) \dots \left(\frac{p}{q} - \xi_{m-1}\right) \quad (3.2)$$

donde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ son las demás raíces de (3.1), que pueden ser reales o complejas, sin excluir que alguna pudiera ser la misma ξ . Si $\frac{p}{q}$ puede considerarse de alguna manera valor aproximado de ξ , la distancia, sobre el plano de Gauss, del punto $\frac{p}{q}$ a cada uno de los puntos ξ_i será menor que un cierto número ρ , será luego

$$a_0 \left| \frac{p}{q} - \xi_1 \right| \cdot \left| \frac{p}{q} - \xi_2 \right| \dots \left| \frac{p}{q} - \xi_{m-1} \right| < a_0 \rho^{m-1} = M$$

y por tanto de (3.2) se deduce

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{|P|}{M} \frac{1}{q^m} \geq \frac{1}{M} \frac{1}{q^m}.$$

Si finalmente se supone $q \geq M$, resulta todavía

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| \geq \frac{1}{q^{m+1}}.$$

Resulta así demostrada la siguiente propiedad relativa a la aproximación racional de los números algebraicos: *para cualquier número algebraico ξ , raíz de una ecuación a coeficientes racionales de grado m , existe un valor finito M tal que toda fracción $\frac{p}{q}$ aproximante de ξ , con denominador $q > M$ difiere de ξ en más de $1:q^{m+1}$.*

Sobre la base de esta observación, para demostrar la existencia de números trascendentes bastará, siguiendo a Liouville, construir un número que se pueda aproximar por números racionales de denominadores tan grandes como se quiera, con error menor de una potencia negativa tan elevada como se quiera de dichos denominadores. Para este fin consideremos un número N representado por una serie de la forma

$$N = \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + \frac{a_3}{q_3} + \dots$$

donde

$$q_i = [\text{m. c. m. } (q_1, q_2, \dots, q_{i-1})]^i l_i = q_{i-1}^i \cdot l_i \quad (l_i \text{ entero})$$

y donde los numeradores a_i quedan acotados ($1 \leq a_i \leq a$). La suma parcial de los primeros $i-1$ términos tendrá la forma $\frac{A}{q_{i-1}}$, donde A es un entero y el resto correspondiente será:

$$\begin{aligned} R_i = N - \frac{A}{q_{i-1}} &= \frac{1}{q_{i-1}^{i-1}} \left[\frac{a_i}{q_{i-1} l_i} + \frac{a_{i+1}}{q_{i+1} \cdot q_{i-1}^{i-1}} + \dots \right] \\ &< \frac{1}{q_{i-1}^{i-1}} a \left[\frac{1}{q_{i-1} l_i} + \frac{1}{q_{i+1} \cdot q_{i-1}^{i-1}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Los denominadores q_i crecen más rápidamente que la sucesión

$$2, 2^2, 2^{2 \cdot 3}, \dots$$

y luego las razones $q_k : q_{i-1}^{i-1}$ más rápidamente que la sucesión

$$2, 2^2, 2^3, \dots$$

y, por i bastante elevado será pues

$$a \left[\frac{1}{q_{i-1} l_i} + \frac{1}{q_{i+1} : q_{i-1}^{i-1}} + \dots \right] < 1.$$

Se sigue que el número N no puede ser raíz de una ecuación algebraica de coeficientes enteros y de grado m como se quiera porque, en caso de existir tal ecuación, podría calcularse un valor de M según el teorema anterior; eligiendo entonces $i \geq m+2$, bastante elevado para que aun $q_{i-1} > M$, la limitación obtenida para R_i estaría en contradicción con el teorema.

En el modo más simple, un sistema infinito de números trascendentes de la forma N de Liouville se obtiene fijando un número q que se toma como base de un sistema de numeración (por ej. en la ordinaria numeración decimal, $q=10$) y suponiendo que las a_i sean cifras (es decir $0 \leq a_i < q$) y poniendo finalmente

$$N = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^{2,3}} + \dots + \frac{a_i}{q^{i!}} + \dots$$

Estos números N se llaman habitualmente *números de Liouville*.

Se nota en seguida que haciendo corresponder a cada N el número

$$\bar{N} = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \dots + \frac{a_i}{q^i} + \dots,$$

el sistema de estos $\bar{N}$ se identifica con el conjunto de todos los números reales del intervalo 0-1; por lo tanto, según la terminología de Cantor, *el conjunto de los números trascendentes de Liouville tiene la misma potencia del sistema de los números reales del intervalo 0-1*.

Notamos todavía que nada cambiaría en la deducción que precede si, para escribir el número N , se admitieran términos con denominador potencias de q con exponentes intermedios entre los escritos arriba, pero no superiores a un cierto k , que se puede fijar arbitrariamente, porque en la demostración interesan sola-

mente los términos de la serie correspondientes a valores del índice *i* suficientemente elevados; la demostración de Liouville permite luego afirmar que *existen números trascendentes, tan próximos como se quiera de cualquier número racional*. Y por cuanto sabemos que los números racionales son densos en el continuo lineal, resulta también que *el sistema de los números trascendentes es denso en el continuo lineal*.

4. - Como hemos dicho en el n. 1, para demostrar el mismo teorema, Cantor, en la citada memoria de 1874, se orienta hacia un orden de consideraciones totalmente distinto: en vez de considerar una propiedad característica, pero individual de cada número algebraico, considera una propiedad global del conjunto de todos los números algebraicos (*el sistema de los números algebraicos es numerable*) que le permite afirmar que estos son demasiado poco numerosos para comprender todos los números reales.

La numeración de la totalidad de los números algebraicos (reales) se obtiene por la siguiente simple consideración: cada número algebraico es raíz de una determinada ecuación irreducible a coeficientes enteros; sea *m* el grado de esta ecuación; la misma está determinada por sus coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_m$; pongamos

$$N = m + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m|;$$

por cada número algebraico queda así determinado un valor determinado (entero) de *N*. Recíprocamente a cada valor asignado de *N* corresponde un número finito de números algebraicos (irracionales) — que puede también ser cero. Este grupo finito de números algebraicos, una vez conocido, se puede ordenar en un modo determinado, por ej. en orden creciente de magnitud.

Para numerar la totalidad de los números algebraicos bastará luego atribuir a *N* sucesivamente todos los valores de los números naturales y para cada uno de ellos, tomados en su orden natural, escoger de entre las ecuaciones en número finito de las cuales el valor *N* determina los posibles coeficientes, las que no presentan entre los coeficientes un factor común (y que, por lo tanto, no se habrán presentado ya para un menor valor de *N*) y que tampoco son expresables como productos de ecuaciones precedentes; por fin ordenar según orden creciente de magnitud a las raíces reales de las ecuaciones así obtenidas. Debe

notarse que la determinación, aunque posiblemente larga, se efectúa en todos los casos por medio de un número finito de operaciones sobre números racionales (o, lo que es lo mismo, sobre números enteros) pues la ordenación de las raíces según magnitud se efectúa sin el propio conocimiento numérico de las mismas, siendo suficiente su completa separación que se realiza por procedimientos racionales. Disponiendo finalmente los distintos grupos de raíces así ordenados según los valores crecientes del número N que los caracteriza queda definido un número de orden para cada número algebraico, en cuanto definido por una determinada ecuación.

6. — Para demostrar que, por opuesto, no habrá podido de esta manera alcanzarse a todos los números reales, y que, por lo tanto, deberá existir entre éstos, algunos no-algebraicos, pasa luego Cantor a demostrar que *dada una sucesión infinita numerada de números reales*

$$a_1 a_2 a_3 \dots \quad (6, 1)$$

y fijado arbitrariamente sobre la recta real un intervalo $\alpha-\beta$ ($\alpha < \beta$), es siempre posible elegir, dentro de este intervalo, un número que no pertenece a la sucesión (6.1)..

En efecto, es evidente en seguida que no necesitaría demostración si se supiera que ningún número del intervalo $\alpha-\beta$ pertenece a la sucesión. Lo mismo si dentro del intervalo existiera sólo un número finito de elementos de la sucesión, pues éstos lo dividirían en partes, dentro de cada una de las cuales no existirían puntos de la sucesión. Supongamos luego que dentro del intervalo $\alpha-\beta$ existan infinitos elementos (6,1) (para el razonamiento es suficiente que existan por lo menos dos); habrá, entre estos, dos de índice mínimo; llamémoslos α' y β' ($\alpha' < \beta'$). El intervalo $\alpha'-\beta'$ es interno a $\alpha-\beta$; sobre él puede repetirse la misma consideración hecha sobre $\alpha-\beta$, concluyendo que, o sin más está constituido por puntos no de la sucesión (salvo un número finito), o bien existen en él dos nuevos elementos α'' , β'' ($\alpha'' < \beta''$) de (6.1), de índice mínimo. Sobre $\alpha''-\beta''$ se repetirá entonces la misma consideración, y así adelante. Podrán evidentemente presentarse dos casos: 1º. que se llegue por fin a un intervalo $\alpha^{(i)}-\beta^{(i)}$ dentro del cual existe sólo un número finito de ele-

mentos de la sucesión (6,1); queda entonces determinado un intervalo dentro del cual no existen elementos y un número cualquiera interno a este intervalo realiza la afirmación; 2º. que la operación se continúe indefinidamente: quedan entonces definidas dos sucesiones de elementos extraídos de (6,1)

$$\alpha' < \alpha'' < \alpha''' < \dots, \quad \beta' > \beta'' > \beta''' > \dots$$

tales que los números de la primera son siempre menores de cualquier número de la segunda; cada una de estas sucesiones tiene pues un límite determinado y, poniendo

$$\lim \alpha^{(i)} = \alpha^\infty, \quad \lim \beta^{(i)} = \beta^\infty,$$

será

$$\alpha^\infty \leq \beta^\infty.$$

Notemos ahora que los índices de los $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ en la sucesión (6,1) son crecientes y, por ser estos elementos infinitos, toman valores mayores de cualquier entero asignado; se infiere en seguida que $\alpha^\infty, \beta^\infty$ y cualquier número del intervalo entre ellos (en el caso que los dos números sean desiguales) no puede pertenecer a la sucesión (6,1), porque, en la hipótesis que le perteneciera tendrían un índice finito y no podría estar dentro de un intervalo $\alpha^{(i)} - \beta^{(i)}$ para el cual los números $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ tuvieran índices mayores de aquél. Queda así demostrada la proposición.

7. — La demostración actualmente en uso, fundada sobre el llamado *procedimiento diagonal*, fué publicada por Cantor sólo mucho más tarde⁽⁷⁾ cuando sus ideas sobre la teoría de los conjuntos habían tomado la forma final más abstracta, independiente de las características analíticas de los números. Vamos a recordarla, en una forma ligeramente distinta de la propia de Cantor para tener todavía en cuenta la naturaleza analítica de la proposición enunciada.

Podemos suponer, por simplicidad, que el intervalo $\alpha - \beta$ del enunciado sea el $0 < x < 1$; y que los números de la sucesión (6,1) pertenezcan sin más a este intervalo (lo que se obtiene en

(7) *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (Jahresbericht d. d. Mathematiker-Vereinigung Bd 1, p. 75 (1890-91) — Ges. Abhand. p. 278.

todo caso suprimiendo los otros); cada uno de estos números puede entonces representarse por un decimal de infinitas cifras (admitiendo también el caso que éstas puedan ser, desde un cierto momento, todas 0 y excluyendo, al contrario, el caso de períodos formados con la sola cifra 9, para que la representación sea unívoca). Indiquemos con γ_{ij} la cifra que ocupa el puesto decimal j en el número a_i y formemos la sucesión de las cifras

$$0, \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} \dots \quad (7,1)$$

Supongamos entonces fijada una sustitución entre cifras que no deje invariada ninguna y tal que entre las cifras sustituidas no aparezca ni 0, ni 9; tal, por ej.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad (7,2)$$

Aplicando a las cifras de (7,1) esta sustitución resulta definido un número

$$0, \delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} \dots \quad (7,3)$$

que no puede coincidir con ninguno de los a_i porque su cifra δ_{ii} es diferente de la γ_{ii} y, por medio de la exclusión de las cifras 9 y 0, se ha eliminado la posibilidad de que pudiera ser solamente una distinta representación de un eventual a_i racional, o que pudiera el número (7,3) reducirse a 0 o 1.

Esta demostración difiere de la propia de Cantor por el hecho de despreciar él este último cuidado. En vez de referirse, como nosotros lo hicimos aparentemente para estar con la costumbre, a la base 10 de la numeración decimal, Cantor utiliza la base 2; en este caso la sola sustitución posible que no deje invariada ninguna cifra es la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y no sería tampoco posible respetar la exclusión de las cifras extremas de entre las cifras sustituidas.

La demostración cantoriana, entendida rígidamente, no esta-

blece por tanto la proposición del n. 6, sino la siguiente: *asignada una cualquier sucesión numerada de sucesiones infinitas formadas con las cifras 0,1 es siempre posible construir una sucesión infinita de dichas cifras que no está comprendida entre las propuestas.* Como corolario inmediato resulta que *el conjunto de las sucesiones infinitas formadas con las cifras 0,1 no es numerable*, porque la hipótesis de que se las pudiera numerar llevaría a la conclusión que, después de haber establecido la numeración, se encontraría una sucesión de esa clase a la cual no podría habersele asignado ningún número. En otra forma la proposición puede enunciarse: *El conjunto de las funciones definidas sobre el conjunto de los números naturales y cuyos valores son solamente 0 y 1 no es numerable.* Encontraremos pronto una proposición mucho más general.

8. — El complemento necesario para pasar de la proposición demostrada a la del n. 6 (o más precisamente a una equivalente) lo sugiere Cantor en forma de una observación incidental en otra memoria publicada pocos años después⁽⁸⁾, demostrando que *el conjunto de las sucesiones infinitas que se pueden formar con dos signos, 0 y 1, tiene la misma potencia del continuo de los números reales* (del intervalo 0-1). Basta observar que dicho conjunto, que llamaremos S , se descompone en tres partes —las llamaremos C_1 , C_2 , D — constituidas respectivamente por aquellas sucesiones, cada una de las cuales comprende solamente un número finito de signos 1 (luego infinitos 0), por las cada una de las cuales comprende solamente un número finito de 0 (e infinitos 1) y por las sucesiones restantes con infinitos 0 e infinitos 1. Por otra parte el conjunto de los números reales en el intervalo 0-1, que llamaremos R , se descompone en dos partes: una formada por las fracciones cuyo denominador es potencia de 2, que llamaremos A , y la complementaria de ésta, que llamaremos B . El conjunto B , por medio de la representación binaria, se pone en correspondencia biunívoca con D ; el conjunto A es análogamente en correspondencia biunívoca con cada uno de los conjuntos C_1 y C_2 . Usando el signo $\equiv$ por ex-

⁽⁸⁾ En *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* § 4 (Contribuciones a la fundación de la teoría de los conjuntos transfinitos) (Math. Annalen Bd 46 - 1895) - Ges. Abhandl., p. 289.

presar «de igual potencia», se simbolizan estas conclusiones por

$$C_1 = A, \quad C_2 = A, \quad D = B$$

$$S = C_1 + C_2 + D = A + A + B, \quad R = A + B.$$

Se sabe que A , como parte del conjunto de los números racionales —el cual es numerable—, es también numerable y que la suma de dos conjuntos numerables es todavía numerable; luego, siempre entendiendo el signo $=$ por «de igual potencia»,

$$A + A = A, \quad S = A + B = R.$$

Transportando luego al conjunto R la conclusión antes obtenida para el conjunto S , podremos afirmar que *el conjunto de los números reales no es numerable*; no puede por tanto coincidir con el conjunto de los números algebraicos.

9. — Comparando las distintas demostraciones dadas en los párrafos anteriores para un mismo hecho, se presentan algunas observaciones importantes.

Liouville nos ofrece (n. 5) una construcción efectiva de infinitos números trascendentes, cada uno de los cuales puede considerarse como analíticamente conocido en la misma manera que consideramos como analíticamente conocido cualquier otro número real; no es solamente que nosotros podamos afirmar que escribiendo casualmente cifras, convenientemente espaciadas con la interposición de ceros según una ley determinada el número decimal que así se presenta a nuestra imaginación será necesariamente trascendente, aunque no exactamente conocido hasta que las infinitas cifras significativas no sean unívocamente determinadas. Por cuanto hemos observado que a cada número real podemos hacer corresponder un número de Liouville formado con las mismas cifras, tomadas en el mismo orden, salvo la susodicha interposición de cifras 0, quedan efectivamente determinados números de Liouville en la misma medida y con los mismos medios analíticos que se determinan números irracionales, o generalmente fracciones no decimales. Resulta al mismo tiempo definida una correspondencia biunívoca entre una determinada clase de números de Liouville y la totalidad de los números reales. Pronto demostra-

remos, por el teorema llamado de Cantor-Bernstein, que, añadiendo a esta conclusión el hecho que, efectivamente, los números trascendentes son una parte de los números reales, queda definida una correspondencia entre unos y otros, completándose así una demostración constructiva de que *el conjunto de los números trascendentes tiene la misma potencia que el conjunto de los reales*. Implícitamente queda también demostrado que *el conjunto de los números trascendentes es denso en cualquier intervalo de la recta real*.

La primera demostración de Cantor (n. 6) es todavía constructiva; pero, por penetrar menos hondamente en las características analíticas de los números algebraicos, la construcción es más bien ideal que efectuable con una ley inteligible; se demuestra en efecto la proposición última enunciada con dar un procedimiento por el cual, dentro de un cualquier intervalo asignado queda completamente definido por límite⁽⁹⁾ un número trascendente, en cuanto se haya anteriormente asignado un número de orden a cada número algebraico — numeración que no se puede efectuar de otra manera que con un examen detallado de esos números, uno por uno. La demostración en sí nada dice sobre la potencia del conjunto de los números trascendentes, resultando la no-numerabilidad, sólo por absurdo, de la aplicación del procedimiento demostrativo a *cualquiera* sucesión numerable de números.

La demostración del n. 7, que podríamos llamar segunda demostración de Cantor modificada, utiliza de la noción de número real solamente la propiedad de límite que permite definir cada número real por su representación decimal; así reducido el contenido analítico de la argumentación, permite todavía determinar efectivamente un número trascendente dentro de cada intervalo de la forma $n^{-n} + 1$ ⁽¹⁰⁾ por el hecho de conocer una numeración de los números algebraicos, según el procedimiento de la primera demostración. De este número trascendente se determi-

(9) Los casos considerados en la demostración del n. 6 en los cuales el procedimiento terminaría, después de un número finito de pasos por encontrarse un intervalo vacío de elementos de la sucesión (6, 1) o bien se llegara a $\alpha^\infty < \beta^\infty$ no pueden presentarse efectivamente por ser el conjunto de los números algebraicos denso en cualquier intervalo de la recta real.

(10) Nosotros hemos considerado solamente el intervalo 0-1, pero la extensión es inmediata teniendo en cuenta la densidad de los números algebraicos.

nan las cifras decimales una después de la otra, pero no se puede dirigir *a priori* su ubicación en el intervalo considerado. Puede sin embargo obtenerse un conjunto denso de números trascendentes, una vez determinado uno, con sumar a éste todos los números algebraicos.

Finalmente la segunda demostración de Cantor, sin modificar, (como lo hemos expuesto en los n. 7—8), razona sólo formalmente sobre los números considerados como conjuntos de cifras decimales; la existencia de números trascendentes resulta únicamente por absurdo, sin ninguna indicación para una construcción efectiva de ellos.

10. — Sin embargo algunos resultados notables vamos a obtener en seguida extendiendo este razonamiento de Cantor a conjuntos más generales.

Suponiendo dados dos conjuntos A, B , podemos considerar el conjunto de las funciones $y=f(x)$, definidas sobre B , cuyos valores y pertenecen a A (es decir el conjunto cuyos elementos son los grupos de elementos de A — no necesariamente distintos — que se obtienen aplicando a cada elemento de B uno de A ; o, en forma posiblemente más representativa, el conjunto de los arreglos con repetición de clase B de elementos de A). Se representa tal conjunto con el símbolo A^B ⁽¹¹⁾, y se llamará la operación entre conjuntos así definida *exponenciación*.

Imitando el procedimiento diagonal se obtiene en seguida que vale el

Teorema 1. — *Si existe entre los elementos de A una sustitución S sin elementos unidos, la potencia de A^B es necesaria-*

⁽¹¹⁾ Si A y B son grupos finitos, respectivamente de m y de n elementos, el conjunto A^B es todavía finito componiéndose de m^n elementos, como se demuestra fácilmente por inducción. En efecto, por $n=1$ se tendrá únicamente el mismo conjunto A , con m^1 elementos; supongamos por otra parte que sean N las funciones $y=f(x)$ distintas que tienen por valores elementos de A , mientras x recorre los elementos de B , salvo uno que arbitrariamente se habrá excluido; cada una de estas funciones determina m distintas definidas en todo B , al asignar, como valor de la función para el elemento excluido, uno cualquiera de los elementos de A ; resulta que el número de las funciones $f(x)$ definidas sobre todo B será Nm ; si se admite que $N=m^{n-1}$, este número será luego m^n . Habiendo verificado la afirmación para $n=1$, queda luego demostrada para cualquier n .

Esta observación da razón de la elección del símbolo.

mente diferente de la de B . Supongamos, en efecto, por absurdo, que pudieran A^B y B tener la misma potencia; esto significaría que existe una función de dos variables $\Phi(x, z)$ tal que para cada valor de z en B se identifica con una función $y=f(x)$ elemento del conjunto A^B ; viceversa todas las $f(x)$ se obtendrán de esta manera. Consideremos entonces la función $S\Phi(x, x)$; por lo dicho debería existir un z_0 en B tal que $\Phi(x, z_0)=S\Phi(x, x)$; luego, en particular $\Phi(z_0, z_0)=S\Phi(z_0, z_0)$; pero esta igualdad contradice la hipótesis de que la sustitución S no tenga elementos unidos.

La hipótesis de existir la sustitución S no se cumple evidentemente si A se compone de un solo elemento o es vacía; en estos casos en efecto el teorema pierde sentido, pues el conjunto A^B contiene un solo elemento o bien no existe. Si el conjunto A contiene más que un elemento, la experiencia corriente de los conjuntos con los cuales trata habitualmente el matemático nos dice que la hipótesis está siempre realizada. En efecto, para los conjuntos finitos basta tomar por S una sustitución circular; para los conjuntos numerables o de la potencia del continuo, podrá considerarse como generalización natural de ésta la incrementación de cada elemento (número natural o número real) por una constante; aún, más generalmente, si el conjunto A sabe descomponerse en dos partes de igual potencia, bastará permutar estas dos partes, llevando los elementos de una sobre los que les corresponden en cualquier correspondencia apta a asegurar la supuesta igualdad de las potencias; sobre esta situación volveremos pronto. Pero vale la pena notar que la idea de conjunto es en realidad tan amplia e indeterminada que la hipótesis debe enunciarse explícitamente por faltar una demostración general de existencia de la sustitución S . Por igual motivo conviene enunciar explícitamente la hipótesis en el siguiente

Teorema 2—*Si en el conjunto A se sabe distinguir un par de elementos a_1, a_2 , queda determinada en el conjunto A^B una parte propia que tiene la potencia de B . Ella es la constituida por las funciones que toman el valor a_1 para todos los x en B salvo uno, para el cual la función toma el valor a_2 ; cada una de estas funciones corresponde de esta manera a un determinado elemento de B .*

La consideración de los conjuntos de la forma A^B será fundamental en lo sucesivo.

