

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEGUNDO - FASC. 2



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1942

Las “*Mathematicae Notae*” publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

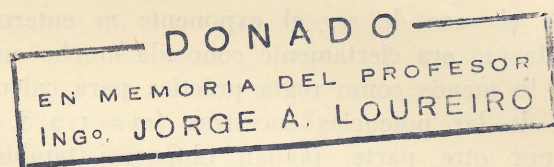
2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma y, los de primer año, además la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

INDICE

—Isaac Newton y el Binomio (L. A. SANTALÓ)	pág. 61
—Sobre el problema n° 6. - Estudio acerca del péndulo de Foucault (P. E. ZADUNAISKY)	» 73
—Ejercicios y problemas (Soluciones)	» 95
—Flores y Hojas (Respuesta)	» 100
—Ejercicios y Problemas (Propuestos)	» 102
—Cuestiones	» 103
—Flores y Hojas	» 104
—Resultado del concurso	» 105
—Bibliografía	» 107



ISAAC NEWTON Y EL BINOMIO

La primera vez que los estudiantes de matemáticas se encuentran con el nombre de Newton es cuando, en los cursos de enseñanza secundaria, aprenden la famosa *fórmula del binomio*. Se trata de la fórmula que permite expresar la potencia de una suma $(a+b)^m$ como suma de productos de potencias de los sumandos.

En los cursos elementales se supone el exponente m entero y positivo y el desarrollo consta entonces de un número finito de términos: es un polinomio. Pero los estudiantes que han llegado ya al cálculo infinitesimal saben que la fórmula del binomio sigue valiendo para exponentes cualesquiera, con la sola diferencia de que el desarrollo adquiere entonces infinitos términos: es una serie, de la cual hay que considerar, además, las condiciones de convergencia.

Con el simbolismo actual, la fórmula del binomio de Newton se escribe

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \binom{m}{n} a^{m-n} b^n + \dots \quad (1)$$

siendo

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \dots \times \frac{m-(n-1)}{n}. \quad (2)$$

La expresión (1), teniendo en cuenta los valores (2) de los coeficientes, vale para un exponente real cualquiera; sólo hay que observar que para m entero y positivo los coeficientes $\binom{m}{n}$ son todos nulos a partir de $n > m$, mientras que en los demás casos no hay ningún coeficiente que sea cero y por tanto el número de términos del segundo miembro de (1) es infinito.

Para el caso de ser el exponente m entero y positivo, la fórmula (1) era ciertamente conocida mucho antes de Newton, por lo menos como regla práctica para calcular los coeficientes de las potencias sucesivas ($m=1, 2, 3, 4, \dots$), las cuales, por otra parte, podían obtenerse también mediante cálculos algebraicos elementales.

La *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften*, I A 2, *Kombinatorik* (Netto), cita BRIGGS (*Arithmetica logarithmica*, London, 1624) como la primera publicación donde se encuentra la regla del binomio para exponente entero y positivo, pero reconoce que MIGUEL STIFEL (en su obra *Arithmetica integra*, Nuremberg, 1544) debió haber conocido la regla práctica para el cálculo de los coeficientes de las potencias sucesivas. Más tarde, B. PASCAL en el *Traité du triangle arithmetique*, redactado en 1654 y publicado en 1665, estudia los coeficientes binomiales por su significado combinatorio y recuerda que ellos son los mismos números que van apareciendo en las bases sucesivas de sus triángulos aritméticos. La edición francesa de la misma Enciclopedia (*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. II, vol. 2, fasc. 1, pág. 34) recuerda, más precisamente, que Stifel en la obra citada, indica sin demostración un teorema equivalente a la fórmula recurrente

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$$

y BRIGGS, en la obra *Trigonometria Britannica* redactada alrededor del año 1600 y publicada por H. Gellibrand en 1633, trae una fórmula equivalente a

$$\binom{m}{n+1} = \frac{m-n}{n+1} \binom{m}{n}, \quad (3)$$

de cuyas fórmulas se deduce inmediatamente la expresión (2) para los coeficientes de los términos del binomio.

UGO CASSINA en «*Storia del triangolo Aritmetico*» (Bollettino di Matematica, Año 1923) después de admitir la posibilidad de que algunas propiedades del triángulo aritmético

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

.....

fueran y a conocidas por Euclides, cita que, con ligeras variantes, dicho triángulo se encuentra ya en la obra «*El valioso espejo de los cuatro elementos*» del autor chino TSCHU-SCHI-KIH (año 1303) y más tarde en una aritmética del alemán PETRUS APIANUS, editada en 1527. Pero el propio triángulo aritmético en la forma antedicha, que se atribuye generalmente a Pascal, se encuentra en el *General trattato dei numeri e delle misure* (Venezia, 1556) de NICOLÓ TARTAGLIA y precisamente en una forma tal que no puede caber duda de que dicho triángulo servía de regla para obtener los coeficientes del desarrollo del binomio, pues al lado de cada línea horizontal figura el nombre que en aquel tiempo se daba a las sucesivas potencias ⁽¹⁾, ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Estos nombres eran sucesivamente: *censo*, *cubo*, *censo censo*, *primer relato*, *censo cubo*, *segundo relato*, *censo censo censo*, *cubo cubo*, *censo primer relato*, *tercer relato*, *cubo censo censo*, etcétera.

⁽²⁾ Una sugestión para juzgar sobre el grado de estos conocimientos en aquellos tiempos podemos encontrarla en el siguiente particular que tiene por si mismo un interés histórico. En los *Cartelli di Matematica Disfida* de Ludovico Ferrari y Nicolò Tartaglia (*I sei Cartelli di Matematica Disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Ludovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni de' quesiti dall'una e dall'altra parte proposti*. Raccolti, Autografati e Pubblicati da Enrico Giordani, Milano 1871) este último propone a su competidor de dar reglas para extraer las raíces 5, 6, 7, 11, de un número (II Cartello, Risposta. Quesiti 22, 23, 24, 25). En su contestación (Vº Cartello, pág. 47) Ludovico Ferrari cita a Miguel Stifel como el autor de haber enseñado a extraer esta suerte de raíces, pero en modo obscuro, por lo cual él considera conveniente extenderse en particulares, principalmente para los dos últimos casos. El método usado por Ferrari se basa precisamente sobre los desarrollos de las correspondientes potencias del binomio y los coeficientes de los términos sucesivos se dan para cada caso sin mayor explicación; únicamente para el caso del exponente 11 observa que “questa estratione de radici, ha alcuni numeri peculiari, come ciascuna dell'altri” y estos números peculiares son, precisamente (salvo un cierto número de ceros que Ferrari añade por comodidad de operar en su caso particular) los coeficientes binomiales de la potencia 11. Si se considera que el cono-

Todo lo dicho prueba, por tanto, que no pertenece a Newton la prioridad de la fórmula del binomio para m entero y positivo, prioridad que probablemente tampoco se atribuyó nunca él mismo⁽³⁾. En cambio, para el caso general de ser el exponente m un número fraccionario y aún real cualquiera, el mérito parece corresponderle íntegramente.

El objeto perseguido por Newton en los trabajos que, accidentalmente, le llevaron a la fórmula del binomio, era el de obtener reglas que le permitieran la cuadratura de curvas de cualquier tipo. La idea básica consistía en *desarrollar en serie* la ecuación de la curva, para poder obtener entonces la expresión de la integral (cuadratura) como suma de las integrales de los términos sucesivos.

Parece ser que los métodos empleados por Newton para obtener el desarrollo en serie de tipos muy generales de expresiones algebraicas llegaron, por intermedio de H. Óldemburg⁽⁴⁾ a oídos de Leibniz, el cual, en carta fechada el día 30 de marzo de 1675 escribía al mismo Oldenburg preguntándole por más detalles acerca de ellos⁽⁵⁾.

cimiento tan solo del primer coeficiente (siempre igual al exponente de la potencia) habría conducido, imitando la regla de extracción de la raíz cuadrada, a operaciones probablemente más simples, se puede argumentar que en la época de Ferrari (la fecha del Cartello es de octubre de 1547) no era conocida la regla de hallar los sucesivos coeficientes a partir cada uno del anterior. Puede, por tanto, atribuirse a Briggs, no el primer conocimiento de la fórmula del binomio, pero sí la regla expresada por (3).

(3) Es curiosa la observación hecha por Newton, la cual muestra en cierta manera el interés del tiempo por los juegos de números, de que las filas sucesivas del triángulo aritmético, o sea los coeficientes del desarrollo del binomio, forman en conjunto las cifras de las potencias sucesivas de 11. Así: $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Naturalmente que para exponentes superiores a 4, al aparecer números de más de dos cifras, la regla debe modificarse.

Ver *Isaaci Newtoni Opuscula*, Collegit partimque Latine vertit ac recensuit Joh. Castillioneus. Tomus Primus. Lausannae & Genevae, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios. MDCCXLIV. Pág. 329.

(4) H. OLDEMBURG, que servía de intermediario entre Newton y Leibniz, nació en Bremen en 1626 y murió en Charlton, cerca de Greenwich, en 1678. Fue cónsul de Alemania en Londres y miembro de la Sociedad real de Ciencias de Inglaterra, teniendo a su cargo durante varios años la publicación de los *Philosophical Transactions* de dicha Sociedad.

(5) Dice la carta: "Scribis clarissimum Newtonum vestrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniisque curvarum superficierum et Soli-

Enterado Newton de estos deseos de Leibniz, no tiene inconveniente en escribir a Oldenburg una carta célebre, de fecha 13 de junio de 1676 ⁽⁶⁾, en la cual aparece, por primera vez, la fórmula del binomio para exponente racional cualquiera.

El enunciado del teorema que expresa la fórmula del binomio está expuesto al comienzo de la carta con las siguientes palabras:

«Las fracciones se reducen a series infinitas por división y las cantidades radicales por extracción de raíces, instituyendo estas operaciones sobre las expresiones algebraicas como suele hacerse para los números decimales. Estos son los fundamentos de tales reducciones.

«Pero las extracciones de raíces se abrevian mucho por el siguiente teorema:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q + \frac{m-2n}{3n} C Q + \frac{m-3n}{4n} D Q + \dots \quad (4)$$

«donde $\frac{m}{n}$ puede ser entero o fraccionario, positivo o negativo» ⁽⁷⁾.

Las letras $A, B, C, \dots$ representan, cada una, el término que precede a aquél en que ella figura. Así $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n} A Q$, $C = \frac{m-n}{2n} B Q$, etc. Esta fórmula (4) es la fórmula del binomio en la forma dada por Newton por primera vez.

dorum ex revolutione genitorum Dimensionis, et Centrorum gravitatis inventionis, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quae Methodus si est universalis et commoda, meretur aestimari; nec dubito fore ingeniosissimo Auctore dignam''. *Loc. cit.*, p. 300.

⁽⁶⁾ *Loc. cit.*, p. 307.

⁽⁷⁾ «Fractiones in infinitas Series reducuntur per Divisionem; et Quantitates Radicales per Extractionem Radicum: perinde instituendo Operationes istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Haec sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractions Radicum multum abbreviantur per hoc Theorema...''.

En esta primera carta, Newton no da, ni demostración, ni justificación alguna de como ha llegado a establecer su fórmula. Se limita a añadir, a continuación del enunciado, que «Por lo demás el uso de la regla se pone de manifiesto con ejemplos»⁽⁸⁾ y expone 9 ejemplos, algunos de los cuales reproducimos literalmente por curiosidad histórica:

$$\text{I. } \sqrt{c^2 + x^2} = (c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \dots,$$

pues, en este caso, es $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$.

$$\begin{aligned} \text{II. } \sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} &= (c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{5}} = \\ &= c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9} + \dots, \end{aligned}$$

habiendo puesto en la fórmula general $m = 1$, $n = 5$, $P = c^5$, $Q = \frac{c^4x - x^5}{c^5}$. Poniendo, en cambio, $P = -x^5$, $Q = \frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ vale $(c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{5}} = -x + \frac{c^4x + x^5}{5x^4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + c^{10}}{25x^9} + \dots$. El primer caso se elegirá si x es muy pequeño; el segundo si es muy grande⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} \text{III. } \frac{N}{\sqrt[3]{y^3 - a^2y}} &= N(y^3 - a^2y)^{-\frac{1}{3}} = N \left(\frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7} \right. \\ &\left. + \dots \right), \text{ habiendo puesto } P = y^3, Q = -\frac{a^2}{y^2}, m = -1, n = 3. \end{aligned}$$

$$\text{IV. } (d + e)^{\frac{4}{3}} = d^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}ed^{\frac{1}{3}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} + \dots$$

V. El método permite obtener las potencias enteras. Por ejem-

⁽⁸⁾ "Ceterum usus Regulae patebit Exemplis".

⁽⁹⁾ Es notable esta observación de Newton. Aunque no expone en ninguna parte condiciones de convergencia de sus desarrollos, vemos como se preocupa de elegir los términos P y Q de manera conveniente.

plo, si se desea $(d+e)^5$, basta tomar $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, $n=1$. Queda $(d+e)^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3e^2 + 10d^2e^3 + 5de^4 + e^5$.

Esta primera carta mencionada de Newton contiene, además, ciertos métodos para el cálculo de soluciones numéricas de ecuaciones algebraicas y para el cálculo del área y otros elementos de determinadas curvas algebraicas. El método que utiliza para el cálculo aproximado de las raíces de una ecuación consiste en ir obteniendo su desarrollo en serie en función de los coeficientes, por un procedimiento que en el fondo equivale al de los coeficientes indeterminados. Por este mismo camino da también algunos ejemplos de inversión de series.

Enterado Leibniz de la carta anterior, contesta a Oldemburg (carta fechada el 27 agosto de 1676) agradeciendo el haber sido hecho partícipe de tan interesantes resultados de Newton «de cuyo ingenio son dignos». Sin embargo ruega de insistir sobre Newton por si tuviera a bien explicar con más detalle ciertos puntos de la carta mencionada, en particular «el origen del teorema enunciado al principio», refiriéndose al teorema del binomio.

Transmitidos a Newton, siempre por intermedio de Oldemburg, estos deseos de Leibniz, contesta en una segunda carta célebre, de fecha 24 octubre de 1676, en la cual expone en manera curiosa, y sin duda bien artificial, como ha llegado a la fórmula del binomio. Es la siguiente:

Desde hacía unos pocos años habían sido dadas por Wallis⁽¹⁰⁾ las expresiones de las áreas limitadas por las curvas de ecuación $y=(1-x^2)^m$, siendo m entero y positivo, comprendidas entre las ordenadas x y 0. Estas expresiones, para los primeros valores de m son, como se sabe,

$m=0$, área $= x$

$m=1$, área $= x - \frac{1}{3}x^3$

$m=2$, área $= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ (5)

$m=3$, área $= x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$

(10) En su *Arithmetica Infinitorum*, publicada en 1656.

A partir de estas fórmulas, dice Newton: si en lugar de m entero, tomamos por ejemplo los números racionales de denominador 2, o sea $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$ bastará interpolar en las expresiones anteriores. El primer término es siempre x . Para los segundos términos se observa que están en progresión aritmética y por tanto deberá interpolarse por proporcionalidad. De esta manera los dos primeros términos de las expresiones de las áreas de $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \dots$ serán, respectivamente $x - \frac{\frac{1}{2} x^3}{3}, x - \frac{\frac{3}{2} x^3}{3}, x - \frac{\frac{5}{2} x^3}{3}, \dots$

Los denominadores de los coeficientes de las expresiones (5) se observa que van siguiendo la progresión 1, 3, 5, 7, ... y en cuanto a los numeradores se van obteniendo por los productos sucesivos de la expresión

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$$

Cuando m es entero esta sucesión de productos se termina y las expresiones (5) tienen un número finito de términos. Sin otras consideraciones, añade Newton: la regla se aplicará también para las series interpoladas, y así, por ejemplo, para el caso del círculo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo el segundo término $\frac{\frac{1}{2} x^3}{3}$, habrá que poner $m = \frac{1}{2}$ y los sucesivos nume-

radores irán siendo $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16}, \dots$

Por tanto, el área limitada por $(1-x^2)^{1/2}$ será

$$x - \frac{\frac{1}{2} x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8} x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16} x^7}{7} - \dots$$

Sigue Newton observando que si en lugar de considerar las

áreas limitadas por las curvas de ecuación $y = (1 - x^2)^m$ se consideran los desarrollos

$$\begin{aligned}(1 - x^2)^0 &= 1 \\(1 - x^2)^1 &= 1 - x^2 \\(1 - x^2)^2 &= 1 - 2x^2 + x^4 \\(1 - x^2)^3 &= 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

se observa que los coeficientes de estos desarrollos son los numeradores de los coeficientes de los desarrollos (5) de las áreas correspondientes. Análogamente, los coeficientes de los desarrollos de las expresiones interpoladas $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, en general de $(1 - x^2)^m$, serán los numeradores de los coeficientes de los desarrollos de las áreas correspondientes, o sea, los productos sucesivos de la sucesión $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$. Como ejemplos cita Newton los siguientes:

$$\begin{aligned}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots \\(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 \dots \\(1 - x^2)^{\frac{5}{2}} &= 1 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{8}x^4 - \frac{5}{81}x^6 \dots\end{aligned}$$

Para comprobar estas reglas da, siempre en la segunda carta citada, únicamente dos razones. La primera consiste en observar que multiplicando la expresión $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \dots$ por sí misma, según la regla de multiplicación de polinomios, se obtiene efectivamente $1 - x^2$; también multiplicando tres veces la expresión $1 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{8}x^4 - \frac{5}{81}x^6 \dots$ se obtiene $1 - x^2$.

La segunda justificación se aplica nada más al caso de

exponente $\frac{1}{2}$ y consiste en observar que, efectivamente, los coeficientes dados para dicho desarrollo son los mismos que se obtienen al extraer la raíz cuadrada de $1 - x^2$ por el método aritmético representado en el siguiente esquema (que reproducimos exactamente de la carta de Newton):

$$\begin{array}{r}
 1 - x^2 \quad (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots \\
 \hline
 \frac{1}{0 - x^2} \\
 -x^2 + \frac{1}{4}x^4 \\
 \hline
 -\frac{1}{4}x^4 \\
 -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \\
 \hline
 -\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
 \end{array}$$

Una vez obtenido el desarrollo de $(1 - x^2)^m$, menciona Newton como puede obtenerse el desarrollo de expresiones análogas. Por ejemplo, para el desarrollo de la expresión general $(a \pm b)^m$ bastará escribir $(a \pm b)^m = a^m (1 \pm \frac{b}{a})^m$ y poner $\pm \frac{b}{a} = x^2$.

También observa Newton⁽¹¹⁾ que la regla del binomio sirve para desarrollar potencias de polinomios y pone el siguiente ejemplo: para desarrollar $\sqrt{a^2 - ax + \frac{x^3}{a}}$ se pondrá $a^2 - ax = z^2$ y queda $(z^2 + \frac{x^3}{a})^{\frac{1}{2}} = z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8a^2z^3} - \dots$; basta entonces substituir las potencias (positivas o negativas) de z por sus desarrollos a partir de $z = (a^2 - ax)^{\frac{1}{2}}$.

Al final de la segunda carta Newton observa también, sin justificación alguna, que su fórmula es aplicable incluso para exponentes irracionales, y pone el ejemplo de $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\frac{3}{2\sqrt{3}}}$.

⁽¹¹⁾ En la segunda carta, *loc. cit.*, pág. 340.

Aun cuando, evidentemente, el rigor formal que se exigía a las demostraciones algebraicas de aquel tiempo no puede compararse con el actual, hay que pensar sin embargo que Newton, al proporcionar únicamente razones que hoy diríamos ser a lo sumo de un valor heurístico, tuviera el propósito de ocultar el verdadero camino por el cual habría llegado a convencerse de la seguridad matemática de la fórmula del binomio, la cual es posible que hubiera efectivamente entrevisto a través del método señalado de interpolación. Hay que recordar la costumbre común en el siglo anterior de mantener semejantes secretos científicos, que posiblemente no había desaparecido completamente, y el mismo Newton, en la citada segunda carta a Oldenberg oculta lo esencial de sus propios procedimientos por medio de un anagrama⁽¹²⁾.

Puede ser por tanto interesante buscar, en la misma obra de Newton, alguna sugestión para establecer una hipótesis razonable acerca de los fundamentos ciertos de la fórmula en la mente de Newton. El Prof. B. Levi me indica en este sentido que una dirección posible sería la basada en las siguientes consideraciones.

Se observa que Newton conocía la fórmula de derivación $\dot{x}^m = m x^{m-1} \dot{x}$; para m entero la demostración, que nosotros damos a menudo independientemente de la fórmula del binomio, para Newton se obtenía aplicando dicha fórmula o tan solo el segundo término de ella, que era bien conocido⁽¹³⁾.

⁽¹²⁾ l. c. pág. 335. — “Fundamentum harum Operationum, satis obvium quidem, (quoniam jam non possum explicationem ejus prosecui), sic potius celavi 6a ce d æ 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x”. es decir: “El fundamento de estas operaciones, bastante obvio ciertamente, (por cuanto yo no puedo continuar en su explicación) encubrí pues así...”. El anagrama está formado indicando para cada letra el número de veces que se encuentra en la frase que quiere significar; ésta era precisamente: *Data æquatione quocumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa* (Dada una ecuación incluyendo de cualquier modo cantidades fluentes, encontrar las fluxiones; y vice versa).

⁽¹³⁾ Ver, en la obra citada, el Opusculum II, Problema I “Data relatione, quam invicem habent fluentes Quantitas, determinare Rationem, quae inter earum Fluxiones intercedit”. Si bien este opúsculo no se imprimió por primera vez hasta el año 1736, el manuscrito existía ya desde mucho antes y en particular el problema a que nos referimos era ya conocido de Newton en la época de la segunda carta a Leibniz, pues en ella (loc. cit., pág. 335) se hace refe-

Para m número racional cualquiera, la fórmula era consecuencia de la fórmula conocida para m entero y de su método general de determinar la derivada de funciones implícitas definidas por ecuaciones algebraicas⁽¹⁴⁾. Poniendo $x = 1 + z$, Newton podía escribir según esto, una fórmula equivalente a

$$\frac{d}{dz} (1 + z)^m = m (1 + z)^{m-1}$$

$$m (1 + z)^m = (1 + z) \frac{d}{dz} (1 + z)^m.$$

Por otro lado, escribiendo

$$(1 + z)^m = 1 + m z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

y admitiendo la derivabilidad de la serie término a término, lo que desde luego Newton admitía, se obtiene

$$m + m^2 z + c_2 m z^2 + c_3 m z^3 + \dots$$

$$= m + (2 c_2 + m) z + (3 c_3 + 2 c_2) z^2 + (4 c_4 + 3 c_3) z^3 + \dots$$

e igualando los coeficientes homólogos resulta

$$m c_k = (k + 1) c_{k+1} + k c_k, \quad c_{k+1} = \frac{m - k}{k + 1} c_k$$

que da la manera recurrente de obtener los coeficientes.

