Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Trigonometría

4º Año

Prof. Juan Carlos Bue
Prof. Daniela Candio
Prof. Verónica Filotti
Prof. María del Luján Martínez
Prof. Noemí Lagreca

Cód. 1401-19

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

CAPÍTULO 1: ÁNGULOS

I. GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

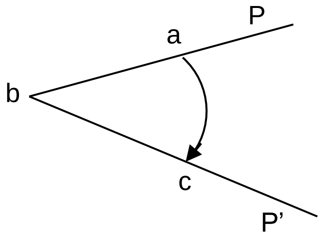
Ángulo plano convexo

Definición:

Llamamos ***ángulo plano convexo*** de vértice b y se lo simboliza $\hat{abc}$ al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta $\overrightarrow{ba}$ al pasar de una posición inicial P a una posición final P', describiendo el punto "a" un arco de circunferencia "menor o igual" que una semicircunferencia o igual a una circunferencia.

Gráficamente:

Ejemplo



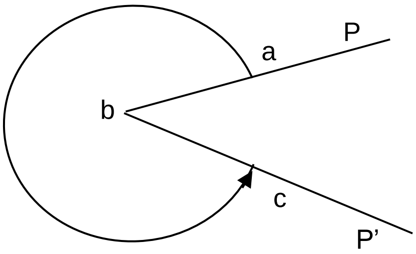
Ángulo plano cóncavo

Definición:

Llamamos ***ángulo plano cóncavo*** y se lo simboliza $\hat{abc}_{\text{cóncavo}}$ al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta $\overrightarrow{ba}$ al pasar de una posición inicial P a una posición final P', describiendo el punto "a" un arco de circunferencia mayor que una semicircunferencia y menor que una circunferencia.

Gráficamente:

Ejemplo



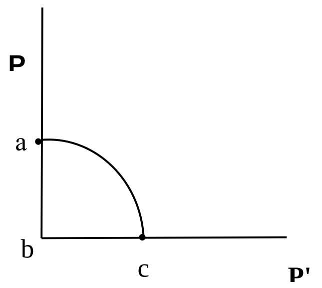
Clasificación de los ángulos convexos

Según el arco de circunferencia que describe, podemos clasificar los ángulos en:

Ángulo Recto

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la cuarta parte de una circunferencia.

Gráficamente: Simbólicamente:

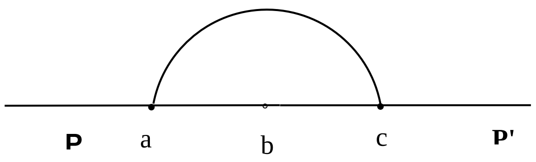


$\hat{R}$

Ángulo llano

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la mitad de una circunferencia.

Gráficamente: Simbólicamente:

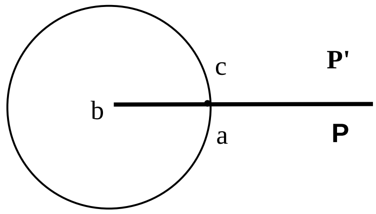


$\hat{L}$

Ángulo de una vuelta

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es una circunferencia.

Gráficamente: Simbólicamente:

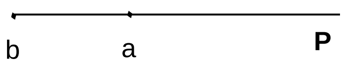


$\hat{V}$

Ángulo nulo

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es un arco nulo.

Gráficamente: Simbólicamente:



$\hat{N}$

II. SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Para medir un ángulo utilizamos una unidad de medida conveniente, la transportamos sobre el ángulo tantas veces como sea conveniente y obtenemos la medida de dicho ángulo. Esta unidad es elegida dentro de las unidades convencionales dando lugar a diversos sistemas de medición de ángulos***: El Sistema Sexagesimal y el Sistema Circular o del Radián***

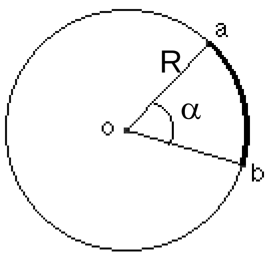
La medida para ángulos en el sistema sexagesimal se emplea en actividades aplicadas como topografía, navegación y el diseño de equipos mecánicos. En aplicaciones científicas, o en modelizaciones que requieran algún tipo de cálculo analítico se utiliza un sistema de medición de ángulos cuyo valor es un número real. Dicho sistema se conoce como ***Sistema Circular o del Radián***.

En este sistema de medición de ángulos, la unidad de medida la denominaremos ***RADIÁN*** y la simbolizaremos:

1 rad = 1 radián

Definiremos al Radián de la siguiente manera:

Dada una circunferencia de centro o y radio *R*, el ángulo central $\hat{\alpha}$ es de un Radián, cuando la medida del arco correspondiente a dicho ángulo es igual a la medida del radio de la circunferencia.

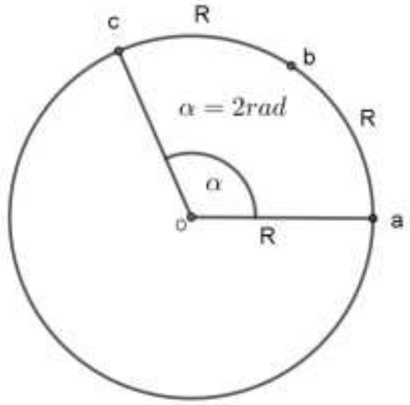


medida $\overset{\frown}{ab}$ = medida R

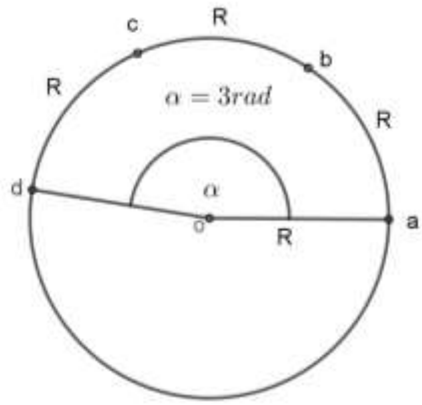
$\hat{\alpha} = 1\text{rad}$

Ejemplos:

a)



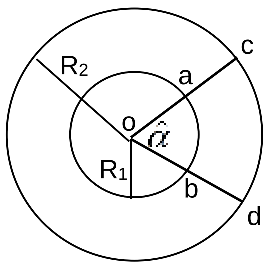
b)



Se observa que **la medida en radianes de un ángulo correspondiente a un arco de circunferencia es la medida del arco que abarca. (1)**

Longitud de arco

Consideramos dos circunferencias concéntricas y un ángulo central $\hat{\alpha}$ al que le corresponde un arco $\overset{\frown}{ab}$ en la circunferencia ***C(o ; R₁)*** y un arco $\overset{\frown}{cd}$ en la circunferencia de ***C(o ; R₂)***,observa la figura



Teniendo en cuenta la propiedad: "Las longitudes de los arcos son proporcionales a los respectivos radios"

Resulta

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = k$$

Llamaremos con:
r_1 a la medida del radio $\boldsymbol{R_1}$
r_2 a la medida del radio $\boldsymbol{R_2}$
a_1 a la medida del arco $\overset{\frown}{ab}$
a_2 a la medida del arco $\overset{\frown}{cd}$

Si $r_1 = 1 \Rightarrow a_1 = k$ y de acuerdo a lo observado en (1) podemos expresar

$$\frac{a_1}{r_1} = \alpha_{rad}$$

Pensando en "n" circunferencias concéntricas, diremos:

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \frac{a_3}{r_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a_n}{r_n} = k = \alpha_{rad}$$

Coloquialmente:

La longitud de un arco de circunferencia de radio R que corresponde a un ángulo central $\hat{\alpha}$ es igual al producto entre la medida del radio y la medida del ángulo $\hat{\alpha}$ expresada en el sistema circular.

$$\boxed{\frac{a}{r} = \alpha_{rad} \Rightarrow a = r.\alpha_{rad}}$$

ACTIVIDAD:

1) Encuentra en el sistema circular la medida de los siguientes ángulos:

a) Un recto.
b) Un llano.
c) De una vuelta.

Transformación de un sistema de medición a otro.

- Transformación del sistema sexagesimal al circular

Se establece que:

$$360^{\circ} \rightarrow 2\pi\ rad$$
$$\alpha^{\circ} \rightarrow \frac{2\pi\ rad}{360^{\circ}} \times \alpha^{\circ}$$

En general la transformación quedará expresada en la siguiente relación:

$$\boxed{\alpha\ rad = \frac{\pi\ rad}{180^{\circ}} \times \alpha^{\circ}}$$

- Transformación del sistema circular al sistema sexagesimal

Se establece que:

$$2\pi\ rad \rightarrow 360°$$
$$\alpha\ rad \rightarrow \frac{360°}{2\pi\ rad} \times \alpha\ rad$$

En general la transformación quedará expresada en la siguiente relación:

$$\boxed{\alpha° = \frac{180°}{\pi\,\text{rad}} \times \alpha\ \text{rad}}$$

Estas transformaciones se pueden calcular en forma aproximada utilizando la calculadora científica.

Nota: Cuando se trabaja en sistema radian, no suele indicarse unidades. En consecuencia, si un ángulo mide 2 radianes, escribimos β = 2.

En Resumen

Para expresar un ángulo α	Multiplicar por	Ejemplos
en radianes	$\frac{\pi}{180º}$ x α º	$60º \equiv 60º \cdot \frac{\pi}{180º} = \frac{\pi}{3}$ $30º15' \equiv 30º15' \cdot \frac{\pi}{180º} \approx 0{,}53$
en grados sexagesimales	$\frac{180º}{\pi}$ x α rad	$\frac{5}{3}\pi \equiv \frac{5}{3}\pi \cdot \frac{180º}{\pi} = 300º$ $1{,}4 \equiv 1{,}4 \cdot \frac{180º}{\pi} \approx 80º12'50''$

ACTIVIDADES:

2) ¿Qué medida, en radianes, tiene el suplementario del ángulo $\hat{\varepsilon} = 146º25'$?
3) Un ángulo de 1,5 rad, ¿es menor, igual o mayor que un ángulo recto?
4) ¿Qué medida corresponde, en los dos sistemas de medición estudiados, al complementario de un ángulo $\hat{\varepsilon} = 0{,}5 rad$?

III. ÁNGULOS ORIENTADOS

En situaciones de la vida cotidiana cuando un objeto gira, a veces, es necesario saber en qué sentido lo hace, es decir, desde el punto vista matemático saber en qué sentido se mueve la semirrecta que genera el ángulo.

Es decir:

- Llamamos ***ángulo positivo*** a todo aquel generado en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

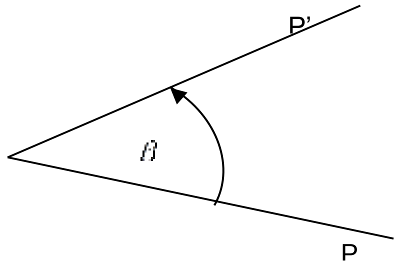


Figura 1

$$\hat{\beta} = +60º = +\frac{\pi}{3}\,rad$$

A la medida de un ángulo positivo le anteponemos el signo (+) para indicar en qué sentido fue generado.

- Llamamos ***ángulo negativo*** a todo aquel generado en el mismo sentido que se mueven las agujas del reloj.

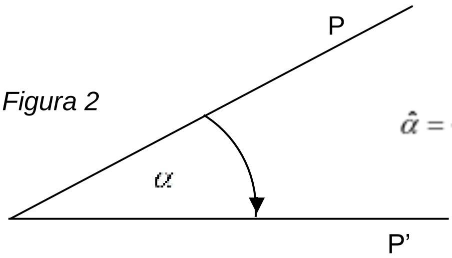


Figura 2

$$\hat{\alpha} = -30º = -\frac{\pi}{6}\,rad$$

A la medida de un ángulo negativo le anteponemos el signo (-) para indicar en qué sentido fue generado.

Observación:

Es necesario tener en cuenta que ***la medida de un ángulo es un número no negativo***. El ***signo*** indica solamente el sentido en el que es generado. Si lo hace en sentido antihorario, por simplicidad, se omite la escritura del signo positivo.