11. — Notamos por ahora que, a consecuencia de los dos teoremas demostrados, tenemos en esta exponenciación de conjuntos una operación por la cual, dado un conjunto *cualquiera* B , estamos en condición por generar otro, u otros, que no tienen la potencia de B , pero de los cuales se puede separar una parte con la potencia de B : en el modo más simple, bastará para eso asumir como conjunto A el de dos elementos 0 y 1; si se lo indica como de costumbre por 2 (considerado aquí como número cardinal) el nuevo conjunto será luego 2^B ⁽¹²⁾ y se presenta espontáneo siguiendo el principio de que la parte es menor que el todo, escribir

$$B < 2^B \quad (\text{más generalmente } B < A^B)$$

G. Cantor consideró desde el principio que la ilación no pudiera ser dudosa; dice, en efecto, en las primeras líneas de la citada memoria de 1878 ⁽⁴⁾: «Si dos conjuntos M y N no son de igual potencia, *entonces* tendrá M igual potencia con una parte de N o bien tendrá N igual potencia con una parte de M ; en el primer caso llamaremos la potencia de M menor que la de N , en el segundo caso la llamaremos mayor que la potencia de N ». Claro es, sin embargo, que esta extensión automática a conjuntos infinitos de una relación conocida para los conjuntos finitos no es admisible, pues un reparo ya se encuentra en el hecho que, por la definición misma, puede una parte de un conjunto infinito tener la misma potencia del conjunto total. Para justificar la ilación es pues necesario establecer, por lo menos ⁽¹³⁾, que *si dos conjuntos no tienen la misma potencia y uno de ellos tiene la misma potencia*

⁽¹²⁾ El conjunto 2^B admite una interpretación por la cual ha adquirido una particular consideración en la axiomática de los conjuntos. Si en efecto se considera cualquier conjunto parcial extraído de B y se hace corresponder la cifra 1 a cada uno de sus elementos, luego la cifra 0 a cada uno de los elementos de B que no pertenece a ese conjunto, se genera evidentemente un elemento de 2^B ; la correspondencia es sin más recíproca. Desde el punto de vista de dicha axiomática, cabe sin embargo observar que las ideas primitivas que se aplican en las dos formaciones son distintas por cuanto la noción de exponenciación recurre únicamente a la idea de *poner en correspondencia* de la cual ninguna teoría de conjuntos puede separarse, mientras la noción de *conjunto de los conjuntos parciales* se funda sobre la idea de “parte”, cuya interpretación puede todavía ser sujeta a examen.

⁽¹³⁾ Es decir, salvo deducir como sigue que se conservan las demás propiedades de la desigualdad numérica.

que una parte del otro, no es posible extraer del primero una parte que tenga la misma potencia del segundo; llamaremos esta proposición *hipótesis de Cantor*.

Si esto es cierto, podrá aceptarse esta condición como definición de la relación de $<$ entre las potencias: diremos pues que

$$\text{potencia } A < \text{potencia } B$$

si se verifican las dos condiciones:

1º. potencia $A \neq$ potencia B

2º. Existe una parte A' de B que tiene la misma potencia de A .

Y la hipótesis de Cantor asegura que:

a) Las dos relaciones

$$\text{pot } A < \text{pot } B, \quad \text{pot } B < \text{pot } A$$

se excluyen mutuamente, pues se ha admitido que por 1º. y 2º. queda excluido que B tenga la misma potencia que una parte de A .

b) Vale la propiedad transitiva: si

$$\text{pot } A < \text{pot } B \quad \text{y} \quad \text{pot } B < \text{pot } C,$$

será necesariamente

$$\text{pot } A < \text{pot } C;$$

en efecto, se ve en seguida que

$$\text{pot } A \neq \text{pot } C$$

porque, por a), son incompatibles las dos relaciones

$$\text{pot } A < \text{pot } B, \quad \text{pot } B < \text{pot } C = \text{pot } A;$$

por otra parte, existiendo una parte B' de C con la misma potencia de B y en B una parte A' con la potencia de A ; por la correspondencia biunívoca supuesta entre B y B' , queda definida en B' una parte A'' de la potencia de A' , luego de A ; y A'' es parte de C .

Resulta así que, siempre suponiendo cierta la hipótesis de Cantor, queda definida entre potencias una relación de desigualdad que tiene las propiedades formales de la desigualdad entre números.

En el párrafo siguiente vamos a demostrar una notable proposición de Félix Bernstein (1896) que transforma en teorema la hipótesis de Cantor; notamos en mientras que las palabras que hemos reproducido de Cantor dicen efectivamente algo más, pues afirman sin más que *si dos conjuntos no tienen la misma potencia, uno de ellos tendrá potencia mayor que el otro*, quedando así excluída la posibilidad de que dos conjuntos no fueran comparables bajo el aspecto de la potencia. Para superar esta dificultad, E. Zermelo enunció más tarde el postulado que lleva su nombre y sobre el cual nos reservamos discutir más adelante. Nosotros preferimos dejar por el momento sin decisión este problema más amplio y llamaremos *comparables* dos conjuntos cuando entre sus potencias pueden establecerse las relaciones de igualdad y desigualdad, según las definiciones que anteceden.

12. - El teorema de Bernstein⁽¹⁴⁾ enuncia precisamente que:

⁽¹⁴⁾ Es muy de costumbre recordar esta proposición como TEOREMA DE CANTOR-BERNSTEIN, asociando aun frecuentemente el nombre de Schroeder. No resulta sin embargo que nunca Cantor se haya preocupado por una demostración del teorema que, como observamos antes, él consideraba más bien como evidente. El simple hecho de que la demostración que sigue expresa verdaderamente algo al dar una construcción efectiva de una correspondencia entre los conjuntos A y B sobre la base de correspondencias que se suponen totalmente definidas por hipótesis, constituye una demostración indirecta de que tal evidencia es ilusoria. Debe de todos modos tenerse en cuenta que Bernstein expuso la primera vez su demostración en un seminario dirigido en Halle por Cantor, en 1896, y la demostración fué luego publicada por Borel en 1898 en un apéndice de sus *Leçons sur la théorie des fonctions* (primer volumen de la conocida colección de monografías que lleva su nombre). En el mismo año 1896, Ernst Schroeder publicó en los *Jahresberichte d. d. Mathematiker-Vereinigung* un esbozo de demostración, aparecido luego nuevamente en 1898 en las *Nova Acta* de la Academia Leopoldina, cuyo punto de salida no difiere esencialmente del de Bernstein, pero que no alcanza el resultado, sea por cuanto no llega a la definición de la correspondencia, sea por un error en la deducción que señala A. Korselt en una breve nota de *Math. Annalen*, 70 (1910). En 1901 E. Zermelo publicó en las *Göttinger Nachrichten* una demostración que tendremos ocasión de recordar más adelante (n. 19) y que no difiere de la anterior sino por el formalismo.

Si dos conjuntos A y B son tales que el primero tiene la misma potencia de una parte del segundo y recíprocamente el segundo tiene la misma potencia de una parte del primero, entonces los dos conjuntos A y B tienen la misma potencia; más precisamente: si A y B son conjuntos dados y si están dadas dos correspondencias T_1 y T_2 tales que la primera a cada elemento de A haga corresponder en modo unívoco un elemento de un conjunto parcial de B y la segunda a cada elemento de B haga corresponder en modo unívoco un elemento de un conjunto parcial de A , queda definida una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y de B .

Supongamos en efecto conocida la correspondencia biunívoca T_1 que representa el conjunto A sobre una parte propia de B , que llamaremos A' y la correspondencia T_2 que representa B sobre una parte propia de A , que llamaremos B' . En símbolos ⁽¹⁴⁾

$$T_1 A = A' \subset B, \quad T_2 B = B' \subset A. \quad (12.1)$$

Vamos a construir una tercera correspondencia que representa A sobre B . Aplicando a los dos miembros de la primera relación (1) la transformación T_2 y a los dos miembros de la segunda relación la transformación T_1 se obtiene

$$T_2 T_1 A = T_2 A' \subset T_2 B = B' \subset A \quad (12.2)$$

$$T_1 T_2 B = T_1 B' \subset T_1 A = A' \subset B.$$

Evidentemente se puede seguir aplicando, en modo análogo, alternativamente, las dos transformaciones T_1 y T_2 , cada vez a las fórmulas últimas obtenidas, análogas a (1), (2), y teniendo en cuenta (1) para cerrar la cadena, obteniendo así las dos sucesiones ilimitadas de inclusiones

$$\begin{aligned} A \supset B' = T_2 B \supset T_2 T_1 A \supset T_2 T_1 T_2 B \supset T_2 T_1 T_2 T_1 A \supset \dots \\ B \supset A' = T_1 A \supset T_1 T_2 B \supset T_1 T_2 T_1 A \supset T_1 T_2 T_1 T_2 B \supset \dots \end{aligned} \quad (12.3)$$

⁽¹⁴⁾ Usamos, como de costumbre actualmente, el signo $\subset$ para significar "es parte de"; luego $\supset$ por "contiene como parte"; recordamos sin embargo que, según el significado original de Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*) y de Peano, en el cual el signo resultaba de una deformación de la letra C , deberían los dos signos invertirse.

En cada una de estas sucesiones, por ser cada término una parte propia del anterior, dos casos pueden presentarse: o bien que por tal proceso de reducción sucesiva vienen a excluirse progresivamente todos los elementos respectivamente de los conjuntos dados A, B ; o bien que existe en cada uno de ellos un conjunto de elementos que nunca vienen eliminados y que por lo tanto es común a todos los conjuntos de la sucesión. Llamaremos respectivamente A^0 y B^0 estos restos, entendiendo que en la primera eventualidad estos A^0 y B^0 representarán conjuntos nulos. Tendremos luego, por las (3)

$$A = (A - T_2 B) + (T_2 B - T_1 T_1 A) + (T_2 T_1 A - T_2 T_1 T_2 B) + \dots + A^0 \quad (12.4)$$

$$B = (B - T_1 A) + (T_1 A - T_1 T_2 B) + (T_1 T_2 B - T_1 T_2 T_1 A) + \dots + B^0$$

Hay que notar también que a partir del segundo término la segunda sucesión (3) se obtiene de la primera aplicándole la transformación T_1 y análogamente la primera sucesión se obtiene aplicando a la segunda la transformación T_2 ; se sigue que los conjuntos A^0 y B^0 se transforman uno en el otro por las relaciones

$$T_1 A^0 = B^0, \quad T_2 B^0 = A^0 \quad (12.5)$$

y, en particular son conjuntamente nulos o no nulos.

Por fin observamos que en la primera suma (4) los términos de puesto impar se deducen del primero de ellos aplicándole sucesivamente las operaciones

$$T_2 T_1, \quad T_2 T_1 T_2 T_1, \quad \dots$$

y los términos de orden par se obtienen del primer término de la segunda suma aplicándole sucesivamente las operaciones

$$T_2, \quad T_2 T_1 T_2, \quad \dots$$

Análogamente los términos de la segunda suma se obtienen respectivamente del primero de la misma y del primero de la primera suma aplicándoles respectivamente las sucesivas operaciones

$$T_1 T_2, T_1 T_2 T_1 T_2, \dots \text{ y } T_1, T_1 T_2 T_1, \dots;$$

resulta que, si se pone por brevedad

$$T_2 T_1 = U, \quad T_1 T_2 = V,$$

las fórmulas (4) se pueden escribir simbólicamente⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} A &= (1+U+U^2+\dots)(A-T_2 B) + \\ &\quad T_2(1+V+V^2+\dots)(B-T_1 A) + A^0 \\ B &= (1+V+V^2+\dots)(B-T_1 A) + \\ &\quad T_1(1+U+U^2+\dots)(A-T_2 B) + B^0 \end{aligned} \quad (12.6)$$

Se ve en seguida que el segundo término de la primera fórmula es transformado del primero de la segunda por la transformación T_2 , y el primer término es transformado del segundo término de la segunda por la transformación T_1^{-1} inversa de T_1 ; por fin, por (5) el término A^0 es transformado de B^0 por T_2 . Queda así definida una representación de B sobre A y recíprocamente, que es lo que se quería.

Esta demostración difiere sólo por detalles de forma de la de Bernstein; de todos modos estos detalles tienen por fin de poner más de manifiesto el preciso sentido de la demostración, es decir que en cuanto sean efectivamente conocidas las reglas o fórmulas que definen las supuestas correspondencias biunívocas entre A y A' y entre B y B' que permiten afirmar la igual potencia, igualmente queda *efectivamente determinada* una correspondencia biunívoca entre A y B , de donde la igualdad de potencias de estos conjuntos.

⁽¹⁵⁾ Siguiendo las convenciones del cálculo funcional se puede dar a esta representación simbólica la forma aún más concisa

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1-U} (A-T_2 B) + T_2 \frac{1}{1-V} (B-T_1 A) + A^0, \\ B &= \frac{1}{1-V} (B-T_1 A) + T_1 \frac{1}{1-U} (A-T_2 B) + B^0 \end{aligned}$$

lo cual sin embargo no tendría aquí mayor utilidad si no fuera, eventualmente, de poner en evidencia que en (6) entendemos deberá considerarse cada suma $1+U+U^2+\dots$, $1+V+V^2+\dots$ como una operación única.

13. - Como caso particular se tiene que, si un conjunto A tiene la misma potencia de una parte propia de él A' , cualquier subconjunto B de A que contenga A' tiene todavía lo misma potencia. Para establecer la correspondencia entre A y B basta poner, en las precedentes consideraciones, $T_2=1$ (transformación idéntica). Resulta entonces, indicando por T la transformación de A en A' ,

$$U=V=T$$

$$A=(1+T+T^2+\dots)(A-B)+(1+T+T^2+\dots)(B-TA)+A^o$$

$$\begin{aligned} B &= (1+T+T^2+\dots)(B-TA)+T(1+T+T^2+\dots)(A-B)+A^o \\ &= T(1+T+T^2+\dots)(A-B)+[A-(1+T+T^2+\dots)(A-B)] \end{aligned}$$

de donde resulta, para determinar la transformación de A en B la regla siguiente: Se forma la suma del conjunto $A-B$ y de todos sus transformados por las potencias sucesivas de la transformación T ; a cada elemento de A que no pertenece a esta suma se da como correspondiente si mismo; a cada elemento perteneciente a dicha suma se hace corresponder el transformado por T .

Sea, en vía de ejemplo, A el conjunto de los números reales del intervalo 0-1, B el conjunto de los números transcendentales del mismo intervalo, A' el conjunto de los números de Liouville correspondientes a un determinado sistema de numeración (por ej. el decimal) contenidos en dicho intervalo; T es la correspondencia por la cual a un decimal infinito $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ se hace corresponder el número de Liouville

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \dots;$$

$A-B$ es el conjunto de los números algebraicos del intervalo 0-1; y la regla expresa que, para establecer una correspondencia biunívoca entre la totalidad de los números reales del intervalo 0-1 y el conjunto de los transcendentales bastará a cada número algebraico hacer corresponder el transcendente de Liouville que se obtiene de él por la operación T , a cada uno de los números obtenido de esta manera él que le corresponde aplicando nuevamente la operación T y así continuando. Los otros números se pondrán como correspondientes de sí mismos.

El resultado es en todo evidente.

14.-Con el teorema de Bernstein quedan completamente justificadas las consideraciones del n. 11. Aplicando a la operación de exponenciación del n. 10 podemos luego enunciar que, en las hipótesis de los teoremas 1 y 2 de ese párrafo *la potencia del conjunto A^B es siempre mayor que la potencia de B* ; más generalmente, pongamos

$$A^B = B', \quad A^{B'} = B'', \quad A^{B''} = B''', \quad \dots;$$

será

$$\text{pot } B < \text{pot } B' < \text{pot } B'' < \text{pot } B''' < \dots \quad (14.1)$$

Resulta así construída una sucesión infinita de conjuntos de potencias crecientes, lo que nos permite también afirmar que *existen infinitas potencias distintas*.

Notamos todavía que del conjunto A^B se puede siempre separar un conjunto que tiene la misma potencia de A ; tal es el conjunto de las funciones $f(x)$, por x variable en B , que para todos los valores de x toman un valor constante, elemento de A ; resulta que *la potencia del conjunto $B' = A^B$ es siempre mayor o igual a la potencia de A* ; por consiguiente también las potencias crecientes de los conjuntos $B'', B''', \dots$ son todas mayores de la potencia de A ; en cuanto a la potencia de B' no es posible igual precisión; sabemos por ej. que si A es numerable y B es finito, A^B es todavía numerable.

Si A' es una parte de A , del conjunto A^B se separa una parte de la misma potencia de A'^B , siendo tal el conjunto de las funciones $f(x)$ que, por x en B , toman valores en A' ; resulta luego todavía que *si A y A' son conjuntos tales que*

$$\text{pot } A \geq \text{pot } A',$$

será también

$$\text{pot } A^B \geq \text{pot } A'^B.$$

Es importante notar que, mientras evidentemente al signo $=$ en la primera relación corresponde el mismo signo en la segunda, no es lo mismo respecto del signo $>$, como veremos en ejemplos.

Notamos por fin que *si el conjunto A o bien el conjunto B*

son infinitos según Cantor-Dedekind, también serán infinitos en el mismo sentido todos los infinitos conjuntos que se deducen de ellos por sucesivas potenciaciones, como resulta por aplicación del teor. 2, n. 2, a consecuencia de las anteriores observaciones sobre la posibilidad de separar en A^B conjuntos parciales de las potencias respectivas de A y de B .

15.- Para continuar nuestro estudio, conviene por razón de comodidad, que introduzcamos algunas convenciones y terminologías de uso corriente. Siguiendo a Cantor, se acostumbra considerar la noción de *potencia de un conjunto* como la generalización de la de *número cardinal*, adquiriendo por consecuencia ambas expresiones, aplicadas a conjuntos infinitos, significado equivalente. Para estos números cardinales se usan símbolos, para los cuales Cantor había dado preferencia a las letras del alfabeto hebreo; en particular ha quedado de uso general la letra $\aleph$, afectada por subíndices, con un significado característico sobre el cual tendremos que volver (n. 26 y sig.). Muchos autores, y el mismo Cantor, usan en oportunidades, letras alemanas minúsculas; por comodidad tipográfica nosotros usaremos preferentemente letras latinas con una raya sobrepuesta. También representaremos al número cardinal (potencia) de un determinado conjunto cerrando el símbolo de éste entre barras verticales.

A los números cardinales se transfieren las operaciones que se efectúan sobre los conjuntos correspondientes; así, si

$$|A| = \overline{a}, \quad |B| = \overline{b},$$

escribimos

$$|A+B| = \overline{a+b}, \quad |A^B| = \overline{a^b}. \quad (15.1)$$

Es importante notar que igualdades como estas no expresan teoremas, sino nada más que convenciones verbales; esto es que, contrariamente a lo que ocurre con respecto a los números naturales o a los reales, que se definen axiomáticamente como entes matemáticos en sí mismos, la noción de cada número cardinal transfinito está estrictamente ligada a la de algún conjunto o clase de conjuntos de los cuales dicho cardinal expresa la potencia, de manera que no es posible una definición intrínseca de operaciones sobre números cardinales, considerados como conceptos abstractos, sino que siempre tenemos que pensar conjuntos y ope-

raciones efectuadas por medio de los elementos de ellos, generando por consecuencia nuevos conjuntos, cuyas potencias quedan representadas al aplicar a los números cardinales de los conjuntos de partida los mismos signos que representan las operaciones efectuadas sobre los conjuntos. Pero, por cuanto en estas operaciones siempre se consideran los elementos de estos conjuntos por la única propiedad de ser individuos distinguidos uno de otro, sin que tengan ningún efecto las características individuales que eventualmente hacen posible esta distinción, como no varían los números cardinales de partida al sustituir cualquiera de estos conjuntos con otro de igual potencia, lo mismo ocurre para los que representan los resultados de las operaciones indicadas.

Se representa generalmente por $\aleph_0$ la potencia del conjunto de los números naturales (en general, de los conjuntos numerables); por c la potencia del continuo de los números reales; se representan por los ordinarios símbolos numéricos (o por las letras que algebraicamente los representen) las potencias (números cardinales) de los conjuntos finitos, considerando como tales, por definición, los segmentos de la sucesión de los números naturales y los conjuntos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con ellos. Como aplicación de las cosas dichas tenemos luego

$$2^{\aleph_0} = m^{\aleph_0} = \overline{c} \quad (15.2)$$

$$\aleph_0^m = \aleph_0 < 2^{\aleph_0}.$$

16. - Sea $A(x)$ un conjunto variable, función de la variable x que recorre los elementos de un conjunto B ; de conformidad con lo dicho antes, se consideran los elementos de todos los $A(x)$ como distintos entre sí; se llama entonces suma de los $A(x)$ y se representará por

$$\sum_{x \in B} A(x)$$

al conjunto que tiene por elementos los elementos de todos los $A(x)$; cuando B es finito o numerable, en vez del signo $\sum$ antepuesto, se prefiere a menudo usar el signo $+$ interpuesto entre los términos de la suma, como se hace con los números. La suma así

definida difiere de la suma lógica representada por $\cup$ y $\cup$ únicamente por la hipótesis de la distinguibilidad de los elementos de los distintos $A(x)$. Es claro que para formalizar esta distinguibilidad es suficiente, antes de efectuar la suma, aplicar a cada conjunto $A(x)$ una transformación consistente en asociar a cada elemento de $A(x)$ el elemento de B , valor de x :

$$\sum_{x \in B} A(x) = \cup_{x \in B} [A(x), x]. \quad (16.1)$$

Conforme a lo dicho en el n. anterior, queda definida la suma de potencias; si

$$|A(x)| = \bar{a}(x)$$

será pues

$$|\sum_{x \in B} A(x)| = \sum_{x \in B} \bar{a}(x).$$

Si los $A(x)$ son idénticos a un mismo conjunto A (por lo tanto difieren sólo por el valor de x que se le aplica a cada uno de ellos), la suma se llama producto de los dos conjuntos $A.B$:

$$A.B = \sum_{x \in B} (A, x), \quad |A|. |B| = |A.B|. \quad (16.2)$$

Evidentemente se expresa diferentemente la definición de $A.B$ diciendo que es el conjunto de todos los pares formados por un elemento de A y un elemento de B ; resulta luego que también

$$A.B = \sum_{y \in A} (B, y) = B.A,$$

y pues

$$|A|. |B| = \sum_{x \in B} \bar{a}(x) = \sum_{y \in A} \bar{b}(y).$$

Esta observación nos lleva en seguida a generalizar la definición de producto a un *conjunto de conjuntos*; diremos que está definido un «conjunto de conjuntos» cuando está definido un

conjunto variable $A(x)$ cuyos valores (cada uno de ellos siendo un conjunto) dependen de los valores que toma la variable x recorriendo los elementos de otro conjunto dado; llamaremos producto de los $A(x)$, en símbolos

$$\prod_{x \in B} A(x), \quad (\prod_{x \in B} \bar{a}(x) = |\prod_{x \in B} A(x)|) \quad (16.3)$$

al conjunto que tiene por elementos los grupos formados asociando a cada valor de x en B un elemento del correspondiente $A(x)$.

La propiedad conmutativa que hemos observado realizarse en el producto de dos conjuntos, se extiende inmediatamente al producto de un conjunto de conjuntos, por el simple hecho de que el orden de los factores del producto no aparece en la definición; podría, por opuesto, ser objeto de demostración si entre los elementos de B fuera definido un orden y la definición del producto se diera por inducción⁽¹⁶⁾ o de otra forma que tuviera en cuenta este orden. Por el momento no queremos detenérnos sobre este detalle.

