Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Límite y Continuidad

4º Año

Cód. 1408-19

Prof. Silvia Amicozzi
Prof. Silvia Belletti
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

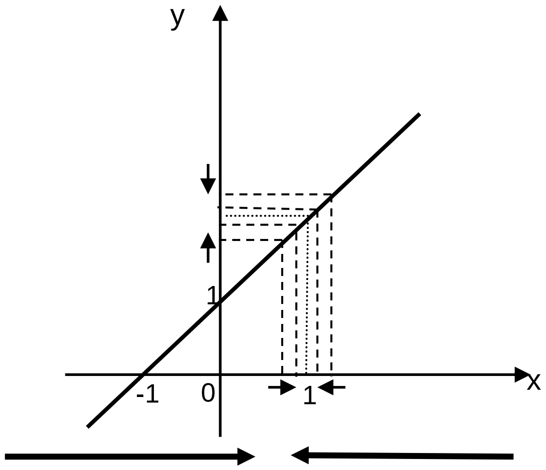
LIMITE FINITO

- <u>IDEA INTUITIVA DE LÍMITE</u>:

Presentamos algunas funciones con las que nos proponemos investigar qué sucede con las imágenes que asume la función para valores del dominio cercanos a 1. Es decir, nos interesa conocer el comportamiento de f(x) cuando x se aproxima a 1 tanto como se quiera.

$f_1(x) = x + 1$

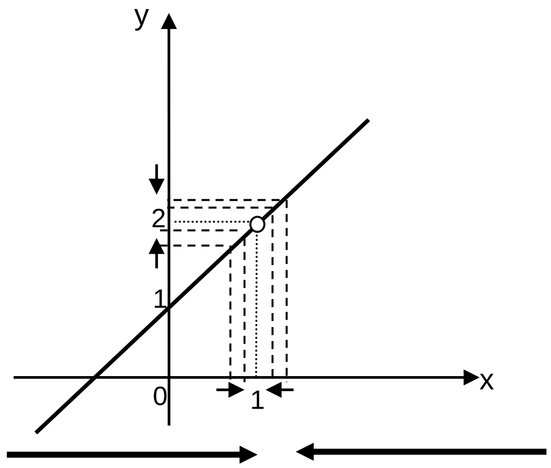
$Dom_{f_1} = R$



x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f_2(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1

$f_2(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (Observa que $f_2(x) = x + 1 \;\forall x \neq 1$)

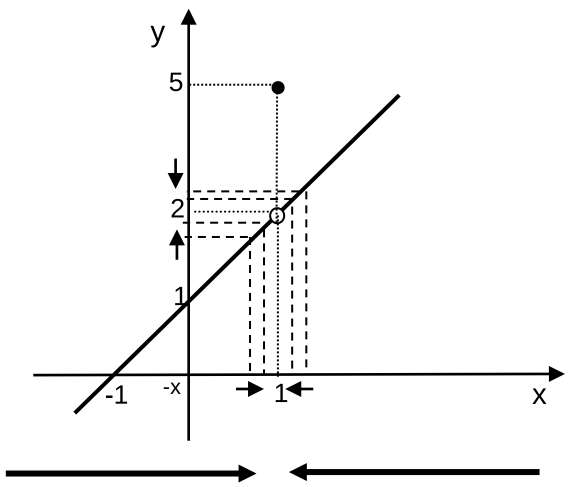
$Dom_{f_2} = R - \{1\}$



x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f_2(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\nexists$	2,0001	2,001	2,01	2,1

$$f_3(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$Dom_{f_3} = R$



x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f_3(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	5	2,0001	2,001	2,01	2,1

En los tres casos analizados podemos observar gráficamente o mediante las respectivas tablas de valores, que cuando x toma valores próximos a 1 las imágenes se aproximan a 2, independientemente de lo que suceda con cada función en ese punto.
Para referirnos a este comportamiento decimos que 2 *es el **límite** de f(x) cuando x se aproxima o tiende a* 1, y lo indicamos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Esto significa que cuando "x" está suficientemente cerca (pero es distinto) de 1, las imágenes están suficientemente cerca de 2.

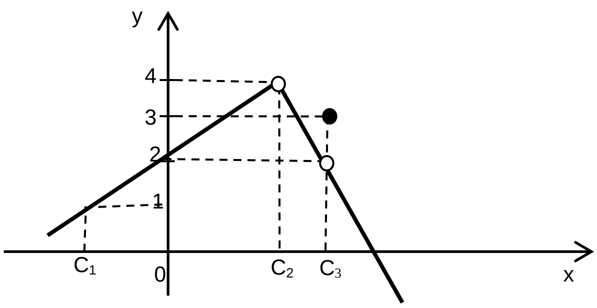
En general, **dada una función f(x) cualquiera y un número c** diremos que:

El límite de f(x), cuando x tiende a c, es el número L si los valores de f (x) se aproximan a L tanto como se desee cuando los valores de x están suficientemente próximos a c.
El número **L** recibe el nombre de ***límite finito***.
En símbolos se indica:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

<u>Ejercicio propuesto</u>

1) Evalúa gráficamente el límite de f (x) para los valores de "c" que se indican:



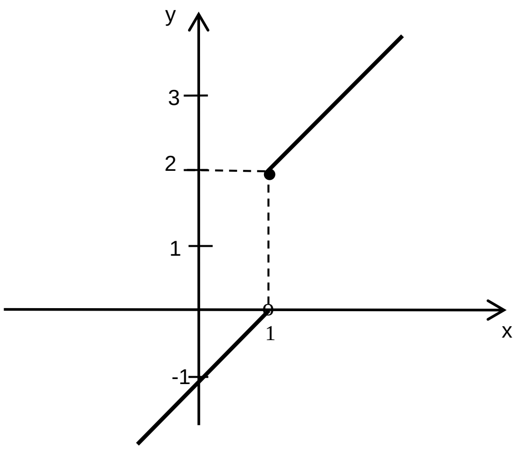
El límite de una función en un punto aporta información acerca del comportamiento de la misma en las proximidades de dicho punto

a) $\lim_{x \to c_1} f(x) = \ldots\ldots\ldots$ b) $\lim_{x \to c_2} f(x) = \ldots\ldots\ldots$ c) $\lim_{x \to c_3} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

<u>Analicemos otros ejemplos:</u>

➔ Sea: $f_4(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$\text{Dom}_{f_4} = R$



Observemos el comportamiento de la función para valores próximos a c = 1.
Vemos que las *imágenes se aproximan a 2 cuando x tiende a 1 considerando valores mayores que él* (decimos que se aproxima a 1 por derecha y lo indicamos $x \to 1^{+}$); e*n cambio, si x tiende a 1 mediante valores menores* (se aproxima a 1 por izquierda: $x \to 1^{-}$) *las imágenes tienden a 0.*

Cada uno de los comportamientos anteriores se expresa mediante los llamados ***límites laterales*** y se indican:

$$\lim_{x \to 1^{+}} f_4(x) = 2$$
$$\lim_{x \to 1^{-}} f_4(x) = 0$$

Los límites laterales ilustran el comportamiento de la función a cada lado del valor de análisis

En general decimos que:

El **límite lateral izquierdo** de f (x) cuando x tiende a c es el número L_1, si los valores de f(x) se aproximan a L_1 tanto como se desee cuando x se acerca suficientemente a c mediante valores menores que c. Lo representamos: $\lim_{x \to c^{-}} f(x) = L_1$

El **límite lateral derecho** de f (x) cuando x tiende a c es el número L_2, si los valores de f(x) se aproximan a L_2 tanto como se desee cuando x se acerca suficientemente a c mediante valores mayores que c. Lo representamos: $\lim_{x \to c^{+}} f(x) = L_2$

Volviendo al ejemplo anterior, ¿qué puedes decir del $\lim_{x \to 1} f_4(x)$?.....……………………………………

Qué relación intuyes entre el límite de una función en un punto y los límites laterales de dicha función en el mismo punto?

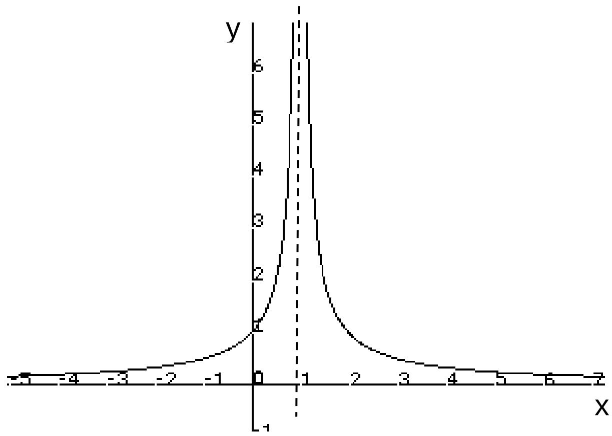
....

Concluimos entonces que:

El límite de una función en un punto existe si y solo sí los dos límites laterales existen y son iguales.

Sea $f_5(x) = \left| \dfrac{1}{x-1} \right|$

$\text{Dom}_{f_5} = R - \{1\}$

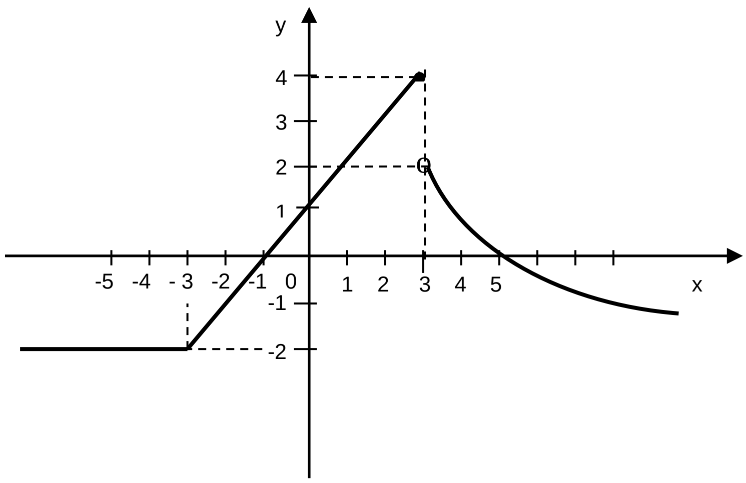


Para esta función, a medida que consideramos valores próximos a 1 por derecha o izquierda las imágenes no se acercan a ningún valor determinado, sino que crecen sin tope. Decimos entonces que la función tiene en c=1 un ***comportamiento no acotado*** y, por supuesto, no tiene límite finito. Este comportamiento será objeto de estudio más adelante.

