MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

# MATHEMATICÆ NOTÆ

## BOLETIN
DEL
## INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPO LEVI

AÑO SEXTO - FASC. 4

ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1946

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del ertranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

---

## INDICE

# SUR UNE INVOLUTION RATIONNELLE APPARTENANT À UNE RÉGLÉE ELLIPTIQUE

par

LUCIEN GODEAUX

Dans cette note, nous nous proposons d'appliquer la théorie des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (¹) à l'étude d'une involution rationnelle appartenant à une surface réglée elliptique. Bien que le problème que nous nous sommes posé puisse à première vue paraître élémentaire, il nous fournit l'occasion de certains développements qui nous semblent présenter un certain intérêt.

Nous aurons à utiliser certains théorèmes de Géométrie sur une surface algébrique; nous renvoyons, pour ces questions, aux belles *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* de M. Enriques (²).

1. Soit $L$ la cubique plane d'équation

$$a_1 x_1^2 x_2 + a_2 x_2^2 x_3 + a_3 x_3^2 x_1 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie $h$ de période trois

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon$ est une racine cubique primitive de l'unité. Cette homogra-

(¹) On peut consulter, sur ces questions, notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scientifiques et industrielles, Nº 270. Paris, Hermann, 1935).

(²) Raccolte dal Dott. L. Campedelli (Padova, Cedam, 1932).

phie $h$ a comme points unis les sommets $O_1$, $O_2$, $O_3$ du triangle de référence; elle détermine, sur la courbe $L$, une involution d'ordre trois, rationnelle, ayant trois points unis $O_1$, $O_2$, $O_3$.

Considérons la surface $F$ qui représente les couples de points non ordonnés, de la courbe $L$.

À un point $P$ de $F$ correspondent deux points $P_1$, $P_2$ de la courbe $L$. Soient $P'_1$, $P'_2$ les points que $h$ fait correspondre à $P_1$, $P_2$ et $P''_1$, $P''_2$ les points que cette homographie fait correspondre à $P'_1$, $P'_2$. Au couple $P'_1 P'_2$ correspond un point $P'$ et au couple $P''_1 P''_2$ un point $P''$ de $F$. Appelons $T$ la transformation birationnelle de $F$ en soi qui fait correspondre $P'$ a $P$. $T$ fait également correspondre $P''$ à $P'$ et $P$ à $P''$. La transformation $T$ est birationnelle de période trois; elle engendre sur $F$ une involution $I_3$ d'ordre trois, dont $P$, $P'$, $P''$ forment un groupe.

Nous désignerons par $F'$ une surface image de l'involution $I_3$. On sait que $F$ appartient à la classe des réglées elliptiques; nous démontrerons que la surface $F'$ est rationnelle.

2. Aux couples de points de $L$ comprenant un point fixe $R_0$ correspondent sur $F$ les points d'une courbe elliptique $K$. Lorsque le point $R_0$ décrit la courbe $L$, la courbe $K$ varie dans un système continu, simplement infini, $\{K\}$, d'indice deux et de degré un.

L'enveloppe du système $\{K\}$ est une courbe $K_0$, dont les points représent les couples de points de $L$ formés de deux points confondus.

Aux couples de points de $L$ alignés sur le point $R_0$ couples qui appartiennent donc à une série linéaire $g_2^1$, correspondent sur $F$ les points d'une courbe rationnelle $H$, rencontrant en un point les courbes $K$.

Lorsque le point $R_0$ décrit la courbe $L$, la courbe $H$ décrit un faisceau elliptique $\{H\}$.

Soit maintenant $R$ un point du plan de $L$, n'appartenant pas à cette courbe. Aux couples de points de $L$ alignés sur $R$ correspondent sur $F$ les points d'une courbe $C$. Chaque droite passant par $R$ coupe $L$ en trois points se répartissant en trois couples auxquels correspondent sur $C$ trois points. Ces points engendrent sur $C$ une série linéaire $g_3^1$. Les points doubles de cette série correspondent aux tangentes à $L$ menées par $R$; la série possède donc six points doubles et si $x$ est le genre de $C$, on a

$$2(3+x-1)=6,$$

d'où $x=1$. La courbe $C$ est donc elliptique.

Les courbes $C$ forment un réseau $|C|$, de degré trois et ce réseau est complet. Observons en effet que l'on a

$$C \equiv K+H,$$

la dégénérescence de la courbe $C$ ayant lieu lorsque le point $R$ appartient à la courbe $L$. Sur une courbe $K$, les courbes $C$ découpent une série linéaire $g_2^1$ et elles rencontrent une courbe $H$ en un seul point. Il ne peut exister qu'une courbe $H$ déterminée, par conséquent $|C|$ ne peut avoir une dimension supérieure à deux.

3. Désignons par $K_1$, $K_2$, $K_3$ les courbes $K$ correspondant aux points $O_1$, $O_2$, $O_3$ de $L$, unis pour l'homographie $h$. Soient $H_1$, $H_2$, $H_3$ les courbes $H$ associées à $K_1$, $K_2$, $K_3$. Chacune de ces six courbes est transformée en elle-même par $T$.

L'involution $I_3$ posséde six points unis: les point $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$, représentant respectivement les couples $O_2O_3$, $O_3O_1$, $O_1O_2$, et les points $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$, représentant respectivement les points $O_1$, $O_2$, $O_3$ comptés chacun deux fois.

Les points $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ sont les points de contact des courbes $K_1$, $K_2$, $K_3$ avec l'enveloppe $K_0$ de $\{K\}$. Les points $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$ sont les points d'intersections des couples de courbes $K_2$ et $K_3$, $K_3$ et $K_1$, $K_1$ et $K_2$.

Considérons la courbe $H_1$, représentant la série $g_2^1$ découpée sur $L$ par les droites passant par $O_1$. La droite $O_1O_3$ est tangente à $L$ au point $O_1$, donc le point $A_{31}$ appartient à la courbe $H_1$. D'autre part, la droite $O_1O_2$ touche $L$ au point $O_2$, donc la courbe $H_1$ rencontre la courbe $K_2$ au point $A_{22}$.

De même, la courbe $H_2$ passe par les points $A_{12}$ et $A_{33}$; la courbe $H_3$ passe par les points $A_{23}$ et $A_{11}$.

Dans le domaine du premier ordre du point $A_{23}$, $T$ opère comme une homographie ou, si l'on préfère, $T$ détermine une homographie dans le faisceau des tangentes à $F$ au point $A_{23}$. La courbe $H_3$ ne peut toucher en ce point l'une des courbes $K_2$, $K_3$, car les courbes $H$ rencontrent les courbes $K$ en un seul point. Par conséquent les tangentes aux courbes $K_2$, $K_3$, $H_3$ en

$A_{23}$ sont unies pour l'homographie en question et cette homographie est l'identité.

Il en résulte que les points infiniment voisins de $A_{23}$ sur $F$ sont unis pour $T$, c'est-à-dire que le point $A_{23}$ est, suivant notre terminologie, un point uni parfait.

Il en est de même des points $A_{31}$ et $A_{12}$.

4. Considérons maintenant le point $A_{11}$. Dans le faisceau des tangentes à $F$ en ce point, $T$ détermine une homographie de période trois, dont nous connaissons deux tangentes unies: la tangente commune aux courbes $K_1$, $K_0$ et la tangente à la courbe $H_3$. Ces deux droites sont distinctes, car la courbe $H_3$, ne rencontrant les courbes $K$ qu'en un point, ne peut être tangente à $K_1$.

Envisageons les courbes $C$ relatives aux points $R$ de la droite $O_1 O_3$. La droite $O_1 O_3$ touche $L$ en $O_1$, donc la courbe $C$ relative à un point $R$ distinct de $O_1, O_3$, passe par le point $A_{11}$ — sans y toucher ni $K_1$, ni $H_3$ — et par le point $A_{23}$, où elle touche $K_3$. Lorsque le point $R$ varie sur la droite $O_1 O_3$, la courbe $C$ décrit un faisceau déterminé dans le réseau $|C|$ par les courbes $K_1 + H_1$, $K_3 + H_3$. Ce faisceau est transformé en lui-même par $T$. Si le point $A_{11}$ était uni parfait pour $I_3$, une de ces courbes $C$ et ses transformées par $T$ se toucheraient en $A_{11}$. Mais cela est impossible, car $|C|$ est de degré trois et toutes les courbes $C$ du faisceau envisagé touchent $K_3$ en $A_{23}$. Il en résulte que le point $A_{11}$ est un point uni non parfait.