Puede notarse que esta demostración no pide que m sea racional, con sólo conocer la regla de derivación para un m cualquiera.

Durante más de un siglo la fórmula de Newton fué aceptada y aplicada por los analistas sin dar una demostración sólida. Únicamente después que Lagrange (1813) y Cauchy (1826) hubieron demostrado rigurosamente la fórmula de Taylor con la evaluación del resto, se tuvo el modo de darle demostraciones completamente satisfactorias, que son esencialmente aquellas corrientes todavía en los tratados de Análisis.

Luis A. Santaló

rencia a dicho problema, precisamente mediante el anagrama citado en la nota ⁽¹²⁾

⁽¹⁴⁾ Por ejemplo, para hallar la derivada de $x^{\frac{m}{n}}$, Newton ponía $x^m = y^n$ y derivando obtenía $m x^{m-1} \dot{x} = n y^{n-1} \dot{y}$, de donde $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{m}{n} \frac{\dot{x}}{x} x^{\frac{m}{n}} - 1$.

SOBRE EL PROBLEMA N^o. 6 (Año 1, pág. 34)

ESTUDIO ACERCA DEL PÉNDULO DE FOUCAULT (1)

El problema propuesto era el siguiente:

Un punto de masa m está vinculado a moverse sobre un plano y es atraído hacia un punto fijo O del plano por una fuerza proporcional a la distancia mientras el plano rueda alrededor de un eje situado en el plano y pasante por el punto fijo O con velocidad constante.

Escribir las ecuaciones de la trayectoria sobre el plano (movimiento relativo) y discutir el movimiento.

1. — Tomamos en el plano un sistema de ejes coordenados rectangulares haciendo coincidir el eje y con el eje de giro del plano.

El punto está solicitado por dos fuerzas:

Una proporcional a la distancia que produce una aceleración cuyas componentes según los ejes coordenados son

$$a_x = -Ax \quad , \quad a_y = -Ay,$$

donde A es una cierta constante mayor que cero.

La otra es la fuerza centrífuga debida a la rotación del plano y se sabe que produce una aceleración centrífuga en nuestro caso paralela al eje x cuyas coordenadas son

$$b_x = \frac{4\pi^2}{T^2} x = Bx \quad , \quad b_y = 0,$$

donde T es el tiempo que el plano emplea en efectuar un giro completo.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento serán pues:

(1) Trabajo realizado en el Instituto de Matemáticas de Rosario.

$$\ddot{x} = -(A - B)x \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -A y \quad (2)$$

Resolveremos la (2); para la (1) el resultado será análogo.

Se verifica fácilmente que dos soluciones particulares son

$$\cos \sqrt{A} t, \quad \sin \sqrt{A} t$$

lo cual nos da como solución general

$$y = C_1 \cos \sqrt{A} t + C_2 \sin \sqrt{A} t$$

y si imponemos como condiciones iniciales que para $t=0$ se verifique

$$y = y_0, \quad \dot{y} = V_{0y}$$

resulta

$$y = y_0 \cos \sqrt{A} t + \frac{V_{0y}}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A} t. \quad (3)$$

La (1) nos da análogamente

$$x = x_0 \cos \sqrt{A - B} t + \frac{V_{0x}}{\sqrt{A - B}} \sin \sqrt{A - B} t \quad (4)$$

2. — Discusión

I) La (4) deja de ser válida si $A=B$. En este caso la (1) se reduce a $\ddot{x}=0$ y su solución general es de la forma

$$x = C t + C_1$$

que es la ecuación de un movimiento uniforme sobre el eje x .

Por las condiciones iniciales antes establecidas, resulta

$$x = V_{0x} t + x_0.$$

El punto (x, y) resulta animado de un movimiento progresivo en la dirección del eje x y periódico en dirección de

y; la trayectoria oscila entre dos paralelas simétricas respecto del eje x puesto que de la ecuación (3) resulta que los valores de y correspondientes a dos tiempos t y $t + \pi : \sqrt{A}$ tienen mismo valor absoluto y signos contrarios. También se deduce fácilmente que la trayectoria corta al eje x a intervalos de tiempo iguales a $\pi : \sqrt{A}$, y a distancias iguales a $\pi V_{0x} : \sqrt{A}$.

II) Si $A < B$; $\sqrt{A - B} = i \sqrt{B - A}$; ($B - A > 0$). La (4) nos da:

$$x = x_0 \cos i \sqrt{B - A} t + i \frac{V_{0x}}{\sqrt{B - A}} \operatorname{sen} i \sqrt{B - A} t$$

que se puede escribir también

$$x = x_0 \operatorname{Ch} \sqrt{B - A} t - \frac{V_{0x}}{\sqrt{B - A}} \operatorname{Sh} \sqrt{B - A} t.$$

Aplicando las fórmulas de Euler se obtiene fácilmente

$$x = \frac{e^{-\sqrt{B-A} t}}{2} \left(x_0 + \frac{V_{0x}}{\sqrt{B-A}} \right) + \frac{e^{-\sqrt{B-A} t}}{2} \left(x_0 - \frac{V_{0x}}{\sqrt{B-A}} \right)$$

El primer término del segundo miembro tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. El segundo término mantiene invariable su signo y crece indefinidamente en valor absoluto con t . El movimiento resultante es análogo al del caso anterior, pero ahora las distancias entre los puntos de intersección de la trayectoria con el eje x no son constantes sino que crecen con t ; cuando t es tan grande que se pueda despreciar $e^{-\sqrt{B-A} t}$ estas distancias se aproximan a los términos de una progresión geométrica cuya razón vale $e^{\pi : \sqrt{B-A}}$.

III) Si $A > B$ las fórmulas (3) y (4) representan dos movimientos armónicos ortogonales de distinto período y amplitud.

Pongamos $\sqrt{A} = \mu$ $\sqrt{A - B} = \lambda$ es decir

$$x = x_0 \cos \lambda t + \frac{V_{0x}}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t$$

$$y = y_0 \cos \mu t + \frac{V_{0y}}{\mu} \operatorname{sen} \mu t.$$

Las componentes de la velocidad son

$$\dot{x} = -x_0 \lambda \operatorname{sen} \lambda t + V_{0x} \cos \lambda t$$

$$\dot{y} = -y_0 \mu \operatorname{sen} \mu t + V_{0y} \cos \mu t.$$

De estas fórmulas resulta que y e $\dot{y}$ vuelven a tomar sus valores iniciales cada vez que el tiempo se encuentra aumentado en un valor

$$t_1 = \frac{2\pi n}{\mu} \quad (n \text{ entero}).$$

Análogamente x y $\dot{x}$ vuelven al valor inicial después de un tiempo

$$t_2 = \frac{2\pi m}{\lambda} \quad (m \text{ entero}).$$

Por consiguiente para que el móvil vuelva a tener la posición y velocidad iniciales deben ser m y n tales que $t_1 = t_2$ o sea

$$\frac{2\pi m}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\mu}, \quad \frac{m}{n} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Pueden presentarse dos casos:

a) ρ es un número racional: En este caso expresando ρ como fracción irreducible pongamos

$$\rho = \frac{p}{q}.$$

Para realizar la anterior condición es necesario y suficiente que

$$m = \eta p, \quad n = \eta q \quad (\eta \text{ entero}).$$

El movimiento resultante es por lo tanto periódico y el valor del período se obtendrá haciendo $\eta = 1$.

$$T = \frac{2\pi q}{\mu} = \frac{2\pi p}{\lambda}.$$

Estudiemos el caso particular en que $\lambda = \mu$. Se verifica evidentemente que $p = q = 1$ y el movimiento tiene por período $T = 2\pi : \lambda = 2\pi : \mu$; pero entonces debe ser

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} = 1 \quad \text{o sea} \quad B = 0$$

lo cual significa que la fuerza centrífuga es nula y ello se verifica si el plano no gira.

Para estudiar la forma de la trayectoria distingamos según sea $V_0 = 0$ ó $V_0 \neq 0$. En el primer caso las ecuaciones del movimiento se reducen a

$$x = x_0 \cos \lambda t ; \quad y = y_0 \cos \lambda t$$

que representan una oscilación armónica sobre la recta de ecuación

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Lo mismo ocurre cuando $V_0 \neq 0$ y su dirección pasa por el origen; en efecto, en este caso

$$V_{0x} : V_{0y} = x_0 : y_0 = k$$

y las ecuaciones del movimiento resultan

$$x = x_0 (\cos \lambda t + k \operatorname{sen} \lambda t)$$

$$y = y_0 (\cos \lambda t + k \operatorname{sen} \lambda t).$$

Consideremos finalmente el caso general en que $V_0 \neq 0$ y su dirección no pasa por el origen. Vamos a demostrar que la trayectoria es entonces elíptica; para ello mostraremos como, mediante una transformación de coordenadas, las ecuaciones del movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} Y &= N \operatorname{sen} [\mu (t + \varepsilon)] \\ X &= M \cos [\mu (t + \varepsilon)] \end{aligned} \tag{5}$$

que corresponde precisamente a una elipse cuyos semiejes es-

tán orientados según los ejes X e Y y cuyas longitudes son M y N respectivamente. Las fórmulas que vamos a obtener nos serán útiles también para los desarrollos sucesivos.

Pongamos

$$\frac{V_{ox}}{\lambda} = w \quad \frac{V_{oy}}{\mu} = v ;$$

puesto que $\lambda = \mu$ tendremos

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \mu t + w \sin \mu t \\ y &= y_0 \cos \mu t + v \sin \mu t. \end{aligned} \quad (6)$$

Una rotación de los ejes nos lleva de estas ecuaciones a las siguientes:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \\ &= (x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta) \cos \mu t + (w \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \sin \mu t \\ Y &= x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \\ &= (x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta) \cos \mu t + (w \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \sin \mu t \end{aligned} \quad (6')$$

donde ϑ es el ángulo de rotación por ahora indeterminado.

Supongamos que se haya determinado ϑ de tal modo que sea

$$\frac{w \cos \vartheta - v \sin \vartheta}{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta} = \frac{-(x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta)}{w \sin \vartheta + v \cos \vartheta} = c ;$$

para eso bastará que

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \frac{2(wv + x_0 y_0)}{y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2}. \quad (7)$$

Si entonces elegimos un ángulo ε tal que

$$-\operatorname{tg} \mu \varepsilon = c,$$

las ecuaciones (6') toman la forma:

$$\begin{aligned} X &= (x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta) (\cos \mu t - \operatorname{tg} \mu \varepsilon \sin \mu t) \\ &= \frac{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta}{\cos \mu \varepsilon} \cos [\mu (t + \varepsilon)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= (x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta) (\cos \mu t + \frac{1}{\operatorname{tg} \mu \varepsilon} \sin \mu t) \\ &= \frac{x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta}{\sin \mu \varepsilon} \sin [\mu (t + \varepsilon)] \end{aligned}$$

y haciendo

$$\frac{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta}{\cos \mu \varepsilon} = M \quad \frac{x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta}{\sin \mu \varepsilon} = N, \quad (7')$$

se obtienen las ecuaciones (5) de la elipse; el ángulo ϑ que los ejes de la misma forman respectivamente con los ejes coordenados viene dado por la expresión (7).

b) ρ es un número irracional: En este caso no se puede expresar ρ bajo la forma $\rho = p : q$ y el movimiento resultante es *casi-periódico*. Esto significa que el punto después de cierto tiempo vuelve a posiciones y velocidades tan próximas como se quiera a las que corresponden a cualquier posición tomada anteriormente pero sin pasar nunca dos veces por la misma posición con la misma velocidad.

Nos proponemos determinar el *casi-periodo* o sea el tiempo necesario para que el móvil, después de recorrer su trayectoria, se encuentre dentro de un entorno dado del punto que ocupaba en el instante t animado de una velocidad que se aproxime a la que tenía en ese instante en un valor dado. Naturalmente este *casi-periodo* variará con la anchura de los intervalos de aproximación.

Recordemos las ecuaciones del movimiento

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \lambda t + w \sin \lambda t \\ y = y_0 \cos \mu t + v \sin \mu t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x_0 \lambda \sin \lambda t + w \lambda \cos \lambda t \\ \dot{y} = -y_0 \mu \sin \mu t + v \mu \cos \mu t. \end{cases}$$

Pongamos también:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos \lambda (t + \tau) + w \sin \lambda (t + \tau) \\ y_1 = y_0 \cos \mu (t + \tau) + v \sin \mu (t + \tau) \\ \dot{x}_1 = -x_0 \lambda \sin \lambda (t + \tau) + w \lambda \cos \lambda (t + \tau) \\ \dot{y}_1 = -y_0 \mu \sin \mu (t + \tau) + v \mu \cos \mu (t + \tau) \end{cases}$$

Mostraremos que se puede hallar un valor de τ para el cual

$$x - x_1 < \varepsilon_x ; y - y_1 < \varepsilon_y ; \dot{x} - \dot{x}_1 < \delta_x ; \dot{y} - \dot{y}_1 < \delta_y ,$$

donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \delta_x, \delta_y$ son valores pequeños dados.

Aplicando conocidas fórmulas trigonométricas se deduce:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= - \left[2 x_0 \sin \lambda \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + 2 w \cos \lambda \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \sin \lambda \frac{\tau}{2} \\ y - y_1 &= - \left[2 y_0 \sin \mu \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + 2 v \cos \mu \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \sin \mu \frac{\tau}{2} \\ \dot{x} - \dot{x}_1 &= \left[2 \lambda x_0 \cos \lambda \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + 2 \lambda w \sin \lambda \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \sin \lambda \frac{\tau}{2} \\ \dot{y} - \dot{y}_1 &= \left[2 \mu y_0 \cos \mu \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + 2 \mu v \sin \mu \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \sin \mu \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

Las cantidades entre corchetes son acotadas y sus valores absolutos menores respectivamente de

$$2 (|x_0| + |w|), \quad 2 (|y_0| + |v|), \quad 2 \lambda (|x_0| + |w|), \quad 2 \mu (|y_0| + |v|).$$

Si pues, indicamos con r un número mayor que todos esos números y con ε un número $< \varepsilon_x, \varepsilon_y, \delta_x, \delta_y$ bastará que sea

$$\left| \sin \lambda \frac{\tau}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{r}, \quad \left| \sin \mu \frac{\tau}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{r}. \quad (8)$$

Señalemos con ϑ un número positivo suficientemente pequeño para que sea

$$\sin 2 \pi \vartheta < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Vamos a demostrar que se pueden determinar dos números enteros K_1 y K_2 y un número τ tales que

$$K_1 + \vartheta > \frac{\lambda \tau}{4\pi} > K_1 - \vartheta, \quad K_2 + \vartheta > \frac{\mu \tau}{4\pi} > K_2 - \vartheta; \quad (9)$$

será entonces

$$\left(\left| \sin \lambda \frac{\tau}{2} \right|, \left| \sin \mu \frac{\tau}{2} \right| \right) < \sin 2\pi \vartheta$$

y por lo tanto se realizará la (8).

Las relaciones (9) equivalen a

$$\vartheta > \left(\left| K_1 - \frac{\lambda \tau}{4\pi} \right|, \left| K_2 - \frac{\mu \tau}{4\pi} \right| \right).$$

Ahora bien, recordemos que siendo ρ irracional admite un desarrollo en fracción continua ilimitada. Si $P_n : Q_n$ es la reducida enésima se sabe que

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \rho \right| < \frac{1}{Q_n^2}$$

y sustituyendo ρ por su valor $\lambda : \mu$,

$$\left| \frac{P_n}{\lambda} - \frac{Q_n}{\mu} \right| < \frac{1}{\lambda Q_n}.$$

Como se sabe los números Q_n tienden a ∞ con n y por lo tanto se encontrará uno tal que:

$$\frac{1}{\lambda Q_n} < \left(\frac{\vartheta}{\lambda}, \frac{\vartheta}{\mu} \right)$$

tomando $K_1 = P_n$, $K_2 = Q_n$, resultará pues

$$\left| \frac{K_1}{\lambda} - \frac{K_2}{\mu} \right| < \left(\frac{\vartheta}{\lambda}, \frac{\vartheta}{\mu} \right)$$

y bastará elegir τ de manera que $\tau : 4\pi$ esté comprendido entre $K_1 : \lambda$ y $K_2 : \mu$ para asegurar que en ese instante el móvil

se encuentra en las condiciones de velocidad y posición que habíamos propuesto. Evidentemente siendo infinitos los pares $(P_n, Q_n) = (K_1, K_2)$, los valores de τ que satisfacen esta condición llenan un sistema infinito de intervalos espaciados entre sí.

3. — Es importante observar que el instante t puede ser cualquiera, pues, no ha influido en nada en el razonamiento; ésto equivale a decir que el móvil al cabo de cierto tiempo finito τ recorre una trayectoria tan próxima como se quiera a otra recorrida anteriormente.

Vamos a demostrar que a pesar de ello el lugar de las posiciones ocupadas por el punto llena con una densidad tan grande como se quiera un área determinada cuando el tiempo crece indefinidamente.

Demostraremos para ello que las intersecciones de la trayectoria con una paralela cualquiera a uno de los ejes constituyen un sistema de puntos denso sobre cierto segmento de dicha recta. El área de que se habla será el lugar geométrico de estos segmentos.

Si en las ecuaciones de la trayectoria ponemos $\frac{w}{x_0} = -\operatorname{tg} \lambda \varphi$; $\frac{v}{y_0} = -\operatorname{tg} \mu \psi$, por medio de una conocida transformación trigonométrica se obtiene:

$$x = a \cos \lambda (t + \varphi), \quad (10)$$

$$y = b \cos \mu (t + \psi), \quad (11)$$

donde

$$a = \frac{x_0}{\cos \lambda \varphi} \quad b = \frac{y_0}{\cos \mu \psi}.$$

Considerando la recta paralela al eje x de ecuación $y = y_1$, ella es cortada por la trayectoria en los instantes t_1 tales que

$$y_1 = b \cos \mu (t_1 + \psi).$$

Si indicamos con t_1^* una solución cualquiera de esta ecuación todas las demás están incluidas en la fórmula

$$t_1 = \frac{2k\pi}{\mu} + t_1^*.$$

Reemplazando en (10) se tiene

$$x_1 = a \cos [2\rho k\pi + \lambda(t_1^* + \varphi)]$$

y si, para simplificar la expresión, ponemos $\lambda(t_1^* + \varphi) = \vartheta$ resulta

$$x_1 = a \cos (2\rho k\pi + \vartheta). \quad (12)$$

Dando a k valores enteros cualesquiera esta fórmula nos da una sucesión de valores de x comprendidos todos en el intervalo $(-a, +a)$.

Notamos enseguida que nunca se podrá obtener dos veces el mismo valor porque, llamando k_1 y k_2 a los correspondientes valores de k , sería

$$\cos (2\rho k_1\pi + \vartheta) = \cos (2\rho k_2\pi + \vartheta)$$

es decir

$$2\rho k_1 = 2\rho k_2 + 2h,$$

$$\rho = \frac{h}{k_1 - k_2} \quad (k_1, k_2, h \text{ enteros})$$

lo cual es imposible puesto que ρ es irracional.

Ahora bien, al desarrollar ρ en fracción continua teníamos

$$|P_n - \rho Q_n| < \frac{1}{Q_n}$$

y multiplicando ambos miembros por 2π

$$|2\pi P_n - 2\pi\rho Q_n| < \frac{2\pi}{Q_n}$$

Pongamos

$$2\pi\rho Q_n = 2\pi P_n + \varepsilon \quad \text{con} \quad |\varepsilon| < \frac{2\pi}{Q_n};$$

como Q_n crece indefinidamente, será $|\varepsilon|$ tan pequeño como se quiera. Si en la expresión (12) hacemos $k=rQ_n$ con $r=1, 2, 3, \dots$ tenemos que

$$2k\pi\rho = 2Q_n r\rho\pi = 2rP_n\pi + r\varepsilon$$

y, siendo rP_n un número entero, los valores sucesivos de x_1 que se obtengan haciendo variar r serán:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= a \cos(\varepsilon + \vartheta), & x_1^{(2)} &= a \cos(2\varepsilon + \vartheta), \\ x_1^{(3)} &= a \cos(3\varepsilon + \vartheta), \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

y haciendo ε convenientemente pequeño obtendremos puntos de intersección de la trayectoria con la recta con una densidad tan grande como se quiera dentro del segmento $(-a, +a)$. Haciendo variar arbitrariamente el valor y_1 dentro del intervalo $(-b, +b)$ este segmento describe el rectángulo comprendido entre las paralelas a los ejes definidas por las ecuaciones $x=a, x=-a; y=b, y=-b$; este rectángulo constituye precisamente el área llenada por la trayectoria con una densidad tan grande como se quiera.

Con análogo razonamiento se demuestra que las intersecciones de la trayectoria con cada una de las rectas paralelas al eje y , de ecuación $x=x_1$ (donde $-a \leq x_1 \leq +a$) constituyen un sistema de puntos denso en el intervalo $(-b, +b)$ de dicha recta.

4. — Este problema puede considerarse como una esquematización parcial de la conocida experiencia del péndulo de Foucault.

En efecto, siendo el péndulo muy largo en relación a la amplitud de la oscilación, puede considerarse que su extremo se mueve sobre un plano tangente a la tierra, atraído por el punto de contacto de este plano según las leyes del movimiento armónico.

Pero como la tierra rueda alrededor de su eje, este plano tangente se desplaza. El desplazamiento instantáneo puede descomponerse primero en una traslación paralela a la tangente al paralelo geográfico más una rotación alrededor de un eje paralelo al eje terrestre y pasante por el lugar de la experien-

cia. La primera, tratándose de una traslación paralela al mismo plano de movimiento, no tiene influencia dinámica. Queda por lo tanto solo por considerar la rotación: ésta se descompone todavía en una rotación alrededor de la tangente al meridiano y otra alrededor de la normal al plano. La primera se compone con el movimiento armónico mencionado anteriormente dando lugar a un movimiento como aquel considerado en el problema. La segunda no produce reacción de vínculo y se traduce simplemente en un desplazamiento del eje de rotación.

Nos proponemos escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento aparente del péndulo respecto a los dos ejes vinculados a la tierra constituidos por la tangente al paralelo y la tangente al meridiano (eje de rotación instantáneo del plano).

El problema consiste pues en escribir la expresión de la derivada $\ddot{P}$ del punto en función de la posición P del mismo y eventualmente de su derivada $\dot{P}$ y del tiempo t .

