

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, FISICO-
QUIMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEPTIMO - FASC. 4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1947

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

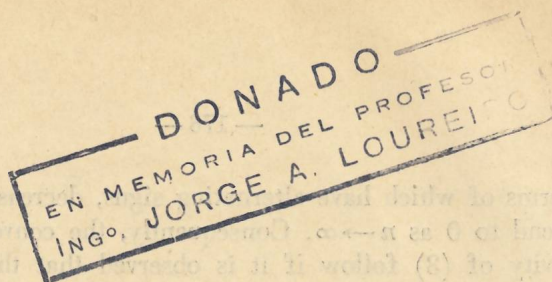
Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	Pág.
On an oscillatory property of the Riemann Ξ -function (AUREL WINTNER)	177
Curvas D sobre conos (L. A. SANTALÓ)	179
Una aplicación de la integral de Poisson (GUIDO BECK)	191
Sur une surface représentant une involution cyclique du quatrième ordre (LUCIEN GODEAUX)	205
Sobre el cálculo numérico del perímetro de una elipse (ROBERTO FRUCHT)	212
Sobre el cálculo aproximado de integrales. A propósito de la Nota del Sr. Roberto Frucht (BEPPO LEVI)	218
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	230
Ejercicios y problemas (Propuestos)	247
Bibliografía (T. DANZIG; <i>Número: el lenguaje de la ciencia</i> . Trad. M. Balanzat, M. PICONE y P. TORTORICI; <i>Trattato di Matematiche Generali</i> , Vol. I); E. S. CABRERA y H. J. MEDICI— <i>La enseñanza de las matemáticas en la Argentina</i>	249



ON AN OSCILLATORY PROPERTY OF THE RIEMANN Ξ -FUNCTION

by

AUREL WINTNER

According to the notation customary since some time, Riemann's Ξ -function is meant to be the product

$$(1) \quad \Xi(t) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}} s \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s), \quad \text{where } s = \frac{1}{2} + it.$$

It will be assumed that t is real. Then the functional equation of $\zeta(s)$ states that $\Xi(t)$ is real-valued (and even). Those zeros of $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ which are of odd multiplicity (e. g., the simple zeros t and, therefore, possibly all zeros t) are the t -values at which $\Xi(t)$ changes its sign. This, when combined with «Gram's law» ⁽¹⁾, suggests that, *between 0 and t , where $t > 0$ is arbitrary, Ξ is positive «on the average»*. If this is understood to mean that

$$(2) \quad \int_0^t \Xi(u) du > 0 \quad \text{for } 0 < t < \infty,$$

it turns out to be provable (without any hypothesis).

First, if $\phi(x)$ is *positive and decreasing* for $0 \leq x < \infty$, then

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} \phi(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin tx}{x} \phi(x) dx$$

exists and is positive for $0 < t < \infty$. In fact, if $\psi(x) = \phi(x)/x$, then $\psi(x)$ is positive for $0 < x < \infty$ and tends decreasingly to 0 as $x \rightarrow \infty$. Hence, (3) can be replaced by the series

$$(4) \quad t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \psi(x/t) \sin x dx, \quad (t > 0),$$

the terms of which have alternating signs, decreasing magnitudes, and tend to 0 as $n \rightarrow \infty$. Consequently, the convergence and the positivity of (3) follow if it is observed that the first term of (4) is positive and finite (it is finite, since the «pole» of $\psi(x) \sim \phi(0)/x$ at $x=0$ is absorbed by the zero of $\sin x$).

This standard fact (the proof of which was given in detail only because of the presence of the «pole» at $x=0$) will now be combined with Riemann's Fourier analysis of the Ξ -function, which supplies a representation of the form

$$(5) \quad \Xi(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) \cos tx \, dx.$$

As proved some time ago⁽²⁾, the Fourier transform of $\Xi(t)$, i. e., the $\phi(x)$ in (5), besides being *positive* (Hurwitz, Jensen, Schur), is *decreasing* for $0 \leq x < \infty$. This readily leads to (2).

In fact, since (5) is valid for $t=0$ also, and since $\phi(x) > 0$, the integral of $|\phi(x)|$ over $0 \leq x < \infty$ is finite. Hence, from (5),

$$(6) \quad \int_0^t \Xi(u) \, du = \int_0^{\infty} \phi(x) \left(\int_0^t \cos ux \, du \right) dx.$$

Since the repeated integral on the right of (6) is of the form (3), the proof of (2) is complete.

It should be mentioned that the «conjugate» of $\Xi(t)$, viz., the function

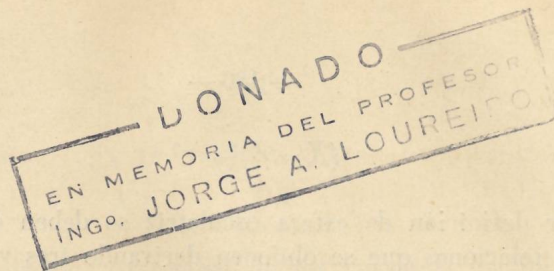
$$(5 \text{ bis}) \quad \int_0^{\infty} \phi(x) \sin tx \, dx$$

[cf. (5)], is *positive* for $0 < t < \infty$. This follows by the same argument as (2) did.

THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY

REFERENCES

- (¹) Cfr., C. G., J. I. HUTCHINSON, On the roots of the Riemann function, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), pp. 49-60.
 (²) A. WINTNER, A note on the Riemann ξ -function, London Math. Soc., Jour. vol. 10 (1935), pp. 82-83.



CURVAS D SOBRE CONOS

por

L. A. SANTALÓ

1. - *Introducción.* — Recordemos que se llaman curvas- D , o curvas de Darboux, de una superficie, aquellas cuya esfera oscultriz en cada punto es tangente a la superficie ⁽¹⁾.

En este trabajo nos proponemos estudiar las curvas- D sobre las superficies cónicas. Veremos que en este caso la ecuación diferencial de las mismas se puede integrar por cuadraturas, dando un resultado relativamente simple que permite la discusión completa.

2. - *Ecuación diferencial de las curvas- D .* — La ecuación diferencial de las curvas- D fué dada por primera vez por Darboux ⁽²⁾. Vamos a obtenerla rápidamente en la forma que nos será útil para el objeto perseguido.

Sea

$$X = X(u, v) \quad (2.1)$$

la ecuación vectorial de la superficie; es decir, con (2.1) se indican abreviadamente las tres ecuaciones paramétricas $X_i = X_i(u, v)$ ($i=1, 2, 3$) de la superficie.

Una curva sobre la superficie estará dada por dos funciones $u=u(t)$, $v=v(t)$ de un parámetro t . Si el punto $Z(t)$ es el centro de la esfera oscultriz a la curva $X=X(u(t), v(t))$ y r el radio de la misma, se cumplirá la relación vectorial

⁽¹⁾ Bibliografía sobre estas curvas se puede ver en la *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* III, D 3, págs. 181-182. Ver también: G. LORIA, *Curve sghembe speciali*, vol. 2, pág. 225.

⁽²⁾ *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris 1871, p. 733.

$$(X - Z)^2 = r^2. \quad (2.2)$$

Por definición de esfera osculatriz se deben cumplir también las relaciones que se obtienen derivando tres veces la ecuación anterior suponiendo Z y r constantes. Es decir,

$$\begin{aligned} (X - Z) X' &= 0 \\ (X - Z) X'' + X'^2 &= 0 \\ 3 X' X'' + (X - Z) X''' &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde los productos son productos escalares de vectores y los acentos indican derivadas respecto el parámetro t .

Si la curva $X = X(u(t), v(t))$ es una curva- D , el centro Z debe ser el punto de la normal a la superficie que dista r del punto X , o sea llamando ξ al vector unitario normal a la superficie debe ser

$$X - Z = r\xi.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.3), la primera ecuación se satisface idénticamente, por ser $\xi X' = 0$ (por ser X' tangente a la superficie) y las dos restantes dan

$$\begin{aligned} X'^2 + r \xi X'' &= 0 \\ 3 X' X'' + r \xi X''' &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La ecuación diferencial de las curvas- D se obtendrá eliminando r entre estas dos ecuaciones. Parecería que la ecuación resultante es de tercer orden, pero derivando $\xi X' = 0$ dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned} \xi' X' + \xi X'' &= 0 \\ \xi'' X' + 2 \xi' X'' + \xi X''' &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

y de esta última ecuación se puede obtener $\xi X'''$, valor que sustituido en la segunda ecuación (2.4) y, eliminando r con la primera, permite llegar al resultado final

$$\frac{3X'X''}{X'^2} = \frac{2\xi'X'' + \xi''X'}{\xi'X'} \quad (2.6)$$

que es la ecuación diferencial de las curvas- D en forma vectorial.

3. - *Curvas- D sobre conos.* — Para definir un cono consideremos como curva directriz de las generatrices la curva de intersección del cono con una esfera de radio unidad cuyo centro sea el vértice del cono. Esta curva será una curva esférica cuya ecuación vectorial será de la forma

$$E = E(s) \quad (3.1)$$

siendo s el arco de la curva y cumpliéndose la relación

$$E^2 = 1. \quad (3.2)$$

La ecuación del cono puede escribirse, entonces, en la forma

$$X = \lambda E(s) \quad (3.3)$$

siendo λ el parámetro que fija los puntos sobre cada generatriz. Es decir, los parámetros u, v del n.º 1 son ahora s, λ ; el primero fija el punto sobre la directriz y por tanto la generatriz del cono, y el segundo el punto sobre esta generatriz. Una curva sobre el cono estará dada por dos funciones $\lambda = \lambda(t)$, $s = s(t)$. Para simplificar los cálculos tomaremos $t = s$, con lo cual toda curva del cono estará determinada por la sola función $\lambda = \lambda(s)$.

Para aplicar la ecuación (2.6) necesitamos las dos primeras derivadas de $E(s)$; recordemos para ello que $E'(s) = T(s)$, indicando por T el vector tangente de módulo unidad a la curva (3.1) y que, además, valen las fórmulas de Frenet

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N \quad (3.4)$$

siendo N y B los vectores unitarios normal principal y binormal respectivamente, y κ, τ la curvatura y torsión de $E(s)$.

Se tiene con esto derivando (3.3),

$$\begin{aligned} X' &= \lambda' E + \lambda T \\ X'' &= \lambda'' E + 2\lambda' T + \lambda \kappa N. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Además, el vector normal ξ se expresa por

$$\xi = E \wedge T \quad (3.6)$$

indicando $\wedge$ el producto vectorial, de donde,

$$\begin{aligned} \xi' &= \kappa (E \wedge N) \\ \xi'' &= \kappa' (E \wedge N) + \kappa B - \kappa^2 (E \wedge T) + \kappa \tau (E \wedge B) \end{aligned} \quad (3.7)$$

por ser $B = T \wedge N$.

De las fórmulas anteriores se deduce

$$\begin{aligned} X'^2 &= \lambda^2 + \lambda'^2 \\ X' X'' &= \lambda' \lambda'' + 2\lambda \lambda' + \lambda \lambda' \kappa (EN) \\ \xi' X' &= \lambda \kappa T (E \wedge N) = -\lambda \kappa (T \wedge N) E = -\lambda \kappa (EB) \\ \xi' X'' &= 2\kappa \lambda' (E \wedge N) T = 2\kappa \lambda' E (N \wedge T) = -2\kappa \lambda' (EB) \\ \xi'' X' &= \kappa \lambda' (EB) - \lambda \kappa' (EB) + \lambda \kappa \tau (EN). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sea α el ángulo que forma la normal principal N con el radio de la esfera que contiene $E(s)$ que va al punto de contacto. Puesto que el vector E tiene la dirección del radio y el sentido hacia el exterior de la esfera, es $EN = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. Además, por el teorema de Meusnier aplicado a la esfera (de radio 1) que contiene $E(s)$ es $\cos \alpha = \rho$, siendo ρ el radio de curvatura de la curva $E(s)$, o sea $\rho = 1/\kappa$. Por tanto

$$EN = -\frac{1}{\kappa}. \quad (3.9)$$

Siendo E, N, B perpendiculares a T , están en un mismo plano y, por tanto,

$$EB = \sin \alpha = \sqrt{1 - \rho^2} = \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\kappa}. \quad (3.10)$$

Sustituyendo estos valores en (3.8) y reemplazando los valores obtenidos en la ecuación (2.6) de las curvas D , después de simples transformaciones queda

$$\frac{3(\lambda'\lambda''+\lambda\lambda')}{\lambda^2+\lambda'^2} - 2\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2-1}}. \quad (3.11)$$

Todavía esta ecuación se puede simplificar. En efecto, la curva $E(s)$ es una curva situada sobre una esfera de radio unidad; por tanto, el radio de su esfera osculatriz en todo punto vale 1 y, por tanto, se cumple la relación ⁽³⁾

$$\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\kappa^4\tau^2} = 1$$

de la cual se deduce

$$\tau = \frac{\kappa'}{\kappa\sqrt{\kappa^2-1}}$$

y, por tanto,

$$\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2-1}} = \frac{\kappa\kappa'}{\kappa^2-1}. \quad (3.12)$$

Sustituyendo en (3.11), resulta que la ecuación definitiva de las curvas- D sobre la superficie cónica (3.3) es

$$\frac{3(\lambda'\lambda''+\lambda\lambda')}{\lambda^2+\lambda'^2} - 3\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\kappa\kappa'}{\kappa^2-1}. \quad (3.13)$$

Una primera integración da

$$\frac{3}{2} \log(\lambda^2+\lambda'^2) - 3 \log \lambda = \frac{1}{2} \log(\kappa^2-1) + a,$$

siendo a una constante de integración.

⁽³⁾ Ver por ejemplo, W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie I*, pág. 34; o bien W. GRAUSTEIN, *Differential Geometry*, pág. 73.

De aquí

$$(\lambda^2 + \lambda'^2)^{3/2} = b \lambda^3 \sqrt{x^2 - 1}$$

siendo b la constante e^a . De esta ecuación se deduce

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \pm \sqrt{C(x^2 - 1)^{1/3} - 1}$$

siendo C la nueva constante $b^{2/3}$.

Una última integración nos da finalmente como *ecuación de las curvas-D sobre las superficies cónicas*

$$\lambda = A \exp \left(\pm \int_0^s \sqrt{C(x^2 - 1)^{1/3} - 1} ds \right) \quad (3.14)$$

siendo A una nueva constante de integración e indicando por $\exp x$ la función e^x .

4. - *Discusión.* — En la ecuación (3.14) aparecen dos constantes arbitrarias A y C . La constante A queda determinada dando el punto inicial de la curva- D , pues haciendo $s=0$ resulta $A=\lambda(0)$. La constante C queda determinada por el ángulo que forma la curva- D con la generatriz del cono correspondiente al punto inicial. En efecto, llamando ω a este ángulo, es

$$\text{tang } \omega = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{\pm \sqrt{C(x^2 - 1)^{1/3} - 1}}. \quad (4.1)$$

de donde se despeja C , teniendo en cuenta que x tiene el valor correspondiente a la generatriz que pasa por el punto inicial. Al elevar al cuadrado para despejar C , el doble signo del radical desaparece; es decir, dado ω , queda determinado un valor único para C .

En cambio, a cada par de valores A y C corresponden dos curvas- D , correspondientes al doble signo que aparece en (3.14). Según (4.1) estas dos curvas se cortan en el punto inicial, según direcciones simétricas respecto la generatriz.

De (4.1) se deduce una consecuencia notable, a saber:

una curva- D cualquiera de una superficie cónica corta a todas las generatrices que corresponden a un valor dado de κ de la curva directriz bajo ángulo constante.

En consecuencia: 1º. Si una curva- D corta varias veces a una misma generatriz del cono, lo hace siempre bajo el mismo ángulo. 2º. La condición necesaria y suficiente para que una superficie cónica tenga una curva- D que corta a todas las generatrices bajo un mismo ángulo (o sea, es una loxodrómica), es que sea de revolución (o sea, $\kappa = \text{constante}$). En este caso, todas las curvas- D gozan de la misma propiedad.

Según los valores de C , las curvas- D de un cono pueden presentar dos formas diferentes. Cabe, en efecto, distinguir dos casos:

1. La curva- D da la vuelta completa al cono. Sea κ_m el valor mínimo de la curvatura de la curva directriz $E(s)$. Por estar esta curva situada sobre la esfera de radio unidad es $\kappa_m \geq 1$.

