Pagura, José Alberto
Puigsubirá, Cristina Raquel
Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística.
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística
Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario

DISEÑO ROBUSTO DE PARAMETROS. ALTERNATIVAS BASADAS EN DISEÑO ÓPTIMO.

1. INTRODUCCIÓN

Una preocupación permanente en quienes desarrollan un producto o proceso, es la calidad de ellos. Generalmente, definidas las características de calidad deseadas, se reconocerán diferentes clases de factores que pueden afectarlas. Algunos de estos factores son características propias de los productos o procesos (tipo de material, temperatura del proceso, etc.). Estudiando su influencia sobre las características de calidad se podrán elegir aquellas variantes de los mismos que proporcionen los mejores resultados en términos de las características de calidad consideradas. Otros, son aquellos cuyo efecto se pone de manifiesto en el momento de uso de los mismos y no pueden controlarse en la fase de diseño. Como ejemplo puede mencionarse la fabricación de una cubierta de automóvil. Esta puede construirse con un material durable, que tenga adherencia al suelo y otras características deseables, pero posiblemente las diferentes modalidades de conducción del vehículo podrían influir cambiando la duración media, etc.. Se podrá elegir el material que de los mejores resultados, pero luego la cubierta será utilizada por conductores con diferentes características.

El primero de los dos conjuntos de factores mencionados se denomina "factores de control" mientras que al segundo se los llama "de ruido". Se dice que un producto o proceso es robusto, cuando mantiene sus características de calidad con un mínimo de variabilidad en presencia de ese conjunto de factores incontrolables (de ruido).

La necesidad de obtener productos o procesos robustos lleva a considerar la experimentación como herramienta fundamental, para el estudio de la naturaleza de las relaciones de los factores con las características de calidad de interés (variable respuesta). Por este motivo, el diseño de experimentos adquiere particular relevancia y su correcta utilización permitirá obtener resultados útiles para definir aquellas condiciones óptimas para la obtención de los niveles de calidad deseados.

Para lograr productos y procesos robustos, se han desarrollado diferentes propuestas de diseños experimentales las que se agrupan bajo la denominación de diseños robustos o diseños robustos de parámetros.

El primero de los aportes a estos procedimientos se debe a Genichi Taguchi (1986), quien plantea la realización de diseños experimentales conocidos como diseños cruzados. Estos se construyen a partir de una fracción factorial cuyos "nc" tratamientos se definen a partir de las combinaciones de los diferentes niveles de los factores de control, combinando cada tratamiento con los "nr" de otro diseño factorial fraccionario definido a partir de los factores de ruido. El análisis de los resultados obtenidos en los ensayos realizados se lleva a cabo tomando como variable respuesta una medida resumen llamada ratio señal-ruido (SNR), la que refleja la relación existente entre la variabilidad observada en las pruebas realizadas para cada tratamiento de los factores de control y el valor medio del mismo. SNR tiene una fórmula diferente según el objetivo perseguido con la característica de calidad. El cálculo del

SNR tiene como consecuencia que el número de valores de la variable respuesta es “nc” y no $N=nc_x nr$ que es la cantidad de ensayos a realizar.

La metodología de Taguchi se encuentra actualmente muy divulgada en el ámbito de la industria, habiendo sin embargo, sido objeto de diversas críticas. Autores como Nair(1992) quien reune en el artículo citado, opiniones autorizadas, han puesto de manifiesto una serie de inconvenientes que tienen estos diseños, encontrando entre los más destacados, la pérdida de información en la que se incurre en el análisis de datos y la imposibilidad de analizar forma en la que los factores de ruido actúan sobre la característica de calidad en cuestión. Por otra parte, debe mencionarse que la robustez presupone existencia de interacción entre los factores de control y de ruido; un análisis adecuado debería tener en cuenta este hecho y considerar la posibilidad de estudiar dichas interacciones, lo que los métodos de Taguchi no hacen.