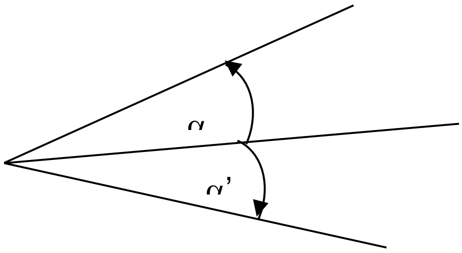
Entonces, considerando el ángulo de la Figura 1; se puede escribir:

$$\hat{\beta} = 60° = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

IV. ÁNGULOS SIMÉTRICOS U OPUESTOS

Definición:

Dos ángulos son **opuestos o simétricos,** si poseen igual medida y se generan a partir de una misma semirrecta en sentidos contrarios.

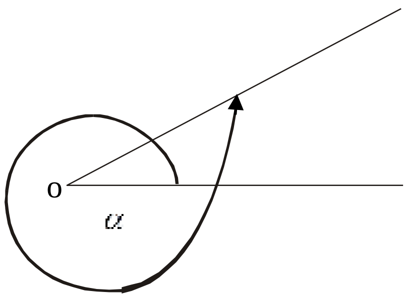


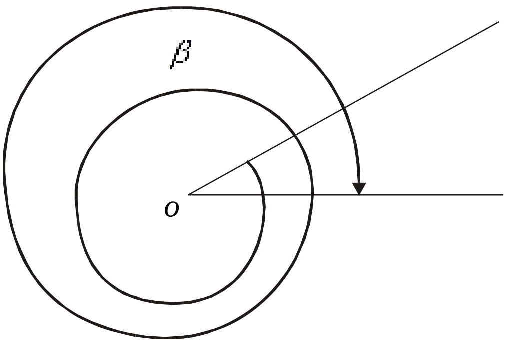
$\hat{\alpha}'$ y $\hat{\alpha}$ son opuestos

V. ÁNGULOS MAYORES QUE UNA VUELTA

Hasta el momento se ha trabajado con ángulos menores e iguales a 360° (2π rad). Pero a veces en la vida cotidiana nos encontramos con situaciones donde se hace necesario utilizar ángulos mayores de 360°, así como en la rotación de una rueda que gira sobre su eje.

Por ejemplo gráficos de ángulos mayores que 360º podrían ser:



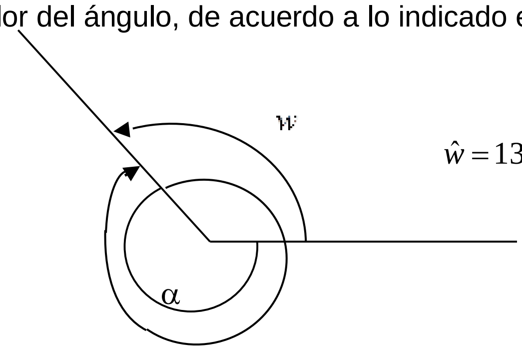


ACTIVIDAD:

5) Completa, indicando el valor del ángulo, de acuerdo a lo indicado en cada apartado:

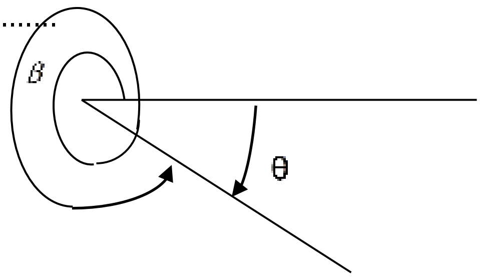
a)

$\hat{\alpha}$ =................



$\hat{w} = 135°$

b) $\hat{\beta} = ...$



$\theta = -\frac{\pi}{4}$ rad

VI. ÁNGULOS COTERMINALES:

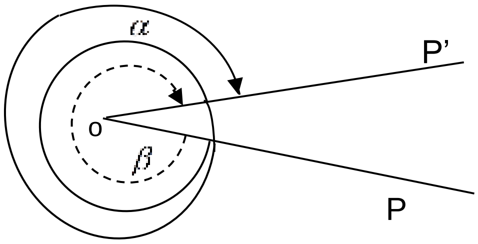
Definición:

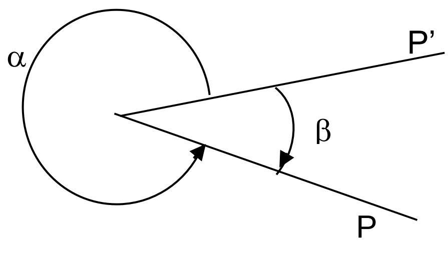
Llamamos ***ángulos coterminales*** a aquellos donde las posiciones de las semirrectas iniciales y finales son coincidentes y difieren en un número entero de vueltas

En símbolos**:**

$$\hat{\alpha} \text{ es coterminal con } \hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} + 2k\pi \quad ; k \in Z$$

Ejemplos:





<u>**Observación**</u>**:** *Al conjunto de los ángulos definidos en este apartado lo llamaremos* ***conjunto de ángulos generalizados.***

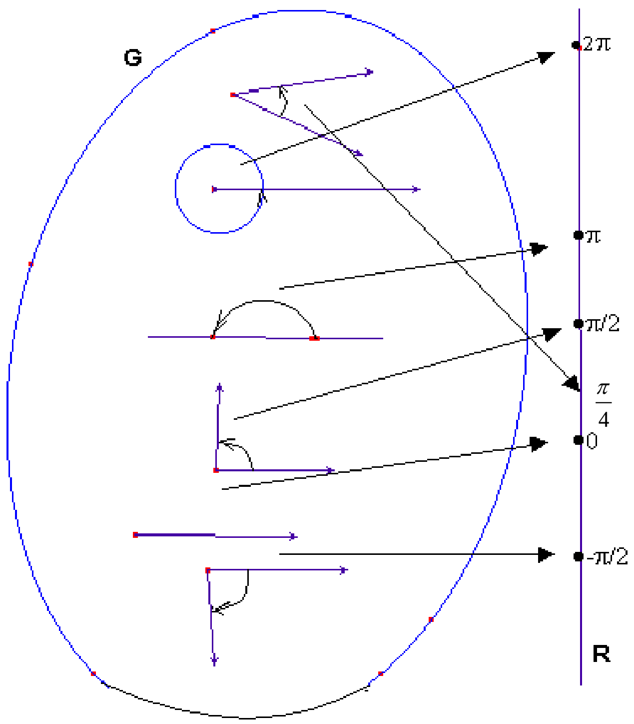
ACTIVIDAD

6) Determina cuáles de los siguientes ángulos son coterminales teniendo en cuenta que sus lados iniciales coinciden:

$\hat{\alpha} = 300º$ $\hat{\beta} = -150º$ $\hat{\delta} = 210º$ $\hat{\lambda} = \frac{\pi}{4} rad$ $\hat{\eta} = 405º$ $\hat{\varepsilon} = -\frac{\pi}{3} rad$

VII. RELACIÓN ENTRE EL CONJUNTO DE LOS ÁNGULOS GENERALIZADOS Y EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES:

Sean G el conjunto de los ángulos generalizados , R el conjunto de los números reales y una ley que a cada ángulo le hace corresponder un único número real, que es su medida en radianes acompañada de un signo más o menos que, como ya sabemos, indica su sentido de generación.
Además a cada número de R le hace corresponder un único ángulo de G, quedando así definida una ***función biyectiva*** entre ambos conjuntos.
Mediante un diagrama sagitario se representa la función f ***/*** f: G$\rightarrow$R



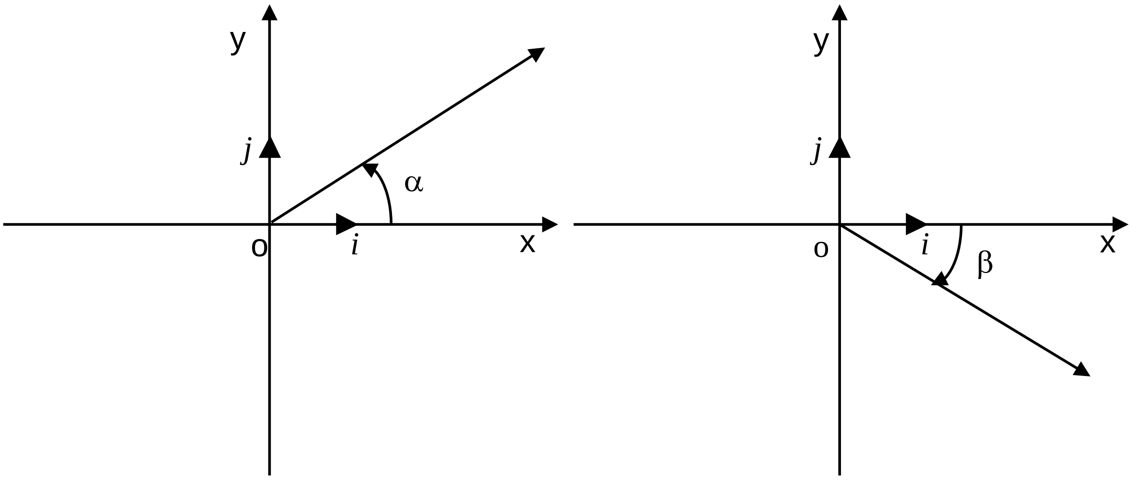
CAPÍTULO 2: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

I. ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

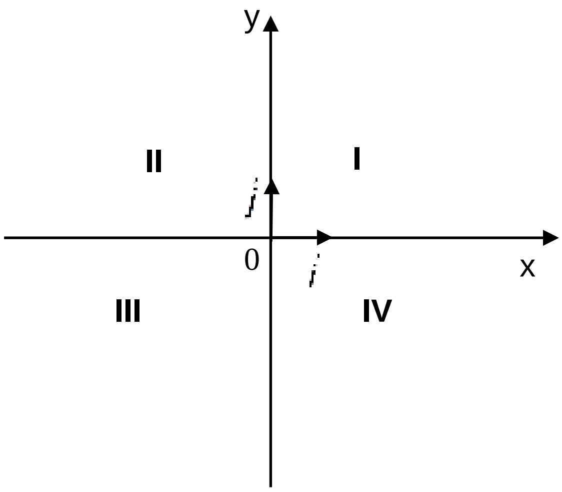
Definición:

Diremos que un ángulo está en ***posición normal*** respecto a un $\{o;\vec{i},\vec{j}\}$ cuando su vértice coincide con el origen o y su lado inicial con el semieje positivo de las x

Los ángulos de las siguientes figuras están en posición normal



Sabemos que al considerar en el plano el sistema $\{o;\vec{i},\vec{j}\}$, éste queda dividido en cuatro regiones que numeradas según el sentido de giro antihorario son:



Cada una de estas regiones recibe el nombre de CUADRANTE.
Así, para simbolizar cada cuadrante indicaremos:

I_c (Primer cuadrante) , II_c (Segundo cuadrante) , III_c (Tercer cuadrante) y IV_c (Cuarto cuadrante)

Diremos que un ángulo es ***del primer cuadrante*** cuando, colocado en posición normal, su lado final está incluido en dicho cuadrante y no coincide con los semiejes positivos (definiciones semejantes se aplican a los otros cuadrantes).