Para que una curva- D de la vuelta completa al cono, o sea, corte a todas las generatrices, el radical que figura en (3.14) debe ser siempre real y, por tanto, debe cumplirse la condición

$$C \geq \frac{1}{(\kappa_m^2 - 1)^{1/3}}. \quad (4.2)$$

En este caso, suponiendo que se trata de una superficie cónica cerrada, la curva- D dará infinitas vueltas, alejándose por un lado infinitamente del vértice del cono y acercándose asintóticamente al mismo por el otro. Llamemos $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ a los valores de λ correspondientes a los puntos en que una curva- D corta a una misma generatriz. Consideremos, por ejemplo, la curva- D correspondiente al signo $+$ en (3.14) y pongamos

$$K = \exp \int_0^L \sqrt{C(\kappa^2 - 1)^{1/3} - 1} ds \quad (4.3)$$

siendo L la longitud total de la curva cerrada $E(s)$. Según la ecuación (3.14) de la curva- D , será

$$\lambda_0 = A, \quad \lambda_1 = A K, \quad \lambda_2 = A K^2, \quad \dots$$

y, por tanto,

$$\lambda_n = \lambda_0 K^n \quad (4.4)$$

y, análogamente, hacia el lado del vértice,

$$\lambda_{-n} = \lambda_0 K^{-n}. \quad (4.5)$$

Estas expresiones nos dicen que *los puntos en que una curva-D corta a una misma generatriz van alejándose o acercándose al vértice del cono, según la ley potencial (4.4) o (4.5), respectivamente.*

Además, por verificarse $\lambda_{i+1}/\lambda_i = K = \text{constante}$, igualdad válida para cualquier generatriz, se tiene: *los arcos de una misma curva-D comprendidos entre pares de puntos de intersección consecutivos de una misma generatriz, son homotéticos respecto al vértice del cono.*

Si en lugar de considerar la curva-D correspondiente al signo + en (3.14) consideramos la correspondiente al signo — con los mismos valores de A y C y al mismo tiempo invertimos el signo de la variable s de integración, todo lo anterior vale igualmente. Además, después del punto inicial, las dos curvas volverán a cortarse en un punto de la generatriz correspondiente al valor de s, para el cual es

$$\int_0^s = \frac{1}{2} \int_0^L \quad (4.6)$$

donde debe entenderse que bajo el signo de integración está la misma función que figura bajo el signo integral en (3.14).

Además, si a partir de un punto de intersección se consideran las dos curvas, sean λ y $\bar{\lambda}$, correspondientes a los dos signos de (3.14), es $\lambda\bar{\lambda} = A^2$, siendo la constante A el valor de λ correspondiente al punto de intersección considerado. Esto nos dice que las dos curvas son inversas respecto de la esfera de centro el vértice del cono que pasa por el punto de intersección.

Se puede, por tanto, enunciar:

Las dos curvas-D que corresponden a los dos signos de (3.14) prolongadas cada una en los dos sentidos del arco s, se cortan infinitas veces, estando los puntos de intersección sobre dos generatrices: la correspondiente al punto inicial y la correspon-

diente al valor de s definido por la ecuación (4.6). Ambas curvas son inversas respecto de cualquier esfera de centro el vértice del cono que pase por uno de los puntos de intersección.

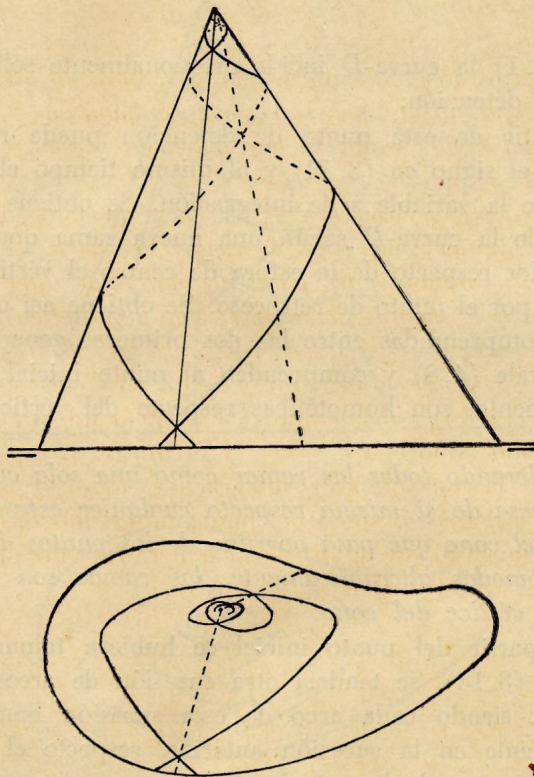


Fig. 1

En la fig. 1 se han representado dos curvas- D correspondientes a este caso.

2. La curva- D no da la vuelta completa al cono. Si no se cumple la condición (4.2), o sea, es

$$C < \frac{1}{(\kappa_m^2 - 1)^{1/3}} \quad (4.7)$$

la curva- D no corta a todas las generatrices y queda interrumpida

en la generatriz correspondiente al valor de κ ($\kappa > \kappa_m$) tal que

$$C = \frac{1}{(\kappa^2 - 1)^{1/3}} \quad (4.8)$$

y según (4.1) la curva- D incide ortogonalmente sobre esta generatriz de detención.

A partir de este punto de detención puede retrocederse, cambiando el signo en (3.14) y al mismo tiempo el sentido de recorrido de la variable s de integración. Se obtiene así la prolongación de la curva- D según una nueva rama que es inversa de la anterior respecto de la esfera de centro el vértice del cono y que pasa por el punto de retroceso. Se obtiene así una sucesión de ramas comprendidas entre las dos primeras generatrices para las cuales vale (4.8) y comprenden al punto inicial, las cuales, alternativamente, son homotéticas respecto del vértice del cono. Es decir:

Considerando todas las ramas como una sola curva- D , ella resulta inversa de sí misma respecto cualquier esfera de centro el vértice del cono que pasa por uno de los puntos de retroceso. Además, tomadas alternativamente, las ramas son homotéticas respecto el vértice del cono.

Si a partir del punto inicial se hubiera tomado el signo opuesto en (3.14), se tendría otra sucesión de arcos análoga a la anterior, siendo cada arco de esta sucesión homotético del correspondiente en la sucesión anterior, respecto el vértice del cono como centro de homotecia. Estas ramas se cortan alternativamente en puntos de la generatriz que pasa por el punto inicial y de otra generatriz.

Si s_1 y $-s_2$ son los valores de s correspondientes a las generatrices para las cuales vale (4.8), el valor de s correspondiente a la segunda generatriz que contiene los puntos de intersección está dado por la condición

$$\int_s^{s_1} = \int_{-s_2}^0$$

donde, como antes, la función subintegral, que se omite por brevedad, es la que figura en (3.14).

A partir de este punto s las curvas volverán a encontrarse sobre la generatriz correspondiente al punto inicial, y así sucesivamente.

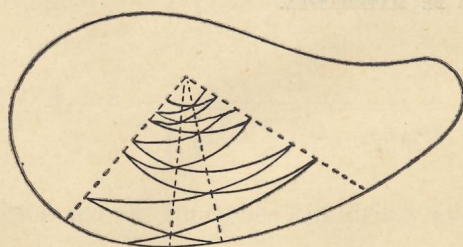
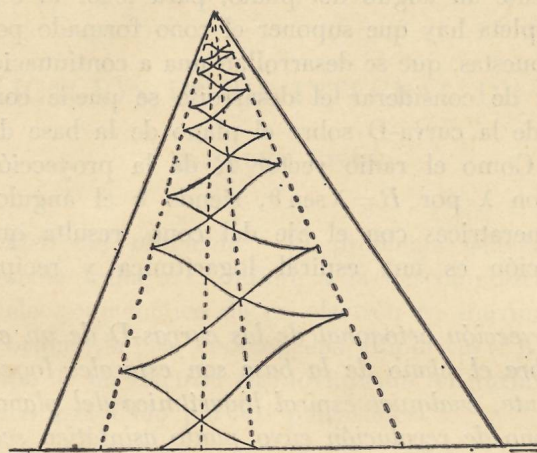


Fig. 2

Ambas curvas presentan, por tanto, las formas de la fig. 2.

5. *Caso del cono de revolución.*— Obsérvese que la función $\lambda(s)$ es precisamente la ecuación en coordenadas polares de la curva plana en que se transforma la curva- D del cono al desarrollar el mismo sobre el plano. El arco s pasa a ser el ángulo polar φ .

Para el caso de un cono de revolución la directriz esférica $E(s)$ es un círculo menor y, por tanto, $\kappa = \text{constante}$. En este caso la ecuación (3.14) nos da $\lambda = A \exp(Bs)$ ($B = \text{constante}$).

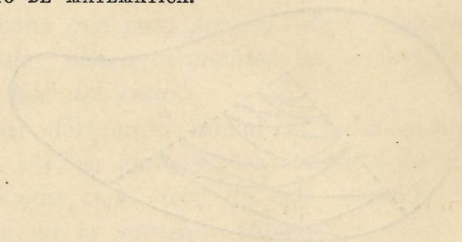
o sea: *el desarrollo de las curvas-D de los conos de revolución son espirales logarítmicas.*

Hay que observar que, puesto que el desarrollo del cono llena solamente un ángulo del plano, para tener la espiral logarítmica completa hay que suponer el cono formado por infinitas hojas superpuestas, que se desarrollan una a continuación de otra.

En vez de considerar el desarrollo se puede considerar la proyección de la curva-D sobre el plano de la base del cono de revolución. Como el radio vector R de la proyección está relacionado con λ por $R = \lambda \operatorname{sen} \vartheta$, siendo ϑ el ángulo que forman las generatrices con el eje del cono, resulta que también esta proyección es una espiral logarítmica y recíprocamente. o sea:

La proyección ortogonal de las curvas-D de un cono de revolución sobre el plano de la base son espirales logarítmicas y, recíprocamente, cualquier espiral logarítmica del plano de la base de un cono de revolución cuyo punto asintótico sea el centro de la base, se proyecta sobre el cono según una curva-D.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMATICA.



UNA APLICACION DE LA INTEGRAL DE POISSON

por GUIDO BECK

1. - *Planteo del problema.* — El problema general que condujo al presente trabajo se refiere a la descomposición Fourier del campo electromagnético de un electrón en movimiento según un sistema ortonormal en coordenadas cilíndricas (*).

El campo de un electrón en movimiento uniforme en un medio dieléctrico está dado por los potenciales

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \epsilon \frac{v^2}{c^2}\right) \rho^2 + (z - vt)^2}}$$

$$A_z = e \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \epsilon \frac{v^2}{c^2}\right) \rho^2 + (z - vt)^2}}$$

y el sistema ortogonal de funciones cilíndricas es

$$\varphi = N J_0(k_\rho \rho) e^{i(k_z z - k_0 c t)}$$

$$A_z = N \epsilon \frac{k_0}{k_z} J_0(k_\rho \rho) e^{i(k_z z - k_0 c t)}.$$

La determinación de los coeficientes de Fourier conduce a integrales del tipo

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(k_\rho \rho) e^{i k_z z}}{\sqrt{\left(1 - \epsilon \frac{v^2}{c^2}\right) \rho^2 + z^2}} \rho \, d\rho \, dz \quad (1)$$

(*) Ver: G. BECK, *Contribution to the theory of the Cherenkov effect*. Phys. Rev. (en prensa).

en las cuales tendremos que admitir valores positivos y negativos de $(1-\varepsilon \frac{v^2}{c^2})$ y valores reales e imaginarios de k_z .

2.- *La integral de Poisson.*—La integral sobre z en (1) representa un caso particular de la integral de Poisson

$$Z_a^b(z) = \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{e^{izw}}{\sqrt{1-w^2}} dw \quad (2)$$

tomada entre dos puntos a y b fijos en el plano complejo de la variable $w = u + iv$.

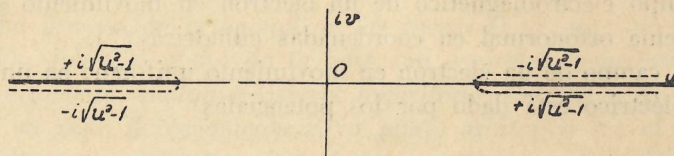


Fig. 1. $\sqrt{1-w^2}$ en el plano $w = u + iv$

Tratándose de una función analítica, el camino de integración entre a y b puede ser deformado según el teorema de Cauchy, siempre que se evite los cortes indicados en la fig. 1.

En lo que sigue nos interesará el comportamiento de la función $Z_a^b(z)$ en los ejes real e imaginario de la variable $z = x + iy$. Para nuestro propósito resultará conveniente considerar la integral (2) como función de la variable z real y estudiar por separado la integral

$$\bar{Z}_a^b(z) = Z_a^b(-iz) = \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{e^{z\bar{w}}}{\sqrt{1-w^2}} dw. \quad (2')$$

Es bien sabido, que las funciones de Bessel representan casos particulares de la integral (2):

$$Z_{-1}^{+1}(z) = 2J_0(z); \quad Z_{i\infty}^{+1}(z) = H_0^{(1)}(z); \quad Z_{-1}^{i\infty}(z) = H_0^{(2)}(z). \quad (3)$$

La estrecha relación entre la integral de Poisson y las funciones de Bessel sugiere estudiar la ecuación diferencial a la cual obedece la integral de Poisson en el caso general. Formando

con (2) y (2') la ecuación diferencial de Bessel encontramos inmediatamente

$$\frac{d^2 Z_a^b(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d Z_a^b(z)}{dz} + Z_a^b(z) = \frac{2i}{\pi z} \{ \sqrt{1-a^2} e^{iaz} - \sqrt{1-b^2} e^{ibz} \} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \bar{Z}_a^b(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d \bar{Z}_a^b(z)}{dz} - \bar{Z}_a^b(z) = \frac{2}{\pi z} \{ \sqrt{1-a^2} e^{az} - \sqrt{1-b^2} e^{bz} \} \quad (5)$$

En el caso de la función $J_0(z)$, $a = -1$, $b = +1$, el segundo miembro de (4) se anula. En general, sin embargo, las funciones $Z_a^b(z)$ satisfacen a la ecuación diferencial inhomogénea. Notamos, en particular, que las funciones de Hankel, $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ satisfacen a la ecuación diferencial de Bessel homogénea solamente fuera del punto $z=0$, hecho que tendremos que tener en cuenta más abajo.

3. - Transformación de la integral $\int_0^\infty J_0(z) Z_a^b(\alpha z) \cdot z \, dz$. — Partiendo de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 J_0(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d J_0(z)}{dz} + J_0(z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z_a^b(\alpha z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d Z_a^b(\alpha z)}{dz} + \alpha^2 Z_a^b(\alpha z) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{i\alpha}{z} \{ \sqrt{1-a^2} e^{ia\alpha z} - \sqrt{1-b^2} e^{ib\alpha z} \}, \end{aligned}$$

después de multiplicar la primera por $Z_a^b(\alpha z)$ y la segunda por $J_0(z)$ y restar, obtenemos inmediatamente, para $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0(z) Z_a^b(\alpha z) \cdot z \, dz &= \\ &= \frac{1}{1-\alpha^2} \int_0^\infty d \left[z \left\{ J_0(z) \frac{d Z_a^b(\alpha z)}{dz} - \frac{d J_0(z)}{dz} Z_a^b(\alpha z) \right\} \right] \\ &+ \frac{2}{\pi} \frac{i\alpha}{1-\alpha^2} \int_0^\infty J_0(z) \{ \sqrt{1-b^2} e^{ib\alpha z} - \sqrt{1-a^2} e^{ia\alpha z} \} dz \\ &= \frac{1}{1-\alpha^2} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z \left\{ J_0(z) \frac{d Z_a^b(\alpha z)}{dz} - \frac{d J_0(z)}{dz} Z_a^b(\alpha z) \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{1-\alpha^2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \left\{ J_0(z) \frac{dZ_a^b(\alpha z)}{dz} - \frac{dJ_0(z)}{dz} Z_a^b(\alpha z) \right\} \right] \\ + \frac{2}{\pi} \frac{i\alpha}{1-\alpha^2} \int_0^\infty J_0(z) \{ \sqrt{1-b^2} e^{ibaz} - \sqrt{1-a^2} e^{iaaz} \} dz.$$

Un cálculo análogo conduce a

$$\int_0^\infty J_0(z) \bar{Z}_a^b(\alpha z) \cdot z dz = \\ = \frac{1}{1+\alpha^2} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z \left\{ J_0(z) \frac{d\bar{Z}_a^b(\alpha z)}{dz} - \frac{dJ_0(z)}{dz} \bar{Z}_a^b(\alpha z) \right\} \right] \\ - \frac{1}{1+\alpha^2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \left\{ J_0(z) \frac{d\bar{Z}_a^b(\alpha z)}{dz} - \frac{dJ_0(z)}{dz} \bar{Z}_a^b(\alpha z) \right\} \right] \\ + \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \int_0^\infty J_0(z) \{ \sqrt{1-b^2} e^{baz} - \sqrt{1-a^2} e^{aaz} \} dz. \quad (7)$$

Las fórmulas (6) y (7) nos enseñan, que podemos evaluar las integrales que nos interesan, si conocemos el comportamiento de las funciones $Z_a^b(z)$ y $\bar{Z}_a^b(z)$ y de sus primeras derivadas cerca de los puntos $z=0$ y $z=\infty$ y si podemos evaluar, además, las integrales

$$\int_0^\infty J_0(z) e^{i\beta z} dz \quad \text{y} \quad \int_0^\infty J_0(z) e^{-\beta z} dz. \quad (8)$$

4. - La integral $\int_0^\infty J_0(z) e^{i\beta z} dz$. — Usando para la función $J_0(z)$ su representación por la integral de Poisson (2), $J_0(z) = \frac{1}{2} \cdot Z_{-1}^{+1}(z)$, obtenemos con $\text{Im}(\beta) > +0$

$$\int_0^\infty J_0(z) e^{i\beta z} dz = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \frac{e^{iuz}}{\sqrt{1-u^2}} e^{i\beta z} du dz = \frac{i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{u+\beta}.$$

La última integral se simplifica por la substitución

$$u = \frac{1-w^2}{1+w^2}; \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = - \frac{2dw}{1+w^2}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(z) e^{i\beta z} dz = \frac{2i}{\pi} \frac{1}{1+\beta} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \int_0^{\infty} \frac{d(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} w)}{1 - (\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} w)^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\beta} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2}$$

con

$$i\xi = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} w. \quad (9)$$

La integración se efectúa en el plano complejo de la variable ξ y el camino de integración puede ser deformado conforme con el teorema de Cauchy. En particular, la integración se puede efectuar en el eje real de ξ , cuidando, sin embargo, que la deformación evite los dos puntos singulares $\xi = \pm i$. El sentido en el cual el eje real de ξ debe ser recorrido, depende luego del valor de $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, el cual está indicado, en el plano complejo de la variable β , en la fig. 2.

