



Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática  
Profesorado en Matemática  
Proyectos Innovadores en Educación Matemática

## **Proyecto**

**Micro-sociedad matemática al interior del aula en el  
Nivel Secundario. Implementación de una propuesta**

**Ezequiel Calore**

**Diciembre 2023**

# Micro-sociedad matemática al interior del aula en el Nivel Secundario. Implementación de una propuesta

## Mathematical micro-society inside the classroom at the High School. Implementation of a proposal

*Ezequiel Calore*  
ezequielcalore@hotmail.com

### **Resumen**

Este trabajo contempla el diseño, implementación y análisis de una unidad didáctica llevada a cabo en un tercer año del Nivel Secundario de la ciudad de Rosario, Argentina. La propuesta está basada en el concepto de micro-sociedad científica en el aula, introducido por Guy Brousseau (1986) y promovido por los documentos ministeriales de la provincia, aunque por lo general, olvidado en la práctica. Se proponen actividades de trabajo colectivo que giran en torno a la Resolución de Problemas no triviales donde los estudiantes desempeñan el rol de pequeños matemáticos. A través del registro anecdótico, cuestionarios abiertos y el análisis documental de producciones, se estudian las diferentes habilidades matemáticas que se ven activadas en la implementación como así también las características del trabajo en el aula y la respuesta de los estudiantes a la propuesta desde un dominio afectivo.

### **Palabras clave**

Microsociedad científica. Trabajo colectivo. Comunidad matemática. Implementación. Pequeños matemáticos.

### **Abstract**

This work encompasses the design, implementation, and analysis of a didactic unit carried out in the third year of High School Education in the city of Rosario, Argentina. The proposal is based on the concept of a scientific micro-society in the classroom, introduced by Guy Brousseau (1986) and promoted by state-level ministerial documents, although generally overlooked in practice. Team work activities are proposed that include the resolution of non-trivial problems, where students take on the role of little mathematicians. Through anecdotal records, open questionnaires, and documentary analysis of productions, different mathematical skills activated in the implementation are studied, as well as features of classroom work and students' response to the proposal from an affective domain perspective.

### **Keywords**

Scientific micro-society. Team work. Mathematical community. Implementation. Little mathematicians.

# 1. Presentación

A lo largo de esta primera sección, se aborda la problemática actual que motiva el presente proyecto. Además, se explicitan los interrogantes generales y específicos como así también los objetivos correspondientes. Finalmente, se reporta un estudio de antecedentes en materia de investigación vinculada a nuestro tópico de los últimos años.

## 1.1. Problemática

El actual Diseño Curricular del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014) (DCJ) plantea, con relación a la enseñanza de la Matemática, la necesidad de “un trabajo áulico que propicie una actividad a la manera de micro-sociedad científica” (p.48). Con estas palabras, se hace referencia a un trabajo en el cual se problematice el contenido y los estudiantes actúen como “pequeños matemáticos”, con oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, y elaborar conclusiones, para posibilitar la producción de conocimientos.

Son muchos los referentes que sustentan esta dirección en la enseñanza de la Matemática. Si nos remitimos a la Didáctica Fundamental, desde la perspectiva de Brousseau (1986), la clase se concibe como un espacio de producción donde las interacciones sociales son condiciones necesarias para la emergencia y la elaboración de cuestiones matemáticas. En ese marco, se propicia que el trabajo intelectual del alumno sea, en ciertos momentos, comparable a la actividad científica, en el sentido que puedan redespersonalizar y descontextualizar el saber, para volverlo aplicable a otros contextos. Se postula, en el encuadre de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que para hacer posible una actividad de este tipo, el profesor imagine y proponga a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos se descubran como la solución óptima.

Por otro lado, desde la corriente de Resolución de Problemas (RP), también se promueve un trabajo del estudiante similar al del matemático que se enfrenta a un problema. Polya (1973) considera formar en los estudiantes buenos resolutores de problemas, y describe cuatro etapas para esa actividad matemática que sucede en el aula: comprensión del problema, elaboración de un plan, ejecución y verificación de la solución obtenida.

Sin embargo, pese a ser una cuestión establecida por ley y con un buen respaldo teórico, no se ve realmente un trabajo de este tipo en las aulas del Nivel Secundario. Menos aún, nos

encontramos con la típica clase tradicional de Matemática, estructurada del siguiente modo: el docente expone la teoría y, seguido de eso, los estudiantes resuelven una buena cantidad de ejercicios para mecanizar técnicas que luego replicarán en la evaluación escrita. Este tipo de enseñanza, no solo no se adapta a los documentos que actualmente la regulan, sino que, además, acaban por presentar a la Matemática como una ciencia rígida y estática, donde todo se reduce a resolver ejercicios mediante la aplicación de algoritmos conocidos.

Sabemos que muy lejos se encuentra esto último de la actividad matemática real. El DCJ menciona que se concibe a Matemática como un producto cultural y social. Entiende que el *hacer matemática* es un trabajo de modelización cuyo motor es la Resolución de Problemas. En ese hacer del estudiante, aparecen varias facetas que van más allá de la mera resolución de ejercicios. El estudiante se comporta como un “pequeño matemático” en acción que, en sociedad, interpreta un problema, elabora diferentes conjeturas, investiga, descarta posibilidades y, finalmente, a veces, lo resuelve.

Por todo esto, consideramos que es necesario atender a la efectiva puesta en marcha de un trabajo concreto en el aula como el que se plantea desde el DCJ. Un aspecto que no queremos dejar de tener en cuenta, es el componente afectivo emocional del estudiante en el aprendizaje de la Matemática. Con esto, nos referimos al papel que juegan las creencias transmitidas como así también los sentimientos hacia la disciplina y a los diferentes estilos de enseñanza. Estos factores pueden constituirse en obstáculos o bien en vehículo para el desarrollo de una propuesta como la que planteamos.

## **1.2. Interrogantes**

De acuerdo a lo desarrollado, planteamos el interrogante general: ¿cómo podemos implementar una propuesta donde se lleve a cabo un trabajo en el aula a la manera de micro-sociedad matemática, en el Nivel Secundario?

Con foco en cuestiones específicas, nos preguntamos:

- (11) ¿Cuáles de las habilidades mencionadas por el DCJ se ven activadas durante el proceso y cuáles no?
- (12) ¿Cómo se desarrolla ese trabajo a la manera de micro-sociedad científica a lo largo de la implementación?
- (13) En términos del dominio afectivo en la Resolución de Problemas, ¿cómo responde el estudiante del Nivel Secundario a una propuesta del estilo?

### 1.3. Objetivos

#### *Objetivo general*

Elaborar, implementar y analizar una propuesta donde se lleve a cabo un trabajo en el aula a la manera de micro-sociedad matemática, en el Nivel Secundario.

#### *Objetivos específicos*

(O1) Determinar las habilidades mencionadas por el DCJ que se ven activadas en la efectiva implementación y en qué medida.

(O2) Caracterizar el desarrollo de ese trabajo a la manera de micro-sociedad científica a lo largo de la implementación.

(O3) Describir en términos de dominios afectivos en la Resolución de Problemas, la respuesta del estudiante del Nivel Secundario a una propuesta del estilo.

### 1.4. Antecedentes

A continuación, reportamos un estado de conocimiento a partir de la búsqueda en los portales Dialnet y Google Scholar de publicaciones pertenecientes a la última década, vinculadas a nuestro tópico de trabajo. Para lograr una delimitación pertinente de publicaciones de interés, se estructuró la búsqueda en torno a ciertos términos clave que representan el núcleo central de la problemática desarrollada en la sección 1.1; entre ellos: *comunidad, grupos, interacción, sociedad científica, aula, Matemática y Argentina*. De ese modo, en relación con los términos clave de búsqueda “comunidad”, “aula” y “Matemática”, encontramos lo siguiente.

Radford (2023) se pregunta: ¿cómo lograr un aprendizaje colectivo en el aula de Matemática? Plantea algunas ideas sobre lo que se entiende por aprendizaje colectivo y se contrapone a la idea de que la cercanía espacial entre los estudiantes durante el desarrollo de una actividad es una condición suficiente para lograr este tipo de aprendizaje. En busca de caracterizar el aprendizaje colectivo, describe el tipo de actividad en que sería propicio que participen los estudiantes: propuestas direccionadas hacia la satisfacción de una necesidad colectiva.

Ofrece un ejemplo concreto de una propuesta de aprendizaje colectivo, en el contexto de un 3er y 5to grado del Sistema Educativo de Brasil (estudiantes de 8-9 y 10-11 años respectivamente), donde se trabaja con resolución de ecuaciones lineales en una variable. El objeto común al que se quiere llegar es un método para resolver ecuaciones de ese tipo. Los estudiantes trabajan en grupos en torno a la ecuación “ $3n + 1 = n + 5$ ” que representan mediante un material didáctico concreto, sin utilizar, en principio, la expresión alfanumérica. La actividad busca que los estudiantes encuentren la manera de resolver estas ecuaciones por

un proceso de simplificación, “operación a ambos miembros de la igualdad”. Al trabajo en equipos, le siguen momentos de intercambio con el docente y luego con los demás grupos. Introducida la representación alfanumérica para la ecuación, el objetivo es detallar un método para la resolución de la ecuación.

La propuesta intenta abrir un espacio para el aprendizaje colectivo a partir de relaciones sociales que mantienen a los estudiantes comprometidos con lo que se hace y dice, independientemente de las contradicciones, de los enfrentamientos de ideas y de las diferentes concepciones que puedan tener. Concluye, así, que la actividad de enseñanza y de aprendizaje colectiva tiene que estar direccionada hacia el encuentro con un objeto cultural de aprendizaje común y estar basada en relaciones sociales amparadas en una ética comunitaria.

Bajo los términos de búsqueda clave “grupos” e “interacción”, hallamos una tesina de pregrado donde Vicuña Valdés (2016) trabaja con la TSD en la enseñanza de la geometría; particularmente, en criterios de congruencia de triángulos. En dicho artículo, reporta la implementación de una unidad didáctica en un primer año de secundaria de una institución educativa de la comuna de Las Condes, Santiago, Chile. A lo largo de la fundamentación de su proyecto, rescata la importancia de las interacciones sociales, como condición necesaria para el trabajo en el aula.

En una descripción del contexto donde implementa la propuesta, menciona que el colegio es pago y que su enfoque pedagógico es la educación personalizada. Sobre el curso, relata una buena predisposición hacia el aprendizaje de la Matemática, donde los estudiantes participan activamente si se los convoca y no tienen vergüenza o temor de consultar sus dudas si no han comprendido.

En el análisis de la implementación de la unidad, esboza algunas cuestiones que podemos vincular con el trabajo como micro-sociedad científica. A partir de un problema sobre una empresa que construye ventanas y el encargo de una ventana triangular de ciertas características, los estudiantes se disponen en grupos de cuatro personas en la elaboración de conjeturas sobre varios enunciados. Uno de ellos indaga sobre las condiciones mínimas que se tienen que especificar en el pedido para que no haya dudas sobre la ventana que se pide construir. En ese trabajo grupal y de producción, se reporta que el 50% de los grupos logran formular las conjeturas esperadas.

El trabajo grupal fue un aspecto distinto para los estudiantes, acostumbrados habitualmente a otra metodología, lo cual se tradujo en algunas complicaciones en el proceso de validación.

Los tiempos pensados se excedieron y, en ese contexto, fueron las preguntas del docente que guiaban la validación las que permitieron a los estudiantes comprender el proceso que acababan de concluir. Menciona que “la institucionalización tuvo lugar en este ambiente de fin de trabajo grupal, con bastante ruido quedando muy poco tiempo de clase” (p.15). Destaca la incertidumbre de los estudiantes en relación con la aplicabilidad de las actividades desarrolladas, lo cual hizo necesario que, en la siguiente clase, retomara la institucionalización de los criterios de congruencia y trabajen algunos ejercicios de aplicación.

En este caso, si bien las producciones grupales lograron en parte los objetivos previstos como la formulación de las conjeturas (dando cuenta de una proximidad con el ideal de micro-sociedad científica que se pretende alcanzar), esto último muestra cómo el componente afectivo emocional en la Resolución de Problemas puede presentarse como una dificultad a la hora de la implementación de una propuesta del estilo.

Con la incorporación del término “Argentina” a la búsqueda, en un contexto más similar al nuestro y bajo las mismas leyes que regulan la actividad escolar, Mántica y Carbó (2016) dan cuenta de un estudio de los procesos de formulación y validación de conjeturas en estudiantes de secundaria que trabajan en interacción con pares. Implementan una propuesta con un curso de segundo año del Nivel Secundario, en una escuela de la ciudad de Santa Fe, Argentina. La secuencia diseñada apunta a que los estudiantes conjeturen y validen la propiedad de la desigualdad triangular de los lados del triángulo. En cuanto al marco teórico, se apoyan en los estudios de Balacheff (2000; citado en Mántica y Carbó, 2016) sobre formulación y conjetura en interacción con pares, como así también en los constructos de explicación, prueba y demostración, para fundamentar la propuesta y el análisis de su implementación.

Proponen que, en primera instancia, los estudiantes trabajen en una tarea asignada por el docente en forma individual y luego, se conforman los grupos con el propósito que se debatan las conjeturas elaboradas en forma individual y se logre una justificación grupal. El objetivo de la tarea es que los estudiantes logren enunciar la desigualdad triangular. Una primera consigna, a partir de la cual estructuran el análisis de lo logrado por cada grupo, se presenta en la Figura 1.

*Consigna:*

*Dados estos dos segmentos, usando la* \_\_\_\_\_  
*regla no graduada y el compás,* \_\_\_\_\_

*a) Construye un triángulo: b) Construye otro triángulo, distinto del anterior, con esos mismos dos segmentos. c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?*

*Figura 1. Consigna de actividad implementada*

Se busca aquí que los estudiantes puedan explorar, conjeturar y argumentar sobre la infinitud de triángulos que tiene por lados a dos segmentos dados.

En el análisis describen las producciones de cada grupo e identifican los principales obstáculos presentados y la interacción entre los estudiantes. Algunos de los obstáculos que aparecieron fueron la densidad de los números reales, la idea de que un conjunto acotado no puede ser infinito y la clasificación de los triángulos para dar una respuesta. Respecto al intercambio entre los estudiantes, mencionan que permitió modificar el tipo de validación realizada; lo cual, en general, conllevó a un avance en el tipo de prueba. Particularmente, cuatro grupos tienen una experiencia crucial en el intercambio. Logran avanzar en el tipo de prueba para validar su conjetura, uno de ellos a un experimento mental y los otros tres a un ejemplo genérico, a través de argumentaciones para convencer al resto del grupo de sus ideas.

Concluyen respecto al trabajo en sociedad: “Consideramos que hubo buenos momentos de interacciones entre pares que permitieron el avance sobre el tipo de argumentación utilizada para fundamentar las afirmaciones” (p.97).