Il en est de même des points $A_{22}$, $A_{33}$.

Ainsi: *L'involution $I_3$ possède trois points unis parfaits $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$ et trois points unis non parfaits $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$.*

5. Pour construire un modèle projectif de l'image $F'$ de l'involution $I_3$, partons du réseau $|C|$. Ce réseau est transformé en lui-même par $T$ et contient trois courbes transformées en elles-mêmes par $T$; ce sont les courbes $K_1 + H_1$, $K_2 + H_2$, $K_3 + H_3$.

A une courbe $C$ correspond sur $F'$ une courbe $C'$, elliptique, possédant trois points doubles, homologues des couples de points de la courbe $C$ qui appartiennent à des groupes de l'involution $I_3$. Lorsque la courbe $C$ varie, la courbe $C'$ et ses trois points doubles varient; elle engendre précisément un système continu rationnel $\{C'\}$ de genre virtuel quatre et dont la dimension est deux. Ce système appartient totalement à un système linéaire $|C'|$ de genre quatre et dont la dimension est au moins égale à trois. Ce système $|C'|$ a pour homologue sur $F$ un système linéaire appartenant au système $|3C|$ et par conséquent il a le degré neuf.

Rapportons projectivement les courbes $C'$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_r$ à $r$ dimensions, $r$ étant la dimension du système $|C'|$. A la surface $F'$ correspond birationnellement une surface d'ordre neuf, à sections hyperplanes de genre quatre, que nous continuerons à désigner par $F'$.

Aux points unis de $I_3$ correspondent sur $F'$ des points de diramation isolés qui sont, comme nous l'avons établi ailleurs:

1) Trois points triples $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$, homologues des points unis $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$. En chacun de ces points, le cône tangent à la surface est rationnel.

2) Trois points doubles biplanaires ordinaires $A'_{11}$, $A'_{22}$, $A'_{33}$, homologues des points unis $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$.

Les courbes $C$ rencontrent les courbes $K$ en des groupes de deux points et par suite les courbes $3C$ rencontrent $K_1$ en des groupes de six points; à la courbe $K_1$ correspond donc sur $F'$ une conique $K'_1$ passant par les points $A'_{11}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$.

La courbe $H_1$ est rencontrée en trois points par les courbes $3C$, donc à $H_1$ correspond sur $F'$ une droite $H'_1$ joignant les points $A'_{22}$ et $A'_{31}$.

De même, à la courbe $K_2$ correspond sur $F'$ une conique $K'_2$ passant par les points $A'_{22}$, $A'_{23}$, $A'_{12}$ et à la courbe $K_3$ une conique $K'_3$ passant par les points $A'_{33}$, $A'_{31}$, $A'_{23}$.

A la courbe $H_2$ correspond une droite $H'_2$ joignant les points $A'_{33}$ et $A'_{12}$; à la courbe $H_3$ correspond une droite $H'_3$ joignant les points $A'_{11}$ et $A'_{23}$.

Nous avons vu qu'à une courbe $C$ correspond une section hyperplane $C'$ de $F'$ possédant trois points doubles, donc faite par un hyperplan tangent en trois points à la surface. Lorsque la courbe $C$ varie d'une manière continue dans $|C|$ et tend vers la courbe $K_1 + H_1$, la courbe $C'$ tend vers la courbe $K'_1 + H'_1$ comptée trois fois. Par conséquent, il existe un hyperplan osculant $F'$ le long de la courbe $K'_1 + H'_1$.

De même, il existe des hyperplans osculant $F'$ le long de chacune des courbes $K'_2 + H'_2$, $K'_3 + H'_3$.

6. On sait que la surface $F$ appartient à la classe des reglées elliptiques (*C. Segre*). Nous allons démontrer que la surface $F'$

est rationnelle. Dans ce but, il nous suffira de démontrer que la surface $F'$ contient un faisceau linéaire de courbes rationnelles.

Rappelons que les courbes $H$ forment sur $F$ un faisceau elliptique. A une courbe $H$ correspond sur $F'$ une courbe rationnelle $H'$ et inversement, à cette courbe $H'$ correspondent sur $F$ la courbe $H$ et ses transformées par $T$ et $T^2$. Lorsque la courbe $H$ varie, la courbe $H'$ décrit un faisceau. Ce faisceau est linéaire, car les les groupes de trois courbes $H$ qui correspondent aux courbes $H'$ forment, dans le faisceau elliptique $\{H\}$, une involution d'ordre trois ayant trois éléments unis: les courbes $H_1$, $H_2$, $H_3$; et par conséquent cette involution est rationnelle.

Ainsi donc, $F'$ possède un faisceau linéaire $|H'|$ de courbes rationnelles et par conséquent est rationnelle (*Noether*).

Les courbes $H'$ sont des cubiques gauches, car les courbes $3C$ rencontrent une courbe $H$ en trois points. Dans le faisceau $|H'|$ se trouvent trois courbes $H'_1$, $H'_2$, $H'_3$ formées de droites comptées chacune trois fois.

On peut également démontrer la rationnalité de $F'$ par une autre voie.

Tout d'abord, si $F'$ possédait une courbe bicanonique, la transformée de celle-ci sur $F$ serait une courbe bicanonique de cette surface, ce qui est impossible. Donc la surface $F'$ a le bigenre $P_2 = 0$.

D'autre part, entre le genre arithmétique $p_a$ de $F$ et celui $p'_a$ de $F'$, nous avons démontré que l'on a la relation

$$12(p_a + 1) = 36(p'_a + 1) - 4\alpha - 8\beta,$$

$\alpha$ étant le nombre de points unis parfaits, $\beta$ le nombre de points unis non parfaits. Actuellement, on a $p_a = -1$, $\alpha = \beta = 3$, donc $p'_a = 0$.

La surface $F'$ ayant les caractères $p_a = P_2 = 0$, est rationnelle (*Castelnuovo*).

7. Observons qu'à la courbe

$$K_1 + K_2 + K_3 + H_1 + H_2 + H_3,$$

qui appartient au système $|3C|$, correspond sur $F'$ une section hyperplane, formée des courbes $K'_1$, $K'_2$, $K'_3$, $H'_1$, $H'_2$, $H'_3$. L'hyperplan contenant ces courbes passe par les six points de diramation $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$, $A'_{11}$, $A'_{22}$, $A'_{33}$. Par conséquent, la dimension de cet hyperplan est au moin égale à cinq et l'espace contenant $F'$ a la dimensions $r \geqq 6$.

D'autre part, le système $|C'|$ des sections hyperplanes de $F'$ a le degré 9, le genre 4 et par conséquent la dimensions $r \leqq 6$. On a donc $r = 6$.

*La surface $F'$, d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 4, est normale dans un espace à six dimensions. Elle possède trois points triples, à cône tangent rationnel, et trois points doubles biplanaires ordinaires.*

8. Chacun des points triples $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré $-3$. Nous désignerons respectivement par $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ ces courbes.

Chacun des points doubles biplanaires ordinaires $A'_{11}$, $A'_{22}$, $A'_{33}$ est équivalent à deux courbes rationnelles de degré $-2$, se coupant en un point. Nous désignerons par $\gamma_{i1}$, $\gamma_{i2}$ les courbes équivalentes au point $A_{ii}'$. D'une manière précise, nous avons établi que ces courbes correspondent aux points unis pour $I_3$, infiniment voisins du point uni correspondant. Nous supposerons que la courbe $\gamma_{11}$ correspond au point uni de $I_3$ infiniment voisin de $A_{11}$ sur les courbes $K_0, K_1$ et que la courbe $\gamma_{12}$ correspond au point uni de $I_3$ infiniment voisin de $A_{11}$ sur la courbe $H_3$. Nous utiliserons des notations analogues, obtenues par permutation tournante, pour les autres points.