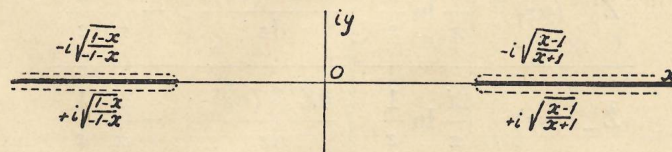


Fig. 2. $\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$ en el plano $z = x + iy$

Encontramos, luego:

$$\int_0^{\infty} J_0(z) e^{i\beta z} dz = \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{\beta^2-1}} & \text{para } \beta > +1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \text{« } -1 < \beta < +1 \\ -\frac{i}{\sqrt{\beta^2-1}} & \text{« } \beta < -1. \end{cases} \quad (10)$$

y, reemplazando β por $i\beta$,

$$\int_0^{\infty} J_0(z) \cdot e^{-\beta z} dz = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}. \quad (11)$$

5.- Los valores de las funciones para $|z| \ll 1$ y $|z| \gg 1$. Indicamos, a continuación, los desarrollos para valores pequeños del argumento y las expresiones asintóticas de las funciones y de sus derivadas necesarias para la evaluación de las integrales (1).

$$|z| \ll 1 \quad (1)$$

$J_0(z)$	$1 - \frac{z^2}{4}$	$\frac{dJ_0(z)}{dz}$	$-\frac{z}{2}$
$Z_{-1}^{i\infty}(az)$	$\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{z}$	$\frac{dZ_{-1}^{i\infty}(az)}{dz}$	$-\frac{2i}{\pi} \frac{1}{z}$
$Z_{-1}^0(az)$	$1 - \frac{2}{\pi} i\alpha z$	$\frac{dZ_{-1}^0(az)}{dz}$	$-\frac{2}{\pi} i\alpha$
$Z_0^{i\infty}(az)$	$\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{z}$	$\frac{dZ_0^{i\infty}(az)}{dz}$	$-\frac{2i}{\pi} \frac{1}{z}$
$\bar{Z}_{-1}^{i\infty}(az)$	$\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{z}$	$\frac{d\bar{Z}_{-1}^{i\infty}(az)}{dz}$	$-\frac{2i}{\pi} \frac{1}{z}$
$\bar{Z}_{-1}^0(az)$	$1 - \frac{2}{\pi} \alpha z$	$\frac{d\bar{Z}_{-1}^0(az)}{dz}$	$-\frac{2}{\pi} \alpha$
$\bar{Z}_0^{i\infty}(az)$	$\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{z}$	$\frac{d\bar{Z}_0^{i\infty}(az)}{dz}$	$-\frac{2i}{\pi} \frac{1}{z}$

(1) Véase por ej. E. JAHNKE - F. EMDE. *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (1909-1923) XIII, p. 90-96. Para el valor de las funciones Z deberán tenerse en cuenta las relaciones (3).

$$|z| \gg 1 \quad (1)$$

$J_0(z)$	$\frac{\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} z}$	$\frac{dJ_0(z)}{dz}$	$-\frac{\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} z}$
$Z_{-1}^{i\infty}(az)$	$\frac{e^{-i\left(az - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} az}$	$\frac{dZ_{-1}^{i\infty}(az)}{dz}$	$-i\alpha \frac{e^{-i\left(az - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} az}$
$Z_{-1}^0(az)$	$\frac{e^{-i\left(az - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} az}$	$\frac{dZ_{-1}^0(az)}{dz}$	$-i\alpha \frac{e^{-i\left(az - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} az}$
$Z_0^{i\infty}(az)$	$\frac{2i}{\pi\alpha} \frac{1}{z}$	$\frac{dZ_0^{i\infty}(az)}{dz}$	$-\frac{2i}{\pi\alpha} \frac{1}{z^2}$
$\bar{Z}_{-1}^{i\infty}(az)$	$\sim e^{-az}$	$\frac{d\bar{Z}_{-1}^{i\infty}(az)}{dz}$	$\sim e^{-az}$
$\bar{Z}_{-1}^0(az)$	$\frac{2}{\pi\alpha} \frac{1}{z}$	$\frac{d\bar{Z}_{-1}^0(az)}{dz}$	$-\frac{2}{\pi\alpha} \frac{1}{z^2}$
$\bar{Z}_0^{i\infty}(az)$	$-\frac{2}{\pi\alpha} \frac{1}{z}$	$\frac{d\bar{Z}_0^{i\infty}(az)}{dz}$	$\frac{2}{\pi\alpha} \frac{1}{z^2}$

Los desarrollos dados en estas tablas no tienen mayor precisión que la indispensable para los cálculos del § 6.

6. - *Evaluación de las integrales (6) y (7).* - Consideraremos, primero, la integral

(1) Véase JAHNKE - EMDE, l. c. p. 99.

$$\bar{Z}_0^{-\infty e^{i\varphi}}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{-\infty e^{i\varphi}} \frac{e^{wz}}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

que tiene un sentido en el semiplano izquierdo de $w = u + iv$,
 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$ (fig. 1) para z real ≥ 0 . Aplicando el teorema
 de Cauchy encontramos, para $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -0$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{-\infty e^{i\varphi}} \frac{e^{wz}}{\sqrt{1-w^2}} dw = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ivz}}{\sqrt{1+v^2}} dv = \frac{2}{\pi} \int_0^{-1} \frac{e^{uz}}{\sqrt{1-u^2}} du + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{-\infty} \frac{e^{uz}}{i\sqrt{u^2-1}} du$$

y para $+0 \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{-\infty e^{i\varphi}} \frac{e^{wz}}{\sqrt{1-w^2}} dw &= \frac{2i}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{e^{ivz}}{\sqrt{1+v^2}} dv = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ivz}}{\sqrt{1+v^2}} dv \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{-1} \frac{e^{uz}}{\sqrt{1-u^2}} du + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{-\infty} \frac{e^{uz}}{-i\sqrt{u^2-1}} du. \end{aligned}$$

Combinando las dos últimas expresiones concluimos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos vz}{\sqrt{1+v^2}} dv = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{-\infty} \frac{e^{uz}}{\sqrt{u^2-1}} du = -i\bar{Z}_{-1}^{i\infty}(z)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin vz}{\sqrt{1+v^2}} dv = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{e^{uz}}{\sqrt{1-u^2}} du = \bar{Z}_{-1}^0(z) \quad (12)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{uz}}{\sqrt{u^2-1}} du + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{e^{uz}}{i\sqrt{1-u^2}} du = -i\{\bar{Z}_{-1}^{i\infty}(z) + \bar{Z}_{-1}^0(z)\}.$$

A base de (12) podemos formar

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \cos \xi}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= \int_0^\infty J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \eta v}{\sqrt{1+v^2}} \, dv \\ &= -i \frac{\pi}{2} \int_0^\infty J_0(z) \bar{Z}_{-1}^{i\infty}(\alpha z) \cdot z \, dz \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \operatorname{sen} \xi}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= \int_0^\infty J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha \eta v}{\sqrt{1+v^2}} \, dv \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty J_0(z) \bar{Z}_{-1}^0(\alpha z) \cdot z \, dz \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) e^\xi}{\sqrt{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi \\ &= \int_0^\infty J_0(\eta) \eta \, d\eta \left\{ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\alpha \eta u}}{\sqrt{u^2 - 1}} \, du + \int_{-1}^0 \frac{e^{\alpha \eta u}}{i \sqrt{1 - u^2}} \, du \right\} \\ &= -i \frac{\pi}{2} \int_0^\infty J_0(z) \{ \bar{Z}_{-1}^{i\infty}(\alpha z) + \bar{Z}_{-1}^0(\alpha z) \} \cdot z \, dz. \quad (15) \end{aligned}$$

Las últimas tres integrales son del tipo (7) y pueden ser directamente evaluadas con los elementos dados en §§ 4 y 5. El cálculo da:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \cos \xi}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) \cos \xi}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi = \frac{2}{1+\alpha^2} \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \operatorname{sen} \xi}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) \operatorname{sen} \xi}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) e^\xi}{\sqrt{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi = \frac{2-i\alpha}{1+\alpha^2}.$$

En el caso de la integral

$$Z_0^{e^{i\varphi}}(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\varphi} e^{i w z}}{\sqrt{1-w^2}} \, dw$$

el procedimiento es análogo. Tenemos para $+0 \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\varphi} e^{i w z}}{\sqrt{1-w^2}} \, dw = \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-vz}}{\sqrt{1+v^2}} \, dv = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{iuz}}{\sqrt{u^2-1}} \, du + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{iuz}}{-i\sqrt{u^2-1}} \, du$$

y, separando las partes reales e imaginarias,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} uz}{\sqrt{1-u^2}} \, du + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos uz}{\sqrt{u^2-1}} \, du &= -i Z_0^{i\varphi}(z) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos uz}{\sqrt{1-u^2}} \, du - \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} uz}{\sqrt{u^2-1}} \, du &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Con ayuda de (17) podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \cos \xi}{\sqrt{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= \int_0^\infty J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \eta w}{\sqrt{w^2-1}} \, dw \\ &= \int_0^\infty J_0(\eta) \eta \, d\eta \left\{ \int_0^1 \frac{\cos \alpha \eta u}{i\sqrt{1-u^2}} \, du + \int_1^\infty \frac{\cos \alpha \eta u}{\sqrt{u^2-1}} \, du \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_1^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\eta u}}{\sqrt{u^2-1}} \, du = - \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_{-1}^{-\infty} \frac{e^{i\alpha\eta u}}{\sqrt{u^2-1}} \, du \\
 &= -i \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} J_0(z) Z_{-1}^{i\infty}(\alpha z) \cdot z \, dz \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta) \operatorname{sen} \xi}{\sqrt{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi = \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha \eta w}{\sqrt{w^2-1}} \, dw \\
 &= \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \left\{ \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \alpha \eta u}{i\sqrt{1-u^2}} \, du + \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha \eta u}{\sqrt{u^2-1}} \, du \right\} \\
 &= \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_0^1 \frac{e^{-i\alpha\eta u}}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_{-1}^0 \frac{e^{i\alpha\eta u}}{\sqrt{1-u^2}} \, du \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} J_0(z) Z_{-1}^0(\alpha z) \cdot z \, dz \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) e^{\xi}}{\sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi \\
 &= \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\alpha\eta v}}{\sqrt{1+v^2}} \, dv = \int_0^{\infty} J_0(\eta) \eta \, d\eta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha\eta v}}{\sqrt{1+v^2}} \, dv \\
 &= -i \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} J_0(z) Z_0^{i\infty}(\alpha z) \cdot z \, dz. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Estas integrales se evalúan con ayuda de (6), (10) y con los valores dados en el § 5,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \cos \xi}{V_{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) \cos \xi}{V_{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi \\
 &= \frac{2}{1-\alpha^2} - i\pi\delta(1-\alpha) + i\pi\delta(1+\alpha) \\
 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) \sin \xi}{V_{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) \sin \xi}{V_{-\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi \\
 &= \frac{i\alpha}{1-\alpha^2} + \pi\delta(1-\alpha) - \pi\delta(1+\alpha) \quad (21) \\
 \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{J_0(\eta) e^\xi}{V_{\alpha^2 \eta^2 + \xi^2}} \eta \, d\eta \, d\xi &= \frac{2-\alpha}{1-\alpha^2}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado los símbolos de Dirac para

$$\begin{aligned}
 2\pi\delta(1-\alpha) &= -i \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{i(1-\alpha)z}}{\sqrt{\alpha}(1-\alpha)} \\
 2\pi\delta(1+\alpha) &= -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{-i(1+\alpha)z}}{\sqrt{\alpha}(1+\alpha)}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

7. - *El valor límite* δ . — Las expresiones (22), que hemos introducido formalmente, contienen una singularidad para $\alpha = \pm 1$ respectivamente. Como necesitamos las expresiones (21) para calcular coeficientes de Fourier, nos interesan principalmente las integrales del tipo

$$\int \delta(1-\alpha) \cdot d\alpha \quad \text{y} \quad \int \delta(1+\alpha) \cdot d\alpha.$$

La indeterminación introducida en estas integrales por la singularidad deja lugar a una definición suplementaria, la que podemos elegir, dentro de cierta medida, arbitrariamente, según el fin que perseguimos. En nuestro caso, la condición que tene-

mos que satisfacer consiste en asegurar que la serie de Fourier, a la cual llegamos, represente la función inicial que nos proponemos desarrollar. En la presente nota nos contentaremos con establecer por definición las integrales que necesitamos para el problema físico arriba mencionado.

La condición suplementaria suficiente para nuestro fin consiste en la imposición de que la singularidad tiene que ser rodeada del lado de az positivo imaginario, con z positivo real. Como, por un lado, es suficiente que az difiera de un valor real en una cantidad del orden ε y como, por otro lado, en (22) z tiende a infinito, nuestra imposición implica para α cerca de la singularidad apenas una modificación de segundo orden.

Con nuestra condición suplementaria verificamos, inmediatamente,

$$\int_{1-A}^{1+A} \delta(1-\alpha) \cdot d\alpha = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-Az}^{+Az} \frac{e^{i(1-\alpha)z}}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}z} d(1-\alpha)z = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi$$

$$\int_{-1-A}^{-1+A} \delta(1+\alpha) \cdot d\alpha = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-Az}^{+Az} \frac{e^{-i(1+\alpha)z}}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)}z} d(1+\alpha)z = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\xi} d\xi$$

y, p. ej., para

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi \right)$$

$$+ i \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \right)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi.$$

El primer término del segundo miembro se anula, por ser

una integral sobre una función impar. El segundo término tiende hacia $\frac{1}{2}$. El último término, que se omite cuando se adopta la definición del «valor principal» de la integral según Cauchy, depende del camino de integración elegido. Nuestra imposición implica que este camino rodea la singularidad del lado de los valores imaginarios negativos de ξ y conduce al valor $+\frac{1}{2}$. Llegamos, luego, al resultado

$$\int_{1-A}^{1+A} \delta(1-\alpha) \cdot d\alpha = 1$$
$$\int_{-1-A}^{-1+A} \delta(1+\alpha) \cdot d\alpha = 1. \quad (23)$$

Es un placer para el autor aprovechar de esta oportunidad para expresar su agradecimiento al Prof. Beppo Levi (Rosario) por su benevolente interés en el presente trabajo y al Prof. A. Zygmund (Chicago) por sus amables indicaciones respecto a la literatura disponible en esta rama.

Pampa de Achala, 18 de febrero de 1948.

OBSERVATORIO DE CÓRDOBA.

SUR UNE SURFACE REPRESENTANT UNE INVOLUTION CYCLIQUE DU QUATRIEME ORDRE

par

LUCIEN GODEAUX

Nous avons consacré de nombreux travaux à l'étude des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis⁽¹⁾. Nous avons, à diverses reprises, appliqué les résultats obtenus à des exemples particuliers. Dans cette note, nous étudions une involution cyclique du quatrième ordre appartenant à une surface de l'espace à cinq dimensions. La surface image de l'involution appartient à l'espace ordinaire; nous retrouvons, par des procédés élémentaires, les propriétés que nous avons d'autre part établies dans le cas général. D'une manière précise, nous montrons que les points de diramation sont des points doubles biplanaires ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique, et que certaines surfaces ont un contact du troisième ordre avec la surface image le long de certaines courbes.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, l'homographie cyclique H , de période quatre, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : ix_4 : -ix_5.$$

Si $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3)$ sont des formes algébriques du quatrième degré et $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ une forme algébrique du second degré, la surface F d'équations

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. et indust., N° 270. Paris, Hermann, 1935); *Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1940, pp. 28-43, 100-110, 115-128).

$$x_4^4 = \varphi_1, \quad x_5^4 = \varphi_2, \quad x_4 x_5 = \varphi$$

est transformée en elle-même par l'homographie H . Sur cette surface, cette homographie engendre une involution I_4 d'ordre quatre.