Las investigaciones reportadas dan cuenta de diferentes implementaciones en el aula donde la participación de los estudiantes y el trabajo en comunidad juegan un rol central. Si bien el término “micro-sociedad científica” es muy específico y esto acota los resultados de la búsqueda, el aprendizaje en interacción con los pares y el recorrido de conjeturar, argumentar y validar en el aula son temas vigentes en Educación Matemática. No obstante, ninguno de los trabajos antes reportados tiene por objetivo principal replicar el trabajo de la comunidad matemática dentro del aula y medir la fidelidad o proximidad de la experiencia lograda con un modelo ideal. Esto nos muestra, dentro del tópico de estudio, una vacancia donde poder dar nuestro aporte.

## 2. Marco teórico-referencial

Las nociones fundamentales abarcadas por esta temática son el modelo de la microsociedad científica como articulador del trabajo en el aula, las habilidades matemáticas que el estudiante desarrolla en la clase y que caracterizan dicha impronta, y por último, los componentes emocionales o afectivos que dicen presente en la relación intelectual del estudiante con el conocimiento matemático y su enseñanza. En lo que sigue, desarrollamos cada una de ellas.

### 2.1. Microsociedad científica

El concepto de microsociedad científica es acuñado por Guy Brousseau (1986), en referencia al tipo de trabajo que, desde la Didáctica Fundamental, se apunta a promover en el aula de Matemática.

Brousseau entiende que saber Matemática no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, saber Matemática implica ocuparse de problemas. Incluso, resolver problemas es solo una parte del trabajo matemático. Tan importante como eso, es encontrar buenas preguntas. En ese sentido, una buena reproducción por parte del alumno de una actividad matemática exigiría que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, etc.

Esto último tiene sus implicancias sobre el trabajo del profesor, es decir, sobre lo que significa enseñar conocimientos matemáticos. Se trata de hacer posible que los alumnos desarrollen con dichos conocimientos una actividad matemática como la descrita anteriormente. Para lograr esto, el profesor tiene que ser capaz de imaginar y proponer situaciones en las cuales los conocimientos matemáticos afloren como una solución óptima y posible de ser descubierta a partir de los problemas planteados.

Una idea central en esta teoría es que, para cada conocimiento o saber matemático, existe una situación o conjunto de situaciones que el docente puede construir para trabajar con sus alumnos. Crippa *et al.* (2008) mencionan al respecto: “una situación comprende, como mínimo, un sujeto (y, entonces, sus conocimientos) y un medio, sistema antagonista del sujeto, al cual él se confronta” (p.97). Las relaciones que se tejen entre el sujeto y el medio son tales que, aquel conocimiento al que se apunta, es necesario para su realización o mantenimiento.

Brousseau (1994) define la situación a-didáctica como una situación en la cual el alumno se involucra como investigador de un problema matemático, de forma independiente al sistema

de enseñanza. Aprender un conocimiento matemático significa, entonces, adaptarse a una situación a-didáctica específica de dicho conocimiento.

Si nos detenemos un momento sobre el trabajo del investigador matemático, él, antes de comunicar lo que piensa que ha encontrado, tiene que delimitarlo. Le corresponde identificar qué de lo que ha encontrado es susceptible de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás matemáticos. Tiene que, además, insertar este saber dentro de los conocimientos más próximos de la estructura matemática; por lo que es necesario suprimir todas las reflexiones poco útiles, los errores y caminos equivocados, las razones de sus determinaciones y las condiciones personales y sociales que lo han conducido a un desempeño satisfactorio. Es decir, el matemático recorre un proceso de despersonalizar, descontextualizar y destemporalizar sus resultados.

Se visualiza como favorable desde esta línea que el trabajo del profesor siga un camino inverso al del investigador. Esto es, que el profesor repersonalice, recontextualice y retemporalice los conocimientos matemáticos en unas condiciones particulares para que estos tengan sentido para el estudiante. Además, resulta oportuno adaptar cada conocimiento a una situación específica, de modo que se simule, en la clase, una microsociedad científica en donde se generen buenas preguntas y discusiones. Estas situaciones tienen por objeto dar la posibilidad a los estudiantes de encontrar autónomamente el saber que es comunicable y que el profesor ha querido enseñar; es decir, que los estudiantes puedan redespensalizar, redescontextualizar y redestemporalizar su saber, y lo identifiquen con el saber cultural y científico de su época.

Las diferentes decisiones que el docente toma en el diseño o elección de situaciones para trabajar en el aula, responden a un sistema propio de creencias sobre lo que significa enseñar, lo que significa aprender, cuáles son los objetivos de la Educación en Matemática, entre otros aspectos. En esa línea, Camelo Bustos y Mancera Ortiz (2005) describen tres modelos según los roles y tareas del maestro y del estudiante con relación al saber puesto en juego, basándose en los aportes de Charnay (1988): normativo, incitativo y aproximativo.

Para el primero de ellos, la intención principal es la de comunicar un saber a los estudiantes. Por su parte, el modelo incitativo se caracteriza por la existencia de un flujo libre de información en el que lo principal es indagar al estudiante sobre sus intereses, motivaciones y necesidades. Finalmente, en el modelo aproximativo, se propone partir de concepciones existentes en el estudiante para “ponerlas a prueba”, mejorarlas, modificarlas o construir nuevas. Esto hace que el papel del docente sea el de imaginar, proponer y organizar

situaciones que los estudiantes puedan vivir. Por su parte, el estudiante ensaya, busca, propone soluciones, construye modelos, confronta con sus compañeros, define y discute, es decir, en ciertos momentos el trabajo intelectual del estudiante es comparable a la actividad científica. Este último modelo es el que se empareja con el tipo de enseñanza que estamos pensando en el aula.

Así como el trabajo del maestro es, en el sentido que estamos planteando, inverso al del investigador, se cree conveniente que el del estudiante sea comparable con una actividad científica, en el que intervenga, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, los intercambie con otros, reconozca los que están conformes con la cultura y tome los que son útiles. De esta manera, se lograría que el estudiante asuma un papel crítico y que, por tanto, se enfrente al trabajo que se le presente autónomamente y no como una exigencia externa del maestro.

## **2.2. Habilidades matemáticas**

En el DCJ se menciona que, a través de ese trabajo a la manera de microsociedad científica, se busca promover que los estudiantes puedan: *interpretar información* (comprender el núcleo del problema, identificar los elementos que intervienen y reconocer los datos de interés), *establecer relaciones* (vislumbrar dependencias entre variables, presencia de patrones o elementos invariantes), *conjeturar, elegir y construir un modelo apropiado* (la conjetura es un elemento central de la actividad matemática, se trata de intuir o sospechar sobre la veracidad o falsedad de cierto fenómeno), *comunicar de manera oral y escrita* (hacer público el conocimiento, compartir lo desarrollado, articular el lenguaje matemático y simbólico), *argumentar sobre la validez de los procesos o razonamientos* (lograr justificaciones lógicas con las herramientas al alcance, pudiendo en los primeros años de secundaria estar fundadas sobre la experiencia) y *elaborar conclusiones* (institucionalizar).

Las habilidades mencionadas dibujan un recorrido de la forma explorar → conjeturar → demostrar. Respecto a la demostración matemática, se trata de un concepto que ha ido mutando a lo largo de la historia; demostraciones producidas hace siglos parecen hoy vagas o poco rigurosas a los ojos de la comunidad matemática actual. Del mismo modo, matemáticos de otras épocas verían las demostraciones actuales como excesivamente estructuradas.

Por todo esto, y con la propuesta de pensar el aula como una micro-sociedad científica, no podemos pretender que en la escuela haya una concepción única de demostración y, mucho menos, que se caracterice por su fuerte rigor. Es necesario que la demostración misma sufra

una transposición didáctica para llegar al aula. Adoptamos, entonces, la definición proporcionada por Balacheff (2000; citado en Mántica y Carbó, 2016), quien afirma que una prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado (Larios Osorio, 2003).

Cuando hablamos de interpretar información, establecer relaciones y elaborar conjeturas, nos referimos, de algún modo, a la “cocina” de la Matemática. La demostración presentada como un producto final, descontextualizada y despersonalizada, no refleja toda la actividad matemática que permitió llegar a la misma. Ese proceso previo por el cual se atraviesa, donde se plantean conjeturas, se hacen observaciones y análisis, se aportan argumentaciones y se desarrollan conocimientos y razonamientos, resulta la parte más rica del proceso y es lo que nos proponemos lograr en el aula de Matemática.

Estas habilidades o instancias propias del trabajo matemático pueden emparejarse con las cuatro fases de la TSD. Estas son: *acción*, *formulación*, *validación* e *institucionalización*. A continuación, desarrollamos cada una de ellas:

- *Acción*. Se pone a los estudiantes en contacto con un problema, cuya solución involucra precisamente el saber que se quiere enseñar. Los alumnos toman las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema. Conforman el momento de exploración e interacción.
- *Formulación*. Comunicación de información entre alumnos. Estas situaciones conllevan a que el alumno ponga de manifiesto sus modelos implícitos sobre determinados conceptos, a partir de una descripción o representación de los mismos.
- *Validación*. Momento en que intentan probar que lo que se dice es verdadero. Para ello hay que convencer a los demás de la coherencia y consistencia de las afirmaciones.
- *institucionalización*. Con foco en que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. Aquí, a partir del conocimiento de los alumnos participantes, se definen concepciones comunes a todos.

Sobre la elaboración de conclusiones, o bien la institucionalización (TSD), se trata de un momento fundamental de la clase. Sin institucionalización, las demás etapas carecen de sentido, pues la construcción del conocimiento quedaría truncada. No obstante, resulta relevante que el proceso anterior (exploración, análisis, conjeturas, comunicación, argumentación) tenga su debido lugar y las conclusiones sean presentadas de forma natural, como el final del recorrido.

Es cierto que todo podría reducirse a la institucionalización. De hecho, la enseñanza tradicional de la Matemática se basa en situaciones de institucionalización: se dice lo que se desea que el niño sepa, se le explica y se verifica que lo haya aprendido. Lo interesante, aquí, es llegar a eso a través de la creación del sentido (Brousseau, 1994).

### 2.3. Dominio afectivo

La Matemática juega un papel de vital importancia en las sociedades actuales, tanto para el mundo de los negocios, la ciencia y la tecnología como para la Resolución de Problemas y la toma de decisiones en la vida cotidiana. En ese sentido, su enseñanza satisface una necesidad funcional de largo alcance: prepara al ciudadano para su inserción en el mundo laboral y la continuación de estudios superiores.

Sin embargo, cuando la Matemática es trabajada en el aula, hay quienes creen que es aburrida, compleja, no digerible por todos y resulta difícil aprenderla. Suele gustar a un reducido grupo de estudiantes y tiende a ser aborrecida u odiada por otros. De ese modo, se genera frustración, angustia y aversión casi colectiva entre buena parte de los estudiantes.

Existen muchos factores que delinean el afecto que se produce hacia esta área del saber o hacia los procesos ligados a ella. Estos factores son variados, están fuertemente arraigados en los sujetos y son responsables de muchas de las acciones y comportamientos ante objetos involucrados en dicho proceso. Para referirnos a ellos, hablaremos de dominio afectivo.

El dominio afectivo en Educación Matemática engloba actitudes, emociones y creencias (McLeod, 1989). Estas variables están interrelacionadas entre sí, de forma que cada uno de estos afectos ejerce influencia sobre los otros; particularmente, las actitudes suelen estar determinadas más fuertemente por las emociones y las creencias.

Las *actitudes* hacia la Matemática se conciben como “una disposición emocional general hacia el aprendizaje matemático” o “una forma afectiva positiva o negativa de moderada intensidad y estabilidad razonable hacia las matemáticas” (McLeod, 1992, p.581). Por ejemplo, son actitudes el rechazo, la frustración, el pesimismo, como así también el fervor y el entusiasmo.

Las *emociones* se conciben como una respuesta afectiva caracterizada por una alta intensidad y activación fisiológica ante, por ejemplo, la interrupción y discrepancia entre las expectativas del sujeto y lo que experimenta. En este ámbito, Richardson y Suinn (1972) definen la *ansiedad matemática* como el “sentimiento de tensión y miedo que interfieren en la manipulación de los números y la Resolución de Problemas en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas” (p.551).

Las *creencias* consisten en proposiciones cuyo significado es representado, codificado y simbolizado en el sistema mental, y es tratado como cierto. Precisamente, se trata de concepciones o ideas formadas sobre la Matemática, su enseñanza, su aprendizaje y sobre sí mismo en relación con la disciplina. Es decir, conforman uno de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo sobre la Matemática y su enseñanza y aprendizaje, basado en la experiencia. McLeod (1989) señala dos categorías: las creencias acerca de la Matemática como disciplina que involucra poco componente afectivo y constituye una parte importante del contexto social, y las creencias del estudiante y del profesor acerca de sí mismo y su relación con la Matemática que comprenden un fuerte componente afectivo. Estas últimas se refieren a la confianza, el autoconcepto y las expectativas de control.

La consideración de los variados factores que configuran el dominio afectivo en la Educación Matemática ha tenido tanta relevancia que últimamente se ha connotado como clave para la descripción, el análisis, la comprensión o la explicación de muchas situaciones que suceden en el aula de Matemática. En relación con el aprendizaje de la Matemática, Gómez Chacón (2000) manifiesta que entre este y los factores del dominio afectivo existe una relación cíclica sustentada en lo siguiente:

- Cuando un estudiante aprende Matemática obtiene alguna experiencia que le puede provocar reacciones que influyen en la formación de sus creencias acerca de la Matemática y acerca de sí mismo en relación con la Matemática. Las creencias del sujeto sobre la Matemática pueden afectar su comportamiento y sus acciones en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender Matemática.
- Es posible generar tensión en aquellos estudiantes que aprenden Matemática, a través de ciertos estímulos asociados con dicha área del saber, lo cual provoca reacciones emocionales condicionadas por sus creencias acerca de sí mismo o acerca de la Matemática.
- Las reacciones emocionales en sujetos expuestos repetidamente a situaciones similares pueden automatizarse y convertirse en actitudes que contribuyen en la formación y mantenimiento de creencias.

De ese modo, vemos cómo el componente afectivo puede condicionar o tener gran influencia sobre el aprendizaje de la Matemática en los estudiantes.

### 3. Marco metodológico

En el presente apartado, presentaremos el marco metodológico en el cual se encuadra el proyecto, desde la elaboración, hasta la implementación y posterior análisis de la propuesta. Detallamos el enfoque adoptado y el alcance de la investigación, como así también describimos el contexto en el cual se lleva a cabo el estudio. Presentamos las técnicas e instrumentos de recolección de datos y, finalmente, las categorías de análisis que dan pie a los resultados en la siguiente parte 4 del trabajo.