Junto a estas críticas, aparecen alternativas que posibilitarían la obtención de resultados con mayor riqueza de conocimientos. Algunas de ellas se basan en emplear toda la información dada por los $nc_X nr$ ensayos que se realizan, si es que ellos son independientes -Prat y otros (2000)-. Otra de las soluciones planteadas se ha dado a conocer como modelización directa de la respuesta, y se basa en la construcción de modelos de regresión para el valor medio y la variancia de la respuesta. Recientemente, Romero (2002) y Romero y otros (2007), han enunciado métodos basados en la realización de diseños experimentales para la estimación de parámetros del modelo de regresión que describe la relación de la variable respuesta con los factores de control y de ruido y las interacciones entre ellos . Dichos autores indican el uso de diseños óptimos, cuya teoría no se encuentra muy divulgada en la actualidad en nuestro medio, que permitan estimar con precisión aquellos parámetros del modelo que sean de interés, dando un conjunto de diseños para una serie de casos particulares.

El presente trabajo forma parte de una investigación más extensa que se desarrolla con el objetivo de analizar la metodología existente para el diseño robusto de parámetros, aplicarla en situaciones particulares, algunas del contexto industrial y otras correspondientes a áreas donde su aplicación no es tan convencional, y evaluar ventajas y desventajas de las diferentes propuestas. En el mismo, y en el contexto de la divulgación de los trabajos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad, se presenta una reseña de los conceptos fundamentales del diseño óptimo de experimentos, metodología básica en las propuestas más recientes. En fases posteriores se prevee la aplicación de estos planes experimentales a situaciones del contexto industrial y de ámbitos en los que la aplicación de los diseños experimentales no es tan frecuente, como lo es el desarrollo de un Sistema Recomendador de Turismo (T-Agent).

2. EL DISEÑO ÓPTIMO DE EXPERIMENTOS

El propósito del diseño óptimo de experimentos es encontrar, para los factores que se estudian y para niveles posibles de los mismos, es decir para una región experimental definida E_x, los niveles de los factores que proporcionen las mejores estimaciones, en determinado sentido, de los coeficientes del modelo de regresión que describe la relación existente entre dichos factores y una variable respuesta. Los primeros desarrollos de la teoría de diseño óptimo de experimentos se deben a Kieffer y Wolfowitz (1959, 1960), apareciendo luego como lo más destacado en el tema el libro escrito por Atkinson y Donev (1992).

Resulta evidente que además de decidir que factores se estudiarán será necesario establecer un modelo que exprese la relación existente entre ellos y la variable respuesta, para luego definir los tratamientos que permitan la estimación mencionada de acuerdo a un criterio establecido.

En forma general, el modelo lineal que describe la relación entre un conjunto de I factores $x_1 \ldots x_I$ y una variable respuesta Y puede expresarse como

$$E(Y / x_i \in E_x) = f(x_{i1}, \ldots, x_{ij}) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k z_{ik} \qquad (2.1)$$

Donde:

E_x: espacio experimental o región que contiene al conjunto de posibles pruebas a realizar.

P : número de parámetros del modelo.

z_k: k funciones de las x_i definidas en E_x

$z_k = g_k(x) = g_k(x_1 \ldots\ldots x_j) \qquad k = 1, \ldots\ldots, p$

Las z_k incluirán en general las x_j iniciales y transformaciones como sus cuadrados y productos, posibles variables dummy y sus productos por otras (si hay factores cualitativos) y frecuentemente una primera variable de valor constante e igual a uno que multiplica un parámetro β_0.

Sea la matriz **Z** de N filas y p columnas de valores de las z_{ik} asociada a los N puntos de un determinado diseño y sea **y** el vector de las N observaciones correspondientes obtenidas para la variable respuesta.