Désignons par O_i le point de S_5 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i .

Les axes de l'homographie H sont:

- 1) L'espace à trois dimensions $O_0 O_1 O_2 O_3$, d'équations
 $x_4 = x_5 = 0$;
- 2) Le point O_4 ;
- 3) Le point O_5 .

Ces deux derniers points n'appartiennent pas à la surface F , mais celle-ci rencontre l'espace $O_0 O_1 O_2 O_3$ en 32 points communs aux surfaces

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

Il en résulte que l'involution I_4 possède 32 points unis.

2. Pour obtenir une surface F' , image de l'involution I_4 , projectons la surface F de la droite $O_4 O_5$ sur l'espace $O_0 O_1 O_2 O_3$. Nous obtenons, pour équation de F' ,

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi^4.$$

F' est donc une surface du huitième ordre. Les points de diramation de F' sont les 32 points communs aux surfaces

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi = 0.$$

Pour étudier la singularité de la surface F' en un point de diramation, supposons que O_0 soit un de ces points et écrivons

$$\varphi_1 \equiv x_0^3 \alpha_1 + x_0^2 \alpha_2 + x_0 \alpha_3 + \alpha_4,$$

$$\varphi_2 \equiv x_0^3 \beta_1 + x_0^2 \beta_2 + x_0 \beta_3 + \beta_4,$$

$$\varphi \equiv x_0 \gamma_1 + \gamma_2,$$

où les α, β, γ sont des formes algébriques dont les degrés sont indiqués par les indices, par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 . On peut d'ailleurs supposer, sans restreindre la généralité,

$$\alpha_1 \equiv x_1, \quad \beta_1 \equiv x_2.$$

L'équation de F' prend la forme

$$(x_0^3 x_1 + x_0^2 \alpha_2 + x_0 \alpha_3 + \alpha_4)(x_0^3 x_2 + x_0^2 \beta_2 + x_0 \beta_3 + \beta_4) - (x_0 \gamma_1 + \gamma_2)^4 = 0.$$

Passons aux coordonnées non homogènes en posant

$$x_0 = 1, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

L'équation de F' s'écrit

$$[x + \alpha_2(x, y, z) + \dots][y + \beta_2(x, y, z) + \dots] - [\gamma_1(x, y, z) + \gamma_2(x, y, z)]^4 = 0.$$

L'origine O_0 des coordonnées est un point double biplanaire pour la surface F' , les plans tangents étant $x=0$, $y=0$.

Effectuons la transformation birationnelle

$$x = x' z', \quad y = y' z', \quad z = z',$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_0 sur l'axe des z , le point $x'=y'=z'=0$. Après suppression du facteur commun z'^2 , l'équation de F' devient

$$[x' + z' \alpha_2(x', y', 1) + \dots][y' + z' \beta_2(x', y', 1) + \dots] - z'^2 [\gamma_1(x', y', 1) + z' \gamma_2(x', y', 1)]^4 = 0.$$

La nouvelle origine est un point double conique pour cette surface, le cône tangent ayant pour équation

$$[x' + z' \alpha_2(0, 0, 1)][y' + z' \beta_2(0, 0, 1)] - z'^2 [\gamma_1(0, 0, 1)]^4 = 0$$

Par conséquent, *en un point de diramation, la surface F' possède un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique.*

3. A la section de la surface F par l'hyperplan $x_4=0$, cor-

respond sur la surface F' la section de cette surface par $\varphi_1=0$, c'est-à-dire la courbe du huitième ordre

$$\varphi_1=0, \quad \varphi=0.$$

Cette courbe est évidemment simple pour la surface F' , mais si l'on introduit $\varphi_1=0$ dans l'équation de cette surface, on obtient $\varphi^4=0$, par conséquent, la surface $\varphi_1=0$ a un contact du troisième ordre avec la surface F' le long de la courbe $\varphi_1=0$, $\varphi=0$.

De même, à la section de F par l'hyperplan $x_5=0$ correspond sur F' la courbe

$$\varphi_2=0, \quad \varphi=0$$

et le long de cette courbe, la surface $\varphi_2=0$ a un contact du troisième ordre avec F' .

4. La surface F' est l'enveloppe de la famille de surfaces

$$\lambda^2 \varphi_1 - 2\lambda \varphi^2 + \varphi_2 = 0 \quad (1)$$

et la surface générale de cette famille touche F' le long de la courbe découpé par

$$\lambda \varphi_1 - \varphi^2 = 0.$$

Aux sections de F' par les surfaces (1) correspondent sur F les courbes découpées par les hypersurfaces

$$\lambda^2 x_4^4 - 2\lambda x_4^2 x_5^2 + x_5^4 = 0,$$

c'est-à-dire par les hypersurfaces

$$(\lambda x_4^2 - x_5^2)^2 = 0.$$

Chacune de ces hypersurfaces se compose de deux hyperplans passant par l'espace $O_0 O_1 O_2 O_3$, comptés chacun deux fois.

Inversement, considérons la section de F par l'hyperplan

$$\mu x_4 + x_5 = 0. \quad (2)$$

L'homographie H lui fait correspondre la section de F par l'hyperplan

$$\mu x_4 - x_5 = 0$$

et à cette section, H fait correspondre la section par l'hyperplan (2). A l'ensemble de ces sections correspond, sur F' , la courbe

$$\mu^2 \varphi_1 - \varphi^2 = 0, \quad \mu^2 \varphi^2 - \varphi_2 = 0, \quad (3)$$

d'ordre 16.

Lorsque μ varie, les dernières équations représentent deux faisceaux projectifs de surfaces du quatrième ordre et l'intersection des surfaces homologues engendre la surface F' .

La surface

$$\mu^4 \varphi_1 - 2\mu^2 \varphi^2 + \varphi_2 = 0$$

touche la surface F' le long de la courbe (3). Elle coïncide avec la surface (1) pour $\lambda = \mu^2$.

5. Désignons par $|C|$ le système linéaire de courbes découpées sur F par les hypersurfaces du quatrième ordre.

Ces hypersurfaces forment quatre familles invariantes pour l'homographie H , à savoir

$$\lambda_1 x_4^4 + \lambda_2 x_5^4 + \lambda_3 x_4^2 x_5^2 + x_4 x_5 \psi_2 + \psi_4 = 0, \quad (1)$$

$$\lambda_1 x_4^3 x_5 + \lambda_2 x_4 x_5^3 + x_4^2 \psi_2 + x_5^2 \psi_2^1 = 0, \quad (2)$$

$$x_4^2 x_5 \psi_1 + x_5^3 \psi_1^1 + x_4 \psi_3 = 0, \quad (3)$$

$$x_4 x_5^2 \psi_1 + x_4^3 \psi_1^1 + x_5 \psi_3 = 0, \quad (4)$$

où les ψ sont des formes algébriques en x_0, x_1, x_2, x_3 , à coefficients variables, dont les degrés sont indiqués par les indices.

Comme nous avons à considérer les courbes découpées par ces hypersurfaces sur F , nous pouvons tenir compte des équations de cette surface. Les équations précédentes deviennent alors

$$\psi_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1')$$

$$x_4^2 \psi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_5^2 \psi_2'(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (2')$$

$$x_5^3 \psi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_4 \psi_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (3')$$

$$x_4^3 \psi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_5 \psi_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (4')$$

Nous désignerons par $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, $|C_4|$ les systèmes linéaires découpés sur F respectivement par ces hypersurfaces. A ces systèmes, correspondent sur F' des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|C'_1|$, $|C'_2|$, $|C'_3|$, $|C'_4|$.

Le système $|C'_1|$ est évidemment découpé sur F' par les surfaces $\psi_4=0$, du quatrième ordre.

En élevant au carré les deux membres de l'équation (2') et en tenant compte des équations de F , on obtient

$$\varphi_1 \psi_2^2 + 2\varphi^2 \psi_2 \psi'_2 + \varphi_2 \psi'^2_2 = 0. \quad (5)$$

Appelons λ le coefficient de x_0^2 dans ψ_2 par exemple et cherchons l'enveloppe du système formé par les surfaces précédentes lorsque λ varie. Dans ce but, posons

$$\psi_2 = \lambda x_0^2 + \alpha_2.$$

L'équation (5) devient

$$\varphi_1 [\lambda x_0^2 + \alpha_2]^2 + 2\varphi^2 [\lambda x_0^2 + \alpha_2] \psi'_2 + \varphi_2 \psi'^2_2 = 0.$$

En dérivant par rapport à λ , on obtient

$$x_0^2 \varphi_1 (\lambda x_0^2 + \alpha_2) + \varphi^2 \psi'_2 x_0^2 = 0.$$

L'élimination de λ entre les équations précédentes donne

$$\psi'_2 (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi^4) = 0.$$

On en conclut qu'il existe une surface (5) tangente à la surface F' le long de chaque courbe C'_2 .

Observons que les équations de la courbe C'_2 peuvent s'écrire

$$\varphi_1 \psi_2 + \varphi^2 \psi'_2 = 0, \quad \varphi^2 \psi_2 + \varphi_2 \psi'_2 = 0.$$

6. Occupons-nous des courbes C'_3 .

En multipliant les deux membres de l'équation (3') soit par x_4^3 , soit par x_5 , on obtient, en tenant compte des équations de F , les équations d'une courbe C'_3 ,

$$\varphi^3 \psi_1 + \varphi_1 \psi_3 = 0, \quad \varphi_2 \psi_1 + \varphi \psi_3 = 0.$$

En élevant d'autre part les deux membres de l'équation (3') à la quatrième puissance et en tenant compte des équations de F , on obtient l'équation d'une surface

(6)

$$\varphi_2^3 \psi_1^4 + 4\varphi_2^2 \varphi \psi_1^3 \psi_3 + 6\varphi_2 \varphi^2 \psi_1^2 \psi_3^2 + 4\varphi^3 \psi_1 \psi_3^3 + \psi_1 \psi_3^4 = 0.$$

passant par la courbe C'_3 .

Désignons par λ le coefficient de x_0 dans ψ_1 par exemple et cherchons l'enveloppe de la surface (6) lorsque λ varie. Nous obtenons, en dérivant par rapport à λ ,

$$x_0 \varphi_2^3 \psi_1^3 + 3x_0 \varphi_2^2 \varphi \psi_1^2 \psi_3 + 3x_0 \varphi_2 \varphi^2 \psi_1 \psi_3^2 + x_0 \varphi^3 \psi_3^3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_0 [\varphi_2 \psi_1 + \varphi \psi_3]^3 = 0. \quad (7)$$

Si la valeur de λ donnée par cette équation est une racine de l'équation (6), cette racine est multiple d'ordre quatre.

L'élimination de λ entre les équations (6) et (7) donne

$$\psi_3^4 (\varphi^4 - \varphi_1 \varphi_2) = 0.$$

On en conclut que le long d'une courbe C'_3 , il y a une surface (6) ayant un contact du troisième ordre avec la surface F' .

On arrive aux mêmes conclusions en partant du système $|C'_4|$. Une courbe C'_4 a pour équations

$$\varphi_1 \psi_1 + \varphi \psi_3 = 0, \quad \varphi^3 \psi_1 + \varphi_2 \psi_3 = 0$$

et le long de cette courbe, la surface

$$\varphi_1^3 \psi_1^4 + 4\varphi_1^2 \varphi \psi_1^3 \psi_3 + 6\varphi_1 \varphi^2 \psi_1^2 \psi_3^2 + 4\varphi^3 \psi_1 \psi_3^3 + \varphi_2 \psi_3^4 = 0$$

a un contact du troisième ordre avec la surface F' .

Liège, 37 quai Orban, le 2 février 1948.

UNIVERSITÉ.

SOBRE EL CALCULO NUMERICO DEL PERIMETRO DE UNA ELIPSE

por

ROBERTO FRUCHT
(Viña del Mar, Chile)

Es sabido que el perímetro de una elipse con los ejes $2a$ y $2b$ ($a > b > 0$) está dado por la fórmula

$$(1) \quad P = 4a \cdot E(k),$$

siendo

$$(2) \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

la integral elíptica completa de segunda especie, cuyo «módulo» k no es otra cosa que la «excentricidad numérica» de la elipse:

$$(3) \quad k = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Si se dispone de una tabla de integrales elípticas, el cálculo numérico del perímetro de una elipse no ofrece mayores dificultades; ni siquiera hay necesidad de efectuar el cálculo numérico del módulo k , porque las tablas dan $E(k)$ en realidad no en función de k mismo, sino en función de un ángulo α definido por

$$(4) \quad k = \sin \alpha,$$

y de la comparación de esta ecuación con la (3) resulta que el ángulo α se puede determinar directamente por la fórmula

$$(5) \quad \cos \alpha = \frac{b}{a},$$

sin necesidad de calcular k .

Si se quiere determinar, p. ej., el perímetro de una elipse cuyos ejes miden 20 y 18 unidades respectivamente, de $a=10$ y $b=9$ resultará: $\cos \alpha = 0,9$ y $\alpha = 25^\circ 50,5'$ e interpolando linealmente entre $E(\sin 25^\circ) = 1,4981$ y $E(\sin 26^\circ) = 1,4924$ (valores que hallamos, p. ej., en las conocidas tablas de funciones de Jahnke-Emde), encontraremos que $E(\sin 25^\circ 50,5') = 1,4933$ y, por consiguiente, $P = 59,73$ unidades de longitud.

En cambio, cuando no se dispone de una tabla de integrales elípticas, se presenta el problema de encontrar métodos o fórmulas que den un valor numérico suficientemente aproximado de la integral (2).

Uno de estos métodos ya ha sido tratado en esta Revista: véase el artículo de J. V. Uspensky: «Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss» en el vol. V, 1 (1945) de «Math. Notae». No hay, pues, necesidad de volver a exponer ese método que da rápidamente muchas decimales, pero cuya justificación requiere el estudio de dichas medias aritmético-geométricas, de las integrales elípticas de primera especie, etc.

El método más elemental que puede haber para resolver el problema del cálculo numérico del perímetro de la elipse, es, sin duda, el desarrollo en serie del integrando $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ (aplicando la fórmula del binomio para exponente $1/2$) para efectuar después la integración término por término; se llega de esta manera a la serie siguiente:

$$(6) \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \dots \right).$$

(Omitimos los cálculos intermedios, que se pueden ver en muchos textos de cálculo infinitesimal). Sin embargo, la serie (6) es rápidamente convergente sólo cuando k tiene un valor suficientemente pequeño; en cambio, cuando k tiene un valor cerca de la unidad, el desarrollo (6) es demasiado lentamente convergente para ser útil desde el punto de vista práctico. (Trate el lector de calcular, p. ej., el perímetro de una elipse con $a=10$, $b=1$).

Más conveniente sería, por lo tanto, el empleo de una fórmula aproximada en términos finitos, donde no haya tales dificultades de convergencia, p. ej., de una fórmula del tipo parabólico: $P \sim 4a \left\{ \alpha + \beta \cdot \frac{b}{a} + \gamma \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\}$, en que $\frac{P}{4a}$ se aproxima por una función de segundo grado de la razón $\frac{b}{a}$, con coeficientes α, β, γ que se determinan de manera que resulte una aproximación suficiente. Muy usada es, p. ej., la fórmula siguiente (que se encuentra en la conocida obra: «HUETTE — Manual del Ingeniero»):

$$(7) \quad P \sim 4a \left(0,9827 + 0,311 \frac{b}{a} + 0,2867 \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Esta fórmula da resultados bastante satisfactorios (con un error inferior a 0,5 %), cuando el módulo k no se acerca demasiado a uno de los dos extremos: 0 o 1; p. ej., para la elipse con $a=10$, $b=9$, que tratamos ya antes, resultaría según la fórmula (7): $P \sim 40 \cdot 1,4948 \sim 59,79$ en lugar de 5,73, con un error de 0,1 %. Pero la fórmula (7) tiene la desventaja que con ella se obtienen resultados mucho menos satisfactorios, cuando se trata de elipses muy achatadas ($\frac{b}{a}$ muy pequeño, o sea k casi igual a la unidad) o muy poco distintas de circunferencias ($b \sim a$, o sea k muy pequeño), lo que no puede sorprender, si nos damos cuenta de que el segundo miembro de la fórmula (7) no tiende hacia $4a$, cuando $b \rightarrow 0$, sino hacia $3,9308a$; tampoco tiende hacia $2\pi a \sim 6,2832a$, cuando $b \rightarrow a$, sino hacia $6,3216a$.