A este objeto recordemos que vale la relación

$$\ddot{P}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+2h) - 2P(t+h) + P(t)}{h^2}. \quad (13)$$

Siendo fijado el instante t , tenemos que suponer conocida la posición inicial $P(t)$.

Para determinar $P(t+h)$ notemos que la nueva posición del punto se debe al movimiento instantáneo resultante de la atracción del punto O (origen de coordenadas) y de la rotación del plano alrededor del eje y .

Pero al final del pequeño tiempo h , los ejes a los cuales queremos referirnos no son más los iniciales x e y sino las nuevas posiciones de la tangente al meridiano y al paralelo por efecto de la rotación del plano alrededor de la normal. Por lo tanto debemos aplicar a las coordenadas de $P(t+h)$ la transformación correspondiente.

Las ecuaciones que definen el movimiento en el plano son, de acuerdo a lo que hemos visto anteriormente,

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \lambda t + w \sin \lambda t & \dot{x} &= -x_0 \lambda \sin \lambda t + w \lambda \cos \lambda t \\ y &= y_0 \cos \mu t + v \sin \mu t & \dot{y} &= -y_0 \mu \sin \mu t + v \mu \cos \mu t \end{aligned} \quad (14)$$

Como hemos dicho suponemos conocida la posición inicial, es decir al instante t ,

$$P(t) \equiv (x y). \quad (15)$$

Considerado el instante t como origen de los tiempos, es decir haciendo en lo que sigue $t=0$, se obtiene de (14), al cabo de un tiempo pequeño h y despreciando infinitésimos de orden superior:

$$\begin{aligned} \bar{x}_h &= x + \lambda w h & \dot{\bar{x}}_h &= \dot{x} - \lambda^2 x h \\ \bar{y}_h &= y + \mu v h & \dot{\bar{y}}_h &= \dot{y} - \mu^2 y h \end{aligned} \quad (16)$$

que nos dan la posición y velocidad al cabo de dicho tiempo h .

La rotación del plano alrededor del eje normal se traduce en un giro del sistema de referencia representado por

$$\begin{aligned} x &= \bar{y} \sin \alpha t + \bar{x} \cos \alpha t \\ y &= \bar{y} \cos \alpha t - \bar{x} \sin \alpha t \end{aligned} \quad (17)$$

donde α es la velocidad angular de la rotación.

Para un intervalo de tiempo infinitésimo h se obtiene, despreciando infinitésimos de orden superior:

$$\begin{aligned} x_h &= \bar{x}_h + \bar{y}_h \alpha h & \dot{x}_h &= \dot{\bar{x}}_h + \dot{\bar{y}}_h \alpha h \\ y_h &= \bar{y}_h - \bar{x}_h \alpha h & \dot{y}_h &= \dot{\bar{y}}_h - \dot{\bar{x}}_h \alpha h; \end{aligned} \quad (18)$$

y relacionando (16) y (18) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} P(t+h) &\left\{ \begin{aligned} x_h &= x + (\dot{x} + y \alpha) h \\ y_h &= y + (\dot{y} - x \alpha) h \end{aligned} \right. \\ \dot{P}(t+h) &\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_h &= \dot{x} - (\lambda^2 x - \dot{y} \alpha) h \\ \dot{y}_h &= \dot{y} - (\mu^2 y + \dot{x} \alpha) h \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (19)$$

donde, como siempre, hemos despreciado infinitésimos de segundo orden.

A partir de este punto $P(t+h)$ y con análogo razonamiento buscaremos el punto $P(t+2h)$ que nos falta para aplicar la (13). Llegaremos a una expresión análoga a la (19), pero ahora el punto de partida es el definido por las coordenadas x_h e y_h en lugar de x e y y las velocidades no son $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sino $\dot{x}_h$ e $\dot{y}_h$ dadas precisamente por la (19).

Haciendo pues en dicha expresión las sustituciones señaladas llegamos a

$$P(t+2h) \begin{cases} y_{2h} = y + 2(\dot{y} - x\alpha)h - (\mu^2 y + 2\dot{x}\alpha + y\alpha^2)h^2 \\ x_{2h} = x + 2(\dot{x} + y\alpha)h - (\lambda^2 x - 2\dot{y}\alpha + x\alpha^2)h^2 \end{cases} \quad (20)$$

sin despreciar en este caso los infinitésimos de segundo orden.

Aplicando finalmente la (13) tenemos

$$\ddot{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\lambda^2 x - 2\alpha\dot{y} + x\alpha^2)h^2}{h^2} = 2\alpha\dot{y} - x(\lambda^2 + \alpha^2) \quad (21)$$

$$\ddot{y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\mu^2 y + 2\alpha\dot{x} + y\alpha^2)h^2}{h^2} = -2\alpha\dot{x} - y(\mu^2 + \alpha^2).$$

A este paso al límite corresponden los infinitésimos despreciados a largo del cálculo; si se hubieran mantenido habrían desaparecido ahora como es fácil averiguar.

Finalmente vamos a determinar las constantes que figuran en (21).

Siendo ω la velocidad angular de la rotación terrestre y η la latitud del lugar, las componentes de dicha rotación según la normal al plano y según la tangente al meridiano son respectivamente:

$$\alpha = \omega \sin \eta, \quad \beta = \omega \cos \eta.$$

Por otra parte recordando la definición (nos 1 y 2) de λ , μ , A y B , y recordando también un cálculo que se hace en la teoría elemental del péndulo, tenemos

$$\mu^2 = A = \frac{g}{l}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y l la longitud del péndulo.

Además

$$\lambda^2 = A - B = \frac{g}{l} - \beta^2 = \frac{g}{l} - \omega^2 \cos^2 \eta$$

$$\lambda^2 + \alpha^2 = \frac{g}{l} - \omega^2 \cos 2 \eta ; \quad \mu^2 + \alpha^2 = \frac{g}{l} + \omega^2 \sin \eta$$

y bastará sustituir estos valores en (21) para tener las fórmulas definitivas. En concreto se tiene

$$\omega = \frac{2 \pi}{86400} \text{seg}^{-1} ; \quad g = 980 \text{ cm. seg}^{-2}$$

y admitiendo que l esté comprendido entre 10^3 cm. y 10^4 cm. (el péndulo de Foucault era de 67 m. de largo) se vé que los términos en ω^2 son despreciables en comparación con $g : l$ (y lo serán tanto más cuanto menor sea la longitud del péndulo).

Notamos que despreciar ω^2 equivale a despreciar β^2 , es decir no tener en cuenta los efectos de la rotación del plano del movimiento alrededor del eje tangente al meridiano. Esto explica que se pueda aceptar la teoría elemental del péndulo de Foucault, en la cual se compone simplemente el movimiento oscilatorio con la rotación del plano tangente a la tierra alrededor de la vertical del lugar.

En base a los resultados recién obtenidos las expresiones (21) toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \dot{y} \omega \sin \eta - \frac{g}{l} x \\ \ddot{y} &= -2 \dot{x} \omega \sin \eta - \frac{g}{l} y \end{aligned} \quad (22)$$

que es la misma que se encuentra (obtenida con otro procedimiento) en el tratado de P. Appell⁽¹⁾.

(1) *Traité de Mécanique Rationnelle*. T. 2, pág. 288.

5. — Appell estudia las integrales de este sistema mediante algunos artificios relacionados principalmente con el significado mecánico y dando importancia principalmente a las condiciones iniciales propias de la experiencia de Foucault. Nosotros nos proponemos estudiar las soluciones del sistema (22) desde el punto de vista de la teoría elemental de las ecuaciones diferenciales y bajo condiciones iniciales completamente generales⁽²⁾.

Para eso escribiremos las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\alpha \dot{y} + Ax &= 0 \\ \ddot{y} + 2\alpha \dot{x} + Ay &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

habiendo puesto como antes $\omega \sin \eta = \alpha$, $g : l = A$.

Pongamos ahora

$$x = C e^{rt}, \quad y = D e^{rt}$$

donde C , D y r son constantes por el momento indeterminadas.

Para que el sistema (23) admita una solución de esta forma dichas constantes deben realizar las condiciones

$$\begin{aligned} (r^2 + A)C - 2\alpha r D &= 0 \\ 2\alpha r C + (r^2 + A)D &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

que se obtienen simplemente sustituyendo en (23) las expresiones de x e y .

Para que existan valores de C y D que realicen el sistema debe verificarse que

$$\begin{vmatrix} r^2 + A & -2\alpha r \\ 2\alpha r & r^2 + A \end{vmatrix} = 0,$$

⁽²⁾ Reproducimos también del tratado de Appell la siguiente bibliografía de estudios del péndulo de Foucault, que no hemos podido consultar: SPARRE, *Mém. de l'Académie de France (Savants étrangers)* (1891) y *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* (1890-1891); E. COTTON, *Annales de la Faculté de Sciences de Grenoble* T. XXI, 1909.

es decir

$$(r^2 + A)^2 + 4 \alpha r^2 = 0, \quad r^2 + A = \pm i 2 \alpha r,$$

o sea

$$r^2 \mp i 2 \alpha r + A = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de 2º. grado en r obtenemos

$$r = \pm \alpha i \pm \sqrt{-\alpha^2 - A} = \pm i (\alpha \pm \sqrt{A + \alpha^2})$$

y poniendo para abreviar

$$\varphi = \sqrt{A + \alpha^2} + \alpha, \quad \psi = \sqrt{A + \alpha^2} - \alpha,$$

obtenemos para r los cuatro valores

$$r_1 = i \varphi, \quad r_2 = -i \varphi, \quad r_3 = i \psi, \quad r_4 = -i \psi$$

Para cada uno de estos valores de r las ecuaciones (24) se reducen a una misma, por lo cual

$$D = \frac{r^2 + A}{2 \alpha r} C$$

es decir, según el caso,

$$D = \pm \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha i \varphi} C, \quad D = \pm \frac{A - \psi^2}{2 \alpha i \psi} C.$$

La solución general de (23) vendrá dada por la combinación lineal a coeficientes indeterminados de las cuatro soluciones así determinadas:

$$x = C_1 e^{i \varphi t} + C_2 e^{-i \varphi t} + C_3 e^{i \psi t} + C_4 e^{-i \psi t} \quad (25)$$

$$y = \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha i \varphi} C_1 e^{i \varphi t} - \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha i \varphi} C_2 e^{-i \varphi t} + \frac{A - \psi^2}{2 \alpha i \psi} C_3 e^{i \psi t} - \frac{A - \psi^2}{2 \alpha i \psi} C_4 e^{-i \psi t}$$

Poniendo

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= K_1, \quad C_1 - C_2 = -iK_2, \\ C_3 + C_4 &= K_3, \quad C_3 - C_4 = -iK_4. \end{aligned}$$

las ecuaciones (25) toman la forma real

$$\begin{aligned} x &= K_1 \cos \varphi t + K_2 \sin \varphi t + K_3 \cos \psi t + K_4 \sin \psi t \\ y &= \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha \varphi} (K_1 \sin \varphi t - K_2 \cos \varphi t) \\ &\quad + \frac{A - \psi^2}{2 \alpha \psi} (K_3 \sin \psi t - K_4 \cos \psi t). \end{aligned}$$

Si todavía ponemos

$$\frac{K_2}{K_1} = -\operatorname{tg} \gamma, \quad \frac{K_4}{K_3} = -\operatorname{tg} \eta$$

y notamos además que, por la arbitrariedad de las constantes K_1, K_2, K_3, K_4 , podemos considerar $K_1 : \cos \gamma$ y $K_3 : \cos \eta$ como nuevas constantes arbitrarias que podremos indicar por k_1 y k_2 respectivamente, la solución del sistema (23) tomará finalmente la forma

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cos (\varphi t + \gamma) + k_2 \cos (\psi t + \eta) \\ y &= \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha \varphi} k_1 \sin (\varphi t + \gamma) + \frac{A - \psi^2}{2 \alpha \psi} k_2 \sin (\psi t + \eta) \end{aligned} \quad (26)$$

6. — Vamos a analizar este resultado poniéndonos en las condiciones físicas del n.º 4; en primer lugar tendremos que despreciar los términos en α^2 , por lo que será

$$\varphi = \sqrt{A} + \alpha, \quad \psi = \sqrt{A} - \alpha$$

$$\frac{A - \varphi^2}{2 \alpha \varphi} = -\frac{\sqrt{A}}{\varphi} = -\frac{\psi}{\sqrt{A}}, \quad \frac{A - \psi^2}{2 \alpha \psi} = \frac{\sqrt{A}}{\psi} = \frac{\varphi}{\sqrt{A}}$$

y la solución (26) se reduce a

$$x = k_1 \cos (\varphi t + \gamma) + k_2 \cos (\psi t + \eta) \quad (27)$$

$$y = -\frac{\phi}{\sqrt{A}} k_1 \sin (\varphi t + \gamma) + \frac{\varphi}{\sqrt{A}} k_2 \sin (\psi t + \eta).$$

Siempre teniendo en cuenta que α es un número pequeño estamos además autorizados a despreciar, en una primera aproximación, productos de la forma $\alpha \tau$ siempre que τ represente un tiempo bastante corto (que por ahora dejamos indeterminado). En estas condiciones nos proponemos estudiar la curva (27) a partir de un instante arbitrario t_1 y durante un intervalo $(t_1, t_1 + \tau^*)$, suponiendo que para $0 < \tau < \tau^*$ sea permitida dicha aproximación.

Poniendo en (27) $t = t_1 + \tau$, se desarrollan fácilmente los cálculos teniendo en cuenta que, en la aproximación admitida, $\sin \alpha \tau = 0$, $\cos \alpha \tau = 1$. Si, para abreviar, ponemos

$$\begin{aligned} k_1 \sin (\varphi t_1 + \gamma) + k_2 \sin (\psi t_1 + \eta) &= h \\ k_1 \cos (\varphi t_1 + \gamma) + k_2 \cos (\psi t_1 + \eta) &= f \\ k_1 \sin (\varphi t_1 + \gamma) - k_2 \sin (\psi t_1 + \eta) &= m \\ k_1 \cos (\varphi t_1 + \gamma) - k_2 \cos (\psi t_1 + \eta) &= n \\ \sqrt{g} : l = \sqrt{A} &= \mu \end{aligned} \quad (28)$$

resulta finalmente

$$\begin{aligned} x &= f \cos \mu \tau - h \sin \mu \tau \\ y &= (-m + \frac{\alpha}{\mu} h) \cos \mu \tau + (-n + \frac{\alpha}{\mu} f) \sin \mu \tau \end{aligned} \quad (29)$$

Comparando con la expresión (6) del n.º. 2 se reconoce que la curva representada por (29) es una elipse y el tiempo periódico de su recorrido es

$$T = \frac{2 \pi}{\mu}.$$

Observando que entonces

$$\alpha T = \frac{4 \pi^2}{86400} \sqrt{\frac{l}{g}} \cong \frac{1}{2400} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

puede efectivamente considerarse despreciable en comparación con las demás constantes físicas del problema podemos decir en conclusión que *el péndulo a partir de un instante cualquiera recorre con bastante aproximación y durante algunas oscilaciones una elipse*.

Evidentemente esta elipse, por ser solo aproximada, se deforma y desplaza al variar el tiempo t_1 de partida.

Para estudiar este desplazamiento volvamos a las fórmulas del n.º 2 que dan la posición y magnitud de los ejes de la elipse representada por (6); obtendremos los valores correspondientes a la elipse dada por (29) poniendo en lugar de x_0, y_0, w, v , los valores

$$x_0 = f, y_0 = -m + \frac{\alpha}{\mu} h, w = -h, v = -n + \frac{\alpha}{\mu} f \quad (30).$$

Resulta, despreciando siempre los términos en α^2 ,

$$\begin{aligned} x_0 y_0 + w v &= h n - f m \\ y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2 &= m^2 - f^2 + n^2 - h^2 - \frac{2\alpha}{\mu} (m h + f m) \end{aligned}$$

es decir, por (28),

$$\begin{aligned} x_0 y_0 + w v &= 2 k_1 k_2 \operatorname{sen} (-2 \alpha t_1 + \eta - \gamma) \\ y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2 &= -4 k_1 k_2 \cos (-2 \alpha t_1 + \eta - \gamma) - \frac{2\alpha}{\mu} (k_1^2 - k_2^2) \end{aligned}$$

y por lo tanto, sustituyendo en (7),

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \operatorname{tg} (-2 \alpha t_1 + \eta - \gamma) \frac{-1}{1 + \frac{\alpha}{2\mu} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2} \frac{1}{\cos (2 \alpha t_1 + \gamma - \eta)}}.$$

Notamos que, siempre despreciando los términos en α^2 , el denominador en el segundo miembro se puede considerar de la forma

$$1 + p \alpha$$

donde p es una constante; por un simple cálculo se averigua

entonces que, siempre con la misma aproximación, la expresión obtenida equivale a

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \operatorname{tg} (2 \alpha t_1 + 2 \Omega)$$

donde 2Ω es un ángulo constante de la forma $\gamma - \eta + \varepsilon \alpha$. Obtenemos así finalmente

$$\vartheta = \alpha t_1 + \Omega \quad (31)$$

es decir que los ejes de la cónica (29) giran con la velocidad constante α . Una vez determinado ϑ , bastará sustituir en las fórmulas (7') para obtener también las longitudes M , N de los ejes de la elipse. Un cierto interés tiene el cálculo de la razón $M : N$. Resulta en efecto de las fórmulas citadas del n.º 2 que

$$\frac{M}{N} = \frac{x_0 \cos \vartheta - y_0 \operatorname{sen} \vartheta}{w \operatorname{sen} \vartheta + v \cos \vartheta} = \frac{x_0 - y_0 \operatorname{tg} \vartheta}{v + w \operatorname{tg} \vartheta},$$

relación que es susceptible de un mayor análisis si se tienen en cuenta las expresiones (30), (31) y las aproximaciones con que hemos desarrollado nuestros cálculos.

Finalmente si comparamos las expresiones (6') y (17), ambas representan una rotación de los ejes coordenados pero de sentidos contrarios; siendo $\dot{\vartheta} = \alpha$, deducimos en conclusión que mientras el péndulo recorre la elipse en un sentido, la elipse a su vez gira en sentido contrario.

Pedro E. Zadunaisky

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 7 — A partir de un valor arbitrario $a_1 = a$ y siendo A una constante dada, estudiar la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$ definida por

$$a_{n+1} + \frac{a_n}{r} = A,$$

donde r es un número constante. Discutir los casos posibles según sea $|r|$ mayor, igual o menor que 1, indicando cuando dicha sucesión tiene límite. Determinar este límite.

SOLUCIÓN. Según la definición recurrente del enunciado, se tiene

$$a_1 = a$$

$$a_2 = A - \frac{a}{r}$$

$$a_3 = A - \frac{A}{r} + \frac{a}{r^2}$$

.....

$$a_n = A \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{r^{n-2}} \right) + (-1)^{n-1} \frac{a}{r^{n-1}} \quad (1)$$

Sumando la progresión geométrica de razón $-\frac{1}{r}$ que aparece en la expresión de a_n , y excluyendo por el momento el caso de ser $r = -1$, dicho término se puede escribir:

$$a_n = \frac{Ar}{1+r} + \frac{(-1)^{n-1}}{r^{n-2}} \left(\frac{a}{r} - \frac{A}{1+r} \right). \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) de a_n se prestan a la discusión completa del problema.

Caso $|r| > 1$. De la expresión (2) se deduce que la sucesión a_n es convergente, para n tendiendo a infinito, hacia el límite $\frac{Ar}{1+r}$.

Caso $r=1$. La expresión (2) se reduce a

$$a_n = \frac{A}{2} + (-1)^{n-1} \left(a - \frac{A}{2}\right).$$

Si $a \neq \frac{A}{2}$ los términos a_n toman alternativamente los valores $a_{2n} = A - a$, $a_{2n+1} = a$. Para $a = \frac{A}{2}$ todos los a_n son iguales a este mismo valor.

Caso $r=-1$. La fórmula (2) no es aplicable, pero la (1) nos dice que la sucesión de las a_n crece infinitamente si $A \neq 0$. Si $A=0$, es constantemente $a_n = a$.

Caso $|r| < 1$. La expresión (2) nos dice que la sucesión de las a_n es divergente, tomando valores alternativamente positivos y negativos superiores a todo límite, excepto para el caso de ser $a = \frac{Ar}{1+r}$, en cuyo caso todos los a_n son iguales a este valor de a .

Soluciones parciales de este problema han sido enviadas por los Sres. RAIMUNDO FAJARDO de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario y MODESTO GONZÁLEZ de San Luis.

N.º 11 — Hallar el radio del círculo para el cual a un arco de longitud dada, corresponde un segmento de área máxima.

SOLUCIÓN. El área del segmento de círculo de radio R cuyo arco correspondiente tiene la longitud dada a está dada por

$$S(R) = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{a}{R}. \quad (1)$$

Esta fórmula vale lo mismo si el arco a es mayor que una semicircunferencia, pues entonces $\frac{a}{R} > \pi$, $\sin \frac{a}{R} < 0$ y en la fórmula anterior el signo $-$ se convierte en $+$ como debe ser. Debemos hallar el máximo de la función $S(R)$ teniendo en cuenta que por tratarse de segmentos propiamente tales, debemos suponer que el arco a es menor que una circunferencia, o sea

$$0 < a \leq 2\pi R. \quad (2)$$

La derivada del área S con relación al radio R , vale

$$S'(R) = \frac{1}{2} a - R \operatorname{sen} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} a \cos \frac{a}{R},$$

y por tanto una condición necesaria de máximo es

$$\begin{aligned} S'(R) &= \frac{1}{2} a (1 + \cos \frac{a}{R}) - R \operatorname{sen} \frac{a}{R} \\ &= \cos \frac{a}{2R} (a \cos \frac{a}{2R} - 2 R \operatorname{sen} \frac{a}{2R}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Esta ecuación se realiza poniendo $= 0$ uno cualquiera de los dos factores del primer miembro, es decir o

$$\cos \frac{a}{2R} = 0 \quad (4)$$

o bien

$$\frac{a}{2R} = \operatorname{tg} \frac{a}{2R}. \quad (5)$$

Considerando como incógnita $\frac{a}{2R}$, se ve, por (2), que de estas ecuaciones habrá que considerar solo las soluciones positivas $< \pi$. En este intervalo la (5) no tiene evidentemente ninguna solución, porque en el primer cuadrante la tangente es mayor que el arco y en el segundo es negativa. Al contrario la (4) tiene evidentemente en este intervalo la solución

$$\frac{a}{2R} = \frac{\pi}{2}, \quad R = \frac{a}{\pi}.$$

Para los valores de R

$$R = \frac{a}{2\pi}, \quad \frac{a}{\pi}, \quad \infty$$

se obtiene respectivamente los valores de S

$$S = \frac{a^2}{4\pi}, \quad \frac{a^2}{2\pi}, \quad 0^{(1)}.$$

(¹). El valor $S = 0$ resulta inmediatamente del problema geométrico, porque cuando $R \rightarrow \infty$ el segmento circular se aplasta en un segmento de recta.