La exponenciación A^B que hemos considerado anteriormente es caso particular del producto, correspondiente al caso en que todos los conjuntos $A(x)$ fueran iguales (o, lo que en este caso dice lo mismo, equivalentes, de igual potencia) a un determinado conjunto A .

Se reconoce fácilmente que el producto de conjuntos goza de todas las propiedades formales del producto de números:

Propiedad asociativa

$$\prod_{x \in B} A(x) \prod_{y \in C} A(y) = \prod_{x \in B + C} A(x)$$

⁽¹⁶⁾ Efectivamente esta *forma inductiva* es la adoptada por Cantor y por la mayoría de los autores, quienes se contentan generalmente de definir las operaciones como efectuadas entre dos conjuntos (o con el número mínimo de conjuntos que las hacen posibles) sobreentendiendo la extensión a mayor número de términos por acumulación de operaciones sucesivas, como se hace ordinariamente en la aritmética. Es evidente que esta *forma inductiva* no corresponde al rigor necesario cuando se quiera tratar verdaderamente una teoría general de los conjuntos.

y, más en general,

$$\prod_{y \in C} \left(\prod_{x \in B(y)} A(x, y) \right) = \prod_{(x, y) \in \sum_{y \in C} (B(y), y)} A(x, y) \quad (16.4)$$

en efecto, ambos miembros representan el conjunto que tiene por elementos los grupos que se obtienen reuniendo elementos arbitrarios elegidos uno para cada uno de los $A(x, y)$, mientras x recorre todos los elementos de todos los conjuntos $B(y)$, variandó y dentro del conjunto C .

Propiedad distributiva

$$\left(\sum_{x \in C} A(x) \right) \left(\sum_{y \in D} B(y) \right) = \sum_{\substack{x \in C \\ y \in D}} A(x) B(y);$$

más generalmente

$$\prod_{y \in C} \left(\sum_{x \in B(y)} A(x, y) \right) = \sum_{X \in \prod_{y \in C} B(y)} \left(\prod_{y \in C} A(x_y, y) \right) \quad (16.5)$$

es decir el producto, por y que recorre los elementos de un conjunto C , de las sumas de los conjuntos $A(x, y)$ que por y fijo dependen de un parámetro x que recorre un conjunto $B(y)$ definido por el valor considerado de y , es idéntico a la suma de los productos de conjuntos $A(x_y, y)$ definidos por y corriente en el conjunto C , mientras, para cada valor de y , la variable x_y toma el valor que corresponde a dicho valor de y en uno cualquiera, pero siempre el mismo, de los conjuntos X , elementos del producto $\prod B(y)$.

Cada una de estas propiedades se transporta, por definición, en una igualdad correspondiente entre los resultados de las operaciones de suma y producto de potencias (números cardinales). Resultan además evidentes los teoremas:

Teor. I—*Toda suma de números cardinales es mayor o igual respecto de cada uno de sus términos.* Por consiguiente, si los términos de una suma son comparables, y si entre ellos existe uno máximo, también la suma es comparable con cada uno de los términos, y mayor o igual al término máximo. Pero, si los términos son infinitos y no hay entre ellos uno máximo, la suma será mayor de cada uno de los términos.

Teor. II-Si en cada uno de los términos de una suma de conjuntos es posible señalar un elemento, el número cardinal de la suma es mayor o igual al número cardinal del conjunto cuyos elementos son los términos mismos de la suma; en efecto, una parte propia de la suma, en correspondencia biunívoca con el conjunto de los términos está constituida por los elementos señalados de los distintos términos.

Si en cada uno de los factores de un producto se puede señalar un elemento, el grupo constituido por estos elementos es, por sí mismo, elemento señalado del producto; recíprocamente si en el producto se puede señalar un elemento, quedará señalado un elemento en cada uno de los factores, siendo estos elementos los cuyo grupo es el elemento señalado del producto. Valen por lo tanto todavía los siguientes

Teorema III. — Si en un grupo de factores de un producto de conjuntos se puede señalar un elemento en cada factor, el número cardinal del producto es mayor o igual al del producto de los factores restantes. En particular, si en cada uno de los factores de un producto se puede señalar un elemento, el número cardinal del producto es mayor o igual al número cardinal de cada uno de los factores.

Teorema IV. — Si en cada uno de los factores de un producto se pueden señalar dos elementos, el número cardinal del producto es mayor del número cardinal del conjunto de los factores. Este teorema es la generalización inmediata del teorema sobre la potencia de los conjuntos de la forma A^B (n. 10, 14) y la demostración es la misma; si en efecto consideramos un producto

$$\prod_{x \in B} A(x), \quad (16.6)$$

y suponemos que para cada uno de los conjuntos $A(x)$ sean determinados dos elementos $a_1(x)$, $a_2(x)$, tendremos una parte propia del conjunto (16.6) considerando el conjunto de los grupos formados por los elementos $a_1(x)$, para todos los valores de x , salvo uno, para el cual se toma $a_2(x)$. Esta parte propia está, por su propia definición, en correspondencia biunívoca con el con-

junto B . Esta parte es además parte propia también del conjunto

$$\prod_{x \in B} \{a_1(x), a_2(x)\} \quad (16.7)$$

el cual es parte propia (o no propia, en el caso de que los $A(x)$ fueran todos constituídos de dos solos elementos) del producto (16.6); ahora la potencia de (16.7) es mayor que la de B por el razonamiento de los nos. 10, 14.

Particularizando la fórmula (16.4) al caso de considerar productos de factores iguales (o de igual número cardinal) obtenemos las fórmulas siguientes, relativas a la potenciación, que son de uso frecuente:

$$\prod_{y \in C} A^{B(y)} = \prod_{\substack{x \in \Sigma B(y) \\ y \in C}} A(x) = A^{y \in C \Sigma B(y)} \quad (16.8)$$

$$(A^B)^C = \prod_{y \in C} A^{(B,y)} = A^{y \in C \Sigma (B,y)} = A^{BC} \quad (16.9)$$

habiendo indicado con (B, y) conjuntos equivalentes al conjunto B y distinguidos uno del otro sólo por la aplicación, a los elementos de cada uno de ellos, de un elemento del conjunto C . Igualmente

$$\prod_{y \in C} \left(\prod_{x \in B} A(x, y) \right) = \prod_{x \in B} \left(\prod_{y \in C} A(x, y) \right)$$

siendo los dos miembros, por (16.4), respectivamente iguales a

$$\prod_{\substack{(x,y) \in \Sigma(B,y) \\ y \in C}} A(x, y) \quad \text{y} \quad \prod_{\substack{(x,y) \in \Sigma(x,C) \\ x \in B}} A(x, y)$$

y

$$\sum_{y \in C} (B, y) = \sum_{x \in B} (x, C)$$

y, suponiendo los conjuntos $A(x, y)$ equivalentes para todos los x en B ,

$$A(x, y) = A(y),$$

$$\prod_{y \in C} A(y)^B = \prod_{x \in B} \left(\prod_{y \in C} A(x, y) \right) = \left(\prod_{y \in C} A(y) \right)^B.$$

17.- Los teoremas I, II, III, IV del párrafo anterior nos muestran que las operaciones allí definidas permiten generar, partiendo de conjuntos dados, nuevos conjuntos, los cuales, bajo condiciones aparentemente muy amplias, resultan comparables con los conjuntos de partida en el sentido que hemos aclarado al final del n. 11. Las condiciones que hemos dicho *aparentemente muy amplias* se reducen efectivamente, cuando se presentan, a la posibilidad de caracterizar en cada uno de los conjuntos dados un elemento (Teor. II y III) o eventualmente dos elementos (Teor. IV). Para el Teor. I no hay condiciones.

Las condiciones aludidas se realizan evidentemente en todos los conjuntos de los cuales tenemos conocimiento efectivo, como números naturales, números reales, números complejos de los diferentes órdenes, etc., porque de cada uno de estos conjuntos sabemos construir efectivamente determinados elementos, de los cuales la noción general del conjunto deriva generalmente por un proceso de generalización. También ellas se realizan frecuentemente en conjuntos cuyos elementos se definen por procedimientos infinitos, cuando estos procedimientos tienen carácter recurrente, siendo cada etapa del procedimiento ligada a números naturales crecientes, por una ley determinada.

No puede decirse lo mismo, con generalidad absoluta, cuando la generación de los elementos de los conjuntos considerados está ligada a procedimientos infinitos más abstractos; ocurre este caso precisamente en el enunciado del Teor. III (y ya en las observaciones preparatorias del aparte que le precede) en cuanto se supone allí que en cada uno de los componentes de un conjunto (eventualmente infinito) de conjuntos dados esté señalado un elemento. Si los conjuntos dados están constituidos, por ejemplo, de números naturales, un elemento queda inmediatamente definido en cada uno de ellos en el mismo instante en que el conjunto se supone definido, tomando el mínimo entero que le pertenece. Si, por contrario, los conjuntos dados fueran de números reales, una determinación análoga no podría servir, pues un conjunto tal puede no tener mínimo; y de hecho nosotros no tenemos ninguna regla general para individualizar un elemento en un conjunto de números reales *cualquiera*, debiéndose una regla para este fin determinar en cada caso — cuando eso sea posible — teniendo en cuenta propiedades analíticas que actúen en la definición del particular conjunto considerado.

También es de notar que, también en los casos en los cuales las condiciones de aplicabilidad de los teoremas considerados están satisfechas, queda generalmente indeterminada la conclusión entre la igualdad y la desigualdad (en sentido determinado) de las potencias; el juicio correspondiente estando condicionado todavía, caso por caso, por la particular naturaleza de los conjuntos considerados (cfr. n. 24).

En todos los casos, cuando los teoremas del párrafo anterior tienen aplicación en el sentido de afirmar la comparabilidad de los conjuntos considerados, se aplica también el Teor. 2 del n. 2 para inferir que, *si los conjuntos de partida (y aun tan solo algunos de ellos) responden a la definición de «conjunto infinito según Cantor-Dedekind», lo mismo ocurre para los nuevos conjuntos que se habrán generado por la aplicación de las operaciones aritméticas definidas en el n. 16.*

18.- La operación de suma de números cardinales no puede evidentemente ser unívocamente invertible; es decir que de la igualdad

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{b}$$

no consigue necesariamente $\bar{a} = \bar{a}_1$; basta recordar que, cuando un conjunto es infinito según Cantor-Dedekind, su potencia no cambia por restarle o añadirle un número finito de elementos, o aun recordar que la suma de un conjunto numerable de conjuntos numerables es todavía un conjunto numerable.

Tienen interés los teoremas siguientes:

Teor. I. — Si $\bar{a}$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, ..., $\bar{b}_r$ son números cardinales tales que

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{b}_1, \quad \bar{a} = \bar{a} + \bar{b}_2, \quad \dots, \quad \bar{a} = \bar{a} + \bar{b}_r$$

es también

$$\bar{a} = \bar{a} + \sum_{i=1}^r \bar{b}_i. \quad (18.1)$$

Basta razonar por inducción; la proposición es cierta para $r=1$; supongámosla verificada, por el valor $r-1$ de r ; reemplazando en el segundo miembro de $\bar{a} = \bar{a} + \bar{b}_r$ el término $\bar{a}$ por su valor

$$\bar{a} = \bar{a} + \sum_{i=1}^{r-1} \bar{b}_i$$

resulta

$$\bar{a} = \bar{a} + \sum_{i=1}^{r-1} \bar{b}_i + \bar{b}_r = \bar{a} + \sum_{i=1}^r \bar{b}_i.$$

En caso de considerarse una sucesión infinita de términos $\bar{b}_i$ es evidente que el razonamiento en su forma actual no vale para poner sin más en (18.1) $r = \infty$. Llegamos, sin embargo, en este caso, a la conclusión por las consideraciones siguientes:

a) La fórmula (18.1) expresa que, si A es un conjunto de potencia $\bar{a}$, puede determinarse una sucesión de conjuntos parciales de A , sin elementos comunes, $B_1, B_2, \dots, B_r$, tales que, después de suprimir estas partes, queda todavía un conjunto A' , de la misma potencia de A ; pues A no es conjunto vacío, sin lo cual nuestras deducciones no tendrían sentido, podemos luego afirmar que A' no es vacío. La operación de suprimir en A los conjuntos B_i puede pensarse efectuada ordenadamente de la manera siguiente: $A - B_1 = A_1$ tiene la potencia $\bar{a}$ de A y contiene un conjunto B_2 de la potencia b_2 , tal que $A_1 - B_2 = A_2$ tiene la potencia $\bar{a}$ y contiene por tanto B_3 de potencia b_3 y tal que $A_2 - B_3$ tiene la potencia $\bar{a}$, etc. El procedimiento se puede continuar indefinidamente para todos los valores de i en $\bar{b}_i$, determinándose así una sucesión de conjuntos $A, A_1, A_2, \dots$ de potencia $\bar{a}$, cada uno contenido en el anterior; la parte común a todos estos conjuntos es un A' , que podría también ser vacío, pero en todos los casos tal que indicando por $\bar{a}'$ su potencia ($\bar{a}' \geq 0$), vale la igualdad

$$\bar{a} = \bar{a}' + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{b}_i. \quad (18.2)$$

b) Supongamos, en particular, todas las $\bar{b}_i$ iguales a una misma potencia $\bar{b}$; en este caso se pueden separar los conjuntos B_i en dos grupos infinitos, por ej. el de los B_i de subíndice impar, $i = 2j - 1$, y el de los B_i de subíndice par, $i = 2j$; escribiendo entonces

$$A = (A' + \sum B_{2j-1}) + \sum B_{2j},$$

se nota que, poniendo primero los B_{2j-1} en correspondencia biunívoca con los distintos B_i , por $i=j$, el conjunto en paréntesis resulta puesto en correspondencia biunívoca con el total conjunto A :

$$A' + \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j-1} = A'', \quad |A''| = \bar{a};$$

poniendo luego los B_{2j} en correspondencia biunívoca respectivamente con los B_i por $i=j$, resulta la suma de todos estos B_{2j} equivalente a la suma de todos los B_i , de manera que la (18.2) se cambia en

$$\bar{a} = \bar{a} + \aleph_0 \bar{b}. \quad (18.3)$$

c) Después de esto, poniendo sucesivamente por $\bar{b}$ los distintos $\bar{b}_i$, resulta que la hipótesis del Teor. I puede escribirse también

$$\bar{a} = \bar{a} + \aleph_0 \bar{b}_1, \quad \bar{a} = \bar{a} + \aleph_0 \bar{b}_2, \dots$$

y, aplicando la fórmula (18.2), por un conveniente $\bar{a}'$,

$$\bar{a} = \bar{a}' + \sum_{i=1}^{\infty} \aleph_0 \bar{b}_i;$$

pero es todavía

$$\sum \aleph_0 \bar{b}_i = \sum \aleph_0 \bar{b}_i + \sum \bar{b}_i;$$

luego

$$\bar{a} = (\bar{a}' + \sum_{i=1}^{\infty} \aleph_0 \bar{b}_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{b}_i = \bar{a} + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{b}_i.$$

Queda así demostrado el

Teor. II. — *Siendo dado un número cardinal $\bar{a}$ y una sucesión infinita de números cardinales $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots$ tales que, para todos los i ,*

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{b}_i,$$

será también siempre

$$\bar{a} = \bar{a} + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{b}_i. \quad (18.4)$$

Corolario. — Vale evidentemente también, para valores enteros arbitrarios de los coeficientes m_i ,

$$\bar{a} = \bar{a} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \bar{b}_i$$

e igualmente

$$\bar{a} = \bar{a} + \sum_{i=1}^{\infty} \aleph_0 \bar{b}_i;$$

pero debe notarse que en el razonamiento expuesto tiene oficio esencial el hecho de considerar una sucesión ordenada y luego numerable de conjuntos B_i con las potencias $\bar{b}_i$; por lo tanto las fórmulas obtenidas no podrán generalizarse sin más considerando conjuntos no numerables de números cardinales b , o poniendo como coeficientes cardinales $> \aleph_0$.

19. — Como corolario de (18.3) E. Zermelo⁽¹⁷⁾ ha obtenido una nueva demostración del teorema de Bernstein. Supongamos en efecto que A y B sean dos conjuntos tales que

$$A = B' + R, \quad B = A' + S,$$

con

$$|A'| = |A| = \bar{a}, \quad |B'| = |B| = \bar{b};$$

pongamos

$$|R| = \bar{r}, \quad |S| = \bar{s};$$

Será

$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{r}, \quad \bar{b} = \bar{a} + \bar{s}$$

y, reemplazando el b en el segundo miembro de la primera igualdad,

$$\bar{a} = \bar{a} + (\bar{r} + \bar{s}).$$

⁽¹⁷⁾ *Göttinger Nachrichten*, 1901.

Por (18.3) es luego

$$\bar{a} = \bar{a} + \aleph_0 (\bar{r} + \bar{s}) = \bar{a} + \aleph_0 \bar{r} + \aleph_0 \bar{s}.$$

Por fin

$$\bar{b} = \bar{a} + \aleph_0 \bar{r} + \aleph_0 \bar{s} + \bar{s} = \bar{a} + \aleph_0 \bar{r} + \aleph_0 \bar{s} = \bar{a}.$$

Puede notarse que, si se tiene en cuenta la anterior demostración de (18.3), esta demostración de Zermelo no difiere de la primitiva de Bernstein sino por no indicar explícitamente las transformaciones que establecen las correspondencias entre los conjuntos anteriormente llamados B_{2j-1} , B_{2j} y los B_i .

20. - Poniendo en las fórmulas del n. 18 $\bar{b} = \bar{a}$, se obtiene en particular:

Si un número cardinal $\bar{a}$ es tal que

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{a} = 2\bar{a}, \quad (20.1)$$

será generalmente

$$\bar{a} = m\bar{a} = \aleph_0 \bar{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (20.2)$$

La propiedad (20.1) está verificada por $\bar{a} = \aleph_0$ y por $\bar{a} = \bar{c}$; en el primer caso refleja únicamente la separación de los números naturales en pares e impares y fué aplicada repetidamente en los razonamientos anteriores; en el segundo caso ella refleja la representabilidad por semejanza de un segmento en el segmento doble; pero podría obtenerse calculativamente por

$$\bar{c} = 2^{\aleph_0}, \quad 2\bar{c} = 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+1} = 2^{\aleph_0} = \bar{c}.$$

La (20.2) permite entonces escribir

$$\aleph_0 = m\aleph_0 = \aleph_0^2 \quad (20.3)$$

$$\bar{c} = m\bar{c} = \aleph_0 \bar{c}. \quad (20.4)$$

De (20.3) se deduce además

$$\bar{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \bar{c};$$

y comparando con la relación evidente

$$\bar{c} \leq \bar{c}^m \leq \bar{c}^{\aleph_0},$$

resulta que estos signos $\leq$ deben cambiarse en $=$; en particular, análogamente a (20.3)

$$\bar{c} = \bar{c}^2. \quad (20.5)$$

Los números cardinales $\aleph_0$ y $\bar{c}$ son realmente los únicos transfinitos de los cuales tenemos un conocimiento directo e intuitivo más profundo de lo poco que resulta de las genéricas definiciones por operaciones lógicas de agrupación y separación. Se presenta por eso natural la sospecha de que la igualdad (20.1) y la análoga

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = \bar{a} \quad (20.6)$$

expresen propiedades generales de los cardinales transfinitos.

Así empieza A. Denjoy una reciente comunicación a la Academia de Ciencias de París, a la cual aludimos en el n. 1⁽¹⁸⁾: «Voici quatre propositions bien souvent formulées: I. *La puissance d'un ensemble infini est égale à son double*, c'est à dire: la reunion de deux ensembles de même puissance possède encore cette puissance. — II. *La puissance d'un ensemble infini est égale à son carré*, c'est à dire: l'ensemble des couples d'éléments emprunté à un même ensemble infini possède encore la puissance de celui-ci (une famille dénombrable d'ensembles dénonbrables est dénombrable; la puissance des points d'un carré est égale à celle du continu linéaire, ...). ... «Aucun de ces énoncés n'a trouvé une démonstration satisfaisante. On peut souscrire sans hésitation aux deux premiers ... nous pensons que toute conception, toute allégation qui seraient contredites par un résultat

⁽¹⁸⁾ *L'ordination des ensembles* (C. R., T. 224, 1947, p. 1081). De las cuatro proposiciones referimos aquí dos solamente, reservando las otras para más adelante.

tiré de l'une au moins de ces quatre propositions, doivent être tenues pour erronées».

Puede notar el lector que las únicas comprobaciones que trae Denjoy para confirmar la supuesta evidencia son las ya recordadas arriba de los conjuntos numerables y de la equivalencia de conjuntos de distintas dimensiones; y, si pensamos que, sólo ha poco más de cincuenta años, la numerabilidad del conjunto de los números racionales o la del conjunto de los números algebraicos pudieron ser descubrimientos admirables y la representación de un área o de un volumen sobre un segmento pudo parecer en pugna con la intuición de la pluridimensionalidad, parece justo considerar esa supuesta evidencia nada más que una arbitraria extensión al concepto general de conjunto transfinito de lo aprendido a propósito de esos casos particulares.

En unos párrafos siguientes vamos a profundizar algunas hipótesis bajo las cuales quedan ciertas las aludidas proposiciones.

21. - Evidentemente la igualdad $\bar{a}^2 = \bar{a}$ incluye sin más la otra $2\bar{a} = \bar{a}$, por cuanto, si apenas suponemos que la noción de los conjuntos transfinitos incluye la existencia de elementos distintos, y, por eso, la comparabilidad de los cardinales transfinitos con los finitos, será

$$2 < \bar{a},$$

luego

$$a \leq 2\bar{a} \leq a^2 = \bar{a}.$$

Vamos a deducir algunas consecuencias notables de esta afirmación menor

I - Si el cardinal $\bar{a}$ cumple con la propiedad $2\bar{a} = \bar{a}$ y si $\bar{b}$ es un cardinal comparable con $\bar{a}$, será

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{a} \quad \text{o} \quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{b}$$

respectivamente según sea

$$\bar{b} \leq \bar{a} \quad \text{o} \quad \bar{b} > \bar{a}.$$

Sean en efecto A y B dos conjuntos de las potencias respec-

tivas $\bar{a}$ y $\bar{b}$; si $\bar{b} \leq \bar{a}$, se puede extraer de A una parte B' de la potencia $\bar{b}$; sea A' la parte complementaria:

$$A = B' + A'.$$

Llamemos A'' un conjunto de la misma potencia de A' sin elementos comunes con A ni con B . Será

$$A + B \subset A + B + A'';$$

luego

$$\bar{a} \leq \bar{a} + \bar{b} \leq \bar{a} + |B + A''| = \bar{a} + |B' + A'| = 2\bar{a} = \bar{a}$$

de donde

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{a}. \quad (21.1)$$

Si, por contrario, $\bar{b} > \bar{a}$, existe en B una parte A' de la potencia $\bar{a}$; poniendo

$$B = A' + B',$$

será

$$\bar{a} + \bar{b} = |A + A' + B'|.$$

Por hipótesis $A + A'$ se representa biunívocamente sobre A' ; luego

$$|A + A' + B'| = |A' + B'| = \bar{b},$$

es decir

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b}. \quad (21.2)$$

Comparando estas conclusiones con (18.1), (18.4) se infiere en más que

II - Si $\bar{a}$ cumple con la propiedad $2\bar{a} = \bar{a}$, para cada $\bar{b} < \bar{a}$ existe un $m \leq \aleph_0$ tal que

$$m\bar{b} \leq \bar{a},$$

$$m\bar{b} = (m+1)\bar{b} = 2m\bar{b} = \aleph_0 \bar{b},$$

la sucesión de las potencias $\bar{b}, 2\bar{b}, \dots, (m-1)\bar{b}, m\bar{b}$ es creciente.