Pero es fácil obtener también fórmulas que dan resultados satisfactorios para toda clase de elipses (sin excluir los casos extremos de elipses muy achatadas o muy poco distintas de circunferencias). Basta para eso recurrir a la conocida fórmula de cuadratura mecánica de Gauss y aplicarla a la integral (2). La fórmula de Gauss (cuyo desarrollo se puede ver, p. ej., en el libro de Julio Rey Pastor: *Curso de Cálculo infinitesimal*) da para una integral definida cualquiera (con límites simétricos con respecto al origen) el siguiente valor aproximado:

$$(8) \quad \int_{-h}^h f(x) dx \sim h \cdot \frac{8f(0)+5\left\{f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}h\right)+f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}h\right)\right\}}{9},$$

que, para una función par que cumple con la identidad

$$(9) \quad f(-x) \equiv f(x),$$

se reduce a

$$(10) \quad \int_{-h}^h f(x) dx \sim h \cdot \frac{8f(0)+10f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}h\right)}{6}.$$

Para aplicar esta última fórmula al caso de una integral elíptica completa de segunda especie, basta escribir ésta en la forma siguiente:

$$(11) \quad E(k) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi,$$

de modo que será:

$$(12) \quad h = \frac{\pi}{2},$$

$$(13) \quad f(x) = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x},$$

$$(14) \quad f(0) = 1,$$

$$\text{y } f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}h\right) = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} =$$

$$\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 69^\circ 42,8'} = \sqrt{1-0,8798 k^2}$$

o con aproximación suficiente:

$$(15) \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}h\right) \sim \sqrt{1-0,88 k^2}.$$

La fórmula (10) de Gauss nos proporciona de esta manera la siguiente fórmula aproximada para la integral (11):

$$(16) \quad E(k) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8+10\sqrt{1-0,88k^2}}{6}$$

o sea

$$(17) \quad E(k) \sim \frac{\pi}{36} (8 + \sqrt{100 - 88k^2}).$$

Con esta fórmula se pueden calcular valores aproximados de integrales elípticas completas de segunda especie con errores generalmente inferiores a 0,1 %; para transformar esta fórmula en otra que dé directamente el perímetro de la elipse basta multiplicarla por $4a$ y reemplazar k por su valor (3), lo que nos da:

$$P = 4a \cdot E(k) \sim \frac{\pi}{9} \{8a + \sqrt{100a^2 - 88(a^2 - b^2)}\}$$

o sea:

$$(18) \quad P \sim \frac{\pi}{9} (8a + \sqrt{12a^2 + 88b^2}).$$

Debido a la necesidad de extraer una raíz cuadrada, esta fórmula es tal vez menos cómoda que la (7), pero ofrece la ventaja de dar *para cualquier elipse* resultados muy satisfactorios (con un error que, por lo general, no alcanza a 0,1 %), lo que no ocurre con la fórmula (7). P. ej., para la elipse considerada más arriba ($a=10$, $b=9$) resulta con la (18):

$$P \sim \frac{\pi}{9} (80 + \sqrt{8328}) \sim 59,78 \text{ (en lugar de } 59,73);$$

para una circunferencia ($b=a$) la fórmula (18) da el valor correcto $P=2\pi a$, y para el otro caso extremo ($b=0$) la (18) da $P \sim \frac{\pi}{9} (8 + \sqrt{12}) a \sim 4,002 a$ (en lugar de $4a$) con un error despreciable.

Para terminar diremos que otra fórmula aún más exacta se podría obtener partiendo, en la aplicación de la fórmula de cuadratura de Gauss, no de la integral (11), con el intervalo de integración $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, sino directamente de la integral

(2), cuyo intervalo de integración $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ se puede reducir a límites simétricos, p. ej. $-1 \leq x \leq 1$, por medio de la sustitución $\varphi = \frac{\pi}{4} (x+1)$; escribiendo, pues,

$$(19) \quad E(k) = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\pi(x+1)}{4}} dx$$

y aplicando ahora la fórmula (8), obtendremos (después de algunas reducciones obvias) la siguiente fórmula aproximada:

$$(20) \quad E(k) \sim \frac{\pi}{36} (8 \sqrt{1 - 0,5 k^2} + 5 \sqrt{1 - 0,031 k^2} + 5 \sqrt{1 - 0,969 k^2}).$$

En todos los casos que examiné, esta fórmula me ha dado hasta la cuarta decimal valores idénticos a los de una tabla de integrales elípticas; pero no se puede negar que la necesidad de calcular tres raíces cuadradas (en lugar de una) es algo molesta. Lo mismo se puede decir de la fórmula siguiente para el perímetro de la elipse que se deriva de la (20):

$$(21) \quad P \sim \frac{\pi}{18} \{8 \sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{96,9 a^2 + 3,1 b^2} + \sqrt{3,1 a^2 + 96,9 b^2}\};$$

p. ej., para $a=10$, $b=9$ se obtiene con esta fórmula $P=59,73$ (con 4 cifras exactas). Sin embargo, el cálculo numérico es más largo que con las fórmulas (7) o (18) y el empleo de la fórmula (21) se justificará sólo en aquellos casos en que se necesite una exactitud superior a la que ofrecen las otras fórmulas más sencillas.

— 112 —

SOBRE EL CALCULO APROXIMADO DE INTEGRALES

A PROPOSITO DE LA NOTA DEL Sr. ROBERTO FRUCHT

por

BEPPPO LEVI

El cálculo aproximado es uno de los problemas más importantes en las aplicaciones de la matemática; por otra parte, en un número muy grande de casos, cuando se pueden tener en cuenta condiciones de continuidad demostradas o supuestas, podría decirse que el problema verdadero desaparece, reduciéndose a una cuestión de tiempo y de paciencia, para acercarse al resultado deseado con una sucesión de pasos, y eventualmente de ensayos convenientemente ordenados. Tal es, por ej., el caso del cálculo de integrales numéricamente definidas, que se realiza, en el modo más simple, por la sola aplicación de la definición como límite de sumas de productos de valores de la función integrando por las anchuras de intervalos en los cuales el intervalo de integración se habrá oportunamente dividido. Bastará, como se sabe, considerar como valor aproximado de la integral una cualquiera de estas sumas; y, si la función por integrar es continua, podrá siempre elegirse esa suma de manera que el error debido a la aproximación sea tan pequeño como se quiera, bastando, para este fin, elegir aquellos intervalos parciales bastante pequeños para que en cada uno de ellos la oscilación de la función sea menor del cociente entre el error admitido y la longitud total del intervalo de integración.

Desde luego, en la aplicación efectiva de tal procedimiento no faltan todavía dificultades de orden práctico, debidas a la cantidad de cálculos — aunque substancialmente elementales — que de esta manera pueden resultar necesarios; y entre éstas princi-

palísima será la necesidad de tener en cuenta los errores sistemáticos debidos a nuestros métodos de calcular por cifras decimales, que imponen, cuando el número de los términos de la suma sea muy grande, determinar y tener en cuenta, en los cálculos parciales muchas cifras más de las que al final quedarán útiles para expresar el resultado con la aproximación que se quería⁽¹⁾.

Para remediar a estos inconvenientes se pone al matemático el problema, teóricamente más importante y difícil, de utilizar propiedades particulares de las funciones con las cuales se trata, para imaginar procedimientos que impliquen un menor número de cálculos aritméticos. Para el caso de la integración definida se acude ordinariamente, con este fin, a las llamadas fórmulas de cuadratura. De este procedimiento ofrece un ejemplo la Nota que precede del Dr. Frucht.

Sin embargo es evidente que, para que una regla para cálculo aproximado pueda decirse verdaderamente útil, es necesario que ella nos enseñe también la *confianza* que podemos tener en el resultado; es decir que sea asignado un límite superior del error posible (siempre se debe entender error sistemático, es decir, suponiendo que los cálculos numéricos sean llevados a cabo con exactitud y con número de cifras tan grande como sea necesario). En el caso nuestro el Sr. Frucht indica, en efecto, en 0,1 % el valor de este error posible, limitando débilmente el alcance de la afirmación con la reserva de que ella vale «en la mayoría de los casos». Como nos expresó en carta el autor, estos porcentajes fueron determinados en forma empírica. Débese notar que, siempre estando en el dominio de la continuidad al cual hemos previamente aludido, también en cierto empirismo no falta de valor matemático, pues podemos estar seguros que, si el error está conocido empíricamente por determinados valores de los parámetros, el mismo debe considerarse del mismo orden de magnitud para valores próximos que se asignen a éstos. Con todo, resulta que el número de los experimentos que se necesitan para concluir de esta manera puede ser muy grande, y más que todo,

⁽¹⁾ Consideraciones muy extensas e interesantes de esta naturaleza pueden verse en un artículo reciente del Bulletin of the American Mathematical Society (noviembre 1947): *Numerical Inverting of Matrices of high Order* por JOHN VON NEUMANN y H. H. GOLDSTINE.

queda todavía indeterminado, a falta de consideraciones teóricas que sirvan de guía.

En el caso de las fórmulas de cuadratura, se dan en muchos libros expresiones del llamado *resto* ⁽²⁾, análogo al resto de la fórmula de Taylor, generalmente también por su forma, que se expresa como producto de un coeficiente constante (dependiente sólo de la fórmula adoptada e independiente de la integral que se quiere aproximar), de una potencia de la anchura del intervalo de integración y del valor de una determinada derivada de la función integrando en un punto determinado (esto es, desconocido) del intervalo de integración — el exponente de aquella potencia y el orden de esta derivada dependiendo en modo característico de la fórmula de cuadratura adoptada. Así para la fórmula de Gauss usada por el Sr. Frucht el resto puede expresarse por ⁽³⁾

$$R = \frac{1}{2016000} f^{(6)}(\xi) h^7, \quad (1)$$

donde h representa la anchura del intervalo de integración y ξ un conveniente valor de la variable, interno a este intervalo.

El valor numérico del resto, convenientemente calculado, proporciona un límite del error que se hace al sustituir el valor de la integral por el proporcionado por la fórmula de cuadratura.

Una característica de estas expresiones de restos es que el coeficiente constante decrece generalmente mientras crecen el orden de derivación y el exponente de h ; surge de allí la impresión de que una fórmula de cuadratura nos dará una aproximación tanto mayor, cuanto más grandes serán estos números; si pensamos que, por ej., para la simple fórmula de los trapecios el orden de derivación y el exponente de h son respectivamente

⁽²⁾ Una teoría general para muchas clases de fórmulas de cuadratura y la determinación de los restos correspondientes puede verse por ej. en B. LEVI. *Analisi matematica, algebrica e infinitesimale* p. 341-350.

⁽³⁾ Pueden darse también expresiones del resto en las cuales figura la derivada 3^a , o 4^a , o 5^a , variando correspondientemente el coeficiente constante y el exponente de h . El lector puede reconstruir fácilmente estas fórmulas aplicando la teoría general citada en la nota anterior; puede también encontrarlas desarrolladas por varios casos particulares, por ej. en PICONE y TORTORICI: *Trattato di Matematiche Generali*. Vol. I. Roma, 1947, p. 428-430.

2 y 3, y correspondientemente el coeficiente constante es 1 : 12 y comparamos con el valor $\sim \frac{1}{2} 10^{-6}$ del coeficiente en la fórmula (1), queda por estas apariencias justificada una creencia de que la fórmula de Gauss deba considerarse como extremadamente más provechosa.

La ilación encuentra en efecto confirmación en muchos casos, por ej., cuando la función que se quiere integrar fuera un polinomio o fuera exponencial u otras funciones relativamente elementales, y aun en otros casos más complejos está justificada por una razón que en la fórmula del resto no aparece, es decir, que el más elevado orden de derivación se acompaña con el hecho de que la fórmula de cuadratura corresponde a sustituir a la función propuesta otra que coincide con ella en un número creciente de puntos (luego talvez⁽⁴⁾ de aproximación creciente). Sin embargo se debe observar que, a raíz de que el valor representado por ξ nos está completamente desconocido, salvo que sabemos que es interno al intervalo de integración, si queremos utilizar la fórmula del resto para limitar con seguridad superiormente el error de la aproximación, deberemos asignar a ξ el valor que hace máximo el valor absoluto de la derivada, y es cosa muy frecuente que las derivadas crecen muy

(⁴) Importa notar que la razón aludida está lejos de justificar la presunción de más elevada aproximación que estaría aconsejada por la intuición. Si en efecto es $f(x)$ una función dada y $P(x)$ un polinomio arbitrario de grado n ; si además se indican con Q_{n+i} polinomios de grado $n+i$ ($i=1,2,3,\dots$) ortogonales en el intervalo $a-b$ a los monomios $1, x, x^2, \dots, x^n$ (por ej. polinomios de Legendre si el intervalo es $-1-1$), y si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ son números arbitrarios, es

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b P(x) (1 + \sum \alpha_i Q_{n+i}(x)) dx = \int_a^b P(x) dx; \quad (\alpha)$$

pueden siempre determinarse los números α_i de manera que

$$P(x) (1 + \sum \alpha_i Q_{n+i}(x)) = F(x)$$

para p valores asignados de x y el número p podrá tomar valores grandes como se quiera, es decir los puntos de coincidencia hacerse tan densos como se quiera sin variar el valor de la diferencia

$$\int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

rápidamente, por lo menos en puntos excepcionales, con crecer el orden de derivación.

Esto lleva a la consecuencia que en cada caso la determinación de la aproximación es problema matemático nuevo y de primaria importancia.

En efecto, aplicando al caso actual la fórmula (1) tendríamos que calcular la expresión

$$\frac{\pi^7}{128.2016.10^3} \left| \frac{d^6}{d\varphi^6} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right| \quad (2)$$

y de inmediato se nota que el cálculo de la derivada sexta será extremadamente trabajoso. Pero hay más: se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= - k^2 \frac{\cos 2\varphi - 2k^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + k^2 \sin^4 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \end{aligned}$$

se ve en seguida que la derivada primera alcanza su máximo valor absoluto por $\varphi = \frac{\pi}{4}$ y este máximo es $k^2 : \sqrt{4 - 2k^2}$;

por opuesto por $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la derivada segunda toma el valor $k^2 : \sqrt{1 - k^2}$, el cual crece tendiendo a ∞ cuando $k \rightarrow 1$.

Se infiere que lo mismo debe ocurrir para todas las derivadas siguientes y que, por consiguiente, ninguna indicación útil podrá sacarse de la expresión (2) para limitar el error de la fórmula de cuadratura adoptada.

Para encontrar la limitación buscada será luego necesario recurrir a un razonamiento directo. Consideremos la diferencia

$$D(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{\pi}{18} (4 + \sqrt{25 - 22k^2}) \quad (3)$$

entre la expresión integral de $E(k)$ y la fórmula aproximada calculada por el Dr. Frucht; de esta expresión tenemos que estudiar el modo de variar al variar k entre 0 y 1, y posiblemente determinar el máximo valor absoluto que ella puede alcanzar.

Se observa en seguida que

$$D(0) = \int_0^{\pi/2} d\varphi - \frac{\pi}{18} (4+5) = 0$$

$$D(1) = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi - \frac{\pi}{18} (4 + \sqrt{3}) = 1 - 1,00042 = -4,2 \cdot 10^{-4}.$$

Por otra parte se calcula fácilmente un desarrollo de $D(k)$ en serie de potencias de k^2 ⁽⁵⁾, siempre convergente para $k^2 < 1$, pero que puede servir útilmente sólo para el cálculo con valores de k suficientemente pequeños:

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{\pi}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \frac{175}{2048} k^8 - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{11}{45} k^2 - \frac{121}{2250} k^4 - \frac{1331}{5625} k^6 - \frac{14641}{112500} k^8 - \dots \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} (-0,0056 k^2 + 0,0069 k^4 + 0,0041 k^6 - 0,0094 k^8 \dots) \quad (6) \quad (4) \end{aligned}$$

Si en esta fórmula se pone, por ej., $k=0,3$, y se calcula, por brevedad, con sólo los dos primeros términos, se obtiene el valor aproximado

$$D(0,3) = -7 \cdot 10^{-4},$$

⁽⁵⁾ El desarrollo de la integral $E(k)$ se encuentra hecho en muchos libros; pero se calcula también elementalmente; se puede escribir en forma muy elegante y mnemónica:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right)$$

(v. por ej. JAHNKE y EMDE p. 47); el desarrollo del segundo término es elemental aplicación de la fórmula de Newton.

⁽⁶⁾ En el cálculo de esta fórmula se han tenido en cuenta algunos términos más de lo que sería estrictamente necesario para nuestro razonamiento, con el fin de poner en evidencia una variación de signos en los términos sucesivos, que, independientemente del cálculo efectivo, se puede prever por los resultados mismos que vamos obteniendo.

el cual, comparado con el anteriormente calculado, de $D(1)$, hace ver en seguida que la diferencia $D(k)$, creciendo k a partir de 0, aun partiendo del valor $0 > D(1)$, empieza con valores negativos, cuyo valor absoluto resulta pronto mayor del de ese mismo $D(1)$; se infiere que, para un valor conveniente de k , debe $D(k)$ alcanzar un mínimo negativo (máximo valor absoluto), después del cual debe crecer nuevamente para llegar al susodicho $D(1) = -4,2 \cdot 10^{-4}$ o eventualmente a valores mayores.