En la teoría estándar de regresión lineal, el estimador b óptimo del vector β de parámetros del modelo viene dado por la expresión:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

Y además siendo σ^2 la variancia residual del modelo, la matriz de variancias y covariancias de los b_k está dada por:

$$\mathbf{V_b} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\sigma^2 \qquad (2.2)$$

En consecuencia la teoría del diseño óptimo de experimento enfoca la selección de los puntos a incluir en el diseño intentando que conduzcan a una matriz $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$ que satisfaga determinados criterios de optimalidad. Estos criterios implican, en general, que los elementos de dicha matriz sean lo más pequeño posible, lo que equivale a variancias bajas para los estimadores b_k , o lo que es lo mismo, a estimaciones más precisas de los parámetros del modelo.

Dos conceptos que deben mencionarse al hacer referencia al enfoque de Diseño Óptimo son los de diseño óptimo exacto y continuo. Una breve exposición de los aspectos fundamentales se hace a continuación.

2.1. Diseños Exactos

Un diseño formado por los N puntos del espacio experimental E_X ; $x_1, x_2, \ldots x_N$ puede representarse por el conjunto de puntos

$\{x_1, \ldots, x_N\}$

Para preveer la posibilidad que haya puntos replicados, y siendo r_j el número de replicaciones del punto x_i y n el número máximo de puntos diferentes del diseño, se utiliza la siguiente notación como un forma más general de representar un diseño de N puntos:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \ldots\ldots x_j \ldots\ldots x_n \\ r_1 \ldots\ldots\ldots r_j \ldots\ldots r_n \end{Bmatrix} \quad \text{donde} \quad \sum r_j = 1$$

A estos diseños constituídos por un número exacto de puntos que son los únicos que pueden existir en la práctica se los denomina diseños exactos.

2.2. Diseños Continuos

En el desarrollo de la teoría del Diseño Óptimo de experimento es necesario "enriquecer" el conjunto de posibles diseños experimentales a considerar con el fin de que sea un conjunto convexo.

Se define un diseño general continuo con n puntos diferentes como las n parejas:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \ldots\ldots x_j \ldots\ldots x_n \\ w_1 \ldots\ldots\ldots w_j \ldots\ldots w_n \end{Bmatrix} \quad \text{donde} \quad \sum w_j = 1,$$

Siendo $w_j > 0$ expresando el "peso relativo" en el diseño.

Se puede ver claramente que los diseños exactos son un caso particular de los diseños continuos si los expresamos como:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \ldots\ldots x_j \ldots\ldots x_n \\ \frac{r_1}{N} \ldots\ldots\ldots \frac{r_j}{N} \ldots\ldots \frac{r_n}{N} \end{Bmatrix}$$

y haciendo $w_j = \frac{r_j}{N}$ el peso relativo del punto x_j en el diseño. El inverso no es necesariamente cierto, puesto que los pesos w_j pueden no ser racionales.

Se utiliza la letra griega δ para simbolizar un diseño general.

2.3. Matriz de Información y Normalización

Partiendo del modelo (2.1) se conoce que σ^2 es la variancia residual del mismo, y que la matriz $\mathbf{V}_b$ (2.2) es la matriz de variancias y covariancias del vector **b**, donde ($\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$), de orden pxp, se define como la matriz de información del diseño.

$$\mathbf{I}(\delta) = \mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^{N} z_j\, z_j' = \sum_{i=1}^{n} r_i\, z_i\, z_i'$$

Con el objetivo de comparar diseños con diferentes números N de puntos, se trabaja con la matriz de información normalizada de un diseño exacto:

$$\mathbf{M}(\delta) = \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{N} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{N} z_i\, z_i' = \sum_{i=1}^{n} w_i\, z_i\, z_i'$$

Para un diseño continuo la matriz de información normalizada se define directamente como:

$$\boldsymbol{M}(\delta)=\sum_{i=1}^{n} w_i\, z_i\, z_i^{`}$$

2.4. Variancias de Predicción

En la teoría clásica de Regresión Lineal la matriz de variancias y covariancias de **b** viene dada por la matriz

$$\mathbf{V_b} = \sigma^2(\mathbf{Z`Z})^{-1}=\sigma^2\,(\mathbf{I}(\delta))^{-1}$$