En efecto, de las hipótesis sigue que se cumple (21.1) y por tanto (18.4) para $\bar{b}_i = \bar{b}$, de la cual sigue que, para cada $n \leq \aleph_0$,

$$n\bar{b} \leq \aleph_0 \bar{b} \leq \bar{a}.$$

Si ahora n es un número natural ($n < \aleph_0$) será

$$n\bar{b} \leq (n+1)\bar{b}$$

y, en el caso de verificarse el signo $=$, por las mismas (18.1), (18.4), será $n\bar{b} = p\bar{b} = \aleph_0 \bar{b}$, para todos los p tales que $n < p < \aleph_0$; se sigue que o bien la sucesión de las potencias $n\bar{b}$ es creciente para todos los n , realizándose entonces el enunciado por $m = \aleph_0$, o bien existe un primer valor de $n = m$ para el cual $m\bar{b} = (m+1)\bar{b}$.

III - Si $\bar{a}$ y $\bar{p}$ son cardinales tales que $\bar{p}\bar{a} = \bar{a}$ y si $\bar{q} \leq \bar{p}$, será, para cualquier número cardinal $\bar{b}$

$$(\bar{b}^{\bar{a}})^{\bar{q}} = \bar{b}^{\bar{a}\bar{q}} = \bar{b}^{\bar{a}};$$

en particular, si $\bar{a}$ cumple con la condición $2\bar{a} = \bar{a}$, será $\bar{b}^{\bar{a}} = (\bar{b}^{\bar{a}})^2$, realizando $\bar{b}^{\bar{a}}$ la segunda propiedad considerada por Denjoy.

Evidentemente otras propiedades análogas pueden deducirse de los teoremas anteriores, sobre los cuales no vale detenernos, reservándonos desarrollar los cálculos correspondientes en cada caso, cuando se presente la oportunidad. Puede ser interesante la observación siguiente:

De la hipótesis $\bar{a}^2 = \bar{a}$ sigue evidentemente por inducción $\bar{a}^m = \bar{a}$ para cualquier número natural m ; nada nos autoriza a inferir que será también $\bar{a}^{\aleph_0} = \bar{a}$. Pero si, suponiendo que $\bar{c}$ sea un cardinal tal que $2\bar{c} = \bar{c}$ y $\bar{b}$ sea un cardinal cualquiera, ponemos

$$\bar{a} = \bar{b}^{\bar{c}}$$

siendo entonces realizada la condición

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^{2\bar{c}} = \bar{b}^{\bar{c}} = \bar{a},$$

resultará cierta también la igualdad $\bar{a}^{\aleph_0} = \bar{a}$ por ser $\aleph_0 \bar{c} = \bar{c}$.

22. - *La operación de límite.* — Hemos observado en el n. 16 que dado un sistema infinito de conjuntos cuyas potencias sean tales que no exista una máxima, la potencia de la suma de todos estos conjuntos (es decir, por definición, la suma de todas estas potencias) es mayor que cada una de las potencias dadas.

Queremos ahora considerar el caso en que los conjuntos dados sean una sucesión simplemente infinita; sean sus potencias, en orden creciente,

$$\bar{a}_1 < \bar{a}_2 < \bar{a}_3 < \dots < \bar{a}_r < \dots \quad (22.1)$$

y sea, según la definición recordada,

$$\bar{b} = \sum_{r=1}^{\infty} \bar{a}_r$$

la potencia suma. Evidentemente cualquier potencia $\bar{p} > \bar{b}$ es mayor que cada uno de los $\bar{a}_r$.

Consideremos, por contrario, el caso de $\bar{p} < \bar{b}$. Demostraremos el teorema: Si $\bar{p}$ es un número cardinal $< \bar{b}$ y si $2\bar{p} = \bar{p}$, existe entonces siempre entre los $\bar{a}_r$ alguno que es $> \bar{p}$. Basta razonar por absurdo: si, para todos los r , fuera $\bar{a}_r \leq \bar{p}$, por el Teor. I del n. 21, sería siempre $\bar{p} + \bar{a}_r = \bar{p}$; aplicando los resultados del n. 18, tendríamos entonces

$$\bar{p} = \bar{p} + \sum_1^{\infty} \bar{a}_r = \bar{p} + \bar{b}.$$

Pero, todavía del Teor. I del n. 21, conjuntamente con la hipótesis $\bar{p} < \bar{b}$ resulta

$$\bar{p} + \bar{b} = \bar{b} > \bar{p};$$

queda así establecida la contradicción.

A la misma conclusión llegamos transportando la hipótesis (20.1) de $\bar{p}$ a los $\bar{a}_r$. Precisamente demostramos que: si en la sucesión (22.1), para cualquier valor del índice r existe algún $s > r$ tal que $2\bar{a}_s = \bar{a}_s$ y si $\bar{p} < \bar{b}$, siempre existe entre los $\bar{a}_r$ alguno que es $> \bar{p}$. En efecto, por el teorema I del n. 21,

cada $\bar{a}_s$ es igual a la suma de sí mismo con cualquier $\bar{a}_r$ de índice menor; luego, por las fórmulas del n. 18, cada $\bar{a}_s$ es igual a la suma de sí mismo y de todos los $\bar{a}_r$ que lo preceden; teniendo en cuenta por otra parte que los $\bar{a}_s$ son una parte de los $\bar{a}_r$, sigue que

$$\bar{b} = \sum \bar{a}_r \geq \sum \bar{a}_s \geq \sum \bar{a}_r;$$

luego

$$\bar{b} = \sum \bar{a}_s.$$

Supongamos ahora, por absurdo, que, siendo $\bar{p} < \bar{b}$, fuera para todos los $\bar{a}_r$, $\bar{a}_r < \bar{p}$; se obtendría nuevamente, aplicando el Teor. I del n. 21, que, para todos los $\bar{a}_s$, $\bar{p} = \bar{p} + \bar{a}_s$; luego

$$\bar{p} = \bar{p} + \sum \bar{a}_s = \bar{p} + \bar{b} \geq \bar{b}$$

contra la hipótesis.

Estas consideraciones dan razón de poner por definición

$$\bar{b} = \sum \bar{a}_r = \text{lím. sup. } \bar{a}_r$$

en el sentido de que *cualquiera sea la potencia $\bar{p} < \bar{b}$ y satisfaciendo a la condición $2\bar{p} = \bar{p}$, siempre existe en la sucesión $\bar{a}_r$ algún término comprendido entre $\bar{p}$ y $\sum \bar{a}_r$ y también cualquiera sea la potencia $\bar{p} < \sum \bar{a}_r$, sin ulterior condición, existe siempre en la sucesión $\bar{a}_r$ algún término comprendido entre $\bar{p}$ y $\sum \bar{a}_r$, si en la sucesión existen términos de índice tan elevado como se quiera que son iguales a su propio duplo.*

En este último caso, también el número cardinal límite $\bar{b} = \sum \bar{a}_r$ es igual a su duplo. En efecto, por la prop. I del n. 21, se tiene para todos los $\bar{a}_s$ que son iguales a su duplo,

$$\bar{b} + \bar{a}_s = \bar{b};$$

luego, por la (18.4)

$$\bar{b} = \bar{b} + \sum \bar{a}_s = \bar{b} + \bar{b} = 2\bar{b}.$$

23. - Consideremos la sucesión de números cardinales obtenidos, a partir de $\aleph_0$, por sucesivas potenciaciones de 2:

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0} = \bar{c} = \bar{c}_1, 2^{\bar{c}_1} = \bar{c}_2, \dots, 2^{\bar{c}_i} = \bar{c}_{i+1}, \dots \quad (23.1)$$

Siendo una sucesión creciente de números cardinales que cumplen con la condición $2^{\bar{c}_i} = \bar{c}_{i+1}$, podemos formar el límite; imitando el simbolismo adoptado por Cantor en otra oportunidad que veremos pronto, pondremos

$$\lim_{i=\infty} \bar{c}_i = \bar{c}_\omega$$

y será

$$\bar{c}_\omega > \bar{c}_i \quad (i=1, 2, \dots).$$

Partiendo ahora de este nuevo número cardinal podemos generar una nueva sucesión creciente

$$2^{\bar{c}_\omega} = \bar{c}_{\omega+1}, 2^{\bar{c}_{\omega+1}} = \bar{c}_{\omega+2}, \dots, 2^{\bar{c}_{\omega+i}} = \bar{c}_{\omega+i+1}, \dots \quad (23.2)$$

completamente semejante a la (23.1), pero superior a ella; formaremos entonces el límite

$$\lim_{i=\infty} \bar{c}_{\omega+i} = \bar{c}_{2\omega},$$

a partir del cual empezaremos nuevamente con el procedimiento de la exponenciación obteniendo la nueva sucesión

$$2^{\bar{c}_{2\omega}} = \bar{c}_{2\omega+1}, 2^{\bar{c}_{2\omega+1}} = \bar{c}_{2\omega+2}, \dots \quad (23.3)$$

Evidentemente el procedimiento puede continuar, obteniéndose una sucesión infinita de sucesiones

$$(23.1), (23.2), \dots, (23.i), (23.i+1), \dots$$

las que tendrán como orígenes una sucesión creciente de números cardinales

$$\aleph_0, \bar{c}_\omega, \bar{c}_{2\omega}, \dots, \bar{c}_{i\omega}, \dots,$$

la cual nos permitirá a su vez formar un nuevo límite

$$\lim_{i=\infty} \bar{c}_{i\omega} = \bar{c}_{\omega.\omega} = \bar{c}_{\omega^2}.$$

Evidentemente nada veda pensar de partir de este nuevo número para empezar nuevamente una sucesión de operaciones análogas a las que se hicieron partiendo de $\aleph_0$, obteniendo así nuevos números de las formas

$$\begin{aligned} &\bar{c}_{\omega^2+1}, \dots, \bar{c}_{\omega^2+i}, \dots, \bar{c}_{\omega^2+\omega}, \bar{c}_{\omega^2+\omega+1}, \dots, \bar{c}_{\omega^2+i\omega+j}, \\ &\dots, \bar{c}_{h\omega^2+i\omega+j}, \dots, \bar{c}_{\omega^3}, \dots \end{aligned}$$

Resulta claro que el procedimiento puede continuarse indefinidamente generando siempre nuevas potencias indefinidamente crecientes y que este «indefinidamente» tiene un sentido algo distinto del que nos muestra por ej. la infinidad de los números naturales, porque el procedimiento de encontrar un nuevo número cardinal aplicando el proceso de límite a cualquier sucesión infinita de potencias crecientes parece reducir al absurdo la suposición de que se pueda dar por cerrado el conjunto de los cardinales que las operaciones indicadas pueden definir.

Volveremos más adelante (n. 26 y sig.) sobre esta sucesión; la sucesión de los índices, como los hemos escrito, coincide formalmente con la sucesión de los números enteros ordinales transfinitos de Cantor; evidentemente en ella tiene sentido de inmediata interpretación cualquier polinomio de coeficientes enteros positivos en los que el símbolo ω tenga el lugar de variable; pero es también evidente que con tales polinomios no se agotan las necesidades para una representación completa de nuestra sucesión, la cual efectivamente es igualmente inalcanzable⁽¹⁹⁾ como es inconcebible el cierre de la sucesión de los $\bar{c}$.

⁽¹⁹⁾ Esta imposibilidad de representación depende de que el conjunto de las $\bar{c}_\gamma$ tiene la potencia $\aleph_1$ del conjunto Z_1 del cual hablaremos más adelante (n. 29) y es de la misma naturaleza de la imposibilidad de representar efectivamente todos los números reales; esto es que mediante combinaciones de un número finito de símbolos no es posible representar efectivamente sino un conjunto numerable de objetos. Cantor ha llamado ϵ el primer índice γ que no es representable por un polinomio en ω .

24.- Con todo son de relieve algunas propiedades características de esta sucesión que vamos a señalar. Quedando con la aludida imposibilidad de una efectiva representación por índices inteligibles de los distintos términos de la sucesión, representaremos igualmente por letras estos supuestos índices.

Usaremos constantemente la letra α como índice de una $\bar{c}$ que se define aplicando a la base 2 un exponente, que será siempre la $\bar{c}$ que le precede; la relación de inmediatamente precedente o inmediatamente siguiente se representará respectivamente con aplicar un -1 o $+1$ al índice considerado, de manera que, por definición,

$$\bar{c}_\alpha = 2^{\bar{c}_{\alpha-1}}.$$

Desde luego $\alpha-1$ no tiene que ser necesariamente un α , mientras es siempre un α el $\alpha+1$.

Usaremos la letra τ como índice general de una $\bar{c}$ que se define como límite de una sucesión (simplemente infinita) de $\bar{c}$'s precedentes. Esta sucesión puede ser constituida por $\bar{c}_\alpha$'s o por otros $\bar{c}_\tau$'s. El primer caso admite una clara representación simbólica en la forma

$$\bar{c}_\tau = \lim \bar{c}_{\tau-\omega+i} \quad (i=1, 2, 3, \dots);$$

así pertenecen a esta clase los casos

$$\tau = \omega \quad \bar{c}_\omega = \lim \{\bar{c}_i\}$$

$$\tau = 2\omega \quad \bar{c}_{2\omega} = \lim \{\bar{c}_{\omega+i}\}$$

$$\tau = \omega^2 + \omega \quad \bar{c}_{\omega^2+\omega} = \lim \{\bar{c}_{\omega^2+i}\}.$$

Por opuesto no es posible una representación simbólica general del segundo caso para el cual podemos únicamente ofrecer ejemplos como:

$$\tau = \omega^2 \quad \bar{c}_{\omega^2} = \lim \{\bar{c}_{i\omega}\}$$

$$\tau = \omega^\omega \quad \bar{c}_{\omega^\omega} = \lim (\bar{c}_\omega, \bar{c}_{\omega^2}, \bar{c}_{\omega^3}, \dots)$$

$$\tau = \varepsilon \quad \bar{c}_\varepsilon = \lim (\bar{c}_\omega, \bar{c}_{\omega^\omega}, \bar{c}_{\omega^{\omega^\omega}}, \dots).$$

Usaremos las demás letras griegas para representar índices de los cuales no interesa si deban ser del tipo α o del tipo τ ; y para este fin usaremos en general preferentemente la letra γ , reservando las demás letras para índices que se definen en cada caso.

Después de esto, vamos a demostrar algunas proposiciones sobre el cálculo de los $\bar{c}_\gamma$. Tenemos primero que, de acuerdo con la primera propiedad postulada para todos los números transfinitos en el trozo citado de Denjoy,

1- Cada $\bar{c}_\gamma$ es igual a su propio duplo.

Para la demostración hay que distinguir según se trata de un $\bar{c}_\alpha$ o de un $\bar{c}_\tau$. Para los $\bar{c}_\alpha$ basta generalizar por inducción la demostración dada en el n. 20 de la igualdad $2\bar{c} = \bar{c}$. Siendo, en efecto, fijado un determinado $\bar{c}_\alpha$, supongamos ya conocido que $2\bar{c}_{\alpha-1} = \bar{c}_{\alpha-1}$;

$$(2^{\bar{c}_\alpha-1})^2 = 2^{2\bar{c}_\alpha-1} = 2^{\bar{c}_\alpha-1};$$

por lo tanto

$$\bar{c}_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha \leq 2\bar{c}_\alpha \leq \bar{c}_\alpha^2;$$

siendo iguales los miembros extremos, deben las desigualdades cambiarse en = y resulta en particular $2\bar{c}_\alpha = \bar{c}_\alpha$.

Para los $\bar{c}_\tau$ basta suponer igualmente fijado uno determinado y suponer que la proposición sea reconocida cierta para todos los $\bar{c}_\gamma$ menores de éste; siendo $\bar{c}_\tau$ el límite de una sucesión de estos $\bar{c}_\gamma$, la proposición final del n. 22 nos da sin más que $2\bar{c}_\tau = \bar{c}_\tau$.

[Nótese que la inducción que acá se aplica no es precisamente la clásica, por la cual una proposición que contiene una variable numérica se afirma cierta para todos los valores enteros de ésta cuando es tal para el valor 0 y puede demostrarse cierta para el valor $n+1$ en la hipótesis de que sea cierta para el valor n . Pero ella se reduce a la clásica si, refiriéndonos a lo dicho al final del n. 23, nos concretamos en la consideración de cualquier $\bar{c}_\gamma$ que pueda efectivamente definirse por la descripción de una determinada sucesión de exponenciaciones de 2 y de construcciones de límites. Y esto es suficiente para la afirmación lógica del teorema; queda por contrario en suspenso la *extensión del concepto* que se resume en la propia «sucesión de los $\bar{c}_\gamma$ » o también, que vale lo mismo, se resume en la observación final del n. 23, según la cual la construcción de los $\bar{c}_\gamma$

puede continuarse «indefinidamente». Acerca de la determinación de este concepto vamos a referirnos más adelante (v. n. 29).

De la proposición I y del Teor. I del n. 21 sigue inmediatamente que

II - *La suma de dos $\bar{c}_\gamma$ es siempre igual al mayor de ellos.*

Luego, por las fórmulas del n. 18,

III - *La suma de un número finito de $\bar{c}_\gamma$ o de una infinidad numerable de ellos que tenga máximo es igual al máximo.*

En particular es siempre

$$\aleph_0 \bar{c}_\gamma = \bar{c}_\gamma;$$

pero vamos a demostrar más generalmente que

IV - *El producto de dos $\bar{c}_\gamma$ es siempre igual al máximo de ellos.* La demostración está incluida en la de la proposición I si el factor máximo es un $\bar{c}_\alpha$; en efecto se demostró, como lema de transición, que

$$\bar{c}_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha;$$

si ahora $\bar{c}_\gamma < \bar{c}_\alpha$, será

$$\bar{c}_\alpha \leq \bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_\alpha \leq \bar{c}_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha,$$

lo que demuestra que en todas las desigualdades hay que elegir el signo =.

Si el máximo de los factores es un $\bar{c}_\tau$, pongamos que sea, por definición,

$$\bar{c}_\tau = \lim \bar{c}_{\beta_i} = \sum_i \bar{c}_{\beta_i};$$

y supongamos primero que el otro factor sea $\bar{c}_\gamma < \bar{c}_\tau$, excluyendo el caso de que los dos factores sean iguales; razonemos entonces por inducción, como precedentemente, suponiendo que la proposición por demostrar sea reconocida cierta para todos los productos de dos $\bar{c}_\gamma$ menores que $\bar{c}_\tau$; será

$$\bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_\tau = \sum_i \bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_{\beta_i}.$$

Ahora, por la hipótesis $\bar{c}_\gamma < \bar{c}_\tau$, habrá en la sucesión de los $\bar{c}_{\beta_i}$ uno a partir del cual $\bar{c}_\gamma < \bar{c}_{\beta_i}$; llamémoslo $\bar{c}_\delta$; existirá pues en la última suma un número finito m de primeros términos para los cuales

$$\bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_{\beta_i} = \bar{c}_\gamma < \bar{c}_\delta$$

mientras, para los términos siguientes, se realizará

$$\bar{c}_{\beta_i} \leq \bar{c}_\gamma \quad \bar{c}_{\beta_i} \leq \bar{c}_\delta \quad \bar{c}_{\beta_i} = \bar{c}_{\beta_i}.$$

esto es

$$\bar{c}_\gamma \bar{c}_{\beta_i} = \bar{c}_{\beta_i}.$$

Reemplazando resulta pues

$$\bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_\tau \leq m\bar{c}_\delta + \sum \bar{c}_{\beta_i} = \bar{c}_\delta + \sum \bar{c}_{\beta_i} \quad (\bar{c}_{\beta_i} \geq \bar{c}_\delta)$$

es decir

$$\bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_\tau \leq \bar{c}_\tau;$$

pero necesariamente $\bar{c}_\gamma \cdot \bar{c}_\tau \geq \bar{c}_\tau$. Vale por lo tanto el signo =.

Después de esto resulta en seguida

$$\bar{c}_\tau^2 = (\sum \bar{c}_{\beta_i}) \bar{c}_\tau = \sum (\bar{c}_{\beta_i} \bar{c}_\tau) = \aleph_0 \bar{c}_\tau = \bar{c}_\tau.$$

Queda así demostrada, para todos los casos, la proposición IV; en particular se constata que los números cardinales $\bar{c}_\gamma$ cumplen todos con la propiedad postulada en el trozo citado de Denjoy, según la cual un número transfinito debe ser igual a su propio cuadrado. Luego, generalmente,

$$\bar{c}_\gamma^m = \bar{c}_\gamma.$$

Pasemos finalmente a la exponenciación transfinita. Demostraremos que

V-a) Cualquiera sea $\bar{c}_\gamma$ y $\bar{c}_\delta \geq \bar{c}_\gamma$, será siempre

$$\bar{c}_\gamma \bar{c}_\delta = \bar{c}_{\delta+1}.$$

En efecto de

$$2 < \bar{c}_\gamma \leq \bar{c}_\delta < 2 \bar{c}_\delta$$

se obtiene, elevando todos los miembros al exponente $\bar{c}_\delta$,

$$2 \bar{c}_\delta \leq \bar{c}_\gamma \bar{c}_\delta \leq \bar{c}_\delta \bar{c}_\delta \leq 2 \bar{c}_\delta \cdot \bar{c}_\delta = 2 \bar{c}_\delta = \bar{c}_{\delta+1}$$

y, por ser los miembros extremos iguales, también los signos $\leq$ se cambian en $=$.

V-b) Para todos los $\bar{c}_\alpha$ y para $\bar{c}_\delta < \bar{c}_\alpha$,

$$\bar{c}_\alpha \bar{c}_\delta = \bar{c}_\alpha.$$

En efecto de $\bar{c}_\alpha = 2 \bar{c}_{\alpha-1}$ y $\bar{c}_\delta \leq \bar{c}_{\alpha-1}$, se obtiene

$$\bar{c}_\alpha \bar{c}_\delta = 2 \bar{c}_{\alpha-1} \cdot \bar{c}_\delta = 2 \bar{c}_{\alpha-1} = \bar{c}_\alpha.$$

V-c) Para todos los $\bar{c}_\tau$ y para $\aleph_0 \leq \bar{c}_\delta < \bar{c}_\tau$,

$$\bar{c}_\tau \bar{c}_\delta = \bar{c}_{\tau+1}.$$

Notemos en efecto primero que, evidentemente

$$\bar{c}_\tau \bar{c}_\delta \leq 2 \bar{c}_\tau \cdot \bar{c}_\delta = 2 \bar{c}_\tau = \bar{c}_{\tau+1}. \quad (1)$$

Por otra parte, siendo dada una sucesión numerable de números cardinales $\{\bar{a}_i\}$, se tiene en cada caso

$$\bar{a}_i \leq \sum_{s=1}^{\infty} \bar{a}_s$$

$$\prod \bar{a}_i \leq \prod \sum \bar{a}_s = \left(\sum_{s=1}^{\infty} \bar{a}_s \right)^{\aleph_0}.$$

Sea entonces

$$\bar{c}_\tau = \lim \bar{c}_{\gamma_i} = \sum \bar{c}_{\gamma_i};$$

los γ_i pueden, por definición, ser del tipo α o del tipo τ , pero, en todos los casos, es igualmente

$$\bar{c}_\tau = \lim \bar{c}_{\gamma_{i+1}} = \lim 2 \bar{c}_{\gamma_i} = \sum 2 \bar{c}_{\gamma_i};$$

por la observación anterior, es luego

$$\begin{aligned} \bar{c}_\tau^{\aleph_0} &= (\sum 2 \bar{c}_{\gamma_i})^{\aleph_0} \geq \prod 2 \bar{c}_{\gamma_i} = 2^{\sum \bar{c}_{\gamma_i}} = 2^{\bar{c}_\tau} \\ \bar{c}_\tau \bar{c}_\delta &= \bar{c}_\tau^{\aleph_0} \bar{c}_\delta \geq 2^{\bar{c}_\tau} \cdot \bar{c}_\delta = 2^{\bar{c}_\tau} = \bar{c}_{\tau+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Reuniendo (2) y (1) resulta

$$\bar{c}_{\tau+1} \leq \bar{c}_\tau \bar{c}_\delta \leq \bar{c}_{\tau+1},$$

lo que demuestra lo enunciado.