Vamos, luego, a buscar esos máximos y mínimos. Observamos que la derivada de $D(k)$ respecto de k es

$$\begin{aligned} \frac{dD(k)}{dk} &= -k \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \frac{\pi}{18} \frac{22}{\sqrt{25-22k^2}} \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[\frac{11\pi}{9} \frac{k^2}{\sqrt{25-22k^2}} - \{F(k) - E(k)\} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

donde $E(k)$ es la misma integral elíptica completa de segunda especie, cuyo valor numérico se quiere calcular y $F(k)$ (con otro simbolismo, también $K(k)$), es la correspondiente integral completa de la primera especie

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Estas integrales, como ya fué dicho, están tabuladas⁽⁷⁾, y, para los cálculos siguientes, podemos valernos de esa tabulación sin ponernos en contradicción con el problema, pues nuestro fin es de encontrar, una vez para siempre, una regla que nos permita juzgar de la confianza que podemos atribuir a la fórmula aproximada cuando a ella nos dirijamos, por no disponer de las tablas, momentáneamente.

Otra expresión de la misma derivada podemos evidentemente obtener derivando, término por término, la serie (4) y se obtiene:

⁽⁷⁾ Ver, por ej. JAHNKE y EMDE - *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*.

$$\frac{dD(k)}{dk} = \frac{\pi}{2} k (-0,0112 + 0,0276 k^2 + 0,0246 k^4 - \dots).$$

Este desarrollo, limitado a los términos escritos, nos permite investigar fácilmente, si, según dejan prever las observaciones precedentes, pueda esperarse un mínimo de D para valores relativamente pequeños de k . En efecto, la ecuación cuadrática en k^2

$$246 k^4 + 276 k^2 - 112 = 0$$

tiene la raíz positiva

$$k^2 = 0,31, \quad k = 0,56.$$

Se calcula ahora en seguida

$$\frac{11\pi}{9} \frac{0,31}{\sqrt{25 - 22 \cdot 0,31}} = 0,2794.$$

De las tablas sacamos que a

$$k = 0,56 = \text{sen } 34^\circ$$

corresponde

$$F(k) = 1,7214 \quad E(k) = 1,4397$$

$$F(k) - E(k) = 0,2817$$

y comparando con la fórmula (5),

$$\frac{dD}{dk} = -\frac{1}{0,56} 0,0023 \sim -4 \cdot 10^{-3},$$

inferior al error admitido por la aproximación de los cálculos. Queda por tanto asegurado que al valor $k = 0,56$ corresponde, con muy buena aproximación, un mínimo (precisamente un máximo en el valor absoluto) de $D(k)$. Por la comparación directa del valor tabulado de $E(0,56)$ con el valor que se obtiene operativamente por la fórmula aproximada del Sr. Frucht resulta

$$D(0,56) = 1,4397 - 1,4407 = -0,0010,$$

quedando así, como indica el autor, en $\frac{0,1}{1,44} = 0,07 < 0,1 \%$ el error relativo.

Es, sin embargo, necesario continuar el estudio para los valores de k comprendidos entre 0,56 y 1.

Se sabe que $F(1) = \infty$, $E(1) = 1$; por lo tanto, la fórmula (5) nos da, para $k=1$, $dD/dk = -\infty$; es decir, que en proximidad de $k=1$, a la izquierda de este valor, $D(k)$ crece rápidamente; y por cuanto sabemos que $D(1)$ es negativo, muy pequeño en valor absoluto, debemos esperar que vaya, por estos k , alcanzar valores positivos, presentando la función $D(k)$ un máximo positivo en el intervalo considerado.

Para su determinación observemos que

$$\frac{11\pi}{9} \frac{k^2}{\sqrt{25-22k^2}}, \quad (6)$$

para $k=1$, vale 2,2169; de las tablas deducimos que el mismo valor es alcanzado por la diferencia $F(k) - E(k)$ por un valor de $k < \text{sen } 81^\circ$, pero muy próximo a éste. Considerando que la función (6), lo mismo como $F(k) - E(k)$, son funciones crecientes, inferimos que la coincidencia de valores de las dos funciones puede ocurrir únicamente por valores de k tales que

$$k < \text{sen } 81^\circ \sim 0,9877.$$

Para determinar con muy buena aproximación este valor aplicaremos un normal procedimiento de aproximaciones sucesivas. Se calcula fácilmente que:

para $k = \text{sen } 80^\circ$ el valor de (6) resulta 1,9764

mientras de las tablas resulta $F - E = 2,1133$

$$\text{luego } \frac{dD(k)}{dk} = 1,9764 - 2,1133 = -0,2369$$

para $k = \text{sen } 70^\circ$ el valor de (6) resulta 1,5854

y de las tablas $F - E = 1,3862$

$$\text{luego } \frac{dD(k)}{dk} = +0,1992.$$

Entre estos dos valores cae por tanto un cero de dD/dk ; notando que el valor negativo del primer caso difiere sólo en 0,03 del valor positivo del segundo, y observando, como es muy fácil averiguar, que la rapidez de la variación de esta derivada disminuye mientras disminuye el valor de k , se prevé sin más que experimentando con $k = \text{sen } 75^\circ$ deberemos aproximarnos en mucho al cero buscado. Se obtiene, en efecto, que para

$k = \text{sen } 75^\circ$ el valor de (6) es 1,6938
y las tablas dan $F - E = 1,6917$

y para nuestros fines una mayor aproximación no tendría ningún objeto.

El valor correspondiente de $D(k)$ resulta

$$D(0,966) = 0,0091$$

constituyendo luego un error de aproximación del orden de 0,9 %, es decir, 9 veces mayor de lo supuesto por el Dr. Frucht por tanteos sobre casos particulares.

Se presenta, por tanto, el problema de dividir el intervalo de variabilidad de k en intervalos parciales a cada uno de los cuales corresponda un determinado grado de aproximación con el uso de la fórmula de cuadratura adoptada. Vamos, como ej., a delimitar el campo en el cual puede aceptarse la conclusión del Dr. Frucht, que el error no pasa de 0,1 %.

Este campo se compone, por lo visto anteriormente, de dos partes: una que se extiende de $k=0$ hasta un valor intermedio entre 0,56 y 0,966; la otra que se extiende de un cierto valor $> 0,966$ que habrá de determinar hasta 1.

El valor medio entre 0,56 y 0,966 es aproximadamente

$$k = \text{sen } 45^\circ = 0,707107;$$

para este k la fórmula de cuadratura proporciona para $E(k)$ el valor 1,3513, mientras las tablas dan 1,3506; resulta luego

$$D(k) = 1,3506 - 1,3512 = -0,0006.$$

Concluimos que el extremo a derecha del primer intervalo es $> 0,71$.

Consideremos todavía

$$k = \sin 56^\circ 30' = 0,8339 \sim \frac{0,707+0,966}{2};$$

resulta

$$D(k) = 1,2444 - 1,2418 = 0,0026;$$

el valor de k buscado es luego intermedio entre 0,7071 y 0,8339; como valor medio aproximado puede tomarse

$$k = \sin 50^\circ 20' = 0,76977$$

al cual corresponde

$$D(k) = 1,3024 - 1,3018 = 0,0006$$

$$\frac{dD(k)}{dk} = \frac{0,6578 - 0,6393}{0,77} = 0,0240.$$

Por comparación de estos dos valores se infiere que el valor de $D(k)$ quedará todavía $< 0,001$ para valores de k que sobrepasen el último considerado en

$$< \frac{0,0004}{0,0240} = 0,017.$$

Resulta así determinado como extremo superior del primer intervalo de aceptabilidad de la fórmula del Dr. Frucht con la aproximación de 0,1 % el valor

$$k = 0,7698 + 0,017 = 0,787.$$

Con una consideración análoga, y aun más simple, vamos a determinar el extremo inferior del segundo intervalo, el cual termina, como sabemos, en $k=1$. Hemos notado, en efecto, que en este extremo la derivada dD/dk vale $-\infty$. Observando la tabla de las integrales elípticas completas, se nota que, para los valores menores de k , el valor absoluto de esta derivada baja rápidamente, reduciéndose la diferencia $F-E$ a 6,74 ya para $k = \sin 89^\circ 54' = 0,9999984$ y reduciéndose correspondientemente dD/dk a $-4,52$. En aplicación del teorema del valor medio po-

demostramos luego poner, en primera aproximación,

$$\frac{D(k)-D(1)}{4} \sim 1-k. \quad (7)$$

Sabemos que $D(1) = -0,0004$; podemos luego anticipar que será $D(k) \leq 0,001$ para

$$1-k \sim 0,0014 : 4 = 0,00035$$

$$k \sim 0,99965 = \text{sen } 88^\circ 29' 4''.$$

Examinando la tabla de las integrales elípticas, notamos que a este valor de k corresponde para la diferencia $F-E$ el valor $\sim 4,04$ en vez del valor 6,74 que hemos tenido en cuenta en esta primera aproximación; el valor correspondiente de dD/dk será luego próximo a -2 y esto deja suponer que la elección del divisor 4 en (7) haya sido muy por exceso. En efecto, el cálculo directo da

$$D(k) = 1,0018 - 1,0012 = 0,0006.$$

Repetiendo el razonamiento anterior, esto lleva a mejorar el valor obtenido provisionalmente poniendo

$$0,99965 - k = \frac{0,0004}{2} = 0,0002$$

$$k = 0,99945 = \text{sen } 88^\circ 5' 59''.$$

Dada la naturaleza de nuestro problema parece inútil llegar a una mayor precisión.

Resumiendo, la aproximación con error menor de 0,1 % queda asegurada para todos los valores de k fuera del intervalo

$$0,787 < k < 0,999.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

N.º 96— Estudiar la superficie

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz = 0$$

determinando los puntos y líneas múltiples, los conos y planos tangentes en estos puntos y líneas, el máximo de la distancia de sus puntos al origen. Determinar la intersección con la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

y el mínimo tetraedro que la contiene.

1. - Singularidades

La superficie es de cuarto orden y para estudiar los puntos y líneas múltiples convendrá poner su ecuación en coordenadas homogéneas

$$f = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyzt = 0$$

y tomando las derivadas parciales de la función respecto de las variables x, y, z, t , obtendremos las superficies polares

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + xz^2 + yzt = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + yz^2 + xzt = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2z + zx^2 + xyt = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = xyz = 0.$$

Las coordenadas de los puntos singulares están dadas por las soluciones de este sistema. Observemos que la última ecuación se

satisface por $x=0$, $y=0$, $z=0$; la solución $x=0$ sustituida en las otras tres dá

$$yzt=0 \quad yz^2=0 \quad y^2z=0;$$

estas tres ecuaciones se satisfacen por $y=0$ o $z=0$. Procediendo de un modo análogo para $y=0$ y $z=0$ llegamos a la conclusión de que las coordenadas de los puntos singulares deben cumplir dos cualesquiera de las ecuaciones $x=0$, $y=0$, $z=0$. Concluimos que: *son puntos singulares de la superficie todos los puntos de los tres ejes coordenados y éstos solamente.*

2. - Planos y conos tangentes

Si tomásemos la forma general del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = 0$$

y la aplicásemos a nuestra superficie en uno de estos puntos singulares la ecuación del plano tangente resultaría indeterminada, puesto que los coeficientes resultan cero.

Consideremos, para fijar las ideas, un punto del eje z y, para evitar la indeterminación, cortemos la superficie por un plano por dicho eje; tal plano tiene por ecuación

$$y=\lambda x;$$

sustituyendo en la ecuación de la superficie resulta

$$\lambda^2 x^4 + x^2 z^2 (1+\lambda^2) + 2\lambda x^2 z = 0$$

que se descompone en dos:

$$x^2=0 \quad \text{y} \quad \lambda^2 x^2 + (1+\lambda^2) z^2 + 2\lambda z = 0.$$

La intersección del plano con la superficie se descompone luego en la recta $x=y=0$, doble, y en la cónica

$$y=\lambda x, \quad \lambda^2 x^2 + (1+\lambda^2) z^2 + 2\lambda z = 0. \quad (1)$$

La recta corta a la cónica en los puntos

$$Z_1 = (0, 0, 0) \quad Z_2 = \left(0, 0, \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}\right);$$

el primero, origen de las coordenadas, queda fijo al variar el parámetro λ ; el segundo, por contrario, está caracterizado por el valor de λ , es decir, por el particular plano $y = \lambda x$; en este punto por tanto el plano tiene con la superficie una intersección de orden superior que los demás, lo que expresamos diciendo que el plano es tangente a la superficie en este punto.

Al variar el plano este punto de contacto se desplaza recorriendo el eje z o una parte de él.

Precisamente, considerando la ecuación en λ

$$z = \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2},$$

es decir

$$\lambda^2 z + 2\lambda + z = 0, \quad (2)$$

cuyo discriminante es

$$1 - z^2,$$

se nota en seguida que, condición necesaria y suficiente para que por un z dado λ sea real es que

$$-1 \leq z \leq 1.$$

Para cada valor de z cumpliendo con esta condición la ecuación (2) tiene dos raíces reales distintas, salvo que para $z = \pm 1$, donde se tiene una raíz doble $\lambda = \pm 1$. Resumiendo, podemos luego afirmar que *cada punto del segmento $-1 < z < 1$ sobre el eje z es para la superficie punto doble biplanar, con dos planos tangentes reales*. Los puntos $z = \pm 1$ son al contrario *uniplanares*. Los puntos del eje z fuera de dicho segmento son todavía dobles y biplanares, pero con planos tangentes imaginarios; esto significa que *en toda proximidad de un punto del segmento*

$-1 \leq z \leq 1$ existen sobre la superficie otros puntos reales (los puntos de la cónica (1)); pero no existen tales puntos reales en proximidad de las dos semirrectas que con dicho segmento completan el eje z .

Consideraciones análogas podrían repetirse cambiando z en x o y ; pero tampoco es necesario eso, por cuanto la ecuación de la superficie y luego todas las conclusiones se reproducen sin cambios al permutar circularmente las letras x, y, z .

Vamos a probar que el origen es punto triple para la superficie que se estudia. Si se toma la ecuación genérica de una recta por el origen

$$x = tx_0 \quad y = ty_0 \quad z = tz_0$$

y se sustituye en la ecuación de la superficie se tendrá

$$t^4 (x_0^2 y_0^2 + y_0^2 z_0^2 + x_0^2 z_0^2) + 2t^3 x_0 y_0 z_0 = 0$$

esto es

$$t^3 (t(x_0^2 y_0^2 + y_0^2 z_0^2 + x_0^2 z_0^2) + 2x_0 y_0 z_0) = 0.$$

Esta ecuación tiene una solución triple $t^3 = 0$ y una simple

$$t = \frac{-2x_0 y_0 z_0}{x_0^2 y_0^2 + y_0^2 z_0^2 + x_0^2 z_0^2}.$$

Esto demuestra que el origen es punto triple. Se obtendrá una ulterior solución $t=0$ si el numerador de esta última expresión es nulo, es decir, si el punto $(x_0 y_0 z_0)$ pertenece a uno de los planos $x=0$, $y=0$ o $z=0$ con lo cual la recta será tangente en el origen a la superficie que se estudia,

$$x y z = 0$$

es luego la ecuación del cono tangente a la superficie en el origen.

3. - Máxima distancia al origen de los puntos de la superficie.

Hemos demostrado en los párrafos anteriores que la superficie contiene como rectas dobles las que forman el triedro funda-

mental, por lo tanto se comprende que el problema de hallar la distancia máxima de un modo general, como se pide, resulta inmediato en el sentido que, en la dirección de los ejes coordenados, este máximo es el infinito. Para dar un sentido útil a la pregunta sobre puntos en distancia máxima conviene luego excluir dichos ejes. Para este fin observamos que cualquier otro punto de la superficie determina con el eje z un plano $y = \lambda x$ y pertenece a la cónica

$$\lambda^2 x^2 + (1 + \lambda^2) z^2 + 2 \lambda z = 0. \quad (3)$$

trazada sobre este plano, por el valor correspondiente de λ .

Esta cónica es siempre una elipse, puesto que el grupo de los términos de segundo grado $\lambda^2 x^2 + (1 + \lambda^2) z^2$ constituye una forma cuadrática definida.