Cela étant, nous avons les relations fonctionnelles

$$C' \equiv 3\,(K'_1 + H'_1) + 2\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + 2\gamma_{22} + \gamma_3 + 2\gamma_2,$$

$$C' \equiv 3\,(K'_2 + H'_2) + 2\gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{31} + 2\gamma_{32} + \gamma_1 + 2\gamma_3,$$

$$C' \equiv 3\,(K'_3 + H'_3) + 2\gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \gamma_2 + 2\gamma_1.$$

Pour établir la première de ces relations, par exemple, remarquons que sur $F$, la courbe $K_1 + H_1$ passe une fois par le point $A_{12}$, deux fois par le point $A_{31}$, une fois par le point $A_{11}$ et une fois par le point $A_{32}$ sans toucher en ce point la courbe $K_2$. Par conséquent sur $F'$, la courbe $K'_1 + H'_1$ rencontre en un point la courbe $\gamma_3$, en deux points la courbe $\gamma_2$, en un point la courbe

$\gamma_{11}$ sans rencontrer la courbe $\gamma_{12}$, en un point la courbe $\gamma_{22}$ sans rencontrer la courbe $\gamma_{21}$.

Puisqu'il y a un hyperplan osculant $F'$ le long de la courbe $K'_1 + H'_1$, nous avons

$$C' \equiv 3\,(K'_1 + H'_1) + \lambda_{11}\gamma_{11} + \lambda_{12}\gamma_{12} + \lambda_{21}\gamma_{21} + \lambda_{22}\gamma_{22} + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3.$$

Exprimons que la courbe $\gamma_{11}$ coupe $K'_1 + H'_1$ en un point, mais que $\gamma_{12}$ ne rencontre pas cette courbe. Nous avons

$$3 - 2\lambda_{11} + \lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{11} - 2\lambda_{12} = 0,$$

d'où $\lambda_{11} = 2$, $\lambda_{12} = 1$.

On trouve de même $\lambda_{21} = 1, \lambda_{22} = 2$.

Exprimons que $\gamma_2$ coupe $K'_1 + H'_1$ en deux points et $\gamma_3$ en un point; on a

$$6 - 3\lambda_2 = 0, \quad 3 - 3\lambda_3 = 0$$

d'où $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.

Les autres relations s'obtiennent de la même manière, ou par parmutation tournante.

9. Désignons pour simplifier par $|D|$ le système $|3C|$. Aux courbes $C'$ correspondent, comme on l'a vu, des courbes du système $|D|$, formant un système de dimension six, que nous désignerons par $|D_1|$.

Le réseau $|C|$ est un système régulier, il en est donc de même du système $|D| = |3C|$ et ce système a la dimension 17. Il a d'autre part le degré 27 et le genre 10.

Observons que $T$ opère, sur le réseau $|C|$, dont les courbes sont considérées comme éléments, comme une homographie de période trois, car à une courbe $C, T$ fait correspondre une courbe $C$ et à un faisceau de courbes $C$, un faisceau de courbes $C$. Cette homographie possède trois éléments unis, les courbes $K_1 + H_1$, $K_2 + H_2$, $K_3 + H_3$, n'appartenant pas à un même faisceau, donc cette homographie est non homologique.

On peut donc attacher à chacune des courbes unies $K_1 + H_1$, $K_2 + H_2$, $K_3 + H_3$, respectivement les nombres 1, $\varepsilon$, $\varepsilon^2$, où $\varepsilon$ est une racine cubique primitive de l'unité.

Cela étant, les courbes

$$3(K_1+H_1)\quad 3(K_2+H_2),\quad 3(K_3+H_3),$$
$$K_1+K_2+K_3+H_1+H_2+H_3$$

appartiennent, comme nous l'avons vu, au système $|D_1|$, auquel est attaché le nombre 1.

Considérons les courbes

$$2(K_1+H_1)+K_2+H_2,\quad 2(K_2+H_2)+K_3+H_3,$$
$$2(K_3+H_3)+K_1+H_1,$$

auxquelles est attaché le nombre $\varepsilon$. Ces courbes appartiennent au système $|D|$; elles déterminent dans ce système un réseau que nous désignerons par $|D_2|$. On voit aisément que les courbes $D_2$ passent simplement par les points $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{21}$, $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$. En $A_{11}$, elles touchant $H_3$, en $A_{22}$, elles touchent $H_1$ et en $A_{33}$, elles touchent $H_2$.

Les courbes $D_2$ sont transformées en elles-mêmes par $T$ et le réseau $|D_2|$ appartient donc à l'involution $I_3$. Il lui correspond sur $F'$ un réseau $|D'_2|$ de courbes d'ordre neuf.

A une courbe de $|D|$, non transformée en elle-même par $T$, correspond sur $F'$ une courbe $D'$ variable dans un système linéaire. Lorsque $D$ varie d'une manière continue dans $|D|$ et tend vers une courbe $D_1$, la courbe $D'$ tend vers une courbe de $|3C'|$. Lorsque $D$ tend vers une courbe $D_2$, $D'$ tend vers une courbe $3D'_2$. On a donc

$$\begin{aligned}3C' \equiv 3D'_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 + \lambda_{11}\gamma_{11} + \lambda_{12}\gamma_{12} + \\ + \lambda_{21}\gamma_{21} + \lambda_{22}\gamma_{22} + \lambda_{31}\gamma_{31} + \lambda_{32}\gamma_{32}.\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que la courbe $D'_2$ rencontre en un point chacune des courbes $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_{12}$, $\gamma_{22}$, $\gamma_{32}$, on trouve facilement la relation fonctionnelle

$$3C' \equiv 3D'_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32}).$$

Projectivement, cela signifie que le long de chacune des courbes $D'_2$, il y a une hypersurface cubique osculant la surface $F'$.

Le réseau $|D'_2|$ est de degré six et, par la formule de Zeuthen, de genre deux.

10. Envisageons maintenant, dans $|D|$, le réseau, appartenant à l'involution $I_3$, déterminé par les courbes

$$2(K_1+H_1)+K_3+H_3, \quad 2(K_2+H_2)+K_1+H_1,$$
$$2(K_3+H_3)+K_2+H_2,$$

auxquelles est attaché le nombre $\varepsilon^2$.

Ces courbes $D_3$ ont des points doubles en $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$ et passent simplement par les points $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ en y touchant respectivement $K_1$, $K_2$, $K_3$.

Si nous désignons par $D'_3$ les courbes qui, sur $F'$, correspondent aux courbes $D_3$, on obtient, en raisonnant comme tantôt, la relation fonctionnelle

$$3C' \equiv 3D'_3 + 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) + 2(\gamma_{11}+\gamma_{21}+\gamma_{31}) + \gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{32}.$$

Le réseau $|D'_3|$ a le degré trois et, en utilisant la formule de Zeuthen, on voit que ses courbes sont rationnelles. Les courbes $D_3$ ayant trois points doubles, sont du reste de genre sept.

Désignons par $r_2, r_3$ les dimensions des systèmes complets $|D'_2|$, $|D'_3|$ sur la surface $F'$. D'après le théorème de Riemann-Roch sur les surfaces rationnelles, on a

$$r_2 \geqq 5, \quad r_3 \geqq 4.$$

D'autre part, dans $|D|$, la transformation $T$ agit comme une homographie ayant trois axes ponctuels $|D_1|$, $|D_2|$, $|D_3|$ et on a donc

$$6 + r_2 + r_3 + 3 = 17 + 1,$$

c'est-à-dire

$$r_2 + r_3 = 9.$$

On a donc $r_2 = 5$, $r_3 = 4$.

*Sur la surface $F'$ existent deux systèmes linéaires de courbes d'ordre neuf: le premier a la dimension cinq, le degré six et le genre deux; le second la dimension quatre, le degré trois et le genre zéro. Le long de chacune des courbes de ces systèmes, il y a une hypersurface cubique osculant la surface $F'$.*

11. La surface $F'$, d'ordre 9, possède trois points triples $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$ et les hyperplans passant par ces trois points doivent couper la surface suivant une courbe. Nous allons montrer que $F'$ contient un faisceau de cubiques gauches passant par $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$ et que tout hyperplan passant par ces trois points coupe $F'$ suivant trois de ces cubiques gauches.