La variancia de la predicción a partir de un modelo estimado mediante un diseño δ de N puntos, de la respuesta esperada en dicho punto, para cualquier punto del E_X con un vector **z** de regresores asociados es:

$$\mathbf{V}(\mathbf{z`b})=\mathbf{z`V_b\,z}=\mathbf{z`}(\sigma^2\,(\mathbf{z`z})^{-1})\,\mathbf{z}=\frac{\sigma^2}{N}\mathbf{z`M^{-1}\,z}$$

Siendo la misma función del diseño δ utilizado y del punto x considerado. Es deseable que esta variancia sea lo más pequeña posible.

Es fácil demostrar que la suma de las variancias de predicción en los N puntos del diseño es siempre igual a σ^2 p

$$\sum \text{var iancias en los N puntos del diseño} = \mathrm{tr}(\mathbf{z}\,\sigma^2(\mathbf{z`z})^{-1}\,\mathbf{z})=\sigma^2\,\mathrm{tr}((\mathbf{z`z})^{-1}(\mathbf{z`z}))=\sigma^2\,p$$

Se define la variancia de la predicción estandarizada como:

$$d(x,\delta)=\left(\frac{N}{\sigma^2}\right)\mathrm{var}(\mathbf{z`\,b})=\mathbf{z`\,M^{-1}\,z}$$

Y la $\sum d(x,\delta)=\mathrm{tr}(\mathbf{z`M^{-1}\,z})=\mathrm{tr}(\mathbf{z`}\left(\frac{\mathbf{z`z}}{N}\right)\mathbf{z})=Np$. Por lo tanto la mayor de dichas variancias nunca puede ser menor que p.

3. CRITERIOS DE OPTIMALIDAD

Un buen diseño experimental debería conducir a estimaciones precisas de los parámetros y a variancias de predicción reducidas en todos los puntos de la región experimental E_x.

Existen una gran variedad de criterios, mucho de los cuales son llamados por una letra del alfabeto, denominándose “alphabetic-optimality”. Algunos de estos se enumeran a continuación.

3.1. D- Optimalidad

Uno de los criterios más utilizados es el de la D-optimalidad. El mismo se basa en la minimización del determinante de la matriz $(\mathbf{Z'Z})^{-1}$, y esto es equivalente a minimizar el volumen del hiperelipsoide de confianza para el vector de parámetros β y así su estimación será lo más precisa posible.

Para los diseños exactos con n número N de puntos el criterio de minimizar el determinante de la matriz $(\mathbf{Z'Z})^{-1}$ es equivalente a maximizar el determinante de la matriz de información $\mathbf{I}(\delta)$ y éste a su vez con el de maximizar el determinante de la matriz de información normalizada $\mathbf{M}(\delta)$.

Si se llama al conjunto de todos los diseños exactos de N pruebas como C_δ^N entonces el diseño D-óptimo $\delta_D^{(N)}$ es aquel que maximiza el determinante de la matriz de información normalizada entre todos los diseños pertenecientes a C_δ^N. Por lo tanto:

$\delta_D^{(N)}$ diseño D-óptimo exacto de N pruebas $\Leftrightarrow \det(\mathbf{M}(\delta_D^{(N)}) \geq \det(\mathbf{M}(\delta)) \ \forall \ \delta \in C_\delta^N$

Ahora si se considera el conjunto de todos los diseños continuos posibles C_δ, que incluyen como casos particulares los diseños exactos, sea cual sea el número N de puntos, se dice que el diseño óptimo δ_D* continuo es aquel que maximiza el determinante de la matriz de información normalizada:

δ_D* diseño D-óptimo continuo $\Leftrightarrow \det(\mathbf{M}(\delta_D^*) \geq \det(\mathbf{M}(\delta)) \ \ \forall \ \delta \in C_\delta$

Este diseño δ_D* D-óptimo continuo, que puede no ser único, es considerado como el diseño D-óptimo continuo "absoluto" para un determinado modelo en una determinada región experimental.