Resolviendo (3) respecto z se obtiene

$$z = -\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} (1 \pm \sqrt{1 - x^2 (1 + \lambda^2)}); \quad (4)$$

obtenemos pues que un punto genérico de la cónica tiene las coordenadas

$$(x, \lambda x, -\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} (1 \pm \sqrt{1 - x^2 (1 + \lambda^2)})) \quad (5)$$

y será real solamente cuando

$$x^2 < \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

La distancia d de este punto del origen está determinada por

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 (1 + \lambda^2) + \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} (2 - x^2 (1 + \lambda^2) \pm 2 \sqrt{1 - x^2 (1 + \lambda^2)}) \\ &= x^2 \frac{1 + \lambda^2 + \lambda^4}{1 + \lambda^2} + \frac{2 \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} \pm \frac{2 \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} \sqrt{1 - x^2 (1 + \lambda^2)} \end{aligned}$$

El máximo de d podrá buscarse únicamente eligiendo en el último término el signo positivo. Derivando respecto x se obtiene entonces la condición

$$x \frac{1+\lambda^2+\lambda^4}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda^2 x}{(1+\lambda^2)\sqrt{1-x^2(1+\lambda^2)}} = 0,$$

es decir, despreciando la solución $x=0$ a la que corresponde $d=0$,

$$x^2 = \frac{(1+\lambda^2)(1+\lambda^4)}{(1+\lambda^2+\lambda^4)^2}; \quad (1) \quad (6)$$

y, sustituyendo,

$$d^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2+\lambda^4}.$$

Será d^2 máximo por

$$\frac{1+\lambda^2+\lambda^4}{\lambda^2} \text{ mínimo,}$$

es decir

$$\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \text{ mínimo.}$$

Es sabido que este mínimo se realiza por

$$\frac{1}{\lambda^2} = \lambda^2, \quad \lambda^2 = 1.$$

El máximo valor de d es pues

$$d = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(¹) Será útil comprobar que este máximo corresponde ciertamente a valores reales de x . En efecto si multiplicamos ambos miembros por $1 + \lambda^2$ tendremos

$$\begin{aligned} (1+\lambda^2)x^2 &= \frac{(1+\lambda^4)(1+2\lambda^2+\lambda^4)}{(1+\lambda^2+\lambda^4)^2} = \frac{(1+\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2)(1+\lambda^2+\lambda^4+\lambda^2)}{(1+\lambda^2+\lambda^4)^2} = \\ &= 1 - \frac{\lambda^4}{(1+\lambda^2+\lambda^4)^2} \end{aligned}$$

que es evidentemente < 1 tal como lo impone la condición de realidad.

Sustituyendo, por otra parte, el valor $\lambda = \pm 1$ en las (6) y (5) se obtiene que esta distancia máxima corresponde a los 4 puntos

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

4. - *Intersección con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y mínimo tetraedro que la contiene.*

La curva intersección de la superficie con la esfera está completamente definida por las dos ecuaciones

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz = 0 \quad (7)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (8)$$

Siendo estas ecuaciones, respectivamente, de orden 4 y 2, la curva será de orden 8. Para analizar las características de esta curva, vamos a determinar la ecuación del cono que la proyecta desde el origen; esta ecuación deberá ser homogénea en las tres coordenadas x, y, z ; además, observando que el origen no pertenece a la curva, deberá esta ecuación ser de orden ocho. Guiándonos por estas observaciones, transportemos primero el último término de (7) en el segundo miembro y elevemos al cuadrado; podemos escribir

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 = 4x^2y^2z^2 \cdot 1.$$

El primer miembro es de orden 8, el segundo es de orden 6; pero sustituyendo el factor 1 por el primer miembro de (8) pasa en seguida al orden 8, resultando así la ecuación homogénea que se quería:

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2)x^2y^2z^2 = 0.$$

Desarrollando cálculos esta ecuación se escribe

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2y^2 + y^2z^2 - z^2x^2)^2 - 4x^2y^4z^2 \\ &= (x^2y^2 + 2xy^2z + y^2z^2 - z^2x^2)(x^2y^2 - 2xy^2z + y^2z^2 - z^2x^2) \\ &= (xy + yz + zx)(xy + yz - zx)(xy - yz + zx)(xy - yz - zx). \quad (9) \end{aligned}$$

que, como se ve, se descompone en cuatro conos cuádrlicos que proyectan desde el origen la intersección; la curva buscada se compone luego de cuatro ramas algebraicamente distintas.

Podemos también observar que, siendo el cono (9) de orden 8, su intersección con la esfera será de orden 16 y debe por lo tanto comprender, además de la curva considerada, otra curva de orden 8. Esta observación nos permite presumir que, a su vez, cada uno de los conos parciales que componen (9) deberá encontrar la esfera según dos curvas distintas de orden 2, es decir, cónicas y, por cuanto la esfera no contiene otras cónicas sino círculos, ya vemos que la curva considerada se compondrá de cuatro círculos.

Para puntualizar analíticamente estas intuiciones, consideremos en particular la intersección de

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1; \end{aligned}$$

ella será común también a todas las superficies

$$\lambda(xy + yz + zx) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

donde λ y μ son parámetros arbitrarios; poniendo $\mu = 1$, $\lambda = 2$ esta ecuación da

$$(x + y + z)^2 - 1 = (x + y + z + 1)(x + y + z - 1) = 0.$$

La intersección del cono con la esfera se compone luego efectivamente de los dos círculos intersección de la esfera con los planos

$$x + y + z + 1 = 0, \quad x + y + z - 1 = 0. \quad (10')$$

Procediendo de la misma manera con los demás factores de (9) se obtienen otros seis círculos cortados sobre la esfera por los planos

$$\begin{array}{ll}
 x + y - z + 1 = 0 & x + y - z - 1 = 0 \\
 x - y + z + 1 = 0 & x - y + z - 1 = 0 \quad (10'') \\
 x - y - z + 1 = 0 & x - y - z - 1 = 0.
 \end{array}$$

Entre los ocho círculos así determinados habrá cuatro que forman la curva deseada. Para su identificación observemos que los ocho planos (10'), (10'') forman un octaedro regular cuyos vértices son los puntos a distancia 1 del origen sobre los tres ejes coordenados. Los ocho círculos son los circunscriptos a los ocho triángulos equiláteros que forman las caras de este octaedro.

Observemos ahora que en todos los puntos reales de la superficie (7) el producto xyz debe ser negativo, por dar suma cero con los tres primeros términos, necesariamente positivos; por lo tanto los puntos de los círculos que forman la intersección de (7) y (8) están siempre en algún octante en el cual una coordenada es negativa y dos positivas o bien las tres negativas; estos círculos deben pues ser circunscriptos a las caras situadas en octantes donde las tres coordenadas son positivas o bien dos negativas y una positiva, es decir, que estén sobre los planos

$$\begin{array}{ll}
 x + y + z - 1 = 0 & x + y - z + 1 = 0 \\
 -x + y + z + 1 = 0 & x - y + z + 1 = 0
 \end{array}$$

Estos cuatro planos forman un tetraedro tal que sus aristas son tangentes a cada uno de los círculos situados sobre los dos planos que se cortan en ellas; estos círculos son pues inscriptos en los triángulos caras del tetraedro. Por simetría este tetraedro es regular y circunscripto a la esfera determinada por los centros de los círculos. Este es también el mínimo tetraedro que contiene la curva dada en su interior o sobre sus caras. En efecto, si hubiera otro menor, debería de todos modos cada una de sus caras ser tangente a alguno de los círculos que forman la curva; se ve en seguida que las distancias de estas caras del origen deberían ser mayores que el radio de la esfera inscripta en el tetraedro anterior. Debería, por lo tanto, esta esfera estar contenida (propiamente) dentro del nuevo tetraedro hipotético, y éste tendría volumen mayor del tetraedro regular circunscripto a esa esfera.

Esta solución fué desarrollada por el señor ADOLFO DAGHETTO en el Instituto de Matemática.

N.º 110 — Se desea una explicación del hecho siguiente:

Supongamos que un problema cualquiera haya conducido a buscar los valores máximos y mínimos de cierta expresión $f(x)$. Si se cambia la variable de referencia en otra t ligada a la x por la transformación $x=\Phi(t)$, habrá que buscar los extremos de la expresión $f(\Phi(t))$. Si ahora se aplica sin reservas la regla de la derivada, se deberá inferir que en la primera posición estos máximos y mínimos deben buscarse entre las soluciones de la ecuación $f'(x)=0$, mientras en la segunda posición ellos deben buscarse entre las soluciones de la ecuación $f'(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)=0$, que se separa en las dos $f'(\Phi(t))=0$ y $\Phi'(t)=0$. Es evidente que, sin algún cuidado que se pide especificar, en uno de los dos casos habrá soluciones parásitas o soluciones faltantes.

El lector puede estudiar, por ejemplo, la solución del problema 94, publicado en este mismo fascículo (*año V, fasc. 4, p. 320-232*) ateniéndose exactamente a lo indicado en el enunciado, de tomar como variable independiente el ángulo ϑ .

RESPUESTA .— Cuando un problema de máximos y mínimos sale de una cuestión geométrica o mecánica o de otra manera de matemática aplicada, se trata, en general, de determinar los valores extremos de una cierta magnitud variable, los que, en aplicación de determinadas teorías, sabemos representar como los valores de una cierta función $f(x)$. Esta representación añade sin embargo al simple hecho de considerar un determinado conjunto de valores (los valores de la función $f(x)$) un orden de los mismos según la variación monótona de la variable x . El teorema de análisis que afirma que, salvo determinadas excepciones, estos máximos y mínimos corresponden a los valores de la variable que anulan la derivada, tiene en cuenta este orden, por cuanto considera *extremos relativos*, es decir, valores que son máximos o mínimos con respecto a los valores que asume la función por valores de la variable x suficientemente próximos al valor considerado, precedentes y siguientes a él en el orden establecido. Para que el problema quede *el mismo problema* después de un cambio de variable es necesario que la relación entre la antigua y la nueva variable sea monótona sin excepciones y que no haga corresponder a valores extremos del dominio de variabilidad de una de las variables valores internos al dominio de la otra.

Si el cambio de variables está representado por $x=\varphi(t)$, los valores de t para los cuales $\varphi'(t)=0$ corresponden generalmente ⁽¹⁾ a máximos o mínimos de la función $x=\varphi(t)$; es decir

⁽¹⁾ Como es sabido, la excepción que sobrentiende este “generalmente”

que, al variar t monótonamente, x repite, después del valor considerado, nuevamente valores tomados antes; por consiguiente, también $f(x)$ repite los valores correspondientes simulando un extremo que no se habría presentado al variar x monótonamente.

Es de notar que el cambio de variable podría hacer desaparecer un extremo existente, en vez de introducir uno aparente, en el caso de que, para un mismo valor de t para $f'(\varphi(t))=0$ y $\varphi'(t)=\infty$ de manera que $f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0$, dependiendo el fenómeno de que la variable t habrá alcanzado un valor extremo de su dominio de variabilidad, bajo la condición de continuidad y derivabilidad de la función $f(\varphi(t))$. El ejemplo más claro de este fenómeno se tendría en el caso de que $x=\varphi(t)$ fuera la función inversa de $t=f(x)$, resultando $t=f(\varphi(t))$, la que, evidentemente, no puede tener extremos denunciados por derivación.

Un ejemplo más interesante, porque menos banal, lo ofrece, como señala el enunciado de la cuestión, el problema n.º. 94; se trataba de determinar el máximo cono que tiene por vértice el centro O de una esfera de radio R y por base la sección hecha en esta esfera por un plano que pasa por una dada recta r , cuya distancia al centro de la esfera se llama a . En el enunciado del problema se indicaba tomar como variable el ángulo ϑ que el plano de la base forma con el plano Or ; siguiendo a los trabajos recibidos, la solución publicada en el año VI, p. 230., toma, por contrario, como variable la altura h del cono; entre las dos variables pasa la relación

$$h = a \operatorname{sen} \vartheta;$$

el volumen del cono resulta expresado por

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) h = \frac{a}{3} \pi (R^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta.$$

ocurre cuando con $\varphi'(t)$ fueran cero algunas derivadas hasta una de orden por $\varphi^{(2n)}(t)$, mientras $\varphi^{(2n+1)}(t) \neq 0$. Para un valor de t tal se calcula fácilmente.

$$\frac{df(\varphi(t))}{dt} = f'(\varphi(t)) \varphi^{(2n+1)}(t);$$

en estas condiciones la variable x sigue variando monótonamente y al mismo tiempo $df(\varphi(t))/dt$ se anulará solamente si se anula $f'(x)$.

Derivando respecto ϑ la segunda expresión se obtiene

$$V' = \frac{a}{3} \pi (R^2 - 3a^2 \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta,$$

y resulta que los extremos se tendrán por

$$\cos \vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad h = a$$

y por

$$\sin \vartheta = \frac{R}{a\sqrt{3}}, \quad h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Para comprender el significado de estas dos soluciones, conviene acudir a la segunda derivada

$$V'' = \frac{\pi a}{3} [-R^2 - 6a^2 + 9a^2 \sin^2 \vartheta] \sin \vartheta$$

cuyos valores correspondientes resultan

$$\text{para } \sin \vartheta = 1 \quad V'' = \frac{\pi a}{3} [3a^2 - R^2]$$

$$\text{para } \sin \vartheta = \frac{R}{a\sqrt{3}} \quad V'' = \frac{\pi a}{3} [R^2 - 3a^2]$$

Se ve que estos valores son siempre de signo contrario, siendo negativo el primero para $a < \frac{R}{\sqrt{3}}$ y el segundo para $a > \frac{R}{\sqrt{3}}$; el máximo corresponde luego en ambos casos respectivamente a la primera solución y a la segunda. En el caso de $a = \frac{R}{\sqrt{3}}$, las dos soluciones efectivamente coinciden dando lugar a un cero triple de V' ; la observación geométrica muestra en seguida que se trata todavía de un máximo.

Comparando con lo dicho en las citadas págs. 231-232 del año V, se ve que, desde el punto de vista sistemático, la presente

solución ha resultado más completa. Como se observó entonces, el caso correspondiente a $a < \frac{R}{\sqrt{3}}$ había escapado a los autores de las soluciones enviadas por no aparecer en la derivación respecto de la variable h .

Desde el punto de vista de la discusión general que precede, se observará que por $\cos \vartheta = 0$

$$\frac{dh}{d\vartheta} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dh} = \infty;$$

y en efecto el valor $h=a$ es extremo del dominio de variabilidad de h , con respecto al problema geométrico, siempre cuando, todavía, sea un valor posible (lo que necesita $a \leq R$).

Nº 129 — Hallar los valores máximo y mínimo de la expresión

$$z = a \cos^2 x + b \sin^2 y$$

donde x e y están ligados por la relación $y - x = \frac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN.— Mediante las derivadas parciales de la función z y de la condición se forma el determinante

$$\begin{vmatrix} -a \sin 2x & b \sin 2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = b \sin 2y - a \sin 2x$$

el cual se anula por

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{\sin 2x}{\sin (\frac{\pi}{2} + 2x)} = \operatorname{tg} 2x = \frac{b}{a}$$

Los máximos y mínimos de z corresponden luego a los valores de x que cumplen con esta condición. Se tiene entonces

$$\cos^2 y = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2y) = \frac{1}{2} (1 - \cos (\frac{\pi}{2} + 2x))$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \sin 2x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{a} \cos 2x \right)$$

$$z = \frac{1}{2} \left(a + b + \left(a + \frac{b^2}{a} \right) \cos 2x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2})$$

correspondiendo el signo $+$ al máximo y el $-$ al mínimo.

N.º 130 — Demostrar que si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ los coeficientes a, b, c son reales y si para todos los $|x| \leq 1$ se verifica $|f(x)| \leq 1$, será para todos estos x $|f'(x)| \leq 2$.

Demostrar que el valor 2 se alcanza efectivamente y únicamente por dos determinaciones de los coeficientes. Demostrar también que las conclusiones no cambian si a la hipótesis de realidad de los coeficientes se sustituye la otra más general

$$\arg b = \frac{\arg a + \arg c}{2}$$

SOLUCIÓN. — Suponiendo, en primer lugar, los coeficientes reales, notamos que se puede suponer sin más a y b positivos; si en efecto, en la función dada $f(x)$ esos coeficientes fueran negativos, los tendría positivos la $-f(x)$, que para cada x tiene el mismo valor absoluto. Si en la dada $f(x)$ fueran a y b de signo contrario, tendrían el mismo signo en la función $\Phi(x) = f(-x)$.

En estas condiciones se tiene

$$|f'(x)| = |2ax + b| \leq 2a|x| + b \leq 2a + b.$$

Para acotar $2a + b$ observamos que de

$$f(1) = a + b + c \leq 1$$

sigue

$$2a + b \leq 1 - (c - a). \quad (1)$$

Por otra parte es

$$f(i) = -a + bi + c$$

$$|f(i)|^2 = (c-a)^2 + b^2 \leq 1; \quad (2)$$

luego

$$(c-a)^2 \leq 1, \quad -1 \leq c-a \leq 1, \quad 1 - (c-a) \leq 2. \quad (3)$$

Por lo tanto, como se quería probar,

$$|f'(x)| \leq 2a + b \leq 2.$$

Resulta también de la demostración que el valor 2 será alcanzado únicamente para $|x|=1$ en el caso de ser $2a+b=2$; en esta hipótesis de (1) resulta

$$c-a \leq -1$$

y esta desigualdad puede verificarse conjuntamente con (3) sólo por

$$c-a = -1;$$

sustituyendo en (2) y luego en $2a+b=2$ se obtiene

$$b=0, \quad a=1, \quad c=0.$$

Concluimos que el máximo módulo de la derivada $=2$ se alcanza únicamente por $f(x) = \pm x^2$ y se realiza entonces para todos los $|x|=1$.