> *Observación:*
> *El límite finito de una función en un punto puede existir o no, independientemente de que la función esté o no definida en el punto.*

Ejercicios propuestos

2) Determina el valor de cada límite indicado :



a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$

g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

i) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$

j) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) =$

3) Representa la función indicada y completa:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) f(-2)= b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

f) f(0)= g) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) =$ h) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ i) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ j) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$

4) Representa gráficamente una función que cumpla, en forma simultánea, con las condiciones indicadas en cada apartado

a)
- $Dom_f = \Re - \{0\}$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -2$
- $f(-2) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

b)
- $Dom_f = [-5\,;5\,]$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$
- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) \neq f(5)$
- $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = f(-5) = 1$
- $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

5) Coloca Verdadero o Falso justificando tu respuesta:

a) Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ resulta $f(c) = g(c)$

b) Si existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, existe f(c).

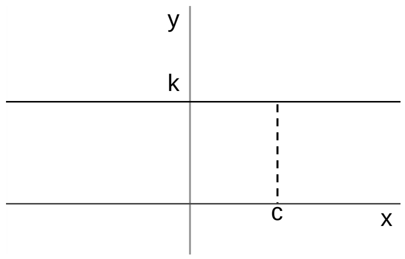
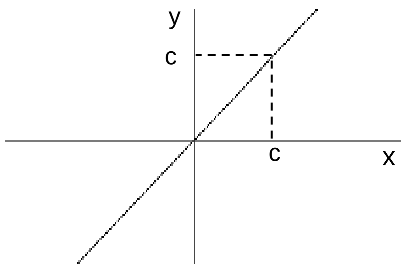
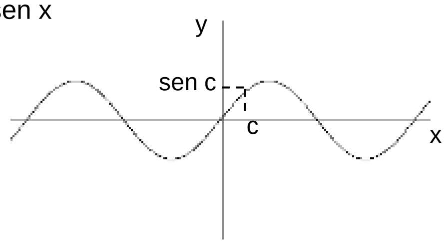
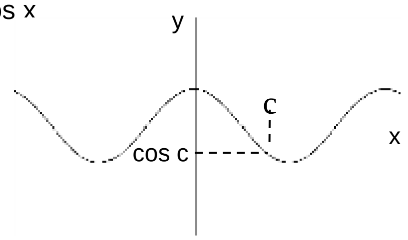
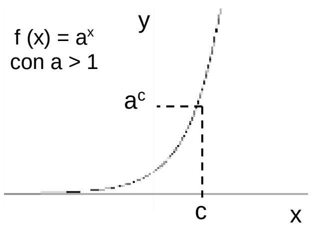
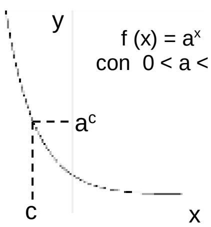
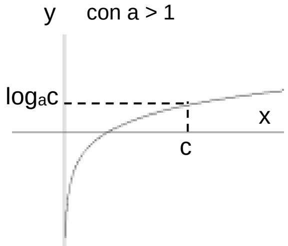
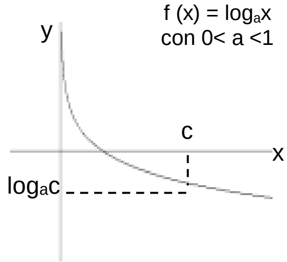
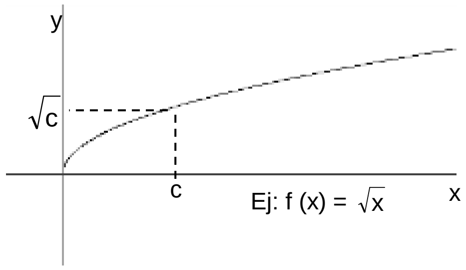
c) Si $\exists f(5)$, entonces $\exists \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

d) Si $c \in Z$, $\nexists \lim\limits_{x\to c} [\,x\,]$.

Para tener en cuenta:
Si bien es posible estimar el límite de una función en un punto a través de un gráfico o de una tabla de valores, no podemos tener la certeza de que dicho valor sea realmente el límite que deseamos calcular. Para tener seguridad en el cálculo de un límite es necesario utilizar definiciones o propiedades que den validez al resultado obtenido.

- LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA:

Para las siguientes funciones y a partir del análisis de su comportamiento, admitimos que el límite de la función para $x \to c$ se obtiene por sustitución directa. Es decir: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Función constante. f(x)=k  $\lim\limits_{x\to c} k = k$	*Función identidad* f(x)=x  $\lim\limits_{x\to c} x = c$
Función seno f(x)=sen x  	*Función coseno* f(x)=cos x  $\lim\limits_{x\to c} \cos x = \cos c$
Función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 1$  $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$  $\lim\limits_{x\to c} a^x = a^c$	*Función logarítmica* $f(x) = \log_a x$ con $a > 1$  $f(x) = \log_a x$ con $0< a <1$  $\lim\limits_{x\to c} \log_a x = \log_a c$ (c>0)
Función raíz enésima  $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ $\quad (\forall n \in N - \{1\},\ \forall c$ si n es impar $\wedge\ \forall c > 0$ si n es par)	

Ejercicio propuesto

6) Resuelve los siguientes límites por sustitución directa:

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen} x =$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[5]{x} =$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x =$ g) $\lim\limits_{x\to 1} \log_3 x =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2} =$ d) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x =$ f) $\lim\limits_{x\to\sqrt{7}} x =$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} =$

- TEOREMAS SOBRE LIMITES

Sean $k \in \Re$, f y g funciones que tengan límite para $x \to c$, entonces son ciertas las siguientes propiedades

1) Si existe, el límite de una función para $x \to c$ es único.
2) $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$
3) $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$
4) $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\,.\,g(x)\right) = \lim\limits_{x\to c} f(x)\,.\,\lim\limits_{x\to c} g(x)$
5) $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$; siempre que $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
6) $\lim\limits_{x\to c}(k.f(x)) = k\,.\,\lim\limits_{x\to c} f(x)$

Ejemplos resueltos

1) Demostraremos que el límite de una función polinómica p(x) cuando $x \to c$ es el valor de la función en c. Es decir, $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$

Resolución:

Antes de comenzar, resultará muy útil demostrar que si $n \in N \wedge n > 1$ se cumple que $\lim\limits_{x\to c} x^n = c^n$

$$\lim_{x\to c} x^n = \underbrace{\lim_{x\to c}(x.x.x........x)}_{\text{n factores}} \underset{\text{Límite de un producto}}{=} \lim_{x\to c} x\,.\,\lim_{x\to c} x\,.\,\lim_{x\to c} x\,.........\lim_{x\to c} x \underset{\text{Límite de la función identidad}}{=} \underbrace{c.c.c.........c}_{\text{n factores}} = c^n$$

Consideremos ahora la función polinómica $p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$

$$\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c}\left(a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1.x + a_0\right) = \longrightarrow$$ Límite de la suma de funciones

$$= \lim_{x\to c}\left(a_n.x^n\right) + \lim_{x\to c}\left(a_{n-1}.x^{n-1}\right) + \dots\dots\dots + \lim_{x\to c}\left(a_1.x\right) + \lim_{x\to c} a_0 = \longrightarrow$$ Límite de una constante por una función

$$= a_n.\lim_{x\to c} x^n + a_{n-1}.\lim_{x\to c} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1.\lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0 = \longrightarrow$$ Límite de x^n
Límite de la constante

$$= a_n.c^n + a_{n-1}.c^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1.c + a_0 =$$
$$= p(c)$$

Ejemplo: $\lim_{x\to -1}\left(3x^3 - x^2 + 7x - 4\right) = 3.(-1)^3 - (-1)^2 + 7.(-1) - 4 = -3 - 1 - 7 - 4 = -15$

2) Demostraremos ahora que si $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional con $q(c) \neq 0$ entonces $\lim_{x\to c} r(x) = r(c)$

> *Recuerda*:
> Una función racional es aquella cuya ley es una división de polinomios

$$\lim_{x\to c} r(x) = \lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} \underset{\downarrow}{=} \frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)} \underset{\searrow}{=} \frac{p(c)}{q(c)} = r(c)$$

Límite de un cociente   Limites de funciones polinómicas

Ejemplo: $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2 - 5x + 8}{x^3 + x - 3} = \dfrac{3.2^2 - 5.2 + 8}{2^3 + 2 - 3} = \dfrac{10}{7}$

> *Observación:*
> *Todos los teoremas enunciados son válidos también para límites laterales*

Ejercicios propuestos

7) Si $\lim_{x\to c} f(x) = 8$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -3$ resulta $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x).g(x) - 3.g(x)}{f(x) + g(x)} = -3$. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

8) Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\left(\ln x + \sqrt[4]{x} - 4^x\right) =$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^2 - 4x + 2}{\left(x^2 - 1\right).e^x} =$

c) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x} - x.\cos\dfrac{\pi}{4}\right) =$

d) $\lim_{x\to 1} f(x)$, siendo $f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

9) Determina el valor de "h" de modo que exista el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} hx + 3 & \text{si } x \geq 1 \\ 4 - hx & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

Representa gráficamente esta función y corrobora la existencia del límite pedido.

10) Determina el valor de "a" para que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-5x^3 + ax^2 + 3x - 4}{2x^2 - ax + 2} = -4$

> *Recuerda:*
> *(fog)(x) = f[g(x)]*

➢ LÍMITE DE LA FUNCIÓN COMPUESTA:

Analicemos algunos ejemplos:

1) Dadas las funciones $g(x) = 5x - 3$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$, definimos $(fog)(x) = \sqrt[3]{5x - 3}$.

Queremos hallar $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{5x - 3}$.

Para calcular este límite podemos seguir el siguiente razonamiento:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cuando } x \to 1, \quad (5x-3) \to 2 \\ \text{Cuando } (5x-3) \to 2, \ \sqrt[3]{5x - 3} \to \sqrt[3]{2} \end{array}\right\} \text{Por lo tanto: } \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{5x - 3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} (5x - 3)} = \sqrt[3]{2}$$

2) Si consideramos ahora las funciones $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = 2^x$ resulta $(fog)(x) = 2^{(x^2+1)}$.

Con un razonamiento análogo al anterior podemos calcular el $\lim\limits_{x\to 3} 2^{(x^2+1)}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cuando } x \to 3, \text{ resulta } (x^2 + 1) \to 10 \\ \text{Cuando } (x^2 + 1) \to 10, \quad 2^{(x^2+1)} \to 2^{10} \end{array}\right\} \text{Por lo tanto: } \lim_{x\to 3} 2^{(x^2+1)} = 2^{\lim\limits_{x\to 3} (x^2+1)} = 2^{10}$$

Estos ejemplos ilustran el siguiente teorema:

> Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$,
>
> resulta $\lim\limits_{x\to c} f\left[g(x)\right] = f\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$

> *Recuerda:*
> *Todos los teoremas enunciados son válidos también para límites laterales*

Ejercicio propuesto

11) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+3} =$

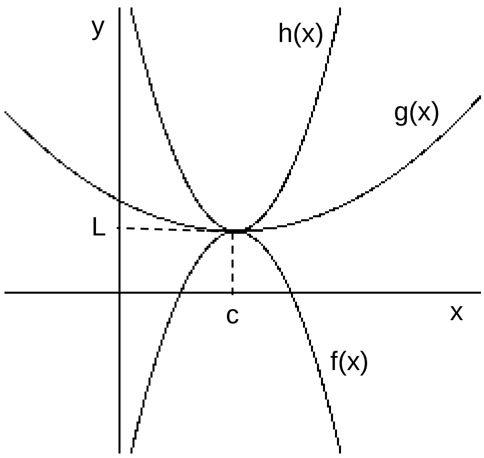
b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos\,(3x - \pi) =$

c) $\lim\limits_{a \to 0} \left[\log_2\left(3\,a^4 + 1\right)\right] =$

d) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(4y) + a}{3 + y} =$

➢ <u>TEOREMA DE INTERCALACIÓN</u>:

Sean f (x), g (x) y h (x) funciones que satisfacen $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x$ cercano a c (excepto quizás en c), si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} g(x) = L$



Desde el punto de vista geométrico el teorema es intuitivamente cierto. En la representación de la izquierda observamos que si f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) para todo x cercano a c, entonces la gráfica de g se encuentra entre las gráficas de f y h en ese intervalo.