Retournons à la courbe $L$ et considérons la série $g_3{}^2$ complète découpée par les courbes

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1{}^2 x_2 + \lambda_2 x_2{}^2 x_3 + \lambda_3 x_3{}^2 x_1 = 0. \qquad (1)$$

Pour $\lambda_0 = 0$, on obtient la série $g_3{}^1$ engendrée par l'homographie $h$. Aux couples de points appartenant aux groupes de cette série correspondent sur $F$ les points d'une courbe $G_0$. En reprenant le raisonnement fait à propos des courbes $C$, on voit que la courbe $G_0$ est elliptique.

Donnons maintenant à $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ des valeurs fixes, distinctes de $a_1$, $a_2$, $a_3$ et faisons varier $\lambda_0$. Nous obtenons une série $g_3{}^1$ transformée en elle-même par $h$ (mais dont les groupes ne sont pas en général transformés en eux-mêmes par $h$). A cette série $g_3{}^1$ correspond sur $F$ une courbe que nous désignerons par $G$. En reprenant le raisonnement fait pour les courbes $C$, on voit que la courbe $G$ est elliptique. Observons de plus que la série $g_3{}^1$ considérée contient un groupe formé des points $O_1$, $O_2$, $O_3$ et que par conséquent la courbe G passe par les points $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$.

Deux séries linéaires $g_3{}^1$ données sur L ont en commun trois couples de points, donc les courbes $G$ rencontrent les courbes $C$ en trois points. Par conséquent, elles rencontrent les courbes $D$ et en particulier les courbes $D_1$ en neuf points.

Les courbes analogues à $G$ forment un faisceau $|G|$. Chaque courbe de ce faisceau est transformée en elle-même par $T$ et rencontre les courbes $D_1$ en neuf points formant trois groupes de $I_3$. Par conséquent aux courbes $G$ correspondent sur $F'$ des cubiques gauches $G'$ formant un faisceau $|G'|$ et passant par les points $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$.

Il existe un hyperplan passant par les points $A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$ et par trois points pris chacun sur trois cubiques gauches $G'$ distinctes $M$. Cet hyperplan contient ces trois cubiques gauches et par conséquent *les hyperplans passant par les points triples*

*$A'_{23}$, $A'_{31}$, $A'_{12}$ de $F'$ coupent cette surface suivant des courbes formées de trois cubiques gauches du faisceau $G'$.*

A la courbe $G_0$ correspond sur $F'$ une cubique gauche $G'_0$ passant par les points $A'_{11}$, $A'_{22}$, $A'_{33}$.

Aux différentes séries $g_3^1$ tirées de la série $g_3^2$ découpée sur $L$ par les courbes (1), correspondent sur $F$ des courbes elliptiques formant un réseau comprenant les courbes $G_0$ et $G$. D'après ce qui précède, le triple de ce réseau appartient au système $|D|$. La transformation $T$ agit d'ailleurs sur les courbes de ce réseau comme une homologie.

Liège (Belgica), Université
37, Quai Orban

# SOBRE EL CALCULO DE LA TRANSFORMACION INVERSA DE LAPLACE

POR

BERNHARD GROSS y BEPPO LEVI

La transformación de Laplace es de gran importancia en física y matemática. Su inversión es por lo tanto un problema de considerable interés. En este trabajo entendemos evidenciar como, en casos particulares, se puede resolver con bastante facilidad por aplicación conjunta de algunos teoremas conocidos.

Se sabe que la iterada de la transformación de Laplace es la transformación de Stieltjes. Pero vale también la proposición inversa, expresada por el teorema: (1)

*Si la integral*

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{s+t} \tag{1}$$

*converge, entonces*

$$f(s) = \int_{0+}^\infty e^{-st}\,\varphi(t)\,dt \qquad (s>0) \tag{2}$$

*donde*

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u) \qquad (t>0). \tag{3}$$

Ahora bien, si la función $f(s)$ es representable por una integral de Stieltjes, su función primitiva $\alpha(t)$ se puede determi-

(1) WIDDER, *The Laplace Transform*. Princeton, 1941, p. 334.

nar por aplicación de una fórmula debida al mismo Stieltjes; esto es [2]

$$d\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to 0} [f(-t - i\delta) - f(-t + i\delta)]\, dt$$

que, si $f(t)$ es función real, (lo que por otra parte se supone siempre en este trabajo), adoptando una cómoda notación de Titchmarsh, se puede escribir

$$d\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} f(te^{-i\pi})\, dt; \qquad (4)$$

y finalmente se tienen criterios para decidir de la representabilidad de una función por integral de Stieltjes (v. por ej. Widder, l. c. págs. 345, 361, 369, 372, 374).

Las ecuaciones (3) y (4) representan en este caso una inversión de la (2) poniendo

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ut} \operatorname{Im} f(ue^{-i\pi})\, du. \qquad (5)$$

Comparando esta expresión con otra más general enunciada también recientemente por Widder [3], esto es

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1},$$

se nota que en casos en que tal expresión se muestra incómoda, puede al contrario recomendarse la (5).

Vamos a mostrar la aplicación sobre algunos ejemplos. Admitiremos en cada caso que el lector ha reconocido la representabilidad de la función propuesta en la forma de Stieltjes, acaso aplicando uno de los citados criterios.

*a*) Sea

$$f(s) = e^{-\sqrt{s}}.$$

[2] Cfr. WIDDER, *l. c.*, p. 341.

[3] Amer. Math. Monthly 52 Nº 8, 1945.

Para $t$ positivo se tiene

$$\sqrt{te^{-i\pi}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\sqrt{t} = -\mathrm{i}\sqrt{t}$$

$$f(te^{-i\pi}) = e^{i\sqrt{t}} = \cos\sqrt{t} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\sqrt{t}$$

luego

$$\mathrm{Im}\, f(te^{-i\pi}) = \mathrm{sen}\sqrt{t}$$

y finalmente

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-tu}\,\mathrm{sen}\sqrt{u}\,du.$$

Para efectuar la integración del segundo miembro, conviene transformarlo primero con una integración por partes tomando como factor diferencial $e^{-tu}\,du$; se obtiene

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi t}\int_0^{\infty} e^{-tu}\,\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,du,$$

que, por la sustitución $u = x^2$, se cambia en una integral conocida ([4]), es decir

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi t}\int_0^{\infty} e^{-tx^2}\cos x\,dx = \frac{\exp\left(-\frac{1}{4t}\right)}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}.$$

Tenemos luego

$$f(s) = e^{-\sqrt{s}} = \frac{1}{2\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{1}{4t} - ts\right)}{t^{3/2}}\,dt.$$

*b*) Sea

$$f(s) = \frac{1}{(s^2+2as)^{1/2}} \qquad (a>0).$$

([4]) Cfr. Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie*; 3ª ed., 1929, pág. 313. Se deduce el valor de la integral aplicando el teorema de Cauchy a la integral $\int e^{-z^2}\,dz$ $(z = x + iy)$ tomada sobre las paralelas $y = 0$, $y = \frac{1}{a}$ y teniendo en cuenta el valor conocido de $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Se tiene

$$f(te^{-i\pi}) = \frac{1}{\sqrt{-t}\,\sqrt{2a-t}}\,;$$

luego, por $t > 0$

$$\operatorname{Im} f(te^{-i\pi}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t(2a-t)}} & \text{para } t < 2a \\ 0 & \text{para } t \geqq 2a \end{cases}$$

y finalmente

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2a} \frac{e^{-tu}}{\sqrt{u(2a-u)}}\,du.$$

Sustituyendo a $e^{-tu}$ su desarrollo en serie de potencias se obtiene pues

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,t^k\int_0^{2a}\frac{u^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2a-u}}\,du;$$

se nota entonces que, poniendo $u = 2ax$

$$\int_0^{2a}\frac{u^{k-\frac{1}{2}}\,du}{\sqrt{2a-u}} = (2a)^k\int_0^1 x^{k-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (2a)^k\,\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k)}$$

$$= \frac{(2a)^k}{k!}\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big(k-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)^2$$

$$= \frac{a^k}{k!}\,1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2k-1)\,\pi;$$

luego, resumiendo,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,1\,.\,2\,.\,5 \ldots (2k-1)}{k!^2}\,(at)^k$$

Se verifica (5) que esta serie es idéntica al desarrollo de

$$e^{-\alpha t} J_0 (\mathrm{i}\, \alpha t)$$

donde $j_0(x)$ es la conocida función de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2.1!}\right)^2 + \left(\frac{x}{2.2!}\right)^4 - \left(\frac{x}{2.3!}\right)^6 + \ldots$$