Supongamos ahora, con más generalidad, que

$$f(x) = a e^{i\varphi} x^2 + b e^{i \frac{\varphi+\psi}{2}} x + c e^{i\psi} \quad (4)$$

con a, b, c números reales; poniendo

$$x = \xi e^{i \frac{\psi-\varphi}{2}}, \quad |\xi| = |x|,$$

resulta

$$f(x) = e^{i\psi} g(\xi) = e^{i\psi} (a\xi^2 + b\xi + c)$$

y será $|x| \leq 1$, $|f(x)| \leq 1$ por $|\xi| \leq 1$, $|g(\xi)| \leq 1$; la función $g(\xi)$ tiene coeficientes reales y se pueden aplicar las conclusiones precedentes.

Por cuanto el cambio de signo de algunos de los coeficientes equivale a cambiar en π algunos de los multiplicadores de i en la (4), resulta también demostrada la última proposición del problema con la pequeña generalización de poner como condición

$$\arg a + \arg c - 2 \arg b = k\pi, \quad (k \text{ entero}).$$

N° 132— Siendo $\{\sigma_n\}$ una sucesión de números positivos y $S_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i$, demostrar que es condición necesaria y suficiente para que la serie $\sum \sigma_n S_n$ sea convergente, que sea convergente la σ_n .

RÉSOLUTION. — Si $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ est convergent on obtient, en tenant compte que $\sum_{i=n}^{n+k} \sigma_i$ est aussi petit que l'on veut pour n assez grand, en vertu de

$$\sum_{i=n}^{n+k} \sigma_i S_i > S_{n+k} \sum_{i=n}^{n+k} \sigma_i$$

que le premier membre est aussi petit que l'on veut pour n assez grand, d'où la convergence de $\sum \sigma_i S_i$.

Inversement on a l'inégalité

$$\sum_{i=n}^{n+k} \sigma_i S_i > S_n \sum_{i=n}^{n+k} \sigma_i > \sigma_1 \sum_{i=n}^{n+k} \sigma_i.$$

Or si $\sum \sigma_i S_i$ converge, le premier membre devient aussi petit que l'on veut pour n assez grand; donc aussi le deuxième, qui a comme conséquent la convergence de $\sum \sigma_i$.

N.º 133 — Dada una sucesión de números positivos $\{a_n\}$ y fijado arbitrariamente un número positivo s_1 , queda definida una sucesión de números positivos s_n realizando la relación recurrente

$$s_{n+1}^2 - s_n s_{n+1} = a_n.$$

Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la sucesión $\{s_n\}$ tenga límite finito es que la serie Σa_n sea convergente.

RÉSOLUTION. — L'équation en s_{n+1}

$$s_{n+1}^2 - s_n s_{n+1} - a_n = 0$$

possède toujours une et une seule racine positive, définissant les termes de la succession $\{s_n\}$; il s'ensuit aussi que

$$\sigma_n = s_n - s_{n-1} > 0 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Posons

$$\sigma_1 = s_1$$

Dans ce cas on obtient

$$s_n = \sum_{v=1}^n \sigma_v$$

et

$$a_n = s_{n+1} (s_{n+1} - s_n) = s_{n+1} \sigma_{n+1},$$

c'est à dire

$$\Sigma a_n = \Sigma s_{n+1} \sigma_{n+1}.$$

Donc le problème 132 nous fournit immédiatement le résultat exigé.

Las soluciones de los números 132, 133 fueron enviadas por el Sr. J. HORVÁTH, Budapest, Hungría (París, Colegio de España).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

142. — Demostrar que, siendo n un número entero arbitrario, existen múltiplos de n formados por un grupo de cifras 1 seguido eventualmente por un grupo de 0. La propiedad vale cualquiera sea el sistema de numeración.

¿Cuándo se presenta el grupo de ceros y cuál es el mínimo número de cifras que lo componen?

143. — Demostrar que entre los triángulos de igual área S , el triángulo equilátero es el de mínimo perímetro, mínimo radio del círculo circunscrito, máximo radio del círculo inscrito.

Si, partiendo de un triángulo cualquiera de área S , se repite indefinidamente la operación de formar un triángulo de igual área con un lado común con el último triángulo obtenido, sustituyendo a los otros dos lados (que se suponen desiguales) dos iguales, la sucesión de estos triángulos tiende al dicho equilátero.

En el diálogo de Platon *Menon* (*De la virtud*) el autor hace proponer por Sócrates la cuestión de decidir si un cuadrado dado pueda transformarse en un triángulo que pueda caber dentro de un círculo dado; no es probable que la solución pensada por el autor sea la que resulta del problema, porque nada se encuentra en Euclides en este orden de ideas, aunque los fundamentos de la demostración no salgan del dominio de los *Elementos*. Podría el lector confirmar esta observación.

144. — Dado un triángulo ABC , se propone trazar por uno de los vértices, sea A , una transversal que lo divida en dos partes tales que los círculos inscritos en ellas sean iguales. Dígase si o cuándo puede construirse dicha transversal con la regla y el compás.

Este problema nos fué señalado en una última carta del malogrado amigo de nuestro Boletín, prof. J. V. Uspensky.

145. — Se pide estudiar la función

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{dt}{t + \zeta(1+t^2)}$$

considerando las variables ξ, η, ζ sea como números reales, sea en el plano de Gauss. (Desde luego, en este segundo caso, el camino de integración puede variar en dicho plano). En particular puede estudiarse, en el plano de Gauss, la función $\varphi(\zeta) = F(-1, 1, \zeta)$.

146. — Tres puntos se mueven sobre una circunferencia bajo la acción de fuerzas mutuas que producen sobre cada punto aceleraciones tangenciales proporcionales a sus distancias angulares de cada uno de los otros. Se pide determinar el movimiento. Pueden considerarse los dos casos, de que las distancias angulares se supongan variar con continuidad, superando eventualmente cualquier múltiplo de π , o bien se supongan siempre reducidas al intervalo $(-\pi, \pi)$.

Considerar en particular el caso en que las velocidades iniciales de los tres puntos son nulas.

BIBLIOGRAFIA

TOBIAS DANTZIG - *Número: el lenguaje de la Ciencia*. Traducción por Manuel Balanzat, Buenos Aires. Librería del Colegio. Colección "Ciencia y Método" (1947), 332 pág. inc. 8°.

La obra original inglesa tuvo su primera edición en 1930; alcanzó la tercera en 1938; y en el prólogo de la segunda, que se publicó en 1932, el autor ya pudo anunciar el éxito del libro que, en el curso de los dos años había obtenido una traducción francesa, una alemana y una rusa. En efecto se trata de una exposición fácil, a la altura de cualquier persona culta, de algunos de los conceptos fundamentales del análisis matemático, considerado en su desarrollo histórico y psicológico; una exposición cuya lectura hace amena la forma discursiva y una cantidad de noticias, de anécdotas, y de observaciones filosóficas.

Se compone el libro de 12 capítulos, cuyos títulos, elegidos con el evidente propósito de despertar la curiosidad, no siempre dejan entender inmediatamente el contenido verdadero. Así se titula el capítulo I, *Impresiones digitales* y contiene una historia de la génesis y del desarrollo de la noción del número natural, cuyo origen puede remontarse más atrás de cualquier civilización, pues en medida limitada ya se manifiesta en algunos animales; se dan noticias sobre los distintos modos de representación de los números al correr los tiempos. El cap. II, *La columna vacía* toma evidentemente su título de la introducción del cero, que, como se sabe, es relativamente reciente; pero habla generalmente del arte del cálculo en su desarrollo histórico. El cap. III, *La ciencia de los números*, es una muy corta corrida en el dominio de la teoría de los números. El cap. IV, *El último número*, es efectivamente la negación de su propio título: la exposición del principio de inducción matemática que nos permite trascender a cualquier número expresable. El cap. V, *Símbolos*, describe el nacimiento del álgebra; el cap. VI, *Lo inexplicable*, quiere aludir al descubrimiento de la noción de número irracional por la escuela pitagórica y llega hasta el problema de la cuadratura del círculo (transcendencia de π). El cap. VII, *Este mundo fluente*, entiende presentar la noción de función. Los dos capítulos siguientes, *El acta de legitimación* y *Llenando las brechas*, se refieren a la noción de límite, a los procedimientos infinitos y a la teoría de las cortaduras de Dedekind. El cap. X, *El dominio del número*, más bien que fijar límites a tal dominio, alude al ineludible desbordo: la aparición de los números complejos. El cap. XI, *La anatomía del infinito*, abarca de Zenon a Cantor; por fin el último, *Las dos realidades*, pone una contra la otra la realidad sensible y la abstracción matemática.

Hemos dicho que se trata de una lectura fácil y amena, a la altura de cualquier persona culta; ya está dicho con esto que no se anda en profundidades. Reconoce a este propósito el autor haber recibido de lectores muchos pedidos de ampliaciones y aclaraciones, para contestar las cuales sería necesario, dice, otro volumen; quizá sería todavía poco; pero también alteraría, observamos, la naturaleza de la obra. De todos modos el volumen termina con un Apéndice compuesto por 27 breves trozos sueltos, en su mayor parte sacados de otros libros del autor y que, en pequeña parte, pueden servir para contestar esas preguntas.

B. Levi

MAURO PICONE y PAOLO TORTORICI. *Trattato di Matematiche Generali*. Vol. I. Roma - Stadium Urbis. 1947, pág. 591 XIV in 8º.

Matemáticas generales debe entenderse aquí como sinónimo de lo que en la nomenclatura universitaria se ha dado en llamar *análisis matemático*; y, si los autores han descartado este título al cual la costumbre ha asignado un sentido, convencional por cierto, pero de todos modos relativamente determinado, ello fué ciertamente con el propósito de llevar el acento sobre el concepto director que ha inspirado la redacción, no ya de plasmarse sobre un posible programa de enseñanza universitaria, sino de ofrecer a toda persona que, por su oficio o sus intereses científicos necesita de la matemática como instrumento de trabajo, el modo de conseguir con cierta facilidad un conocimiento suficientemente detallado de las distintas teorías, partiendo de los conocimientos básicos, no superiores a los que corresponden al bachillerato. Sin ninguna duda estaba indicado para dirigir este programa el Director del *Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo* de Roma por sus múltiples vinculaciones con los problemas más elevados del análisis al mismo tiempo que con las prácticas aplicaciones.

El libro empieza con dos capítulos de introducción, destinados el primero a rememorar algunos elementos fundamentales del cálculo algebraico (Combinatoria, progresiones, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales), y el segundo a dar los fundamentos de la geometría analítica del plano y del espacio, incluyendo las cónicas, la trigonometría y los números complejos.

Los capítulos siguientes están destinados al cálculo infinitesimal en una y varias variables: límites, series numéricas, series de funciones, potenciales y trigonométricas, derivación e integración riemanniana, máximos y mínimos, etc. En relación a los fines de las aplicaciones, es particularmente notable el cuidado dado al estudio del diagrama de una función, a los cálculos numéricos con determinación del error y del número de cifras exactas en la solución, el cual número puede ser asignado a priori como condición del problema; al cálculo aproximado de raíces de ecuaciones, interpolación y extrapolación; un desarrollo mucho mayor que la costumbre está dado a las fórmulas de cuadratura. Notable también, por su importancia creciente en las aplicaciones,

es el estudio del desarrollo de Fourier de funciones periódicas, que se vincula con la representación aproximada de dichas funciones.

Muchas figuras y particularmente ejemplos numéricos son de ayuda para la lectura.

Muchos otros argumentos esenciales para responder a los fines declarados de la obra han tenido que reservarse para formar un segundo volumen que está en preparación, según se anuncia en el prefacio: se hablará de campos vectoriales, funciones analíticas, desarrollos en series generales de funciones ortogonales, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; todas nociones que no pueden hoy día ser despreciadas aun por el técnico que no quiera ceñirse a la aplicación material de fórmulas hechas. Hay por tanto de augurar la pronta aparición de este segundo volumen.

En la exposición de las nociones fundamentales, los autores se detienen algunas veces sobre puntualizaciones y puntos de vista menos acostumbrados que pueden considerarse más bien de carácter didáctico o de sutileza lógica; cabe observar que el lector interesado particularmente en las aplicaciones y que ya tenga esas nociones adquiridas por un camino cualquiera, estará perfectamente cómodo por abandonar esos detalles, y pasar directamente a la lectura de las teorías y de las aplicaciones con los medios que posee. Para facilitar el conseguimiento de este fin sirven óptimamente los índices alfabético y analítico.

B. Levi

E. S. CABRERA y H. J. MEDICI. *La enseñanza de las matemáticas en la Argentina*, págs. 44. Librería del Colegio. Buenos Aires.

Los recientes programas oficiales de matemática para las Escuelas de Magisterio han incluido un nuevo tópico que expresa: *Breve reseña de la historia de las matemáticas en la República Argentina*; los AA. del presente librito, destacados cultores de la didáctica matemática y autores de muchos libros dedicados a este fin, han interpretado la señalación oficial, acaso un poco indeterminada, en la forma especial de una historia de la enseñanza.

En efecto, según parece por la bibliografía que nuestros autores señalan al principio del libro, y aun por los pocos informes que personalmente hemos podido obtener en otras oportunidades, en este sentido se han orientado casi todos los que anteriormente se han ocupado del argumento. Unica excepción posiblemente un libro reciente del S. J. Guillermo Furlong sobre *Los matemáticos argentinos en la dominación española*, donde se habla preferentemente de hombres interesados sí por la matemática como ciencia auxiliar de la geografía, cosmografía, etc. como corresponde a exploradores, misioneros, hombres cultos que viajan a través de un país de cultura incipiente, pero no precisamente de matemáticos especializados. Por otra parte una más literal interpretación del texto del programa oficial estaba dificultada también por la historia política relativamente joven del país, a la cual es mayormente sensible una ciencia de pensamiento abstracto como la matemática; no tiene en efecto

verdadera historia matemática ningún pueblo de la América Latina y la tiene muy reciente todavía la del Norte. Es por lo tanto sumamente interesante y sugestiva la lectura que nos ofrece el pequeño libro que examinamos al mostrarnos como, desde fines del siglo XVI, gobiernos y hombres dedicados al progreso del país se hayan preocupado por la difusión de la ciencia de los números; como, en medio de las luchas políticas por la libertad, los hombres de gobierno nunca hayan desestimado la importancia de la escuela; como frecuentemente hayan acudido al extranjero para conseguir maestros y sugerencias sobre las experiencias ya realizadas en los países de Europa; como, por fin, en los tiempos más recientes, sea numerosa la lista de los hombres que para la matemática han demostrado interés y cariño. Algo sin embargo habrían podido interesar también noticias sobre las actuaciones personales de estos hombres en el campo científico, fuera de las providencias gubernamentales. Para citar un ejemplo, sabemos que, allá por el 1889 el Dr. Valentin Balbin, que nuestros AA. recuerdan con honor, en compañía de algunos colegas, Carlos Wauters, Juan Rospide, Luis E. Almada, fundó una Revista de Matemáticas Elementales que, según se dice en la presentación “está destinada a llenar una necesidad sentida tiempo ha en la enseñanza, y viene a desempeñar aquí el mismo papel, aunque en escala más modesta, que él que desempeña el *Journal de Mathématiques élémentaires* en Francia”. Y no solo de Francia, sino de todo el movimiento cultural europeo venía el ejemplo; y recorriendo los fascículos publicados en la vida demasiado corta de la Revista argentina se ve fácilmente que por cierto tiempo la promesa pudo ser honrosamente mantenida. Probablemente, otros esfuerzos análogos, que no son de nuestro conocimiento, se podrían registrar; aun las revistas de matemáticas elementales son las palestras donde se forman los futuros investigadores, y su historia podría en parte contestar una pregunta que hace pocos años propuso la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias.

B. Levi

- El precio de suscripción a “*Mathematicae Notae*” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “*Mathematicae Notae*” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

INDICE DEL FASCÍCULO 1.

	Pág.
Un método para obtener congruencias de números de Bernoulli (MISCHA COTLAR)	1
Sul problema di Neumann-Dini per la striscia piana indefinita (CARLO BIRINDELLI)	30
Ejercicios y problemas (Resueltos)	65
Ejercicios y problemas (Propuestos)	75
Bibliografía	76

INDICE DEL FASCICULO 2-3

Una propiedad característica de las cuádras de revolución y de los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica (L. A. SANTALÓ)	81
Estudio en grande de una ecuación diferencial del segundo orden (BEPPO LEVI y JOSÉ L. MASSERA)	91
Resultado del concurso entre solucionistas de problemas propuestos en el año sexto (1946)	155
Notas sobre la teoría matemática de los circuitos lineales. Un método para la síntesis de impedancias (ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ) ..	156
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	162
Ejercicios y Problemas (Resueltos)	163
Bibliografía	175

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$u.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLA — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	2.00
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	4.50
	2 - G. GRIOLI. — Sul comportamento di un vincolo concentrato nel centro di una piastra circolare	2.00