Por lo tanto si f y h tienen el mismo límite L cuando x tiende a c, es evidente que g también tiene el límite L.

COROLARIO:

Si las imágenes de dos funciones coinciden en las inmediaciones de un punto c (salvo quizás en c) entonces los límites de ambas para $x \to c$ *coinciden.*

➢ <u>INDETERMINACIONES DEL TIPO</u> $\dfrac{0}{0}$

Hemos resuelto límites por sustitución directa aplicando los teoremas anteriores. Sin embargo, algunos límites de cocientes de funciones no pueden resolverse por este medio debido a que el límite del divisor es 0.

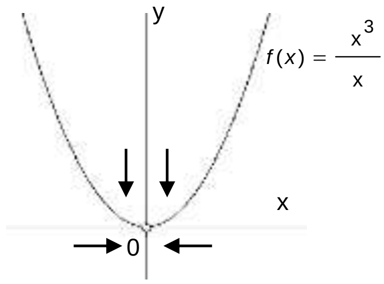
En particular resulta de interés analizar límites de cocientes de funciones cuyos respectivos límites son nulos, o sea, límites de la forma $\frac{0}{0}$.

Consideremos por ejemplo:

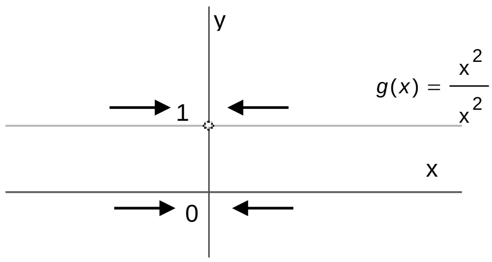
a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} =$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} =$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^3} =$

Estos límites no pueden calcularse por sustitución directa, pero es posible encontrar funciones que compartan las mismas imágenes que las funciones dadas $\forall\, x \neq 0$ (que es el valor de análisis) y que, por el corolario del teorema de intercalación, nos permitan calcular el límite de otra manera. Resulta entonces:

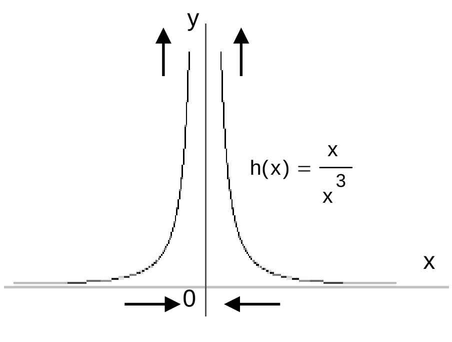
a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$



b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$



c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \nexists$ (la función presenta un comportamiento no acotado alrededor de 0)

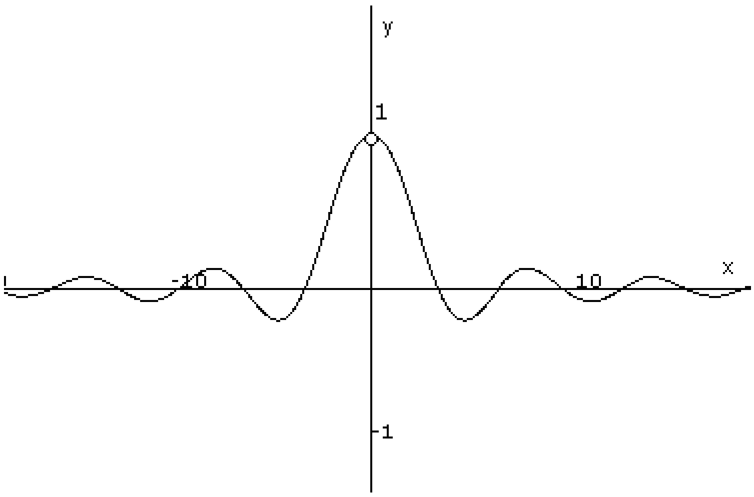


Observemos que no es posible asegurar a priori qué sucede con un límite que presenta la forma $\frac{0}{0}$, por eso decimos que $\frac{0}{0}$ es una ***forma indeterminada***.

➔ UN LÍMITE INDETERMINADO DE LA FORMA $\frac{0}{0}$ DE ESPECIAL INTERÉS:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{0}}{\underbrace{x}_{0}} =$$

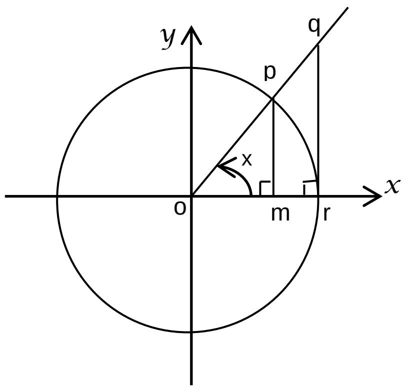
Para analizar el comportamiento de esta función alrededor de c = 0, presentamos su gráfica:



De ella deducimos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \ldots\ldots.$$

Analíticamente es posible demostrar este límite aplicando el teorema de intercalación:



Demostración:

En una circunferencia trigonométrica (de radio 1) consideremos un ángulo positivo de “x” radianes. Como nos interesa $x \to 0$ podemos suponer que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Observemos los segmentos mp y rq que quedaron determinados en la figura .

Es inmediato que:

$$mp < \text{medida arco } pr < rq \qquad (1)$$

Considerando valores de x *próximos a* 0 y que la circunferencia es trigonométrica, resultan equivalentes:

- la medida del ángulo (en radianes) y la medida del arco pr
- la medida del segmento mp y sen x
- la medida del segmento rq y tg x

> *Recuerda:*
> $$\frac{\text{long. arco}}{\text{radio}} = x\,(\text{en radianes})$$

Reemplazando en (1) nos queda:

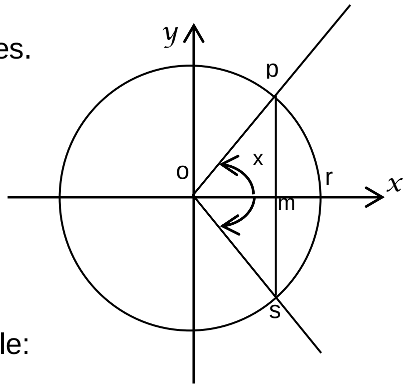
$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

Si x > 0 resulta sen x > 0 y al dividir cada miembro de la desigualdad anterior por sen x obtenemos:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

O tomando los recíprocos: $\cos x < \dfrac{\text{sen } x}{x} < 1$ (2)

Observemos que las funciones involucradas en (2) son funciones pares.



En efecto:

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{\text{sen }(-x)}{(-x)} = \frac{-\text{sen } x}{(-x)} = \frac{\text{sen } x}{x}$$

Entonces la expresión (2) es válida aún cuando $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0.$

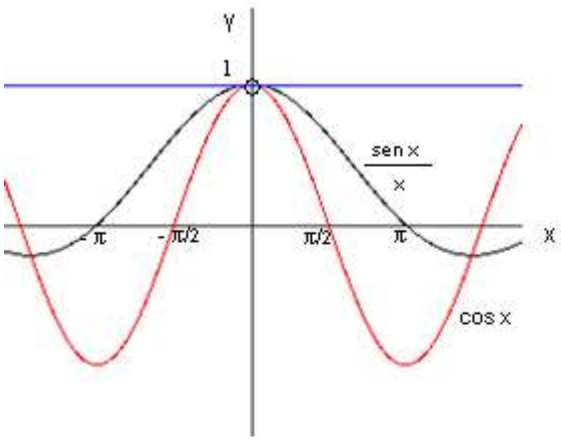
En resumen, es posible afirmar que para todo x próximo a 0 se cumple:

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Además: $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$. Por lo tanto, por el teorema de intercalación resulta:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1}$$

En la representación, puede observarse cómo la gráfica de $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ se halla comprendida entre las gráficas de $\cos x$ y 1 para valores suficientemente próximos a c = 0.



Conocer este límite nos permitirá resolver otros, como veremos más adelante.

Ejercicio propuesto

12) Verifica las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3.\text{sen}x}{x}=3$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2 x}{x}=0$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\text{sen }x}=0$

➔ OTRAS INDETERMINACIONES DEL TIPO $\dfrac{0}{0}$

En la práctica es posible "salvar" algunas indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$ a través de la aplicación del corolario del teorema de intercalación. Es decir, es posible analizar un límite indeterminado cambiando la ley de la función por otra equivalente en todos los valores *alrededor* del punto de estudio y cuyo límite no presente la indeterminación. Para esto existen algunos recursos matemáticos. Presentamos los casos más usuales:

I) $\dfrac{0}{0}$ *para limite de cociente de polinomios:*

Para salvar estas indeterminaciones, se factorean los polinomios y se simplica como muestra el ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{0}}{\underbrace{x^2-1}_{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x-2)}{(x-1).(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

Ejercicio propuesto:

13) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^4+2x}=$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2-4}=$

II) $\dfrac{0}{0}$ *para límite de cociente de funciones cuya ley presente (una de ellas o ambas) una suma o diferencia donde al menos haya una raíz cuadrada*

Recordando que: (a+b). (a-b) = a^2-b^2, se multiplica y divide el cociente por la expresión conjugada de aquella que contiene la raíz:

Ejemplo resuelto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{\sqrt{x}-1}^{0}}{\underbrace{x-1}_{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1).\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\ .\ \left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio propuesto

14) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-4}{1-\sqrt{x}} =$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} =$

III) $\dfrac{0}{0}$ *para algunos cocientes de funciones trigonométricas:*

Algunos límites con estas características pueden resolverse sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ y efectuando algunas transformaciones:

Ejemplos resueltos:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\overset{0}{\operatorname{sen}(3x)}}{\underset{0}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ 3.x\to 0}} \frac{3\,.\operatorname{sen}(3x)}{3\,.\,x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}} 3\,.\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 3\,.\lim_{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 3\,.\,1 = 3$$

$$2)\ \lim_{x\to 2} \frac{\overset{0}{\operatorname{sen}(x-2)}}{\underset{0}{(x-2)}} = \lim_{\substack{x\to 2\\ (x-2)\to 0}} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} = 1$$