---

(5) La comprobación por cálculo directo de la igualdad

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2.j!}\right)^{2j} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{k!^2} x^k$$

puede conducirse numéricamente para los primeros términos del desarrollo; mucho más difícil es una *demostración* de la identidad que no aparece registrada en su forma actual en los tratados sobre funciones de Bessel y formularios que tenemos presentes (JANKE y EMDE, *Funktionentafeln*, etc., ed. 1923; BROWMAN, *Introduction to Bessel Functions*, 1938; GRAY y MATHEWS, *A treatise on Bessel Functions*, 1931; WATSON, *Bessel Functions*, 1945). Sin embargo se obtiene fácilmente la reducción a fórmulas conocidas por el camino siguiente. Se trata de calcular el producto

$$e^{-x} J_0(ix) \; ;$$

sustituyendo

$$-x = iy, \quad ix = y,$$

dicho producto se escribe

$$e^{iy} J_0(y) = \cos y \; J_0(y) + i \operatorname{sen} y \; J_0(y).$$

Los dos términos del segundo miembro fueron calculados ya por Bessel y generalizados a funciones de Bessel de orden cualquiera por Lommel (1868) (cfr. WATSON, *l. c.*, p. 148. LOMMEL, *Studien ü, die Bessel' schen Funktionen*, p. 16-17). Las fórmulas correspondientes estan propuestas como ejercicio en el libro citado de Gray y Mathews, p. 18. Sin insistir en reproducirlas aquí, puesto que el lector puede obtenerlas fácilmente admitiendo por cierta la fórmula propuesta y siguiendo el razonamiento anterior, vamos a mostrar como por otro camino se puede llegar fácilmente a la expresión final de la $\varphi(t)$, resultando así demostradas indirectamente las fórmulas señaladas para $\cos y \, J_0(y)$, $\operatorname{sen} y \, J_0(y)$.

Mediante la sustitución

$$u = a + x$$

se obtiene

$$\pi \varphi(t) = \int_0^{2a} \frac{e^{-tu} d\,u}{\sqrt{u(2a-u)}} = \int_{-a}^{a} \frac{e^{-t(a+x)}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = e^{-at} w(t)$$

$$w(t) = \int_{-a}^{a} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

obteniéndose así finalmente

$$f(s) = \frac{1}{(s^2+2as)^{1/2}} = \int_0^{\infty} e^{-t(a+s)} J_0\,(\mathrm{i}\,at)\,dt.$$

*c*) Consideremos todavía la función

$$f(s) = \frac{1}{s} \log(1+as) \qquad (a>0);$$

se tiene

$$\operatorname{Im} f(se^{-i\pi}) = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad s < \dfrac{1}{a} \\ \\ \dfrac{\pi}{s} \quad \text{para} \quad s > \dfrac{1}{a} \end{cases};$$

---

Derivando respecto $t$ bajo el signo de integración, y transformando con integración por partes, resulta

$$w'(t) = -\int_{-a}^{a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\, e^{-tx} = t\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\; e^{-tx}\,dx$$

$$w''(t) = \int_{-a}^{a} \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\, e^{-tx}.$$

Por lo tanto

$$w'' + \frac{w'}{t} - a^2w = \int_{-a}^{a} \frac{x^2+(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, e^{-tx}dx = 0.$$

Si todavía se pone

$$t = -\frac{i\tau}{a},\quad w(t) = W(\tau),$$

resulta que nuestra función verifica la ecuación de Bessel

$$W'' + \frac{1}{\tau} W' + W = 0.$$

Se tiene por otra parte

$$W(0) = w(0) = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi:$$

luego por fin

$$W(\tau) = \pi\, J_0(\tau),\quad w(t) = \pi\, J(iat)$$

pondremos luego

$$\varphi(t) = \int_{1/a}^{\infty} \frac{e^{-tu}}{u}\, du = \int_{t/a}^{\infty} \frac{e^{-\xi} d\xi}{\xi} = -\operatorname{Ei}\left(-\frac{t}{a}\right) \text{ (}^{6}\text{)}$$

donde con Ei se representa, como de costumbre, la función que se obtiene del logaritmo-integral sustituyendo la variable por $e^{\xi}$

$$\operatorname{Li} x = \int_{x}^{1} \frac{dx}{\log x} \qquad \operatorname{Ei} \xi = \int_{0}^{\xi} \frac{e^{\xi}\, d\xi}{\xi}$$

$$f(s) = -\int_{0}^{\infty} e^{-ts} \operatorname{Ei}\left(-\frac{t}{a}\right) dt.$$

*d*) Consideremos por fin la función

$$f(s) = \frac{1}{\log(a+s)}.$$

Tenemos

$$\operatorname{Im} f(se^{-i\pi}) = \operatorname{Im} f(-s) = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad s < a \\ \dfrac{\pi}{\log^2(s-a)+\pi^2} \quad \text{para} \quad s > a; \end{cases}$$

luego

$$\varphi(t) = \int_{a}^{\infty} \frac{e^{-tu} du}{\log^2(u-a)+\pi^2} = e^{-ta} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-tz} dz}{\log^2 z+\pi^2}.$$

La última integral no la sabemos expresar por otras funciones conocidas; es en cualquier caso una función $F(t)$ que se podrá tabular si parece conveniente; tendremos entonces

$$\frac{1}{\log(a+s)} = \int_{0}^{\infty} e^{-t(s+a)} F(t)\, dt.$$

(6) Cfr. CHURCHILL. *Modern operational methods in Engineerig.* Mc Graw-Hill, 1944 p. 301.

*Nota sobre el alcance del procedimiento.* — La función $\varphi(t)$ obtenida en los ejemplos $c$) y $d$) es no acotada. En efecto es conocido que las funciones Li y Ei tienden a $\infty$ al tender la variable respectivamente a 1 y a 0. Lo mismo ocurre para la función $F(t)$ del ejemplo $d$) como se ve, sin mayores cálculos observando que, siendo evidentemente $\log^2 z + \pi^2 < z$ para $z > e^{\pi}$, será

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-tz}dz}{\log^2 z + \pi^2} > \int_{e^{\pi}}^{\infty} \frac{e^{-tz}dz}{z} = \int_{te^{\pi}}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi}.$$

Ahora se debe observar que ya al principio se puso de relieve que el método suponía, que de antemano se supiera que la función propuesta $f(s)$ fuera representable como transformada de Stieltjes de alguna función; y para resolver este problema preliminar se indicaron, como ejemplo, los criterios ofrecidos por el libro de Widder.

Pero estos criterios aseguran también que la función determinante de la cual se trata será acotada; ellos habrían luego caído en defecto si se hubiera intentado aplicarlos.

Por otra parte, esos criterios se fundan, en su enunciado, en una infinidad de comprobaciones, que sólo se podrán reducir a un número finito en casos particulares, teniendo en cuenta esas particulares condiciones.

Con respecto al caso $c$) se sabe sin embargo por otros medios que el resultado es exacto. Respecto del caso $d$) tal comprobación no hicimos, pero consideraciones comparativas como la acotación últimamente indicada le dan una extrema confianza.

Se infiere de estas observaciones que el método tiene aparentemente aplicación más amplia y aun más inmediata que los criterios aludidos. Podría acaso pensar el lector que bastará en cualquier caso suponer, en vía de hipótesis la representabilidad de la $f(s)$ como transformada de Stieltjes por cuanto, en caso de ser equivocada la hipótesis, el cálculo mismo se encargará de denunciar la eventual equivocación con alguna imposibilidad. Para convencerse de lo contrario basta observar que si se altera la función $f(s)$ sumándole otra racional o más generalmente sin puntos de ramificación en el finito, no se cambia la función

$\operatorname{Im} f(se^{-i\pi})$ y por lo tanto el procedimiento ofrece la misma función determinante para infinitas posibles generatrices.

En otra forma, bien se sabe que

$$\frac{1}{s} = \int_0^\infty e^{-ts}\, dt,$$

por lo que la función determinante de $\frac{1}{s}$ es 1; pero el procedimiento daría $\varphi(t) = 0$, que puede considerarse como la determinante de la función 0.