Se puede definir para este diseño δ_D* la D-eficiencia con relación a cualquier otro diseño δ, incluyendo el D-óptimo entre los diseños exactos de N puntos como:

$$\text{D} - \text{eficiencia}(\delta) = 100 \times \left(\frac{\det(\mathbf{M}(\delta))}{\det(\mathbf{M}(\delta_D^*))} \right)^{1/p}$$

El Diseño D-óptimo obtenido no necesariamente es único. Si δ_1* y δ_2* son diseños D-óptimos el diseño $\delta^* = c\ \delta_1^* + (1-c)\ \delta_2^*$ con $0 \leq c \leq 1$ también es un diseño D-óptimo.

El criterio de D-optimalidad depende del modelo, sin embargo el diseño es invariante para una transformación lineal no degenerada del modelo.

3.2. G-Optimalidad

Otros de los criterios más utilizados para seleccionar diseños experimentales es el de la G-optimalidad. Este criterio se basa en la minimización de la variancia de predicción que se realizan a partir del modelo estimado mediante el diseño considerado.

Un diseño exacto es G-óptimo en una región experimental si la mayor variancia de predicción en la misma es mínima, es decir es menor o igual que la mayor variancia de predicción que se obtendría en la región experimental a partir de cualquiera otro diseño exacto de N puntos

Un diseño δ^* es el diseño G-óptimo (δ_G^*) en el conjunto de todos los posibles diseños conti-

$$\delta_G^{(N)} \text{ es G} - \text{optimo} \Leftrightarrow \max_{x \in E_x} d(x, \delta_G^{(N)}) \leq \max_{x \in E_x} d(x, \delta) \text{ para } \forall \, \delta \in C_\delta^{(N)}$$

nuos (C_δ), incluyendo los diseños exactos de cualquier número N de puntos si se verifica que:

$$\max_{x \in E_x} d(x, \delta_G^*) \leq \max_{x \in E_x} d(x, \delta) \ \forall \delta \in C_\delta$$

Puede demostrarse que un diseño δ es el diseño G-óptimo continuo (absoluto) si y sólo si, se verifica

$d(\mathbf{x}_j, \delta) = p$ para todos los puntos $\mathbf{x}_j$ en el diseño

$d(\mathbf{x}, \delta) \leq p$ para todos los puntos $\mathbf{x}$ en E_x no incluidos en el diseño

Se define la G-eficiencia de un diseño δ en relación al diseño G-óptimo continuo δ_G^* como:

$$G-\text{eficiencia}(\delta) = 100 \times \frac{p}{\max_{x \in E_x}(d(x, \delta)}$$

Las propiedades anteriormente mencionadas resultan de gran importancia, ya que según el Teorema General de Equivalencia un diseño δ es un diseño G-óptimo continuo, si y solo si, δ es un diseño D-óptimo continuo, es decir. δ_D^* y δ_G^* coinciden. Por lo tanto para comprobar si un diseño δ es D-óptimo continuo, basta verificar si dichas condiciones se cumplen.

3.4. D_s-optimalidad y G_s Optimalidad

3.4.1. D_s-optimalidad

Los diseños D_s-óptimos son apropiados cuando es de interés estimar un subconjunto de s parámetros tan precisamente como sea posible. Con este propósito se particiona el vector de parámetros en dos subconjuntos. Uno que contenga los s primeros parámetros, los cuales se supone son los de interés, y otro que incluya los p-s parámetros restantes. De esta manera la ecuación (2.1) queda de la siguiente forma:

$$E(y / x \in E_x) = \sum_{k=1}^{s} \beta_k Z_k + \sum_{t=s+1}^{p-s} \beta_t Z_t$$