Los tres casos a), b), c) se resumen en las fórmulas

$$\begin{aligned} \bar{c}_\alpha \bar{c}_\gamma &= \begin{cases} \bar{c}_{\gamma+1} & \text{por } \bar{c}_\alpha \leq \bar{c}_\gamma \\ \bar{c}_\alpha & \text{por } \bar{c}_\alpha \geq \bar{c}_{\gamma+1} \end{cases} \\ \bar{c}_\tau \bar{c}_\gamma &= \begin{cases} \bar{c}_{\gamma+1} & \text{por } \bar{c}_\tau \leq \bar{c}_\gamma \\ \bar{c}_{\tau+1} & \text{por } \bar{c}_\tau \geq \bar{c}_\gamma \geq \aleph_0 \\ \bar{c}_\tau & \text{por } \bar{c}_\gamma = \nu < \aleph_0 \end{cases} \end{aligned}$$

25. - Las proposiciones demostradas permiten entre otro afirmar que:

Los números cardinales $\bar{c}_\alpha$ y $\bar{c}_\tau$ definidos en el n. 23 constituyen una sucesión creciente cuyos términos cumplen con las dos primeras propiedades que A. Denjoy recuerda por no poderse admitir su falsedad. Resulta además que cualquier operación de suma, producto y exponenciación efectuada con ellos produce todavía un número de la sucesión. Si pudiéramos afir-

mar que con estas operaciones se agotan los medios a nuestra disposición para definir conjuntos infinitos; que por lo tanto los números cardinales $\bar{c}_\alpha$ y $\bar{c}_\tau$ representan todas las potencias definibles matemáticamente, tendríamos demostrada también la tercera proposición a la cual se refiere Denjoy: *La potencia inmediatamente sucesiva a una potencia infinita ω es 2^ω .*

Así el problema de dar contestación a la pregunta sobre la verdad absoluta de esta proposición, el que se puede considerar como la forma más simple del llamado *problema del continuo* (cmp. n. 33) viene a reducirse a un problema lógico o más bien epistemológico, el de aclarar sí, para definir conjuntos, nosotros tengamos otros medios distintos de las combinaciones operacionales entre conjuntos previamente conocidos. Efectivamente, de alguna otra manera deberá ser conocido por lo menos algún conjunto de partida sobre el cual empezar a operar, y como tal el análisis tradicional señala sin más el conjunto de los números naturales. De profundizar un poco la cuestión vamos a tratar en los párrafos siguientes.

Notamos que, si estos otros modos de definición de conjuntos existen, nada significaría todavía que sus potencias fueran *comparables* con las anteriores en el sentido del mayor y menor; pero, en el caso de que tal comparabilidad pudiera afirmarse, los números $\bar{c}_\gamma$ vendrían a dividir la escala total de las potencias en segmentos tales de permitir todavía, aunque en forma más atenuada, algunas otras reglas generales de operación, así como:

Si $\bar{x} \leq \bar{c}_\gamma \leq \bar{y}$ será siempre $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y}$; en efecto resulta

$$\bar{y} \leq \bar{x} + \bar{y} \leq \bar{c}_\gamma + \bar{y} = \bar{y}.$$

Si $\bar{x}$ e $\bar{y}$ pertenecen a un mismo intervalo $\bar{c}_\gamma - \bar{c}_{\gamma+1}$, también su suma y su producto pertenecen al mismo intervalo.

Si $\aleph_0 \leq \bar{x} \leq \bar{c}_\tau \leq \bar{y} \leq \bar{c}_{\tau+1}$ será siempre $\bar{y}^x = \bar{c}_{\tau+1}$; en efecto

$$\bar{c}_{\tau+1} = \bar{c}_\tau^{\aleph_0} \leq \bar{c}_\tau^{\bar{x}} \leq \bar{y}^{\bar{x}} \leq \bar{c}_{\tau+1}^{\bar{c}_\tau} = \bar{c}_{\tau+1};$$

pero si $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son ambos $< \bar{c}_\tau$ será siempre también $\bar{y}^x < \bar{c}_\tau$; en efecto, por la hipótesis de ser menores de $\bar{c}_\tau$, existe algún $\bar{c}_\gamma < \bar{c}_\tau$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}) < \bar{c}_\gamma$, luego

$$\bar{y}^x \leq \bar{c}_\gamma^{\bar{c}_\gamma} = \bar{c}_{\gamma+1} < \bar{c}_\tau.$$

Resulta, en particular, de esta última proposición, que los números cardinales de la forma $\bar{c}_\tau$ no pueden de ninguna manera expresarse como resultados de una operación de exponenciación entre números cardinales, los que deberían necesariamente ser menores del número considerado. Comparando esta observación con las fórmulas finales del n. 24, se debe notar la estricta analogía que existe en las propiedades de los números $\bar{c}_\tau$ con $\aleph_0$, el cual, por otra parte tiene también análoga definición como el primer cardinal mayor de todos los números finitos.

26. - Los números cardinales $\aleph$ de Cantor. — Apoyándose a un orden de consideraciones fundamentalmente distinto del que nos ha guiado hasta aquí, G. Cantor fué llevado a suponer una sucesión de potencias que, siguiendo a él, se designan por las $\aleph$'s, las cuales recuerdan los números $\bar{c}_\gamma$ por la propiedad de presentarse en un orden creciente por medio de dos operaciones: de *generación del siguiente* y de *generación del límite*; enunciados para estas $\aleph$, la literatura ofrece también varios teoremas que tienen formalmente a menudo estricta semejanza con las fórmulas demostradas en los últimos párrafos respecto de las $\bar{c}_\gamma$, aunque con medios demostrativos y conceptos directores esencialmente distintos.

Sobre este argumento vamos a detenernos un poco ahora.

Es esencial, para seguir con el concepto histórico y crítico que dirige este estudio, recordar, en orden de tiempo, cuál fué el punto de partida de Cantor; como la creación de la noción de potencia por Cantor se derivó de un preciso problema analítico concluido con la demostración de la no-numerabilidad del continuo, así un concreto problema relacionado con la condensación de las singularidades en las funciones reales de variables reales lleva Cantor a publicar, entre los años 1879 y 1884, en los *Mathematische Annalen*, una serie de seis memorias con el título común: *Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*; el objeto principal de las primeras memorias es en efecto una investigación acerca de la repetida operación de derivación aplicada a los conjuntos de puntos⁽²⁰⁾. Se sabe que el primer derivado de un conjunto dado es siempre un conjunto cerrado y que, por otra parte, el conjunto derivado de un conjunto cerrado o bien coincide con

⁽²⁰⁾ Recordamos que se llama conjunto derivado de un dado conjunto de puntos al conjunto formado por sus puntos límites.

él, en cuyo caso, con término debido también a Cantor, se llama al conjunto dado *perfecto*, o bien es una parte propia del conjunto dado. Resulta que los derivados sucesivos son cada uno parte propia del anterior hasta que se llegue a uno último que será o perfecto o nulo (vacío). Sin embargo se ve fácilmente en ejemplos que es posible que la sucesión de estos derivados sucesivos sea infinita, correspondiendo a los sucesivos números enteros. Cantor considera entonces el conjunto de los puntos comunes a todos estos derivados, el cual se demuestra fácilmente ser todavía cerrado y que Cantor asume, por definición, como el derivado de índice ω . A partir de este conjunto Cantor aplica nuevamente el procedimiento de derivación, obteniendo una nueva sucesión de conjuntos, siempre partes propias cada uno del anterior, a los cuales aplica los índices $\omega+1$, $\omega+2$, ... hasta repetir la operación de tomar el conjunto de los puntos comunes a todos los derivados así obtenidos, al cual se atribuirá el índice 2ω . Se entiende que, salvo el caso que se demostrara que la prosecución de esta operación es ilusoria por llegarse a un conjunto perfecto o nulo, la sucesión de estas operaciones se prolonga indefinidamente en modo totalmente análogo a la construcción sucesiva de los números cardinales $\bar{c}_\gamma$.

Pero en el caso presente el problema se puede encarar bajo otro aspecto: se demuestra fácilmente que un conjunto de puntos cerrado se puede siempre descomponer en la suma de dos conjuntos, numerable uno y perfecto el otro. Si, por simplicidad, se supone considerar puntos de un segmento, basta separar sobre este segmento los segmentos parciales máximos que contienen solamente un sistema numerable (eventualmente finito o nulo) de puntos del conjunto cerrado dado. En cuanto un sistema de segmentos sin partes comunes es siempre numerable, sigue que el conjunto de los puntos del conjunto dado internos a estos segmentos es todavía numerable (suma de un conjunto numerable de conjuntos numerables) y forma, este conjunto, la primera parte de la descomposición enunciada. Los otros puntos del conjunto dado, puesto que existan, constituyen la segunda parte, perfecta por no poder contener puntos aislados.

Si después de esta descomposición se aplica al conjunto dado la sucesión de derivaciones, como se dijo antes, los puntos que por tal operación se perderán sucesivamente pertenecen sólo a la primera parte, mientras se conservarán invariados los puntos

de la parte perfecta; y por cuanto cada derivación que no opere sobre un conjunto perfecto hace perder algún punto, sigue que, siendo numerable el conjunto de los puntos que pueden ser eliminados, también el conjunto de las sucesivas operaciones de derivación será necesariamente numerable.

27. - Ahora Cantor, en la quinta memoria del grupo que hemos recordado, pasa a dar forma abstracta al concepto del cual la sucesión de las derivaciones le ha ofrecido un ejemplo, intentando una *definición constructiva* de lo que más tarde llamará *conjunto bien ordenado*. Después de un largo preámbulo en el cual, conjuntamente con referencias históricas y filosóficas, se anuncian en forma intuitiva los resultados que se quieren alcanzar, empieza el autor el § 11 diciendo: «Mostraremos ahora cómo se llega a la definición de los nuevos números... La serie (I) de los números reales positivos 1, 2, 3, ..., ν , ... tiene su propio fundamento en la repetida adjunción de unidades consideradas como iguales... La formación de los números enteros reales finitos reposa por tanto sobre el principio de la adjunción de una unidad a un número ya formado; yo llamo a este momento ... el *primer principio de generación*. El número de los números ν de la clase (I) que así se derivan es infinito y no hay entre ellos un máximo ..., pero, por otra parte, nada se opone a imaginar un *nuevo* número, que llamaremos ω , que sea la expresión de que está dado el conjunto total (I) en su natural sucesión según la ley. ... También se puede pensar el recién-creado número ω como límite al cual tienden los números ν , a condición de no entender por esto sino que ω es el *primer* número entero que sigue a todos los números ν , de llamarse pues mayor de cada uno de los números ν . Mientras a la introducción del número ω se pueden hacer seguir ulteriores adjunciones⁽²¹⁾ de la unidad, se obtienen, con ayuda del *primer principio de generación*, los

(21) El texto alemán usa la misma palabra "Setzung" donde hemos creído útil traducir diferenteente por *introducción* y por *adjunción* con el fin de que la frase representara más precisamente el pensamiento. Se trata en efecto de dos actos de naturaleza diferente, sin que podamos, sin embargo, afirmar que en la pequeña confusión de términos no hubiera, por el autor, algún motivo intencional; ya en las primeras líneas donde se define la serie (I), a nuestra traducción *adjunción* corresponde en el texto "Setzung und Vereinigung".

ulteriores números $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega+v$, ...; pero como aquí nuevamente no se puede llegar a ningún máximo, así se imagina un nuevo número que se puede llamar 2ω La función lógica que nos ha proporcionado los dos números ω y 2ω , es manifiestamente distinta del primer principio de generación, yo la llamo *segundo principio de generación* de números enteros reales y lo defino precisamente por eso que, si tenemos una sucesión determinada cualquiera de números enteros reales definidos, de los cuales no existe máximo, fundándonos sobre este segundo principio creamos un nuevo número el cual se piensa como límite de aquellos, es decir se define como el número inmediatamente mayor de todos ellos».

Por medio de la aplicación alternativa de ambos principios Cantor construye ahora una sucesión de «números» ordinales de los cuales son ejemplos los símbolos formados con polinómios del signo ω , a los cuales hemos recurrido como índices de $\bar{c}$ en el n. 23, pero que a estos polinómios evidentemente no pueden limitarse. Cantor estima en efecto que la aplicación alternativa de los dos principios puede prolongarse más allá de toda imaginación, incluyendo en esta imaginación también toda potencia pensable y busca luego en la consideración de la *potencia* un principio regulador que, sin interrumpir el efecto ilimitado de la aplicación de los dos principios anteriores, valga a establecer en ella puntos de división o de parada. Así conviene él que, por este *tercer principio de interrupción* (*Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip*), se llamarán *números enteros reales de la clase (II)* a los que, siguiendo a los números de la clase (I) son *tales que los números ordinales que preceden a cada uno de ellos constituyen un conjunto de la primera potencia*.

Desde luego, a raíz del mismo enunciado del tercer principio, el conjunto de los números de la segunda clase no será más numerable; Cantor llama $\aleph_1$ a la potencia de este conjunto y, en el pensamiento anterior de que no pueda de esta manera darse por terminada la construcción de nuevos números ordinales por la aplicación de los dos primeros principios, pone por definición una tercera clase que sería caracterizada por la condición que el conjunto de los números ordinales que preceden a cada uno de sus elementos tiene potencia $\aleph_1$; y el conjunto de los números de la tercera clase tendría por tanto potencia mayor, la que, por defini-

ción, sería $\aleph_2$. De esta manera vendría a concebirse una sucesión ilimitada de potencias

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$$

cada una de las cuales seguiría inmediatamente a la anterior⁽²²⁾.

No debe escapar a la atención del lector lo que hay de arbitrario y de ilusorio en estas inferencias; diríamos que el mismo Cantor no deja de ponerlo en cierta evidencia con la repetida y múltiple alternancia de expresiones que representan esfu-
maturas diferentes de los conceptos que se quieren introducir con las frases que arriba hemos reproducido. Hay más; muy a propósito Cantor afirma, para transpasar lo infinito de los nú-

(22) La exposición explícita de estas últimas conclusiones no se encuentra ordenada en las memorias de Cantor; pero sí la persistente alusión a ellas. Así se encuentra la alusión a la tercera clase de números ordinales en las últimas líneas del § 2 de la memoria a la cual nos referimos en el texto. Y en las primeras líneas del § 3 encontramos paralelamente la afirmación de que “siempre es posible llevar a forma bien ordenada cualquier conjunto bien definido”, pero remitiendo a una memoria posterior, nunca publicada, la demostración de esta “particularmente notable ley del pensamiento, fundamental e importante por su generalidad”. Todavía en una carta a Dedekind fechada Halle, 28 de julio 1899 expresa: “...Ud. sabe que desde muchos años yo he llegado a una sucesión bien ordenada de potencias o números cardinales transfinitos que yo llamo los “alefs”

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \dots$$

.....

“La cuestión importante era si además de los alefs había otras potencias; ya desde dos años estoy en posesión de una demostración de que no hay otras...”. Pero tampoco esta demostración no apareció nunca.

Estamos aquí delante de uno de los rasgos más notables de la psicología canteriana, esto es que, al lado del matemático riguroso, de imaginación fecunda dentro de los seguros marcos del análisis clásico y de un fuerte control crítico que le hace buscar la perfección de las demostraciones, se insinúa constantemente el metafísico que lo impulsa hacia generalizaciones que desbordan de las correctas reglas de la deducción. En el caso actual lo que guía las atrevidas generalizaciones que estamos examinando es el *deseo* de una *aritmética del infinito, fundada sobre una operación ideal comparable con el recuento de los objetos de una colección*; la cual operación, de verdad, tampoco para el caso de los números finitos se ha mostrado útil, independientemente de una previa noción axiomática de la sucesión de los números naturales.

meros naturales, la necesidad de distinguir entre el primero y el segundo principio, cuya «función lógica ... es manifiestamente distinta», mientras por otro lado no se abstiene de insistir sobre una íntima identidad de ellos al intercalar, en los lugares donde en nuestra traducción pusimos puntos, frases como: «el número ν es igualmente la expresión de un número finito de aquellas sucesivas adjunciones, como también de las unidades puestas en un todo» ... «Del mismo modo (como ω es la reunión del conjunto de los números naturales en un todo) ν es la expresión de que un cierto número de unidades se ha reunido en un todo». Ahora si esta identidad de conceptos ha de considerarse como justificación de la extensión de la noción de *número*, ¿cómo puede esta noción adaptarse a los ejemplos concretos anteriormente referidos? La ilusión consiste en la pretensión de *definir constructivamente* ⁽²³⁾ y el mismo Cantor, en su última memoria: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* ⁽²⁴⁾, en el cual se propone dar forma orgánica y definitiva a las ideas varias veces elaboradas, intenta resolver la dificultad con hacer depender la nueva

⁽²³⁾ No es posible *construir* sino con un número finito de operaciones; cuando el matemático transpone el infinito, define cada vez una nueva operación, llámese ella por ej. “límite”, la cual supone anteriormente adquirido *un cierto concepto de infinito*; y esto hace Cantor cuando dice que ω representa “*die ganze Inbegriff (I)*”. Es verdad también que muchos autores modernos, sin hacer caso del recelo del Cantor matemático y poniendo más fe en el Cantor metafísico, aceptan una hipotética construcción de números ordinales por la indefinida aplicación de una operación que se concreta en la reunión en elemento de un conjunto que se supone ya construido; puede decirse únicamente que tales construcciones no ofrecen más de lo que por otro lado se admite por postulados, expresados o no. Así, K. GÖDEL, en *The Consistency of the Axiom of Choice and of the generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of set Theory* (Annals of Mathematics Studies, 3-1940) después de parecer adherirse a la definición dicha, la concreta en una representación simbólica que se debe leer: — Ordinal es una clase ordenada respecto de la relación de pertenencia. — Si u es un ordinal, u es el segmento que el mismo u determina en la clase. — Se llama número ordinal un ordinal que sea un conjunto. — La segunda proposición, en cuanto a forma, es más bien postulado que definición. De todos modos lo único que juega para dar sentido a estas proposiciones es la noción de conjunto bien ordenado que se supone conocida de antemano; los demás detalles pueden tener eventualmente un valor intuitivo, pero no tienen efecto lógico.

⁽²⁴⁾ Math. Annalen Bd. 46 (1895), Bd. 49 (1897) — Ges. Werke, p. 282 y sig.

noción por abstracción de los *tipos de los conjuntos bien ordenados*. Pero también este camino no es libre de dificultades.

28. - Un conjunto se llama bien ordenado cuando, respecto de sus elementos, está definida una relación R , transitiva y asimétrica, que se conviene leer «sigue», tal que, si u y v son dos elementos distintos del conjunto, se verifica siempre una y una sola de las afirmaciones uRv o vRu . Además se supone que está definido en el conjunto total y en cualquier parte propia de él un elemento respecto del cual todos los demás elementos de la parte considerada son siguientes respecto de la dada relación R .

Son evidentemente ejemplos de conjuntos bien ordenados los que anteriormente hemos encontrado, considerando como elementos los sucesivos conjuntos derivados de conjuntos lineales de puntos, o bien los números cardinales $\bar{c}$, u otros casos conocidos que ofrece el análisis matemático. Pero es claro también que, sin despreciar las propiedades que de la definición del bien-ordenamiento se derivan, la definición por sí misma no puede dar ninguna información acerca de la existencia de conjuntos a los cuales ella pueda aplicarse, y la validez del concepto emerge únicamente de dichos ejemplos que la práctica matemática nos hace conocer. Esta práctica matemática nos enseña, en particular que, siendo dado un conjunto bien ordenado, siempre se puede, en función de ese bien-ordenamiento, definir para el mismo conjunto otros bien-ordenamientos cuyo tipo es más amplio del o de los que se suponen dados; pero nada añaden estas transformaciones, por ej. con respecto a la potencia de los conjuntos considerados.

29. - El caso conocido de la noción de «número natural» cuya construcción lógica sólo deriva de la definición axiomática va a indicarnos el camino para resolver estas dificultades. Del mismo modo como la noción intuitiva del número natural se forma por abstracción de los ejemplos concretos de números naturales ofrecidos por la operación de contar, igualmente, como abstracción de los ejemplos de conjuntos bien-ordenados anteriormente recordados, concebimos como *idea primitiva* una clase de elementos que llamaremos *números de la clase Z_1* ⁽²⁵⁾, respecto de los cuales existe,

⁽²⁵⁾ Adopto el símbolo Z para recordar el signo usado por CANTOR escribiendo $Z(\aleph_0)$, $Z(\aleph^i)$ para indicar las clases de números ordinales de las dis-

aún como *idea primitiva*, una relación transitiva y asimétrica que representaremos por $<$ (y su inversa por $>$) de manera que dichas ideas cumplen con los siguientes postulados:

Z_1 1º. - Si a y b son números (distintos) de la clase Z_1 , rige una (sola) de las afirmaciones $a < b$ o $a > b$.

Z_1 2º. - Existe un número O de la clase Z_1 tal que cualquiera sea el número $a \neq O$ de la clase Z_1 , es siempre $O < a$.

De 1º. sigue que no existe en Z_1 otro número con la misma propiedad.

Z_1 3º. - Cualquiera sea el número a de Z_1 , existe otro número a' (siguiente de a) tal que todo número $< a'$ es $\leq a$.

Todavía de 1º. resulta que no existe otro número con la misma propiedad de a' y que, si un número q es siguiente de algún número, este número (precedente de b) es único.

Z_1 4º. - Si $a_1, a_2, \dots$ es una sucesión de números de la clase Z_1 , referidos a la sucesión de los números naturales 1. 2. ... y si $a_i < j$ corresponde $a_i < a_j$, existe en la clase Z_1 un número $l(a_i)$ (límite de la sucesión $\{a_i\}$) tal que, para todos los valores de i , $a_i < l$, y si b es un número tal que $b < l$, existe algún i tal que $b < a_i$.

Evidentemente el número l es único, porque cualquier otro número l_1 es $< l$ o $> l$; en el primer caso, por la última condición no puede ser, para todos los i , $a_i < l_1$; en el segundo, $l < l_1$, pero $l > a_i$ para todos los i , y por tanto l_1 no satisface la última condición.

Z_1 5º. - Si una clase s contiene el número O y contiene el número siguiente de cualquier número de la clase Z_1 que le pertenezca e igualmente contiene el límite de cualquier sucesión creciente de números de Z_1 que les pertenezcan, la clase s contiene a toda la clase Z_1 .

Vamos a demostrar que la definición actual de la clase Z_1 es equivalente a la clase $Z(\aleph_0)$ de Cantor:

tintas potencias. Como se demuestra a continuación, la clase Z_1 es equivalente a la $Z(\aleph_0)$, aunque de ella se distingue por el concepto axiomático opuesto al constructivo y por otras razones que se ligan con este particular. Así, por ej., $Z(\aleph_0)$ sería la clase de los números ordinales siguientes a los naturales; Z_1 es una clase autónoma que contiene un segmento isomorfo a la clase de los números naturales; y esto es justo lógicamente porque también $Z(\aleph_0)$ no cambia su estructura si se llama O al número ordinal ω .