Se sigue que en este intervalo de valores de R existe por lo menos un máximo del área S ; y como encontramos una sola raíz de la derivada, ella debe corresponder a este máximo, el cual constituirá la solución del problema.

Se confirma esta conclusión observando que para $R = a : \pi$ la derivada segunda S'' es negativa; en efecto:

$$S''(R) = -\operatorname{sen} \frac{a}{R} + \frac{a}{R} \cos \frac{a}{R} + \frac{a^2}{2R^2} \operatorname{sen} \frac{a}{R} \quad (6)$$

$$S''\left(\frac{a}{\pi}\right) = -\pi.$$

Concluimos que *el radio del círculo para el cual es máxima el área del segmento correspondiente a un arco de longitud dada a es aquel para el cual la semicircunferencia vale esa longitud.*

Una solución de este problema fué enviada por el Dr. MANUEL SADOSKI de Buenos Aires.

Si, al considerar la función (1), se desprecia su sentido geométrico que impone la condición (2), es evidente que ha-

La función (1) toma la forma indeterminada $\infty - \infty \times 0$, lo cual hace menos fácil encontrar con el cálculo el valor verdadero. Para reducirse a una forma a la cual se apliquen las reglas ordinarias del cálculo, bastará escribir el segundo miembro de (1) en la forma

$$S(R) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\frac{a}{R} - \operatorname{sen} \frac{a}{R}}{\left(\frac{a}{R}\right)^2},$$

lo que lleva a calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$. Más cómodo es sustituir en la (1) misma en lugar de $\operatorname{sen} \frac{a}{R}$ los primeros términos del desarrollo en serie

$$\operatorname{sen} \frac{a}{R} = \frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3} + \frac{a^5}{120R^5} - \dots;$$

resulta

$$S(R) = \frac{a^3}{12R} - \dots;$$

en esta forma se ve en seguida que $\lim_{R \rightarrow \infty} S(R) = 0$.

brá que considerar otras soluciones de las ecuaciones (4), (5); se ve inmediatamente que estas soluciones nunca hacen cero el valor (6) de S'' (2); por lo tanto todas estas soluciones serán máximos o mínimos (relativos). Supongamos primero de considerar sólo los valores positivos de $a : R$; se nota entonces que las soluciones de (4) son siempre representadas por los puntos extremos del primer y tercer cuadrante, mientras las soluciones de (5) son puntos internos a estos mismos cuadrantes; por lo tanto estas soluciones, ordenadas por valores crecientes, se presentan alternativamente las de las dos ecuaciones. Concluimos que, para $a : R > 0$, las soluciones de (4) son todas máximos y aquellas de (5) son todas mínimos (3).

Finalmente notamos que, por lo dicho, en los puntos de máximo $a : R$ es siempre múltiplo de π ; por lo tanto la expresión (1) se reduce a $S(R) = \frac{1}{2} aR$ y decrece con R (es decir en cuanto crece $a : 2R$); esto demuestra que los sucesivos máximos van decreciendo y que el máximo anteriormente considerado es máximo absoluto.

(El lector podría encontrar interés en dibujar la curva que representa la función $S(R)$ y determinar su tangente en el punto $R=0$).

Para los valores negativos de $a : R$ la función (1) cambia signo (es decir que (1) es función impar de $a : R$); el estudio hecho para $a : R > 0$ informa luego completamente también sobre la otra rama de la curva; por efecto del cambio de signo, los máximos y los mínimos se cambian entre sí.

(2) En efecto, realizándose (4), resulta $S'''(R) = -\frac{a}{R}$; y realizándose (5), $S'''(R) = \frac{a^3}{4R^3} \cos^2 \frac{a}{2R}$.

(3) Lo cual está confirmado por los valores de S'' calculados en la nota precedente.

FLORES Y HOJAS

RESPUESTA

II. Donde está el error del razonamiento siguiente: Dos superficies algebraicas se cortan según una curva; consideremos una función trigonométrica del ángulo de los planos tangentes a las dos superficies en un punto variable de dicha curva, apta a caracterizar dicho ángulo (por ej. la tangente). El valor de esta tangente se vincula algebraicamente con las coordenadas de aquel punto variable; por el teorema fundamental del álgebra, existirá pues uno o más puntos de la curva que realizan el sistema de ecuaciones que se obtiene poniendo esta tangente igual a cero; es decir, que habrá siempre algún punto en el cual las dos superficies se tocan.

No habiéndose recibido hasta la fecha ninguna explicación de esta aparente paradoja, la Redacción publica la siguiente.

Nada en el razonamiento está equivocado salvo la conclusión. En efecto la afirmación de que los lados de un ángulo coinciden siempre cuando es cero su tangente es cierta solo en cuanto se admite hablar de elementos reales.

Sean $(a \ b \ c)$ los coeficientes directores de una cierta dirección fija (en el lenguaje vectorial, sean las coordenadas de cierto vector); sean $(\xi \ \eta \ \zeta)$ los coeficientes directores de otra dirección variable; la condición para que la tangente (o el seno) del ángulo de las dos direcciones sea cero se expresa por

$$(a\eta - b\xi)^2 + (b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 = 0.$$

Las rectas $(\xi \ \eta \ \zeta)$ que pasan por el origen y hacen con la recta dada un ángulo de tangente 0 constituyen por tanto un cono. Se ve fácilmente que es precisamente un par de planos, los planos (imaginarios) que pasan por la recta dada y son tangentes al círculo absoluto.

En el dominio de los números complejos (y sólo en este dominio vale el teorema fundamental del álgebra que se aplica en el razonamiento señalado), la condición de ser cero la tangente del ángulo entre dos planos (que es el mismo que el ángulo entre sus normales respectivas) no incluye luego que los

planos sean coincidentes — es decir, aplicando a los planos tangentes a las dos superficies, que en el punto considerado estas superficies sean tangentes.

Por claridad, repetimos en forma completa el razonamiento que había sido propuesto y damos después la interpretación proyectiva de la conclusión exacta.

Dadas dos superficies

$$f(xyz) = 0, \quad g(xyz) = 0, \quad (1)$$

la condición para que los planos tangentes en un punto común (xyz) formen un ángulo de tangente nula, se expresa por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (2)$$

(1) y (2) constituyen un sistema de tres ecuaciones algebraicas entre las tres incógnitas x, y, z , y, por las razones dichas en el enunciado de la cuestión, tendrán, *en general*, cierto número de soluciones comunes. La duda, que podría presentarse, de que el sistema fuese generalmente incompatible se excluye fácilmente observando que, si así fuera, en los casos de realizarse la compatibilidad, deberían tenerse infinitas soluciones comunes, de manera que la paradoja se presentaría nuevamente bajo otra forma.

Por lo tanto, como dijimos, el razonamiento es cierto hasta la afirmación de la existencia de un cierto número de puntos en los cuales el ángulo entre los planos tangentes a las dos superficies tiene tangente trigonométrica = 0.

Pasamos ahora a la interpretación proyectiva del problema. Dadas dos superficies S_1, S_2 , consideramos la superficie desarrollable de las tangentes a la curva intersección; ella corta el plano del ∞ según una línea algebraica γ de cierto orden v , la cual corta generalmente al círculo absoluto en $2v$ puntos; para cada uno de estos puntos pasa una generatriz imaginaria de aquella desarrollable, recta de intersección de dos planos tangentes en el mismo punto, uno a S_1 y el otro a S_2 ; estos dos planos son generalmente distintos; pero por dicha recta pasa un solo plano tangente al círculo absoluto. La razón do-

ble de los primeros planos y de este, contado dos veces vale 1, lo que es equivalente a decir que el ángulo entre los dos primeros planos es 0, sin que ellos coincidan.

Si las dos superficies S_1, S_2 tuvieran un punto de contacto P , el plano tangente común en P se separaría, como parte excepcional, de aquella superficie desarrollable, con una cierta multiplicidad, dependiente de la naturaleza del contacto. Este plano tangente cortaría el plano del ∞ según una recta que tendría que contarse (respecto al caso general) como parte de la curva γ ; esta recta cortaría el círculo absoluto en dos puntos a los cuales correspondería el mismo punto P de la curva de intersección. Esto demuestra que, en el caso de ser efectivamente tangentes las dos superficies en algún punto P , el número de los puntos imaginarios de la curva de intersección cuyos planos tangentes forman ángulo cero sin ser coincidentes se reduce en un cierto múltiplo de 2.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

26. Si con n representamos un número entero cualquiera (>0) el número $(4 + \sqrt{10})^n$ puede escribirse en la forma $a + b\sqrt{10}$, donde a y b son números enteros. Demostrar que a es siempre el número entero inmediatamente superior a $b\sqrt{10}$.

27. Se considera la ecuación

$$x^3 + (\alpha a + \beta)x + (\gamma a + \delta)^3 = 0,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números reales y a un parámetro. Se pide caracterizar los valores de a para los cuales la ecuación tiene las tres raíces reales. Presentándose una distinción de casos según los valores de los números $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dar ejemplos numéricos.

28. Determinar las constantes A, B, C para que la expresión

$$\frac{\sin x (1 - \cos x)}{1 + \sin x} - \frac{A}{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2} - \frac{B}{x - \frac{3\pi}{2}} - C$$

tienda a cero cuando x tiende a $\frac{3}{2}\pi$.

29. Dadas dos esferas exteriores una a la otra, encontrar sobre la parte exterior del segmento que une sus centros el punto tal que la suma de las áreas de los casquetes esféricos vistos desde él, sea un máximo. Tratar el mismo problema en el plano, considerando dos círculos en lugar de esferas.

30. Demostrar que si un punto cualquiera de una circunferencia se une con los vértices de un polígono regular inscrito de un número impar de lados, y se consideran las cuerdas obtenidas en su orden de sucesión a partir del vértice más próximo al punto considerado, la suma de las cuerdas de orden par es igual a la suma de las de orden impar.

31. Demostrar que la serie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \log n$$

es convergente para todos los valores de x . Dar acotaciones de la suma de la serie.

32. Se considera una barra rígida móvil sobre un plano, con la condición de tener sus extremos sobre dos rectas fijas de éste. Se pide el lugar de los centros instantáneos de rotación.

Suponiendo que el plano sea vertical y que la barra, sin peso propio, une dos puntos materiales de pesos dados, móviles sobre las dos rectas dadas, se pide: 1º. Determinar la posición de equilibrio de la barra; 2º. Estudiar las pequeñas oscilaciones de la barra alrededor de esta posición.

CUESTIONES

5. En el artículo *Isaac Newton y el Binomio* de este mismo fascículo de *Mathematicae Notae*, se recuerda un problema propuesto por N. Tartaglia a L. Ferrari consistiendo en la extracción de una raíz 11ª. Con precisión se trataba de determinar con la aproximación de $1/10$ dicha raíz para el número 999 999 999 999.

Se pide: 1º. Determinar dicha raíz en la forma más rápida suponiendo que no se dispone de tablas (en particular de tablas de logaritmos); 2º. Resolver el mismo problema con 5 cifras decimales exactas en la hipótesis de disponer de las tablas de logaritmos con 5 decimales. Se estimará una teoría

general para la extracción de raíces de índice elevado de números grandes, disponiendo de tablas de logaritmos con n decimales.

FLORES Y HOJAS

VI. Se pide la corrección del cálculo siguiente: Siendo m, p números enteros primos entre sí, m impar $< 2p$, se considera la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1+x^{2p}}.$$

Las raíces del denominador son, como se sabe ⁽¹⁾,

$$x_k = \exp \left(\frac{\pi i}{2p} + \frac{k\pi i}{p} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2p-1),$$

y por tanto, descomponiendo la diferencial en fracciones simples se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2p} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{(2k+1)(m-2p)\pi i}{2p} \frac{dx}{x - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \\ &= \frac{-1}{2p} \sum_k \exp \frac{(2k+1)m\pi i}{2p} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{\xi - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}{-\xi - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \\ &= \frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \sum_k \exp \frac{km\pi i}{p} - \\ &\quad \frac{1}{2p} \sum_k \exp \frac{(2k+1)m\pi i}{2p} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{1 - \frac{1}{\xi} \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}{1 + \frac{1}{\xi} \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}. \end{aligned}$$

(¹) Usamos, como se acostumbra, el signo "exp" para significar "función exponencial", equivaliendo al símbolo "e". La diferencia entre los dos signos está solamente en que, con "e" el valor del exponente se pone arriba, mientras con "exp." el valor del exponente se pone sobre la línea misma, lo cual es particularmente conveniente en el caso de que el exponente tiene una expresión complicada.

En la segunda suma los límites son evidentemente 0; queda pues solo la primera suma que puede escribirse todavía

$$\frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \sum_{k=0}^{2p-1} \left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^k = \frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \frac{1 - \left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^{2p}}{1 - e^{\frac{m\pi i}{p}}}.$$

Pero

$$\left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^{2p} = e^{2m\pi i} = 1;$$

por lo tanto el resultado final es 0. Sin embargo no hay duda de que la integral tiene valor finito $\neq 0$, puesto que la función por integrar es siempre finita > 0 para todos los valores reales de x y además en el infinito es infinitésima de orden ≤ 2 (por ser $m \leq 2p - 1$).

RESULTADO DEL CONCURSO

ENTRE LOS SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS
EN EL AÑO PRIMERO (1941)

En aplicación de lo dispuesto en el art. 4 de la ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemáticas "Mathematicae Notae" (Ver Año I, pág. 4) y de las normas establecidas en el correspondiente aviso del Concurso (ibid. pág. 5 y tapas de los demás fascículos) el director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta la fecha de problemas y ejercicios propuestos en el año primero.

En la tabla que sigue está resumido el resultado estadístico de dicho examen.

Soluciones enviadas por estudiantes de la Facultad

Nombre del estudiante	Año decurso	Nº de ej. resueltos	Nº de soluc. publicadas
Bender (Abraham H.)	1º Civil	1	—
Copello (Lorenzo O.)	3º »	4	2
Fajardo (Raimundo)	3º »	7	2
Grill (Moisés)	2º »	2	—
Krüger (Carlos A.)	2º »	1	—
Liserra (Guido O. G.)	1º »	1	—
Simian (Oscar P.)	2º »	4	1
Zadunaisky (Pedro E.)	5º »	5	2

Soluciones enviadas por personas no estudiantes de la Facultad

<i>Nombre</i>	<i>Procedencia</i>	<i>Nº de los prob. resuel.</i>	<i>Nº de las sol. public.</i>
Cohen (José)	La Plata	2	—
Escalante Giacometti (J. B.)	Tucumán	1	1
Freiberg (S.)	Tucumán	1	1
González (Modesto)	S. Luis	9	2
Gazzolo (Ester)	B. Aires	1	1
Herrera (F. E.)	Tucumán	1	—
Molinelli Wells (Mabel)	B. Aires	3	—
Sadosky (Manuel)	La Plata	2	—
Silva (Ma. del Milagro)	B. Aires	1	—
Weidenbach (R. Jorge)	B. Aires	1	—

Tomado en consideración las soluciones enviadas y los demás elementos que tenían que influir en la decisión relativa a la asignación de los premios, el Director del Instituto ha presentado al señor Decano de la Facultad Ing. Civil Cortés Plá las proposiciones que, íntegramente aprobadas, se resumen en la Resolución que se publica a continuación.

“*Expte. Letra G - nº 768/942. Rosario. 27 de julio de 1942. — Visto el precedente informe del señor Director del Instituto de Matemática, Dr. Beppo Levi, dando cuenta del concurso realizado por dicho Instituto en cumplimiento de la ordenanza del H. Consejo Directivo del 27 de septiembre de 1940; atento a lo dispuesto en los artículos 4.º y 5.º de la misma y considerando que corresponde adjudicar los premios respectivos, el Decano de la Facultad resuelve:*

Art. 1.º — Adjudicar al estudiante de la Facultad don RAIMUNDO FAJARDO el premio del Año 1941, consistente en un libro cuya elección se deja librada al señor Director del Instituto de Matemática.

Art. 2.º — Adjudicar el premio para las personas que no son estudiantes de la Facultad por el mismo año 1941, al señor MODESTO GONZÁLEZ, consistente en los volúmenes aparecidos de las Publicaciones de dicho Instituto.

Art. 3.º — Transcribir la presente resolución en el próximo fascículo del Boletín del Instituto “Mathematicae Notae”.

Art. 4.º — Comuníquese, regístrese, sáquese copia, etc. y dése cuenta al H. Consejo Directivo.

Firmados: CORTÉS PLA (Decano) LUIS AYMÍ (Secretario).

El Director desea además felicitar personalmente a todos los que han demostrado interés para la Revista, enviando soluciones y expresa la esperanza que ese interés vaya creciendo en lo sucesivo y crezca el número de los aficionados.

BIBLIOGRAFIA

ALFREDO BAÑOS JR. *Temas selectos de física atómica*. Curso de invierno de la Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México. México 1941. — 126 páginas en mimeógrafo.

El Autor de este libro es director del Instituto de Física de la Universidad Nacional de México y titular de Física Atómica. El libro resume un ciclo de conferencias ofrecido por aquella Facultad de Ciencias en los meses de enero y febrero de 1941 con el objeto, digno de la máxima consideración, de dar modo a los profesores de materias científicas en las escuelas medias de la República de profundizar y completar su cultura.

En el primer capítulo el A. introduce el concepto de átomo, tal como proviene de la química. Se recuerda luego el fenómeno de la electrolisis como la primera oportunidad para introducir los conceptos de ión y de electrón; a través de las leyes de Faraday nace el concepto de una carga electrónica constante, por lo cual se pone el problema de su determinación, de la que se podrá deducir, en particular, el número de Avogadro. Los dos párrafos siguientes tratan de la determinación experimental de esa carga y de la masa del electrón y del análisis de los rayos positivos, presentando una exposición lógica e históricamente muy buena. La descripción de las experiencias que han conducido al descubrimiento de los isotópos y de las relacionadas al estudio de la radioactividad natural proporciona una buena base para hablar de la constitución nuclear y de la equivalencia entre masa y energía. El último párrafo explica oportunamente los métodos experimentales que permitieron el análisis de las partículas para concluir con la teoría de Rutherford sobre la estructura nuclear. Estimamos que este capítulo, que es el más desarrollado, ocupando $\frac{1}{4}$ del volumen total del libro, es también aquel que corresponde mejor al programa cultural del curso.

En el segundo capítulo, titulado “Radiación Electromagnética” se empieza con breves nociones sobre la teoría electramagnética de Maxwell. para tratar después el fenómeno fotoeléctrico y los rayos X. Dando la interpretación de Einstein del fenómeno fotoeléctrico, se encuentra por primera vez la noción de cuantos de energía. Hablando de los rayos X se trata también de su difracción por los cristales.

El tercer capítulo es una breve exposición de algunos argumentos fundamentales de física teórica: hipótesis de De Broglie sobre la naturaleza ondulatoria de la materia, experiencias de Davisson y Germer y de Thomson sobre la difracción de los electrones, principio de indeterminación de Heisenberg, ecuación de Schroedinger. La dificultad de esos nuevos conceptos, conjuntamente con una excesiva brevedad y un exceso de símbolos matemáticos probablemente no claros para todos los lectores, hacen que este capítulo no alcanza toda la claridad que sería deseable.

Los capítulos IV y V están destinados a explicar la teoría del átomo de Bohr. En el primero, partiendo de las leyes experimentales de las series de rayas en el espectro del hidrógeno, se presenta con bastante claridad la teoría elemental en la hipótesis de las órbitas circulares. Se generalizan luego las hipótesis con la consideración del movimiento del núcleo de las órbitas elípticas y consecuentemente de los distintos números cuanticos; pero va desapareciendo, con el complicarse de la teoría, toda clara visión de las condiciones experimentales que justifican estas complicaciones. El cap. V retoma el problema general de la interpretación cuantista de la distribución de las rayas espectrales en los átomos cualesquiera, refiriéndose más que todo a las fórmulas empíricas, independientemente de toda verdadera teoría mecánica.

El libro termina, en el sexto capítulo titulado “La estructura del núcleo atómico”, dando algunas noticias sobre las transformaciones nucleares, el descubrimiento del neutrón, del positrón y de la radioactividad artificial.

La empresa de dar en un espacio muy reducido y para lectores no especializados una vista general sobre las modernas teorías atómicas se presentaba por si misma harto difícil; el A. ha logrado enfrentarla en algunos puntos en modo muy satisfactorio, en otros, como notamos, menos. Queremos añadir que estan cuidadas las indicaciones históricas que ayudan a comprender la rápida evolución de las ideas. Al final de cada capítulo se encuentran indicaciones bibliográficas suficientes para el caso que el lector quiera profundizar el argumento y unas figuras esquemáticas muy claras de los principales experimentos descriptos en el texto.

Para lo que se refiere al intento que ha sido el origen de este libro, no se puede ni siquiera poner en duda que, para lo que respecta a la enseñanza media, es todavía la física clásica el verdadero fundamento de la cultura. Pero, cuando los resultados admirables de las nuevas ideas, de los métodos nuevos y principalmente de la aplicación a la investigación física del progreso técnico llegan fácilmente al oído de los jóvenes a través de conversaciones, conferencias, publicaciones de toda naturaleza, a través también de la rápida influencia que a la vez estos resultados realizan a menudo sobre ese mismo progreso técnico, es imperioso que los profesores tengan conocimiento lo bastante claros como para contestar a preguntas y eliminar apreciaciones equivocadas.

LAURA LEVI

- El precio de suscripción a “Mathematicae Notae” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “Mathematicae Notae” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

INDICE DEL FASCICULO 1.

—Al empezar el segundo año...	pág. 1
—Una observación elemental sobre las ecuaciones de la balística externa (G. FUBINI)...	» 3
—Definición y condiciones de existencia de la tangente y el círculo osculador en un punto de una curva (B. LEVI)..	» 11
—Ejercicios y problemas (Propuestos)...	» 35
—Flores y Hojas...	» 36
—Recordatorio del tricentenario de Galileo y Newton...	» 38
—Ejercicios y Problemas. Soluciones...	» 40
—Flores y Hojas. Respuesta...	» 48
—Bibliografía...	» 52

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$.n.
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$.. .	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas .. .	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini .. .	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable .. .	1.00

Año 1940 - Vol. II.

1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas .. .	1.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini .. .	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo .. .	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas .. .	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático .. .	1.50
6 - E. GASPÁR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables .. .	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad .. .	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi .. .	1.50
9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas .. .	1.50

Año 1941 - Vol. III.