Para poder obtener la expresión para el criterio del diseño y la función de variancia relacionada se particiona la matriz de información $M(\delta)$:

$$\mathbf{M}(\delta) = \begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}}(\delta) & \mathbf{M_{12}}(\delta) \\ \mathbf{M_{21}}(\delta) & \mathbf{M_{22}}(\delta) \end{bmatrix}$$

La matriz de variancias y covariancias de los estimadores mínimo cuadráticos $\mathbf{b}_s$ es $\mathbf{M^{11}}(\delta)$, la submatriz izquierda de dimensión sxs de $\mathbf{M^{-1}}(\delta)$, la cual es obtenida aplicando la inversa de una matriz particionada,

Por lo tanto $\mathbf{M^{11}}(\delta) = \left\{\mathbf{M_{11}}(\delta) - \mathbf{M_{12}}(\delta)\mathbf{M_{22}^{-1}}(\delta)\mathbf{M}'_{\mathbf{12}}(\delta)\right\}^{-1}$ y el diselo D_s-Óptimo es aquel que maximiza el deteminante;

$$\left|\mathbf{M_{11}}(\delta) - \mathbf{M_{12}}(\delta)\mathbf{M_{22}^{-1}}(\delta)\mathbf{M}'_{\mathbf{12}}(\delta)\right| = \frac{|\mathbf{M}(\delta)|}{|\mathbf{M_{22}}(\delta)|} = H_{\mathbf{s}}(\mathbf{M})$$

En consecuencia se puede decir que un diseño exacto de N puntos es D_s-Óptimo para un subconjunto s de parámetros de un modelo si el determinante de la matriz de variancias y covariancias de los estimadores de dichos parámetros es menor o igual que dicho determinante para cualquier otro diseño exacto de N puntos. Para el conjunto de todos los diseños exactos de N puntos $(C_{\delta}^{(N)})$ el diseño D_s-Óptimo $(\delta_{D_s}^{(N)})$ es aquel que verifica:

$$H_{\mathbf{s}}(\mathbf{M}(\delta_{D_s}^{(N)})) \geq H_{\mathbf{s}}(\mathbf{M}(\delta)) \ \forall \ \delta \in C_{\delta}^{(N)}$$

De la misma manera el diseño D_s-Óptimo contihuo $\delta_{D_s}^{*}$ es aquel que maximiza $H_s(\mathbf{M})$ para el conjunto de todos los diseños continuos, que incluyen todos los diseños exacos de cualquier Número H de puntos.

De igual forma que para los diseños D-óptimos se define la D_s-eficiencia como:

$$D_s \text{ - eficiencia} = \left(\frac{H_s(\mathbf{M}(\delta))}{H_s(\mathbf{M}(\delta_{D_s}^{*}))} \right)^{\frac{1}{N}}$$

3.4.2. G_s-optimalidad

Un diseño es G_s-óptimo en una región experimental E_x, si el máximo valor de la d_s-varianza de predicción en esta región es el mínimo posible. La d_s-varianza de predicción en un punto **x** puede interpretarse intuitivamente como la varianza de predicción estandarizada en **x** menos la parte de dicha varianza asociada a los p-s parámetros no relevantes. Su expresión matemática, particionando el vector de regresores **z**(**x**) en los correspondientes subvectores $\mathbf{z_1}$ y $\mathbf{z_2}$ con s y p-s componentes, es

$$\mathbf{d_s(x,\delta) = z_1^t M^{-1} z_1 - z_2^t M_{22}^{-1} z_2}$$

Para el conjunto C_δ de todos los diseños continuos, el diseño G_s-óptimo δ_{Gs}^* continuo verifica que

$$\max_{x \in E_x} d_s(x, \delta_{Gs}^{*}) \quad \leq \quad \max_{x \in E_x} d_s(x, \delta) \quad \text{para } \forall \, \delta \in C_\delta$$