Nótese que con este ejemplo se ha comprobado que el método no asegura el resultado tampoco en el caso de que se supiera que la función propuesta es transformada de Laplace de alguna función; lo cual, por otra parte, podía preverse por cuanto se ha supuesto que la eventual función determinante de la transformación fuera ella misma una transformada de Laplace.

Se ve, resumiendo, que el procedimiento, para ser completo, implica cuando menos la sucesiva comprobación que la transformada de Laplace de la $\varphi(t)$ obtenida es verdaderamente la función $f(s)$ propuesta; el cálculo efectivo de esa transformada tropieza a menudo con dificultades prácticas; en el caso *d*) se encontró una $\varphi(t)$ que no se supo expresar más cómodamente que por la integral de definición.

Un método para efectuar la verificación puede fundarse sobre el propio concepto que ha generado la teoría de la transformación de Laplace (7) es decir en la propiedad de esta transformación de referir una relación diferencial para la función generatriz a una relación algebraica para la función determinante. Siendo dada la función $f(s)$ bastará entonces buscar una relación entre ella y algunas de sus derivadas que se preste a tal transformación. Nos explicaremos con un ejemplo proponiéndonos de verificar la representación sugerida por el ejemplo *a*):

$$e^{-\sqrt{s}} = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty e^{-ts}\, \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{t^{3/2}}\, dt.$$

(7) Cfr. p. ej. PICARD. *Traité d'analyse.* T. III, p. 394.

Poniendo

$$z = e^{-\sqrt{s}}, \quad z' = -\frac{1}{2\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}};$$

la función $z$ verifica por tanto la ecuación diferencial

$$z' + \frac{1}{2\sqrt{s}} z = 0.$$

Se trata de ver si esta ecuación está verificada por la función del segundo miembro

$$\frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty e^{-ts} \varphi(t)\, dt = \frac{Z}{2\pi^{1/2}}, \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{t^{3/2}},$$

después de lo cual la identidad de los dos miembros quedará establecida si ellos coinciden por un valor particular de $s$.

Se tiene

$$Z' = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-ts} \varphi(t)\, dt = -\int_0^\infty e^{-ts} \varphi(t)\, dt = -\int_0^\infty \frac{e^{-ts} e^{-\frac{1}{4t}}}{t}\, dt$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-us}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{s}}\, \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{Z}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-ts} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-us}}{\sqrt{u}}\, du \int_0^\infty e^{-ts} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint \frac{e^{-(t+u)s}}{\sqrt{u}} \varphi(t)\, dt\, du.$$

Poniendo

$$u = \tau - t,$$

la última integral se escribe también

$$\frac{Z}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau s} \int_0^\tau \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{t^2} \sqrt{\frac{t}{\tau - t}}\, dt.$$

La integral respecto $dt$ se puede ahora calcular sin dificultad; si en efecto se pone

$$\frac{t}{\tau - t} = \sigma^2,$$

resulta

$$\int_0^\tau \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{t^2} \sqrt{\frac{t}{\tau - t}}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1+\sigma^2}{4\tau\sigma^2}}\, d\sigma^2}{(\tau\sigma^2)^{3/2}}$$

que, poniendo todavía $\tau\sigma^2 = \zeta$, se escribe

$$\frac{e^{-\frac{1}{4\tau}}}{\sqrt{\tau}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4\zeta}}\, d\zeta}{\zeta^{3/2}} = \frac{2e^{-\frac{1}{4\tau}}}{\sqrt{\tau}}\, \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4\tau}}}{\sqrt{\tau}}.$$

Sustituyendo en la expresión de $Z : \sqrt{s}$ y comparando con $Z'$ se encuentra realizada la relación

$$Z' + \frac{1}{2\sqrt{s}} Z = 0.$$

Pongamos finalmente el valor particular $s = 0$, que da

$$z = e^0 = 1$$

y

$$Z = \int_0^\infty \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4t}}\, dt}{t^{3/2}} = 2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right);$$

resulta que, para $s=0$

$$\frac{Z}{2\sqrt{\pi}}=1=z$$

y la comprobación resulta realizada (8).

Río de Janeiro (Brasil)
Instituto Nacional de Tecnología

Rosario, Instituto de Matemática

---

(8) Puede compararse, en el mismo orden de ideas aplicado aquí, con el fin de resolver, en otros casos, el mismo problema estudiado en el presente artículo D. E. Richmond. *Elementary valuation of Laplace transform.* An. Math. Monthly - 52 - 1945 - p. 481 - 487 (precisamente p. 485).

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS

## RESUELTOS

N.º 89 — Sea la familia de rectas

$$ux+vy+w=0 \qquad (1)$$

donde $u$, $v$, $w$ son funciones de un parámetro $t$, periódicas y de período $T$. Cuando $t$ recorre el intervalo $O$–$T$ la recta (1) envolverá una curva cerrada $C$. Supongamos que $C$ no tenga puntos dobles. Demostrar que el área $F$ y la longitud $L$ de $C$ están dadas por las fórmulas (*)

$$F=\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\Delta w}{(uv'-vu')^2}\,dt \quad , \quad L=\int_0^T \frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2}}{(uv'-vu')^2}\,dt$$

donde los acentos indican derivadas y se ha puesto

$$\Delta=\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} ,$$

Solución. — Si se designa por $f=f(x,y,t)$ a la recta (1) del enunciado, se sabe que la ecuación de su envolvente se obtendrá resolviendo, respecto $x$ e $y$ el sistema formado por la (1) y su derivada parcial respecto del parámetro $t$ igualada a cero.

Aplicando esto al caso del enunciado tendremos

$$f\equiv ux+vy+w=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}\equiv u'x+v'y+w'=0,$$

y resolviendo este sistema respecto $x, y$ resulta

$$x=\frac{\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

(*) En el enunciado del problema (año IV, pág. 248) faltaban, por omisión, los exponentes 2 de los denominadores.

que son las ecuaciones paramétricas de la curva $C$.

El área de una curva cerrada $C$ se sabe que se expresa por la integral curvilínea

$$F = \frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^T (xy' - yx')\,dt. \qquad (3)$$

De (2) se deduce

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}}{(uv' - vu')^2}$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} w & u \\ w'' & u'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}}{(uv' - vu')^2}$$

y por tanto

$$xy' - yx' = \frac{\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w & u \\ w'' & u'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}}{(uv' - vu')^2}$$

Para ver que el numerador de esta expresión coincide con el producto $\Delta w$, basta multiplicar la primera columna del determinante $\Delta$ por $w$ y restarle la tercera multiplicada por $u$; luego multiplicar la tercera columna por $v$ y restar de ésta la segunda multiplicada por $w$; efectuando luego el desarrollo con respecto $v$ se tiene

$$\Delta w = \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w & u \\ w'' & u'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

Con esto, sustituyendo en (3) se tiene demostrada la primera fórmula del enunciado.

Para demostrar la fórmula de la longitud, observamos que de manera análoga a la anterior, se obtiene

$$\Delta u = \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w & u \\ w'' & u'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

$$\Delta v = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v & w \\ v'' & w'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$$

y por tanto es

$$x'^2 = \frac{\Delta^2 v^2}{(uv'-u'v)^4}, \qquad y'^2 = \frac{\Delta^2 u^2}{(uv'-u'v)^4}$$

de donde

$$L = \int_0^T \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^T \frac{\Delta \sqrt{u^2+v^2}}{(uv'-u'v)^2}\, dt$$

como se quería demostrar.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial Anexa a la Facultad de Ingeniería de Rosario.

N.º 111 — Escribir el término general y hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots$$

SOLUCIÓN. — El término general es

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

y por tanto se verifica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n-2}{3n+4}$$

que es de la forma $(\alpha n+\beta)\,(\alpha n+\gamma)$ y por tanto nos dice que se trata de una serie hipergeométrica. Es sabido que en este caso la fórmula que da la suma de los $n$ primeros sumandos es

$$S_n = \frac{a_n(\alpha n+\beta) - a_1\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$$

que en el caso del enunciado se escribe

$$S_n = \frac{n}{3n+1}.$$

Por consiguiente la suma buscada vale

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. HORACIO ERLIJMAN, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario. Otra solución análoga se ha recibido del Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial Anexa.

*N. de la Red.* Al mismo resultado se llega observando que

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

y por tanto

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \ldots\right] = \frac{1}{3}.$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### PROPUESTOS

127. a) Demostrar que la suma

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{4n-1}$$

es divisible por 15.