1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra .. .	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida .. .	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida .. .	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos .. .	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas" .. .	1.00

Año 1942 — Vol. IV

1 - M. COTLAR — Estudio de las funciones holomorfas univalentes sobre el contorno en un conjunto de medida positiva .. .	2.00
2 - A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ — Algunas aplicaciones de la integral de Stieltjes al análisis y al Cálculo de Probabilidades .. .	5.00

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEGUNDO - FASC. 2



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1942

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

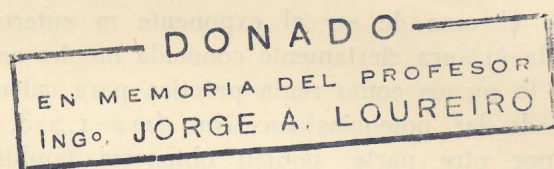
2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma y, los de primer año, además la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

INDICE

—Isaac Newton y el Binomio (L. A. SANTALÓ)	pág. 61
—Sobre el problema nº 6. - Estudio acerca del péndulo de Foucault (P. E. ZADUNAISKY)	» 73
—Ejercicios y problemas (Soluciones)	» 95
—Flores y Hojas (Respuesta)	» 100
—Ejercicios y Problemas (Propuestos)	» 102
—Cuestiones	» 103
—Flores y Hojas	» 104
—Resultado del concurso	» 105
—Bibliografía	» 107



ISAAC NEWTON Y EL BINOMIO

La primera vez que los estudiantes de matemáticas se encuentran con el nombre de Newton es cuando, en los cursos de enseñanza secundaria, aprenden la famosa *fórmula del binomio*. Se trata de la fórmula que permite expresar la potencia de una suma $(a+b)^m$ como suma de productos de potencias de los sumandos.

En los cursos elementales se supone el exponente m entero y positivo y el desarrollo consta entonces de un número finito de términos: es un polinomio. Pero los estudiantes que han llegado ya al cálculo infinitesimal saben que la fórmula del binomio sigue valiendo para exponentes cualesquiera, con la sola diferencia de que el desarrollo adquiere entonces infinitos términos: es una serie, de la cual hay que considerar, además, las condiciones de convergencia.

Con el simbolismo actual, la fórmula del binomio de Newton se escribe

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \binom{m}{n} a^{m-n} b^n + \dots \quad (1)$$

siendo

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \dots \times \frac{m-(n-1)}{n}. \quad (2)$$

La expresión (1), teniendo en cuenta los valores (2) de los coeficientes, vale para un exponente real cualquiera; sólo hay que observar que para m entero y positivo los coeficientes $\binom{m}{n}$ son todos nulos a partir de $n > m$, mientras que en los demás casos no hay ningún coeficiente que sea cero y por tanto el número de términos del segundo miembro de (1) es infinito.

Para el caso de ser el exponente m entero y positivo, la fórmula (1) era ciertamente conocida mucho antes de Newton, por lo menos como regla práctica para calcular los coeficientes de las potencias sucesivas ($m = 1, 2, 3, 4, \dots$), las cuales, por otra parte, podían obtenerse también mediante cálculos algebraicos elementales.

La *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften*, I A 2, *Kombinatorik* (Netto), cita BRIGGS (*Arithmetica logarithmica*, London, 1624) como la primera publicación donde se encuentra la regla del binomio para exponente entero y positivo, pero reconoce que MIGUEL STIFEL (en su obra *Arithmetica integra*, Nuremberg, 1544) debió haber conocido la regla práctica para el cálculo de los coeficientes de las potencias sucesivas. Más tarde, B. PASCAL en el *Traité du triangle arithmetique*, redactado en 1654 y publicado en 1665, estudia los coeficientes binomiales por su significado combinatorio y recuerda que ellos son los mismos números que van apareciendo en las bases sucesivas de sus triángulos aritméticos. La edición francesa de la misma Enciclopedia (*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. II, vol. 2, fasc. 1, pág. 34) recuerda, más precisamente, que Stifel en la obra citada, indica sin demostración un teorema equivalente a la fórmula recurrente

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$$

y BRIGGS, en la obra *Trigonometria Britannica* redactada alrededor del año 1600 y publicada por H. Gellibrand en 1633, trae una fórmula equivalente a

$$\binom{m}{n+1} = \frac{m-n}{n+1} \binom{m}{n}, \quad (3)$$

de cuyas fórmulas se deduce inmediatamente la expresión (2) para los coeficientes de los términos del binomio.

UGO CASSINA en «*Storia del triangolo Aritmetico*» (Bollettino di Matematica, Año 1923) después de admitir la posibilidad de que algunas propiedades del triángulo aritmético

(¹) Estos nombres eran sucesivamente: *censo, cubo, censo censo, primer relato, censo cubo, segundo relato, censo censo censo, cubo cubo, censo primer relato, tercer relato, cubo censo censo*, etcétera.

(²) Una sugestión para juzgar sobre el grado de estos conocimientos en aquellos tiempos podemos encontrarla en el siguiente particular que tiene por sí mismo un interés histórico. En los *Cartelli di Matematica Disfida* de Ludovico Ferrari y Nicolò Tartaglia (*I sei Cartelli di Matematica Disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Ludovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni de' quesiti dall'una e dall'altra parte proposti*. Recoliti, Autografati e Pubblicati da Enrico Giordani, Milano 1871) este último propone a su competidor de dar reglas para extraer las raíces 5, 6, 7, 11, de un número (II Cartello, Risposta. Quesiti 22, 23, 24, 25). En su contestación (V^o Cartello, pág. 47) Ludovico Ferrari cita a Miguel Stifel como el autor de haber enseñado a extraer esta suerte de raíces, pero en modo obscuro, por lo cual él considera conveniente extenderse en particulares, principalmente para los dos últimos casos. El método usado por Ferrari se basa precisamente sobre los desarrollos de las correspondientes potencias del binomio y los coeficientes de los términos sucesivos se dan para cada caso sin mayor explicación; únicamente para el caso del exponente 11 observa que “questa estrazione de radici, ha alcuni numeri peculiari, come ciascuna dell'altri” y estos números peculiares son, precisamente (salvo un cierto número de ceros que Ferrari añade por comodidad de operar en su caso particular) los coeficientes binomiales de la potencia 11. Si se considera que el cono-

Todo lo dicho prueba, por tanto, que no pertenece a Newton la prioridad de la fórmula del binomio para m entero y positivo, prioridad que probablemente tampoco se atribuyó nunca él mismo⁽³⁾. En cambio, para el caso general de ser el exponente m un número fraccionario y aún real cualquiera, el mérito parece corresponderle íntegramente.

El objeto perseguido por Newton en los trabajos que, accidentalmente, le llevaron a la fórmula del binomio, era el de obtener reglas que le permitieran la cuadratura de curvas de cualquier tipo. La idea básica consistía en *desarrollar en serie* la ecuación de la curva, para poder obtener entonces la expresión de la integral (cuadratura) como suma de las integrales de los términos sucesivos.

Parece ser que los métodos empleados por Newton para obtener el desarrollo en serie de tipos muy generales de expresiones algebraicas llegaron, por intermedio de H. Oldenburg⁽⁴⁾ a oídos de Leibniz, el cual, en carta fechada el día 30 de marzo de 1675 escribía al mismo Oldenburg preguntándole por más detalles acerca de ellos⁽⁵⁾.

cimiento tan solo del primer coeficiente (siempre igual al exponente de la potencia) habría conducido, imitando la regla de extracción de la raíz cuadrada, a operaciones probablemente más simples, se puede argumentar que en la época de Ferrari (la fecha del Cartello es de octubre de 1547) no era conocida la regla de hallar los sucesivos coeficientes a partir cada uno del anterior. Puede, por tanto, atribuirse a Briggs, no el primer conocimiento de la fórmula del binomio, pero sí la regla expresada por (3).

(3) Es curiosa la observación hecha por Newton, la cual muestra en cierta manera el interés del tiempo por los juegos de números, de que las filas sucesivas del triángulo aritmético, o sea los coeficientes del desarrollo del binomio, forman en conjunto las cifras de las potencias sucesivas de 11. Así: $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Naturalmente que para exponentes superiores a 4, al aparecer números de más de dos cifras, la regla debe modificarse.

Ver *Isaaci Newtoni Opuscula*, Collegit partimque Latine vertit ac recensuit Joh. Castillioneus. Tomus Primus. Lausannae & Genevae, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios. MDCCXLIV. Pág. 329.

(4) H. OLDEMBURG, que servía de intermediario entre Newton y Leibniz, nació en Bremen en 1626 y murió en Charlton, cerca de Greenwich, en 1678. Fue cónsul de Alemania en Londres y miembro de la Sociedad real de Ciencias de Inglaterra, teniendo a su cargo durante varios años la publicación de los *Philosophical Transactions* de dicha Sociedad.

(5) Dice la carta: "Scribis clarissimum Newtonum vestrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniisque curvarum superficierum et Soli-

Enterado Newton de estos deseos de Leibniz, no tiene inconveniente en escribir a Oldenburg una carta célebre, de fecha 13 de junio de 1676 ⁽⁶⁾, en la cual aparece, por primera vez, la fórmula del binomio para exponente racional cualquiera.

El enunciado del teorema que expresa la fórmula del binomio está expuesto al comienzo de la carta con las siguientes palabras:

«Las fracciones se reducen a series infinitas por división y las cantidades radicales por extracción de raíces, instituyendo estas operaciones sobre las expresiones algebraicas como suele hacerse para los números decimales. Estos son los fundamentos de tales reducciones.

«Pero las extracciones de raíces se abrevian mucho por el siguiente teorema:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q + \frac{m-2n}{3n} C Q + \\ + \frac{m-3n}{4n} D Q + \dots \quad (4)$$

«donde $\frac{m}{n}$ puede ser entero o fraccionario, positivo o negativo» ⁽⁷⁾.

Las letras $A, B, C, \dots$ representan, cada una, el término que precede a aquél en que ella figura. Así $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n} A Q$, $C = \frac{m-n}{2n} B Q$, etc. Esta fórmula (4) es la fórmula del binomio en la forma dada por Newton por primera vez.

dorum ex revolutione genitorum Dimensionis, et Centrorum gravitatis inventionis, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quae Methodus si est universalis et commoda, meretur aestimari; nec dubito fore ingeniosissimo Auctore dignam''. *Loc. cit.*, p. 300.

⁽⁶⁾ *Loc. cit.*, p. 307.

⁽⁷⁾ «Fractiones in infinitas Series reducuntur per Divisionem; et Quantitates Radicales per Extractionem Radicum: perinde instituendo Operationes istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Haec sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractions Radicum multum abbreviantur per hoc Theorema...''.

En esta primera carta, Newton no da, ni demostración, ni justificación alguna de como ha llegado a establecer su fórmula. Se limita a añadir, a continuación del enunciado, que «Por lo demás el uso de la regla se pone de manifiesto con ejemplos»⁽⁸⁾ y expone 9 ejemplos, algunos de los cuales reproducimos literalmente por curiosidad histórica:

$$\text{I. } \sqrt{c^2 + x^2} = (c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \dots,$$

pues, en este caso, es $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$.

$$\begin{aligned} \text{II. } \sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} &= (c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{5}} = \\ &= c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9} + \dots, \end{aligned}$$

habiendo puesto en la fórmula general $m = 1$, $n = 5$, $P = c^5$, $Q = \frac{c^4x - x^5}{c^5}$. Poniendo, en cambio, $P = -x^5$, $Q = \frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ vale $(c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{5}} = -x + \frac{c^4x + x^5}{5x^4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + c^{10}}{25x^9} + \dots$. El primer caso se elegirá si x es muy pequeño; el segundo si es muy grande⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} \text{III. } \frac{N}{\sqrt[3]{y^3 - a^2y}} &= N(y^3 - a^2y)^{-\frac{1}{3}} = N \left(\frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7} \right. \\ &\left. + \dots \right), \text{ habiendo puesto } P = y^3, Q = -\frac{a^2}{y^2}, m = -1, n = 3. \end{aligned}$$

$$\text{IV. } (d + e)^{\frac{4}{3}} = d^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}ed^{\frac{1}{3}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} + \dots$$

V. El método permite obtener las potencias enteras. Por ejem-

⁽⁸⁾ "Ceterum usus Regulae patebit Exemplis".

⁽⁹⁾ Es notable esta observación de Newton. Aunque no expone en ninguna parte condiciones de convergencia de sus desarrollos, vemos como se preocupa de elegir los términos P y Q de manera conveniente.

plo, si se desea $(d+e)^5$, basta tomar $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, $n=1$. Queda $(d+e)^5=d^5+5d^4e+10d^3e^2+10d^2e^3+5de^4+e^5$.

Esta primera carta mencionada de Newton contiene, además, ciertos métodos para el cálculo de soluciones numéricas de ecuaciones algebraicas y para el cálculo del área y otros elementos de determinadas curvas algebraicas. El método que utiliza para el cálculo aproximado de las raíces de una ecuación consiste en ir obteniendo su desarrollo en serie en función de los coeficientes, por un procedimiento que en el fondo equivale al de los coeficientes indeterminados. Por este mismo camino da también algunos ejemplos de inversión de series.

Enterado Leibniz de la carta anterior, contesta a Oldenburg (carta fechada el 27 agosto de 1676) agradeciendo el haber sido hecho partícipe de tan interesantes resultados de Newton «de cuyo ingenio son dignos». Sin embargo ruega de insistir sobre Newton por si tuviera a bien explicar con más detalle ciertos puntos de la carta mencionada, en particular «el origen del teorema enunciado al principio», refiriéndose al teorema del binomio.

Transmitidos a Newton, siempre por intermedio de Oldenburg, estos deseos de Leibniz, contesta en una segunda carta célebre, de fecha 24 octubre de 1676, en la cual expone en manera curiosa, y sin duda bien artificial, como ha llegado a la fórmula del binomio. Es la siguiente:

Desde hacía unos pocos años habían sido dadas por Wallis⁽¹⁰⁾ las expresiones de las áreas limitadas por las curvas de ecuación $y=(1-x^2)^m$, siendo m entero y positivo, comprendidas entre las ordenadas x y 0. Estas expresiones, para los primeros valores de m son, como se sabe,

$m=0$, área $=x$

$m=1$, área $=x - \frac{1}{3}x^3$

$m=2$, área $=x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ (5)

$m=3$, área $=x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$

(10) En su *Arithmetica Infinitorum*, publicada en 1656.

A partir de estas fórmulas, dice Newton: si en lugar de m entero, tomamos por ejemplo los números racionales de denominador 2, o sea $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$ bastará interpolar en las expresiones anteriores. El primer término es siempre x . Para los segundos términos se observa que están en progresión aritmética y por tanto deberá interpolarse por proporcionalidad. De esta manera los dos primeros términos de las expresiones de las áreas de $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \dots$ serán, respectivamente $x - \frac{\frac{1}{2}}{3} x^3, x - \frac{\frac{3}{2}}{3} x^3, x - \frac{\frac{5}{2}}{3} x^3, \dots$

Los denominadores de los coeficientes de las expresiones (5) se observa que van siguiendo la progresión 1, 3, 5, 7, ... y en cuanto a los numeradores se van obteniendo por los productos sucesivos de la expresión

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$$

Cuando m es entero esta sucesión de productos se termina y las expresiones (5) tienen un número finito de términos. Sin otras consideraciones, añade Newton: la regla se aplicará también para las series interpoladas, y así, por ejemplo, para el caso del círculo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo el segundo término $\frac{\frac{1}{2}}{3} x^3$, habrá que poner $m = \frac{1}{2}$ y los sucesivos nume-

radores irán siendo $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16}, \dots$

Por tanto, el área limitada por $(1-x^2)^{1/2}$ será

$$x - \frac{\frac{1}{2}}{3} x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5} x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7} x^7 - \dots$$

Sigue Newton observando que si en lugar de considerar las

áreas limitadas por las curvas de ecuación $y = (1 - x^2)^m$ se consideran los desarrollos

$$\begin{aligned}(1 - x^2)^0 &= 1 \\(1 - x^2)^1 &= 1 - x^2 \\(1 - x^2)^2 &= 1 - 2x^2 + x^4 \\(1 - x^2)^3 &= 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

se observa que los coeficientes de estos desarrollos son los numeradores de los coeficientes de los desarrollos (5) de las áreas correspondientes. Análogamente, los coeficientes de los desarrollos de las expresiones interpoladas $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, en general de $(1 - x^2)^m$, serán los numeradores de los coeficientes de los desarrollos de las áreas correspondientes, o sea, los productos sucesivos de la sucesión $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$. Como ejemplos cita Newton los siguientes:

$$\begin{aligned}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots \\(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 \dots \\(1 - x^2)^{\frac{5}{2}} &= 1 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{8}x^4 - \frac{5}{81}x^6 \dots\end{aligned}$$

Para comprobar estas reglas da, siempre en la segunda carta citada, únicamente dos razones. La primera consiste en observar que multiplicando la expresión $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \dots$ por sí misma, según la regla de multiplicación de polinomios, se obtiene efectivamente $1 - x^2$; también multiplicando tres veces la expresión $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{81}x^6 \dots$ se obtiene $1 - x^2$.

La segunda justificación se aplica nada más al caso de

exponente $\frac{1}{2}$ y consiste en observar que, efectivamente, los coeficientes dados para dicho desarrollo son los mismos que se obtienen al extraer la raíz cuadrada de $1 - x^2$ por el método aritmético representado en el siguiente esquema (que reproducimos exactamente de la carta de Newton):

$$\begin{array}{r}
 1 - x^2 \quad (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots \\
 \hline
 \frac{1}{0 - x^2} \\
 -x^2 + \frac{1}{4}x^4 \\
 \hline
 -\frac{1}{4}x^4 \\
 -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \\
 \hline
 -\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
 \end{array}$$

Una vez obtenido el desarrollo de $(1 - x^2)^m$, menciona Newton como puede obtenerse el desarrollo de expresiones análogas. Por ejemplo, para el desarrollo de la expresión general $(a \pm b)^m$ bastará escribir $(a \pm b)^m = a^m (1 \pm \frac{b}{a})^m$ y poner $\pm \frac{b}{a} = x^2$.

También observa Newton ⁽¹¹⁾ que la regla del binomio sirve para desarrollar potencias de polinomios y pone el siguiente ejemplo: para desarrollar $\sqrt{a^2 - ax + \frac{x^3}{a}}$ se pondrá $a^2 - ax = z^2$ y queda $(z^2 + \frac{x^3}{a})^{\frac{1}{2}} = z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8a^2z^3} - \dots$; basta entonces substituir las potencias (positivas o negativas) de z por sus desarrollos a partir de $z = (a^2 - ax)^{\frac{1}{2}}$.

Al final de la segunda carta Newton observa también, sin justificación alguna, que su fórmula es aplicable incluso para exponentes irracionales, y pone el ejemplo de $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\frac{3}{2\sqrt{3}}}$.

⁽¹¹⁾ En la segunda carta, *loc. cit.*, pág. 340.

Aun cuando, evidentemente, el rigor formal que se exigía a las demostraciones algebraicas de aquel tiempo no puede compararse con el actual, hay que pensar sin embargo que Newton, al proporcionar únicamente razones que hoy diríamos ser a lo sumo de un valor heurístico, tuviera el propósito de ocultar el verdadero camino por el cual habría llegado a convencerse de la seguridad matemática de la fórmula del binomio, la cual es posible que hubiera efectivamente entrevisto a través del método señalado de interpolación. Hay que recordar la costumbre común en el siglo anterior de mantener semejantes secretos científicos, que posiblemente no había desaparecido completamente, y el mismo Newton, en la citada segunda carta a Oldemborg oculta lo esencial de sus propios procedimientos por medio de un anagrama⁽¹²⁾.

Puede ser por tanto interesante buscar, en la misma obra de Newton, alguna sugestión para establecer una hipótesis razonable acerca de los fundamentos ciertos de la fórmula en la mente de Newton. El Prof. B. Levi me indica en este sentido que una dirección posible sería la basada en las siguientes consideraciones.

Se observa que Newton conocía la fórmula de derivación $\dot{x}^m = m x^{m-1} \dot{x}$; para m entero la demostración, que nosotros damos a menudo independientemente de la fórmula del binomio, para Newton se obtenía aplicando dicha fórmula o tan solo el segundo término de ella, que era bien conocido⁽¹³⁾.

⁽¹²⁾ l. c. pág. 335. — “Fundamentum harum Operationum, satis obvium quidem, (quoniam jam non possum explicationem ejus prosecui), sic potius celavi 6a ce d æ 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x”. es decir: “El fundamento de estas operaciones, bastante obvio ciertamente, (por cuanto yo no puedo continuar en su explicación) encubrí pues así...”. El anagrama está formado indicando para cada letra el número de veces que se encuentra en la frase que quiere significar; ésta era precisamente: Data æquatione quocumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa (Dada una ecuación incluyendo de cualquier modo cantidades fluentes, encontrar las fluxiones; y vice versa).

⁽¹³⁾ Ver, en la obra citada, el Opusculum II, Problema I “Data relatione, quam invicem habent fluentes Quantitas, determinare Rationem, quae inter earum Fluxiones intercedit”. Si bien este opúsculo no se imprimió por primera vez hasta el año 1736, el manuscrito existía ya desde mucho antes y en particular el problema a que nos referimos era ya conocido de Newton en la época de la segunda carta a Leibniz, pues en ella (loc. cit., pág. 335) se hace refe-

Para m número racional cualquiera, la fórmula era consecuencia de la fórmula conocida para m entero y de su método general de determinar la derivada de funciones implícitas definidas por ecuaciones algebraicas⁽¹⁴⁾. Poniendo $x = 1 + z$, Newton podía escribir según esto, una fórmula equivalente a

$$\frac{d}{dz}(1+z)^m = m(1+z)^{m-1}$$

$$m(1+z)^m = (1+z) \frac{d}{dz}(1+z)^m.$$

Por otro lado, escribiendo

$$(1+z)^m = 1 + mz + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

y admitiendo la derivabilidad de la serie término a término, lo que desde luego Newton admitía, se obtiene

$$m + m^2 z + c_2 m z^2 + c_3 m z^3 + \dots$$

$$= m + (2c_2 + m)z + (3c_3 + 2c_2)z^2 + (4c_4 + 3c_3)z^3 + \dots$$

e igualando los coeficientes homólogos resulta

$$m c_k = (k+1) c_{k+1} + k c_k, \quad c_{k+1} = \frac{m-k}{k+1} c_k$$

que da la manera recurrente de obtener los coeficientes.

Puede notarse que esta demostración no pide que m sea racional, con sólo conocer la regla de derivación para un m cualquiera.