Los ángulos en los cuales el lado final coincide con algunos de los cuatro semiejes del sistema de referencia se llaman ***ángulos cuadrangulares***

ACTIVIDAD

1) Completa, considerando en cada caso el ángulo en el $[0\,;\,2\pi]$, según corresponda

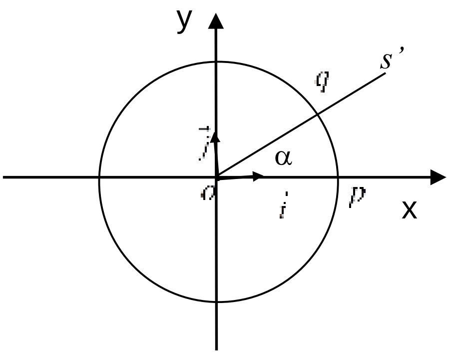
a) Si $\hat{\alpha}$ es del I_c entonces ......$\langle\ \hat{\alpha}\ \langle$ ......

b) Si $\hat{\beta}$ es del .... entonces $\frac{3}{2}\pi$ rad $\langle\ \hat{\beta}\ \langle$ $2\,\pi$ rad

c) Si $\hat{\gamma}$ es del III_c entonces ......$\langle\ \hat{\gamma}\ \langle$ $\frac{3}{2}\pi$ rad

d) Si $\hat{\mu} =$ ....es un ángulo cuadrangular

Consideremos nuevamente un sistema de referencia ortonormal $\{o;\vec{i},\vec{j}\}$ como se indica en la figura y ubiquemos la circunferencia C(o;r)



Sea $\hat{\alpha}$ un ángulo generalizado cualquiera en posición normal. Para ese ángulo tendremos una posición final $\overrightarrow{os}$' de la semirrecta generadora y además **un único** punto de intersección de $\overrightarrow{os}'$ con la circunferencia que llamaremos q .

En resumen tenemos las siguientes correspondencias (no biyectivas):

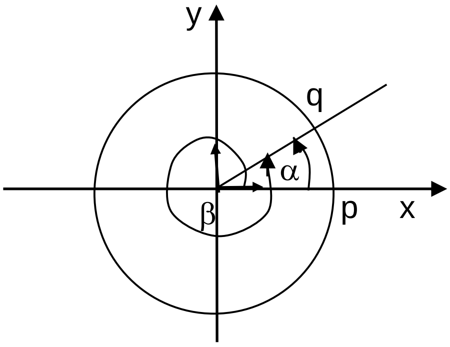
$$\hat{\alpha} \rightarrow \overrightarrow{os}' \rightarrow q$$

Entonces:

A cada ángulo generalizado le corresponde un único punto de la circunferencia.

A cada punto de la circunferencia ***no le corresponde*** *un único ángulo.*

Ejemplo:



Obsérvese que dado un sistema ortonormal a cada punto *q* del plano le corresponde un único par de números (*x; y*) que son sus coordenadas.

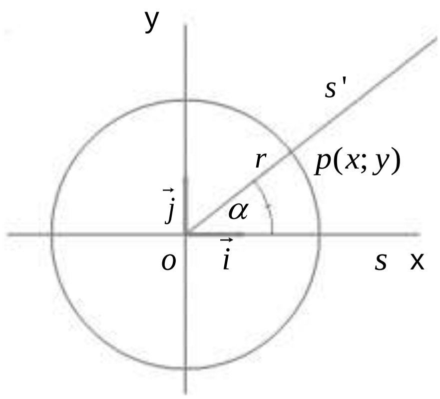
De acuerdo a lo expuesto:

> Dada una circunferencia C(o; r) se verifica que:
>
> *A cada ángulo generalizado le corresponde un par ordenado de números reales (x; y)*

Es decir queda definida una función no biyectiva: $\hat{\alpha} \to (x;y)$

II. DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: SENO Y COSENO DE UN ÁNGULO. UNA APLICACIÓN DE REALES EN REALES.

Dados en un sistema ortonormal $\{o;\vec{i};\vec{j}\}$, una circunferencia $C\,(o\ ,\ r)$, un ángulo α (en radianes) en posición normal y $p(x;y)/\ \overrightarrow{os'} \cap C\,(o\ ,\ r) = \{p\}$



Definimos las siguientes relaciones trigonométricas:

seno del ángulo α = $sen\,\hat{\alpha} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{ordenada\ de\ p}{medida\ radio\ de\ C(o;r)}$

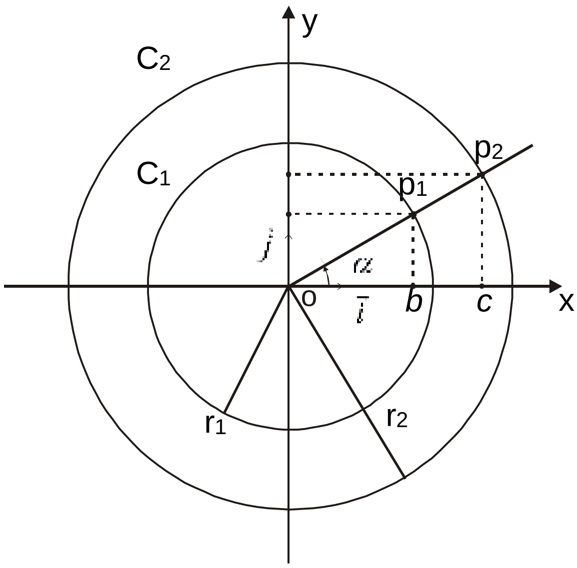
coseno del ángulo α = $\cos\hat{\alpha} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{abscisa\ de\ p}{medida\ radio\ de\ C(o;r)}$

Para recordar:

Seno se abrevia **sen**
y en inglés **sin** como se observa en la calculadora
Coseno se abrevia **cos**

Estas relaciones definidas, ¿serán funciones?

Para responder a esta pregunta consideremos $\hat{\alpha}$ y dos circunferencias cualesquiera de radios $C_1(o;\,r_1)$ y $C_2(o;\,r_2)$ *como muestra la figura*



$p_1(x_1;y_1)$

$p_2(x_2;y_2)$

$ob = x_1$
$oc = x_2$
$p_1b = y_1$
$p_2c = y_2$

Notamos que $\overset{\Delta}{obp_1} \sim \overset{\Delta}{ocp_2}$. Luego las medidas de sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{p_1 b}{p_2 c} = \frac{op_1}{op_2} \quad ; \quad \frac{ob}{oc} = \frac{op_1}{op_2}$$

Teniendo en cuenta p_1 (x_1 ; y_1) , p_2 (x_2 ; y_2) ; las propiedades de las proporciones y las definiciones de las relaciones trigonométricas dadas, entonces las igualdades anteriores podemos expresarlas así:

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} = sen\hat{\alpha} \qquad \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cos\hat{\alpha}$$

De lo expuesto podemos determinar que las relaciones definidas:

- no dependen de la circunferencia elegida
- tienen para ***cada*** ángulo un ***único*** valor

En conclusión ***las relaciones trigonométricas definidas son funciones***

Entonces definimos:

Función SENO

Dado un ángulo α llamamos sen α al cociente entre la ordenada del punto p (intersección entre el lado terminal del ángulo y la circunferencia) y la medida del radio de la circunferencia.

En símbolos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \textit{con} \quad \alpha \in R$$

Función COSENO

Dado un ángulo α llamamos cos α al cociente entre la abscisa del punto p (intersección entre el lado terminal del ángulo y la circunferencia) y la medida del radio de la circunferencia.

En símbolos

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \textit{con} \quad \alpha \in R$$

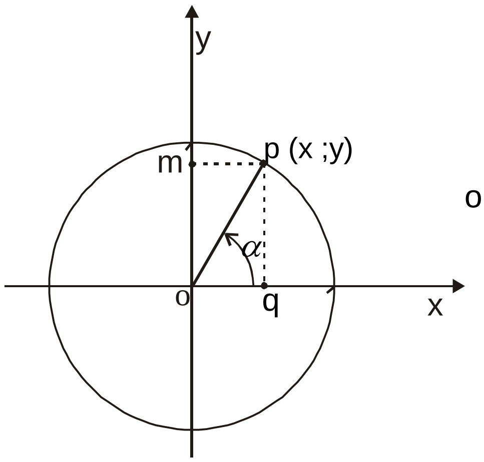
ACTIVIDAD

2) Considerando al ángulo α en los distintos cuadrantes, completa el cuadro con los signos (+) o (-) según corresponda

	I_c	II_c	III_c	IV_c
$\operatorname{sen}\alpha$				
$\cos\alpha$				

III. RELACIÓN PITAGÓRICA:

Dada una circunferencia $C(o;r)$, un ángulo α y un punto p(x; y)



op=r

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{oqp}$ resulta:2

$$op^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Pero: op = r; oq = x y qp = om = y; entonces reemplazando en la expresión (1) nos queda:

Entonces: $r^2 = x^2 + y^2$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $r^2 (r^2 \neq 0)$

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \quad (2)$$

Como $\frac{x}{r} = \cos\alpha$; $\frac{y}{r} = \text{sen}\alpha$, la expresión (2) resulta:

Aclaración: En general:
$(\text{sen}v)^n = \text{sen}^n v \quad \forall n \neq -1$
$(\cos v)^n = \cos^n v \quad \forall n \neq -1$
El hecho de excluir para el valor n = –1 se debe a no crear confusiones con la función inversa.

$$\boxed{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1}$$

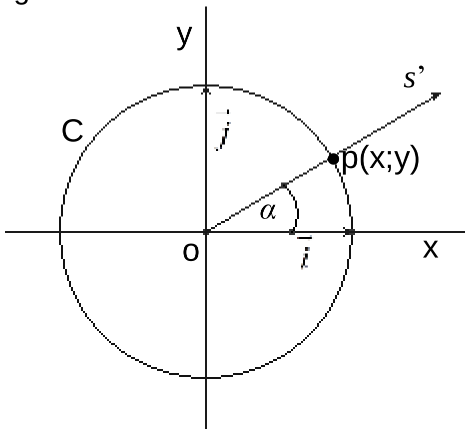
*Esta expresión se la conoce como **Relación Pitagórica**, vincula el seno y el coseno del mismo ángulo.*

IV. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

En la definición de las funciones seno y coseno hemos pensado en una circunferencia de radio *r* cualquiera.

Entre los valores que puede asumir ***r*** consideremos ***r* = 1**. La circunferencia de radio igual a 1 la denominamos **circunferencia trigonométrica**.

Si C(o;r) es una circunferencia trigonométrica, α un ángulo en radianes de lado final $\vec{os'}$ resulta:



$$C(o;r) \cap \vec{os'} = \{p\} = \{(x;y)\}$$

Teniendo en cuenta la definición de seno y coseno de un ángulo, nos queda:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Entonces en toda circunferencia trigonométrica el seno del ángulo es la ordenada y el coseno es la abscisa, del punto p (intersección entre $\vec{os'}$ y la C(o;r)).

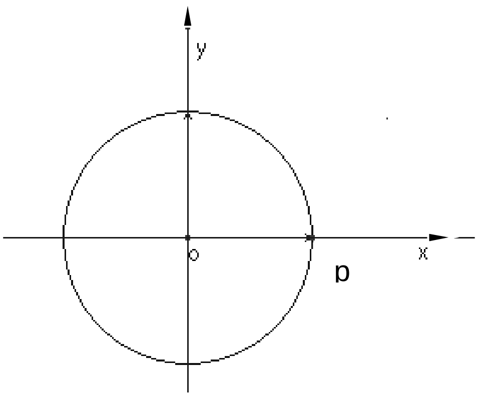
En símbolos:

$$\operatorname{sen}\ \alpha = y \qquad \cos\ \alpha = x$$

V. VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS PARTICULARES

En lo sucesivo, para simplificar la obtención de cada una de las expresiones trabajaremos con la circunferencia trigonométrica y nos referiremos indistintamente al ángulo o al número real que lo identifica.