Ejercicio propuesto

15) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{7x} =$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} =$

IV) $\dfrac{0}{0}$ *para límites con valor absoluto:*

Para "salvar" estas indeterminaciones, utilizaremos la definición de valor absoluto, como se indica en los ejemplos:

$$1)\ \lim_{x\to 2} \frac{\overset{0}{|x-2|}}{\underset{0}{x^2-4}} =$$

De acuerdo a la definición de valor absoluto se tiene que $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$

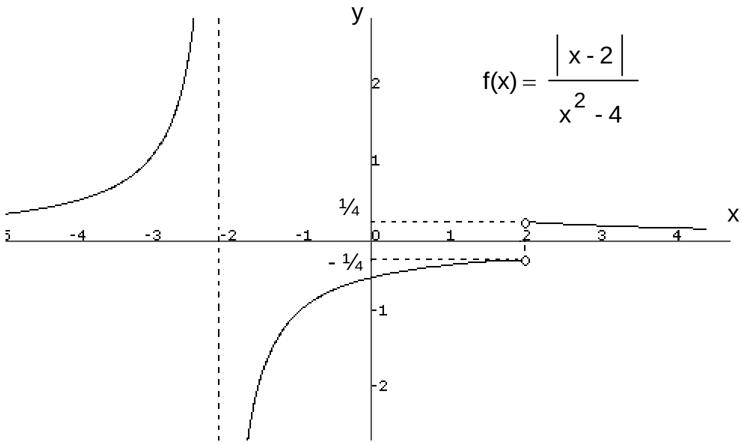
Así para valores de "x" mayores que 2 la expresión $|x-2|$ se puede sustituir por (x – 2), y para valores menores que 2 se sustituye por - (x – 2) . Por lo tanto se hace necesario calcular por separado los límites cuando $x \to 2^+$ y cuando $x \to 2^-$, es decir *calculamos los límites laterales:*

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2).(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2).(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

Como los límites laterales son diferentes, entonces el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ no existe.

Gráficamente pueden observarse las diferentes tendencias de la función cuando tomamos valores, por derecha y por izquierda, suficientemente cercanos a 2.



Ejercicios propuestos:

16) Verifica que:

a) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-4}{|x-4|} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{|x|-5}{x+5} = -1$ c) $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2|x|-x}{3x} =$

17) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x^2+7x}{x^4+2x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x|-1}{x^3-1} =$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{2x} =$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3+3x^2-6x}{x^2+2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x} =$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)-4x}{3x} =$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} =$

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2} =$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5x}{\operatorname{sen} x} =$

k) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{81-18x+x^2}{\sqrt{x}-3} =$

l) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\operatorname{sen}(x-5)}{2x-10} =$

18) Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{si } x>-1 \end{cases}$

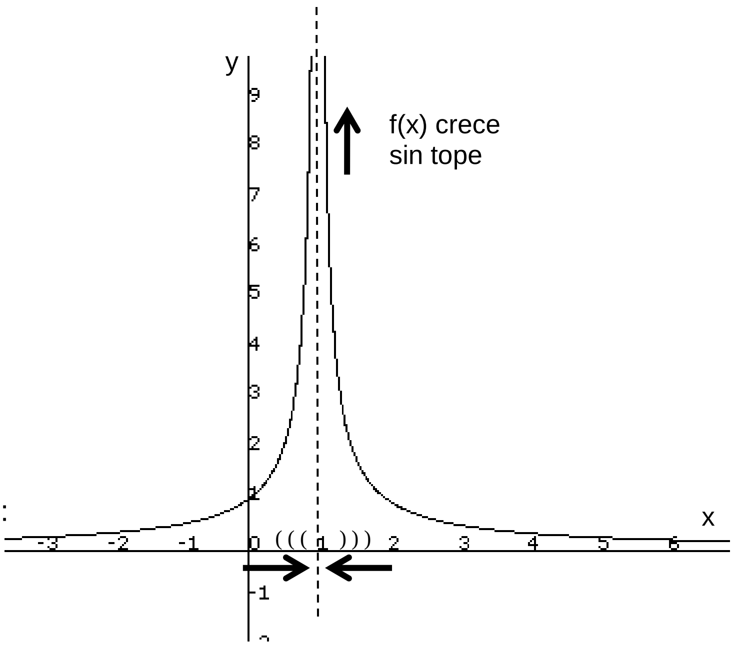
¿Existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$? Justifica tu respuesta.

- <u>LÍMITES INFINITOS:</u>

Observemos las siguientes funciones y evaluemos $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ en cada caso:

➔ $f_6(x)=\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$; $c=1$

$\text{Dom}_{f_6} = R - \{1\}$



La función no tiene límite finito para $x\to 1$. Cuando "x" toma valores cada vez más próximos a 1, la función tiende a tomar valores positivos cada vez mayores (crece sin tope).

Es decir:

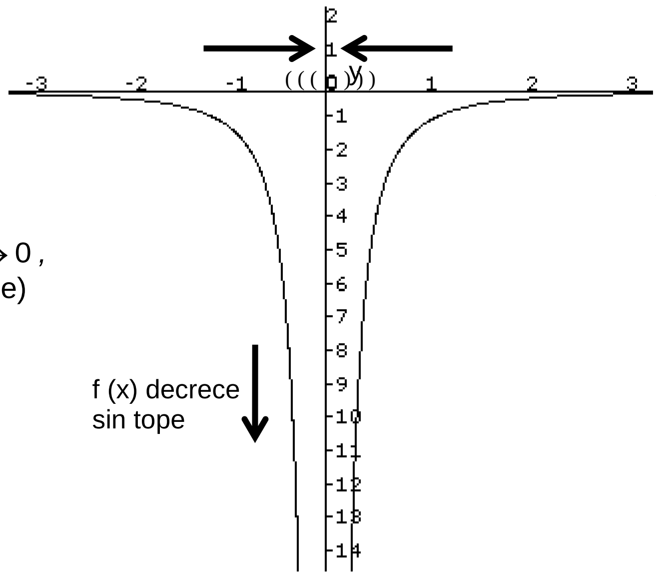
$f(x)\to +\infty$ cuando $x\to 1$.

Para indicar este comportamiento diremos que:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{1}{x-1}\right| = +\infty$$

➔ $f_7(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $c = 0$

$\text{Dom}_{f_7} = R - \{0\}$



En este caso tampoco existe límite finito para $x\to 0$, f toma valores cada vez menores (decrece sin tope) para valores suficientemente próximos a 0.

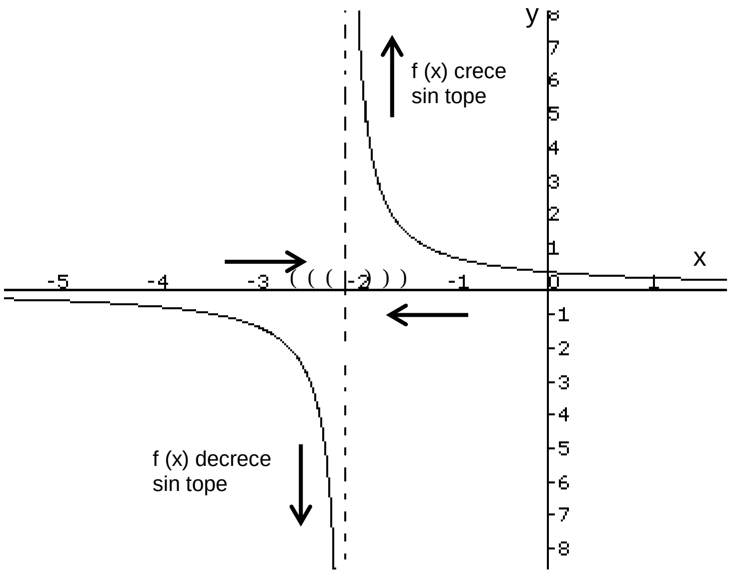
Es decir: $f(x)\to -\infty$ cuando $x\to 0$

Indicaremos entonces que:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

➔ $f_8\ (x) = \dfrac{1}{x+2}$; c = -2

$Dom_{f_8} = R - \{ -2 \}$



La función no tiene límite finito para $x \to -2$.
Observemos que f(x) crece sin tope cuando $x \to -2^+$ y decrece sin tope cuando $x \to -2^-$. No podemos indicar un único comportamiento de la función para $x \to -2$, es decir, no podemos indicar un resultado para $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x+2}$.

Sin embargo, es razonable caracterizar estas tendencias a través de límites laterales

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

Observaciones :

- Diremos que: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ *cuando* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ *cuando* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

- Los límites infinitos indican el comportamiento no acotado de una función. El símbolo ∞ *(infinito) indica una tendencia y no representa ningún número real.*

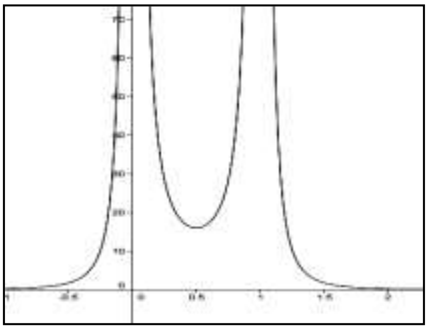
➢ <u>ASÍNTOTAS VERTICALES:</u>

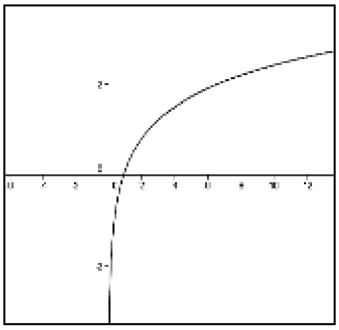
El comportamiento de las funciones f_6, f_7 y f_8 alrededor del valor de estudio c, puede interpretarse geométricamente diciendo que los puntos de la gráfica de la función se acercan a la recta x = c, tanto como se quiera, cuando x está lo suficientemente cerca de c.
La recta x = c recibe el nombre de *asíntota vertical* del gráfico de f.