Durante más de un siglo la fórmula de Newton fué aceptada y aplicada por los analistas sin dar una demostración sólida. Unicamente después que Lagrange (1813) y Cauchy (1826) hubieron demostrado rigurosamente la fórmula de Taylor con la evaluación del resto, se tuvo el modo de darle demostraciones completamente satisfactorias, que son esencialmente aquellas corrientes todavía en los tratados de Análisis.

Luis A. Santaló

rencia a dicho problema, precisamente mediante el anagrama citado en la nota (12)

(14) Por ejemplo, para hallar la derivada de $x^{\frac{m}{n}}$, Newton ponía $x^m = y^n$ y derivando obtenía $m x^{m-1} \dot{x} = n y^{n-1} \dot{y}$, de donde $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{m}{n} \frac{\dot{x}}{x} x^{\frac{m}{n}} - 1$.

SOBRE EL PROBLEMA N^o. 6 (Año 1, pág. 34)

ESTUDIO ACERCA DEL PÉNDULO DE FOUCAULT⁽¹⁾

El problema propuesto era el siguiente:

Un punto de masa m está vinculado a moverse sobre un plano y es atraído hacia un punto fijo O del plano por una fuerza proporcional a la distancia mientras el plano rueda alrededor de un eje situado en el plano y pasante por el punto fijo O con velocidad constante.

Escribir las ecuaciones de la trayectoria sobre el plano (movimiento relativo) y discutir el movimiento.

1. — Tomamos en el plano un sistema de ejes coordenados rectangulares haciendo coincidir el eje y con el eje de giro del plano.

El punto está solicitado por dos fuerzas:

Una proporcional a la distancia que produce una aceleración cuyas componentes según los ejes coordenados son

$$a_x = -Ax \quad , \quad a_y = -Ay,$$

donde A es una cierta constante mayor que cero.

La otra es la fuerza centrífuga debida a la rotación del plano y se sabe que produce una aceleración centrífuga en nuestro caso paralela al eje x cuyas coordenadas son

$$b_x = \frac{4\pi^2}{T^2} x = Bx \quad , \quad b_y = 0,$$

donde T es el tiempo que el plano emplea en efectuar un giro completo.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento serán pues:

⁽¹⁾ Trabajo realizado en el Instituto de Matemáticas de Rosario.

$$x'' = -(A - B)x \quad (1)$$

$$y'' = -A y \quad (2)$$

Resolveremos la (2); para la (1) el resultado será análogo.

Se verifica fácilmente que dos soluciones particulares son

$$\cos \sqrt{A} t, \quad \sin \sqrt{A} t$$

lo cual nos da como solución general

$$y = C_1 \cos \sqrt{A} t + C_2 \sin \sqrt{A} t$$

y si imponemos como condiciones iniciales que para $t=0$ se verifique

$$y = y_0, \quad \dot{y} = V_{0y}$$

resulta

$$y = y_0 \cos \sqrt{A} t + \frac{V_{0y}}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A} t. \quad (3)$$

La (1) nos da análogamente

$$x = x_0 \cos \sqrt{A - B} t + \frac{V_{0x}}{\sqrt{A - B}} \sin \sqrt{A - B} t \quad (4)$$

2. — Discusión

I) La (4) deja de ser válida si $A=B$. En este caso la (1) se reduce a $x''=0$ y su solución general es de la forma

$$x = Ct + C_1$$

que es la ecuación de un movimiento uniforme sobre el eje x .

Por las condiciones iniciales antes establecidas, resulta

$$x = V_{0x} t + x_0.$$

El punto (x, y) resulta animado de un movimiento progresivo en la dirección del eje x y periódico en dirección de

y; la trayectoria oscila entre dos paralelas simétricas respecto del eje x puesto que de la ecuación (3) resulta que los valores de y correspondientes a dos tiempos t y $t + \pi : \sqrt{A}$ tienen mismo valor absoluto y signos contrarios. También se deduce fácilmente que la trayectoria corta al eje x a intervalos de tiempo iguales a $\pi : \sqrt{A}$, y a distancias iguales a $\pi V_{0x} : \sqrt{A}$.

II) Si $A < B$; $\sqrt{A - B} = i \sqrt{B - A}$; ($B - A > 0$). La (4) nos da:

$$x = x_0 \cos i \sqrt{B - A} t + i \frac{V_{0x}}{\sqrt{B - A}} \operatorname{sen} i \sqrt{B - A} t$$

que se puede escribir también

$$x = x_0 \operatorname{Ch} \sqrt{B - A} t - \frac{V_{0x}}{\sqrt{B - A}} \operatorname{Sh} \sqrt{B - A} t.$$

Aplicando las fórmulas de Euler se obtiene fácilmente

$$x = \frac{e^{-\sqrt{B-A} t}}{2} \left(x_0 + \frac{V_{0x}}{\sqrt{B-A}} \right) + \frac{e^{-\sqrt{B-A} t}}{2} \left(x_0 - \frac{V_{0x}}{\sqrt{B-A}} \right)$$

El primer término del segundo miembro tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. El segundo término mantiene invariable su signo y crece indefinidamente en valor absoluto con t . El movimiento resultante es análogo al del caso anterior, pero ahora las distancias entre los puntos de intersección de la trayectoria con el eje x no son constantes sino que crecen con t ; cuando t es tan grande que se pueda despreciar $e^{-\sqrt{B-A} t}$ estas distancias se aproximan a los términos de una progresión geométrica cuya razón vale $e^{\pi : \sqrt{B-A}}$.

III) Si $A > B$ las fórmulas (3) y (4) representan dos movimientos armónicos ortogonales de distinto período y amplitud.

Pongamos $\sqrt{A} = \mu$ $\sqrt{A - B} = \lambda$ es decir

$$x = x_0 \cos \lambda t + \frac{V_{0x}}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t$$

$$y = y_0 \cos \mu t + \frac{V_{0y}}{\mu} \operatorname{sen} \mu t.$$

Las componentes de la velocidad son

$$\dot{x} = -x_0 \lambda \operatorname{sen} \lambda t + V_{0x} \cos \lambda t$$

$$\dot{y} = -y_0 \mu \operatorname{sen} \mu t + V_{0y} \cos \mu t.$$

De estas fórmulas resulta que y e $\dot{y}$ vuelven a tomar sus valores iniciales cada vez que el tiempo se encuentra aumentado en un valor

$$t_1 = \frac{2\pi n}{\mu} \quad (n \text{ entero}).$$

Análogamente x y $\dot{x}$ vuelven al valor inicial después de un tiempo

$$t_2 = \frac{2\pi m}{\lambda} \quad (m \text{ entero}).$$

Por consiguiente para que el móvil vuelva a tener la posición y velocidad iniciales deben ser m y n tales que $t_1 = t_2$ o sea

$$\frac{2\pi m}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\mu}, \quad \frac{m}{n} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Pueden presentarse dos casos:

a) ρ es un número racional: En este caso expresando ρ como fracción irreducible pongamos

$$\rho = \frac{p}{q}.$$

Para realizar la anterior condición es necesario y suficiente que

$$m = \eta p, \quad n = \eta q \quad (\eta \text{ entero}).$$

El movimiento resultante es por lo tanto periódico y el valor del período se obtendrá haciendo $\eta = 1$.

$$T = \frac{2\pi q}{\mu} = \frac{2\pi p}{\lambda}.$$

Estudiemos el caso particular en que $\lambda = \mu$. Se verifica evidentemente que $p = q = 1$ y el movimiento tiene por período $T = 2\pi : \lambda = 2\pi : \mu$; pero entonces debe ser

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} = 1 \quad \text{o sea} \quad B = 0$$

lo cual significa que la fuerza centrífuga es nula y ello se verifica si el plano no gira.

Para estudiar la forma de la trayectoria distingamos según sea $V_0 = 0$ ó $V_0 \neq 0$. En el primer caso las ecuaciones del movimiento se reducen a

$$x = x_0 \cos \lambda t ; y = y_0 \cos \lambda t$$

que representan una oscilación armónica sobre la recta de ecuación

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Lo mismo ocurre cuando $V_0 \neq 0$ y su dirección pasa por el origen; en efecto, en este caso

$$V_{0x} : V_{0y} = x_0 : y_0 = k$$

y las ecuaciones del movimiento resultan

$$x = x_0 (\cos \lambda t + k \operatorname{sen} \lambda t)$$

$$y = y_0 (\cos \lambda t + k \operatorname{sen} \lambda t).$$

Consideremos finalmente el caso general en que $V_0 \neq 0$ y su dirección no pasa por el origen. Vamos a demostrar que la trayectoria es entonces elíptica; para ello mostraremos como, mediante una transformación de coordenadas, las ecuaciones del movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} Y &= N \operatorname{sen} [\mu (t + \varepsilon)] \\ X &= M \cos [\mu (t + \varepsilon)] \end{aligned} \tag{5}$$

que corresponde precisamente a una elipse cuyos semiejes es-

tán orientados según los ejes X e Y y cuyas longitudes son M y N respectivamente. Las fórmulas que vamos a obtener nos serán útiles también para los desarrollos sucesivos.

Pongamos

$$\frac{V_{ox}}{\lambda} = w \quad \frac{V_{oy}}{\mu} = v ;$$

puesto que $\lambda = \mu$ tendremos

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \mu t + w \sin \mu t \\ y &= y_0 \cos \mu t + v \sin \mu t. \end{aligned} \quad (6)$$

Una rotación de los ejes nos lleva de estas ecuaciones a las siguientes:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \\ &= (x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta) \cos \mu t + (w \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \sin \mu t \\ Y &= x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \\ &= (x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta) \cos \mu t + (w \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \sin \mu t \end{aligned} \quad (6')$$

donde ϑ es el ángulo de rotación por ahora indeterminado.

Supongamos que se haya determinado ϑ de tal modo que sea

$$\frac{w \cos \vartheta - v \sin \vartheta}{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta} = \frac{-(x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta)}{w \sin \vartheta + v \cos \vartheta} = c ;$$

para eso bastará que

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \frac{2 (w v + x_0 y_0)}{y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2}. \quad (7)$$

Si entonces elegimos un ángulo ε tal que

$$-\operatorname{tg} \mu \varepsilon = c,$$

las ecuaciones (6') toman la forma:

$$\begin{aligned} X &= (x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta) (\cos \mu t - \operatorname{tg} \mu \varepsilon \sin \mu t) \\ &= \frac{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta}{\cos \mu \varepsilon} \cos [\mu (t + \varepsilon)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= (x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta) (\cos \mu t + \frac{1}{\operatorname{tg} \mu \varepsilon} \sin \mu t) \\ &= \frac{x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta}{\sin \mu \varepsilon} \sin [\mu (t + \varepsilon)] \end{aligned}$$

y haciendo

$$\frac{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta}{\cos \mu \varepsilon} = M \quad \frac{x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta}{\sin \mu \varepsilon} = N, \quad (7')$$

se obtienen las ecuaciones (5) de la elipse; el ángulo ϑ que los ejes de la misma forman respectivamente con los ejes coordenados viene dado por la expresión (7).

b) ρ es un número irracional: En este caso no se puede expresar ρ bajo la forma $\rho = p : q$ y el movimiento resultante es *casi-periódico*. Esto significa que el punto después de cierto tiempo vuelve a posiciones y velocidades tan próximas como se quiera a las que corresponden a cualquier posición tomada anteriormente pero sin pasar nunca dos veces por la misma posición con la misma velocidad.

Nos proponemos determinar el *casi-periodo* o sea el tiempo necesario para que el móvil, después de recorrer su trayectoria, se encuentre dentro de un entorno dado del punto que ocupaba en el instante t animado de una velocidad que se aproxime a la que tenía en ese instante en un valor dado. Naturalmente este *casi-periodo* variará con la anchura de los intervalos de aproximación.

Recordemos las ecuaciones del movimiento

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \lambda t + w \sin \lambda t \\ y = y_0 \cos \mu t + v \sin \mu t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x_0 \lambda \sin \lambda t + w \lambda \cos \lambda t \\ \dot{y} = -y_0 \mu \sin \mu t + v \mu \cos \mu t. \end{cases}$$

Pongamos también:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos \lambda (t + \tau) + w \operatorname{sen} \lambda (t + \tau) \\ y_1 = y_0 \cos \mu (t + \tau) + v \operatorname{sen} \mu (t + \tau) \\ \dot{x}_1 = -x_0 \lambda \operatorname{sen} \lambda (t + \tau) + w \lambda \cos \lambda (t + \tau) \\ \dot{y}_1 = -y_0 \mu \operatorname{sen} \mu (t + \tau) + v \mu \cos \mu (t + \tau) \end{cases}$$

Mostraremos que se puede hallar un valor de τ para el cual

$$x - x_1 < \varepsilon_x; y - y_1 < \varepsilon_y; \dot{x} - \dot{x}_1 < \delta_x; \dot{y} - \dot{y}_1 < \delta_y,$$

donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \delta_x, \delta_y$ son valores pequeños dados.

Aplicando conocidas fórmulas trigonométricas se deduce:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= -[2x_0 \operatorname{sen} \lambda (t + \frac{\tau}{2}) + 2w \cos \lambda (t + \frac{\tau}{2})] \operatorname{sen} \lambda \frac{\tau}{2} \\ y - y_1 &= -[2y_0 \operatorname{sen} \mu (t + \frac{\tau}{2}) + 2v \cos \mu (t + \frac{\tau}{2})] \operatorname{sen} \mu \frac{\tau}{2} \\ \dot{x} - \dot{x}_1 &= [2\lambda x_0 \cos \lambda (t + \frac{\tau}{2}) + 2\lambda w \operatorname{sen} \lambda (t + \frac{\tau}{2})] \operatorname{sen} \lambda \frac{\tau}{2} \\ \dot{y} - \dot{y}_1 &= [2\mu y_0 \cos \mu (t + \frac{\tau}{2}) + 2\mu v \operatorname{sen} \mu (t + \frac{\tau}{2})] \operatorname{sen} \mu \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

Las cantidades entre corchetes son acotadas y sus valores absolutos menores respectivamente de

$$2(|x_0| + |w|), 2(|y_0| + |v|), 2\lambda(|x_0| + |w|), 2\mu(|y_0| + |v|).$$

Si pues, indicamos con r un número mayor que todos esos números y con ε un número $< \varepsilon_x, \varepsilon_y, \delta_x, \delta_y$ bastará que sea

$$\left| \operatorname{sen} \lambda \frac{\tau}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{r}, \quad \left| \operatorname{sen} \mu \frac{\tau}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{r}. \quad (8)$$

Señalemos con ϑ un número positivo suficientemente pequeño para que sea

$$\operatorname{sen} 2\pi\vartheta < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Vamos a demostrar que se pueden determinar dos números enteros K_1 y K_2 y un número τ tales que

$$K_1 + \vartheta > \frac{\lambda \tau}{4\pi} > K_1 - \vartheta, \quad K_2 + \vartheta > \frac{\mu \tau}{4\pi} > K_2 - \vartheta; \quad (9)$$

será entonces

$$\left(\left| \sin \lambda \frac{\tau}{2} \right|, \left| \sin \mu \frac{\tau}{2} \right| \right) < \sin 2\pi \vartheta$$

y por lo tanto se realizará la (8).

Las relaciones (9) equivalen a

$$\vartheta > \left(\left| K_1 - \frac{\lambda \tau}{4\pi} \right|, \left| K_2 - \frac{\mu \tau}{4\pi} \right| \right).$$

Ahora bien, recordemos que siendo ρ irracional admite un desarrollo en fracción continua ilimitada. Si $P_n : Q_n$ es la reducida enésima se sabe que

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \rho \right| < \frac{1}{Q_n^2}$$

y sustituyendo ρ por su valor $\lambda : \mu$,

$$\left| \frac{P_n}{\lambda} - \frac{Q_n}{\mu} \right| < \frac{1}{\lambda Q_n}.$$

Como se sabe los números Q_n tienden a ∞ con n y por lo tanto se encontrará uno tal que:

$$\frac{1}{\lambda Q_n} < \left(\frac{\vartheta}{\lambda}, \frac{\vartheta}{\mu} \right)$$

tomando $K_1 = P_n$, $K_2 = Q_n$, resultará pues

$$\left| \frac{K_1}{\lambda} - \frac{K_2}{\mu} \right| < \left(\frac{\vartheta}{\lambda}, \frac{\vartheta}{\mu} \right)$$

y bastará elegir τ de manera que $\tau : 4\pi$ esté comprendido entre $K_1 : \lambda$ y $K_2 : \mu$ para asegurar que en ese instante el móvil

se encuentra en las condiciones de velocidad y posición que habíamos propuesto. Evidentemente siendo infinitos los pares $(P_n, Q_n) = (K_1, K_2)$, los valores de τ que satisfacen esta condición llenan un sistema infinito de intervalos espaciados entre sí.

3. — Es importante observar que el instante t puede ser cualquiera, pues, no ha influido en nada en el razonamiento; esto equivale a decir que el móvil al cabo de cierto tiempo finito τ recorre una trayectoria tan próxima como se quiera a otra recorrida anteriormente.

Vamos a demostrar que a pesar de ello el lugar de las posiciones ocupadas por el punto llena con una densidad tan grande como se quiera un área determinada cuando el tiempo crece indefinidamente.

Demostraremos para ello que las intersecciones de la trayectoria con una paralela cualquiera a uno de los ejes constituyen un sistema de puntos denso sobre cierto segmento de dicha recta. El área de que se habla será el lugar geométrico de estos segmentos.

Si en las ecuaciones de la trayectoria ponemos $\frac{w}{x_0} = -\operatorname{tg} \lambda \varphi$; $\frac{v}{y_0} = -\operatorname{tg} \mu \psi$, por medio de una conocida transformación trigonométrica se obtiene:

$$x = a \cos \lambda (t + \varphi), \quad (10)$$

$$y = b \cos \mu (t + \psi), \quad (11)$$

donde

$$a = \frac{x_0}{\cos \lambda \varphi} \quad b = \frac{y_0}{\cos \mu \psi}.$$

Considerando la recta paralela al eje x de ecuación $y = y_1$, ella es cortada por la trayectoria en los instantes t_1 tales que

$$y_1 = b \cos \mu (t_1 + \psi).$$

Si indicamos con t_1^* una solución cualquiera de esta ecuación todas las demás están incluidas en la fórmula

$$t_1 = \frac{2k\pi}{\mu} + t_1^*.$$

Reemplazando en (10) se tiene

$$x_1 = a \cos [2\rho k\pi + \lambda(t_1^* + \varphi)]$$

y si, para simplificar la expresión, ponemos $\lambda(t_1^* + \varphi) = \vartheta$ resulta

$$x_1 = a \cos (2\rho k\pi + \vartheta). \quad (12)$$

Dando a k valores enteros cualesquiera esta fórmula nos da una sucesión de valores de x comprendidos todos en el intervalo $(-a, +a)$.

Notamos enseguida que nunca se podrá obtener dos veces el mismo valor porque, llamando k_1 y k_2 a los correspondientes valores de k , sería

$$\cos (2\rho k_1\pi + \vartheta) = \cos (2\rho k_2\pi + \vartheta)$$

es decir

$$2\rho k_1 = 2\rho k_2 + 2h,$$

$$\rho = \frac{h}{k_1 - k_2} \quad (k_1, k_2, h \text{ enteros})$$

lo cual es imposible puesto que ρ es irracional.

Ahora bien, al desarrollar ρ en fracción continua teníamos

$$|P_n - \rho Q_n| < \frac{1}{Q_n}$$

y multiplicando ambos miembros por 2π

$$|2\pi P_n - 2\pi\rho Q_n| < \frac{2\pi}{Q_n}$$

Pongamos

$$2\pi\rho Q_n = 2\pi P_n + \varepsilon \quad \text{con} \quad |\varepsilon| < \frac{2\pi}{Q_n};$$

como Q_n crece indefinidamente, será $|\varepsilon|$ tan pequeño como se quiera. Si en la expresión (12) hacemos $k=rQ_n$ con $r=1, 2, 3, \dots$ tenemos que

$$2k\pi\rho = 2Q_n r\rho\pi = 2rP_n\pi + r\varepsilon$$

y, siendo rP_n un número entero, los valores sucesivos de x_1 que se obtengan haciendo variar r serán:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= a \cos(\varepsilon + \vartheta), & x_1^{(2)} &= a \cos(2\varepsilon + \vartheta), \\ x_1^{(3)} &= a \cos(3\varepsilon + \vartheta), \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

y haciendo ε convenientemente pequeño obtendremos puntos de intersección de la trayectoria con la recta con una densidad tan grande como se quiera dentro del segmento $(-a, +a)$. Haciendo variar arbitrariamente el valor y_1 dentro del intervalo $(-b, +b)$ este segmento describe el rectángulo comprendido entre las paralelas a los ejes definidas por las ecuaciones $x=a, x=-a; y=b, y=-b$; este rectángulo constituye precisamente el área llenada por la trayectoria con una densidad tan grande como se quiera.

Con análogo razonamiento se demuestra que las intersecciones de la trayectoria con cada una de las rectas paralelas al eje y , de ecuación $x=x_1$ (donde $-a \leq x_1 \leq +a$) constituyen un sistema de puntos denso en el intervalo $(-b, +b)$ de dicha recta.

4. — Este problema puede considerarse como una esquematización parcial de la conocida experiencia del péndulo de Foucault.

En efecto, siendo el péndulo muy largo en relación a la amplitud de la oscilación, puede considerarse que su extremo se mueve sobre un plano tangente a la tierra, atraído por el punto de contacto de este plano según las leyes del movimiento armónico.

Pero como la tierra rueda alrededor de su eje, este plano tangente se desplaza. El desplazamiento instantáneo puede descomponerse primero en una traslación paralela a la tangente al paralelo geográfico más una rotación alrededor de un eje paralelo al eje terrestre y pasante por el lugar de la experien-

cia. La primera, tratándose de una traslación paralela al mismo plano de movimiento, no tiene influencia dinámica. Queda por lo tanto solo por considerar la rotación: ésta se descompone todavía en una rotación alrededor de la tangente al meridiano y otra alrededor de la normal al plano. La primera se compone con el movimiento armónico mencionado anteriormente dando lugar a un movimiento como aquel considerado en el problema. La segunda no produce reacción de vínculo y se traduce simplemente en un desplazamiento del eje de rotación.

Nos proponemos escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento aparente del péndulo respecto a los dos ejes vinculados a la tierra constituidos por la tangente al paralelo y la tangente al meridiano (eje de rotación instantáneo del plano).

El problema consiste pues en escribir la expresión de la derivada $\ddot{P}$ del punto en función de la posición P del mismo y eventualmente de su derivada $\dot{P}$ y del tiempo t .

A este objeto recordemos que vale la relación

$$\ddot{P}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+2h) - 2P(t+h) + P(t)}{h^2}. \quad (13)$$

Siendo fijado el instante t , tenemos que suponer conocida la posición inicial $P(t)$.