#### 3.1. Enfoque, alcance y diseño

Se adopta para este proyecto un *enfoque cualitativo* puesto que lo que se pretende estudiar son aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, difícilmente cuantificables. No interesa hacer inferencias del tipo estadísticas sobre los resultados obtenidos sino aproximarse a una comprensión de los mecanismos que se ponen en juego con la implementación de una unidad didáctica; en efecto, interesan las particularidades. Hablamos de procesos cognitivos, percepciones, creencias, emociones, interacciones, experiencias y vivencias manifestadas en el lenguaje de los estudiantes, ya sea de manera individual, grupal o colectiva. De ese modo, los datos se recolectan con la finalidad de hacer un análisis conceptual que nos permita esbozar respuestas a los interrogantes iniciales.

El alcance del proyecto es *descriptivo-interpretativo* ya que los objetivos del mismo giran en torno a caracterizar el desarrollo del trabajo en el aula a la manera de micro-sociedad científica, identificar las habilidades matemáticas que se ponen en juego y describir la respuesta del estudiante a propuestas del estilo que, en muchos casos, pueden resultar atípicas, especialmente por su dinámica.

Respecto al diseño del proyecto, el mismo es de *investigación acción* ya que se propone indagar sobre la eficacia, bajo ciertos criterios, de una metodología de trabajo en particular. Para ello, el camino que se toma es la acción: la implementación concreta de una unidad didáctica que intenta ajustarse a dichas características para el posterior estudio sus resultados y la elaboración de conclusiones.

#### 3.2. Contexto y participantes

En el marco de nuestras prácticas de residencia en el taller de Práctica Profesional Docente IV del Profesorado en Matemática de la UNR, se trabaja con un tercer año del Nivel Secundario de la ciudad de Rosario. El cursado semanal es turno mañana, la división es única en todos los años y la orientación del colegio es “Bachiller en Economía y Administración”.

Respecto al espacio físico de la institución, una característica que no pasa desapercibida es el abundante espacio verde. Cada par de salones conforma una construcción independiente alrededor de un gran patio común, lo cual favorece una iluminación natural de las aulas y poca contaminación sonora externa. El aula de tercer año cuenta con dos ventiladores y la totalidad de los bancos son individuales.

La carga horaria semanal de Matemática es de 4 h cátedras, distribuidas en dos días. Los martes, en el primer módulo, de 7.30 a 8.50 h y los jueves, en el último, de 11.55 a 13.05 h. El curso se conforma por un total de 34 estudiantes (16 varones y 18 mujeres). Muestran una buena predisposición hacia el trabajo en equipos en Matemática. Sin embargo, no suele presentarse una variedad de problemas como se promueve desde la corriente de Resolución de Problemas y ese trabajo en equipo la mayor parte de las veces acaba por ser solo una cuestión de compartir espacio físico cercano, como supo mencionar Radford (2023) en su investigación (apartado 1.4), y contrastar resultados al finalizar los ejercicios. Ninguno de los estudiantes requiere especial adaptación curricular por lo que todos avanzan, al menos teóricamente, a la par.

La unidad temática con la cual se trabaja es “Trigonometría”. Para la misma, se pretende una temporalización de 10 encuentros a lo largo de seis semanas, comprendidas entre los meses de septiembre y octubre. Tres de esas semanas son concretamente objeto de estudio para el presente trabajo (semanas 2, 4 y 5). En ellas se trabajan los contenidos que se detallan en la Tabla 1.

El diseño de las mismas está direccionado a generar situaciones donde el estudiante se vea posicionado en el lugar de un matemático, ya sea en escenarios de exploración y búsqueda de patrones o regularidades, como así también en la Resolución de Problemas que no son inmediatos. En la primera de ellas se apunta a descubrir un invariante que permite dar, lo que los matemáticos llaman, una “buena definición”. La segunda recrea un episodio significativo de la historia de la Matemática y da cuenta del potencial de las herramientas que se están estudiando, a la vez que posiciona al alumno enfrente de un problema diferente a los habituales en el aula. Finalmente, en la tercera se busca, a través de la exploración, la elaboración de una conjetura y su demostración, completando esa suerte de recorrido que caracteriza la actividad matemática.

*Tabla 1. Actividades seleccionadas*

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actividad 1 | <i>Introducción de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos</i><br>Los estudiantes construyen, con semicírculo y regla, triángulos rectángulos a partir de uno de sus ángulos agudos. Realizan mediciones para conjeturar la invarianza de las diferentes razones y dar una buena definición de las mismas. |
| Actividad 2 | <i>Aristarco de Samos y sus mediciones astronómicas</i><br>En el siglo III a.C., Aristarco de Samos estimó la relación entre las distancias de la Tierra a la Luna y de la Tierra al Sol, utilizando trigonometría. Los estudiantes recrean su trabajo y se enfrentan a la resolución de un problema no trivial.         |
| Actividad 3 | <i>Razones trigonométricas en ángulos complementarios</i><br>Los estudiantes exploran regularidades en el cálculo de razones trigonométricas de ángulos complementarios para conjeturar una propiedad. Se enfrentan al desafío de esbozar una demostración matemática.                                                   |

### 3.3. Técnicas de recolección

Para llevar a cabo la recolección de datos, se implementan tres técnicas, con lo que se apunta a una adecuada triangulación metodológica:

- *Observación de participación moderada:* Como docentes al frente del curso, nos encontramos involucrados en la escena a observar, aunque de forma moderada. En efecto, existen momentos en que nuestro rol es más pasivo y no tenemos interferencia en el proceso de los estudiantes, como así también momentos en los cuales asumimos un rol más protagónico; por ejemplo, a la hora de institucionalizar.
- *Análisis documental:* Se lleva a cabo un análisis de ciertas producciones de los estudiantes, donde se pueda dar cuenta de determinados procesos o razonamientos que resulten de interés para nuestro objetivo. En ellas, se incluyen enunciados o preguntas donde se invita a la reflexión ya sea por escrito o bien en formato de audios espontáneos (grabados in situ) del proceso de producción colectiva del grupo.
- *Cuestionario abierto:* Hacia el final del período de práctica, se implementa un cuestionario anónimo donde los estudiantes pueden manifestar sus impresiones sobre la metodología de trabajo y ciertos aspectos personales que sirven para indagar acerca de ese componente afectivo/emocional hacia la Matemática, y su enseñanza y aprendizaje.

### 3.4. Instrumentos

Para instrumentar la observación, se lleva a cabo un registro anecdótico. Por esto último se entiende un instrumento en el que se describen por escrito episodios y secuencias que se consideran importantes para evaluar lo que interesa en un alumno o en un grupo de alumnos (Díaz Barriga y Hernández, 2002).

En el cuestionario abierto se presentan, por un lado, preguntas sobre impresiones o experiencias en vinculación a determinadas actividades desarrolladas a lo largo de la unidad didáctica. Por otro lado, preguntas sobre la relación afectiva de los estudiantes con la Matemática. El cuestionario en concreto que se implementa es el siguiente (Figura 2).

1. ¿Cómo podés describir tu relación con la Matemática? ¿Qué sentimientos te genera esta disciplina?
2. La Matemática, en general, se trata de resolver problemas... ¿Cómo reaccionás cuando un problema no te sale al primer intento? ¿Te frustrás? ¿Lo ves como un desafío? ¿Te entusiasma?
3. Durante la unidad que trabajamos hubo tres actividades grupales. ¿Qué te parecieron esas actividades? ¿Encontrás alguna ventaja en esta forma de trabajar en el aula?
4. ¿Cuál fue la clase que más te gustó? ¿Y la que menos? ¿Por qué?

Figura 2. Cuestionario abierto

La técnica de procesamiento para abordar los datos recolectados a través de estos instrumentos es el *análisis de contenido*.

### 3.5. Categorías de análisis

De acuerdo a los objetivos específicos planteados (O1, O2, O3), en la Figura 3 se presentan las categorías de análisis (C1, C2, C3) delimitadas, junto a las actividades que estructuran el análisis de resultados y las respectivas técnicas seleccionadas para llevar a cabo la recolección de datos.

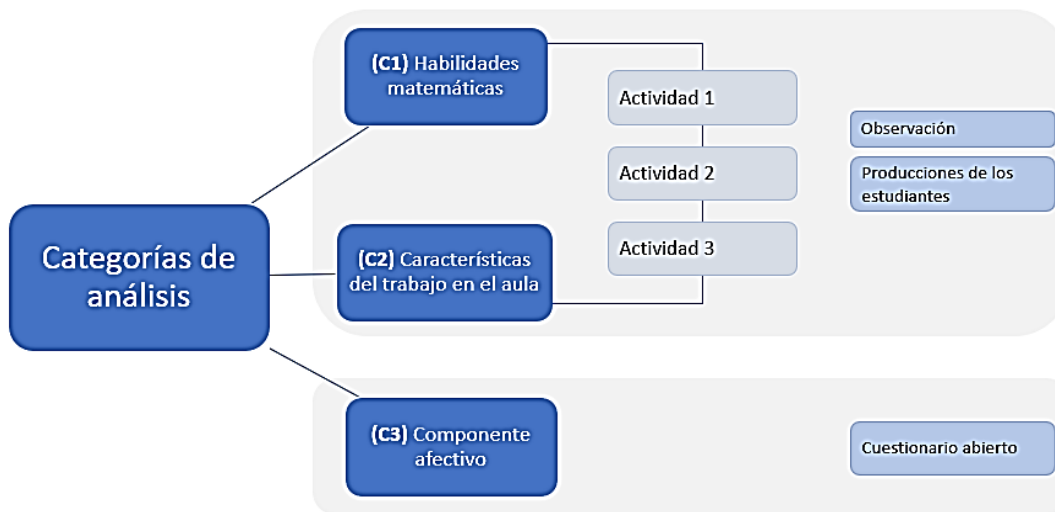


Figura 3. Categorías de análisis

## 4. Resultados

En lo que sigue, organizamos el procesamiento de la información recogida en la implementación de la propuesta de acuerdo a las categorías de análisis previamente desarrolladas. De aquí en adelante, para referirnos a cada grupo de estudiantes en el aula,

utilizamos la siguiente notación: MGN, donde M indica el número de clase (1, 2, 3) y N indica el número de grupo (la cantidad de grupos puede diferir entre una clase y otra). Por ejemplo, con 1G2 nos referimos al grupo 2 de la clase 1.

#### 4.1. Habilidades matemáticas

A partir del análisis documental de las producciones de los estudiantes, los relatos de implementación y registro anecdótico confeccionado en cada una de las actividades clave, identificamos elementos que podemos asociar a cada una de las subcategorías definidas en la presente categoría de análisis. Con ellos nos referimos a interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo apropiado, comunicar de manera oral y escrita, argumentar sobre la validez de los procesos o razonamientos y elaborar conclusiones. A continuación, se presentan tres subsecciones correspondientes a la implementación de cada una de las actividades seleccionadas.

##### 4.1.1. Introducción de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos

En esta primera jornada de implementación, se llevó a cabo la siguiente actividad en el aula. La misma tuvo por objetivo que los estudiantes, a partir de la construcción y medición de triángulos con regla y semicírculo, puedan conjeturar que la razón entre la medida del cateto opuesto a un ángulo dado y la hipotenusa, no depende del triángulo construido sino únicamente del ángulo en cuestión. La cantidad de grupos en esta oportunidad fueron nueve, de entre tres y cinco integrantes cada uno. La organización de los mismos en esta primera instancia quedó a cargo de los estudiantes.

---

1. Para cada ítem, dibujar con regla y semicírculo un triángulo rectángulo que tenga uno de sus ángulos agudos (llamémoslo  $\alpha$ ) de la siguiente medida:

a)  $30^\circ$

b)  $45^\circ$

c)  $60^\circ$

2. Medir los lados de cada triángulo construido y completar las primeras cuatro columnas:

| Ángulo $\alpha$ | Medida Cateto opuesto a $\alpha$ ( $CO_\alpha$ ) | Medida Cateto adyacente a $\alpha$ ( $CA_\alpha$ ) | Medida hipotenusa ( $H$ ) | $\frac{CO_\alpha}{H}$ |  |  |
|-----------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------|--|--|
| $30^\circ$      |                                                  |                                                    |                           |                       |  |  |
| $45^\circ$      |                                                  |                                                    |                           |                       |  |  |
| $60^\circ$      |                                                  |                                                    |                           |                       |  |  |

3. Comparar los datos obtenidos con el resto de los integrantes del grupo y comentar lo que observan. Escribir un párrafo narrando ese intercambio. (¿Todos sus triángulos tienen las mismas medidas? ¿Obtienen algún resultado en común, al menos de forma aproximada? ¿Qué ocurre?).

---

Respecto a la interpretación de la información, la totalidad de los grupos supo identificar los elementos que entraban en juego para encontrar similitudes en los resultados obtenidos de la medición y posterior cálculo del cociente.

| Ángulo $\alpha$ | Medida Cateto opuesto a $\alpha$ ( $CO_\alpha$ ) | Medida Cateto adyacente a $\alpha$ ( $CA_\alpha$ ) | Medida hipotenusa ( $H$ ) | $\frac{CO_\alpha}{H}$ | $\frac{CA_\alpha}{H}$ | $\frac{CO_\alpha}{CA_\alpha}$ |
|-----------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 30°             | 2 cm                                             | 3,5 cm                                             | 4 cm                      | 0,5 cm                | 0,875 cm              | 0,57 cm                       |
| Ángulo $\alpha$ | Medida Cateto opuesto a $\alpha$ ( $CO_\alpha$ ) | Medida Cateto adyacente a $\alpha$ ( $CA_\alpha$ ) | Medida hipotenusa ( $H$ ) | $\frac{CO_\alpha}{H}$ |                       |                               |
| 30°             | 2 cm                                             | 3,6 cm                                             | 4 cm                      | 0,5 cm                |                       |                               |
| Ángulo $\alpha$ | Medida Cateto opuesto a $\alpha$ ( $CO_\alpha$ ) | Medida Cateto adyacente a $\alpha$ ( $CA_\alpha$ ) | Medida hipotenusa ( $H$ ) | $\frac{CO_\alpha}{H}$ |                       |                               |
| 30°             | 1 cm                                             | 3,5 cm                                             | 4 cm                      | 0,5 cm                |                       |                               |

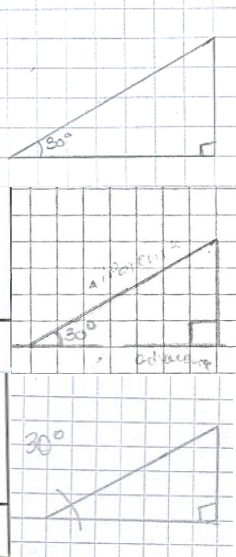


Figura 4. Construcciones y medidas del grupo 1G7

A la hora de establecer relaciones, se presentaron escenarios variados. Por un lado, algunos grupos se encontraron con la situación de que todos sus integrantes construyeron triángulos de dimensiones similares en algunos de los ítems, lo cual hizo difícil hallar regularidades en esa comparación de tablas que se llevó a cabo. Por ejemplo, la Figura 4 refleja este fenómeno a través de las producciones del grupo 1G7.