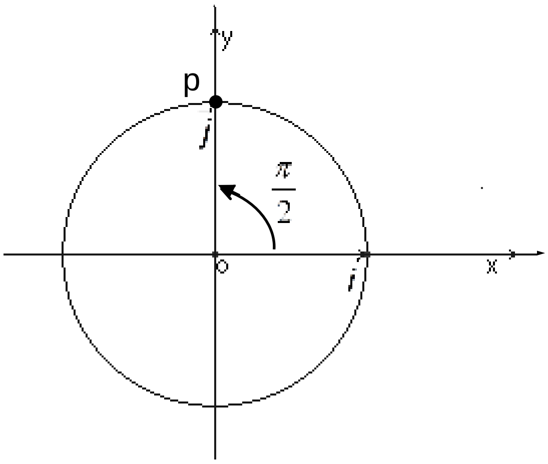
a) Funciones seno y coseno del ángulo $\alpha = 0$



Observamos en la figura que cuando $\alpha = 0$ el punto p tiene como ordenada 0 y como abscisa 1, es decir, según la definición de las funciones seno y coseno:

$$\boxed{\operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1}$$

b) Funciones seno y coseno del ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$



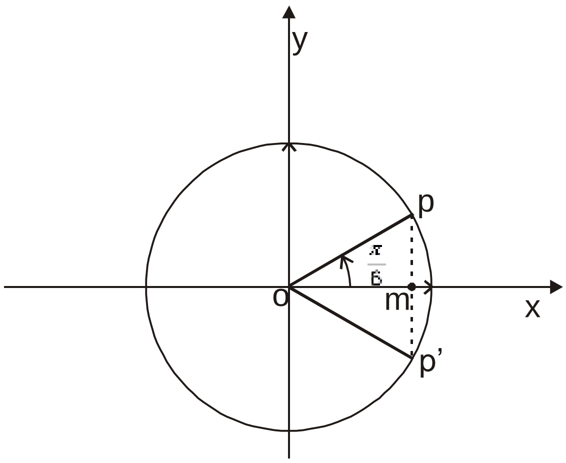
Observamos en la figura que cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ el punto p tiene como ordenada el número 1 y como abscisa el 0, es decir, según la definición de las funciones seno y coseno resulta:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0}$$

c) Funciones seno y coseno del ángulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Para determinar las funciones seno y coseno del ángulo $\frac{\pi}{6}$ debemos encontrar las coordenadas del punto p.

Comencemos marcando el punto p', simétrico de p con respecto al eje *x* y unamos dicho punto con el origen del sistema. Así podemos observar el $\overset{\Delta}{pop'}$, ¿qué clase de triángulo es el $\overset{\Delta}{pop'}$?



$\hat{pop'} = \frac{\pi}{3}$ por construcción. (1)

$\overline{op} = \overline{op'}$ por ser radios de la circunferencia trigonométrica.

Luego:

El triángulo $\overset{\Delta}{pop'}$ es isósceles $\Rightarrow o\hat{p}p' = o\hat{p'}p = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ (2)

De (1) y (2) $\overset{\Delta}{pop'}$ es equiángulo $\Rightarrow \overset{\Delta}{pop'}$ es equilátero luego:

$$\overline{op} = \overline{op'} = \overline{pp'} = 1$$

Siendo $\overrightarrow{om}$ bisectriz de $\hat{pop'}$ en el triángulo $\overset{\Delta}{pop'}$ equilátero, entonces $\overline{om}$ es mediatriz y mediana de dicho triángulo, luego:

$pm = \frac{1}{2}$ y es la ordenada de p , entonces $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Por aplicación del Teorema de Pitágoras en el triángulo $\overset{\Delta}{opm}$:

$$op^2 = pm^2 + om^2$$

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + om^2 \Rightarrow om = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y om es la abscisa de p, entonces $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

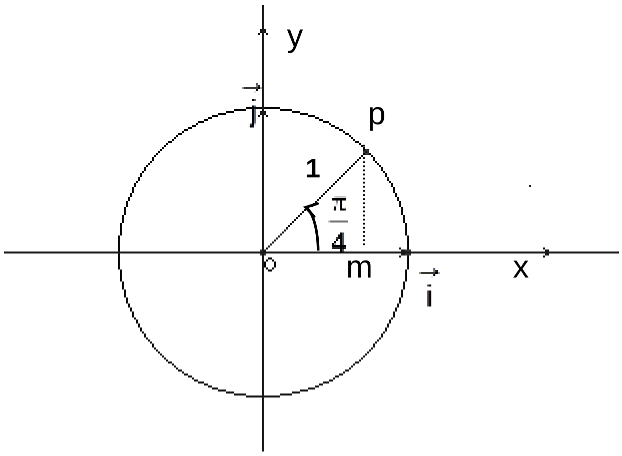
En resumen

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

d) Funciones seno y coseno del ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Para determinar las funciones seno y coseno del ángulo $\frac{\pi}{4}$ debemos encontrar las coordenadas del punto p.

$\overline{op}$ es radio de la circunferencia trigonométrica



Consideremos el triángulo $\overset{\Delta}{opm}$, donde:

$$\left.\begin{array}{l} p\hat{o}m = \frac{\pi}{4} \text{ por construcción} \\ \\ o\hat{m}p = \frac{\pi}{2} \text{ por construcción} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad o\hat{p}m = \frac{\pi}{4}$$

Entonces el triángulo $\overset{\Delta}{opm}$ es isósceles, $\overline{om} = \overline{mp}$; además op = 1, aplicando el Teorema de Pitágoras en dicho triángulo *:*

$$op^2 = pm^2 + om^2$$

$$1^2 = 2pm^2 \quad \Rightarrow pm = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y pm es la ordenada de p, entonces: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

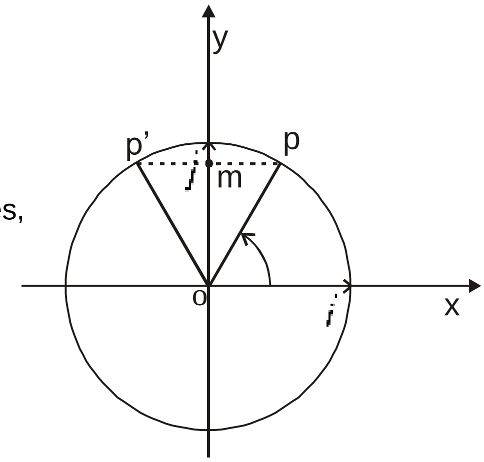
Como om es la abscisa de p, tenemos: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

En resumen

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

e) Funciones seno y coseno del ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Para determinar los valores del seno y coseno del ángulo $\dfrac{\pi}{3}$, se realiza la demostración en forma análoga a lo casos anteriores, obteniéndose :



$$\boxed{\cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ACTIVIDADES

3) Completa según corresponda

$\text{sen } 0 = ...$	$\cos 0 = ...$	$\text{sen}\pi = ...$	$\cos\pi = ...$
$\text{sen}2\pi = ...$	$\cos(-2\pi) = ...$	$sen(-\pi) = ...$	$\cos(-\pi) = ...$
$\text{sen}(-3\pi) = ...$	$\cos(-4\pi) = ...$	$\text{sen}(6\pi) = ...$	$\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = ...$
$\cos\dfrac{\pi}{2} = ...$	$\cos(-\dfrac{\pi}{2}) = ...$	$\cos\dfrac{3}{2}\pi = ...$	$\text{sen}\dfrac{3}{2}\pi = ...$

4) Completa la siguiente tabla indicando a qué cuadrante pertenece el ángulo α

	$\text{sen}\alpha > 0$	$\text{sen}\alpha < 0$
$\cos\alpha < 0$		
$\cos\alpha > 0$		

5) Verifica las siguientes identidades

a) $\text{sen}^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$

b) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

c) $\dfrac{\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha} = 1$

d) $\dfrac{1 - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \text{sen}\alpha}$

6) Encuentra el valor del:

a) $\cos\alpha$ si $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{5}{6}$ y $\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

b) $\operatorname{sen}\alpha$ si $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ y $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

c) $\cos\alpha$ si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

CAPITULO 3. ESTUDIO DE LA FUNCIÓN SENO, COSENO Y TANGENTE

A modo de ejemplo comenzaremos estudiando en forma completa, la función seno.

I. FUNCIÓN SENO

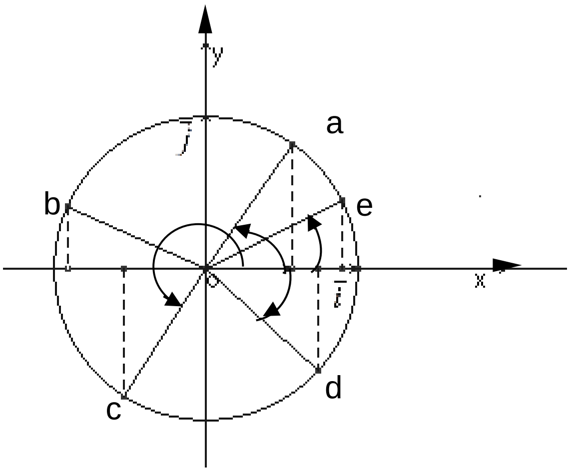
Dado $f : R \to [-1;1] / \ f(x) = \operatorname{sen}x$

a) **Dominio de definición de la ley**

De acuerdo a la definición de la función seno podemos expresar que $\operatorname{Dom}(f) = R$

b) **Conjunto imagen**

Si consideramos los infinitos ángulos generados (en ambos sentidos) a partir del semieje positivo de las x, como se observa en la figura, podemos expresar que los posibles valores de las ordenadas de los puntos de intersección del lado terminal del ángulo con la circunferencia trigonométrica varían entre –1 y 1. Resulta entonces: $\operatorname{Im}(f) = [-1;\ 1]$

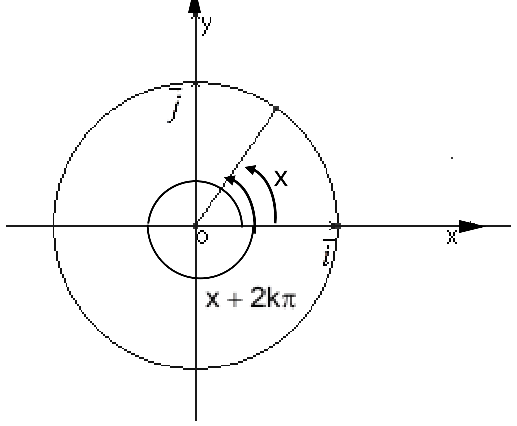


c) **Biyectividad**

Para estudiar si la función es biyectiva, tendremos que analizar si es suryectiva e inyectiva simultáneamente.

- ***Suryectividad***: a la función seno la definimos sobre su conjunto imagen, entonces es suryectiva.

- ***Inyectividad***: la función no es inyectiva, ya que por definición de ángulos coterminales es inmediato que: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$ con $k \in Z;\ x \in R$



Del análisis anterior concluimos que la función seno no es biyectiva.

d) **Periodicidad**

Por definición de ángulos coterminales y recordando la definición de función periódica, resulta:

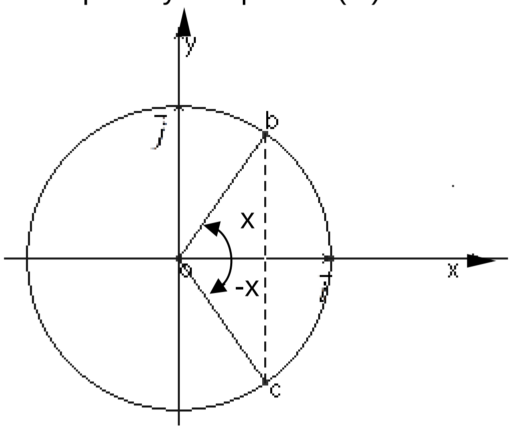
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi) \text{ con } k \in Z$$

$$\operatorname{sen} x \underset{\substack{\downarrow \\ k=1}}{=} \operatorname{sen}(x+2\pi) \underset{\substack{\downarrow \\ k=-2}}{=} \operatorname{sen}(x-4\pi) \underset{\substack{\downarrow \\ k=-1}}{=} \operatorname{sen}(x-2\pi)$$

Entonces podemos concluir que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es periódica, de período 2π

e) **Paridad**

Consideremos un ángulo x cualquiera y su opuesto (-x) como muestra la figura

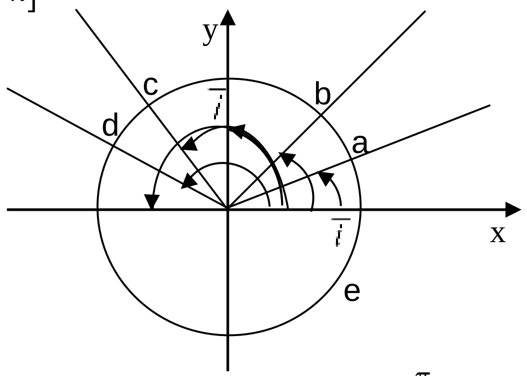


Podemos observar que los puntos b y c son simétricos respecto del eje x por lo tanto tienen ordenadas opuestas.