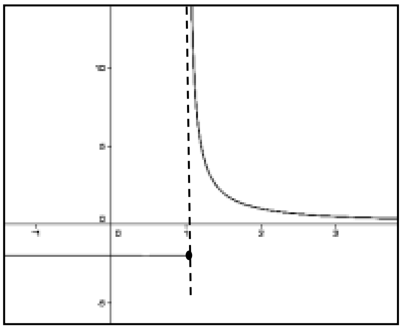
Para las funciones analizadas resulta:

* x = 1 es asíntota vertical de $f_6\ (x) = \left| \dfrac{1}{x-1} \right|$
* x = 0 es asíntota vertical de $f_7\ (x) = -\dfrac{1}{x^2}$
* x = -2 es asíntota vertical de $f_8\ (x) = \dfrac{1}{x+2}$

Presentamos otros ejemplos:







$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

La función tiene dos asíntotas verticales: x= 0 y x = 1

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

La función tiene una asíntota vertical: x = 0

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

La función tiene una asíntota vertical : x= 1

En general diremos que la recta x = c es una asíntota vertical de la gráfica de una función f (x), si al menos uno de los siguientes límites es cierto:

* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ * $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$

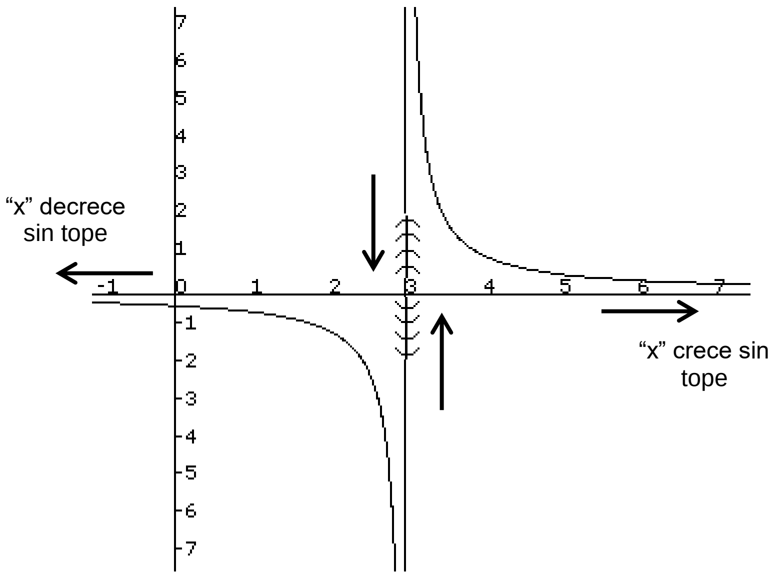
* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ * $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

- <u>LÍMITES EN EL INFINITO:</u>

Consideremos la función:

➔ $f_9(x) = \dfrac{1}{x-3}$

$Dom_f = R - \{3\}$



Observamos que cuando x toma valores cada vez más grandes, las imágenes se aproximan cada vez más a 0. Para indicar este comportamiento escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f_9(x) = 0$$

Con un análisis similar resulta:

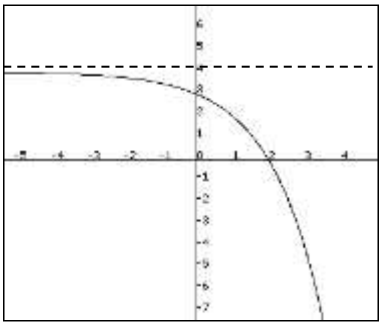
$$\lim_{x \to -\infty} f_9(x) = 0$$

Cuando escribimos $x \to +\infty$ estamos diciendo que x está creciendo indefinidamente, y no que tiende a algún valor particular "muy grande". Análogamente $x \to -\infty$ indica que x decrece indefinidamente.

➢ <u>ASÍNTOTAS HORIZONTALES:</u>

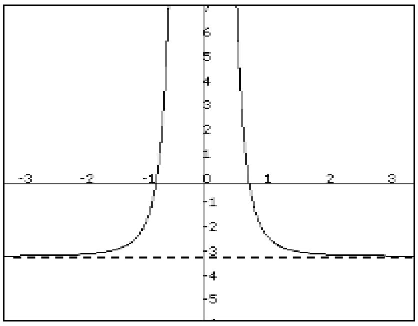
Geométricamente los límites anteriores indican que los puntos de la gráfica de la función se acercan tanto como se quiera a la recta y = 0 cuando x crece o decrece sin tope. Esta recta recibe el nombre de *asíntota horizontal* del gráfico de la función.

Presentamos otros ejemplos:



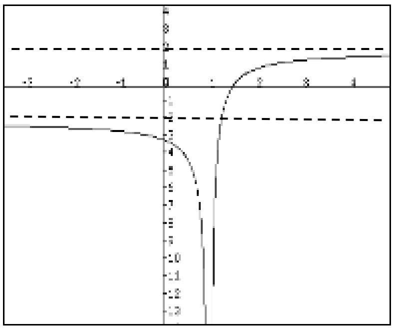
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$$

La función tiene una asíntota horizontal en y = 4



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$$

La función tiene una asíntota horizontal en y = -3



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

La función tiene asíntotas horizontales en y = 2 y en y = -2

En general decimos que la recta y = b es una asíntota horizontal del gráfico de una función f (x), si al menos uno de los siguientes límites es cierto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Ejercicios propuestos

19) Analiza: ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener una función? ¿Cuántas verticales? Justifica.

20) Representa gráficamente una función que cumpla simultáneamente con las siguientes condiciones:

- $Dom_f = \Re$
- $y = -1$ es una asíntota horizontal
- $x = 2$ es una asíntota vertical
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 3$
- $\nexists \lim\limits_{x \to -3} f(x)$

21) Determina, en cada caso, si la proposición es verdadera o falsa justificando tu respuesta:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow f(x) < 5 \quad \forall x \in Dom_f$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ y $f(x)$ es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

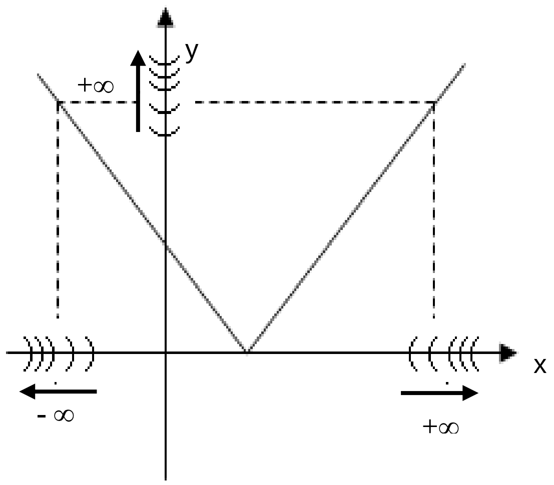
c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ es par

d) Si la función está definida en R entonces no tiene asíntotas verticales.

- LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO:

Finalmente, analizamos las funciones:

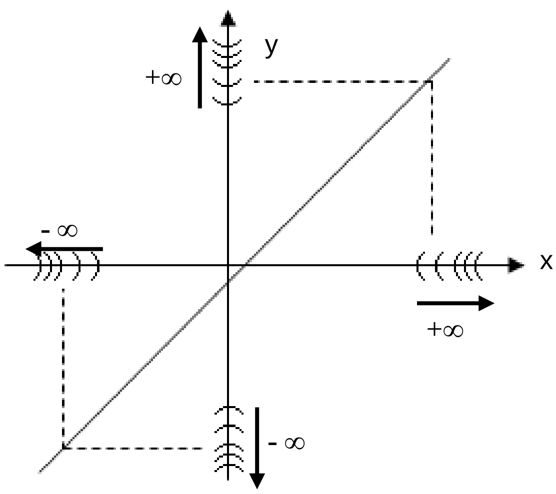
➔ $f_{10}(x) = |x - 1|$



Observemos que f crece sin tope cuando x crece o decrece sin tope. Indicamos este comportamiento así:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

➔ $f_{11}(x) = x - 1$



En este caso, f crece sin tope cuando x crece sin tope y f decrece sin tope cuando x decrece sin tope. Escribimos entonces:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Ejercicio propuesto:

22) Dada una función f(x), ¿cómo interpretas la expresión $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$? Dibuja una función que ilustre este comportamiento.

- ## EXTENSIONES DE LOS TEOREMAS SOBRE LÍMITES:

Las propiedades algebraicas estudiadas para límites finitos (límite de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones y límite de la función compuesta) pueden extenderse a límites infinitos. Para ello damos sentido a las siguientes operaciones que involucran al símbolo ∞ y que aparecerán asociadas al cálculo de estos límites:

Dado $\alpha \in \mathrm{R}$ resulta:

* $\alpha + (+\infty) = +\infty \quad \forall \alpha$
* $\alpha + (-\infty) = -\infty \quad \forall \alpha$

* $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
* $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
* $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
* $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

* $\alpha \,.\, (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
* $\alpha \,.\, (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

* $(+\infty) \,.\, (+\infty) = +\infty$
* $(-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty$
* $(+\infty) \,.\, (-\infty) = (-\infty) \,.\, (+\infty) = -\infty$

* $\dfrac{\alpha}{(+\infty)} = \dfrac{\alpha}{(-\infty)} = 0 \quad \forall \alpha$

* $\dfrac{(+\infty)}{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
* $\dfrac{(-\infty)}{\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

* $\dfrac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$ (el signo del resultado depende de los límites involucrados)

* $\forall \alpha \neq 0$: $\dfrac{\alpha}{0} = \pm\infty$ (el signo del resultado depende de los límites involucrados)

Atención:
No hemos definido las siguientes operaciones:

* $(+\infty) - (+\infty)$ * $(-\infty) - (-\infty)$ * $0 \,.\, (\pm\infty)$

* $\dfrac{0}{0}$ * $\dfrac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$

Cuando se planteen estas situaciones diremos que se trata de un caso ***indeterminado***

Ejemplos resueltos

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x-2} =$

Como la expresión (x – 2) puede aproximarse a cero a través de valores positivos o a través de valores negativos, estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\overset{4}{2x}}{\underset{0^+}{x-2}} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{\overset{4}{2x}}{\underset{0^-}{x-2}} = -\infty$$

Como los límites laterales son diferentes decimos que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x-2}$ no existe.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{13}{x-5} =$

Como $x \to +\infty$ resulta $(x-5) \to +\infty$, por lo tanto: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{13}{13}}{\underset{+\infty}{x-5}} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{-7} =$

Como $x \to +\infty$ resulta $(3x+1) \to +\infty$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{+\infty}{3x+1}}{\underset{-7}{-7}} = -\infty$

Ejercicios propuestos:

23) Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_3 x =$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x =$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-6}{x-3} =$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x^2-1} =$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (6+\ln x) =$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-5}{|x-2|} =$

➢ INDETERMINACIONES CON LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO:

De manera similar a lo trabajado con límites finitos, cuando se presenta una indeterminación con límites infinitos o en el infinito, tenemos que transformar la expresión de modo tal que desaparezca esa indeterminación

Mostramos sólo algunos recursos para salvar las indeterminaciones *a través del álgebra.*

I) En muchas *situaciones* basta con efectuar las operaciones indicadas, tal como lo mostramos en los siguiente ejemplos:

1) $$\lim_{x\to 0}\left(\overbrace{\frac{x^2}{x+1}}^{0}\cdot\overbrace{\frac{x-2}{\underbrace{x^2}_{0^+}}}^{-\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = -2$$

2) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\overbrace{\frac{x+1}{\underbrace{x-1}_{0^+}}}^{+\infty} - \overbrace{\frac{x^2}{\underbrace{x^2-1}_{0^+}}}^{+\infty}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x+1).(x+1)-x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x^2+2x+1)-x^2}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{2x+1}^{3}}{\underbrace{x^2-1}_{0^+}} = +\infty$$