Y no fue hasta el intercambio con otros grupos aledaños que lograron ver claro el patrón de interés. Por el contrario, en otros casos, triángulos de dimensiones muy diferentes fueron clave para que los estudiantes descubrieran una relación de trasfondo. Por ejemplo, en el grupo 1G1, uno de los integrantes dibujó triángulos muy pequeños y sus mediciones fueron bastante precisas, como se observa en la Figura 5. Mientras la razón difería en dos centésimas con la de sus compañeros, los triángulos eran groseramente diferentes.

| Ángulo $\alpha$ | Medida Cateto opuesto a $\alpha$ ( $CO_\alpha$ ) | Medida Cateto adyacente a $\alpha$ ( $CA_\alpha$ ) | Medida hipotenusa ( $H$ ) | $\frac{CO_\alpha}{H}$ | $\frac{CA_\alpha}{H}$ | $\frac{CO_\alpha}{CA_\alpha}$ |
|-----------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 30°             | 1,2 cm                                           | 2 cm                                               | 2,5 cm                    | 0,48                  | 0,8                   |                               |
| 45°             | 1,5                                              | 1,5                                                | 2,2                       | 0,68                  | 0,68                  |                               |
| 60°             | 2,6                                              | 1,6                                                | 3 cm                      | 0,86                  | 0,53                  |                               |

Figura 5. Mediciones de una construcción distinguida, estudiante del grupo 1G1

En casos como este, los estudiantes lograron establecer las relaciones esperadas. Antes de pasar del trabajo en grupos reducidos al debate en el grupo-clase, los estudiantes plasmaron las diferentes cuestiones que surgieron del intercambio. A continuación, se muestran algunas de ellas donde se aprecian las diferentes formas de expresión a la hora de comunicar por escrito las ideas matemáticas. Las Figuras 6 y 7 son representativas de las producciones en el común de los grupos. Se dan los relatos en primera persona, con cierta informalidad, pero a su vez de una manera muy humana, incluso con la aparición de los integrantes en el mismo. Por su parte, la Figura 8 muestra la respuesta matemáticamente más precisa entre las registradas.

3) NO tienen las mismas medidas pero a un compás de 0,48 y por 0,47 por aproximación  $\frac{1}{2}$  a otro

Figura 6. Estudiante del grupo 1G6 nombra a sus compañeros

3. AL COMPARAR LOS DATOS DE CADA UNA VIMOS LAS SIGUIENTES COSAS  
 • SIMILITUDES EN LOS RESULTADOS  
 • SIMILITUDES EN LAS MEDIDAS (NOTAN NOTORIAS).  
 PERO NINGUNA LLEGO A LOS IGUALES, OBTENIENDO CASI IGUALES MEDIDAS, PERO LA MEDIDA DE  $60^\circ$   
 ESTAMOS A NADA DE IGUALIDAD.

Figura 7. Respuesta en formato de ítems, grupo 1G3

Por la diferencia de tamaños entre nuestros  $\Delta$  no coinciden las medidas, pero si los ángulos y los resultados de la cuenta  $\cos/H$ , es 0, en todos nuestros triángulos.

Figura 8. Respuesta matemáticamente más precisa, grupo 1G8

En el debate con el grupo clase, se dieron los siguientes intercambios, donde los grupos comunicaron oralmente sus trabajos.

8.20 h damos por finalizada la actividad de cada grupo. Propongo ahora que charlemos entre todos sobre las conclusiones obtenidas. Pregunto qué grupo quiere contar lo que pudo observar de las mediciones. Un estudiante de 1G2 es el primero en levantar la mano y narra que todas las medidas y también el cociente les quedaron parecidas. A eso, una estudiante del 1G5 dice que las medidas de los lados de sus triángulos les quedaron “algunos parecidos y otros no tanto” y que la división sí era parecida, pero en algunos.

Pregunto si alguien más quiere participar y desde 1G6 un estudiante cuenta que en su grupo obtuvieron 0,47, 0,48 y 0,49 para la división en el primer triángulo. Pregunto a otros grupos que no habían intervenido y comentan cuestiones similares. Todos coinciden en que los resultados de la división son parecidos, aunque hay algunos casos puntuales donde esto no se dio. En 1G9, una de las estudiantes dice que los triángulos construidos son distintos y que entre dos de ellas tienen resultados similares en la división, mientras que la tercera tiene algunos bastante distintos.

A la conjetura se arriba de forma conjunta, fruto de la puesta en común de todos los grupos reducidos.

Continúo: “puede ser que en algunos grupos tengan los triángulos muy parecidos... pero, ¿a qué se debe eso?”. Algunos me dicen que se debe a que el ángulo es el mismo. Sigo: “que el ángulo es el mismo no hay dudas, así tenían que construir sus triángulos, pero ¿eso implica que tengan que ser igual de grandes?”. A esto último me responden que no ... Por lo tanto, si los resultados en las primeras tres columnas son parecidos, es porque sus construcciones son parecidas. Pero, “¿qué es lo realmente interesante que pasa acá?”. Un estudiante de 1G5 responde “lo que pasa con la última columna”. Concluimos, entonces, que el valor  $\frac{CO_{\alpha}}{H}$  no depende del triángulo rectángulo construido, solo depende de “el ángulo” (lo mencionan ellos).

La argumentación sobre la validez de estas afirmaciones se basó en fundamentos empíricos. La comprobación de más de 30 casos en los cuales se abordó aproximadamente a las mismas conclusiones fue suficiente para que los estudiantes lo consideren una prueba convincente de tal afirmación. Si bien era posible brindar una demostración formal, los estudiantes de este curso no estudiaron semejanza de triángulos. Los efectos de la pandemia en los años anteriores han sido tales que mucho contenido de la asignatura debió ser recortado. Finalmente, la conclusión sobre la invarianza de la razón en cualquier triángulo rectángulo con el mismo ángulo considerado, derivó en la definición de las razones trigonométricas, momento de institucionalización de la clase.

#### **4.1.2. Aristarco de Samos y sus mediciones astronómicas**

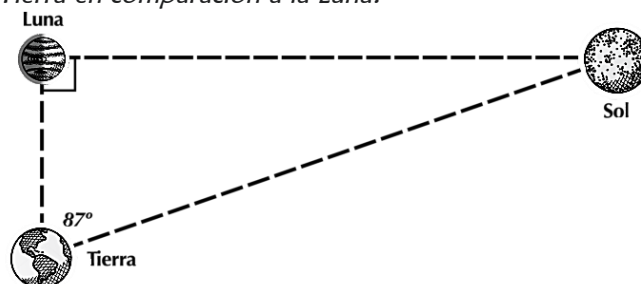
En esta ocasión, se implementó la siguiente actividad en el aula. La misma tuvo por objetivo conocer la historia del matemático griego y cómo él realizó grandes deducciones sobre la distancia entre los astros a partir de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Los estudiantes se enfrentan a la resolución de un problema no trivial, donde no es evidente el camino a seguir y todos afrontan un obstáculo inicial.

En esta actividad, trabajaron en un total de seis grupos de cinco estudiantes cada uno, con distribuciones diferentes a la instancia anterior, organizadas esta vez por el docente.

---

*Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.) fue un astrónomo y matemático griego, nacido en Samos, Grecia. Algunas de las cuestiones por las que se interesó fueron los cálculos de distancias astronómicas. En particular, estudió las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna ayudándose de las fases lunares y la trigonometría.*

*1. Aristarco, con los instrumentos de su época, estimó que cuando la Luna se encontraba en cuarto creciente, el ángulo que formaban Luna-Tierra-Sol era de  $87^\circ$ . Con este dato, ¿qué tanto más lejos se encuentra el Sol de la Tierra en comparación a la Luna?*



*2. Hoy en día, es sabido que el Sol se encuentra mucho más lejos que eso de la Luna. La distancia Tierra-Sol es de 150.000.000 km, mientras que la distancia Tierra-Luna es de 384.400 km.*

- a) ¿Qué tanto más lejos se encuentra el Sol de la Tierra en comparación a la Luna?*  
*b) ¿Cuánto mide realmente el ángulo que Aristarco intentó medir? ¿Por cuánto falló?*
- 

En esta oportunidad, la interpretación de la información en cada grupo no presentó dificultades. Los estudiantes reconocieron los datos con los que se contaba para la resolución del problema. Sin embargo, sí fue necesario hacer alguna aclaración sobre la pregunta del primer apartado, en el sentido de que “no se pide hallar la distancia de la Tierra a la Luna y de la Tierra al Sol, sino qué tanto más grande es una en comparación a la otra; si el doble, el triple...”.

A la hora de establecer relaciones, la mayor parte de los grupos (todos a excepción de 2G5) supieron identificar como elementos relevantes del triángulo para el problema al ángulo de  $87^\circ$ , al cateto *Tierra-Luna* y a la hipotenusa *Tierra-Sol*. Con ello, apareció también la razón coseno como herramienta que vincula a dichos elementos.

Ninguno de los grupos pudo resolver el problema de forma abstracta, poniendo  $\cos(87^\circ) =$

$$\frac{d_1}{d_2} \Rightarrow d_2 = 20d_1. \text{ Sin embargo, surgieron propuestas interesantes.}$$

El grupo 2G1 es el primero en mostrar buenos avances. En primer lugar, una de las estudiantes había propuesto medir los lados del triángulo para hacer el cociente, a lo cual sus compañeros le insistieron en que eso no servía porque el dibujo era simplemente un esquema. Descartada esa idea, intentan utilizar razones trigonométricas y un estudiante

me dice haber llegado al resultado “20 veces” con la calculadora aunque no recuerda bien qué hizo. Lo animo a que recuerde su proceso ya que puede que esté correcto. Otro caso interesante resulta del grupo 2G2, donde uno de los estudiantes, mientras sus compañeros probaban otras cosas, se encaminó en la construcción con semicírculo y regla de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de  $87^\circ$ . Tuvo que pegar dos hojas de la carpeta para lograrlo. Ese método le permitió estimar una respuesta de “casi 17 veces”. El grupo 2G6 hace algo distinto: asignan al cateto el valor 90 y determinan que la hipotenusa mide 1730. Me consultan cómo seguir. La elección del 90 parece haber sido un error derivado de la confusión entre medida de lados y ángulos. Sin embargo, les propongo que releen la consigna y vean si pueden responder algo a partir de esos números a los que llegaron.



Figura 9. Construcción del triángulo rectángulo con un ángulo de  $87^\circ$ , grupo 2G2

|                              |                       |
|------------------------------|-----------------------|
| $\cos(87) = \frac{90}{x}$    | EL SOL ESTA 20 VECES  |
| $0,052 = \frac{90}{x}$       | MAS LEJOS QUE LA LUNA |
| $0,052 \cdot x = 90 : 0,052$ |                       |
| $1 \cdot x = 1730$           |                       |

Figura 10. Resolución asignando el valor 90 al cateto adyacente, grupo 2G6

La comunicación escrita tuvo su lugar, aunque se limitó a responder las preguntas de cada apartado y exhibir el procedimiento que llevó a la resolución. En las Figuras 9 y 10, se presentan las resoluciones comentadas en el extracto de arriba.

Sí tuvo un papel más importante la comunicación oral. Los estudiantes grabaron audios de WhatsApp con el propósito de describir los intercambios producidos al interior de cada grupo, como así también las diferentes estrategias utilizadas, las ideas descartadas y los resultados obtenidos.

Bueno, nosotros empezamos primero midiendo los lados del triángulo. No le dimos atención a Lucio. Lucio había dicho de hacer otra cosa. Bueno, contamos los palitos de los lados y así no era. Alma hizo unas cuentas y le dio 2.1 y a mí me dio 20, que era el resultado correcto, pero no era la forma de llegar. Después seguimos probando, nos acercamos bastante. Le hicimos caso a Lucio. Lo que Lucio propuso no funcionó, pero era distinto a lo que hicimos al principio. Alma se puso a resolver algo con trigonometría y

llegamos al resultado. Después el segundo ejercicio se nos hizo más fácil, aunque tuvimos algún que otro error (Grupo 2G1).

Bueno, en mi grupo, cuando arrancamos, primero intentamos con razones trigonométricas. Probamos con razones trigonométricas inversas, o sea, con “shift” coseno. Probamos así dándole un montón de vueltas con eso, pero no salió. Después, intentamos por otro lado, con el teorema de Pitágoras. Tampoco pudimos porque no teníamos ningún dato. Volvimos a las razones trigonométricas. Ahí, a Martina se le ocurrió una idea que después el profe nos terminó de confirmar, que era usando el coseno. Pasamos a la segunda parte, Jere empezó a hacer 18000 cálculos que no llegaron a nada, fueron de prueba, cuando los terminó dijo “nada que ver lo que hice”. Yo no pude hacer demasiado, Juaní tampoco. Matí dijo que estuvo probando con una idea pero que no llegó a nada. Cuando otros grupos estaban terminando, nos dimos cuenta cómo hacer el ítem b y ya con el timbre el profe nos dio una mano para completar el ítem a (Grupo 2G4).

La argumentación sobre la validez de las estrategias utilizadas y las conclusiones tuvieron lugar en la clase siguiente y fueron socializadas en el grupo-clase. En esta ocasión, este momento tuvo un mayor protagonismo del docente, donde iba rescatando las resoluciones que surgieron de los propios grupos, como la de la Figura 9, y al mismo tiempo profundizó sobre aquella que se sugirió en la clase a través de la pista “pensar la distancia entre la Tierra y la Luna como un viaje”. Las conclusiones giraron en torno a remarcar lo destacable de este razonamiento llevado a cabo por el hombre en el siglo III a.C., mediante matemáticas básicas y actualmente al alcance de cualquier estudiante del Nivel Secundario.

#### 4.1.3. Razones trigonométricas en ángulos complementarios

En esta tercera actividad seleccionada, los estudiantes realizan cálculos a partir de un material didáctico para completar tablas de datos, descubrir patrones, conjeturar y finalmente demostrar la propiedad de las razones trigonométricas seno y coseno en los ángulos complementarios. La cantidad de grupos de trabajo fue de seis, con una cantidad de integrantes que varía entre cuatro y siete. Al llegar al aula, se encontraban así dispuestos dado que trabajaron de esa manera en la materia anterior. Se decidió mantener esas configuraciones.

- 
1. a) *Determinar las medidas de los ángulos desconocidos.*  
 b) *¿Qué relación verifican los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  en cada triángulo?*
  2. a) *Calcular  $\text{sen}(\alpha)$ ,  $\text{sen}(\beta)$ ,  $\text{cos}(\alpha)$  y  $\text{cos}(\beta)$  para cada triángulo y completar la siguiente tabla:*

|  |          |         |                      |                     |                      |                     |
|--|----------|---------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
|  | $\alpha$ | $\beta$ | $\text{sen}(\alpha)$ | $\text{sen}(\beta)$ | $\text{cos}(\alpha)$ | $\text{cos}(\beta)$ |
|--|----------|---------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|

|             |  |  |  |  |  |  |
|-------------|--|--|--|--|--|--|
| Triángulo 1 |  |  |  |  |  |  |
| Triángulo 2 |  |  |  |  |  |  |
| Triángulo 3 |  |  |  |  |  |  |

b) Comentar con los demás integrantes del grupo:

*¿Qué patrón o regularidad aparece en los datos de la tabla? ¿Sospechan de alguna propiedad que pueda ser cierta? Escribirla.*

3. *Mostrar por qué eso ocurre.*

La totalidad de los grupos supo interpretar la información de la actividad. A esta altura de la unidad, existe ya un cierto dominio de los estudiantes sobre los elementos de un triángulo rectángulo y sus características, como así también de las razones trigonométricas. Una única cuestión que presentó dificultades en algunos de los grupos fue interpretar a qué se refería la consiga cuando expresa “relación que verifican los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ”. De todos modos, una simple reformulación como “¿qué cumplen los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ?” sirvió para aclarar el enunciado.