En consecuencia: sen x = -sen (-x) $\forall x \in R \Rightarrow$ f es impar

f) **Crecimiento**

Sabemos que la función seno es impar y periódica con período 2π. Por lo tanto estudiaremos el crecimiento en el conjunto $[0;\ \pi]$



Observemos en la circunferencia que el seno de x crece hasta llegar a 1, en $\frac{\pi}{2}$ y decrece hasta llegar a 0 , en π .

Resumiendo:

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0;\ \pi]$:

$*$ es creciente en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$*$ es decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

g) **Intersección con los ejes**

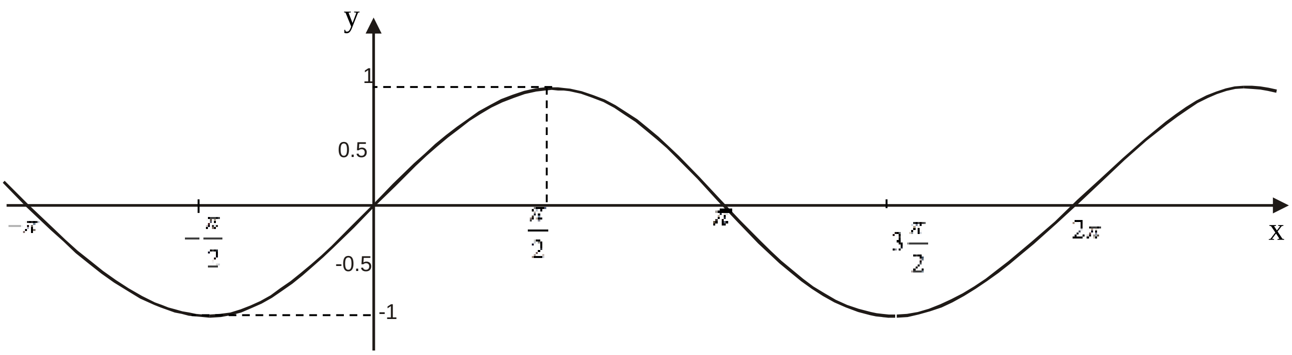
- con el eje x $\Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ con $k \in Z$ $\Rightarrow$ los puntos $(k\pi;\ 0) \in G_f$ (gráfica de la función)
- con el eje y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$ $\Rightarrow$ el punto $(0;\ 0) \in G_f$

Completa, resumiendo todo lo estudiado de la función seno:

Dominio:	Conjunto imagen: ....
Suryectiva:	Inyectiva: ....
Biyectiva:	
Periódica:	Período:...................
Par:	Impar: ....
Intersección con el eje *x*:	
Intersección con el eje *y*:	

Con las conclusiones anteriores estamos en condiciones de graficar la función seno.

h) **Gráfica**



ACTIVIDADES

7) Representa gráficamente las siguientes funciones e indica dominio de definición de la ley y conjunto imagen.

a) $s(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

b) $r(x) = 2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

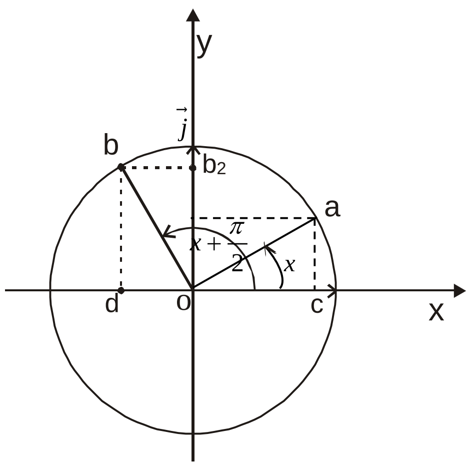
c) $l(x) = 2 + \operatorname{sen} x$

d) $m(x) = |\operatorname{sen} x| + \operatorname{sen} x$

II. FUNCIÓN COSENO

Consideremos un sistema de referencia $\{o; \bar{i}; \bar{j}\}$ centrado en una circunferencia trigonométrica y los ángulos x y $x+\frac{\pi}{2}$ según se muestra en la fugura.

Observando el gráfico y comparando los triángulos oac y obd, podemos concluir que resultan congruentes. Luego las medidas de los lados homólogos son iguales, es decir: ac = od y oc = db



Teniendo en cuenta las coordenadas de los puntos a(a_1; a_2) y b(b_1; b_2), las igualdades anteriores podemos expresarlas:

$a_2 = -b_1$ (1) y $a_1 = b_2$ (2)

Además sabemos que:

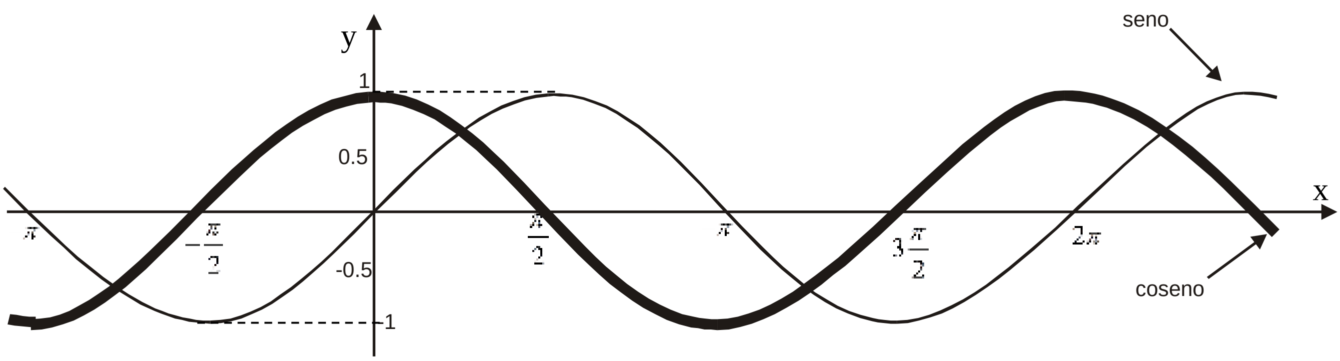
$\operatorname{sen} x = a_2$ y $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = b_1$

$\cos x = a_1$ y $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = b_2$

de (1) y (2) resulta:

$$\operatorname{sen} x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

De la relación $\cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, podemos concluir que para construir la gráfica de la función coseno bastará efectuar una traslación horizontal a la gráfica de la función seno:

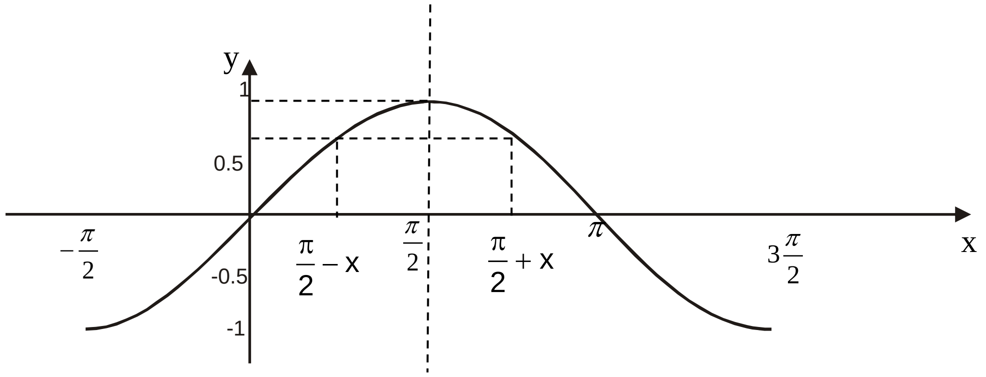


De acuerdo con lo estudiado sobre la función seno y teniendo en cuenta la obtención de la gráfica de la función coseno, proponemos para el lector estudiar para ésta última:

a) Dominio de definición de la ley y conjunto imagen
b) Biyectividad y periodicidad
c) Paridad
d) Crecimiento
e) Intersección con los ejes coordenados

Relaciones especiales

Dado que la función coseno es simétrica respecto del eje "y", y la función seno tiene la misma gráfica desplazada $\frac{\pi}{2}$ en el sentido positivo del eje "x", resulta que la gráfica del seno es simétrica respecto de la recta x = $\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto:



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

luego:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$$

Es decir:

El coseno de un ángulo y el seno de su complementario son iguales

ACTIVIDAD

8) Representa gráficamente las siguientes funciones e indica dominio de definición de la ley y su conjunto imagen:

a) $g(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

b) $j(x) = \left|\cos\ x - \frac{1}{2}\right|$

c) $c(x) = \cos\ x - |\cos\ x|$

III. FUNCIÓN TANGENTE

Definición:

Definiremos una nueva función trigonométrica que a cada número real "x" le hace corresponder un único número que resulta de efectuar el cociente entre el seno de x y el coseno de x, a la que llamaremos tangente de x e indicaremos tg x.

Simbólicamente:

$$x \to \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}; \ \cos x \neq 0$$

Estudio de la función tangente

a) Dominio de definición de la ley

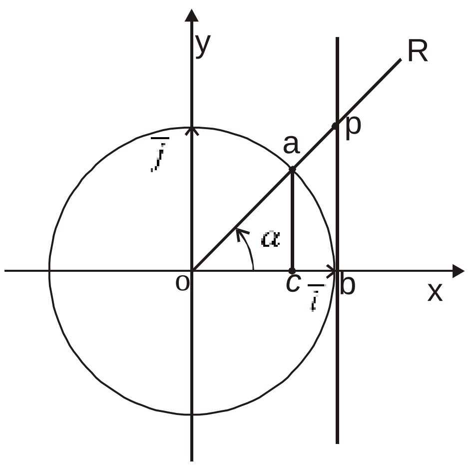
La función tangente estará definida para aquellos valores donde el cos x sea distinto de cero, es decir:

$$\operatorname{Dom}(f) = R - \left\{ x / x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z \right\}$$

b) Conjunto imagen

Para determinar el conjunto imagen de la función tangente, intentaremos encontrar un punto cuya ordenada representa a la tangente de cada uno de los ángulos del dominio.

Sea entonces una circunferencia trigonométrica , un sistema de referencia $\{o; \bar{i}; \bar{j}\}$ y los puntos $a(a_1; a_2)$; $b(1; 0)$ y $p(p_1; p_2)$



Consideremos un ángulo cualquiera del primer cuadrante y una recta R donde esté incluida la semirrecta $\overrightarrow{oa}$ (posición final de $\hat{\alpha}$) , al trazar una recta perpendicular al eje *x* que pase por el punto b(1;0), queda determinado el punto p, intersección de la recta x=1 con la posición final del $\hat{\alpha}$

Así resulta que el $\overset{\Delta}{opb}$ es semejante al $\overset{\Delta}{oac}$ por lo tanto sus lados son proporcionales

$\frac{ac}{oc} = \frac{pb}{ob}$ donde $ac = a_2;\ oc = a_1;\ pb = p_2$ y $ob = 1$

Entonces podemos expresar:

$$tg\,\hat{\alpha} = \frac{sen\,\hat{\alpha}}{cos\,\hat{\alpha}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{1}$$

luego:

$$tg\,\hat{\alpha} = p_2$$

Es decir:

El número que representa la tangente de un ángulo es la ordenada del punto de intersección del lado terminal del mismo con la recta de ecuación x=1.

De este modo si consideramos un ángulo cualquiera en el cuarto cuadrante también podemos observar que el número que representa la tangente del ángulo es la ordenada del punto de intersección de la semirrecta final del ángulo con la recta de ecuación x = 1.

Para encontrar la tangente de un ángulo del II_c o del III_c, basta con determinar, el punto de intersección de la semirrecta final del ángulo con la recta de ecuación:
x = -1. En estos casos la tangente del ángulo es la ordenada opuesta de la del punto de intersección.

Con todas estas consideraciones, procedemos a determinar el conjunto imagen de la función tangente:

- Si $\hat{\alpha} = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

- Si $\hat{\alpha}$ se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ desde valores menores a $\frac{\pi}{2}$, el valor de la tangente es mayor que cualquier número positivo dado.