II) En indeterminaciones con funciones polinómicas sacamos como factor común la variable elevada al grado del polinomio, tal como lo podemos observar en los siguientes ejemplos:

1) $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 + 4x^2 + 1) = \lim_{x\to-\infty} \left[x^3 \left(2 + 4\cdot\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = \lim_{x\to-\infty} \left[x^3 \left(2 + 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$

$$\underbrace{2x^3}_{-\infty} \quad \underbrace{4x^2}_{+\infty} \qquad \underbrace{x^3}_{-\infty} \quad \underbrace{\left(2 + 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}_{2} \quad \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \quad \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0}$$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x^5}{3x^2 - 5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right)}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right)}{\left(3 - \frac{5}{x^2} \right)} = -\infty$

$$\underbrace{x^3 + 2x^5}_{+\infty} \qquad \underbrace{3x^2 - 5}_{+\infty}$$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{2x^2 + 9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} \right)}}{x^2 \cdot \left(2 + \frac{9}{x^2} \right)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x^2 \cdot \left(2 + \frac{9}{x^2} \right)} =$

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + 2x}}_{+\infty} \qquad \underbrace{2x^2 + 9}_{+\infty}$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x \cdot \left(2 + \frac{9}{x^2} \right)} = 0$

$$\underbrace{\frac{2}{x}}_{0} \qquad \underbrace{2}_{+\infty} \qquad \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{0}$$

(*) $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \to +\infty$, es $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

III) En los casos en que aparecen sumas o restas con al menos una raíz cuadrada, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1} \right)\cdot\left(x + \sqrt{x^2+1} \right)}{\left(x + \sqrt{x^2+1} \right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \left(x^2 + 1 \right)}{\left(x + \sqrt{x^2+1} \right)} =$

$$\underbrace{x}_{+\infty} \qquad \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty}$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\underbrace{\left(x + \sqrt{x^2+1} \right)}_{+\infty}} = 0$

<u>Ejercicios propuestos</u>

24) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)=$

b) $\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)=$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5-2x^3+x^2+5x}{-3x^2+10x-8}=$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-4x^2+6}{-5x^3+2x+11}=$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{7x^5+4x^2-x+3}=$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{\sqrt{x^8+x}}=$

g) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2}\right)\right]=$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}}=$

25) Sean los polinomios: $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$ y

$q(x)=b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_o$

Analiza el resultado de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ para cada uno de los siguientes casos:

a) grado p(x) > grado q(x)

b) grado p(x) < grado q(x)

c) grado p(x) = grado q(x)

Elabora una conclusión para el cálculo de estos límites.

26) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones:

a) $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$

b) $f_2(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

c) $f_3(x)=\dfrac{-x-2x^2}{x^2+1}$

d) $f_4(x)=\text{arctg } x$

e) $f_5(x)=\dfrac{x+3}{|x|}$

f) $f_6(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

A modo de ejemplo, resolvemos el apartado a)

* Asíntotas verticales:

Para que la función tenga una asíntota vertical en x = c tiene que ocurrir que alguno de los límites laterales cuando x → c sea infinito. Entonces, para una función cuya ley involucra un cociente, los candidatos a asíntotas verticales son aquellos valores que anulan el divisor. En este ejemplo x = 2 y x = 3. Evaluamos los límites laterales en cada valor:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{2x-1}^{\to 3}}{\underbrace{(x-2)}_{\to 0^+}\underbrace{(x-3)}_{\to -1}} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x=2 \text{ es asíntota vertical de } f(x)$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{2x-1}^{\to 5}}{\underbrace{(x-2)}_{\to 1}\underbrace{(x-3)}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x=3 \text{ es asíntota vertical de } f(x)$$

Observemos que si uno de los límites laterales ya me permite encontrar la asíntota, no es necesario evaluar el otro.

* Asíntotas horizontales:

La recta $y = a$ es una asíntota horizontal de la función f si es el límite de f cuando $x \to \pm\infty$ es "a". Luego, para determinar la o las asíntotas horizontales de la función evaluamos los límites en infinito de la misma. Es necesario evaluar los dos límites: para $x\to +\infty$ y para $x \to -\infty$.
En nuestro ejemplo f es una función racional donde el grado del polinomio del divisor es mayor que el del dividendo, por lo tanto:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{x^2-5x+6} = 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{x^2-5x+6} = 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)$$

Concluimos entonces que la función tiene dos asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = 3$ y una asíntota horizontal: $y = 0$.

27) Determina los valores de **a** y **b** de modo que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax+3}{bx+2}$ contenga al punto p(-2;0) y tenga una asíntota en $y = 2$.

28) Considera nuevamente la función dada en el ejercicio anterior y determina cuáles deben ser los valores de **a** y **b** para que la función tenga por asíntotas las rectas $x = 2$ e $y = 4$.

- MISCELÁNEA

1) Representa una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada apartado:

a) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \forall c \in Dom_f$

b) $\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \wedge \quad c \notin Dom_f$

c) $\lim_{x\to c} f(x) = L, \quad c \in Dom_f \quad \wedge \quad L \neq f(c)$

d) $\nexists \lim_{x\to c} f(x) \quad \wedge \quad c \notin Dom_f$

e) $\nexists \lim_{x\to c} f(x) \quad \wedge \quad c \in Dom_f$

2) Representa la función indicada en cada caso y completa:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to -1^-} (x) =$ b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ e) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

f) $f(1)=$ g) $\lim_{x\to 4} f(x) =$ h) $\lim_{x\to -30} f(x) =$ i) $\lim_{x\to 3,5} f(x) =$ j) $\lim_{x\to 0,999} f(x) =$

3) Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si } -4 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ -2x+3 & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$, ¿existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifica.

4) Halla el valor de “a” para que exista el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} -a+2^x & \text{si } x > 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

5) Determina los coeficientes **a** y **b** de la función de modo que exista $\lim_{x\to c} f(x) \quad \forall c \in Dom_f$, siendo:

a) $f(x) = \begin{cases} a x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \\ 2x + a & \text{si } x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ b x & \text{si } -2 < x < 2 \\ a x^2 + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

6) Calcula los números reales **a** y **b** (con $b \neq 0$) que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = a$
- $\lim\limits_{x \to 5} \left[f(x) - 3\, g(x)\right] = 5$
- $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = b$
- $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 7$

7) Sean f y g funciones tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x$ próximo a c (excepto quizás en c). Sabiendo que $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$, calcula $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

8) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1} =$

b) $\lim\limits_{x \to h} \dfrac{x^2 - (h+1).x + h}{x^2 - h^2} =$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{x+1}}{2x - 6} =$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x^3 - 1} =$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{-\sqrt{x+4} + 2} =$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1) + \operatorname{tg}(2 - 2x)}{1 - x^2} =$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1} =$

h) $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{\sqrt{3x + b} - 2\sqrt{b}}{x - b} =$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(4x)} =$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|x| - x - 2}{x + 1} =$

k) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\ln\left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right)\right] =$

l) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\operatorname{sen}(2x - 12)}{x^2 - 36} =$

m) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 - 3} =$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(6x)} =$

9) Verifica las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen} x} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - |x - 1| - 1}{|x - 1|} = -3$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x.(\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{6 - x}}{x - \sqrt{6x - x^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x.\operatorname{sen} x} = -\dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^3 + x^2 - 16x + 21} = \dfrac{3}{7}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} (x \,.\, \operatorname{cosec} x) = 1$

l) $\lim\limits_{x \to 3} \left[1 - \log_3\left(\dfrac{2x - 6}{3x^2 - 27}\right)\right] = 3$

10) En cada apartado, determina el valor de "a" $\in \Re$ que satisface la igualdad:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+a}{x^2+1} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+a}{x-1} = a-1$

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{(a+2) \, . \, x} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a\,x+1}{2\,x} = -3$

f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a\,x+1}{2\,x-a} = 2$

g) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a \, . \sqrt{x+a}}{x} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to a} \cos(x-a) \, . \, \dfrac{\text{tg}(x-a)}{(x-a)} = 1$

11) Representa gráficamente una función que cumpla simultáneamente con las condiciones establecidas para cada apartado:

a)
- $\text{Dom}_f = \Re$
- $f(x) < 0 \quad \forall x < 1$ y $f(x) > 0 \quad \forall x > 1$
- $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$
- $y = 4$ es una asíntota de f(x)

b)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

c)
- $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$
- f es par
- $x = 0$ e $y = 3$ son asíntotas de la función

12) Halla gráficamente, si existen, el o los valores de "c" para los cuales al menos uno de los límites laterales para $x \to c$ es $\pm\infty$.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = 2^{x-1}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

13) a) Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} \log_2(x-2) & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \leq 2 \ \wedge \ x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

b) Calcula:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ iii) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ iv) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

v) $f(2) =$ vi) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$ vii) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) =$ viii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$

ix) $f(-1) =$ x) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$ xi) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$ xii) $\lim\limits_{x\to -9} f(x) =$

c) Si existen, indica las ecuaciones de las asíntotas de f(x).

14) Siendo $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 - 2x - 3$ calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - g(x)\right) =$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2.f(x)} =$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{g(x)} =$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(f(x) - 3g(x) - 1\right) =$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x).\log_2 f(x)\right) =$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{f(x)} =$

i) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

j) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)}{f(x)} =$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)} =$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

p) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)} =$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{g(x)}{\left(f(x)\right)^2}\right] =$

15) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\dfrac{1}{x^2 - 25} - \dfrac{1}{x - 5}\right) =$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-2x^2 - x - 4\right) =$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x^6 + 5x^4 - 11}{-9x^{10} + 7x^8 + x^2} =$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^7 + x^4 - 2x + 5}{-4x^4 + 2x - 2} =$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\left(x^2 + 3\right).\dfrac{1}{2x - 1}\right] =$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} =$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x - 5}}{\frac{6}{x^3 + 2x}} =$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{x - 2} =$

16) Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a) $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x) \quad \wedge \quad \nexists \lim\limits_{x \to a} g(x) \quad \Rightarrow$ puede existir el $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$

b) Si $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -9 \quad \Rightarrow \quad f(5) = -9$

c) Si $f(5) = -9 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 5} f(x) = -9$

d) Si $(-2) \notin Dom_f \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

e) Si $\nexists \lim\limits_{x \to -2} f(x) \quad \Rightarrow \quad (-2) \notin Dom_f$

f) $f(c) = g(c) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x)$

g) Si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 4} f(x-1) = 2$

h) Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = 3$

i) Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

j) Si $f(c) < g(c) \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) < \lim\limits_{x \to c} g(x)$

k) $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right]$

l) Una función puede tener varias asíntotas verticales.

m) Una función puede tener sólo una asíntota horizontal.

n) Una función puede cortar a alguna de sus asíntotas verticales.

o) Una función puede cortar a alguna de sus asíntotas horizontales.

17) Analiza los siguientes límites e indica, en cada caso, si el resultado es correcto. Justifica tu respuesta.