Se puede demostrar que δ es el diseño G_s-óptimo si, y sólo si verifica

$d_s(\mathbf{x}_j,\delta) = s$ para todos los puntos $\mathbf{x}_j$ en el diseño

$d_s(\mathbf{x},\delta) \leq s$ para todos los puntos **x** en E_x

La G_s-eficiencia de un diseño δ se define en relación al diseño G_s-óptimo continuo δ_{Gs}^* como

$$G_s - \text{eficiencia}(\delta) = 100 \times \frac{s}{\max\limits_{x \in E_x}(d_s(x,\delta))}$$

Una generalización del Teorema General de Equivalencia establece que δ es el diseño G_s-óptimo continuo si, y sólo si, δ es el diseño D_s-óptimo continuo, es decir, δ_{Gs}^* y δ_{Ds}^* coinciden. De esta manera para comprobar si δ es el diseño D_s-óptimo continuo, basta comprobar si cumple las condiciones anteriormente mencionadas para el diseño G_s-óptimo continuo.

4. ALGORITMOS PARA LA OBTENCION DE DISEÑOS ÓPTIMOS EXACTOS

La obtención de los puntos de la región experimental en los cuales se realizarán los ensayos es un problema que podría abordarse desde el punto de vista matemático, lo cual es muy trabajoso. Kiefer (1959) aborda la solución de este problema para el caso de un solo factor y donde el modelo de regresión es polinomial. En casos más complejos la solución se encuentra a partir de métodos iterativos como los propuestos por Wynn (1970) y Mitchell (1974). Ellos se basan en postular un conjunto de puntos, por lo general un diseño factorial completo con muchos niveles para cada factor llamados puntos candidatos, establecer un número N deseado de pruebas a realizar con el diseño óptimo para luego, por un procedimiento iterativo, hallar cuales son aquellos que satisfacen el criterio de optimalidad elegido.

Es evidente, que para la aplicación práctica de los conceptos de diseño óptimo se deberá disponer de programas de computación que lleven a cabo las operaciones especificadas en los algoritmos mencionados. Romero (2007) ha publicado una dirección web desde la cual descargar rutinas Matlab para obtener diseños D-óptimos y Ds-óptimos empleando el algoritmo detmax de Mitchel. Programas comerciales como SAS y Minitab incluyen procedimientos para obtener diseños óptimos también empleando detmax.

5. D_S OPTIMALIDAD EN DISEÑOS ROBUSTOS DE PARÁMETROS

Romero (2002) y Romero y otros (2007) proponen alternativas metodológicas para la obtención de planes experimentales en diseño robusto de parámetros. Este nuevo enfoque metodológico se basa en el Diseño Óptimo de Experimentos y estos autores proponen modelos que representen de forma adecuada las relaciones de interés en problemas de robustez. Estas son, las existentes entre los factores de control y de ruido, con la respuesta. Estos modelos difieren según la naturaleza de los factores considerados, Romero (2002) presenta desarrollos para factores cuantitativos unicamente o para los casos en los que algunos de los factores son de tipo cualitativo. Por último, y considerando la relevancia de los parámetros de los modelos considerados, presentan planes Ds óptimos para diferentes situaciones. Los modelos utilizados son los de regresión clásica, en los cuales se parte de la consideración de c factores de control, denominando con x_i el nivel del i-ésimo factor (i=1,….c), y r factores de ruido, denominando u_j el nivel al que se halla el factor j-ésimo (j=1….r). La ecuación de los mismos es de la forma:

$$E(Y / x,u) = f(x_1,....,x_c,u_1,.....,u_r)$$

Con el objetivo de encontrar efectos de robustez, es decir cuando el efecto en la respuesta de algún nivel de un factor de ruido, depende del nivel al que se encuentre un factor de control, la función $f(x_1,....,x_c,u_1,.....,u_r)$ debe contener términos que contemplen la posibilidad de existencia de dicha situación. Por lo tanto la ecuación del modelo se escribe:

$$E(Y / x,u) = f_x(x) + f_{xu}(x,u) + f_u(u)$$

Ésta es una expresión general que contempla la posibilidad de tener, tanto factores cuantitativos como cualitativos. En el caso de éstos últimos se tendrá que incluir en el modelo el uso de las variables dummy para indicar el nivel del factor que se utiliza en cada caso.