Al momento de establecer relaciones, todos los grupos supieron identificar una regularidad en los datos de su tabla. Para algunos, eso fue suficiente para asumir que siempre se mantendría al tratar con ángulos complementarios. En otros casos, indagaron algo más a partir de probar si funcionaba también con otros ángulos extra.

Me acerco al grupo 3G1 y uno de los estudiantes se encuentra haciendo cuentas con la calculadora. Le pregunto cómo vienen y me dice que está probando otros ángulos además de los que tenían sus triángulos. Me muestra que, cuando calcula  $\text{sen}(45^\circ)$  obtiene el mismo resultado que cuando hace  $\text{cos}(45^\circ)$  (caso diferente a los de su tabla). Lo felicito por la búsqueda de más casos y les pregunto a los cuatro integrantes cómo escribirían esa propiedad que sospechan que es cierta.

En general, los grupos reconocen los elementos en juego para conjeturar la propiedad, pero encuentran dificultades para articularlos en una implicancia lógica. Por ejemplo, responden oralmente a la pregunta con frases como “ $\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(\beta)$  y  $\alpha$  y  $\beta$  suman  $90^\circ$ ”. Al pasar a la escritura, los grupos 3G2 y 3G6 enuncian la proposición recíproca, que también es cierta al trabajar con ángulos agudos, aunque no es lo que se esperaba. En las Figuras 11 y 12, se ven ejemplos de comunicación escrita representativos de la jornada.

2b) Cuando el  $\text{Sen}(\alpha)$  da lo mismo que el  $\text{Cos}(\beta)$  y el  $\text{Sen}(\beta)$  da lo mismo que el  $\text{Cos}(\alpha)$ . y son triángulos rectángulos es porque son complementarios.

Figura 1.11. Proposición recíproca, enunciada por 3G2

2b) Aparece el patrón que el seno de un ángulo es igual al coseno de el otro ángulo y respectivamente con el otro ángulo. Cuando la suma de los ángulos da  $90^\circ$   
 $\cos(\alpha) = \text{Sen}(\beta)$        $\cos(\beta) = \text{Sen}(\alpha)$

Figura 1.12. Conjetura enunciada por 3G1

En general, la argumentación sobre la validez de estas proposiciones presentó sus dificultades en un primer momento de trabajo al interior de cada grupo. Los estudiantes no están acostumbrados a trabajar demostraciones en el aula y no ven tan claro cómo podría probarse formalmente que algo así es cierto. Sin embargo, hay intentos de validación empírica, como se comentó antes respecto al grupo 3G1. Por otro lado, un estudiante del grupo 3G3 logró dar con una demostración de la propiedad. En un margen de la fotocopia, a modo de borrador, esbozó su razonamiento (Figura 13).

datos de la tabla? ¿Sospechan de escribirla.  $\text{Sen} \alpha = \frac{1}{3}$      $\text{Sen} \beta = \frac{\text{CA}}{H}$   
 $\cos \beta = \frac{1}{3}$      $\cos \alpha = \frac{\text{CA}}{H}$

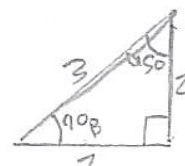


Figura 13. Razonamiento en el margen de la fotocopia, grupo 3G3

El estudiante asigna los valores 1, 2 y 3 a los lados de un triángulo rectángulo (no es posible pero no importa) y, a partir de las definiciones de seno y coseno, prueba la propiedad conjeturada, como se ve en la Figura 13. Lo único que separa su escrito de una demostración formal son los valores numéricos de las medidas de los lados en lugar de cantidades abstractas  $a$ ,  $b$  y  $c$ . No obstante, la idea de abstracción está presente, ya que la asignación fue completamente arbitraria. Esta producción es la mayor aproximación a una demostración matemática que apareció en la implementación de la unidad didáctica. Finalmente, a modo de cierre de la jornada, la demostración formal y conclusión sobre la validez de la propiedad fue llevada a cabo en el pizarrón para todo el grupo-clase.

## **4.2. Características del trabajo en el aula**

A través de los relatos de implementación/ registro anecdótico de las actividades clave, caracterizamos el trabajo en el aula a través de la búsqueda de puntos de similitud y diferencia con el ideal de micro-sociedad científica al que se aspira como modelo. Las producciones de los estudiantes analizadas en la subsección 4.1 también serán material para interpretar la proximidad de la implementación a nuestro ideal. A continuación, se presentan tres subsecciones correspondientes a la implementación de cada una de las actividades seleccionadas.

### **4.2.1. Introducción de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos**

Como se mencionó en la sección 4.1.1, la cantidad de grupos de trabajo fueron 9, de entre 3 y 5 integrantes cada uno, y la organización quedó a cargo de los estudiantes. De ese modo, se ubicaron de acuerdo a la disposición de la Figura 14.

Durante la fase de acción, los grupos trabajaron en la construcción de triángulos y mediciones con semicírculos y reglas. Este momento de exploración se caracterizó por el trabajo de cada integrante en sus hojas. La utilización de materiales concretos, que no usaban desde la escuela primaria, despertó interés en los estudiantes, que se encontraban muy compenetrados con la actividad.

En la fase de formulación, cuando los estudiantes debieron comunicarse entre sí la información de cada uno y buscar regularidades en sus tablas, el componente social cobró una gran importancia. En primer lugar, no hubiera sido posible que los grupos noten la invarianza sin un previo trabajo individual de cada estudiante durante el momento exploratorio que pueda aportar información a la puesta en común. Por otro lado, se presentaron diversas situaciones como se detallaron en la sección anterior; por ejemplo, grupos donde las particularidades de la construcción de un integrante despertaron interés en los demás, o grupos donde construcciones muy similares obstaculizaron la visualización del fenómeno. En otros casos, como es el de 1G9, tres integrantes contaban con triángulos de diferentes dimensiones entre sí, dos de ellos con valores muy próximos en el cálculo del cociente y el tercero con valores muy distintos. Eso llevó a que sospechen, se cuestionen las construcciones de la última y vuelvan sobre algunos errores de su medición. También hubo casos donde no lograron identificar la regularidad, ya sea por dibujos imprecisos o falta de ideas sobre qué buscar.

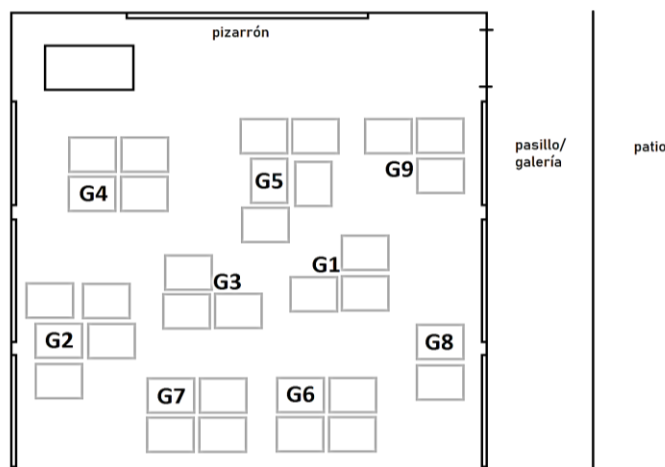


*Figura 14. Disposición de los grupos organizados por los estudiantes en el aula*

Esta puesta en común, primero en los grupos reducidos y luego en el grupo-clase, guiada por el docente, pero con el protagonismo de los estudiantes, fue el momento más rico y próximo al ideal de micro-sociedad científica. Los grupos comunicaron oralmente sus ideas a los demás y notaron que, en general, todos contaban con la misma información: medidas distintas, razón aproximadamente igual. Como se expuso en el fragmento de la sección anterior, la participación fue circulante y buena parte de los grupos se mostraron comprometidos con la actividad.

El momento de la validación tuvo lugar en ese contexto de socialización oral y se fundamentó en la base empírica. Como se mencionó durante la sección 2.2, de acuerdo a los aportes de Balacheff (2000; citado en Mántica y Carbó, 2016), entendemos que una prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Así, la prueba empírica fue la prueba aceptada por el curso en ese momento y dio lugar a la institucionalización. En otras instancias, veremos si es posible dar un paso más hacia la construcción de una demostración matemática en el aula.

#### **4.2.2. Aristarco de Samos y sus mediciones astronómicas**

En la Figura 15 se observa la disposición de los alumnos en el aula. En esta ocasión, los grupos fueron seis, de cinco integrantes cada uno de ellos. La disposición en el aula y la conformación de los mismos fue propuesta por el docente, bajo criterios de heterogeneidad en cuanto al nivel de los estudiantes.

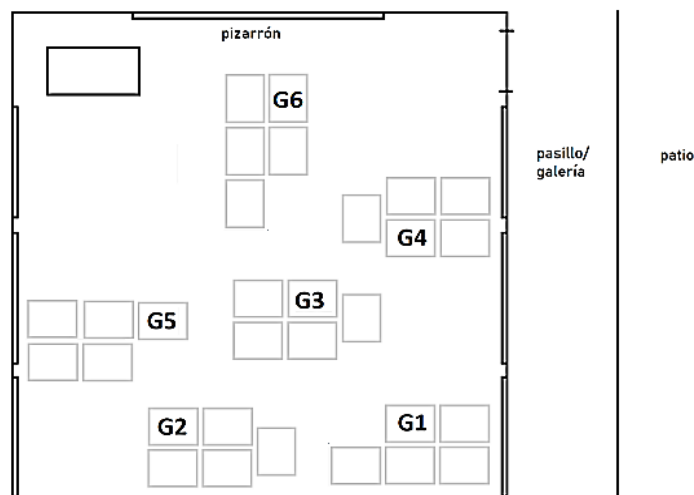


*Figura 15. Disposición de los grupos organizados por el docente en el aula*

En esta oportunidad, los estudiantes trabajaron en torno a la Resolución de Problemas. Una introducción de preguntas motivadoras relacionadas con los astros captó el interés de los alumnos, que se mostraron comprometidos con la actividad: “¿Qué está más cerca? ¿El Sol o la Luna? ¿Cuál es más grande? ¿Qué tanto más lejos está el Sol de la Tierra en comparación a la Luna?”. Situados en el siglo III a.C., participaron con respuestas a los interrogantes a través de fenómenos como el eclipse solar. Introducidos todos los elementos, comenzamos con la actividad.

Un primer momento se caracterizó por el diálogo al interior de cada grupo sobre qué hacer. En cuestión de minutos reconocieron la falta de datos para resolver el problema de forma análoga a los ejercicios de la semana anterior; aunque aquí no se conoce la medida de ningún lado del triángulo. Todos los grupos se encontraron con ese obstáculo; el problema no es trivial.

Allí cobró importancia el trabajo en sociedad. En cuatro de los seis grupos, apareció una idea para comenzar a intentar una resolución, independientemente de si esa idea condujo luego a buen puerto o no. Bastó con que a un integrante se le ocurriera algo para que el grupo comience a producir. Como se comentó en la sección anterior, el grupo 2G1 reconoció rápidamente que debían usar el coseno de  $87^\circ$ , que estimaron en 0,05. Mediante cuentas en la calculadora, uno de los estudiantes llegó al resultado correcto, aunque no recordaba bien cómo. Cuando les dije que estaban bien encaminados, intentaron recuperar esas cuentas perdidas. En el grupo 2G2, pegaron dos hojas para construir un triángulo tal que su ángulo agudo mida realmente  $87^\circ$  y así hacer las mediciones. El grupo 2G6 asignó por error un valor numérico al cateto y con ello hallaron la hipotenusa; sin querer, determinaron datos que

fueron de utilidad para resolver el problema. El grupo 2G4, luego de intentar múltiples caminos, incluso con el teorema de Pitágoras, se valieron de una pista otorgada al pasar unos buenos minutos: “pensar en la distancia Tierra-Luna como un viaje”.

En esos grupos, se logró una buena aproximación al modelo de micro-sociedad científica, especialmente porque no había un camino obvio para resolver el problema y adoptaron el desafío, a partir de lo cual fueron intentando dar respuesta por diferentes caminos. Los otros dos grupos, quizás por no contar aún con un fuerte dominio de la trigonometría que se ha ido trabajando en clases anteriores, no pudieron desplegar pasos firmes sin las pistas. Estos aspectos de cada grupo ante la Resolución de Problemas serán de interés a la hora de analizar los resultados desde la categoría de análisis 3.

#### **4.2.3. Razones trigonométricas en ángulos complementarios**

Como se comentó en el subapartado 4.1.3, los estudiantes trabajaron distribuidos en seis grupos de entre cuatro y siete integrantes cada uno. La configuración y distribución de los mismos en el aula fue la misma que utilizaron en la materia anterior y se observa en la Figura 16. Se tomó la decisión de mantener dichas disposiciones. Al parecer, armaron los grupos ellos mismos, pero con ciertas intervenciones del docente a cargo en aquel momento.

En la fase de acción, el trabajo de los estudiantes consistió en hallar medidas de ángulos desconocidos y calcular razones trigonométricas de los mismos. Cada grupo contaba con tres triángulos y todos los integrantes tenían que completar tablas de datos de forma individual. Al interior de cada grupo, comparaban resultados obtenidos para corroborar los cálculos y volver sobre errores en caso de ser necesario.

La fase de formulación presentó una diversidad de escenarios. Si bien todos los grupos notaron la regularidad entre los datos de sus tablas, enunciar una propiedad no fue algo inmediato. La manipulación de proposiciones lógicas no es una cuestión habitual en el día a día de los estudiantes. Por ello, necesitaron de ayuda para comprender lo que se esperaba en aquella consigna.

Al notar esta dificultad, traigo el recuerdo para todo el curso de cuando hablamos acerca de “qué es un teorema”. Algunos estudiantes lo recuerdan y responden que “un teorema es una verdad matemática”. Propongo, entonces, que piensen de ese mismo modo esta actividad; busquemos enunciar una verdad matemática. Menciono el teorema de Pitágoras y la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como ejemplos y los enuncio acentuando verbalmente su estructura: “si pasa..., entonces pasa...”. A partir de allí, la mayor parte de los grupos logra avanzar.