Datos: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = k$, $\lim\limits_{x \to c} h(x) = -\infty$, $c \in \Re$ y $k \in \Re$,

a) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = K$

b) $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{g(x)}{h(x)} \right] = 0$

c) $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{h(x)} \right] = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to c} [g(x) \,.\, f(x)] = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + h(x)] = 0$

f) $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = 0$

BIBLIOGRAFÍA:

* MATEMÁTICA II – N. Buschiazzo, E. Fongi, M. Inés González, L. Lagreca – Editorial Santillana (Edición 2000)

* PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO – James Stewart , Lothar Redlin , Saleen Watson – Editorial Cengage Learning / Thomson Internacional. (Edición 2007)

* CÁLCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS. Cuarta Edición - James Stewart - Editorial Cengage Learning / Thomson Internacional. (Edición 2002)

* MATEMÁTICA POLIMODAL. ANÁLISIS 1 - S. V. Altman, C. R. Comparatore, L. E. Kurzrok – Editorial Longseller (Edición 2001)

* HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS (Capítulo XV: El Cálculo Infinitesimal.) - Angel Ruiz Zúñiga - Editorial: EUNED

* CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Novena Edición - Edwin Joseph Purcell, Edwin Joseph Purcell Dale Varberg – Editorial Pearson Educación (Edición 2007)

* MATEMÁTICA. MÓDULO 1. "FUNCIONES, LÍMITE Y CONTINUIDAD" – Marta Bonacina – Editorial UNR

* APUNTE "LÍMITE DE FUNCIONES"- Pablo Lotito – IPS (UNR)

"Las Autoras expresan su agradecimiento a la Prof. Patricia Godino por su colaboración en la revisión de este apunte"

CONTINUIDAD

INTRODUCCIÓN:

En nuestra vida diaria aparecen numerosos fenómenos que tienen un comportamiento continuo como, por ejemplo, el desplazamiento de un vehículo que varía en forma continua con el tiempo, pero así también otros que presentan discontinuidades como las corrientes eléctricas.

Al referirnos a un proceso continuo intuitivamente se puede pensar en un acontecimiento sin interrupciones ni cambios abruptos.

Cuando deseamos representar algunos valores que se van recopilando de determinadas experiencias, por aplicación de una función, es frecuente que los puntos que se van obteniendo, si es posible, se unan mediante una curva continua, en lugar de "saltar" de un punto a otro, sin tomar en cuenta los valores intermedios.

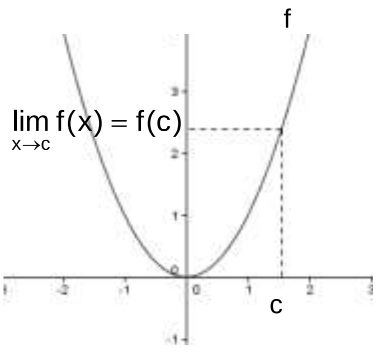
Geométricamente, cualquier función, cuya gráfica, se puede trazar en su dominio, sin levantar el lápiz de la hoja de papel, es un ejemplo de función continua.

En el desarrollo de este tema nos proponemos precisar qué significa que una función sea continua.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto

Definición:



❖ Una función f es **continua** en $x = c$, si se cumplen las siguientes condiciones:

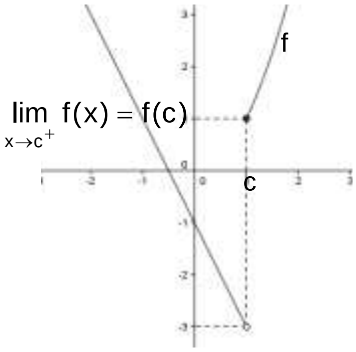
1º) exista $f(c)$, es decir, c pertenece al dominio de la función

2º) exista $\lim_{x\to c} f(x)$; es decir, $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

3º) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Continuidades laterales

Definiciones:



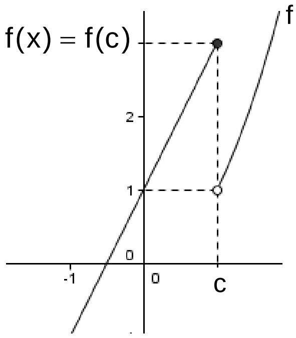
❖ Una función f es **continua por derecha** en $x = c$, con $c \in [a;\ b)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1º) exista $f(c)$, es decir, c pertenece al dominio de la función

2º) exista $\lim_{x\to c^+} f(x)$

3º) $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$



- ❖ Una función f es **continua por izquierda** en $x = c$, con $c \in (a;\ b]$, si se cumplen las siguientes condiciones:
  - 1º) exista $f(c)$, es decir, c pertenece al dominio de la función
  - 2º) exista $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$
  - 3º) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

<u>Continuidad de una función en un intervalo abierto (a; b)</u>

<u>Definición:</u>

Una función f es continua en un intervalo abierto (a; b), si y solo si la función es continua en todos los puntos del mismo.

<u>Continuidad de una función en un intervalo cerrado [a; b]</u>

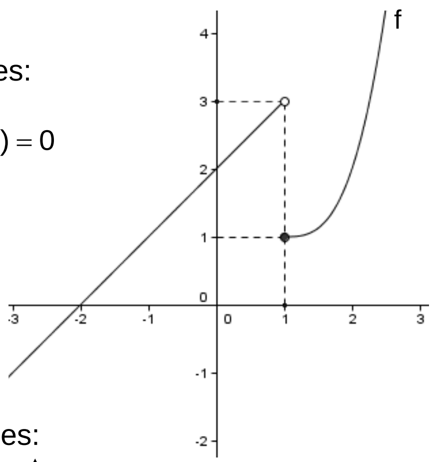
<u>Definición:</u>

Una función f es continua en un intervalo cerrado [a; b] si es continua en el intervalo abierto (a; b) y es continua por la derecha de a y continua por la izquierda de b.

► Si una función f no es continua en un punto c, diremos que f es **discontinua** en c o que c es un punto de discontinuidad de f.

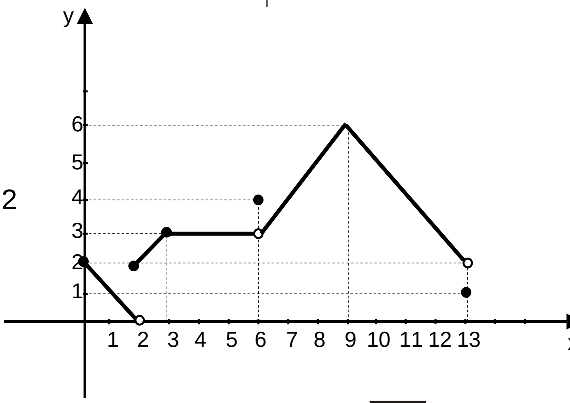
<u>Ejemplos:</u>

1) Observando la gráfica podemos concluir que la función f(x) es:



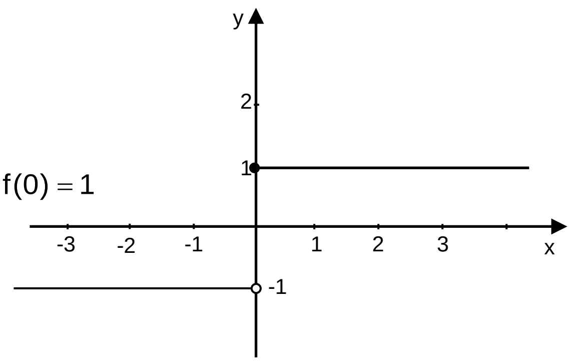
- ◊ continua en x = -2 ya que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) = 0$
- ◊ continua por derecha en x = 1 ya que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$
- ◊ discontinua en x = 1 ya que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

2) Observando la gráfica podemos concluir que la función f(x) es:



- ◊ discontinua en $x = 2$ pues no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
- ◊ discontinua en $x = 6$ pues $\lim\limits_{x \to 6} f(x) \neq f(6)$
- ◊ continua por derecha en x = 2 pues $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 2$

3) La función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ es:



- ◊ continua por la derecha en x = 0 pues $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$
- ◊ discontinua en x = 0 pues no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

En los casos anteriores analizamos la continuidad de las funciones observando su gráfica. En lo que sigue, lo haremos utilizando como recurso analítico, el concepto de continuidad y las propiedades de los límites, sin recurrir a la gráfica.

<u>Ejemplos</u>

a. ¿La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{|x+4|} & \text{si} \quad x>-4\\ 2x & \text{si} \quad x\leq -4\end{cases}$ es continua en $c=-4$?

Para probar que la función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{|x+4|} & \text{si} \quad x>-4\\ 2x & \text{si} \quad x\leq -4\end{cases}$ es continua en $c=-4$, hay que demostrar que:

1º) Exista $g(-4)$: $g(-4)=-8$

2º) Exista $\lim\limits_{x\to -4} g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -4^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x+4}{|x+4|}=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x+4}{x+4}=\lim\limits_{x\to -4^+} 1=1\\ \lim\limits_{x\to -4^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -4^-} 2x=-8\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ no existe } \lim\limits_{x\to -4} g(x)$$

Por lo tanto $g(x)$ no es continua en c = -4

b. ¿La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x^2-25} & \text{si} \quad x>5\\ \dfrac{1}{10} & \text{si} \quad x\leq 5\end{cases}$ es continua en $c=5$?

Siguiendo el ejemplo anterior:

1º) $g(5)=\dfrac{1}{10}$

2º) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{10}\\ \lim\limits_{x\to 5^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} g(x)=\dfrac{1}{10}$$

3º) $\lim_{x\to 5} g(x) = g(5)$

Por lo tanto $g(x)$ es continua en $x = 5$

c. ¿La función $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ es continua en $c = 1$?