*b*) Demostrar que dado un número impar arbitrario, existe un múltiplo de ese número que en el sistema binario de numeración se expresa por cifras todas iguales a 1. Generalizar en consecuencia la proposición *a*).

128. Dado un número entero cualquiera $n$, encontrar todas las progresiones aritméticas de términos enteros positivos tales que la suma de sus primeros $n$ términos sea igual a $n(3n+1)$.

129. Hallar los valores máximo y mínimo de la expresión

$$z = a \cos^2 x + b \operatorname{sen}^2 y$$

donde $x$ e $y$ están ligados por la relación $y - x = \frac{\pi}{4}$.

130. Demostrar que si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ los coeficientes $a,\ b,\ c$ son reales y si para todos los $|x| \leqq 1$ se verifica $|f(x)| \leqq 1$, será, para todos estos $x$, $|f'(x)| \leqq 2$.

Demostrar que el valor 2 se alcanza efectivamente y únicamente por dos determinaciones de los coeficientes. Demostrar también que las conclusiones no cambian si a la hipótesis de realidad de los coeficientes se sustituye la otra más general

$$\arg b = \frac{\arg a + \arg c}{2}$$

La proposición expresada en la primera parte de este ejercicio fué propuesta, en la forma menos estricta de ser $|f'(x)| \leqq 4$, como tema en la *Putman Mathematical Competition for 1946,* según informa The American Mathematical Monthly. Vol. 53 (1940), pág. 842-484.

131. Estudiar la curva dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = a \cot \varphi$, escribiendo la ecuación cartesiana. Demostrar que la curva es unicursal y escribir sus ecuaciones paramétricas.

Calcular el área del segmento comprendido entre $\varphi = \pi/4$ y $\varphi = \pi/2$.

# BIBLIOGRAFIA

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA. *Introducción a la Matemática Superior.* Publicaciones de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad Nacional de La Plata, 1946.

El título de esta obra sería probablemente más sugeriente para el lector si dijera *Introducción a la Teoría de las Funciones.* Se trata, como advierte en el Prólogo el autor, del curso que el mismo desarrolla desde hace años en la Universidad de La Plata, destinado a complementar, para el uso de los estudiantes que aspiran al doctorado en matemática, las nociones de análisis adquiridas ya en los cursos de iniciación comunes con otras especialidades de la Facultad. Este programa determina también la elección de los argumentos en aquellos capítulos del análisis infinitesimal en los cuales mayormente puede ejercitarse la moderna crítica de los principios.

El primer capítulo presenta los elementos de la teoría general de los conjuntos, sin especificación de los elementos constituyentes; estos están especificados en los números reales en el capítulo II que trata los argumentos allegados a las nociones de continuidad y de límite. Sigue en los capítulos III y IV la aplicación a la teoría de las funciones de variable real. El cap. V constituye un paréntesis en aplicación de los conceptos adquiridos en los cap. II - IV y preparación de las teorías siguientes, tratando de las series, primero numéricas, luego funcionales, luego potenciales, con lo que aparecen de pasada los números complejos ordinarios, y la noción de función analítica. El cap. VI vuelve a las funciones de una variable real desarrollando la teoría de la integral de Riemann, reservándose la integral de Lebesgue al cap. X donde la teoría de la medida de conjuntos lineales, y por consiguiente también la definición de la integral, está presentada con toda generalidad, para un número cualquiera de dimensiones. Los capítulos VII, VIII, IX constituyen otro paréntesis, tratando el primero de las series de Fourier y de funciones ortogonales, y los dos siguientes las propiedades de las funciones de varias variables dependientes de las nociones de continuidad y derivabilidad. Por fin el cap. XI trata de la integración de ecuaciones y sistemas diferenciales ordinarios.

El libro está redactado en forma clara, con numerosos ejercicios, elegidos a menudo entre los ejemplos clásicos de las singularidades que el esfuerzo hacia el rigor que caracteriza el análisis de los últimos cincuenta años ha puesto en evidencia. En cada caso están cuidadas las relativas referencias bibliográficas.

Tenemos, en resumen aquí, una obra de sumo interés didáctico y científico, representando un enriquecimiento de la bibliografía de habla castellana, en un argumento donde los estudiantes tenían hasta ahora que dirigirse principalmente a tratados extranjeros, algunos clásicos, otros menos.

B. LEVI

GEORGES VALIRON. *Cours d'analyse mathématique. I. Theorie des fonctions. II. Equations fonctionnelles. Applications.* Paris-Masson et Cie. 1942-1945 (in 8º gr.).

En dos volúmenes con un total de más de 1100 páginas de composición excepcionalmente cerrada nos ofrece el autor el contenido esencial de su curso de cálculo diferencial e integral en la Universidad de París, aumentado, según dice el prefacio, por algunos complementos. Si agregamos que a la forma exteriormente compacta corresponde casi siempre el estudio de igual brevedad en la redacción, puede el lector juzgar en seguida de la extensión de las materias tratadas. Debe notarse, a este respecto, que el curso va dirigido a jóvenes que todos, aunque en forma un poco dispar, ya poseen las primeras nociones y el mecanismo del cálculo, lo cual permite ocasionalmente al autor de aprovecharlas aun antes del momento en que será nuevamente presentada la definición para aclarar el concepto en modo uniforme.

Así empieza el primer volumen volviendo sobre las nociones generales de los números reales y límites, incluyendo series, fracciones continuas, productos infinitos, y topología de los conjuntos de puntos; vienen luego las nociones ligadas a la continuidad de las funciones de una variable, derivación, etc.; sigue el estudio de la integral de Riemann y de la integral de Lebesgue, series trigonométricas, cálculo numérico de integrales, mientras las teorías generales son oportunidad para introducir casi casualmente las más variadas nociones específicas, como desarrollo del seno en producto infinito, transcendencia de $e$ y de $\pi$, funciones analíticas y casi-analíticas de variable real, polinomios de Legendre y de Bernoulli, fórmula de Stirling, etc. Sigue la extensión a funciones de varias variables de las mismas teorías de continuidad y, entre las aplicaciones, noticias útiles para la mecánica, como vectores y transformaciones de contacto. Por fin, para cerrar el volumen, un pequeño tratado sobre las funciones analíticas de una variable, encaradas sucesivamente en forma elemental preparatoria, luego en la forma geométrica de Cauchy, luego en la forma de Weierstrass con consideración particular de las funciones enteras, funciones elípticas, hasta la función $\zeta$ de Riemann y su relación a la teoría de los números primos.

El segundo volumen llama un poco la atención por el título, ecuaciones funcionales, que bien corresponde posiblemente al sentido literal de las palabras, pero no al sentido habitual, debiéndose entender aquí todas las ecuaciones que llevan como incógnitas funciones; luego, ecuaciones en varias variables, ecuaciones diferenciales, variaciones y muchas aplicaciones. Empieza este volumen con la teoría de las funciones algebraicas de una variable, considerada sea desde el punto de vista puramente algebraico (o geométrico), sea desde el punto de vista de las integrales abelianas y de la correspondiente inversión. Sigue, después de una corta preparación sobre las series potenciales con varias variables, el estudio de los sistemas de ecuaciones analíticas, para llegar a la resolución de ecuaciones y sistemas diferenciales analíticos. Se inserta aquí la teoría de los contactos y envolventes que encontrará alguna aplicación en los desarrollos sucesivos de la teoría general de las ecuaciones diferenciales. Esta se desarrolla en forma muy detenida a lo largo de 6 capítulos, correspondiendo el primero al contenido más o menos clásico de los tratados de cálculo, el siguiente al estudio de las soluciones de ecuaciones lineales a coeficientes analíticos uniformes (en particular ecuaciones fuchsianas), luego a las ecuaciones clásicas de segundo orden (de Gauss, de Legendre, de Bessel); el cuarto al estudio de las soluciones alrededor de puntos singulares; el quinto a los teoremas generales de existencia y por fin el sexto a las ecuaciones de primer orden de la forma $y' = R(xy)$ con $R$ función racional y a la teoría de Sturm y Liouville para las ecuaciones lineales de segundo orden. Más rápidamente se dan luego los fundamentos del cálculo de variaciones y en los dos últimos capítulos (XV y XVI) las teorías clásicas sobre ecuaciones en derivadas parciales de primero y segundo orden. En medio (Cap. XII y XIII) se insertan los fundamentos de geometría diferencial en tres dimensiones (curvas alabeadas y superficies).