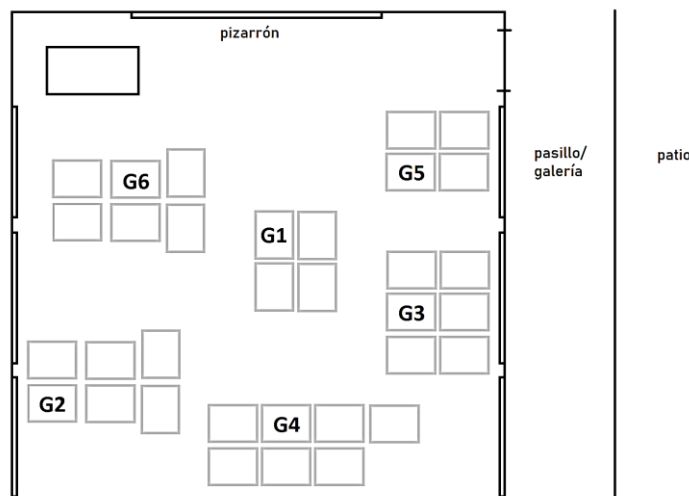


*Figura 16. Disposición de los grupos mantenida desde la materia anterior*

En el momento de la validación, a diferencia de lo ocurrido en la primera actividad seleccionada, hubo intentos de pruebas formales, además de aquellas del tipo empírico, también presentes en esta oportunidad. Al interior de un mismo grupo, mientras algunos integrantes se convencían de la veracidad de la conjetura por la validez de muchos casos particulares, otro integrante observaba que eso no es suficiente e intentaba un razonamiento como el que se mostró en la Figura 13.

Finalmente, la institucionalización tuvo lugar en un clima un poco alborotado, por estar próxima la finalización del día escolar. Sin embargo, en ese momento se pasó del trabajo al interior de los grupos reducidos, para poner en común los resultados en el grupo-clase. Guiados por el docente y con participación activa de los grupos 3G1, 3G3 y 3G6, se concluye la validez de la propiedad y se da la demostración formal de la misma.

### **4.3. Componente afectivo**

A continuación, desglosamos las respuestas de los estudiantes al cuestionario abierto, con foco en aquellas cuestiones relacionadas a las creencias, actitudes y emociones para con la Matemática. Compartimos algunas respuestas que consideramos de especial interés por su contenido y presentamos aspectos comunes reflejados en varios cuestionarios que ameritan una reflexión al respecto.

Al indagar sobre la relación de los estudiantes con la Matemática, buena parte de ellos la describen como una materia complicada, que requiere de mucha atención y les suele generar estrés. Los sentimientos que más aparecen involucrados son preocupación, frustración y desgano. Aun así, reconocen la importancia de estudiar Matemática en la escuela.

Sin embargo, no todos los comentarios son negativos, hay quienes también describen la Matemática como su materia preferida y la caracterizan como entretenida y motivadora. En particular, destacan el carácter práctico como algo positivo; disfrutan del hacer Matemática por sobre el aspecto teórico.

Si hablamos de Resolución de Problemas, a la hora de enfrentarse a un problema y encontrar un obstáculo, hay quienes lo ven como un desafío que disfrutan asumir y les genera intriga, como se aprecia en las respuestas de las Figuras 18 y 19.

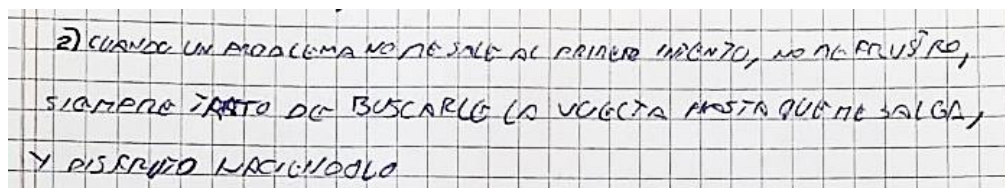


Figura 18. Estudiante disfruta en la Resolución de Problemas

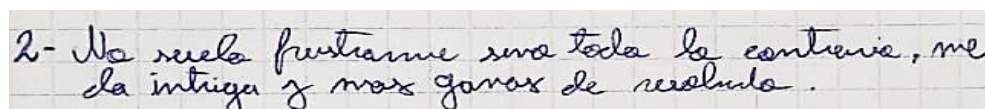


Figura 19. Sentimientos de intriga en la Resolución de Problemas

No obstante, gran parte de los encuestados mencionan aspectos negativos. Aparecen, entre ellos, la frustración, la desesperación y el agobio. El siguiente fragmento corresponde al registro anecdótico de la implementación de la segunda actividad seleccionada y refleja la frustración de la que hablan.

A partir de allí, todos los grupos, más o menos rápido, completan la primera parte, a excepción del grupo 2G5. En este grupo noto que aún no hay un dominio fortalecido de las razones trigonométricas y cuesta el uso de la calculadora. Una estudiante del mismo me dice con cierta desmotivación que “no les sale nada”. Con mi ayuda, completan la primera parte.

Las Figuras 20 y 21, a continuación, dan cuenta de estos aspectos que mencionamos antes y son representativas de buena parte del curso.

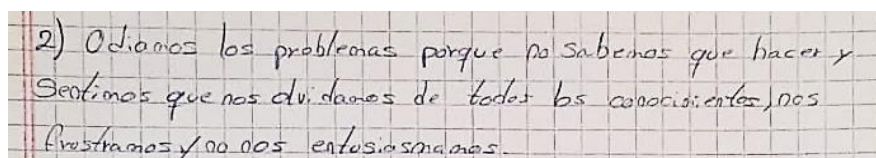


Figura 20. Estudiantes odian resolver problemas

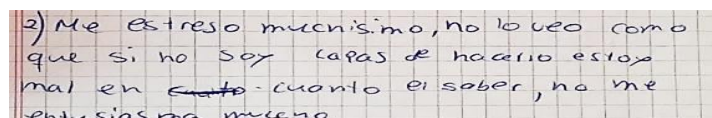


*Figura 21. Estudiante ve el obstáculo como un indicio de mal desempeño*

Estas respuestas merecen especial atención, pues muestran uno de los motivos por los cuales la Resolución de Problemas despierta en los alumnos los sentimientos negativos mencionados. El trabajo con ejercicios, que para su resolución solo requieren de la aplicación de un algoritmo conocido, mantiene a los estudiantes en cierta “zona de confort”. Una actividad diferente, que requiere de otro tipo de razonamientos, rompe con esa comodidad y sucede que el alumno interpreta los obstáculos como falencias propias, que se traducen en inseguridades.

En esa misma línea, encontraron el trabajo en grupos como una modalidad enriquecedora, donde pueden hablar con otros de las cosas que no entienden y complementarse entre sí. Cuando se les preguntó a los estudiantes cómo reaccionan cuando no logran resolver un problema, muchos de aquellos que hablaron de frustración y estrés, mencionaron también que ante eso suelen acudir a sus compañeros para obtener otras miradas.

## **5. Conclusiones**

En esta última sección, a partir de los resultados obtenidos en la implementación y posterior análisis de la propuesta, se presentan las conclusiones. En primer lugar, se da respuesta a los interrogantes que motivaron el trabajo y estructuraron el desarrollo del mismo. Luego, se establecen vínculos con aquellas investigaciones reportadas en la sección 1.4. Finalmente, se reflexiona sobre los aportes del proyecto a la comunidad y se mencionan posibles líneas de acción a futuro, derivadas de la emergencia de nuevas inquietudes impulsadas por este proyecto.

### **5.1. Respuesta a los interrogantes**

A continuación, damos respuesta a los interrogantes planteados en la sección 1.2 a partir de los resultados del trabajo.

*(I1) ¿Cuáles de las habilidades mencionadas por el DCJ se ven activadas durante el proceso y cuáles no?*

Como vimos en los resultados, en mayor o menor medida, todas estas habilidades entraron en juego al trabajar con una propuesta como la diseñada. La interpretación de la información y el establecimiento de relaciones se vieron potenciadas en la diversidad de producciones e ideas de los estudiantes al interior de los grupos, como se aprecia por ejemplo en la Figura 5, sobre la primera actividad seleccionada.

La comunicación oral de las ideas matemáticas predominó en momentos de puesta en común; fragmentos de la primera actividad seleccionada dan cuenta del intercambio de pareceres y la participación circulante que caracterizaron esos tramos de la clase dando lugar a las conclusiones e institucionalización. En la comunicación escrita, si bien supieron dar cuenta de sus ideas, se vieron más imprecisiones, posiblemente derivadas de la escasa manipulación del lenguaje matemático.

Por último, la elaboración de conjeturas y argumentación sobre su validez mostró una variedad de escenarios. En general, pudo apreciarse que la falta de herramientas en el terreno de la lógica, obstaculizó la articulación de las ideas matemáticas en la forma de una proposición. Por otro lado, en la validación, si bien prevalecieron los argumentos del tipo empírico, se logró también una muy buena aproximación a la demostración matemática formal, como se vio en la Figura 13.

*(12) ¿Cómo se desarrolla ese trabajo a la manera de micro-sociedad científica a lo largo de la implementación?*

A lo largo de la unidad didáctica, los estudiantes trabajaron en diferentes grupos, tanto por la cantidad como por los integrantes que los conformaban, algunas veces elegidos por ellos mismos, otras veces no. Durante el desarrollo de las actividades seleccionadas, los estudiantes se encontraron con problemas o situaciones cuya resolución no era inmediata. Ante esto, sumado a la imposibilidad de resolver de forma individual actividades como la primera, el trabajo colectivo con los demás integrantes se volvió vital, a través de una modalidad distinta a aquella de “compartir espacio físico y comparar resultados”. En ese intercambio con el otro, surgieron aportes significativos de estudiantes que resultaron clave para que un grupo entero se percate de un comportamiento, como en el caso desarrollado en torno a la Figura 5. Por el contrario, una monotonía en las producciones de un grupo llevó a obnubilar a los estudiantes y necesitar de más casos para descubrir ciertas invariantes (Figura 4).

En la Resolución de Problemas, ocurrencias originales durante el desarrollo de la segunda actividad seleccionada permitieron dentro de un grupo contar con diferentes maneras de resolver un problema y cuestionar la validez de cada método, como se vio en la Figura 9. En contrapartida, y como sucede en la comunidad matemática, otros grupos no lograron resolver el problema; aun así, supieron dar cuenta de las ideas que intentaron utilizar y descartaron en el camino (audio grupo 2G4).

Finalmente, en momentos de probar la veracidad de una afirmación, abundaron los argumentos empíricos hacia el interior de los grupos. En algunos de ellos la magnitud de la

evidencia fue, incluso, mediante una ampliación por fuera de la consigna. No obstante, un estudiante reconoció la necesidad de dar otro tipo de justificación y logró esbozar una prueba matemática (Figura 13). Una prueba consiste en una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. En ese grupo, y luego en la puesta en común guiada por el docente, nació un cuestionamiento a las explicaciones del primer tipo.

*(13) En términos del dominio afectivo en la Resolución de Problemas, ¿cómo responde el estudiante del Nivel Secundario a una propuesta del estilo?*

Cuando el estudiante se enfrenta a una situación o problema cuya resolución no es inmediata, hay quienes encuentran en ese obstáculo un desafío que capta su atención y los motiva como así también quienes se frustran e interpretan esa dificultad como falencia propia, lo cual les genera estrés y preocupación. Los estudiantes acostumbran a trabajar con ejercicios que requieren de la aplicación de un algoritmo conocido para su resolución. En ese sentido, las actividades seleccionadas fueron distintivas y ellos supieron reconocerlo.

La mayor parte de los estudiantes encontró el trabajo en grupos como una modalidad enriquecedora, donde pueden hablar con otros de las cosas que no entienden y complementarse entre sí. Al preguntarles cómo reaccionan cuando no logran resolver un problema, muchos de aquellos que hablaron de frustración y estrés, mencionaron también que ante eso suelen acudir a sus compañeros para obtener otra mirada. Esa es, naturalmente, la manera en que trabaja una comunidad científica.

Cuando se preguntó a los estudiantes por la clase que más les gustó, todas las respuestas giraron en torno a las tres actividades seleccionadas, especialmente a la segunda de ellas. La Resolución de Problemas movió a los estudiantes de su zona de comodidad y el trabajo en interacción con otros se volvió fundamental para poder llevar a cabo las actividades.

## **5.2. Vinculación con otras investigaciones**

En esta subsección, relacionamos los resultados obtenidos con aquellos de los trabajos reportados en el apartado 1.4 sobre antecedentes.

Radford (2023) comenta que la cercanía espacial no es un criterio suficiente para caracterizar el aprendizaje colectivo. Desde su punto de vista, lo que reviste importancia es la idea de la actividad en la que dicho aprendizaje ocurre. Destaca dos condiciones vitales en ese sentido. Primero, que la actividad esté direccionada hacia la satisfacción de una necesidad colectiva. Segundo, que la interacción entre estudiantes y profesores se desarrolle en el marco de una ética comunitaria caracterizada por el compromiso, el cuidado del otro y la responsabilidad. Desde nuestro lugar, coincidimos con esta mirada. El diseño de las actividades requirió de una

contextualización y personalización de los contenidos para que los estudiantes repliquen la actividad científica y hagan el camino inverso. Es decir, descontextualicen y despersonalicen el conocimiento. En las actividades seleccionadas, especialmente en las dos primeras, se alcanzó un alto grado de compromiso del curso para con el problema. Allí se logró generar esa necesidad colectiva de la que Radford (2003) habla, los grupos hicieron suya la problemática y realmente se tradujo en buenos resultados.

Por otro lado, la implementación llevada a cabo por Vicuña Valdés (2016) nos permite establecer algunos paralelismos y diferencias. En su experiencia, el momento de validación se caracterizó por el desconcierto sobre cómo proceder debido, en parte, a la falta de costumbre de los estudiantes a trabajar en ese tipo de actividades. Allí, el componente afectivo jugó su rol en el desarrollo de la propuesta. Menciona que el docente fue quien debió asumir el protagonismo en ese momento para completar la actividad y luego pasar a la institucionalización, en un clima de bullicio y con poco tiempo disponible. En nuestro caso, es cierto que la validación fue el momento de las clases que más obstáculos presentó. Los estudiantes no habían tenido experiencias anteriores con demostraciones y ese primer instante de incertidumbre también apareció. Sin embargo, el trabajo en grupos permitió que ocurrencias individuales afloraran y den lugar a pseudo demostraciones, generalmente del tipo empíricas, pero que permitieron a los grupos argumentar sobre la validez de sus afirmaciones. La validación e institucionalización tuvieron mayor protagonismo del docente en comparación a otros momentos, pero siempre a partir de los aportes de los estudiantes.

Finalmente, con relación al trabajo de Mántica y Carbó (2016), las autoras destacan que los grupos siempre intentan dar una explicación de lo que afirman, aunque no se valgan para ello de las propiedades con las que cuentan. Mencionan también que la interacción con los demás estudiantes permite modificar el tipo de validación que se realiza y eso, en general, conlleva un avance en el tipo de prueba. Si bien nuestro trabajo no se centra exclusivamente en estudiar los procesos de validación, notamos que en la última de las actividades seleccionadas, la situación recién descrita se dio al interior de uno de los grupos, como desarrollamos en la sección 4.1.3 en torno a la Figura 13. El paso de una prueba empírica a una prueba formal reconociendo a la primera como insuficiente para justificar la validez de una proposición es un proceso que escapa a los objetivos de nuestro proyecto pero que, sin dudas, forma parte del quehacer matemático en sociedad.