Para determinar $P(t+h)$ notemos que la nueva posición del punto se debe al movimiento instantáneo resultante de la atracción del punto O (origen de coordenadas) y de la rotación del plano alrededor del eje y .

Pero al final del pequeño tiempo h , los ejes a los cuales queremos referirnos no son más los iniciales x e y sino las nuevas posiciones de la tangente al meridiano y al paralelo por efecto de la rotación del plano alrededor de la normal. Por lo tanto debemos aplicar a las coordenadas de $P(t+h)$ la transformación correspondiente.

Las ecuaciones que definen el movimiento en el plano son, de acuerdo a lo que hemos visto anteriormente,

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \lambda t + w \sin \lambda t & \dot{x} &= -x_0 \lambda \sin \lambda t + w \lambda \cos \lambda t \\ y &= y_0 \cos \mu t + v \sin \mu t & \dot{y} &= -y_0 \mu \sin \mu t + v \mu \cos \mu t \end{aligned} \quad (14)$$

Como hemos dicho suponemos conocida la posición inicial, es decir al instante t ,

$$P(t) \equiv (x \ y) . \quad (15)$$

Considerado el instante t como origen de los tiempos, es decir haciendo en lo que sigue $t=0$, se obtiene de (14), al cabo de un tiempo pequeño h y despreciando infinitésimos de orden superior:

$$\begin{aligned} \bar{x}_h &= x + \lambda w h & \dot{\bar{x}}_h &= \dot{x} - \lambda^2 x h \\ \bar{y}_h &= y + \mu v h & \dot{\bar{y}}_h &= \dot{y} - \mu^2 y h \end{aligned} \quad (16)$$

que nos dan la posición y velocidad al cabo de dicho tiempo h .

La rotación del plano alrededor del eje normal se traduce en un giro del sistema de referencia representado por

$$\begin{aligned} x &= \bar{y} \sin \alpha t + \bar{x} \cos \alpha t \\ y &= \bar{y} \cos \alpha t - \bar{x} \sin \alpha t \end{aligned} \quad (17)$$

donde α es la velocidad angular de la rotación.

Para un intervalo de tiempo infinitésimo h se obtiene, despreciando infinitésimos de orden superior:

$$\begin{aligned} x_h &= \bar{x}_h + \bar{y}_h \alpha h & \dot{x}_h &= \dot{\bar{x}}_h + \dot{\bar{y}}_h \alpha h \\ y_h &= \bar{y}_h - \bar{x}_h \alpha h & \dot{y}_h &= \dot{\bar{y}}_h - \dot{\bar{x}}_h \alpha h; \end{aligned} \quad (18)$$

y relacionando (16) y (18) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} P(t+h) &\left\{ \begin{aligned} x_h &= x + (\dot{x} + y \alpha) h \\ y_h &= y + (\dot{y} - x \alpha) h \end{aligned} \right. \\ \dot{P}(t+h) &\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_h &= \dot{x} - (\lambda^2 x - \dot{y} \alpha) h \\ \dot{y}_h &= \dot{y} - (\mu^2 y + \dot{x} \alpha) h \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (19)$$

donde, como siempre, hemos despreciado infinitésimos de segundo orden.

A partir de este punto $P(t+h)$ y con análogo razonamiento buscaremos el punto $P(t+2h)$ que nos falta para aplicar la (13). Llegaremos a una expresión análoga a la (19), pero ahora el punto de partida es el definido por las coordenadas x_h e y_h en lugar de x e y y las velocidades no son $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sino $\dot{x}_h$ e $\dot{y}_h$ dadas precisamente por la (19).

Haciendo pues en dicha expresión las sustituciones señaladas llegamos a

$$P(t+2h) \begin{cases} y_{2h} = y + 2(\dot{y} - x\alpha)h - (\mu^2 y + 2\dot{x}\alpha + y\alpha^2)h^2 \\ x_{2h} = x + 2(\dot{x} + y\alpha)h - (\lambda^2 x - 2\dot{y}\alpha + x\alpha^2)h^2 \end{cases} \quad (20)$$

sin despreciar en este caso los infinitésimos de segundo orden.

Aplicando finalmente la (13) tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\lambda^2 x - 2\alpha\dot{y} + x\alpha^2)h^2}{h^2} = 2\alpha\dot{y} - x(\lambda^2 + \alpha^2) \\ \ddot{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\mu^2 y + 2\dot{x}\alpha + y\alpha^2)h^2}{h^2} = -2\alpha\dot{x} - y(\mu^2 + \alpha^2). \end{aligned} \quad (21)$$

A este paso al límite corresponden los infinitésimos despreciados a largo del cálculo; si se hubieran mantenido habrían desaparecido ahora como es fácil averiguar.

Finalmente vamos a determinar las constantes que figuran en (21).

Siendo ω la velocidad angular de la rotación terrestre y η la latitud del lugar, las componentes de dicha rotación según la normal al plano y según la tangente al meridiano son respectivamente:

$$\alpha = \omega \sin \eta, \quad \beta = \omega \cos \eta.$$

Por otra parte recordando la definición (nos 1 y 2) de λ , μ , A y B , y recordando también un cálculo que se hace en la teoría elemental del péndulo, tenemos

$$\mu^2 = A = \frac{g}{l}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y l la longitud del péndulo.

Además

$$\lambda^2 = A - B = \frac{g}{l} - \beta^2 = \frac{g}{l} - \omega^2 \cos^2 \eta$$

$$\lambda^2 + \alpha^2 = \frac{g}{l} - \omega^2 \cos 2\eta ; \quad \mu^2 + \alpha^2 = \frac{g}{l} + \omega^2 \sin \eta$$

y bastará sustituir estos valores en (21) para tener las fórmulas definitivas. En concreto se tiene

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{seg}^{-1} ; \quad g = 980 \text{ cm. seg}^{-2}$$

y admitiendo que l esté comprendido entre 10^3 cm. y 10^4 cm. (el péndulo de Foucault era de 67 m. de largo) se vé que los términos en ω^2 son despreciables en comparación con $g : l$ (y lo serán tanto más cuanto menor sea la longitud del péndulo).

Notamos que despreciar ω^2 equivale a despreciar β^2 , es decir no tener en cuenta los efectos de la rotación del plano del movimiento alrededor del eje tangente al meridiano. Esto explica que se pueda aceptar la teoría elemental del péndulo de Foucault, en la cual se compone simplemente el movimiento oscilatorio con la rotación del plano tangente a la tierra alrededor de la vertical del lugar.

En base a los resultados recién obtenidos las expresiones (21) toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \dot{y} \omega \sin \eta - \frac{g}{l} x \\ \ddot{y} &= -2 \dot{x} \omega \sin \eta - \frac{g}{l} y \end{aligned} \quad (22)$$

que es la misma que se encuentra (obtenida con otro procedimiento) en el tratado de P. Appell⁽¹⁾.

(1) *Traité de Mécanique Rationnelle*. T. 2, pág. 288.

5. — Appell estudia las integrales de este sistema mediante algunos artificios relacionados principalmente con el significado mecánico y dando importancia principalmente a las condiciones iniciales propias de la experiencia de Foucault. Nosotros nos proponemos estudiar las soluciones del sistema (22) desde el punto de vista de la teoría elemental de las ecuaciones diferenciales y bajo condiciones iniciales completamente generales⁽²⁾.

Para eso escribiremos las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\alpha \dot{y} + A x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\alpha \dot{x} + A y &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

habiendo puesto como antes $\omega \sin \eta = \alpha$, $g : l = A$.

Pongamos ahora

$$x = C e^{rt}, \quad y = D e^{rt}$$

donde C , D y r son constantes por el momento indeterminadas.

Para que el sistema (23) admita una solución de esta forma dichas constantes deben realizar las condiciones

$$\begin{aligned} (r^2 + A) C - 2\alpha r D &= 0 \\ 2\alpha r C + (r^2 + A) D &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

que se obtienen simplemente sustituyendo en (23) las expresiones de x e y .

Para que existan valores de C y D que realicen el sistema debe verificarse que

$$\begin{vmatrix} r^2 + A & -2\alpha r \\ 2\alpha r & r^2 + A \end{vmatrix} = 0,$$

⁽²⁾ Reproducimos también del tratado de Appell la siguiente bibliografía de estudios del péndulo de Foucault, que no hemos podido consultar: SPARRE, *Mém. de l'Académie de France (Savants étrangers)* (1891) y *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* (1890-1891); E. COTTON, *Annales de la Faculté de Sciences de Grenoble* T. XXI, 1909.

es decir

$$(r^2 + A)^2 + 4 \alpha r^2 = 0, \quad r^2 + A = \pm i 2 \alpha r,$$

o sea

$$r^2 \mp i 2 \alpha r + A = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de 2º. grado en r obtenemos

$$r = \pm \alpha i \pm \sqrt{-\alpha^2 - A} = \pm i (\alpha \pm \sqrt{A + \alpha^2})$$

y poniendo para abreviar

$$\varphi = \sqrt{A + \alpha^2} + \alpha, \quad \psi = \sqrt{A + \alpha^2} - \alpha,$$

obtenemos para r los cuatro valores

$$r_1 = i \varphi, \quad r_2 = -i \varphi, \quad r_3 = i \psi, \quad r_4 = -i \psi$$

Para cada uno de estos valores de r las ecuaciones (24) se reducen a una misma, por lo cual

$$D = \frac{r^2 + A}{2 \alpha r} C$$

es decir, según el caso,

$$D = \pm \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha i \varphi} C, \quad D = \pm \frac{A - \psi^2}{2 \alpha i \psi} C.$$

La solución general de (23) vendrá dada por la combinación lineal a coeficientes indeterminados de las cuatro soluciones así determinadas:

$$x = C_1 e^{i \varphi t} + C_2 e^{-i \varphi t} + C_3 e^{i \psi t} + C_4 e^{-i \psi t} \quad (25)$$

$$y = \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha i \varphi} C_1 e^{i \varphi t} - \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha i \varphi} C_2 e^{-i \varphi t} + \frac{A - \psi^2}{2 \alpha i \psi} C_3 e^{i \psi t} - \frac{A - \psi^2}{2 \alpha i \psi} C_4 e^{-i \psi t}$$

Poniendo

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= K_1, \quad C_1 - C_2 = -iK_2, \\ C_3 + C_4 &= K_3, \quad C_3 - C_4 = -iK_4. \end{aligned}$$

las ecuaciones (25) toman la forma real

$$\begin{aligned} x &= K_1 \cos \varphi t + K_2 \sin \varphi t + K_3 \cos \psi t + K_4 \sin \psi t \\ y &= \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha \varphi} (K_1 \sin \varphi t - K_2 \cos \varphi t) \\ &\quad + \frac{A - \psi^2}{2 \alpha \psi} (K_3 \sin \psi t - K_4 \cos \psi t). \end{aligned}$$

Si todavía ponemos

$$\frac{K_2}{K_1} = -\operatorname{tg} \gamma, \quad \frac{K_4}{K_3} = -\operatorname{tg} \eta$$

y notamos además que, por la arbitrariedad de las constantes K_1, K_2, K_3, K_4 , podemos considerar $K_1 : \cos \gamma$ y $K_3 : \cos \eta$ como nuevas constantes arbitrarias que podremos indicar por k_1 y k_2 respectivamente, la solución del sistema (23) tomará finalmente la forma

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cos (\varphi t + \gamma) + k_2 \cos (\psi t + \eta) \\ y &= \frac{A - \varphi^2}{2 \alpha \varphi} k_1 \sin (\varphi t + \gamma) + \frac{A - \psi^2}{2 \alpha \psi} k_2 \sin (\psi t + \eta) \end{aligned} \quad (26)$$

6. — Vamos a analizar este resultado poniéndonos en las condiciones físicas del n.º 4; en primer lugar tendremos que despreciar los términos en α^2 , por lo que será

$$\varphi = \sqrt{A} + \alpha, \quad \psi = \sqrt{A} - \alpha$$

$$\frac{A - \varphi^2}{2 \alpha \varphi} = -\frac{\sqrt{A}}{\varphi} = -\frac{\psi}{\sqrt{A}}, \quad \frac{A - \psi^2}{2 \alpha \psi} = \frac{\sqrt{A}}{\psi} = \frac{\varphi}{\sqrt{A}}$$

y la solución (26) se reduce a

$$x = k_1 \cos(\varphi t + \gamma) + k_2 \cos(\psi t + \eta) \quad (27)$$

$$y = -\frac{\phi}{\sqrt{A}} k_1 \sin(\varphi t + \gamma) + \frac{\varphi}{\sqrt{A}} k_2 \sin(\psi t + \eta).$$

Siempre teniendo en cuenta que α es un número pequeño estamos además autorizados a despreciar, en una primera aproximación, productos de la forma $\alpha\tau$ siempre que τ represente un tiempo bastante corto (que por ahora dejamos indeterminado). En estas condiciones nos proponemos estudiar la curva (27) a partir de un instante arbitrario t_1 y durante un intervalo $(t_1, t_1 + \tau^*)$, suponiendo que para $0 < \tau < \tau^*$ sea permitida dicha aproximación.

Poniendo en (27) $t = t_1 + \tau$, se desarrollan fácilmente los cálculos teniendo en cuenta que, en la aproximación admitida, $\sin \alpha\tau = 0$, $\cos \alpha\tau = 1$. Si, para abreviar, ponemos

$$\begin{aligned} k_1 \sin(\varphi t_1 + \gamma) + k_2 \sin(\psi t_1 + \eta) &= h \\ k_1 \cos(\varphi t_1 + \gamma) + k_2 \cos(\psi t_1 + \eta) &= f \\ k_1 \sin(\varphi t_1 + \gamma) - k_2 \sin(\psi t_1 + \eta) &= m \\ k_1 \cos(\varphi t_1 + \gamma) - k_2 \cos(\psi t_1 + \eta) &= n \\ \sqrt{g : l} = \sqrt{A} &= \mu \end{aligned} \quad (28)$$

resulta finalmente

$$\begin{aligned} x &= f \cos \mu \tau - h \sin \mu \tau \\ y &= (-m + \frac{\alpha}{\mu} h) \cos \mu \tau + (-n + \frac{\alpha}{\mu} f) \sin \mu \tau \end{aligned} \quad (29)$$

Comparando con la expresión (6) del n.º. 2 se reconoce que la curva representada por (29) es una elipse y el tiempo periódico de su recorrido es

$$T = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Observando que entonces

$$\alpha T = \frac{4\pi^2}{86400} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx \frac{1}{2400} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

puede efectivamente considerarse despreciable en comparación con las demás constantes físicas del problema podemos decir en conclusión que *el péndulo a partir de un instante cualquiera recorre con bastante aproximación y durante algunas oscilaciones una elipse*.

Evidentemente esta elipse, por ser solo aproximada, se deforma y desplaza al variar el tiempo t_1 de partida.

Para estudiar este desplazamiento volvamos a las fórmulas del n.º 2 que dan la posición y magnitud de los ejes de la elipse representada por (6); obtendremos los valores correspondientes a la elipse dada por (29) poniendo en lugar de x_0, y_0, w, v , los valores

$$x_0 = f, y_0 = -m + \frac{\alpha}{\mu} h, w = -h, v = -n + \frac{\alpha}{\mu} f \quad (30).$$

Resulta, despreciando siempre los términos en α^2 ,

$$\begin{aligned} x_0 y_0 + w v &= h n - f m \\ y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2 &= m^2 - f^2 + n^2 - h^2 - \frac{2\alpha}{\mu} (m h + f f) \end{aligned}$$

es decir, por (28),

$$\begin{aligned} x_0 y_0 + w v &= 2 k_1 k_2 \operatorname{sen} (-2 \alpha t_1 + \eta - \gamma) \\ y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2 &= -4 k_1 k_2 \cos (-2 \alpha t_1 + \eta - \gamma) - \frac{2\alpha}{\mu} (k_1^2 - k_2^2) \end{aligned}$$

y por lo tanto, sustituyendo en (7),

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \operatorname{tg} (-2 \alpha t_1 + \eta - \gamma) \frac{-1}{1 + \frac{\alpha}{2\mu} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2} \frac{1}{\cos (2 \alpha t_1 + \gamma - \eta)}}.$$

Notamos que, siempre despreciando los términos en α^2 , el denominador en el segundo miembro se puede considerar de la forma

$$1 + p \alpha$$

donde p es una constante; por un simple cálculo se averigua

entonces que, siempre con la misma aproximación, la expresión obtenida equivale a

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = \operatorname{tg} (2 \alpha t_1 + 2 \Omega)$$

donde 2Ω es un ángulo constante de la forma $\gamma - \eta + \varepsilon \alpha$. Obtenemos así finalmente

$$\vartheta = \alpha t_1 + \Omega \quad (31)$$

es decir que los ejes de la cónica (29) giran con la velocidad constante α . Una vez determinado ϑ , bastará sustituir en las fórmulas (7') para obtener también las longitudes M , N de los ejes de la elipse. Un cierto interés tiene el cálculo de la razón $M : N$. Resulta en efecto de las fórmulas citadas del n.º 2 que

$$\frac{M}{N} = \frac{x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta}{w \sin \vartheta + v \cos \vartheta} = \frac{x_0 - y_0 \operatorname{tg} \vartheta}{v + w \operatorname{tg} \vartheta},$$

relación que es susceptible de un mayor análisis si se tienen en cuenta las expresiones (30), (31) y las aproximaciones con que hemos desarrollado nuestros cálculos.

Finalmente si comparamos las expresiones (6') y (17), ambas representan una rotación de los ejes coordenados pero de sentidos contrarios; siendo $\dot{\vartheta} = \alpha$, deducimos en conclusión que mientras el péndulo recorre la elipse en un sentido, la elipse a su vez gira en sentido contrario.

Pedro E. Zadunaisky

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 7 — A partir de un valor arbitrario $a_1 = a$ y siendo A una constante dada, estudiar la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$ definida por

$$a_{n+1} + \frac{a_n}{r} = A,$$

donde r es un número constante. Discutir los casos posibles según sea $|r|$ mayor, igual o menor que 1, indicando cuando dicha sucesión tiene límite. Determinar este límite.

SOLUCIÓN. Según la definición recurrente del enunciado, se tiene

$$a_1 = a$$

$$a_2 = A - \frac{a}{r}$$

$$a_3 = A - \frac{A}{r} + \frac{a}{r^2}$$

.....

$$a_n = A \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{r^{n-2}} \right) + (-1)^{n-1} \frac{a}{r^{n-1}} \quad (1)$$

Sumando la progresión geométrica de razón $-\frac{1}{r}$ que aparece en la expresión de a_n y excluyendo por el momento el caso de ser $r = -1$, dicho término se puede escribir:

$$a_n = \frac{Ar}{1+r} + \frac{(-1)^{n-1}}{r^{n-2}} \left(\frac{a}{r} - \frac{A}{1+r} \right). \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) de a_n se prestan a la discusión completa del problema.

Caso $|r| > 1$. De la expresión (2) se deduce que la sucesión a_n es convergente, para n tendiendo a infinito, hacia el límite $\frac{Ar}{1+r}$.

Caso $r=1$. La expresión (2) se reduce a

$$a_n = \frac{A}{2} + (-1)^{n-1} \left(a - \frac{A}{2}\right).$$

Si $a \neq \frac{A}{2}$ los términos a_n toman alternativamente los valores $a_{2n} = A - a$, $a_{2n+1} = a$. Para $a = \frac{A}{2}$ todos los a_n son iguales a este mismo valor.

Caso $r=-1$. La fórmula (2) no es aplicable, pero la (1) nos dice que la sucesión de las a_n crece infinitamente si $A \neq 0$. Si $A=0$, es constantemente $a_n = a$.

Caso $|r| < 1$. La expresión (2) nos dice que la sucesión de las a_n es divergente, tomando valores alternativamente positivos y negativos superiores a todo límite, excepto para el caso de ser $a = \frac{Ar}{1+r}$, en cuyo caso todos los a_n son iguales a este valor de a .

Soluciones parciales de este problema han sido enviadas por los Sres. RAIMUNDO FAJARDO de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario y MODESTO GONZÁLEZ de San Luis.

N.º 11 — Hallar el radio del círculo para el cual a un arco de longitud dada, corresponde un segmento de área máxima.

SOLUCIÓN. El área del segmento de círculo de radio R cuyo arco correspondiente tiene la longitud dada a está dada por

$$S(R) = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{a}{R}. \quad (1)$$

Esta fórmula vale lo mismo si el arco a es mayor que una semicircunferencia, pues entonces $\frac{a}{R} > \pi$, $\sin \frac{a}{R} < 0$ y en la fórmula anterior el signo $-$ se convierte en $+$ como debe ser. Debemos hallar el máximo de la función $S(R)$ teniendo en cuenta que por tratarse de segmentos propiamente tales, debemos suponer que el arco a es menor que una circunferencia, o sea

$$0 < a \leq 2\pi R. \quad (2)$$

La derivada del área S con relación al radio R , vale

$$S'(R) = \frac{1}{2} a - R \operatorname{sen} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} a \cos \frac{a}{R},$$

y por tanto una condición necesaria de máximo es

$$\begin{aligned} S'(R) &= \frac{1}{2} a (1 + \cos \frac{a}{R}) - R \operatorname{sen} \frac{a}{R} \\ &= \cos \frac{a}{2R} (a \cos \frac{a}{2R} - 2 R \operatorname{sen} \frac{a}{2R}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Esta ecuación se realiza poniendo $= 0$ uno cualquiera de los dos factores del primer miembro, es decir o

$$\cos \frac{a}{2R} = 0 \quad (4)$$

o bien

$$\frac{a}{2R} = \operatorname{tg} \frac{a}{2R}. \quad (5)$$

Considerando como incógnita $\frac{a}{2R}$, se ve, por (2), que de estas ecuaciones habrá que considerar solo las soluciones positivas $< \pi$. En este intervalo la (5) no tiene evidentemente ninguna solución, porque en el primer cuadrante la tangente es mayor que el arco y en el segundo es negativa. Al contrario la (4) tiene evidentemente en este intervalo la solución

$$\frac{a}{2R} = \frac{\pi}{2}, \quad R = \frac{a}{\pi}.$$

Para los valores de R

$$R = \frac{a}{2\pi}, \quad \frac{a}{\pi}, \quad \infty$$

se obtiene respectivamente los valores de S

$$S = \frac{a^2}{4\pi}, \quad \frac{a^2}{2\pi}, \quad 0^{(1)}.$$

(1). El valor $S = 0$ resulta inmediatamente del problema geométrico, porque cuando $R \rightarrow \infty$ el segmento circular se aplasta en un segmento de recta.

Se sigue que en este intervalo de valores de R existe por lo menos un máximo del área S ; y como encontramos una sola raíz de la derivada, ella debe corresponder a este máximo, el cual constituirá la solución del problema.