1º) $g(1) = 4$

2º) $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cdot \operatorname{sen}(x^2-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1)\cdot \lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x^2-1)} = 2\cdot 1 = 2$

$\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$:

Por lo tanto $g(x)$ no es continua en $x = 1$

Ejercicios:

1- Analiza, justificando la respuesta, que la función $g(x)$ es continua en $x = c$ en cada caso.

a. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \\ 3x-7 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$; $c = 2$

b. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-2x}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 4 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$; $c = -1$

2- Determina el valor de M, si existe, para que la función f(x) sea continua en x = c

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \\ Mx+5 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$; $c = 2$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-x} & \text{si} \quad x < 1 \\ Mx & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$; $c = 1$

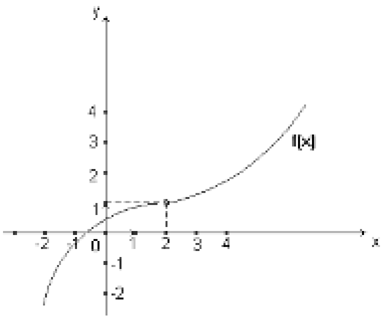
CLASIFICACIÓN DE DISCONTINUIDADES

Teniendo en cuenta la definición de continuidad en un punto, podemos concluir que las discontinuidades se pueden dar por las siguientes causas:

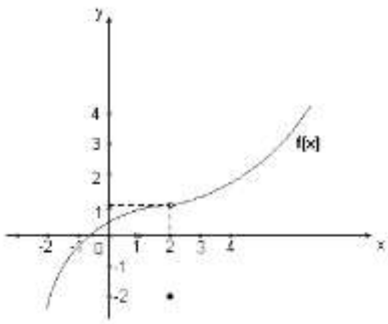
- No pertenecer el punto al dominio de la función, es decir, no existe la imagen en dicho punto
- La no existencia del límite en el punto
- En el caso de existir la imagen y el límite en el punto, ambos no coincidan

Ejemplos:

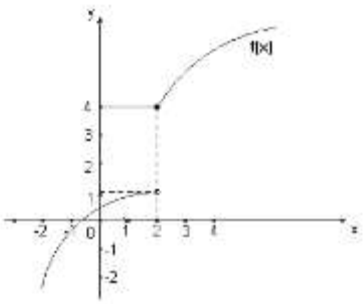
a)



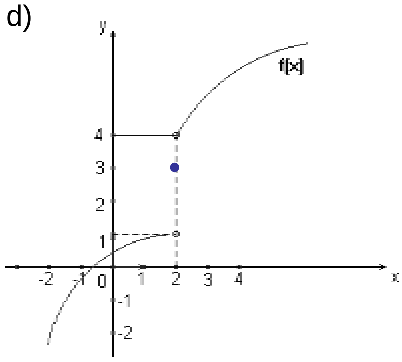
b)



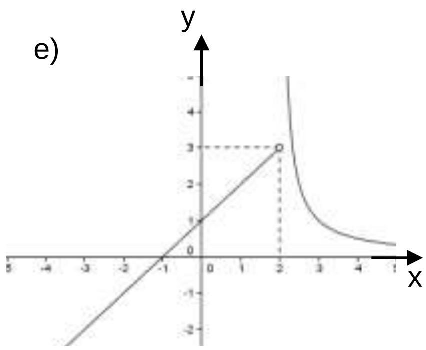
c)



d)



e)



En todos los casos vistos anteriormente, la función f presenta una discontinuidad en 2. La misma se presenta debido a:

Ejemplo a:

No existe la imagen en x = 2

Ejemplo b:

Existe la imagen en x = 2 pero no coincide con el límite en dicho puntos

Ejemplos c; d y e:

No existe el límite en dicho punto

<u>Definiciones:</u>

Diremos que:

- **f** presenta en c una discontinuidad **evitable** o **eliminable** cuando exista el $\lim_{x\to c} f(x)$ (en nuestros ejemplos, se presenta una discontinuidad evitable en c = 2 para los casos a y b)
- **f** presenta en c una discontinuidad **inevitable** o **no eliminable** cuando no exista el $\lim_{x\to c} f(x)$ (en nuestros ejemplos, se presenta una discontinuidad inevitable en c = 2 para los casos c; d y e)

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Si la funciones f(x) y g(x) son continuas en x = c, entonces las siguientes funciones son continuas en x = c.

1) $(f+g)(x)$
2) $(f-g)(x)$
3) $(f.g)(x)$
4) $k.f(x)$
5) $(f/g)(x)$ si $g(c)\neq 0$

Las demostraciones de estas propiedades no se realizará en el presente curso

Consecuencias de las propiedades anteriores

Puede demostrarse, aplicando las propiedades anteriores y la definición de continuidad, que los siguientes tipos de funciones son continuas para todo c de su dominio:

Constante: $f(x)=k,\ k\in R$

Potencia: $f(x)=x^n,\ n\in N$

Polinómicas: $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ \forall n\in N_0$

Racionales: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$**,** siendo P(x) y Q(x) funciones polinómicas

Raíz: $f(x)=\sqrt[n]{x},\ \forall n\in N\text{-}\{1\}$

Exponenciales: $f(x)=a^x,\ \forall a\in R^+\text{-}\{1\}$

Logarítmicas: $f(x)=\log_a x,\ \forall a\in R^+\text{-}\{1\}$

Trigonométricas y sus inversas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente y sus respectivas inversas)

Teorema 1

Si f es una función continua en c y g es continua en f(c), entonces la función compuesta gof es continua en c, con c perteneciente al dominio de la composición.

En símbolos:

H) f es una función continua en c y g es continua en f(c)
T) gof es continua en x = c

La demostración de este teorema no se realizará en el presente curso

Ejemplos:

1- Dada la función $f(x)=\sqrt[5]{2x^2+24}$, analizaremos su continuidad en $x=2$, para ello deberemos probar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+24\right)\overset{(1)}{=}32\\ \lim\limits_{x\to 32}\sqrt[5]{x}\overset{(2)}{=}2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\sqrt[5]{2x^2+24}\overset{(3)}{=}2=f(2)$$

(1) $2x^2+24$ es continua en x = 2 por ser función polinómica

(2) $\sqrt[5]{x}$ es continua en x = 32 por ser función raíz

(3) Teorema 4

2- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad x\geq 0\wedge x\neq 3\\ 5 & \text{si} \quad x=3\\ -2 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

a) Realiza la gráfica
b) Analiza la continuidad de f(x) en los reales especificando los tipos de discontinuidad y justificando la respuesta.
c) Determina A (si existe) para que g(x) sea continua en x = 3

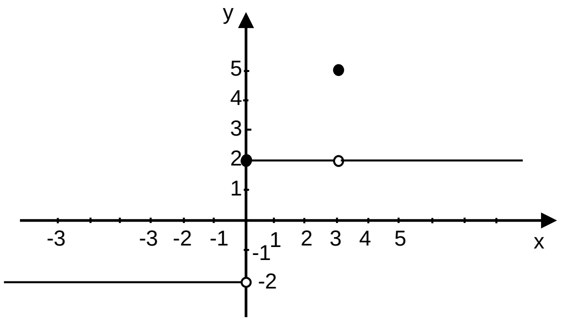
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\neq 3\\ A & \text{si} \quad x=3\end{cases}$$

d) Determina B (si existe) para que h (x) sea continua en x = 0

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\neq 0\\ B & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Solución:

a)



b) $\forall x>3$ la función es continua por ser una función constante

$\forall 0<x<3$ la función es continua por ser una función constante

$\forall x<0$ la función es continua por ser una función constante

Para x = 3 la función presenta una discontinuidad evitable ya que existe el límite en dicho punto y vale 2

Para x = 0 la función presenta una discontinuidad inevitable ya que no existe el límite en dicho punto pues los límites laterales son distintos

c) A = 2

d) no existe B tal que la función sea continua en 0

Ejercicios:

3- Indica los puntos en los cuales la función dada en cada caso es discontinua y luego clasifícalas.

a. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ b. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 1}$ c. $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4- Demuestra que cada una de las siguientes funciones es continua en el intervalo indicado

a) $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; $(-2; 0)$ c) $f_5(x) = \text{sen}(x+1)$; $[0; \pi]$

b) $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x + 1}{4} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x^2 + 1}{2} & \text{si } x \le 0 \end{cases}$; $[-1; 1]$

Teorema 2 *Teorema del valor intermedio (TVI)*

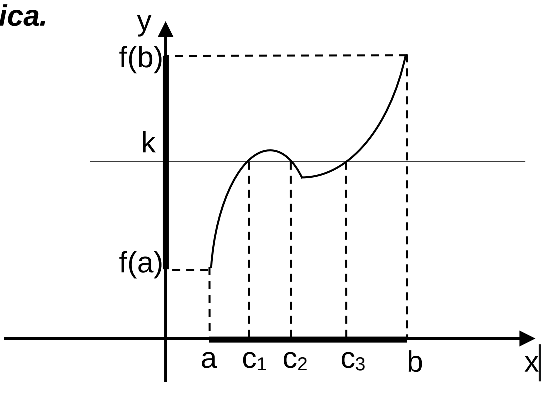
Si f es una función continua en $[a; b]$, entonces f toma todos los valores entre f(a) y f(b). Es decir, si una función f es continua en $[a; b]$, entonces existe al menos un c perteneciente al $(a; b)$ tal que f(c) = k con k entre f(a) y f(b).

En símbolos:

H) f es una función continua en $[a; b]$ y k un número entre f(a) y f(b)

T) $\exists\, c \in (a; b)$ tal que $f(c) = k$

La demostración de este teorema queda fuera del alcance de este curso, solo haremos su interpretación geométrica.



Una consecuencia del teorema del valor intermedio

Un problema matemático frecuente es saber si una ecuación tiene raíces reales. El teorema anterior se puede particularizar de la siguiente manera:

Teorema 3 ***Teorema de Bolzano***

Si f es una función continua en $[a;b]$ y el signo de f(a) es distinto al signo de f(b), entonces f presenta alguna raíz en $(a;b)$.

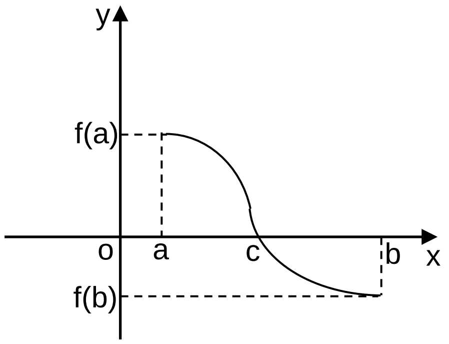
Gráficamente, este teorema asegura que la gráfica de una función continua y con imágenes de distinto signo en los extremos del dominio, corta al eje x en al menos un punto.

En símbolos:

H) f es una función continua en $[a;b]$ y
signo de f(a) distinto al signo de f(b)

T) $\exists c \in (a;b)$ tal que $f(c)=0$

La demostración de este teorema queda fuera del alcance de este curso, solo haremos su interpretación geométrica.



Ejemplo:

La función $f(x)=x^3-15x+1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[-4;\ 4]$.

Según el teorema anterior si la función es continua en ese intervalo y los signos en los extremos son distintos, asegura que existe por lo menos un cero en el intervalo abierto.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\text{ es continua en }[-4;4]\text{ por ser función polinómica} \\ f(-4)=-3<0 \\ f(4)=3>0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists c \in (-4;4) / f(c)=0$$

Ejercicio:

5- Demuestra que la ecuación $x^5-3x^4-2x^3-x+2=0$ tiene una solución real entre 0 y 1.

➢ BIBLIOGRAFÍA:

* MATEMÁTICA II – N. Buschiazzo, E. Fongi, M. Inés González, L. Lagreca – Editorial Santillana (Edición 2000)
* PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO – James Stewart , Lothar Redlin , Saleen Watson – Editorial Cengage Learning / Thomson Internacional. (Edición 2007)
* CÁLCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS. Cuarta Edición - James Stewart - Editorial Cengage Learning / Thomson Internacional. (Edición 2002)
* CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Novena Edición - Edwin Joseph Purcell, Edwin Joseph Purcell Dale Varberg – Editorial Pearson Educación (Edición 2007)