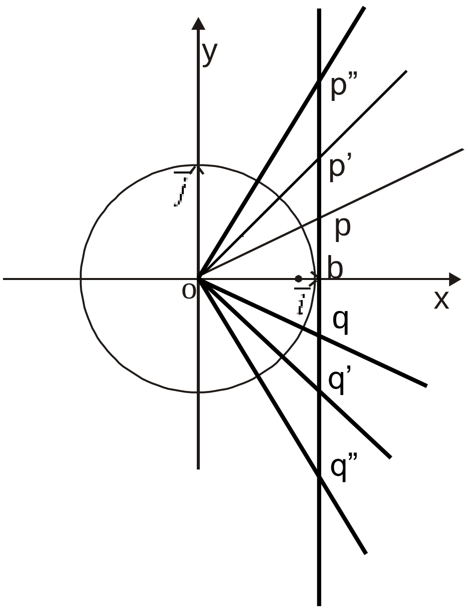
En símbolos: $\alpha \to \frac{\pi}{2}^{-} \Rightarrow tg\alpha \to +\infty$ pues la recta R tiende a ser paralela al eje y.

Observamos que cuando el valor del ángulo va creciendo también crece el valor de la tangente del ángulo, completando así todos los puntos de abscisa 1 de la $\overrightarrow{bp}$ (1)

- Si $\hat{\alpha}$ se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ desde valores mayores que $-\frac{\pi}{2}$, el valor de la tangente es menor que cualquier número negativo dado.

En símbolos: $\alpha \to -\frac{\pi}{2}^{+} \Rightarrow tg\alpha \to -\infty$

Observamos que cuando el valor del ángulo va decreciendo también decrece el valor de la tangente del ángulo, completando así todos los puntos de abscisa 1 de la $\vec{bq}$ (2)

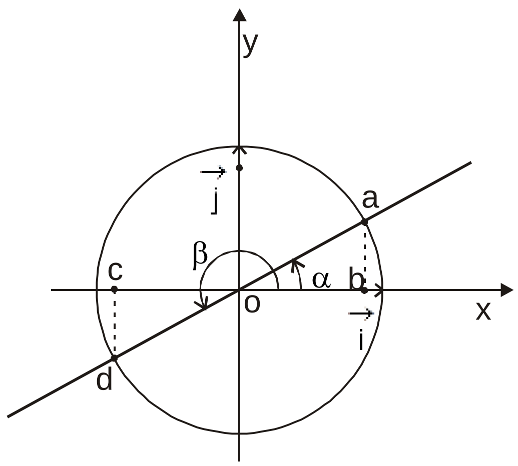


De (1) y (2) observamos que con sólo estudiar la tangente para ángulos de I_c y IV_c quedan cubiertas todos los puntos de la recta x=1 que relacionado con el eje “y” nos permite determinar que:

Im(f) =R

c) Biyectividad y periodicidad

$a(a_1;a_2)$
$d(d_1;d_2)$



Además sabemos que: a_2 = sen α y a_1 = cos α

Si consideramos entonces $\beta = \alpha + \pi$ resulta el punto **d** simétrico de **a** respecto de o, luego:

$d_2 = \text{sen}\ \beta \qquad\qquad d_1 = \cos\ \beta$

como:

$$\left.\begin{array}{r} d_2 = -a_2 \\ d_1 = -a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\beta = \text{sen}(\alpha + \pi) = -\text{sen}\alpha \\ \cos\beta = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \end{array}\right.$$

Entonces:

$$\boxed{\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}\alpha}$$

En conclusión:

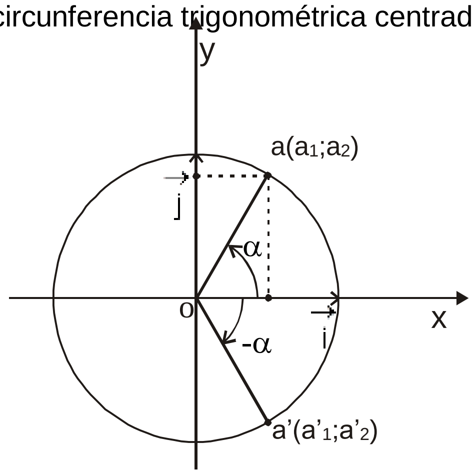
La función tangente es PERIÓDICA de período π

Por ser una función periódica no es inyectiva por lo tanto:

$f(x) = \text{tg}\ x$ **NO ES BIYECTIVA**

d) Paridad:

Consideremos una circunferencia trigonométrica centrada en un sistema $\{o; \vec{i}; \vec{j}\}$ y los ángulos α y $\beta = -\alpha$



$$f(-\alpha) = \text{tg}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} \underset{(1)}{=} \frac{-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\alpha$$

(1) Por ser la función Seno impar, y la función Coseno par

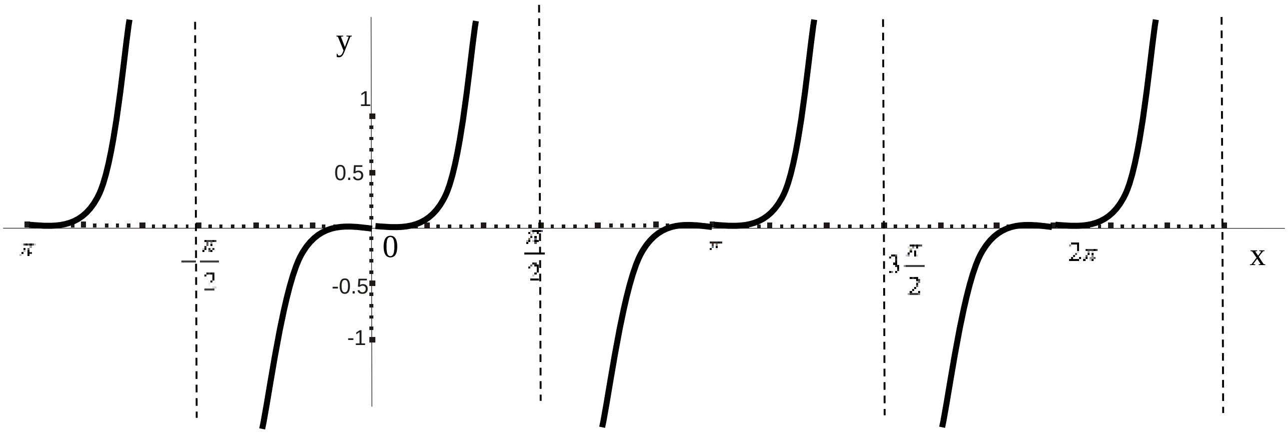
Entonces:

$$\boxed{\text{tg}\alpha = -\text{tg}(-\alpha)}$$

Luego:

La función tangente es IMPAR, por lo tanto su gráfica resulta SIMÉTRICA RESPECTO DEL PUNTO (0; 0)

e) Gráfica de la función tangente



f) Crecimiento:

Dejamos al lector el estudio del crecimiento de la función tangente en el período $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

g) Intersección con los ejes

- Intersección con el eje x $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi$ con $k \in Z$, los puntos $(k\pi;0) \in G_f$
- Intersección con el eje y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow tg0 = 0 \Rightarrow (0;0) \in G_f$

ACTIVIDADES:

9) Representa gráficamente e indica dominio y recorrido de la siguiente funcione

$$f(x) = -tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

10) Dada $f:\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right) \rightarrow R\,/\ \ f(x) = 2tg\ x - 1$, determina:

a) gráfica de f(x)
b) un intervalo donde *f* es creciente.
c) la gráfica de $g(x)/g(x) = |f(x)|$
d) $z/z = f(\pi) + f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

11) Calcula $\cos\beta$ y $\text{sen}\beta$ sabiendo que $tg\beta = \frac{4}{3}$ y $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$

12) Comprueba las siguientes identidades:

a) $$\frac{1 + tg^2\alpha}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

b) $$\text{sen}\alpha.\left(tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right) = \frac{1}{\cos\alpha}$$

CAPITULO 4: OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE USO FRECUENTE

I. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Sabemos que una función, si es periódica, no es biyectiva, luego no admite función inversa.

En particular las funciones trigonométricas por ser periódicas no tienen inversa. Sin embargo es posible restringir los dominios de dichas funciones, de tal manera que resulten biyectivas. Entonces llamamos **funciones trigonométricas inversas**, a las inversas de las funciones trigonométricas restringidas a dominios convenientes y adoptados convencionalmente de la forma que se indica a continuación:

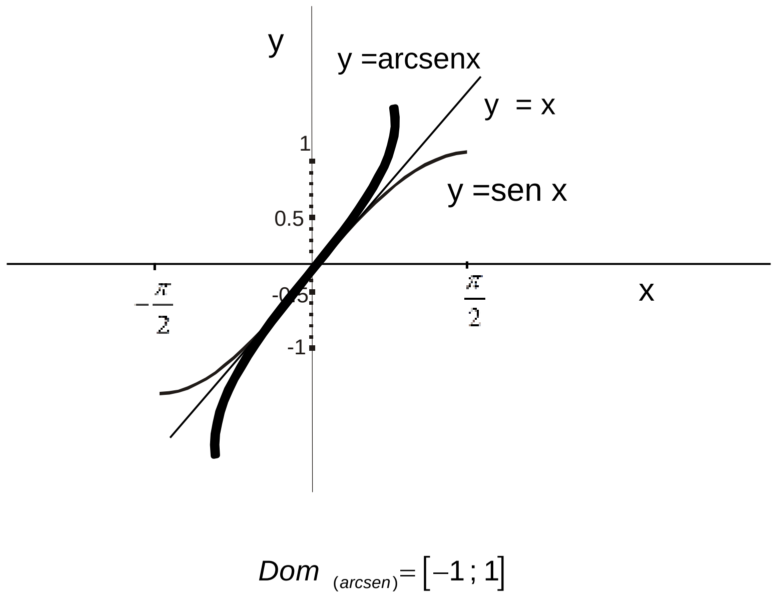
a) Se llama función **arco seno** y la indicamos **arcsen** a la inversa de la función seno tomando como dominio de definición de la función seno el intervalo:

$$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

es decir:

$$\operatorname{arcsen} x = y \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x;\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

De la gráfica de la función seno y de la gráfica de la función inversa de una función dada, resulta que la gráfica de la función **arco seno** es :



$$Dom_{\,(arcsen)} = [-1\,;\,1]$$

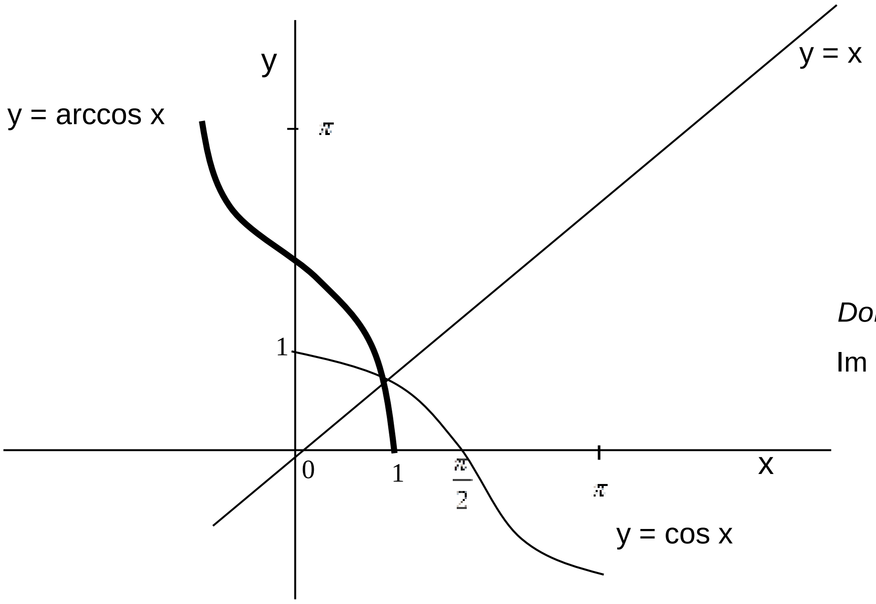
$$\operatorname{Im}_{\,(arcsen)} = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

b) Se llama función **arco coseno** y la indicamos **arccos** a la inversa de la función coseno tomando como dominio de definición de esta última el intervalo $[0;\pi]$.