### **5.3. Compromiso social universitario**

Cuando se habla de innovación educativa, se hace referencia a un cambio con mejora, que busca la transformación de una situación original de partida en una situación diferente, cuyos efectos se perciben, generalmente, a largo plazo. Los motivos por los cuales una innovación se lleva a cabo pueden ser la insatisfacción con la situación original, la persecución de objetivos para el beneficio de la comunidad educativa, como así también la exigencia de ejecutar una serie de modificaciones para responder a una autoridad competente superior.

En ese sentido, este proyecto resulta innovador ya que atiende a la efectiva implementación en el aula de una modalidad de trabajo que tiene un fuerte sustento teórico y que es la manera en que los actuales diseños curriculares plantean la enseñanza de la Matemática. Nosotros, autores del proyecto, tenemos la gran convicción de que esa línea de trabajo resulta acertada y puede repercutir favorablemente en el aprendizaje de los estudiantes. El diseño, planificación e implementación de una unidad didáctica basada en el constructo teórico de micro-sociedad científica permitió idear e introducir durante un período de tiempo determinado, una modificación en la enseñanza de la Matemática en un curso concreto de una escuela secundaria de la ciudad de Rosario.

Más allá de los objetivos propios del trabajo, hay una misión subyacente sobre la cual se monta todo este escrito: dar nuestro aporte a la comunidad. Todos aquellos que conformamos la Universidad pública y en particular, este Profesorado, nos sentimos interpelados por las realidades que atraviesa el sistema educativo y deseamos, desde nuestro lugar, transformar la enseñanza de la Matemática. Es por todo esto que el presente proyecto se constituye en un humilde aporte a la sociedad general.

### **5.4. Posibles nuevas líneas de acción**

Como se mencionó a lo largo del apartado 5.1, hubo una buena aceptación por parte del estudiantado y las producciones que fueron objeto de análisis también mostraron buenos resultados. Sin embargo, como es de esperar, también hay cuestiones por mejorar. En nuestra experiencia, los estudiantes de ese curso no acostumbraban a trabajar en Resolución de Problemas y muchos de ellos, ante la imposibilidad de resolver un problema de forma inmediata, se frustraron. Más aun, asimilaron esas dificultades como debilidades propias que acabaron por generarles inseguridades sobre sus conocimientos, como supieron mencionar en los cuestionarios. Esto último abre un panorama para reflexionar sobre cómo atender a estos asuntos.

Otra cuestión a pensar en el futuro es aquello relativo a las configuraciones de los grupos a

la hora de trabajar en esta modalidad. A lo largo de la implementación, se dieron diferentes distribuciones, a veces organizadas por el docente y otras por los alumnos. Cuando son los estudiantes quienes deciden, el criterio de organización se basa en los lazos afectivos. Cuando fue el docente quien decidió, se buscó la heterogeneidad, tanto en un nivel social como intelectual. Resulta interesante pensar qué ventajas y desventajas acarrea cada criterio de organización y qué es lo más favorable en términos de aprendizajes significativos de los estudiantes.

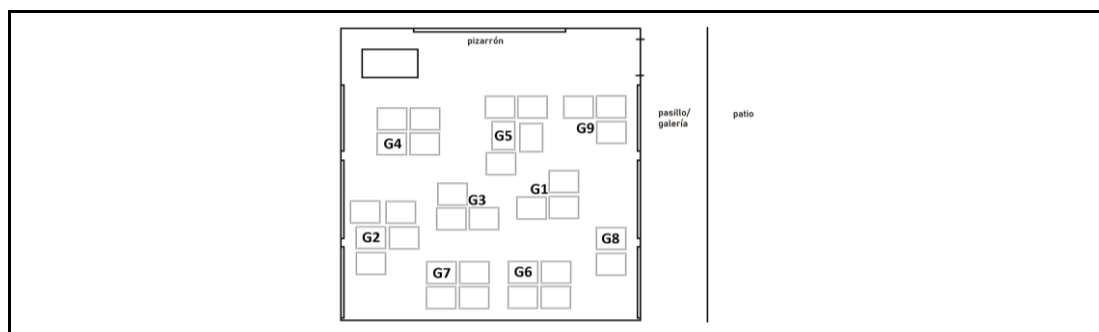
Finalmente, una cuestión que amerita seguir trabajando es la producción de demostraciones matemáticas en el aula. Como hemos visto, los argumentos empíricos prevalecieron por sobre otro tipo de razonamientos a la hora de validar una proposición. No obstante, hacia el final de la última actividad seleccionada, apareció una prueba más formal y próxima a lo que entendemos hoy por demostración matemática. El tiempo no fue suficiente como para adentrarse en ello, pero se generaron con bastante naturalidad en el aula dos diferentes concepciones de pruebas matemáticas. Es posible material para futuros trabajos, investigar sobre los procesos de validación matemática en el Nivel Secundario.

## Anexo

### *Relatos de observación*

Día 3 - Martes 26 de septiembre. Horario: 7.30 - 8.50 h Cantidad de alumnos: 33

7.30 h ingresamos al aula. Comento que en el día de hoy trabajaremos en grupo y propongo que conformen disposiciones de cuatro o cinco compañeros; en lo posible, con quienes se encuentran en su proximidad. Demoran unos cinco minutos en ordenarse. Intervine unificando algunos grupos pequeños de dos integrantes e incorporando a dos estudiantes que habían quedado solas. De ese modo, quedaron dispuestos de la siguiente manera:



Una vez acomodados, reparto una fotocopia a cada alumno y explico la primera consigna en general. Aclaro que todos tienen que trabajar en sus carpetas, a continuación de lo último que hicimos y que, al final de la clase, se les solicitará que entreguen sus producciones. En la explicación de la primera consigna, repaso en el pizarrón con el semicírculo de madera, cómo construir un triángulo rectángulo a partir de un ángulo agudo dado (tema tratado en la clase anterior). Indico que comiencen a trabajar. Esta primera actividad fue resuelta rápidamente. El dominio del semicírculo ganado en las actividades de la semana anterior y la similitud de estas construcciones con aquellas fueron clave en ese sentido. Los grupos 1G1 y 1G9 llevan un ritmo más lento. En particular, dos integrantes de los tres que conforman 1G1, no trajeron semicírculo (únicos en todo el curso). El grupo 1G9 comenzó la actividad unos minutos después puesto que una de las estudiantes no se encontraba bien emocionalmente al inicio de la clase.

7.50 h pido silencio y explico la actividad 2. Hago un dibujo en el pizarrón para aclarar cuál es el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  y cuál el cateto adyacente. Los propios alumnos identifican cada uno de forma intuitiva. No hay problemas para comprender esto último. Indico que realicen las mediciones con la mayor precisión posible, con la explicitación de centímetros y milímetros en cada caso. Continúan trabajando.

En esta parte, me solicitan algo más que antes, especialmente para completar la cuarta columna. Algunos no tienen regla o tienen, pero la graduación en milímetros se encuentra borrada. Presto algunas reglas que había llevado por si esto ocurría. En la recorrida constante por los bancos, hago algunas revisiones y sugerencias cuando noto que obtienen valores descabellados. En el grupo 1G3, una de las estudiantes había intercambiado la información entre las primeras dos columnas, lo cual

llevaba a un resultado incorrecto en la cuarta. En 1G4, una estudiante tenía un error grosero en la construcción del triángulo inicial (ángulo de  $40^\circ$ , en lugar de  $30^\circ$ ). Salvo pequeñas indicaciones de este estilo, no intervengo demasiado. En el grupo 1G5, se puede apreciar prolijidad y alta precisión en las construcciones y mediciones. En cambio, en los grupos 1G2 y 1G6, si bien trabajan durante toda la actividad, lo hacen de forma rápida y sin demasiada preocupación por la calidad de sus producciones. Por ejemplo, construyen triángulos rectángulos en los cuales se aprecia, a simple vista, que los catetos no confluyen en un ángulo recto.

Para las 8.05 h, algunos grupos comienzan a hacerme preguntas relacionadas con la tercera actividad. Entones, pido silencio y destino un momento a explicarla para todo el curso. Comento que la idea, ahora, es que comparen sus resultados con los demás integrantes del grupo y vean si pueden extraer alguna conclusión. Leo las preguntas orientadoras que aparecen en la consigna. Insisto en que puedan dejar por escrito un resumen de ese intercambio.

En este momento, golpean la puerta del salón para llamar a los estudiantes que participan de la ONU, para una reunión con otros cursos. Por ende, cuatro estudiantes se van de la clase. Les pido por favor que luego pidan lo que haremos en el resto de la clase porque es muy importante.

8.20 h damos por finalizada la actividad de cada grupo. Propongo ahora que charlemos entre todos sobre las conclusiones obtenidas. Pregunto qué grupo quiere contar lo que pudo observar de las mediciones. Un estudiante de 1G2 es el primer en levantar la mano y narra que todas las medidas, y también el cociente, les quedaron parecidas. A eso, una estudiante del 1G5 dice que las medidas de los lados de sus triángulos les quedaron “algunos parecidos y otros no tanto” y que la división sí era parecida, pero en algunos. Pregunto si alguien más quiere participar y desde 1G6 un estudiante cuenta que en su grupo obtuvieron 0,47, 0,48 y 0,49 para la división en el primer triángulo. Pregunto a otros grupos que no habían intervenido y comentan cuestiones similares. Todos coinciden en que los resultados de la división son parecidos, aunque hay algunos casos puntuales donde esto no se dio. En 1G9, una de las estudiantes dice que los triángulos contruidos son distintos y que entre dos de ellas tienen resultados similares en la división, mientras que la tercera tiene algunos bastante distintos.

Para guiar la charla hacia la conclusión, continúo: “puede ser que en algunos grupos tengan los triángulos muy parecidos... pero, ¿a qué se debe eso?”. Algunos me dicen que se debe a que el ángulo es el mismo. Sigo: “que el ángulo es el mismo no hay dudas, así tenían que construir sus triángulos, pero ¿eso implica que tengan que ser igual de grandes?”. A esto último me responden que no. Repaso la construcción del triángulo y les hago ver que el triángulo construido podría haber tenido diferentes dimensiones. Por lo tanto, si los resultados en las primeras tres columnas son parecidos, es porque sus construcciones son parecidas. Pero, “¿qué es lo realmente interesante que pasa acá?”. Un estudiante de 1G5 responde “lo que pasa con la última columna”. Concluimos, entonces, que el valor  $\frac{CO_\alpha}{H}$  no depende del triángulo rectángulo construido, solo depende de “el ángulo” (lo mencionan ellos).

Siendo ya las 8.30 h, escribimos la definición del seno de un ángulo. Los estudiantes copian y, luego,

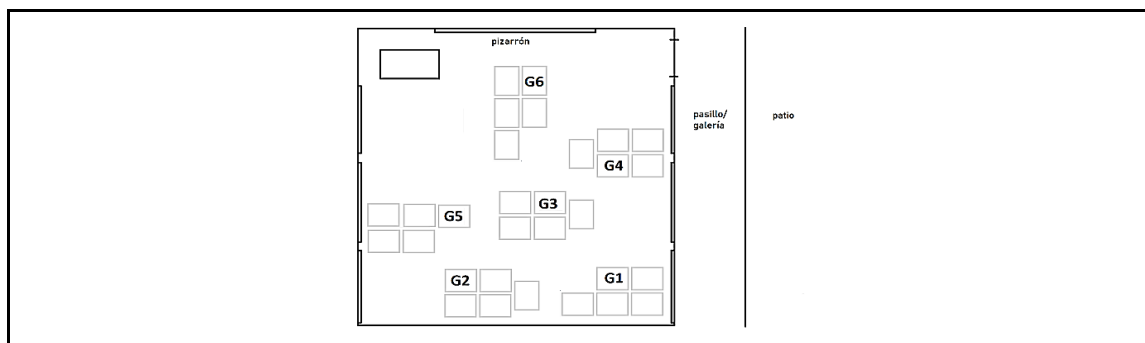
indico que en las columnas vacías coloquen los encabezados  $\frac{CA_{\alpha}}{H}$  y  $\frac{CO_{\alpha}}{CA_{\alpha}}$ . Destino cinco minutos para que puedan completar ahora esas dos columnas. Nuevamente, observamos que los resultados obtenidos son los mismos (aproximadamente) independientemente de los triángulos. Completamos la definición con las razones coseno y tangente de un ángulo.

En los últimos minutos pido que, por grupo, me entreguen dos copias de sus trabajos. Comento que la próxima clase es el jueves y comenzaremos revisando la tarea que había quedado para hoy. Nos despedimos.

Día 7 - Martes 10 de octubre. Horario: 7.30 - 8.50 h. Cantidad de alumnos: 30

Llegué a la institución a las 7.15 h. A las 7.30 h formamos en el patio y el director se toma aproximadamente unos 15 minutos para hacer algunos comentarios a los estudiantes. Habla sobre la recaudación de una jornada que se llevó a cabo el pasado fin de semana y la inversión que se hará con los fondos para la renovación del mobiliario de la escuela. También, anima a los estudiantes a que fortalezcan el estudio en las semanas restantes de clase.

Ingresamos al aula 7.45 h. Luego de presentar a la docente formadora que va a observar la clase, indico que se ordenen en grupos de acuerdo a la disposición prevista. Algunos estudiantes fueron reasignados debido a la ausencia de cuatro de ellos. En esta jornada, son 30 alumnos. Se ubican en el aula de la siguiente manera:



Una vez organizados en sus grupos, indico que, al igual que en la instancia grupal anterior, todos deben escribir en sus carpetas y entregarme un trabajo hacia el final de la clase. Además, comento que esta vez será una competencia y, por lo tanto, habrá un grupo ganador.