El diseño D_S-Óptimo trata de estimar con la mayor precisión posible al subconjunto de parámetros de interés en el modelo mencionado.

6. COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se ha presentado una breve síntesis de aspectos fundamentales del enfoque de Diseño Óptimo, temática no muy divulgada pero que abre un importante abanico de posibilidades para la construcción de planes experimentales vinculando la selección de puntos del espacio experimental en los cuales realizar los ensayos y el modelo que describe la relación entre la variable respuesta y los factores cuyo efecto se desea estudiar.

Sin embargo, la aplicación de esta teoría no se encuentra en un estado de conocimiento por parte de potenciales usuarios, acorde con los beneficios que puede brindar. Un reflejo de la escasa divulgación que esta metodología presenta, es la ausencia de parte de estos métodos en los programas estadísticos más conocidos en el mercado. Como ya se menciono, en algunos de ellos como SAS y Minitab, pueden encontrarse procedimientos o menúes que permiten la obtención de planes que satisfacen criterios de optimalidad pero no de s-optimalidad.

Un área en la que el uso del enfoque mencionado puede aportar grandes beneficios es en el diseño robusto de parámetros, como lo demuestran los aportes realizados por Romero (2002) y Romero y otros (2007). Para que estas prácticas se extiendan, se debe dar no solo una divulgación mayor de la metodología sino también la disponibilidad de programas de computación cuya aplicación sea de relativa sencillez.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atkinson, A. C., and Donev, A. N. (1992), *Optimum Experimental Designs*, London: Oxford Science Publications.

Kiefer, J.; Wolfowitz, J. (1959) *Optimun designs in regression problems.* The Annals of Mathematical Statistics, 30, 271-294

Kiefer J. (1961); *Optimun designs in regression problems II.* The Annals of Mathematical Statistics, 32, 298-325.

Mitchell, T.J. (1974); *An algorithmfor the construction of D-optimun experimental designs*, Technometrics 16 203-210.

Nair, V. N. (1992)*, "Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion", Technometrics, 34, pp.127-161*

Pagura, José A.; Quaglino, Marta B.(2000). Diseños Óptimos para Subconjuntos de Parámetros. Actas del XXVIII Coloquio Argentino de Estadística de la SAE. Posadas

Prat Bartés, Albert; Tort-Martorell Llabrés Xavier; Grima Cintas, Pere; Pozueta Fernández, Lourdes (2000). *Métodos Estadísticos. Control y Mejora de la Calidad*. Alfaomega-Ediciones UPC. México.

Romero Villafranca, R. y Zúnica,Ramajo L.R Romero Zúnica, Rafael (2001). *Planes Experimentales Óptimos eb Diseños de Parámetro*. Actas XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Úbeda, España.

Romero Zúnica, Rafael (2002), *Planes Experimentales Ds-Óptimos en Diseño Robusto de-Parámetros*, Tesis doctoral Universidad Politécnica de Cataluña, España

Romero Villafranca, R. y Zúnica,Ramajo L.R. (2008) *Métodos Estadísticos en Ingeniería*, Ed. SPUPV Valencia, España.

Romero Villafranca, R. y Zúnica,Ramajo L.R Romero Zúnica, Rafael (2007). *D_S-Optimal experimental plans for robust parameter design*. Journal of Statistical planning and inference.137 pág.1485-1495.

Taguchi, Genichi (1986) Introduction to Quality Engineering. Designing Quality into Products and Processes. Assian Productivity Organization. Tokyo, Japan

Wynn, H.P. (1970); *The sequential generation of D-optimun experimental designs*. Annals of Mathematical Statistics, 41 1655-1664