Es decir

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x;\ 0 \le y \le \pi$$

La gráfica resultante se muestra en la siguiente figura:



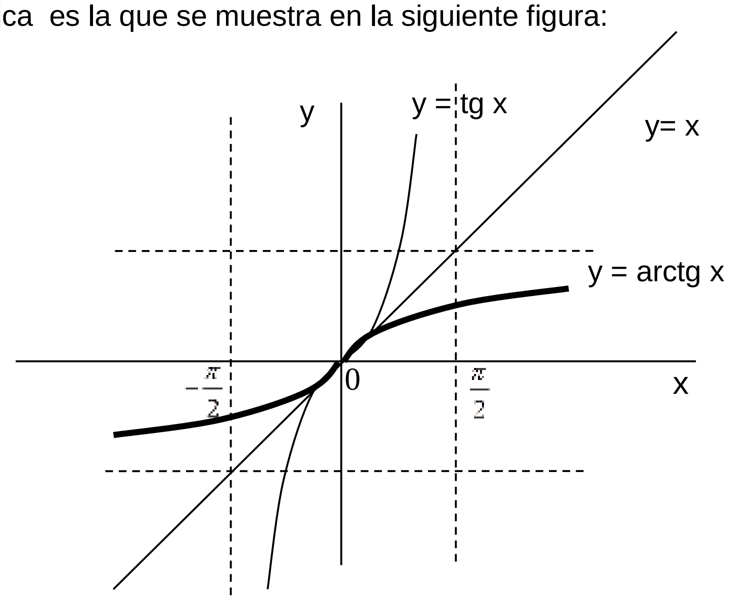
$Dom_{\,(\text{arccos})} = [-1\,;1]$

$Im_{\,(\text{arccos})} = [0;\ \pi]$

c) Se llama **arco tangente** y la indicamos **arctg** a la inversa de la función tangente, tomando como dominio de definición para ésta última, el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Es decir: $\quad \text{arctg}x = y \Leftrightarrow \text{tg}y = x;\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

La gráfica es la que se muestra en la siguiente figura:



$Dom_{\,(arctg)} = R$

$Im_{\,(arctg)} = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

ACTIVIDAD:

1) Calcula el valor de *x* empleando tu calculadora

a) $x = \text{arcsen}\dfrac{1}{2}$

b) $x = \arccos\dfrac{2}{3}$

c) $x = \cos\left[\text{arcsen}\dfrac{2}{7}\right]$

d) $x = \dfrac{\text{arcsen}\dfrac{1}{2} + \arccos 0}{\text{arcsen}1}$

> ***Recuerda:***
>
> En tu calculadora observarás que las funciones circulares inversas se indican:
>
> - Función arc sen $\longrightarrow$ $\sin^{-1}$
> - Función arc cos $\longrightarrow$ $\cos^{-1}$
> - Función arc tg $\longrightarrow$ $\tan^{-1}$

II. FUNCIONES RECÍPROCAS

Habiendo definido las funciones seno, coseno y tangente pasamos ahora a definir sus correspondientes funciones recíprocas, de las siguiente manera:

Función Cosecante:

> Se llama **función cosecante** de un número "*x*", y la indicamos **cosec *x*,** a la recíproca de la función seno.

Es decir:

$$\text{cosec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

$$\text{Dom}_{(\text{cosec})} = \mathbb{R} - \{x / x = k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Im}_{(\text{cosec})} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

Función Secante:

Se llama **función secante** de un número "*x*", y la indicamos **sec *x***, a la recíproca de la función coseno.

Es decir:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$Dom_{(sec)} = R - \left\{ x / x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z \right\}$$

$$Im_{(sec)} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

Función Cotangente:

Se llama **función cotangente** de un número "*x*", y la indicamos **ctg *x***, al cociente entre el coseno de x y el seno de x.

Es decir

$$ctgx = \frac{\cos x}{senx}$$

$$Dom_{(ctg)} = R - \{x / x = k\pi; k \in Z\}$$

$$Im_{(ctg)} = R$$

ACTIVIDADES

2) Calcula todas las funciones trigonométricas del $\hat{\alpha}$, sabiendo que $sen\alpha = 0{,}65$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3) Demuestra las siguientes identidades:

a) $1+\text{ctg}^2x=\text{cosec}^2x$

b) $\sec^2 x\cdot\text{cosec}^2x=\sec^2 x+\text{cosec}^2x$

c) $\dfrac{\sec x-\text{cosec}x}{\sec x+\text{cosec}x}=\dfrac{\text{tg}x-1}{\text{tg}x+1}$

d) $\dfrac{\text{tg}x-\text{sen}x}{\text{sen}^3x}=\dfrac{\sec x}{\cos x+1}$

e) $\sec x\cdot\text{cosec}x=\text{ctg}x+\text{tg}x$

f) $2\,\text{cosec}\alpha=\dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

g) $\dfrac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}+\dfrac{\text{ctg}\alpha}{\text{ctg}\alpha-\text{ctg}\beta}=1$

h) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\text{cosec}\alpha}=\text{sen}\alpha+\text{tg}\alpha$

i) $(\text{sen}\beta+\cos\beta)^2+(\text{sen}\beta-\cos\beta)^2=2$

4) Calcula

a) cosec β, sabiendo que $\beta\in II_c$ y cos β = -0,4

b) sec α, si sen α= - 0,2 y tg $\alpha > 0$

c) ctg ω, si cos ω = 0,5 y $\omega\in IV_c$

d) cosβ y senβ ,sabiendo que la cosec$\beta=\dfrac{5}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

5) Si: tg β = - 0,5 y β es un ángulo del segundo cuadrante, calcula el valor exacto *de*: sen β + cosβ.

III. REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

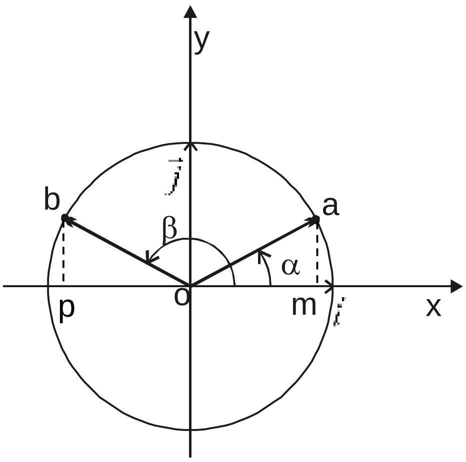
Teniendo en cuenta los gráficos que se presentan a continuación en la circunferencia trigonométrica, resuelve la siguiente actividad:

¿Qué relación puede establecerse entre las funciones trigonométricas de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ en cada caso?

Caso I

Consideramos que $\hat{\alpha}$ *y* $\hat{\beta}$ son suplementarios es decir $\hat{\beta} = \pi - \hat{\alpha}$; $\forall \hat{\alpha}$

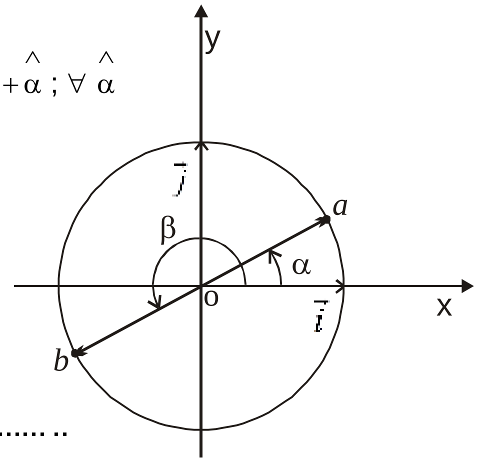
Además supondremos, el caso en el que $\hat{\alpha} \in I_c$; $\hat{\beta} \in II_c$



Analiza la congruencia de los $\overset{\Delta}{obp}$ y $\overset{\Delta}{oam}$, concluye y completa:

$$\operatorname{sen}\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \cos\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Caso II:



Supongamos que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ difieren en π, es decir $\hat{\beta} = \pi + \hat{\alpha}$; $\forall \hat{\alpha}$

En este caso que $\hat{\alpha} \in I_c$; $\hat{\beta} \in III_c$

Analiza y completa, teniendo presente lo efectuado en el caso I

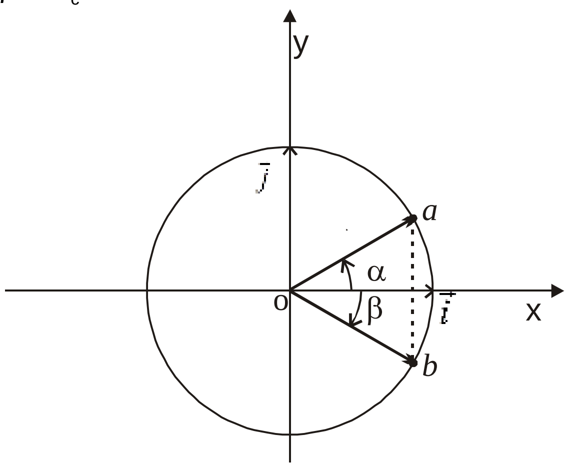
$$\text{sen}\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \; \cos\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{tg}\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Caso III:

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios a una vuelta u opuestos, supongamos

$$\hat{\beta} = 2\pi - \hat{\alpha} \; ; \; \forall \hat{\alpha}$$

En este caso $\hat{\alpha} \in I_c$; $\hat{\beta} \in IV_c$



Analiza nuevamente y completa:

$$\text{sen}\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \; \cos\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{tg}\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Observación: El análisis se ha realizado para $\hat{\alpha} \in I_c$, pero son válidas para cualquier ángulo; habría que estudiar, por separado, el caso en el que $\hat{\alpha}$ pertenezca al segundo, al tercero o al cuarto cuadrante; para poder generalizar las conclusiones obtenidas. Suponemos que la tarea está realizada.

Entenderemos por "reducir al primer cuadrante" la tarea de expresar las funciones trigonométricas de un ángulo del II_c , III_c o IV_c en relación a las funciones trigonométricas de un ángulo del I_c , a partir de propiedades que los vinculen (suplementarios, difieren en π, etc.)

ACTIVIDADES

6) Siendo $\alpha \in I_c$, analiza y completa:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \ldots\ldots \quad \cos(-\alpha) = \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = \ldots\ldots$$

7) Verifica las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{sen}x} = \operatorname{tg}x + 1$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha - 1$

c) $\dfrac{1 + \cos(2\pi - \theta)}{\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{tg}^2(\pi + \theta)}{\sec\theta - 1}$

d) $2\operatorname{tg}w.\sec w = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}(\pi - w)} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}w + 1}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos(-\beta)} + \dfrac{\cos\beta}{1 - \operatorname{sen}(\pi + \beta)} = \sec\beta$

Algunas identidades trigonométricas importantes

Teoremas de adición

Seno de la suma de dos ángulos

$$sen(\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta + sen\ \beta \cdot \cos\alpha$$

Seno de la diferencia de dos ángulos

$$sen(\alpha - \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta \cdot \cos\alpha$$

Coseno de la suma de dos ángulos

$$cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta \cdot sen\ \alpha$$

Coseno de la diferencia de dos ángulos

$$cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha \cdot \cos\beta + sen\ \beta \cdot sen\ \alpha$$

Las demostraciones de estas identidades no se desarrollaran en este curso

ACTIVIDADES

8) A partir de las expresiones conocidas del $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$ obtiene una expresión para $\tan(\alpha+\beta)$ en función de $\tan\alpha$ y $\tan\beta$.

9) Verifica las siguientes identidades:

a) $sen\ 2\alpha = 2\ .\ sen\ \alpha\ .cos\ \alpha$

b) $cos^2 2\alpha = 1 - 4\ .sen^2\alpha.cos^2\alpha$

c) $\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

10) ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

a) $tg(15º) = 2 - \sqrt{3}$

b) $sen(x+y) - sen(x-y) = 2\ cos(x)\ sen(y)$

c) $1 + sen(2x) = \left(sen(x) + cos(x)\right)^2$

11) Calcula $\cos(\alpha+\beta)$, si $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\beta) = 2$ y siendo α del tercer cuadrante

CAPITULO 5: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Ya conocemos cómo pueden aplicarse las definiciones del seno, coseno y tangente en la resolución de triángulos rectángulos. Sin embargo, pueden presentarse situaciones problemáticas, en las que sea necesario obtener las medidas de ángulos y lados de triángulos no rectángulos, a los que llamaremos triángulos oblicuángulos.