Como introducción, les cuento que la intención de esta clase es conocer algo de historia de la Matemática y las grandes aplicaciones que tiene la Trigonometría. De acuerdo a lo planificado, comienzo con las preguntas clave que voy dejando plasmadas en el pizarrón: “¿Qué está más cerca? ¿El Sol o la Luna? ¿Cuál es más grande? ¿Qué tanto más lejos está el Sol de la Luna?”. Todos prestan atención y participan respondiendo mis preguntas. La idea del eclipse surge por parte de ellos (luego de preguntar por algún fenómeno de los astros que nos pueda ayudar), al igual que la respuesta a la segunda pregunta, de manera casi inmediata. Estudiantes de los grupos 2G2 y 2G1 son los principales partícipes en este ida y vuelta. Las fases lunares tardan en aparecer, pero escucho al grupo 2G6

mencionarlo casi por lo bajo. Las dibujo en el pizarrón y propongo centrar la atención en el cuarto creciente. Cuando pregunto por qué vemos la Luna así, un estudiante de 2G4 comenta que se debe a cómo “le da el Sol”. Los estudiantes reconocen rápidamente las posiciones de los astros cuando la Luna se encuentra iluminada de esa manera. Construido el triángulo rectángulo, al preguntar por los datos “accesibles”, surge primero la distancia de la Tierra a la Luna (estudiante de 2G3). Ante esto, recuerdo que nos situamos en el año 300 a.C., lo que nos lleva a descartar la idea, ya que no hay forma de averiguar dicha distancia. La segunda propuesta es el ángulo esperado. Introduzco entonces al personaje de Aristarco de Samos y su estimación de dicho ángulo en  $87^\circ$ . Repito la pregunta clave y, por las dudas, me detengo en aclarar qué entendemos cuando decimos “qué tanto más lejos...”. Menciono que nos referimos si una distancia es “el doble, triple, cuádruple o 10 veces la otra”. Llegado ese momento, les reparto la primera fotocopia. Son las 8.10 h. Comienzan a trabajar.

Las primeras dudas que surgen en los grupos giran en torno a la falta de datos para resolver el problema. Reconocen la similitud con ejercicios trabajados, pero manifiestan la necesidad de conocer la medida de alguno de los lados. La mayoría identifica los elementos del triángulo que interesan para el propósito de la actividad y escriben la medida del ángulo restante:  $3^\circ$ . Pasado unos minutos doy una primera orientación en el frente. Menciono que es verdad que “faltan datos” para conocer la medida de los lados, pero no necesitamos averiguar cuánto miden, sino qué tanto más grande es uno en comparación al otro. Siguen trabajando. El grupo 2G1 es el primero en mostrar buenos avances. En primer lugar, una de las estudiantes había propuesto medir los lados del triángulo para hacer el cociente, a lo cual sus compañeros le insistieron en que eso no servía porque el dibujo era simplemente un esquema. Descartada esa idea, intentan utilizar razones trigonométricas y un estudiante me dice haber llegado al resultado “20 veces” con la calculadora aunque no recuerda bien qué hizo. Lo animo a que recuerde su proceso ya que puede que esté correcto. Otro caso interesante es del grupo 2G2, donde uno de los estudiantes, mientras sus compañeros probaban otras cosas, se encaminó en la construcción con semicírculo y regla de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de  $87^\circ$ . Tuvo que pegar dos hojas de la carpeta para lograrlo. Ese método le permitió estimar una respuesta de “16 veces y media”. Lo felicito por la idea y le propongo que busquen ahora otro método, a partir de las razones trigonométricas y que luego compruebe la precisión de sus mediciones.

El grupo 2G3 reconoce que tienen que utilizar el coseno de  $87^\circ$  pero los integrantes no escriben nada aún. Les propongo que escriban cada idea, independientemente de si luego sirve o no. Ponen, entonces,  $\cos(87^\circ) = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,05 = \frac{CA}{H}$  en sus hojas. Les propongo que piensen en la pregunta que buscamos responder e intenten interpretar esa última igualdad. Los grupos 2G4, 2G5 y 2G6 reconocen también que el coseno es la razón que relaciona los datos conocidos o de interés. Mientras los dos primeros no logran avanzar, el último de ellos hace algo distinto: asignan al cateto el valor 90 y determinan que la hipotenusa mide 1730. Me consultan cómo seguir. La elección del 90 parece haber sido un error derivado de la confusión entre medida de lados y ángulos. Sin embargo, les propongo

que releen la consigna y vean si pueden responder algo a partir de esos números a los que llegaron. Aviso que daré la última pista para esta primera parte de la fotocopia; los grupos 2G1 y 2G2 reniegan de esto último ya que entienden que “van ganando”. Introduzco, entonces, la idea de pensar en la distancia Tierra-Luna como un viaje (escribo el 1 sobre el cateto en el pizarrón). A partir de allí, todos los grupos, más o menos rápido, completan la primera parte, a excepción del grupo 2G5. En este grupo noto que aún no hay un dominio fortalecido de las razones trigonométricas y cuesta el uso de la calculadora. Una estudiante del mismo me dice con cierta desmotivación que “no les sale nada”. Con mi ayuda, completan la primera parte.

La segunda parte no presenta grandes dificultades en general. Los estudiantes notan que se trata, ahora sí, de un ejercicio “como los de antes”, donde no faltan datos. Los grupos 2G1 y 2G2 se apresuran por terminar para ganar la competencia. Casi todos los grupos cometen el error de decir que la aproximación falló en  $2^\circ$ , sin contar los minutos y segundos. Se los hago notar e intento reforzar la utilización del sistema sexagesimal en la calculadora.

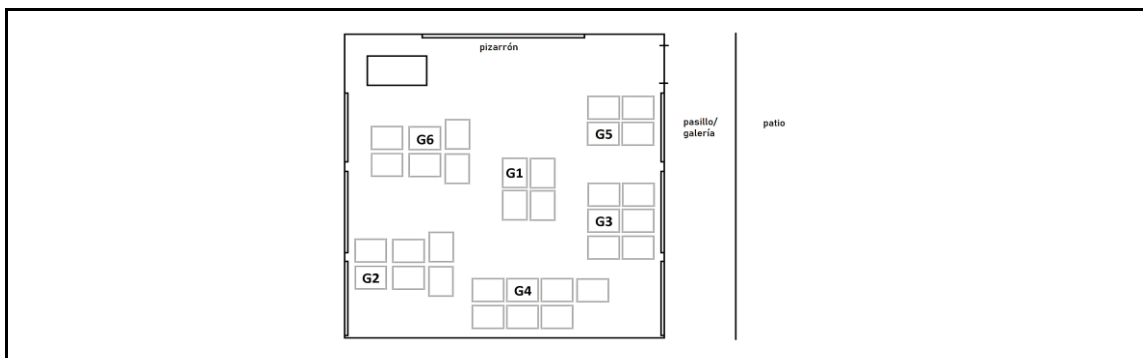
A las 8.40 h, 10 minutos antes de finalizar la clase, les solicito que envíen al delegado del curso un audio por grupo donde comenten cómo fue el intercambio en la resolución del problema: dificultades, ideas aportadas, descartadas, dudas, discusiones, etc. Les comento que la idea del formato audio es que se explayan más que en el formato escrito, como la vez pasada.

Los grupos 2G1 y 2G2 son, entonces, los primeros en terminar la actividad del día y la competencia se define como un empate entre ellos. A recomendación de la docente coformadora, les doy la opción que graben los audios en el patio para que el bullicio no estorbe. Con el timbre del recreo, los grupos que aún tenían que hacerlo, me entregan sus trabajos.

Nos despedimos.

Día 9 - Jueves 19 de octubre. Horario: 11.55 - 13.05 h. Cantidad de alumnos: 33

Ingresamos al aula a las 12 h. Para mi sorpresa, los estudiantes ya se encuentran dispuestos en grupos, de entre cuatro y siete integrantes cada uno. Aprovecho la disposición y les indico que se mantengan de esa forma ya que trabajaremos nuevamente en grupos. Al parecer, trabajaron con la misma modalidad en la materia anterior. Me da la sensación que los grupos fueron armados por ellos mismos, pero con ciertas intervenciones del docente a cargo en ese momento. Decido mantenerlos de esa manera. Se encuentran dispuestos de la siguiente manera:



Antes de comenzar con la actividad del día, propongo que corriamos el ejercicio que había quedado de tarea. Una estudiante se ofrece a pasar y copia su resolución. Como ha ocurrido otras veces, comete el siguiente error en un paso de la resolución de una ecuación:

$$0,53 = \frac{24}{y} \Rightarrow \frac{0,53}{24} = y$$

A partir de allí, arrastra errores al utilizar el teorema de Pitágoras para hallar el lado restante. Repaso su resolución para todo el curso, que escucha atentamente. Me detengo lo necesario en el despeje de la ecuación. También recomiendo, para hallar la medida del lado restante, utilizar razones trigonométricas que relacionen los datos iniciales del ejercicio, y así evitar el arrastre de errores.

A las 12.15 h concluimos la socialización y reparto a cada estudiante una copia del trabajo del día, como así también tres triángulos rectángulos de cartulina por grupo. Leo las consignas de modo general y comienzan a trabajar.

Los estudiantes hallan sin problema y rápidamente los ángulos desconocidos. Respecto a la relación que verifican estos ángulos, a excepción de los grupos 3G2 y 3G3, los demás no entienden qué tipo de respuesta se espera, o a qué se refiere cuando dice “relación”. Reformulaciones como “¿Qué cumplen los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ? ¿Cómo lograron determinar uno a partir del otro?” destrabaron el conflicto. Algo que llamó mi atención es que ningún estudiante recordaba que los ángulos cuyas medidas suman  $90^\circ$  reciben el nombre de complementarios. Es por eso que, muchos de ellos, escribieron la relación directamente como “suman  $90^\circ$ ”.

La completación de la tabla no presentó dificultades. Los estudiantes realizan estas cuentas con calculadora y aproximan los resultados con las primeras dos cifras decimales. Para las 12.30 h, todos los grupos se encuentran pensando en la consigna 2b. Observo los datos que volcaron a las tablas cuando recorro los grupos y todos han hecho bien las cuentas, con los mismos resultados en las columnas correspondientes.

En ese momento, surgieron algunas cuestiones interesantes. Me acerco al grupo 3G1 y uno de los estudiantes se encuentra haciendo cuentas con la calculadora. Le pregunto cómo vienen y me dice que está probando otros ángulos además de los que tenían sus triángulos. Me muestra que, cuando calcula  $\sin(45^\circ)$ , obtiene el mismo resultado que cuando hace  $\cos(45^\circ)$  (caso diferente a los de su tabla). Lo felicito por la búsqueda de más casos y les pregunto a los cuatro integrantes cómo escribirían esa

propiedad que sospechan que es cierta. Al igual que en otros grupos, reconocen todos los elementos en juego para enunciar la propiedad, pero encuentran dificultades para articularlos en una implicancia lógica. Responden con frases como “ $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$  y  $\alpha$  y  $\beta$  suman  $90^\circ$ ”. Al notar esta dificultad, traigo el recuerdo para todo el curso de cuando hablamos acerca de “qué es un teorema”. Algunos estudiantes lo recuerdan y responden que “un teorema es una verdad matemática”. Propongo, entonces, que piensen de ese mismo modo esta actividad; busquemos enunciar una verdad matemática. Menciono el teorema de Pitágoras y la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como ejemplos y los enuncio con énfasis verbal en su estructura: “si pasa ... , entonces pasa ... ”. A partir de allí, la mayor parte de los grupos logra avanzar.

Un estudiante del grupo 3G3 me llama y me pregunta si está bien enunciada la propiedad. Había escrito únicamente: “ $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$  y  $\cos(\alpha) = \text{sen}(\beta)$ ”. Le pregunto “¿Eso pasa siempre? ¿O los ángulos tienen que respetar alguna condición?”. Me responde “si suman  $90^\circ$ ”. Uno de sus compañeros, en un borde de la fotocopia, esboza unos dibujos. Miro con detalle y me encuentro con lo siguiente. El estudiante había asignado los valores 1, 2 y 3 a los lados de un triángulo rectángulo (no es posible pero no importa) y, a partir de las definiciones de seno y coseno, había probado la propiedad conjeturada. Lo felicito y le hago saber que con ese razonamiento había acabado de demostrar un teorema. Sonríe y me agradece.

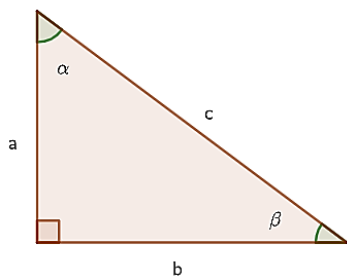
A las 12.45 h con todos los grupos empezamos a pensar el tercer apartado, pido atención y escribo en el pizarrón la propiedad.

|                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Teorema. Si $\alpha$ y $\beta$ son complementarios, entonces $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|

Doy indicaciones para la última parte. Propongo que piensen en las definiciones de seno y coseno. Los estudiantes trabajan unos 10 minutos intentando probar la propiedad. En el grupo 3G6, piensan sobre uno de los triángulos de cartulina, lo cual dificulta abstraerse de las medidas allí explicitadas. Me piden ayuda y les pregunto la definición del seno y coseno. Responden y les propongo que sobre ese triángulo piensen, entonces, cuál es el cateto opuesto y cuál es el cateto adyacente de cada ángulo, el  $\alpha$  y el  $\beta$ . Una de las integrantes exclama “¡Ah ya sé!”, como si hubiese notado cómo proseguir.

Cuando quedan unos cinco minutos para el fin de la clase, pido atención para hacer un cierre en el pizarrón. Escribo, entonces, a partir de ir preguntando y dejándome guiar por los aportes de los estudiantes, la demostración del teorema. Sí propongo nombrar los lados del triángulo como  $a, b, c$  para ordenar la prueba. Participan principalmente integrantes de los grupos 3G1, 3G3 y 3G6.

Teorema. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son complementarios, entonces  $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{CO}_\alpha}{H} = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\text{CA}_\beta}{H} = \frac{b}{c}$$

Entonces,  $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$

Todos copian esta demostración y damos por finalizada la clase. Me entregan una copia por grupo, en la cual pegaron los triángulos con los que trabajaron. Nos despedimos.

## Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Brousseau G. (1994). *Los diferentes roles del maestro en Didáctica de Matemáticas*. Paidós Educador.
- Camelo Bustos, F.J. y Mancera Ortiz, G. (2005). El sentido, una característica importante en las situaciones didácticas y los campos conceptuales: una propuesta metodológica para el aprendizaje de las matemáticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (18), 5-16. <https://doi.org/10.17227/ted.num18-456>
- Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comp.). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Paidós Educador.
- Crippa, A., Chemello, G., Barallobres, G. y Hanfling, M. (2008). *Problemas de la enseñanza de la matemática*. Universidad Nacional de Quilmes.
- Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. McGraw-Hill.
- Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.
- Larios Osorio, V. (2003). Si no demuestro... ¿enseño Matemática? *Educación Matemática*, 15(2), 163-178. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515207>
- Mántica, A.M. y Carbó, A.L. (2016). Estudio de procesos de formulación y validación de conjeturas con estudiantes de secundaria en interacción con pares. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(48). <http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/528>
- McLeod, D.B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp.245-258). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6>
- Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada*. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf>
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2da Ed.). Princeton Univeversity Press.
- Radford, L. (2023). ¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas? *Μαθηματικά: Epistemología e Educação*, 1(0). <https://doi.org/10.51359/2965-1794.2023.257280>
- Richardson, F.C. y Suinn, R.M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, 19(6), 551-554. <https://doi.org/10.1037/h0033456>
- Vicuña Valdés, M. (2016). *Teoría de situaciones didácticas en la enseñanza de la geometría: Criterios de congruencia de triángulos*. [Tesis de pregrado]. Universidad Alberto Hurtado. <http://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/23973>