Se confirma esta conclusión observando que para $R = a : \pi$ la derivada segunda S'' es negativa; en efecto:

$$S''(R) = -\operatorname{sen} \frac{a}{R} + \frac{a}{R} \cos \frac{a}{R} + \frac{a^2}{2R^2} \operatorname{sen} \frac{a}{R} \quad (6)$$

$$S''\left(\frac{a}{\pi}\right) = -\pi.$$

Concluimos que *el radio del círculo para el cual es máxima el área del segmento correspondiente a un arco de longitud dada a es aquel para el cual la semicircunferencia vale esa longitud.*

Una solución de este problema fué enviada por el Dr. MANUEL SADOSKI de Buenos Aires.

Si, al considerar la función (1), se desprecia su sentido geométrico que impone la condición (2), es evidente que ha-

La función (1) toma la forma indeterminada $\infty - \infty \times 0$, lo cual hace menos fácil encontrar con el cálculo el valor verdadero. Para reducirse a una forma a la cual se apliquen las reglas ordinarias del cálculo, bastará escribir el segundo miembro de (1) en la forma

$$S(R) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\frac{a}{R} - \operatorname{sen} \frac{a}{R}}{\left(\frac{a}{R}\right)^2},$$

lo que lleva a calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$. Más cómodo es sustituir en la (1) misma en lugar de $\operatorname{sen} \frac{a}{R}$ los primeros términos del desarrollo en serie

$$\operatorname{sen} \frac{a}{R} = \frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3} + \frac{a^5}{120R^5} - \dots;$$

resulta

$$S(R) = \frac{a^3}{12R} - \dots;$$

en esta forma se ve en seguida que $\lim_{R \rightarrow \infty} S(R) = 0$.

brá que considerar otras soluciones de las ecuaciones (4), (5); se ve inmediatamente que estas soluciones nunca hacen cero el valor (6) de S'' ⁽²⁾; por lo tanto todas estas soluciones serán máximos o mínimos (relativos). Supongamos primero de considerar sólo los valores positivos de $a : R$; se nota entonces que las soluciones de (4) son siempre representadas por los puntos extremos del primer y tercer cuadrante, mientras las soluciones de (5) son puntos internos a estos mismos cuadrantes; por lo tanto estas soluciones, ordenadas por valores crecientes, se presentan alternativamente las de las dos ecuaciones. Concluimos que, para $a : R > 0$, las soluciones de (4) son todas máximos y aquellas de (5) son todas mínimos ⁽³⁾.

Finalmente notamos que, por lo dicho, en los puntos de máximo $a : R$ es siempre múltiplo de π ; por lo tanto la expresión (1) se reduce a $S(R) = \frac{1}{2} aR$ y decrece con R (es decir en cuanto crece $a : 2R$); esto demuestra que los sucesivos máximos van decreciendo y que el máximo anteriormente considerado es máximo absoluto.

(El lector podría encontrar interés en dibujar la curva que representa la función $S(R)$ y determinar su tangente en el punto $R=0$).

Para los valores negativos de $a : R$ la función (1) cambia signo (es decir que (1) es función impar de $a : R$); el estudio hecho para $a : R > 0$ informa luego completamente también sobre la otra rama de la curva; por efecto del cambio de signo, los máximos y los mínimos se cambian entre sí.

⁽²⁾ En efecto, realizándose (4), resulta $S''(R) = -\frac{a}{R}$; y realizándose (5), $S''(R) = \frac{a^3}{4R^3} \cos^2 \frac{a}{2R}$.

⁽³⁾ Lo cual está confirmado por los valores de S'' calculados en la nota precedente.

FLORES Y HOJAS

RESPUESTA

II. Donde está el error del razonamiento siguiente: Dos superficies algebraicas se cortan según una curva; consideremos una función trigonométrica del ángulo de los planos tangentes a las dos superficies en un punto variable de dicha curva, apta a caracterizar dicho ángulo (por ej. la tangente). El valor de esta tangente se vincula algebraicamente con las coordenadas de aquel punto variable; por el teorema fundamental del álgebra, existirá pues uno o más puntos de la curva que realizan el sistema de ecuaciones que se obtiene poniendo esta tangente igual a cero; es decir, que habrá siempre algún punto en el cual las dos superficies se tocan.

No habiéndose recibido hasta la fecha ninguna explicación de esta aparente paradoja, la Redacción publica la siguiente.

Nada en el razonamiento está equivocado salvo la conclusión. En efecto la afirmación de que los lados de un ángulo coinciden siempre cuando es cero su tangente es cierta solo en cuanto se admite hablar de elementos reales.

Sean $(a \ b \ c)$ los coeficientes directores de una cierta dirección fija (en el lenguaje vectorial, sean las coordenadas de cierto vector); sean $(\xi \ \eta \ \zeta)$ los coeficientes directores de otra dirección variable; la condición para que la tangente (o el seno) del ángulo de las dos direcciones sea cero se expresa por

$$(a\eta - b\xi)^2 + (b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 = 0.$$

Las rectas $(\xi \ \eta \ \zeta)$ que pasan por el origen y hacen con la recta dada un ángulo de tangente 0 constituyen por tanto un cono. Se ve fácilmente que es precisamente un par de planos, los planos (imaginarios) que pasan por la recta dada y son tangentes al círculo absoluto.

En el dominio de los números complejos (y sólo en este dominio vale el teorema fundamental del álgebra que se aplica en el razonamiento señalado), la condición de ser cero la tangente del ángulo entre dos planos (que es el mismo que el ángulo entre sus normales respectivas) no incluye luego que los

planos sean coincidentes — es decir, aplicando a los planos tangentes a las dos superficies, que en el punto considerado estas superficies sean tangentes.

Por claridad, repetimos en forma completa el razonamiento que había sido propuesto y damos después la interpretación proyectiva de la conclusión exacta.

Dadas dos superficies

$$f(xyz) = 0, \quad g(xyz) = 0, \quad (1)$$

la condición para que los planos tangentes en un punto común (xyz) formen un ángulo de tangente nula, se expresa por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 = 0. \quad (2)$$

(1) y (2) constituyen un sistema de tres ecuaciones algebraicas entre las tres incógnitas x, y, z , y, por las razones dichas en el enunciado de la cuestión, tendrán, *en general*, cierto número de soluciones comunes. La duda, que podría presentarse, de que el sistema fuese generalmente incompatible se excluye fácilmente observando que, si así fuera, en los casos de realizarse la compatibilidad, deberían tenerse infinitas soluciones comunes, de manera que la paradoja se presentaría nuevamente bajo otra forma.

Por lo tanto, como dijimos, el razonamiento es cierto hasta la afirmación de la existencia de un cierto número de puntos en los cuales el ángulo entre los planos tangentes a las dos superficies tiene tangente trigonométrica = 0.

Pasamos ahora a la interpretación proyectiva del problema. Dadas dos superficies S_1, S_2 , consideramos la superficie desarrollable de las tangentes a la curva intersección; ella corta el plano del ∞ según una línea algebraica γ de cierto orden v , la cual corta generalmente al círculo absoluto en $2v$ puntos; para cada uno de estos puntos pasa una generatriz imaginaria de aquella desarrollable, recta de intersección de dos planos tangentes en el mismo punto, uno a S_1 y el otro a S_2 ; estos dos planos son generalmente distintos; pero por dicha recta pasa un solo plano tangente al círculo absoluto. La razón do-

ble de los primeros planos y de este, contado dos veces vale 1, lo que es equivalente a decir que el ángulo entre los dos primeros planos es 0, sin que ellos coincidan.

Si las dos superficies S_1, S_2 tuvieran un punto de contacto P , el plano tangente común en P se separaría, como parte excepcional, de aquella superficie desarrollable, con una cierta multiplicidad, dependiente de la naturaleza del contacto. Este plano tangente cortaría el plano del ∞ según una recta que tendría que contarse (respecto al caso general) como parte de la curva γ ; esta recta cortaría el círculo absoluto en dos puntos a los cuales correspondería el mismo punto P de la curva de intersección. Esto demuestra que, en el caso de ser efectivamente tangentes las dos superficies en algún punto P , el número de los puntos imaginarios de la curva de intersección cuyos planos tangentes forman ángulo cero sin ser coincidentes se reduce en un cierto múltiplo de 2.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

26. Si con n representamos un número entero cualquiera (>0) el número $(4 + \sqrt{10})^n$ puede escribirse en la forma $a + b\sqrt{10}$, donde a y b son números enteros. Demostrar que a es siempre el número entero inmediatamente superior a $b\sqrt{10}$.

27. Se considera la ecuación

$$x^3 + (\alpha a + \beta)x + (\gamma a + \delta)^3 = 0,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números reales y a un parámetro. Se pide caracterizar los valores de a para los cuales la ecuación tiene las tres raíces reales. Presentándose una distinción de casos según los valores de los números $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dar ejemplos numéricos.

28. Determinar las constantes A, B, C para que la expresión

$$\frac{\sin x (1 - \cos x)}{1 + \sin x} - \frac{A}{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2} - \frac{B}{x - \frac{3\pi}{2}} - C$$

tienda a cero cuando x tiende a $\frac{3}{2}\pi$.

29. Dadas dos esferas exteriores una a la otra, encontrar sobre la parte exterior del segmento que une sus centros el punto tal que la suma de las áreas de los casquetes esféricos vistos desde él, sea un máximo. Tratar el mismo problema en el plano, considerando dos círculos en lugar de esferas.

30. Demostrar que si un punto cualquiera de una circunferencia se une con los vértices de un polígono regular inscrito de un número impar de lados, y se consideran las cuerdas obtenidas en su orden de sucesión a partir del vértice más próximo al punto considerado, la suma de las cuerdas de orden par es igual a la suma de las de orden impar.

31. Demostrar que la serie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \log n$$

es convergente para todos los valores de x . Dar acotaciones de la suma de la serie.

32. Se considera una barra rígida móvil sobre un plano, con la condición de tener sus extremos sobre dos rectas fijas de éste. Se pide el lugar de los centros instantáneos de rotación.

Suponiendo que el plano sea vertical y que la barra, sin peso propio, une dos puntos materiales de pesos dados, móviles sobre las dos rectas dadas, se pide: 1º. Determinar la posición de equilibrio de la barra; 2º. Estudiar las pequeñas oscilaciones de la barra alrededor de esta posición.

CUESTIONES

5. En el artículo *Isaac Newton y el Binomio* de este mismo fascículo de *Mathematicae Notae*, se recuerda un problema propuesto por N. Tartaglia a L. Ferrari consistiendo en la extracción de una raíz 11ª. Con precisión se trataba de determinar con la aproximación de $1/10$ dicha raíz para el número 999 999 999 999.

Se pide: 1º. Determinar dicha raíz en la forma más rápida suponiendo que no se dispone de tablas (en particular de tablas de logaritmos); 2º. Resolver el mismo problema con 5 cifras decimales exactas en la hipótesis de disponer de las tablas de logaritmos con 5 decimales. Se estimará una teoría

general para la extracción de raíces de índice elevado de números grandes, disponiendo de tablas de logaritmos con n decimales.

FLORES Y HOJAS

VI. Se pide la corrección del cálculo siguiente: Siendo m, p números enteros primos entre sí, m impar $< 2p$, se considera la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1+x^{2p}}.$$

Las raíces del denominador son, como se sabe ⁽¹⁾,

$$x_k = \exp \left(\frac{\pi i}{2p} + \frac{k\pi i}{p} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2p-1),$$

y por tanto, descomponiendo la diferencial en fracciones simples se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2p} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{(2k+1)(m-2p)\pi i}{2p} \frac{dx}{x - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \\ &= \frac{-1}{2p} \sum_k \exp \frac{(2k+1)m\pi i}{2p} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{\xi - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}{-\xi - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \\ &= \frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \sum_k \exp \frac{km\pi i}{p} - \\ &\quad \frac{1}{2p} \sum_k \exp \frac{(2k+1)m\pi i}{2p} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{1 - \frac{1}{\xi} \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}{1 + \frac{1}{\xi} \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Usamos, como se acostumbra, el signo "exp" para significar "función exponencial", equivaliendo al símbolo "e". La diferencia entre los dos signos está solamente en que, con "e" el valor del exponente se pone arriba, mientras con "exp." el valor del exponente se pone sobre la línea misma, lo cual es particularmente conveniente en el caso de que el exponente tiene una expresión complicada.

En la segunda suma los límites son evidentemente 0; queda pues solo la primera suma que puede escribirse todavía

$$\frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \sum_{k=0}^{2p-1} \left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^k = \frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \frac{1 - \left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^{2p}}{1 - e^{\frac{m\pi i}{p}}}.$$

Pero

$$\left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^{2p} = e^{2m\pi i} = 1;$$

por lo tanto el resultado final es 0. Sin embargo no hay duda de que la integral tiene valor finito $\neq 0$, puesto que la función por integrar es siempre finita > 0 para todos los valores reales de x y además en el infinito es infinitésima de orden ≤ 2 (por ser $m \leq 2p - 1$).

RESULTADO DEL CONCURSO

ENTRE LOS SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS
EN EL AÑO PRIMERO (1941)

En aplicación de lo dispuesto en el art. 4 de la ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemáticas "Mathematicae Notae" (Ver Año I, pág. 4) y de las normas establecidas en el correspondiente aviso del Concurso (ibid. pág. 5 y tapas de los demás fascículos) el director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta la fecha de problemas y ejercicios propuestos en el año primero.

En la tabla que sigue está resumido el resultado estadístico de dicho examen.

Soluciones enviadas por estudiantes de la Facultad

Nombre del estudiante	Año decurso	Nº de ej. resueltos	Nº de soluc. publicadas
Bender (Abraham H.)	1º Civil	1	—
Copello (Lorenzo O.)	3º »	4	2
Fajardo (Raimundo)	3º »	7	2
Grill (Moisés)	2º »	2	—
Krüger (Carlos A.)	2º »	1	—
Liserra (Guido O. G.)	1º »	1	—
Simian (Oscar P.)	2º »	4	1
Zadunaisky (Pedro E.)	5º »	5	2

Soluciones enviadas por personas no estudiantes de la Facultad

<i>Nombre</i>	<i>Procedencia</i>	<i>Nº de los prob. resuel.</i>	<i>Nº de las sol. public.</i>
Cohen (José)	La Plata	2	—
Escalante Giacometti (J. B.)	Tucumán	1	1
Freiberg (S.)	Tucumán	1	1
González (Modesto)	S. Luis	9	2
Gazzolo (Ester)	B. Aires	1	1
Herrera (F. E.)	Tucumán	1	—
Molinelli Wells (Mabel)	B. Aires	3	—
Sadosky (Manuel)	La Plata	2	—
Silva (Ma. del Milagro)	B. Aires	1	—
Weidenbach (R. Jorge)	B. Aires	1	—

Tomado en consideración las soluciones enviadas y los demás elementos que tenían que influir en la decisión relativa a la asignación de los premios, el Director del Instituto ha presentado al señor Decano de la Facultad Ing. Civil Cortés Plá las proposiciones que, íntegramente aprobadas, se resumen en la Resolución que se publica a continuación.

“*Expte. Letra G - nº 768/942. Rosario. 27 de julio de 1942. — Visto el precedente informe del señor Director del Instituto de Matemática, Dr. Beppo Levi, dando cuenta del concurso realizado por dicho Instituto en cumplimiento de la ordenanza del H. Consejo Directivo del 27 de septiembre de 1940; atento a lo dispuesto en los artículos 4.º y 5.º de la misma y considerando que corresponde adjudicar los premios respectivos, el Decano de la Facultad resuelve:*

Art. 1.º — Adjudicar al estudiante de la Facultad don RAIMUNDO FAJARDO el premio del Año 1941, consistente en un libro cuya elección se deja librada al señor Director del Instituto de Matemática.

Art. 2.º — Adjudicar el premio para las personas que no son estudiantes de la Facultad por el mismo año 1941, al señor MODESTO GONZÁLEZ, consistente en los volúmenes aparecidos de las Publicaciones de dicho Instituto.

Art. 3.º — Transcribir la presente resolución en el próximo fascículo del Boletín del Instituto “Mathematicae Notae”.

Art. 4.º — Comuníquese, regístrese, sáquese copia, etc. y dése cuenta al H. Consejo Directivo.

Firmados: CORTÉS PLA (Decano) LUIS AYMÍ (Secretario).

El Director desea además felicitar personalmente a todos los que han demostrado interés para la Revista, enviando soluciones y expresa la esperanza que ese interés vaya creciendo en lo sucesivo y crezca el número de los aficionados.

BIBLIOGRAFIA

ALFREDO BAÑOS JR. *Temas selectos de física atómica*. Curso de invierno de la Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México. México 1941. — 126 páginas en mimeógrafo.

El Autor de este libro es director del Instituto de Física de la Universidad Nacional de México y titular de Física Atómica. El libro resume un ciclo de conferencias ofrecido por aquella Facultad de Ciencias en los meses de enero y febrero de 1941 con el objeto, digno de la máxima consideración, de dar modo a los profesores de materias científicas en las escuelas medias de la República de profundizar y completar su cultura.

En el primer capítulo el A. introduce el concepto de átomo, tal como proviene de la química. Se recuerda luego el fenómeno de la electrolisis como la primera oportunidad para introducir los conceptos de ión y de electrón; a través de las leyes de Faraday nace el concepto de una carga electrónica constante, por lo cual se pone el problema de su determinación, de la que se podrá deducir, en particular, el número de Avogadro. Los dos párrafos siguientes tratan de la determinación experimental de esa carga y de la masa del electrón y del análisis de los rayos positivos, presentando una exposición lógica e históricamente muy buena. La descripción de las experiencias que han conducido al descubrimiento de los isótopos y de las relacionadas al estudio de la radioactividad natural proporciona una buena base para hablar de la constitución nuclear y de la equivalencia entre masa y energía. El último párrafo explica oportunamente los métodos experimentales que permitieron el análisis de las partículas para concluir con la teoría de Rutherford sobre la estructura nuclear. Estimamos que este capítulo, que es el más desarrollado, ocupando $\frac{1}{4}$ del volumen total del libro, es también aquel que corresponde mejor al programa cultural del curso.

En el segundo capítulo, titulado “Radiación Electromagnética” se empieza con breves nociones sobre la teoría electromagnética de Maxwell. para tratar después el fenómeno fotoeléctrico y los rayos X. Dando la interpretación de Einstein del fenómeno fotoeléctrico, se encuentra por primera vez la noción de cuantos de energía. Hablando de los rayos X se trata también de su difracción por los cristales.

El tercer capítulo es una breve exposición de algunos argumentos fundamentales de física teórica: hipótesis de De Broglie sobre la naturaleza ondulatoria de la materia, experiencias de Davisson y Germer y de Thomson sobre la difracción de los electrones, principio de indeterminación de Heisenberg, ecuación de Schroedinger. La dificultad de esos nuevos conceptos, conjuntamente con una excesiva brevedad y un exceso de símbolos matemáticos probablemente no claros para todos los lectores, hacen que este capítulo no alcanza toda la claridad que sería deseable.

Los capítulos IV y V están destinados a explicar la teoría del átomo de Bohr. En el primero, partiendo de las leyes experimentales de las series de rayas en el espectro del hidrógeno, se presenta con bastante claridad la teoría elemental en la hipótesis de las órbitas circulares. Se generalizan luego las hipótesis con la consideración del movimiento del núcleo de las órbitas elípticas y consecuentemente de los distintos números cuánticos; pero va desapareciendo, con el complicarse de la teoría, toda clara visión de las condiciones experimentales que justifican estas complicaciones. El cap. V retoma el problema general de la interpretación cuantista de la distribución de las rayas espectrales en los átomos cualesquiera, refiriéndose más que todo a las fórmulas empíricas, independientemente de toda verdadera teoría mecánica.

El libro termina, en el sexto capítulo titulado “La estructura del núcleo atómico”, dando algunas noticias sobre las transformaciones nucleares, el descubrimiento del neutrón, del positrón y de la radioactividad artificial.

La empresa de dar en un espacio muy reducido y para lectores no especializados una vista general sobre las modernas teorías atómicas se presentaba por si misma harto difícil; el A. ha logrado enfrentarla en algunos puntos en modo muy satisfactorio, en otros, como notamos, menos. Queremos añadir que estan cuidadas las indicaciones históricas que ayudan a comprender la rápida evolución de las ideas. Al final de cada capítulo se encuentran indicaciones bibliográficas suficientes para el caso que el lector quiera profundizar el argumento y unas figuras esquemáticas muy claras de los principales experimentos descriptos en el texto.

Para lo que se refiere al intento que ha sido el origen de este libro, no se puede ni siquiera poner en duda que, para lo que respecta a la enseñanza media, es todavía la física clásica el verdadero fundamento de la cultura. Pero, cuando los resultados admirables de las nuevas ideas, de los métodos nuevos y principalmente de la aplicación a la investigación física del progreso técnico llegan fácilmente al oído de los jóvenes a través de conversaciones, conferencias, publicaciones de toda naturaleza, a través también de la rápida influencia que a la vez estos resultados realizan a menudo sobre ese mismo progreso técnico, es imperioso que los profesores tengan conocimiento lo bastante claro como para contestar a preguntas y eliminar apreciaciones equivocadas.

LAURA LEVI

- El precio de suscripción a “Mathematicae Notae” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “Mathematicae Notae” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

INDICE DEL FASCICULO 1.

—Al empezar el segundo año..	pág. 1
—Una observación elemental sobre las ecuaciones de la balística externa (G. FUBINI)..	» 3
—Definición y condiciones de existencia de la tangente y el círculo osculador en un punto de una curva (B. LEVI)..	» 11
—Ejercicios y problemas (Propuestos)..	» 35
—Flores y Hojas..	» 36
—Recordatorio del tricentenario de Galileo y Newton.. . . .	» 38
—Ejercicios y Problemas. Soluciones..	» 40
—Flores y Hojas. Respuesta..	» 48
—Bibliografía..	» 52

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$.n.
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$.. .	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas .. .	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini .. .	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable .. .	1.00

Año 1940 - Vol. II.

1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas .. .	1.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini .. .	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo .. .	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas .. .	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático .. .	1.50
6 - E. GASPÁR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables .. .	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad .. .	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi .. .	1.50
9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas .. .	1.50

Año 1941 - Vol. III.

1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra .. .	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida .. .	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida .. .	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos .. .	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas" .. .	1.00

Año 1942 — Vol. IV

1 - M. COTLAR — Estudio de las funciones holomorfas univalentes sobre el contorno en un conjunto de medida positiva .. .	2.00
2 - A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ — Algunas aplicaciones de la integral de Stieltjes al análisis y al Cálculo de Probabilidades .. .	5.00