¿Qué significa resolver un triángulo?

Resolver un triángulo es encontrar las medidas de los lados y ángulos del mismo, a partir de determinados datos y utilizando fórmulas de la Trigonometría que vinculen los datos. Utilizaremos para resolver triángulos, además de los conceptos y teoremas ya vistos en años anteriores, dos nuevos teoremas: “Teorema del seno” y “Teorema del coseno”.

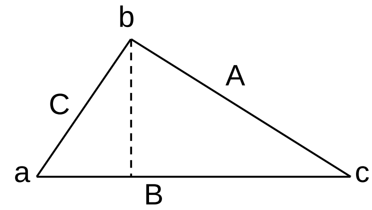
Si bien para resolver un triángulo necesitamos tener determinada información sobre sus lados y ángulos, los criterios de congruencia de triángulos nos permitirán asegurar qué datos, en particular, debemos conocer para resolverlos:

Caso 1 : un lado y dos ángulos adyacentes a él.

Caso 2 : dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Caso 3 : dos lados y el ángulo comprendido.

Caso 4 : tres lados.



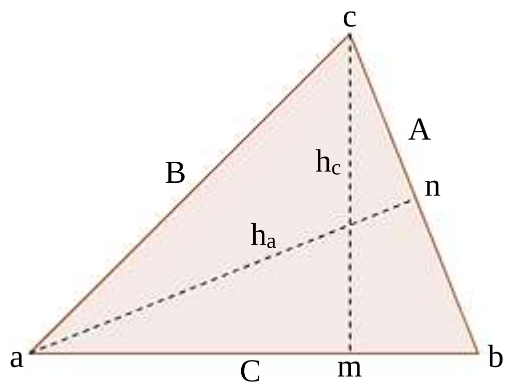
Observación:

Se puede demostrar que existen situaciones en que la resolución de los mismos no nos da un único triángulo. Existen casos en los que existen dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo.

TEOREMA DEL SENO

En cualquier triángulo abc se cumple que:

$$\boxed{\frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}}}$$



Demostración:

En el triángulo abc:

- trazamos la altura h_c correspondiente al lado ab. Como los triángulos amc y bmc son rectángulos, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\widehat{a} = \dfrac{h_c}{B} \Rightarrow h_c = B \cdot \operatorname{sen}\widehat{a} \\ \operatorname{sen}\widehat{b} = \dfrac{h_c}{A} \Rightarrow h_c = A \cdot \operatorname{sen}\widehat{b} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot \operatorname{sen}\widehat{b} = B \cdot \operatorname{sen}\widehat{a} \Rightarrow \frac{A}{\operatorname{sen}\widehat{a}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\widehat{b}} \qquad (1)$$

- trazamos la altura h_a correspondiente al lado bc, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\widehat{b} = \dfrac{h_a}{C} \Rightarrow h_a = C \cdot \operatorname{sen}\widehat{b} \\ \operatorname{sen}\widehat{c} = \dfrac{h_a}{B} \Rightarrow h_a = B \cdot \operatorname{sen}\widehat{c} \end{array}\right\} \Rightarrow B \cdot \operatorname{sen}\widehat{c} = C \cdot \operatorname{sen}\widehat{b} \Rightarrow \frac{B}{\operatorname{sen}\widehat{b}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\widehat{c}} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que:

$$\boxed{\frac{A}{\operatorname{sen}\widehat{a}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\widehat{b}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\widehat{c}}}$$

Nota:

Lo hemos demostrado para un triángulo acutángulo. Para un triángulo obtusángulo la demostración se realiza de la misma manera.

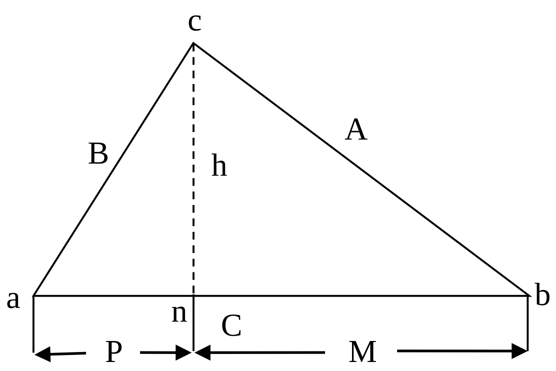
TEOREMA DEL COSENO

En cualquier triángulo ABC se cumple que:

1) $A^2 = B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot \cos\widehat{a}$

2) $B^2 = A^2 + C^2 - 2 \cdot A \cdot C \cdot \cos\widehat{b}$

3) $C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\widehat{c}$



Demostración:

Demostraremos solamente la primera relación (las otras dos se demuestran de manera análoga):

En el triángulo abc trazamos la altura h correspondiente al lado ab. Ésta divide a la base ab en dos segmentos de longitudes P y M. Como los triángulos anc y bnc son rectángulos, se tiene que:

$$A^2 = h^2 + M^2 \Rightarrow h^2 = A^2 - M^2 \qquad (1)$$

$$B^2 = h^2 + P^2 \Rightarrow h^2 = B^2 - P^2 \qquad (2)$$

De (1) y (2), se tiene:

$$A^2 - M^2 = B^2 - P^2 \Rightarrow A^2 = B^2 + M^2 - P^2 \qquad (3)$$

Sustituyendo M = C – P en (3), resulta:

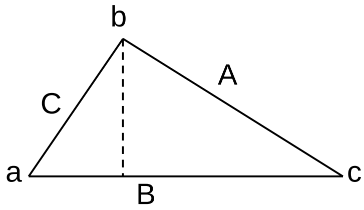
$$A^2 = B^2 + (C - P)^2 - P^2 = B^2 + C^2 - 2.C.P + P^2 - P^2 = B^2 + C^2 - 2.C.P \qquad (4)$$

Sustituyendo $P = B \cdot \cos\widehat{a}$ en (4), se tiene que:

$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot \cos\widehat{a}}$$

Ejemplos

Resuelve el triángulo abc, en cada caso:



a) $\widehat{a} = 60^o; \widehat{b} = 40^o; C = 5\,cm$

Solución:

$$\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = 180^o \Rightarrow \widehat{c} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^o$$

Aplicando el teorema del seno, se hallan los lados A y B:

$$\frac{A}{\text{sen}\,60^o} = \frac{5}{\text{sen}\,80^o} \Rightarrow A = \frac{5 \cdot \text{sen}\,60^o}{\text{sen}\,80^o} \approx 4{,}397\ cm$$

$$\frac{B}{\text{sen}\,40^o} = \frac{5}{\text{sen}\,80^o} \Rightarrow B = \frac{5 \cdot \text{sen}\,40^o}{\text{sen}\,80^o} \approx 3{,}264\ cm$$

b) $\widehat{a} = 40^o; B = 7\,cm; C = 10\,cm$

Solución:

Aplicando el teorema del coseno, se determina el lado A:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot \cos\widehat{a}$$

$$A^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos 40^o \Rightarrow A = \sqrt{7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos 40^o} = 6{,}46\,cm$$

El ángulo $\widehat{b}$ se determina aplicando el teorema del seno:

$$\frac{6{,}46}{\text{sen}\,40^o} = \frac{7}{\text{sen}\,\widehat{b}} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{b} = \frac{7 \cdot \text{sen}\,40^o}{6{,}46} \approx 0{,}6965 \Rightarrow \widehat{b} = \text{arc sen } 0{,}6965 = 44^o 08' 54''$$

c) $A = 35m; B = 20m; C = 40m$

Solución:

Aplicando el teorema del coseno:

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2 \cdot A \cdot C \cdot \cos\widehat{b} \Rightarrow \cos\widehat{b} = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2 \cdot A \cdot C} = \frac{35^2 + 40^2 - 20^2}{2 \cdot 35 \cdot 40} = 0,866 \Rightarrow \widehat{b} = \arccos 0,866 \approx 30º$$

Aplicando el teorema del seno, se determina el ángulo $\widehat{a}$:

$$\frac{35}{\operatorname{sen}\widehat{a}} = \frac{20}{\operatorname{sen} 30º} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{a} = \frac{35 \cdot \operatorname{sen} 30º}{20} = 0,875 \Rightarrow \widehat{a} = \operatorname{arc\,sen} 0,875 = 61º02'42''$$

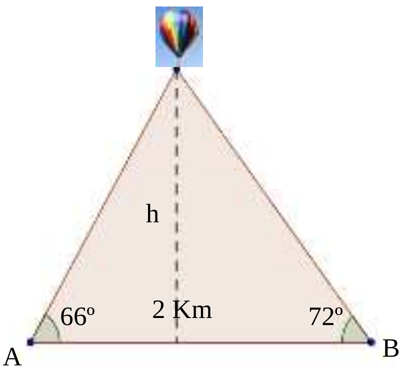
Finalmente, se halla el ángulo $\widehat{c}$:

$$\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = 180º \Rightarrow \widehat{c} = 180º - \widehat{a} - \widehat{b} = 180º - 61º02'42'' - 30º = 88º57'18''$$

ACTIVIDADES

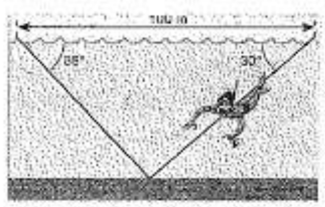
7) Dos individuos A y B observan un globo que se eleva verticalmente. La distancia entre los individuos es de 2 km. En cierto momento, los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 66º y 72º, respectivamente. Determina a que altura se encuentra el globo, en ese momento, y la distancia a cada observador.

Rta: 2,6 km

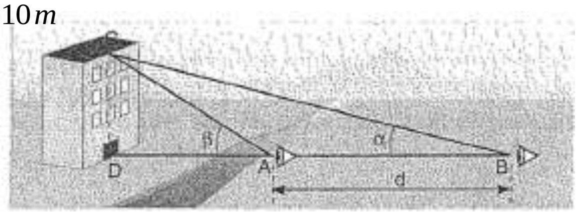


8) Un buceador desciende al fondo de un lago para recoger un objeto siguiendo una trayectoria rectilínea que forma un ángulo de 30º con la superficie del lago. Cumple su objetivo y regresa saliendo a la superficie siguiendo otra trayectoria rectilínea que forma un ángulo de 35º con la superficie del lago. Sabiendo que la distancia entre el punto de entrada y el de salida es de 100 metros, averigua cual es la profundidad del lago.

Rta: 31,64 m



9) Calcula la altura del edificio de la figura si $\alpha = 15º$, $\beta = 20º$ y $d = 10m$



Rta:10,16 m

10) Un barco A envía un S.O.S. y las señales son recibidas por dos estaciones de radio B y C, que distan entre sí 80 km. La visual que va desde la estación B al barco forma un ángulo de 80º con la visual que va de la estación B a la C y la visual que va desde la estación C al barco forma un ángulo de 70º con la visual que va de la estación C a la B. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

Rta: 157,57 km y 150,35k m

11) Sabiendo que la longitud del lado de un octógono regular es 12 cm. Determina:

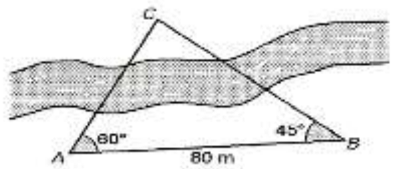
a) El radio de la circunferencia circunscrita. *Rta: 15,68 cm*

b) El área del octógono. *Rta: 695,52 cm^2*

12) Determina los ángulos de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 6 y 12 cm.

Rta: 53° 07´ 48´´ y 126° 52´ 12´´

13) Halla las distancias AC y BC *Rta: 71,73 m y 58,56 m*



14) Hallar la distancia c = AB. *Rta: 334,28 m*