I. - *La clase Z_1 es bien ordenada respecto de la relación $<$;* basta demostrar que cualquier subclase de Z_1 tiene, con respecto a la relación $<$ un primer elemento.

Supóngase, en efecto, por absurdo, que una subclase S de Z_1 no contenga un elemento que precede a todos los demás de la misma clase respecto de la relación $<$; sigue, por Z_1 2º., que S no contiene el número O ; existe por lo tanto una parte de Z_1 , que llamaremos s , formada por todos los números que preceden a todos los elementos de S , y que contiene O . Si ahora a es un elemento de s , será también elemento de s el número a' (Z_1 3º.), porque todos los números $< a'$, siendo $\leq a$, no pertenecen a S y por lo tanto, si a' perteneciera a S , precedería a todos los demás números de S . Por razón análoga, si una sucesión de números $a_1, a_2, \dots$ pertenecen a s , también $l(a_i)$ pertenece a s . Por el post. 5º. resulta que s contiene Z_1 y por tanto es idéntica a Z_1 y S no puede existir.

II. - *Cualquier segmento de Z_1 es numerable.* En efecto pueden, en principio, dividirse los números de Z_1 en dos clases, s y S , formadas la primera por los números precedidos por segmentos numerables o por el segmento vacío y la segunda por los números, si los hay, que determinan segmentos no numerables. Por definición s contiene pues el número O ; por otra parte, si a es un elemento de s , también a' pertenece a s , porque el segmento determinado por a' es numerable, siéndolo, por hipótesis, el segmento determinado por a . Si ahora $a_1, a_2, \dots$ es una sucesión creciente de números pertenecientes a s , el segmento determinado por $l(a_i)$ es la suma lógica de todos los segmentos determinados por cada uno de los a_i ; siendo, por hipótesis, todos estos segmentos numerables, es también numerable su suma; luego $l(a_i)$ pertenece a s . Por el post. 5º. s comprende luego a todo Z_1 y el conjunto S es nulo.

III. - *La clase Z_1 no es numerable.* Supongamos en efecto, por absurdo, que los números de Z_1 puedan ordenarse en una sucesión numerada $a_1, a_2, \dots$; dentro de la sucesión de los números naturales $0, 1, 2, 3, \dots$ queda definida una sucesión parcial $m_1, m_2, \dots$ por las condiciones: $m_1 = 0$; si $m_i = k$, m_{i+1} es el primer número (natural) $> k$ y tal que $a_{m_{i+1}} > a_{m_i}$. Así la sucesión a_{m_i} es creciente y determina un $l(a_{m_i})$ que sigue a todos los a_i , contra

de la hipótesis de que la sucesión de los a_i comprenda a todos los términos de Z_1 ⁽²⁶⁾.

IV. - Si A es un conjunto de números de la clase Z_1 , dos casos pueden presentarse: o que existen en Z_1 números siguientes (mayores) a todos los elementos de A , o bien que así no ocurre y, por lo tanto, si u es un número cualquiera de Z_1 , existen en A elementos $> u$. En el primer caso, la clase S de los números de Z_1 mayores de todos los elementos de A no es vacía y tiene un primer elemento $L(A)$, mayor que todos los elementos de A , pero tal que, si $a < L(A)$, a pertenece a A , o existe en A algún elemento $a_1 > a$. El conjunto A es parte del segmento definido por $L(A)$ y, por la prop. II, A es finito o numerable.

En el segundo caso se obtiene una representación de Z_1 sobre A o sobre una parte de A con la regla siguiente: al número 0 se hace corresponder el primer elemento de A ; si u es un número al cual corresponde el elemento a_u de A , a u' se hace corresponder el elemento primero del conjunto de los elementos de A mayores que a_u ; si $u_1, u_2, \dots$ es una sucesión numerada de números de Z_1 a los cuales correspondan elementos de A , $a_{u_1}, a_{u_2}, \dots$, al número $l(u_i)$ se hace corresponder el elemento primero del conjunto de los elementos de A mayores de todos los a_{u_i} ; la correspondencia así definida es evidentemente ordenada, en el sentido que si u y v son dos números de Z_1 tales que $u < v$, es $a_u < a_v$; la correspondencia es también unívoca; en efecto, la definición determina en modo evidentemente único el elemento a_u de A correspondiente al número u' si es unívocamente determinado el elemento a_u correspondiente a u ; en cuanto a los números de la forma $l(u_i)$ basta notar que si $\{u_i\}$ y $\{v_i\}$ son dos sucesiones tales que $l(u_i) = l(v_i)$, por la observación precedente de que la correspondencia es ordenada, son idénticos los conjuntos de los elementos de A mayores de todos los a_u y mayores de todos los a_v . Resulta que en el segundo caso el conjunto A tiene la misma potencia del conjunto Z_1 ⁽²⁷⁾.

⁽²⁶⁾ Esta demostración no difiere, en el concepto y casi en las palabras, de la demostración de Cantor para el teorema análogo referente al conjunto $Z(\aleph_0)$ (Math Ann. Bd 49 15,C); difiere sin embargo en el punto esencial que aquí se sigue una deducción lógica fundada sobre los postulados, mientras Cantor, obedeciendo a la ilusión constructiva, se siente obligado a puntualizaciones inútiles, con sumación de conjuntos, etc.

⁽²⁷⁾ La inferencia deriva inmediatamente por la aplicación del teorema

Concluimos de III y IV que el conjunto Z_1 tiene potencia superior a $\aleph_0$, y cualquier subconjunto de Z_1 que no tenga potencia $\leq \aleph_0$ tiene la misma potencia del conjunto total. Siguiendo a Cantor se llama $\aleph_1$ a la potencia de Z_1 y queda demostrado que $\aleph_1$ es potencia inmediatamente sucesiva a $\aleph_0$. No por eso queda necesariamente probado que sea $\aleph_1$ la potencia inmediatamente sucesiva a $\aleph_0$, porque nada resulta con respecto a la hipotética ordenación de las potencias.

30. - Consideramos infinitos conjuntos isomorfos al conjunto Z_1 , cuyos elementos podrán concretarse, por claridad, en los complejos de dos coordenadas (u, n) siendo u número de Z_1 y n número natural. En el conjunto total suma de estos infinitos conjuntos definimos una relación ordenatriz que indicaremos por $<'$ (y su inversa por $>'$) con la regla siguiente:

1º. Cualquiera sean u y n diferentes respectivamente de O y 0 , es $(O, 0) <' (u, n)$.

2º. Cualquiera sean los números naturales n_1, n_2 , si $u < v$, es $(u, n_1) <' (v, n_2)$.

3º. $(u, n_1) <' (u, n_2)$ cuando $n_1 < n_2$.

Se ve en seguida que, interpretando como número O el elemento $(O, 0)$ y como relación $<$ la $<'$, la clase de los elementos (u, n) viene a identificarse con la clase Z_1 ; en efecto, son inmediatamente realizados los postulados Z_1 1º. y Z_1 2º.; igualmente el post. Z_1 3º., siendo $(u, n)' = (u, n+1)$; finalmente son sucesiones crecientes las $\{(u_i, n_i)\}$ en las cuales para $i < j$, o bien $u_i < u_j$ (siendo por otra parte n_i y n_j cualesquiera), o bien $u_i = u_j$ y $n_i < n_j$; si el primer caso se verifica con valores de i aunque elevados, será $l((u_i, n_i)) = (l(u_i), 0)$; en el caso contrario, a partir de un cierto valor de i , u_i quedará igual a un valor constante u , y será $l((u_i, n_i)) = (u, 0)$. Queda así verificado también el post. Z_1 4º. El post. Z_1 5º. queda pues automáticamente realizado por cuanto expresa solamente que la identificación del nuevo conjunto con el conjunto de los números Z_1 queda asegurada ilimitadamente a consecuencia del referimiento indicado.

Resulta en particular de lo dicho que vale la igualdad

$$\aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1; \quad (30.1)$$

de Bernstein, sin que sea necesario demostrar previamente que la correspondencia entre Z_1 y A arriba definida es invertible.

luego también

$$\aleph_1 = 2\aleph_1 = m\aleph_1. \quad (30.2)$$

2º. Consideremos ahora el conjunto de los complejos (u, v) , donde u y v son números de Z_1 ; podemos dividirlo en tres partes: una parte A formada de los complejos (u, v) con $v < u$; una B formada de los complejos con $u < v$; y una C de los complejos (u, u) . La última está sin más en correspondencia biunívoca con Z_1 . En A los elementos que corresponden a un valor fijo de u son, por la prop. n. 29 II, un conjunto numerable en correspondencia biunívoca con los complejos (u, n) (u fijo); por lo tanto, A , mientras u recorre Z_1 , se pone en correspondencia biunívoca con el conjunto de los complejos (u, n) ($u \in Z_1$, n número natural). Lo mismo se dice por B , permutando u y v . Teniendo en cuenta (30.1) y (30.2) se obtiene así que

$$\aleph_1^2 = 2\aleph_0 \cdot \aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1; \quad (30.3)$$

y luego, para m número natural cualquiera,

$$\aleph_1^m = \aleph_1. \quad (30.4)$$

3º. Consideremos por fin el conjunto de los complejos $(u_1, u_2, \dots)$, de infinitas coordenadas, números de Z_1 ; su potencia será claramente $\aleph_1^{\aleph_0}$. Observemos ahora que a cada elemento del conjunto corresponde un número de Z_1 , límite superior de sus coordenadas, pudiendo este límite superior ser un máximo o solamente límite; esto en el caso de que la sucesión formada por u_1 , la primera coordenada siguiente $> u_1$, la primera siguiente a ella y mayor, ... se presentara infinita. Fijado entonces un número N cualquiera de Z_1 , consideremos el conjunto parcial formado por todos los complejos cuyas coordenadas son $< N$; cada coordenada podrá luego adquirir un conjunto numerable de valores; este conjunto parcial tendrá pues la potencia

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \bar{c}_1.$$

Haciendo ahora recorrer a N todos los valores en Z_1 , dentro

de los correspondientes conjuntos parciales entrarán, por la observación anterior, todos los complejos $(u_1, u_2, \dots)$. Desde luego, cada uno de estos complejos se presentará un número de veces $= \aleph_1$; se tiene pues

$$\aleph_1 \cdot \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 \bar{c}_1.$$

es decir

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 \bar{c}_1 \quad (30.5)$$

La conclusión resultará aún más clara notando que del conjunto de los complejos $(u_1, u_2, \dots)$ se puede efectivamente separar una parte cuya potencia es todavía $\aleph_1 \cdot \bar{c}_1$; basta para eso considerar únicamente aquellos complejos para cada uno de los cuales existe una coordenada máxima; estos complejos se dividen en grupos independientes de potencia $\bar{c}_1$, caracterizado cada uno por el valor N de este máximo; luego el conjunto total de estos complejos tiene potencia $\aleph_1 \cdot \bar{c}_1$.

Las igualdades (30.2) y (30.3) (o (30.4)) expresan para $\aleph_1$ las dos primeras propiedades esenciales de los números cardinales transfinitos, según Denjoy, a las cuales repetidamente nos hemos referido. Conjuntamente con (30.5) ellas se pueden encontrar ya en la tesis de Bernstein: *Untersuchungen aus der Mengenlehre* (1903) (Math. Ann. Bd. 61. - 1905) (§ 12 - *Das Ultracontinuum*); como propiedades generales de todos los $\aleph$. Sin embargo, debe notarse que en esta memoria no se discute el pensamiento cantoriano acerca de la sucesión de las potencias, aceptándolo como verdad en la forma referida en el n. 27; en particular, de la fórmula (30.4) no se da demostración explícita, refiriéndola a una comunicación verbal de Cantor, según la cual ella se alcanzaría «con razonamiento análogo al caso simple de $\aleph_0$ »; y la (30.5) no aparece explícitamente sino como caso particular de una afirmación general

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\nu}$$

que depende de los antedichos. Por la regularidad de las demostraciones y de las hipótesis creemos pues esencial y nueva la puntualización actual.

31. - La definición axiomática dada en el n. 29 para la clase Z_1 se imita fácilmente para definir en modo recurrente nuevas clases de números (objetos lógicos) siempre más extensas. Bastará cambiar el símbolo Z_1 en otro Z_2 y añadir después del postulado Z_2 4º. (que convendrá por eso llamar Z_2 4º') un Z_2 4º'': Si $\{a_u\}$ es una sucesión de números de la clase Z_2 referidos a la sucesión total $\{u\}$ de los números de la clase Z_1 y si a $u < v$ corresponde $a_u < a_v$, existe en la clase Z_2 un elemento $l(a_u)$ (límite de la sucesión $\{a_u\}$) tal que, para todos los valores de u , $a_u < l$, y si b es un número de Z_2 tal que $b < l$, existe algún u tal que $b < a_u$.

Desde luego habrá que extender en modo análogo el postulado de inducción 5º.

Se demostrarán entonces teoremas análogos a los I, II, III del n. 29 para poder afirmar que la potencia de Z_2 es mayor que la de Z_1 . La nueva potencia será, por definición, $\aleph_2$.

No creo de mucho interés detenernos ahora mayormente sobre el nuevo procedimiento de construcción de potencias sucesivas: sólo cabe observar que la inducción no dará todavía más que una sucesión de conjuntos Z_i correspondientes a los sucesivos números naturales de manera que, todavía aquí, una clase de números Z_ω podrá definirse únicamente como suma de todas las Z_i ($i=1, 2, 3, \dots$).

32. - Cada $\aleph_i$ puede evidentemente tomarse, al igual como $\aleph_0$, como punto de partida para una sucesión de exponenciaciones de la base 2, análoga a la sucesión de las $\bar{c}_\gamma$. Hay que preguntarse si entre estas sucesiones va a interceder alguna relación notable. La fórmula (30.5) es un pequeño ejemplo de tal posibilidad; elevando a un exponente $\bar{c}_\gamma$, ella se generaliza en seguida en

$$\aleph_1^{\bar{c}_\gamma} = \aleph_1^{\bar{c}_\gamma} \cdot \bar{c}_{\gamma+1}; \quad (32.1)$$

pero no tengo idea de que se pueda ir más allá de semejantes conclusiones que pueden considerarse banales.

W. Sierpinsky afirma la fórmula⁽²⁸⁾

$$\aleph_1 < 2^{\bar{c}_1} = \bar{c}_2,$$

⁽²⁸⁾ *Leçons sur les nombres transfinis*, p. 210.

con una demostración que me parece dudosa; si la desigualdad fuera cierta se obtendría en seguida la relación más estricta

$$2^{\aleph_0} = \bar{c}_1 \leq 2^{\aleph_1} \leq 2^{\bar{c}_2} = \bar{c}_3$$

y, poniendo, análogamente al simbolismo adoptado para las $\bar{c}_i$,

$$2^{\aleph_1} = \bar{C}_2, \quad 2^{\bar{C}_i} = C_{i+1},$$

seguiría en seguida la desigualdad más general

$$\bar{c}_{i-1} \leq \bar{C}_i \leq \bar{c}_{i+1}$$

y por consecuencia

$$\bar{C}_\omega = \lim \bar{C}_i = \bar{c}_\omega.$$

Resultaría por lo tanto el resultado notable que el procedimiento de exponenciaciones sucesivas aplicado a partir de $\aleph_1$ produciría números cardinales nuevos a lo sumo para potencias $< \bar{c}_\omega$, mientras después de esto se encontrarían nuevamente las mismas $\bar{c}_\gamma$ precedentemente estudiadas.

33. - Cierro con estos problemas el estudio presente, ya largo, pareciéndome momentáneamente alcanzado el fin que me había propuesto; se trataba de ensayar hasta donde podía llevar el razonamiento matemático riguroso en un campo que, como hemos indicado, queda dudoso para muchos analistas. Principalmente se ha mostrado que, sobre hipótesis bien definidas y correspondientes a la práctica normal del razonamiento matemático, se obtienen efectivamente fórmulas y relaciones que reproducen, quizá más fielmente de lo que a priori podría esperarse, las auspiadas por la intuición o, acaso con más propiedad, por una pseudointuición simplista. Interesa esencialmente a nuestras deducciones la independencia que necesariamente hemos mantenido entre la sucesión de las $\bar{c}_\gamma$ y la sucesión de las $\aleph$, la cual supone posible la *incomparabilidad de las potencias* y demuestra en el acto que tal eventual incomparabilidad no es obstáculo que impida llegar a conclusiones, ciertamente no menos interesantes que las que se obtienen sobre el molde forzado del ordenamiento rectilineal.

Acerca del valor de esas fórmulas quiero llamar la atención sobre la reserva que está contenida particularmente en algunos teoremas del n. 16 y anteriores, cuando se pone en las hipótesis la posibilidad de señalar en los conjuntos considerados uno o más elementos; no ha querido detenerme, en los párrafos sucesivos, a considerar si y cuánto tal reserva pueda influenciar la interpretación definitiva de los teoremas obtenidos; es un refinamiento que, si necesario, puede ser remitido a un examen posterior. En mientras queda confirmada mi convicción de que la verdadera teoría de los conjuntos deba prescindir del llamado *postulado de Zermelo*, formando del bien-ordenamiento un capítulo del cual hemos también iniciado un pequeño esbozo.

Cantor *creyó* en el bien-ordenamiento de cualquier conjunto; y el «cualquiera» incluía desde luego a los conjuntos ofrecidos naturalmente por la práctica matemática, primero y esencial el conjunto de los números reales; y *esperó* también toda la vida que tal bien-ordenamiento habría podido alcanzar a *demostrar*; y hemos podido notar también varias veces que, si la esperanza era ilusión, el espíritu del matemático quedaba vigilante para impulsar en la búsqueda de la deducción rigurosa. Perdida, después de Cantor, la esperanza de encontrar tal demostración, encontró éxito la sugestión de Zermelo ⁽²⁹⁾ de que, puesto que, de todos modos tampoco nadie demostraba lo contrario, pudiera introducirse en la teoría como postulado, directamente la afirmación del bien-ordenamiento de cualquier conjunto, si no alguna afirmación menos directa que lo implicara. Creo no equivocado decir que a dar apoyo a la propuesta contribuyó en mucho la autoridad de David Hilbert. Para muchos pareció buen argumento el que la matemática, en su calidad de lógica pura, tiene derecho de deducir libremente de cualquier sistema de postulados, bajo la sola condición que no sea contradictorio. Esto también es cierto, y aun podríamos eliminar la condición, porque a menudo encontramos útil razonar deductivamente sobre proposiciones cuya contradicción solamente no es manifiesta; pero hay otra condición que, en mi opinión, no se puede olvidar y es la de no equivocarse con los nombres en la determinación del sentido verdadero de la investigación. Para que una definición axiomática pueda llamarse

(29) E. ZERMELO, *Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. 59 — *Neuer Beweis für die Möglichkeit der Wohlordnung* — Math. Ann. 65.

«conjuntos» es necesario que ella comprenda entre sus interpretaciones aquellos significados que indica el sentido intuitivo de común aceptación y entre éstos existen ciertamente los conjuntos tradicionales, de los números naturales y de los números reales. Una característica esencial de estos conjuntos tradicionales de la matemática es que cada uno de ellos tiene ya una definición axiomática por un sistema de postulados *completo*, (y la palabra *Vollständigkeit* ha sido introducida precisamente por Hilbert); en efecto, también antes de que el problema lógico se pusiera en la forma moderna y que naciera por tanto la pretensión de enunciar explícitamente todos los postulados de los cuales hace uso determinada teoría, siempre el matemático consideró como seguro que, por lo menos en su totalidad, la misma teoría determinaba en modo irreducible el objeto al cual se dirigía su investigación. Formalmente, por otra parte, la imposibilidad de añadir condiciones suplementarias mediante nuevos postulados está asegurada, para el conjunto de los números naturales, por el llamado *postulado de inducción*; e igualmente para los conjuntos Z_i de números ordinales queda asegurada por los análogos postulados que hemos llamado Z_i 5º. (n. 29 y 31); para el conjunto de los números reales ella resulta como consecuencia de la precedente y de la definición $\bar{c}_1 = 2^{\aleph_0}$ (30).

En estos casos la lógica nos dice que la adjunción de un nuevo postulado no es posible porque, si no es consecuencia de los admitidos, será ciertamente de considerarse en contradicción, por lo menos por el hecho de reducir la amplitud del dominio abarcado por el concepto que es objeto de la investigación.

Lo importante que nos han enseñado las teorías lógico-matemáticas de fines del siglo pasado, fueran ellas en la dirección de la escuela de Peano, o fueran en la de la escuela de Hilbert, es la extrema complejidad de ese pensamiento lógico, la posibilidad de descomponer ideas aparentemente simples y elementales y la variedad consiguiente de las conclusiones lógicamente posibles; pero si, para los fines de esta descomposición fué a menudo conveniente imaginar modelos ficticios, lejanos de las interpretaciones intuitivas de la práctica analítica y geométrica, nunca se

(30) En el sistema de Hilbert, recordamos, está al contrario representada por los postulados de Arquímedes y de Dedekind.

creyó posible reemplazar por comodidad estas interpretaciones esenciales por aquellos modelos.

Se llama *hipótesis del continuo* la creencia cultivada por Cantor de que hubiera identidad entre los dos números cardinales $\aleph_1$ y $\bar{c}_1 = 2^{\aleph_0}$; se llama *hipótesis generalizada del continuo* la que afirma, con mayor generalidad que $\bar{c}_1$ es alguno de los $\aleph_i$; y se llama *problema del continuo* al que consiste en decidir si una o ninguna de estas hipótesis puede afirmarse como teorema. E. Zermelo creyó resolver automáticamente y en modo afirmativo por lo menos el problema generalizado por medio de un postulado existencial: «En cada conjunto existe un elemento distinguido», en el cual él «existe» no tendría necesidad de referirse a ningún elemento constructivamente identificable. De semejantes postulados existenciales tenemos en efecto ejemplos cuando entendemos caracterizar conjuntos o espacios independientemente o antes de las nociones numéricas; así no encontramos extraño postular «existe un punto» y también postular después «existe un punto distinto del primero», sin que nos parezca necesario que esos puntos sean mayormente identificables. Sin embargo, entre los dos usos de la palabra *existir* hay una diferencia esencial, pues en el segundo caso únicamente se trata de una forma verbal que reemplaza la otra «punto es idea primitiva de los elementos de un conjunto» «este conjunto no es vacío ni unitario»; en el caso presente por contrario la palabra que en el postulado tiene papel principal no es lo *existir*, sino lo *distinguido*, y la interpretación lógica del postulado de Zermelo no es exenta de dificultades, pues actuando en ella como idea primitiva el término «elemento distinguido», esta idea primitiva tendría que adquirir un sentido determinado en el instante en que se define un conjunto, lo que es un contrasentido. Se puede evitar este suponiendo una operación que, aplicada a un conjunto produce un elemento del mismo; tampoco creo así resuelta sin más la dificultad, pero no pienso sea aquí lugar para tal discusión. Aceptando el razonamiento de Zermelo la aplicación repetida del postulado a un conjunto dado y a los que sucesivamente se obtienen al restar de este conjunto los conjuntos de los elementos distinguidos de conjuntos anteriormente considerados resultaría el bien-ordenamiento de cualquier conjunto. Ahora, si intentamos dar forma lógica a esta deducción, aun despreciando las dificultades aludidas, lo máximo que podríamos deducir para

un conjunto cualquiera es la alternativa — sin decisión — de llegar a una totalmente hipotética correspondencia entre el conjunto dado y alguno de los Z_i , o bien de que todas las tentativas de establecer tal correspondencia se acaban con un residuo.