Como aludimos al principio, el autor asigna en los prefacios de los dos volúmenes, dos fines prácticos con relación a los estudiantes franceses; el de comentar su propio curso de análisis infinitesimal y el de proporcionar todos los conocimientos requeridos en los programas del *certificat de calcul differentiel et integral.* El lector extranjero, que no tiene tales intereses particulares, encontrará en él en forma más concisa y puesta al día aquella información que ya está acostumbrado a buscar en otros clásicos y extensos tratados franceses como el de Goursat o el de Jordan.

B. LEVI

GRAVES, LAWRENCE M., *The Theory of functions of real variables,* McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1946. 300 pág. (4 $ U. S. A.).

Los propósitos del autor al escribir este libro son indicados por el mismo en el comienzo de la Introducción: ''Los capítulos siguientes han sido escritos teniendo en mente tres propósitos. El primero es de dar a los estudiantes una perspectiva general del campo del análisis desde sus fundamentos. El segundo es de pasar revista a los conceptos fundamentales y teoremas del cálculo; se supone que el lector ha alcanzado la etapa en que puede entender los enunciados precisos de estos conceptos fundamentales y las demostraciones rigurosas de los teoremas. En los capítulos siguientes se incluyen varios teoremas para los cuales se dan a menudo, en los textos elementales de cálculo, demostraciones incompletas o equivocadas. El tercer propósito es el de informar al estudiante acerca de los teoremas y métodos de investigación que son fundamentales para trabajar en el análisis moderno. Estos teoremas y métodos son también frecuentemente usados en otras ramas de las matemáticas y en sus aplicaciones''.

De acuerdo con estos propósitos, la obra es un excelente resumen de los puntos más delicados del cálculo y de la teoría de funciones reales, expuestos con rigurosa concisión y con el simbolismo y nomenclatura actualmente en boga. Este simbolismo puede exigir al lector acostumbrado a los tratados clásicos, cierta atención y ofrecer cierta dificultad, pero el esfuerzo exigido no será en vano, pues va siendo cada día más necesario para quien desee introducirse en los métodos actuales del Análisis. Por otra parte, el autor resume en el Cap. I las notaciones y conceptos fundamentales de la lógica simbólica y del cálculo de clases que utiliza en lo sucesivo.

En el Cap. II define axiomáticamente los números naturales (por un sistema de postulados análogo al de Peano), los números racionales y, por las cortaduras de Dedekind, el sistema de los números reales. El cap. III contiene las definiciones más necesarias de la teoría de conjuntos de puntos y sus teoremas fundamentales. En el Cap. IV se introduce con toda generalidad el concepto de función, con especial atención a las funciones continuas y semicontinuas, junto con sus propiedades. El Cap. V trata de las derivadas y diferenciales de funciones de una o varias variables, con aplicación al desarrollo de Taylor y al cálculo de formas indeterminadas. El Cap. VI está dedicado a la definición de integral de Riemann, sus propiedades y a los teoremas fundamentales del cálculo integral. En el Cap. VII, bajo el título general de ''convergencia uniforme'' se exponen los principales teoremas relativos a límites de funciones de varias variables, permutación del orden en el paso al límite, junto con algunos teoremas sobre las sucesiones y series de números y funciones. El Cap. VIII trata de las funciones implícitas, con sus correspondientes teoremas de existencia, enunciados principalmente en vistas al Cap. IX que se refiere a las ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual no contiene los métodos efectivos de integración, sino que se limita a discutir ampliamente y analizar con todo cuidado las condiciones mínimas exigibles para la existencia de las soluciones. Los Cap. X y XI están dedicados a un detallado estudio de la integral de Lebesgue y a la medida de conjuntos, con las propiedades y aplicaciones usuales de estos conceptos. El Cap. XII y último trata de la integral de Stieltjes, con sus propiedades y sus relaciones con los demás tipos de integral.

En todo el libro, muchas demostraciones, sobre todo las de ciertos lemas y corolarios, están únicamente esbozadas, debiendo el lector desarrollarlas y completarlas; esto, según dice el autor, es el ejercicio más útil que aconseja a los lectores. Sin embargo, la obra contiene también de tanto en tanto ejercicios propuestos, algunos verdaderos ejercicios, y otros, más bien nuevos teoremas complementarios de los desarrollados en el texto. Para otros teoremas o ejemplos de funciones especiales cuyo desarrollo ocuparía demasiado espacio, el autor se limita al enunciado, remitiendo a otros tratados más completos (Pierpont, Hobson, Caratheodory...). Al final de cada capítulo contiene la bibliografía correspondiente, acompañada de comentarios acerca de la misma.

Tanto por el contenido, como por las indicaciones bibliográficas y la original exposición y sistemática ordenación de las materias, el libro cumple de manera excelente los propósitos enunciados por el autor en la Introducción.

L. A. Santaló

FREDERICK G. W. BROWN, *Elementary mathematics for Workshop Students,* p. 369 + XV. Macmillan and Cº London 1945, 5 sh. 6 d.

*A short applied Workshop Mathematics,* p. 208 + VIII. Macmillan an Cº London, 1946, 3 sh. 6 d.

Estos dos pequeños volúmenes pueden interesar a nuestros lectores tan solo como una señalación didáctica para el ingeniero que tenga que dirigir a obreros especializados. El primero se ofrece como una moderna adaptación de un libro publicado en 1900 por Frank Costle con el título un poco más corto: *Workshop mathematics,* (*matemática de taller*) destinado entonces, según el autor, a remediar al inconveniente que cuando el artesano debe desarrollar su trabajo en modo inteligente se encuentra a menudo en la dificultad de haber olvidado también las reglas de las cuatro operaciones aprendidas en las primeras clases. En la nueva redacción, según nos informa su autor, ha sido reducido esencialmente el volumen de la obra, aun habiendo aumentado la extensión de las materias para tener en cuenta las necesidades del actual desarrollo industrial. Los sucesivos capítulos del libro tratan luego las nociones fundamentales de la aritmética, las ecuaciones de primer grado en una incógnita, elementos de cálculo algebraico, ecuaciones de segundo grado y simultáneas, elementos de geometría, sistema métrico inglés, logarítmos y regla logarítmica. Una tabla de logaritmos y de valores naturales de las funciones trigonométricas en 4 decimales está añadida al final del volumen. El método adoptado es esencialmente práctico; se proporcionan reglas que se explican sobre ejemplos y muchos ejemplos están propuestos como ejercicios, de los cuales están reunidos al final del volumen las respuestas. Si tuviéramos que dar un juicio deberíamos adelantar la duda que el lector deba fácilmente sentirse abrumado por una excesiva densidad de las materias, no sostenida por una suficiente confianza en la educación de la capacidad racionativa, pues consideramos que esta, en todos los grados de la cultura, es el mejor instrumento de clasificación, aun de las reglas prácticas. El remedio puede estar proporcionado por el gran número de ejercicios prácticos, en el caso que el lector cuide intensamente realizarlos.

El segundo volumen, más corto, tiene también un nivel netamente superior: ''el autor ha estudiado los métodos empleados en el *Centro de preparación de ingenieros* instituído por el ministerio del trabajo y servicio nacional'' y considera que la experiencia le ha sido muy útil: ''se tiene aquí la esencia embrional de la práctica aplicación''. Después de una muy breve recapitulación de las reglas de la aritmética, álgebra y geometría, la parte esencial del libro se desarrolla por ejercicios de calculación numérica sobre problemas de mecánica, elasticidad, resistencia de materiales etc. propios de la práctica de taller. Una buena colección de problemas por resolver y las respuestas a los mismos reunidas al final del volumen acrecentan la práctica utilidad.

B. LEVI

—El precio de suscripción a «Mathematicae Notae» es de 8 $ (m/n.) anuales.
—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título «Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.», cuyo precio de suscripción es de 10 $ m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos le las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
—Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a «Mathematicae Notae» dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
—Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc.. Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
—Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

## INDICE DE FASCICULO 1



## INDICE DEL FASICULO 2



## INDICE DEL FASCICULO 3



IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL - SANTA FE