Explican estas observaciones también el porqué no pueda hablarse de incompatibilidad ni de demostrabilidad de la proposición de Zermelo aplicada a un conjunto definido, por otra parte, por un sistema completo de postulados; porque ni una, ni otra, ni tampoco la pretendida ordenación no tienen sentido lógico. Pero esto no excluye que dentro de una interpretación convenientemente definida pueda la proposición de Zermelo adquirir sentido. K. Gödel demuestra en efecto la compatibilidad de la hipótesis del continuo y del postulado de Zermelo con una determinada interpretación de los postulados de una teoría de los conjuntos que no tiene porqué ser la teoría que interesa al análisis y geometría; en efecto la demostración ocurre con un modelo y un sistema completo de postulados no admite otro modelo que el conjunto que por él se encuentra definido. En el caso particular es la interpretación de la operación de exponenciación que, aun concordando con los postulados puestos en la base de la teoría, no concuerda con la interpretación intuitiva. Sobre interpretaciones posibles del principio de Zermelo y sobre ciertos límites que se imponen al operar sobre conjuntos me he ocupado en otras oportunidades a las cuales, por razón de espacio, remito ahora el lector ⁽³¹⁾.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

⁽³¹⁾ Véase *Intorno alla teoria degli aggregati*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1902. - *Antinomie logiche?*, Annali di Matematica (3), XV, 1908. - *Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni*. Scritti matematici offerti a Enrico D'Ovidio, Torino, Bocca, 1918. - *Sui procedimenti transfiniti*, Mathematische Annalen 90, 1923.

UNA EXTENSION DEL TEOREMA DE ROLLE PARA TRANSFORMACIONES CONTINUAS DEL PLANO

por

MISCHA COTLAR

El doctor Rey Pastor propuso en reunión de seminario, hallar un análogo del teorema de Rolle para funciones de variable compleja no necesariamente analíticas. He aquí algunas consideraciones sobre el particular.

Sea antes $y=f(x)$ una función de variable real continua en el intervalo cerrado $I=[a; b]$. Para todo conjunto $E \subset I$ designaremos con $f(E)$ al conjunto de todos los valores $y=f(x)$, correspondientes a los x de E ; en particular, si J es un subintervalo de I , resulta por la continuidad de $f(x)$, que $f(J)$ es otro intervalo o un punto. Un punto x_0 interior a $(a; b)$ se dirá *extremal* para $f(x)$, si x_0 es un punto de mínimo o de máximo relativo de $f(x)$; esta definición equivale a la siguiente: x_0 es extremal si existe un intervalo J que contiene a x_0 en su interior y tal que el punto $y_0=f(x_0)$ es extremo (es decir punto frontera) de $f(J)$. Las propiedades siguientes son clásicas:

a) Si $f(a)=f(b)$, o sea si $f(x)$ es constante sobre la frontera de I , existe por lo menos un punto extremal de $f(x)$ interior a $(a; b)$.

b) Si un punto interior x_0 es extremal para $f(x)$ y existe la derivada $f'(x_0)$, entonces $f'(x_0)=0$.

De a) y b) resulta inmediatamente

c) Si $f(x)$ es continua en $I=[a; b]$, $f'(x)$ existe en todo x interior a I y $f(x)$ es constante en la frontera de I , es decir $f(a)=f(b)$, entonces $f'(x)$ tiene por lo menos un cero interior a I (Teorema de Rolle).

Consideremos ahora un dominio cerrado plano D , limitado por una curva C , y dos funciones reales $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$,

continuas en $D+C$, quedando así definida la transformación continua $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$, y vamos a extender las propiedades a), b), c) para tales transformaciones $w=f(z)$; para ello comenzaremos por precisar el concepto de punto extremal de una función compleja $w=f(z)$.

Si E es un conjunto plano y F su frontera, un punto p de F se dirá punto *frontera fuerte*, si se puede trazar una curva analítica cerrada γ (por ejemplo una circunferencia) que pasa por p y tal que E esté situado enteramente en una de las dos regiones, cerradas conexas en que γ divide al plano. Los posibles puntos fronteras fuertes de E forman un conjunto $F' \subset F$ que se llamará *frontera fuerte* de E . Para lo que sigue conviene observar la siguiente propiedad: Si E es un continuo plano que contiene más de un punto, entonces la frontera fuerte F' es densa en la frontera F ; en particular, si δ es un círculo que contiene un punto de F , es $\delta \cdot F'$ un conjunto infinito irreducible. En efecto, si δ es un círculo con centro en un punto p_0 de F y de radio $\rho > 0$, se puede tomar un punto q exterior a E y tal que la distancia de q a p_0 sea $< \rho/2$; siendo E cerrado acotado, existe un punto p_1 de E tal que la distancia de q a p_1 es menor igual que la distancia de q a todo otro punto de E . Por la elección del punto q resulta, claro que p_1 es interior a δ , además p_1 es punto frontera fuerte porque la circunferencia γ de centro q y radio qp_1 pasa por p_1 y ningún punto de E es interior al círculo que limita γ ; luego queda demostrado que F' es denso en F y la segunda parte de la proposición es consecuencia inmediata de la primera y del hecho que E es un continuo.

Volviendo a la transformación continua $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, diremos que un punto z_0 interior a D es *extremal* (respectivamente *extremal fuerte*) para $f(z)$, si existe un círculo d de centro z_0 tal que el punto $w_0=f(z_0)$ es punto frontera (respectivamente frontera fuerte) del conjunto transformado $f(d)$. La propiedad siguiente puede considerarse como una extensión de la a).

a') Si la parte real $u(x,y)$ de la función $f(z)=u+iv$ es constante sobre la frontera C del dominio D , entonces existe una infinidad irreducible de puntos extremales fuertes de $f(z)$ interiores a D . En efecto, si el conjunto $E=f(D)$ está situado enteramente sobre un segmento rectilíneo paralelo al eje de las v , todos los puntos E son fronteras fuertes, luego todos los puntos

de D son extremales fuertes de $f(z)$. Si E no es un segmento rectilíneo paralelo al eje de las v , como por hipótesis $f(C)$ es un tal segmento, resulta la existencia de puntos de la frontera F de E que no pertenecen a $f(C)$, o sea existe una porción no vacía $F_1 \subset F$ de F tal que todo punto w_1 de F_1 es de la forma $w_1 = f(z_1)$, siendo z_1 un punto interior a D a distancia no nula de C , y en virtud de la propiedad anterior se concluye inmediatamente la tesis.

Diremos que en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ interior a D existe el jacobiano

$$J(z_0) = J(z_0; f) = \begin{vmatrix} v'_x(x_0, y_0) & v'_y(x_0, y_0) \\ u'_x(x_0, y_0) & u'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

si en dicho punto existen las cuatro derivadas parciales u'_x , u'_y , v'_x , v'_y .

b') Si el punto $z_0 = x_0 + i y_0$ interior a D es extremal fuerte de la transformación $w = f(z)$ y existe en este punto el jacobiano $J(z_0, f)$, entonces $J(z_0) = 0$. En efecto, por hipótesis existe en el plano z un círculo d de centro z_0 y en el plano w una curva analítica cerrada γ que pasa por $w_0 = f(z_0)$ y tal que todo punto w de $f(d)$ está sobre γ o en una de las regiones R , pongamos la interior, en que γ divide el plano w . Sea $T(z) = t(w) + i \tau(w)$ la función holomorfa que representa conformemente y biunívocamente la región R del plano w sobre el semiplano $t \leq 0$ del plano T , de modo que $w_0 = f(z_0)$ se corresponda con el origen y γ con el eje $t = 0$. La función $T(w)$ es prolongable a través de γ por ser γ analítica, y por tanto existe la derivada $T'(w_0)$; luego la función

$$F(z) = T(f(z)) = U(x, y) + i V(x, y)$$

es continua en el círculo d y existe en el punto z_0 el jacobiano

$$J_1(z_0) = J(z_0; F) = U'_x V'_y - U'_y V'_x,$$

y se tiene

$$J_1(z_0) = (t'_u \cdot u'_x + t'_v \cdot v'_x) (\tau'_u \cdot u'_y + \tau'_v \cdot v'_y) -$$

de D son extremales fuertes de $f(z)$. Si E no es un segmento rectilíneo paralelo al eje de las v , como por hipótesis $f(C)$ es un tal segmento, resulta la existencia de puntos de la frontera F de E que no pertenecen a $f(C)$, o sea existe una porción no vacía $F_1 \subset F$ de F tal que todo punto w_1 de F_1 es de la forma $w_1 = f(z_1)$, siendo z_1 un punto interior a D a distancia no nula de C , y en virtud de la propiedad anterior se concluye inmediatamente la tesis.

Diremos que en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ interior a D existe el jacobiano

$$J(z_0) = J(z_0; f) = \begin{vmatrix} v'_x(x_0, y_0) & v'_y(x_0, y_0) \\ u'_x(x_0, y_0) & u'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

si en dicho punto existen las cuatro derivadas parciales u'_x , u'_y , v'_x , v'_y .

b') Si el punto $z_0 = x_0 + i y_0$ interior a D es extremal fuerte de la transformación $w = f(z)$ y existe en este punto el jacobiano $J(z_0, f)$, entonces $J(z_0) = 0$. En efecto, por hipótesis existe en el plano z un círculo d de centro z_0 y en el plano w una curva analítica cerrada γ que pasa por $w_0 = f(z_0)$ y tal que todo punto w de $f(d)$ está sobre γ o en una de las regiones R , pongamos la interior, en que γ divide el plano w . Sea $T(z) = t(w) + i \tau(w)$ la función holomorfa que representa conformemente y biunívocamente la región R del plano w sobre el semiplano $t \leq 0$ del plano T , de modo que $w_0 = f(z_0)$ se corresponda con el origen y γ con el eje $t = 0$. La función $T(w)$ es prolongable a través de γ por ser γ analítica, y por tanto existe la derivada $T'(w_0)$; luego la función

$$F(z) = T(f(z)) = U(x, y) + i V(x, y)$$

es continua en el círculo d y existe en el punto z_0 el jacobiano

$$J_1(z_0) = J(z_0; F) = U'_x V'_y - U'_y V'_x,$$

y se tiene

$$J_1(z_0) = (t'_u \cdot u'_x + t'_v \cdot v'_x) (\tau'_u \cdot u'_y + \tau'_v \cdot v'_y) -$$

$$\begin{aligned} & - (t'_u \cdot u'_v + t'_v \cdot v'_y) (\tau'_u u'_x + \tau'_v \cdot v'_x) = \\ & = (u'_x v'_y - u'_y v'_x) (t'_u \tau'_v - t'_v \tau'_u); \end{aligned}$$

como en w_0 existe la derivada $T'(w_0)$, el último paréntesis vale por las condiciones de Cauchy-Riemann $|T'(w_0)|^2$, luego

$$J_1(z_0) = J(z_0; F) = J(z_0, f) \cdot |T'(w_0)|^2.$$

Como los valores $U + iV$ caen en el semiplano $t \leq 0$ se tiene para todo z de d , $U(z) \leq 0$, mientras que $U(z_0) = 0$, de modo que considerada $U(z)$ como función de x o de y , tiene en z_0 un máximo relativo, y por tanto $U'_x(z_0) = U'_y(z_0) = 0$, luego

$$J_1(z_0) = J(z_0) \cdot |T'(w_0)|^2 = 0.$$

Pero siendo $T(w)$ univalente es $|T'(w_0)|^2 \neq 0$ y resulta $J(z_0) = 0$.

De a') y b') resulta inmediatamente:

c') Sea $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ una función continua en el dominio D cuyo jacobiano $J(z) = u'_x v'_y - u'_y v'_x$ existe en todo punto interior a D , salvo a lo sumo en un conjunto reductible. Si $u(x, y)$ es constante sobre la frontera de D , entonces los ceros de $J(z)$ llenan un conjunto infinito irreductible completamente interior a D .

La propiedad c') puede considerarse como una extensión del teorema de Rolle: mientras que en el caso de una variable real se puede afirmar la existencia de un cero de $f(x) = J(x)$, en el caso de la variable compleja los hay una infinidad irreductible, además en la hipótesis del teorema se puede prescindir de la existencia de $J(z)$ en un conjunto reductible de puntos. Observemos finalmente que la proposición c') constituye también una extensión de la propiedad de las funciones armónicas $u(x, y)$ de ser perfectamente determinadas por sus valores del contorno; en efecto, si $v(x, y)$ es la función conjugada de $u(x, y)$ y $f(z) = u(z) + i v(z)$, es $J(z) = |f'(z)|^2$, y por tanto la anulación de $u(x, y)$ sobre el contorno implica por c') la anulación de f' en infinitos puntos interiores a D , de donde resulta que $f(z) = \text{constante}$, $u(x, y) = \text{constante}$.

Observaciones. I. La propiedad c') subsiste si en vez de suponer $u(x, y)$ constante sobre C , se supone que se puede dividir C en $C = C_1 + \dots + C_n$, de modo que sobre cada C_i sea constante una de las funciones $u(x, y)$ o $v(x, y)$; más generalmente basta suponer que el complementario de $f(C)$ sea conexo, o por ejemplo que $f(C)$ sea una curva abierta con tangente en todo punto, la demostración queda la misma salvo pequeñas modificaciones. Como en un punto extremal es evidentemente nulo el índice topológico de la transformación $w = f(z)$, resulta que *bajo la hipótesis de anulación de $u(x, y)$ sobre el contorno* (o las hipótesis más generales que acabamos de citar), *existe una infinidad irreducible de puntos de índice topológico nulo, interiores a D* ⁽¹⁾.

II. La proposición demostrada al principio de esta nota sugiere un problema interesante de topología. Diremos que un punto p , frontera de un recinto abierto y simplemente conexo G , es *accesible por círculos* si existe una circunferencia γ que pasa por p y cuyo interior pertenece a G . La propiedad demostrada más arriba puede enunciarse así: *toda porción de la frontera de G contiene una infinidad de puntos accesibles por círculos*. Sería interesante saber si toda porción de la frontera de G contiene un conjunto de la *potencia del continuo* de puntos accesibles por círculos.

III. En la hipótesis de c') se prescinde de la existencia de $J(z)$ en una infinidad reducidos de puntos. Sin embargo la proposición deja de ser cierta si $J(z)$ no existe en un continuo de puntos interiores, como lo muestra el ejemplo siguiente: $f(z) = f(x, y) = x + iy$ si $x^2 + y^2 \leq 1/4$, $f(z) = (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) e^{i \arg z}$ ($z = x + iy$) si $1/2 \leq |z| \leq 1$. El mismo ejemplo muestra que c') deja de ser cierta cambiando el jacobiano $J(z)$ por el $D(z)$ de Banach, que se define como el límite de [medida $f(d)$] : [medida d], siendo d un círculo de centro z y radio tendiente a cero. Sería pues interesante estudiar el problema para el caso del jacobiano de Banach o los más generales de Radó.

IV. Si bien b') generaliza la b), queda abierto el problema si b') subsiste para puntos extremos no necesariamente

⁽¹⁾ Esta propiedad podría tal vez hallar aplicación en la teoría de índice topológico de Schauder y de Radó-Reichenfelder (para bibliografía ver REY PASTOR, *Funciones Complejas en Espacio Topológico*, Revista de la Universidad Nacional de Tucumán, v. 4, 1944).

fuertes; es fácil probarlo en caso de ser $f(z)$ diferenciable en el punto considerado, pero parece difícil si sólo se supone la existencia de las derivadas parciales. Es probable que la existencia de $J(z_0)$ implique que si z_0 es extremal es z_0 extremal fuerte. En cambio la propiedad no vale para el jacobiano $D(z)$, como se ve en el caso de las funciones que conservan el módulo y aumentan el argumento en una fracción positiva.

V. Modificando ligeramente los razonamientos anteriores se puede probar que c' subsiste si $f(z)$ se anula en un arco del contorno y es analítica en el resto del mismo. En cambio el teorema no subsiste con la sola hipótesis de anulación de $f(z)$ sobre un arco del contorno, aún siendo $f(z)$ un homomorfismo, es decir univalente. Sería interesante saber bajo qué condiciones suplementarias c' subsiste suponiendo que $f(z)$ se anula en un conjunto de medida positiva del contorno; es posible que el problema se simplifique en caso de ser $f(z)$ univalente.

BUENOS AIRES - FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS.
INSTITUTO MATEMÁTICO.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

147. - Siendo dada una elipse, se consideran todos los rectángulos que tienen dos lados sobre los ejes de la elipse, y la diagonal opuesta al vértice común (centro de la elipse) tangente a la misma. Se pide estudiar la curva lugar geométrico del cuarto vértice del rectángulo.

148. - Resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \left(z + \frac{1}{2}x\right)^2 \frac{\partial f}{\partial z} + m \left(y + \frac{1}{2}x\right) \left(z + \frac{1}{2}x\right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Examinar si existen valores de m para los cuales la solución resulte particularmente simple.

149. - Demostrar que la ecuación

$$4x(y+z)^2 + 4y^2(y+z) + x^3 = 0$$

no tiene otras soluciones en números enteros que

$$(2, 2, -3), (2, -2, 1), (0, 0, -1), (0, 1, -1)$$

y las equivalentes que se obtienen multiplicando todas las variables por un mismo factor.

150. - Dadas dos esferas de radios R, r , se pregunta en qué posición debe ponerse un punto luminoso para que, siendo igual a una

constante k^2 el producto de sus distancias de los centros de las esferas, sea máxima la suma de las áreas de los casquetes iluminados de las dos esferas.

151. - Se llaman *números de Liouville* de base q (q entero > 1) los de la forma

$$\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^{3!}} + \dots + \frac{a_i}{q^{i!}} + \dots$$

donde las a_i son enteros arbitrarios ≥ 0 , $< q$ e infinitos de ellos > 0 . (v. la Nota de B. Levi en este mismo fascículo). Demostrar que, al variar q , se tienen así infinitos sistemas de números, cada uno de la potencia del continuo, sin elementos comunes.

152. - Demostrar que si $f(y)$ es un polinomio a coeficientes enteros y de raíces todas distintas, la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

es función algebraica de $z = e^x$ siempre y solamente cuando dichas raíces son todas racionales. Expresar una regla para determinar el orden de esa función algebraica.

BIBLIOGRAFIA

J. F. RITT: *Integration in finite terms. Liouville's Theory of Elementary Methods*. Columbia University Press. New York, 1948. 100 págs. en photo-prints (U.\$S. 2,75).

En el principio de su prodigiosa actividad científica, entre los años 1833 y 1841, J. Liouville publicó una serie de memorias dirigidas a establecer la trascendencia de las funciones producidas por los problemas de integración de ecuaciones diferenciales. Desde luego el problema equivale a afirmar la no expresabilidad de las soluciones por combinaciones algebraicas de funciones elementales o, más generalmente, previamente conocidas; y se transforma así, por converso, en el otro de establecer las condiciones por las cuales las combinaciones algebraicas de funciones formadas mediante iteración de funciones elementales y operaciones de derivación sobre las mismas pueden satisfacer determinadas condiciones diferenciales; y así lo entendió Liouville. Evidentemente es necesario puntualizar primero lo que se entiende por "funciones elementales" y la primera contestación será logaritmos y esponenciales, puesto que a estas últimas se reducen también las trigonométricas; pero ocurriendo el caso este campo funcional podrá ampliarse oportunamente; se clasifican entonces las expresiones funcionales según la multiplicidad de las iteraciones funcionales, razonando por recursión. Por la duración de casi un siglo, este punto de vista no encontró continuadores, salvo excepciones absolutamente esporádicas. Entre 1923 y 1929 el prof. J. F. Ritt volvió sobre esta dirección en un grupo de memorias publicadas en las *Transactions* y en el *Bulletin* de la *American Mathematical Society* y del todo recientemente el argumento fué reconsiderado por A. Ostrowski. En el libro presente Ritt nos ofrece una muy clara exposición, en forma moderna, de este orden de ideas, con aplicación a la demostración de la trascendencia de las integrales elípticas (ya tratada por Liouville), de la función de probabilidad de Gauss, de las funciones de Bessel, etc. La lectura es fácil y agradable.

B. Levi

MAURO PICONE. *Lezioni di analisi funzionale*. Roma, Tumminelli, 1948. (Litografías). 576 págs.

Se llama *funcional* a una función numérica, cuyo argumento está constituido por una o más funciones de los puntos de determinados dominios. V. Volterra, que fué primero en considerar este concepto digno de teoría del

mismo modo como hay una teoría general de las funciones de números, lo había llamado, refiriéndose al caso de que las funciones-variables dependieran de una sola variable numérica, *función de línea*, pues “línea” es bien la totalidad de los puntos que representan los valores simultáneos de determinado grupo de funciones numéricas; pero también había observado que del mismo modo podían considerarse *funciones de superficies*, etc. Mas, como siempre ocurre, el concepto tiene antecedentes por lo menos de dos siglos atrás, con Euler y Bernoulli y los problemas variacionales. Este es pues efectivamente el tema fundamental del libro de M. Picone que, en linda presentación litográfica, resume un curso dictado en la Universidad de Roma en el año escolar 1946-47; pero, desde el siglo aureo de Euler y también desde la última década del siglo pasado en la cual (precisamente 1887) llamó Volterra la atención sobre el argumento, muchas cosas han evolucionado y muchísimo los gustos de los matemáticos, que se han ido polarizando siempre más hacia las formas más abstractas y generales. El libro de Picone nos parece una acertada composición entre las dos tendencias, dando amplio reconocimiento a los métodos modernos, aun manteniendo la vista sobre las aplicaciones concretas, consagradas por la historia. Se empieza con establecer en completa generalidad la noción del funcional; se pasa luego a un tema que puede parecer, a primera vista, fuera de argumento, a nociones generales sobre los conjuntos, numerabilidad, potencia, etc.; explica evidentemente la breve desviación el propósito de acostumbrar al lector con la consideración de conjuntos de elementos abstractos, pero también el principio evidente de no suponer en el lector más conocimientos que los fundamentales del análisis algebraico e infinitesimal; así que, aun en lo sucesivo, el análisis funcional se hace oportunidad, en las manos de Picone, para muchas noticias a las cuales habrá que hacer referencia ocasional. Se sigue con conjuntos de funciones, espacios (caracterizados por la noción de “entorno de un elemento”) y las propiedades relacionadas a la noción de “elemento de acumulación” (densidad, clausura, etc.); propiedades de las funciones y de los funcionales relacionadas a la continuidad. Se llega así después de esta amplia preparación, al problema central del cálculo de las variaciones, que se encara, al principio, solo desde el punto de vista existencial. Se dan los teoremas generales de existencia de máximos y mínimos de funcionales sobre la base de la semicontinuidad, aplicando luego el criterio a varios ejemplos de funcionales representados por integrales de una o más funciones de una variable. Sigue un capítulo sobre la noción de curva en el espacio euclideo y la integral de una función sobre ella; se pasa luego a la metrización de los espacios de funciones (métricas de Lagrange, de Hilbert, de Fréchet), sistemas de funciones ortogonales y correspondientes desarrollos de Fourier. Se trata el problema de máximo para polinomiales, concluyendo con las teorías clásicas del cálculo de las variaciones y con un capítulo final sobre la expresión variacional de las ecuaciones de la elasticidad.

B. Levi

GIOVANNI SANSONE. *Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima.* Bologna. Zanichelli, 1948, págs. 400.

FRANCESCO TRICOMI. *Equazioni differenziali.* Torino. Einaudi, 1948, págs. 311.

El libro de G. Sansone es la segunda edición, con contadas modificaciones, del primer volumen de un tratado en dos volúmenes publicado con igual título en 1941 y prontamente agotado, sin que, a raíz del estado de guerra, nos llegara conocimiento. Tiene las características de claridad y de amplia información que son propias del autor. El primer capítulo: *Los sistemas normales de ecuaciones diferenciales ordinarias y el teorema de existencia* comprende, además de aclaraciones introductorias, las demostraciones clásicas del teorema de existencia y unicidad, con el método de aproximaciones sucesivas y con el método de Cauchy-Lipschitz; se da también el teorema de existencia en la forma de Peano y de Caratheodory; este último en una variante que se atribuye a Tonelli. En el cap. II se trata en particular de los sistemas de ecuaciones lineales, consideradas en la forma normal, es decir de sistemas de primer orden resueltos según las derivadas, lo que lleva en particular a hablar de la solución matricial de Peano. Siguen las teorías sobre reducción del orden de una ecuación lineal, transformaciones, formas diferenciales adjuntas y autoadjuntas, transformación de la ecuación diferencial lineal en ecuación integral de segunda especie. El cap. III trata la teoría de las ecuaciones diferenciales en el campo analítico, series y polinomios hipergeométricos, ecuación y funciones de Bessel. Los capítulos IV y V se refieren a los problemas de contorno para las ecuaciones diferenciales lineales; estando destinado el primero con preferencia a las ecuaciones del segundo orden, el otro a las de orden cualquiera. El capítulo VI trata de las propiedades de las ecuaciones a coeficientes periódicos y casiperiódicos. Termina el volumen un índice de los autores citados y otro índice analítico, también ordenado frecuentemente por los nombres de los autores a los que se atribuyen los teoremas o las teorías, y bastante extenso para permitir al lector una completa orientación sobre el contenido del libro.

El libro de F. Tricomi, sobre el mismo tema de las ecuaciones diferenciales, tiene orientación conceptual muy distinta, constituyendo, casi en su totalidad, más bien un complemento del anterior que una sobreposición. Nos gusta indicar esta característica con las mismas palabras del autor: "Un libro como éste puede proponerse dos distintos fines, no fáciles de conciliar: o bien quiere ser una obra de consultación posiblemente completa y con muchas indicaciones bibliográficas, pero con inevitable fragmentariedad, o bien ser principalmente obra de carácter didáctico, en condición de guiar al lector nuevo con el argumento para formarse una idea no superficial de los problemas y de los métodos de la teoría de las ecuaciones diferenciales, que es una de las más importantes de todo el análisis. El presente tratado, nacido en la escuela, se pone decididamente en el segundo punto de vista...". En efecto el criterio que guía las teorías consideradas es el de que, puesto que el problema de la efectiva integración por funciones elementales es generalmente insoluble, se tendrá que buscar en las ecuaciones mismas las propiedades que interesan de las soluciones. El primer capítulo está destinado al teorema de existencia y unicidad de las

soluciones de un sistema normal de ecuaciones del primer orden, por determinados valores iniciales (método de las aproximaciones sucesivas). El segundo capítulo da cuenta de las formas características de las curvas representativas de las soluciones de una ecuación diferencial del primer orden (curvas que el autor llama las *características de la ecuación*) como se pueden estudiar por las propiedades de la función $f(xy)$, segundo miembro de la ecuación, resuelta respecto de la y' . El tercer capítulo, considerando en particular las ecuaciones de segundo orden lineales, enseña las principales transformaciones (transform. en autoadjunta, transformación de Prüfer), los teoremas de comparación (Sturm) y trata de los problemas al contorno, autovalores y autofunciones; el cap. IV, refiriéndose todavía a las ecuaciones del segundo orden, trata del comportamiento asintótico de las soluciones y hace aplicación a los polinomios de Laguerre y de Legendre; el cap. V se dirige al caso analítico, considerando particularmente las ecuaciones lineales y los puntos singulares de las soluciones. En apéndice se recuerda una notable transformación debida a G. Fubini de la ecuación diferencial lineal del segundo orden en ecuación integral de primera especie del tipo de Volterra.

B. LEVI

BENIAMINO SEGRE. *Lezioni di geometria moderna*, Vol. I. *Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi*, Bologna. Zanichelli, 1948, pág. 195.

Algebra y geometría han sido consideradas a menudo como dos ramas distintas de la matemática, casi dos formas en mutua oposición, naciendo la primera de una concepción discontinua del universo que se concreta en la operación de contar, la otra naciendo de las elementales operaciones instrumentales como la antepuerta de la física. Hoy día, y quizá no hoy solamente, sino desde la más antigua fundación de la matemática, la verdad se presenta como radicalmente distinta, reduciendo la diferencia entre las dos ramas posiblemente a nada más que a distintas representaciones y a distintos lenguajes. Por esta razón, los modernos desarrollos del álgebra, encaminada a hacerse siempre más formal, siempre más analítica en la separación de las hipótesis que permiten establecer las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, se han reflejado en los últimos decenios en algunas extensiones o exposiciones de algunos capítulos de la geometría algebraica, así que Beniamino Segre estima venido el momento de reunir en tratado, como dice el título, los *fundamentos de la geometría sobre un cuerpo cualquiera*, anunciando de próxima publicación otros dos volúmenes, respectivamente sobre la geometría proyectiva no lineal y sobre los invariantes por transformaciones birracionales. Queremos anotar también, suscribiéndola, la advertencia del autor de que “a los grandes méritos de la nueva orientación podría sin embargo ir asociado un peligro en el caso que una excesiva abstracción en los conceptos y en los procedimientos demostrativos viniera a limitar la fantasía creadora... cerrando la intuición entre áridos esquemas”; y en este caso quizá podamos también invertir los papeles y buscar las razones del álgebra moderna en el análisis de los fundamentos de la geometría proyectiva y de la geometría algebraica de fines del siglo pasado.

Las primeras 78 páginas del libro ofrecen, en rápida síntesis, las nociones fundamentales del álgebra moderna, definiciones y propiedades operacionales de grupos, anillos, cuerpos, etc. Las 100 páginas siguientes corresponden a la parte más propiamente geométrica del libro. Se define primero la noción de *espacio lineal*, en forma analítica, como un sistema de elementos en correspondencia biunívoca con los complejos de n coordenadas homogéneas pertenecientes a un determinado cuerpo de números; por cuanto no se supone que este cuerpo sea conmutativo, la homogeneidad tendrá que definirse por la invariancia del punto al multiplicar todas las coordenadas por un mismo factor a derecha o bien a izquierda; se tienen así dos tipos de espacios derechos e izquierdos. Las definiciones y propiedades de los espacios subordinados no difieren substancialmente de las conocidas por la ordinaria geometría analítica; sin embargo una particularidad se presenta para la razón doble que, en el caso de que el cuerpo base no sea conmutativo, no tiene valor unívoco, sino, para una determinada cuaterna de puntos, puede tomar todos los valores transformados de un mismo por multiplicación, a la derecha y a la izquierda, por un par de números recíprocos. A la noción de espacio lineal se opone la de *espacio gráfico*, definida por verificarse las generales propiedades de pertenencia de la geometría proyectiva; aquí viejos estudios sobre los fundamentos que remontan a 50 y más años enseñan que estas propiedades no son suficientes para identificar el espacio gráfico con un espacio lineal, sino que es necesario agregar el llamado postulado de Fano que afirma la existencia de 3 puntos distintos sobre una recta, y la sumersión del espacio en uno tridimensional. La postulación de la propiedad del hexágono de Pascal separa el caso en que el cuerpo base sea conmutativo del caso general. En el § 16 se desarrollan ahora las propiedades fundamentales de las correspondencias proyectivas, donde repetidamente el caso de que el cuerpo base tenga característica 2 se distingue notablemente del caso general. En el último párrafo (§ 17) se exponen algunas características interesantes de los espacios finitos.

B. LEVI

CORTÉS PLA, *Velocidad de la luz y relatividad, con un apéndice conteniendo las memorias originales de Arago, Fizeau y Foucault*. Espasa-Calpe Argentina. Colección de historia y filosofía de la ciencia, pág. 296.

Uno de los grandes méritos del ing. C. Pla como historiador de la física es su amplísimo conocimiento de las fuentes y su interés para considerar con más detenimiento la evolución de las ideas que la material sucesión de hechos, descubrimientos y teorías. La luz, el hada maravillosa que sobrentiende a todos nuestros conocimientos y a todas nuestras alegrías, por su naturaleza inmaterial ha despertado desde la más remota antigüedad la imaginación y la reflexión del hombre y del sabio negándose ella a descubrir en ninguna parte el enigma de las más sorprendentes apariencias y obligándolo a las más atrevidas inducciones e hipótesis; es pues argumento bien digno para semejante investigación histórica.

Una vez que fué seguro que la luz, cada luz, se origina en algún lugar, aun extremadamente lejano, se impuso al hombre la pregunta del tiempo que tenía que necesitar para cumplir el viaje, y cuando el filósofo antiguo afirmó la velocidad infinita, es probable que no le atribuyera a este infinito mayor determinación que de no-medible; más creíble por contrario que tuviera el sentido actual del infinito es la afirmación cartesiana; pero propiamente entonces la observación sistemática de los satélites de Júpiter, hecha posible por el telescopio de Galileo, lleva a Roemer a demostrar la velocidad finita. Pero ¿cómo demostrar? No más que como la explicación más cómoda y sencilla para poner de acuerdo un hecho de observación con una hipótesis astronómica — el movimiento de la Tierra — por tan largo tiempo contrastada. Y he allí que otro hecho astronómico, la aberración estrellar de Bradley viene a acomodarse en la misma explicación. La demostración simultánea de ambas hipótesis queda así asegurada. Pero no basta; empiezan entonces las mediciones terrestres, Fizeau y Foucault; ellas confirman la inducción astronómica, y enseñan también que esa velocidad está influenciada por la materia y por sus movimientos. Las mediciones se repiten, se hacen más finas y más exactas y las desviaciones de las nuevas medidas de lo lógicamente esperable vienen a incidir sobre la teoría; las leyes de la composición de las velocidades, que al principio ofrecían la base más sólida de las deducciones, parece que vienen a faltar. Al mismo tiempo el sabio ha tomado la costumbre de dudar sobre el sentido de sus palabras; la física se hace axiomática y epistemológica y la teoría de la relatividad ofrece una explicación por lo menos provisional de las distintas comprobaciones. ¿Será explicación suficiente? ¿o será necesario poner en cuenta un estancamiento en el torrencial correr de la luz o la expansión del Universo?

El lector encontrará en el libro de Cortés Pla muchas noticias y datos numéricos y experimentales, mucha bibliografía, índice de los nombres con fechas de actuación, y todo los auxilios que hacen una obra al mismo tiempo literaria y científica, interesante y útil.

B. LEVI

J. D. H. DONNAY. *Spherical Trigonometry after the Cesàro Method*. (1945, 83 págs.).

El autor dedica este pequeño libro a la memoria de Giuseppe Cesàro (1849-1939), cristalógrafo y mineralogista, Profesor de la Universidad de Lieja, con quien planeaba el mismo hace años.

Puesto que es necesario para el desarrollo del método, se hace una exposición elemental de la proyección estereográfica de la esfera probándose las tan conocidas propiedades tocantes a la proyección de una circunferencia de la superficie esférica y a la conservación de los ángulos.

En seguida, trabajando sobre la esfera de radio $r = 1$, se obtiene la proyección, sobre el plano del ecuador, de los dos triángulos siguientes: uno, esférico (euleriano) con vértice (A) en el polo opuesto al centro de proyección y el otro, el correspondiente triángulo de las cuerdas. De la proyección del primero

se deduce que la proyección del segundo tiene por ángulos: $A, B - \frac{\varepsilon}{2}$ y $C - \frac{\varepsilon}{2}$ (siendo ε el exceso esférico). Como lados del segundo se obtiene respectivamente: $\frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}, \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$ y $\operatorname{tg} \frac{1}{2}c$.

El autor llama "triángulo de los elementos" de Cesàro, relativo al vértice A , al triángulo rectilíneo semejante a la proyección últimamente descrita y que tiene por lados: $\sin \frac{a}{2}; \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$ y $\sin \frac{c}{2} \cos \frac{b}{2}$. Si se aplican estas conclusiones al triángulo que completa el huso esférico de ángulo B (o C) se obtiene el "triángulo derivado" de Cesàro, también relativo al vértice A . Los respectivos triángulos de elementos y derivado se obtienen para los triángulos polares de los anteriores y por substitución cíclica se obtienen los correspondientes triángulos relativos a los vértices B y C . Todos estos son los triángulos "claves".

Las fórmulas de la trigonometría esférica se obtienen ahora rápidamente aplicando las fórmulas de la trigonometría plana a esos triángulos rectilíneos. Es esta una ejercitación casi constante de t. p. y justamente hace notar la bondad del método propuesto: con muy poco esfuerzo se obtienen las analogías de Neper, de Delambre, varias expresiones para el cálculo de ε , etc. El triángulo esférico rectángulo es caso particular.

Los problemas numéricos se resuelven aplicando cálculo logarítmico (con fórmulas adecuadas) y con máquinas de calcular.

La obra está complementada con bastantes ejercicios propuestos y otros desarrollados en el texto.

Creemos oportuno destacar la elegancia del método empleado, así como el reducido esfuerzo que exige al estudiante para la obtención de las fórmulas de la trigonometría esférica sumándose el hecho de adquirir el conocimiento de la proyección estereográfica de la esfera.

E. O. Ferrari

BEPPO LEVI, *Leyendo a Euclides*, Editorial Rosario, Rosario 1947.

Es bien sabido que los *Elementos* de Euclides constituyen la obra cumbre de la matemática antigua. Ninguna obra ha perdurado tanto tiempo sin perder actualidad, ha ejercido tanta influencia sobre las generaciones sucesivas, ni ha sido tan estudiada, analizada, comentada y discutida como los *Elementos*. Todavía hoy su lectura es altamente recomendable para todo cultor de la matemática. Sobre todo si, prescindiendo de los detalles de muchas demostraciones, corolarios o definiciones, se considera el profundo significado de la obra en su conjunto, como obra global, como esfuerzo insuperable del pensamiento para poner orden a los conocimientos matemáticos de una época y preparar bases firmes para su desarrollo ulterior.

Si esta lectura es recomendable, una obra que guíe al lector, mostrándole los puntos de verdadera trascendencia de la misma, la esencia de muchos teoremas y la importancia que tuvieron en el desarrollo posterior de la matemática, el porqué de ciertas definiciones y postulados y de ciertas demostraciones que podrían hoy parecer engorrosas y de fácil simplificación, viene a ser un complemento de insuperable utilidad. Este es el objeto principal del libro “Leyendo a Euclides” de Beppo Levi. Salvo casos concretos cuya explicación detallada sea imprescindible para comprender o aclarar mejor el pensamiento de Euclides, no deben buscarse en el libro los pormenores de las demostraciones ni el enunciado de todos los teoremas de los *Elementos*. Es más; de los 15 libros que componen los *Elementos*, se comentan únicamente con atención los que tienen verdadera importancia conceptual, pasando con rapidez sobre los que pueden considerarse como meras aplicaciones de ideas directrices anteriores.

Naturalmente que el hacer esta selección y esta puesta de relieve de los puntos esenciales de los *Elementos*, sin perder ni por un momento la unidad directriz que preside el pensamiento de Euclides, no era tarea fácil. Se necesitaba para ello un temperamento en el que coincidieran profundos y vastos conocimientos matemáticos, un agudo espíritu crítico y un dominio perfecto de los llamados “fundamentos de la matemática”, punto en que esta ciencia se enlaza con la lógica y la filosofía. Todas estas cualidades es bien sabido que pertenecen, y tal vez caracterizan, al prestigioso autor del libro que reseñamos.

Dado el fin perseguido, el libro no ha resultado un libro de pura matemática. Expresa claramente el autor que tal fué efectivamente su propósito al emprender el trabajo “que en mi pensamiento sería completamente perdido si llegara a ser considerado de matemático para matemáticos, si no pudiera cautivar la atención de lectores precisamente no matemáticos”. Y, efectivamente, cualquier lector, con solo los conocimientos de la enseñanza secundaria y un poco de atención, puede seguir los conceptos del libro. Y no hay duda de que también cualquier lector, lo mismo el de tendencia matemática, que el de formación filosófica, que el pedagogo y aun el historiador, encontrará en él ideas interesantes, horizontes nuevos y puntos de vista de singular atracción.

El libro consta de 5 capítulos que constituyen la parte propiamente dedicada a los *Elementos*, más una interesante introducción, bastante extensa, titulada “La geometría y el pensamiento socrático” que sirve para situar al lector en el ambiente matemático y filosófico griego de la época en que los *Elementos* fueron escritos.

Se ha discutido mucho acerca de quien fué Euclides, la época exacta en que vivió y aun si realmente es un personaje distinto de otros que aparecen en la historia de la ciencia griega. Dado el plan perseguido en “Leyendo a Euclides” esta es una cuestión secundaria: “lo que interesa es la obra, obra que por la unidad del concepto que guía su formación es la obra de un hombre, sea cual sea, Euclides o Theetetes”. Analizando, con citas textuales y precisas, diversos pasajes de los *Diálogos* de Platón, va descifrando el autor el grado de evolución de los conocimientos matemáticos y filosóficos de la época, para poder colocar en el tiempo y en el espacio el punto aproximado en que los *Elementos* pudieron aparecer. No hay duda de que los *Elementos*, con-

siderados no como un resumen de reglas prácticas, sino como un admirable ejemplo de hasta donde puede llegar la capacidad razonadora del hombre, necesitaban de cierta madurez filosófica y aun de cierta preparación moral para entender la importancia y significado de un “inútil monumento deductivo, que no tiene otro fin que el de alegrarse al mirar como parece la realidad plegarse para hacerse espejo de la invención abstracta”, preparación moral que caracteriza las enseñanzas de Sócrates. Partiendo de esta influencia de las doctrinas socráticas sobre el ambiente de la época, y de otros detalles pasados en parte generalmente por alto, se inclina el autor a colocar a Euclides, o por lo menos a los Elementos, aunque su editor pudiera ser posterior, antes del siglo IV a. de J. C., con preferencia sobre las sugerencias de Proclo, que lo coloca alrededor del año 300 antes de J. C.

Entrando propiamente en el análisis de los Elementos, trata el Cap. I de “Definiciones, postulados, nociones comunes. La teoría de igualdad”. Los *Elementos*, primera obra de construcción axiomática, se basan sobre ciertos principios que se clasifican en definiciones, postulados y nociones comunes, cada uno con su alcance y significación específica que en este capítulo el autor aclara y puntualiza. Este bagaje axiomático es aplicado en seguida al transporte de segmentos y de ángulos, para pasar a la teoría de la igualdad. En cada caso el profesor Levi hace atrayentes observaciones sobre el porqué del camino seguido por Euclides, camino que a veces puede parecer complicado y antinatural, pero que casi siempre se justifica no perdiendo de vista el plan superior de la obra.

El Cap. II se titula “La suma de los ángulos de un triángulo y el postulado V”. El postulado V es el famoso postulado de las paralelas de la geometría elemental. Este capítulo permite al autor relacionar la obra de Euclides con los trabajos posteriores sobre las geometrías no-euclidianas, llamando la atención de como el mismo Euclides retrasa en todo lo posible la utilización de su postulado V, procurando por largo trecho arreglar sus demostraciones de manera que este postulado no sea necesario.

El Cap. III se titula “El álgebra geométrica y la teoría de las proporciones”. Se considera en él la manera como son tratadas en los *Elementos* las ideas de equivalencia de figuras planas, el álgebra de segmentos y razones entre magnitudes. Lo primero da motivo a interesantes observaciones relacionadas con los puntos de vista modernos de la misma teoría y lo mismo el concepto de proporción según Euclides, cuestión intimamente relacionada con el concepto de número irracional.

El Cap. IV trata de “El método de exhaustión” que queda establecido en la primera proposición del libro X de Euclides y que es de importancia fundamental en toda la teoría de volúmenes.

En el último capítulo, titulado “Los libros aritméticos” (del VII al X) se llama la atención sobre diversos puntos y sobre la ordenación de los mismos, así como sus relaciones con las maneras como son generalmente expuestos desde el punto de vista moderno.

Advierte el autor al principio que para seguir más provechosamente el libro sería conveniente que el lector tuviera a la vista una edición de los Elementos. Sin embargo esta condición, desde luego conveniente, no es ni mucho

menos necesaria. Los enunciados de interés han sido reproducidos textualmente con una traducción lo más fiel y literal posible, de manera que el lector puede seguir y adquirir una visión total del pensamiento de Euclides y del autor con sólo la lectura de la obra que reseñamos.

El estilo en que está escrito el libro puede de primera intención chocar al lector que pretenda leerlo rápidamente, sin tener en cuenta la característica del autor de cuidar sobremanera todo detalle, dando siempre un sentido bien preciso a cada palabra y a cada frase, lo que no le impide muchas veces utilizar un atrayente estilo figurado o una florida forma simbólica.

Termina el libro con una nota bibliográfica sobre las distintas ediciones de los *Elementos* y de crítica con ellos relacionada. Además, esparcidas en el texto se encuentran con frecuencia citas valiosas de obras o trabajos, a veces poco conocidos, de acreditados especialistas.

L. A. Santaló

G. S. BROWN - D. P. CAMPBELL. *Principles of Servomechanisms. Dynamics and Synthesis of closed Loop Control Systems*. J. Wiley and Sons. New York, 1948, pág. 400.

Los autores, respectivamente director del Laboratorio de servo-mecanismos y profesor asistente de ingeniería eléctrica en el Massachusetts Institute of Technology entienden con este libro poner al servicio de los interesados los conceptos y las experiencias adquiridas en un curso de un semestre que ellos dictan para graduados; ellos se dirigen por tanto a estudiosos de ingeniería eléctrica, mecánica, aeronáutica, química, y también a alguno que se interese simplemente en el aspecto teórico de los sistemas de control automático, dando particular importancia a la síntesis dinámica y la explícita resolución de los problemas más bien que al análisis intuitivo y experimental de los sistemas. La parte matemática, aunque muy extensa, está contenida dentro de límites preferentemente elementales, evitando, en particular, todo problema de mecánica no-lineal; ella utiliza por lo tanto esencialmente la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, para la cual expone en un primer tiempo los métodos clásicos, luego, y con preferencia, los que aplican la transformación de Laplace, y, en todos los casos resumiendo el procedimiento en reglas prácticas de aplicación automática.

He aquí el índice de los capítulos: 1) Descripción del argumento. 2) Dinámica de los sistemas elementales de control. 3) Aplicación de la transformación de Laplace a la determinación de la respuesta instantánea. 4) Respuesta sinusoidal en los circuitos cerrados. 5) Diagramas, circuitos equivalentes y diagramas por secciones (block diagrams). 6) Introducción a la síntesis determinando la constante de utilización k . 7) Métodos para la síntesis de la función G : coordenadas lineales. 8) Métodos para la síntesis de la función G : coordenadas logarítmicas. 9) Sistemas sometidos a disturbios múltiples. 10) Estudio experimental de los servomecanismos. 11) Método para aproximar la respuesta instantánea por medio de la respuesta en frecuencia. El libro termina con una tabla de valores de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$, una colección de problemas, índice analítico, y bibliografía.

- El precio de suscripción a “*Mathematicae Notae*” es de 8 \$ (m/n) anuales.
 - El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
 - Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “*Mathematicae Notae*” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
 - Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
 - Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.
-

Fascículos* aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$ n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAS — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.30
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	2.00
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	4.50
	2 - G. GRIOLI. — Sul comportamento di un vincolo concentrato nel centro di una piastra circolare	2.00